Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

ALIKSON NASCIMENTO DE AZEVEDO

Média Ponderada: interpretação geométrica e relações com outras médias

Maio/2023
Itabaiana - SE

Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Média Ponderada: interpretação geométrica e relações com outras médias

por

Alikson Nascimento de Azevedo

sob orientação do

Prof. Dr. Alejandro Caicedo Roque

Dissertação de mestrado submetida ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Maio/2023
Itabaiana - SE

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Média Ponderada: Interpretação Geométrica e Relações com outras Médias

por

Alikson Nascimento de Azevedo

Aprovada pela Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br ALEJANDRO CAICEDO ROQUE
Data: 19/07/2023 15:46:28-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alejandro Caicedo Roque - UFS
Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br SAMUEL BRITO SILVA
Data: 22/07/2023 17:52:19-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Samuel Brito Silva - UFS
Primeiro Examinador

Documento assinado digitalmente
gov.br IVES LIMA DE JESUS
Data: 20/07/2023 10:55:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ives Lima, de Jesus - IFBA
Segundo Examinador

Itabaiana, 30 de maio de 2023.

Cidade Universitária “Prof. José Aloísio de Campos” – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: profmat@academico.ufs.br

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

A994m

Azevedo, Alikson Nascimento de.
Média ponderada : interpretação geométrica e relações com outras médias / Alikson Nascimento de Azevedo ; orientador Alejandro Caicedo Roque. – São Cristóvão, SE, 2023.
81f. ; il.

Dissertação (mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2023.

1. Média ponderada. 2. Média aritmética. 3. Geometria. I. Caicedo Roque, Alejandro, orient. II. Título.

CDU 514.1

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado saúde e forças para superar as dificuldades. Graças a ele consegui concluir essa etapa, que considero ser a mais importante da minha vida.

Ao meu amor, Maíra Dantas Silva, pelo carinho, companheirismo, incetivo e paciência. Sei que não mediu esforços para me ver mestre.

A minha vó, Josefa do Carmo *(in memoriam)*, que sempre me apoiou nas minhas decisões e me incentivou a concluir todos os projetos que comecei. Sou grato pelos diversos ensinamentos e por sempre ter me mostrando os valores dignos e honrosos. Tenho absoluta certeza que de onde estiver está orgulhosa de mim.

Aos meu pais, Carlos Augusto Alves de Azevedo e Maria de Fátima Rodrigues do Nascimento *(in memoriam)*, por terem dedicado suas vidas na educação de seus filhos. Sou grato por cada ensinamento, por sempre terem acreditado em mim. Sei que estão orgulhosos. Eu os amarei para sempre!

Também estendo minha gratidão à Universidade Federal de Sergipe - UFS, ao Departamento de Matemática de Itabaiana - DMAI.

Aos professores do PROFMAT, pelo conhecimento adquirido ao longo deste curso, em especial aos professores: Dr. Alejandro Caicedo Roque, Me. Wagner Ferreira Santos, Dr. Éder Mateus de Souza, Dr. Fábio Lima Santos, Me. Samuel Brito Silva e Dra. Marta Élid Amorim Mateus.

Por fim, quero agradecer ao meu orientador, Professor Dr. Alejandro Caicedo Roque, pelas proeminentes orientações dessa dissertação, pela paciência, pelas correções e pelos incentivos. Sinto-me lisonjeado por ter sido seu orientando. O sentimento que fica é orgulho.

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos uma interpretação geométrica das médias: Aritmética, Geométrica, Harmônica, Quadrática e a raiz harmônica média quadrada de dois números positivos e uma generalização dessas médias no círculo. Em seguida, consideramos uma interpretação geométrica da Média Ponderada e sua relação com as outras médias. Apresentaremos também uma análise feita por Pappus de Alexandria sobre a construção geométrica das médias: Aritmética, Geométrica e Harmônica. Em seguida, estudamos uma função geradora de média e uma interpretação geométrica da média ponderada no trapézio e no retângulo. Finalmente apresentamos algumas aplicações práticas da média no último capítulo e um resultado complementar no apêndice.

Palavras-chave: Média Ponderada; Média aritmética; Média geométrica; Média Harmônica; Média quadrática; interpretação geométrica de uma média.

Abstract

In this work, we will present a geometric interpretation of the means: Arithmetic, Geometric, Harmonic, Quadratic and the harmonic root mean square of two positive numbers and a generalization of these means in the circle. Next we consider a geometric interpretation of the Weighted Average and its relationship to the other averages. We will also present an analysis made by Pappus of Alexandria on the geometric construction of means: Arithmetic, Geometric and Harmonic. Next, we studies an mean generating function and a geometric interpretation of the Weighted mean on the trapezoid and in a rectangle. Finally, we present some practical applications of the mean in the last chapter and a complementary result in the appendix.

Keywords: Weighted Mean; Arithmetic mean; Geometric Mean; Harmonic Mean; Quadratic Mean; geometric interpretation of a mean.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Notações

Notações Gerais

1. Média Aritmética de a e b - $A(a, b)$
2. Média Geométrica de a e b - $G(a, b)$
3. Média Harmônica de a e b - $H(a, b)$
4. Média Quadrática de a e b - $Q(a, b)$
5. Média Anti-Harmônica de a e b - $AH(a, b)$
6. Raiz média dos quadrados de a e b - $R_{-n}(a, b)$

Introdução

As médias são medidas estatísticas que são utilizadas há muito tempo para descrever e analisar conjuntos de dados. Segundo BUSSAB e MORETTIN (2017), as médias surgiram na antiguidade com o objetivo de se obter um valor representativo de um conjunto de dados. Desde então, as médias foram aprimoradas e utilizadas em diversas áreas do conhecimento. Um ponto importante é como interpretar geometricamente as médias. Existem várias interpretações geométricas para as médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática. No entanto, há limitações quando se fala em interpretação geométrica da média Ponderada, pois, diferente das demais médias, ela trabalha com quatro medidas diferentes, enquanto as outras médias trabalham somente com duas.

Por volta de 300 d.C. viveu em Alexandria um grande matemático: Pappus de Alexandria, que foi o responsável por uma das primeiras obras nas quais se interpretou geometricamente as médias. Pappus, em 320 d.C., conseguiu dar uma interpretação geométrica em um semicírculo das médias: Aritmética, Geométrica e Harmônica, em sua obra denominada *Coleção Matemática*, Livro III, seção 2. (ver EVES [7], pág. 226).

A Base Nacional Curricular Comum - BNCC (ver [3]), documento mais recente que norteia a educação brasileira no âmbito do ensino fundamental, traz consigo competências e habilidades para que os estudantes compreendam, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados, além de resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de médias ponderadas em contextos diversos, como economia, física, química e outras áreas (ver [3], pág. 309). Na geometria, a BNCC aborda habilidades para resolver problemas envolvendo cálculo de áreas, volumes e outras grandezas relacionadas a figuras geométricas em diferentes contextos, assim como identificar e utilizar os conceitos de simetria, congruência e semelhança em figuras planas e espaciais. Neste trabalho, apresentaremos algumas interpretações geométricas das médias, ou seja, resolver problemas de geometria usando a ideia de média e problemas de médias aplicando conceitos de geometria.

No Capítulo 1, apresentaremos alguns conceitos preliminares, como as definições de médias e as propriedades que tornam uma expressão uma média. Já no Capítulo

2, mostraremos a construção geométrica das Médias Aritmética, Geométrica e Harmônica realizada por Pappus de Alexandria em 320 d.C..Além dessa construção, apresentaremos também interpretações de cinco médias no círculo e uma generalização. Também apresentaremos problemas para construir um quadrado equivalente a um retângulo preservando algumas características. Para finalizar o Capítulo 2, apresentaremos uma função geradora de médias e no Capítulo 3, mostraremos uma forma de construir um cubo equivalente a um paralelepípedo, preservando algumas características sistematicamente como no Capítulo 2.

Para concluir, exibiremos a interpretação geométrica da média ponderada, que possui poucas publicações na literatura, além de mostrarmos que todas as outras médias são casos particulares dela por meio da razão de pesos. Algumas aplicações de médias são encontradas no Capítulo 5, afim de contextualizar a teoria apresentada.

Capítulo 1

Preliminares

Uma ideia que chama bastante atenção é a da média. De acordo com LIMA([14], pág. 138), uma *média* de uma certa quantidade de números é um valor que pode substituir todos os valores dessa lista sem alterar algumas características. Conforme cada uma dessas características, definiremos cada uma das médias.

Definição 1.1 (Média Aritmética) *Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ uma lista de n números reais, sendo $\widetilde{a}$ a média destes valores. Tomando a soma como uma das características, podemos trocar cada um dos valores a_i, com $i = 1, 2, \cdots, n$ por $\widetilde{a}$, da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \widetilde{a} + \widetilde{a} + \cdots + \widetilde{a} \\ &= n\widetilde{a}, \end{aligned}$$

daí

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \widetilde{a}.$$

Portanto, $\widetilde{a} = A(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ é a média aritmética da lista de números $a_1, a_2, ..., a_n$.

Definição 1.2 (Média Geométrica) *Sejam $g_1, g_2, \cdots, g_n$ uma lista de n números reais positivos, sendo $\widetilde{g}$ a média destes valores. Tomando a multiplicação como uma característica, trocando cada um dos valores g_i, com $i = 1, 2, \cdots, n$ por $\widetilde{g}$, da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_n &= \widetilde{g} \cdot \widetilde{g} \cdots \widetilde{g} \\ &= \widetilde{g}^n, \end{aligned}$$

logo

$$\sqrt[n]{g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_n} = \widetilde{g}.$$

Assim, $\widetilde{g} = G(g_1, g_2, \cdots, g_n) = \sqrt[n]{g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_n}$ *é a média geométrica da lista de números* $g_1, g_2, ..., g_n$.

Uma observação a ser feita é que os números g_i, com $i = 1, 2, \cdots, n$, fazem sentido se forem positivos. Dessa forma, não corre o risco de não existir a média geométrica.

Por exemplo, qual seria a média geométrica de $g_1 = 3$ e $g_2 = -3$? Nesse caso não está definido, pois $\widetilde{g} = G(3, -3) = \sqrt{3 \cdot (-3)} = \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$.

Definição 1.3 (Média Harmônica) *Sejam* $h_1, h_2, \cdots, h_n$ *uma lista de* n *números reais positivos, sendo* $\widetilde{h}$ *a média destes valores. Escolhendo a soma dos inversos como uma característica, trocando cada um dos valores* h_i*, com* $i = 1, 2, \cdots, n$ *por* $\widetilde{h}$*, da seguinte forma:*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots + \frac{1}{h_n} &= \frac{1}{\widetilde{h}} + \frac{1}{\widetilde{h}} + \cdots + \frac{1}{\widetilde{h}} \\
&= \frac{n}{\widetilde{h}}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{n}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots + \frac{1}{h_n}} = \widetilde{h},
$$

Por conseguinte, $\widetilde{h} = H(h_1, h_2, \cdots, h_n) = \frac{n}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots + \frac{1}{h_n}}$ *é a média harmônica da lista* $h_1, h_2, ..., h_n$.

Observe que definimos a média harmônica para valores positivos, pois, a depender dos números nem sempre existe a média harmônica. Por exemplo, para $h_1 = 5$ e $h_2 = -5$ a média harmônica é $\widetilde{h} = H(5, -5) = \frac{2}{\frac{1}{5} + \frac{1}{-5}} = \frac{2}{\frac{5-5}{25}} = \frac{2}{0}$, que não está definido.

Definição 1.4 (Média Quadrática) *Sejam* $r_1, r_2, \cdots, r_n$ *uma lista de* n *números reais, sendo* $\widetilde{r}$ *a média destes valores. Tomando a soma dos quadrados dos números como uma característica, podemos trocar cada um dos valores* r_i*, com* $i = 1, 2, \cdots, n$ *por* $\widetilde{r}$*, da seguinte forma:*

$$
\begin{aligned}
r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 &= \widetilde{r}^2 + \widetilde{r}^2 + \cdots + \widetilde{r}^2 \\
&= n\widetilde{r}^2,
\end{aligned}
$$

logo

$$
\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2}{n}} = \widetilde{r}.
$$

Desse modo, $\widetilde{r} = Q(r_1, r_2, \cdots, r_n) = \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2}{n}}$ *é a média quadrática da lista de números* $r_1, r_2, ..., r_n$.

Em particular, neste trabalho denotaremos o cálculo das médias para dois números reais quaisquer a e b, a *Média Aritmética* $A(a, b)$, a *Média Geométrica* $G(a, b)$, a *Média Harmônica* $H(a, b)$ e a *Média Quadrática* $Q(a, b)$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} A(a,b) = \dfrac{a+b}{2} \\ G(a,b) = \sqrt{a \cdot b} \\ H(a,b) = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \dfrac{2 \cdot a \cdot b}{a+b} \\ Q(a,b) = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \end{cases}$$

Essas quatro expressões possuem três propriedades fundamentais, que de fato as caracterizam como médias MAOR(ver [16], pág. 20).

1. A média é menor que o maior dos valores entre a e b e maior que o menor entre a e b.

2. A média é igual a a quando $a = b$.

3. A média é uma expressão homogênea em a e b; isto é, se multiplicarmos a e b por um fator de escala t, então a média também será multiplicada por t. Assim, os valores de todas as médias devem ser invariantes sob uma mudança de escala.

Ser invariante sob uma mudança de escala significa que uma propriedade ou medida matemática permanece a mesma, independentemente da escolha da unidade de medida ou da escala utilizada para representar os dados (ver referência [5], pág. 9).

Essas três propriedades são essenciais para qualquer expressão que caracteriza uma média. A seguir, mostraremos que as médias, aritmética, geométrica, harmônica e quadrática satisfazem essas três propriedades fundamentais.

- **Média Aritmética**

  1. Considere $a \leq b$. Dessa forma, adicionando o número a em ambos os lados da desigualdade, obtemos $a + a \leq a + b$. Logo, $a \leq \frac{a+b}{2}$. De maneira análoga, adicionando o número b em ambos os lados da desigualdade $a \leq b$, temos $a + b \leq b + b$, ou seja, $\frac{a+b}{2} \leq b$. Portanto, $a \leq A(a, b) \leq b$.

2. Considere $a = b$. Daí,

$$A(a,b) = A(a,a) = \frac{a+a}{2} = \frac{2 \cdot a}{2} = a.$$

Portanto, a Média Aritmética é igual ao número a quando $a = b$.

3. Tomando $a \cdot t$ e $b \cdot t$ com $t \in \mathbb{R}_+$, temos que a média aritmética de $a \cdot t$ e $b \cdot t$ é

$$A(a \cdot t, b \cdot t) = \frac{a \cdot t + b \cdot t}{2} = t \cdot \frac{a+b}{2} = t \cdot A(a,b).$$

Portanto, os valores da média aritmética são invariantes sob uma mudança de escala.

- **Média Geométrica**

1. Considere $0 \leq a \leq b$. Dessa forma, multiplicando o número a em ambos os lados da desigualdade, obtemos $a \cdot a \leq a \cdot b$. Daí, $a^2 \leq a \cdot b$, ou seja, $a \leq \sqrt{a \cdot b}$. Analogamente, multiplicando a desigualdade $a \leq b$ pelo número b, segue que $a \cdot b \leq b \cdot b$. Daí, $a \cdot b \leq b^2$, ou seja, $\sqrt{a \cdot b} \leq b$. Portanto, $a \leq G(a,b) \leq b$.

2. Considere $a = b$. Daí,

$$G(a,b) = G(a,a) = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a^2} = a.$$

Portanto, a média geométrica é igual ao número a quando $a = b$.

3. Tomando $a \cdot t$ e $b \cdot t$ com $t \in \mathbb{R}_+$, temos que a média geométrica de $a \cdot t$ e $b \cdot t$ é

$$G(a \cdot t, b \cdot t) = \sqrt{(a \cdot t) \cdot (b \cdot t)} = \sqrt{t^2 \cdot a \cdot b} = t \cdot \sqrt{a \cdot b} = t \cdot G(a,b).$$

Portanto, os valores da média geométrica são invariantes sob uma mudança de escala.

- **Média Harmônica**

1. Considere $0 \leq a \leq b$. Dessa forma, adicionando o número a em ambos os lados da desigualdade, obtemos $2 \cdot a \leq a + b$. Fazendo a multiplicando desta desigualdade pelo número b, temos que $2 \cdot a \cdot b \leq b \cdot (a + b)$. Daí, $\frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b} \leq b$. De maneira análoga, adicionando o número b na desigualdade $a \leq b$, temos que $a + b \leq 2 \cdot b$ e multiplicando esta desigualdade por a, segue que $a \cdot (a+b) \leq 2 \cdot a \cdot b$, ou seja, $a \leq \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$. Portanto, $a \leq H(a,b) \leq b$.

2. Considere $a = b$. Daí,

$$H(a,b) = H(a,a) = \frac{2 \cdot a \cdot a}{a + a} = \frac{2 \cdot a^2}{2 \cdot a} = a.$$

Portanto, a média harmônica é igual ao número a quando $a = b$.

3. Tomando $a \cdot t$ e $b \cdot t$ com $t \in \mathbb{R}_+$, $t \neq 0$, temos que a média harmônica de $a \cdot t$ e $b \cdot t$ é

$$H(a \cdot t, b \cdot t) = \frac{2 \cdot (a \cdot t) \cdot (b \cdot t)}{a \cdot t + b \cdot t} = \frac{t^2 \cdot 2 \cdot a \cdot b}{t \cdot (a + b)} = t \cdot \frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b} = t \cdot H(a,b).$$

Portanto, os valores da média harmônica são invariantes sob uma mudança de escala.

- **Média Quadrática**

1. Considere $0 \leq a \leq b$. Daí, $a^2 \leq b^2$. Adicionando a^2 em ambos os lados da desigualdade $a^2 \leq b^2$, temos que $a^2 + a^2 \leq a^2 + b^2$. Logo, $2 \cdot a^2 \leq a^2 + b^2$, ou seja, $a \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. De maneira análoga, adicionando b^2 na desigualdade $a^2 \leq b^2$, temos que $a^2 + b^2 \leq b^2 + b^2$. Segue que $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b$. Portanto, $a \leq Q(a,b) \leq b$.

2. Considere $a = b$. Daí,

$$Q(a,b) = Q(a,a) = \sqrt{\frac{a^2 + a^2}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot a^2}{2}} = \sqrt{a^2} = a.$$

Portanto, a média quadrática é igual ao número a quando $a = b$.

3. Considerando $a \cdot t$ e $b \cdot t$ com $t \in \mathbb{R}_+$, temos que a média quadrática de $a \cdot t$ e $b \cdot t$ é

$$Q(a \cdot t, b \cdot t) = \sqrt{\frac{(a \cdot t)^2 + (b \cdot t)^2}{2}} = \sqrt{t^2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = t \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Portanto, os valores da média quadrática são invariantes sob uma mudança de escala.

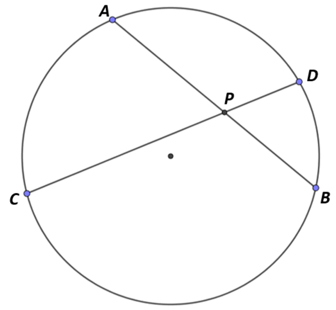
1.1 Relações Métricas na Circunferência

Nesta seção, enunciaremos e demonstraremos algumas relações métricas na circunferência, a saber, a relação entre cordas, entre secantes, entre tangente e secante na circunferência (ver referencias [19] e [8]).

Ao longo do trabalho denotaremos um segmento de reta por AB e seu comprimento por $\overline{AB}$.

Teorema 1.1 (Relação entre cordas) *Sejam AB e CD duas cordas que se intersectam no ponto P conforme a Figura 1.1, então* $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$

Figura 1.1: Relação entre cordas



Fonte: Autor.

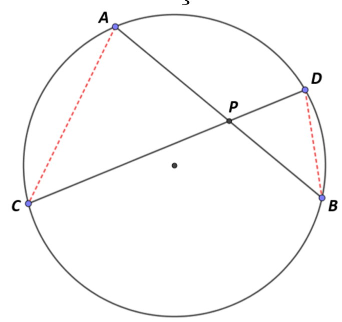
Demonstração: Construímos segmentos conectando o ponto A ao ponto C, e o ponto B ao ponto D como mostrado na figura 1.2. Note que, os triângulos $\triangle APC$ e $\triangle BPD$ são semelhantes. De fato, os ângulos $\angle APC$ e $\angle DPB$ são congruentes por serem opostos ao vértice P. Além disso, os ângulos $\angle A$ e $\angle D$ são congruente, pois subtendem o mesmo arco. Portanto, pelo caso ângulo-ângulo (AA) garante a semelhança dos triângulos. Como os triângulo são semelhantes, então temos a proporcionalidade dos lados,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{BP}},$$

daí

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$$

Figura 1.2: Relação entre cordas



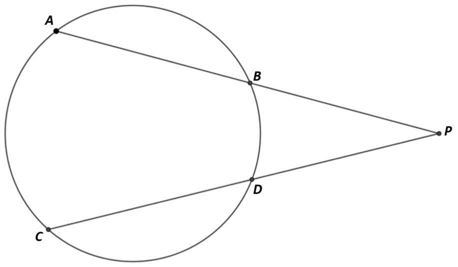
Fonte: Autor.

■

Teorema 1.2 (Relação entre secantes) *Seja P um ponto fora do círculo e A, B, C e D pontos do círculo tais que os segmentos AP e CP são secantes, então*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

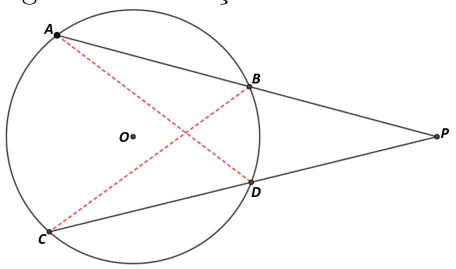
Figura 1.3: Relação entre secantes



Fonte: Autor.

Demonstração: Construímos segmentos conectando o ponto A ao ponto D, e o ponto B ao ponto C como mostrado na figura 1.4.

Figura 1.4: Relação entre secantes



Fonte: Autor.

Os triângulos $\triangle APD$ e $\triangle BPC$ são semelhantes. De fato, o ângulo $\angle P$ é comum aos dois triângulos. Os ângulos $\angle A$ e $\angle C$ são congruentes pois subtendem o mesmo arco. Portanto, pelo caso de semelhança de triângulos AA, tem-se a afirmação. Dessa forma, pela proporcionalidade dos lados, temos que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{BP}},$$

ou seja,

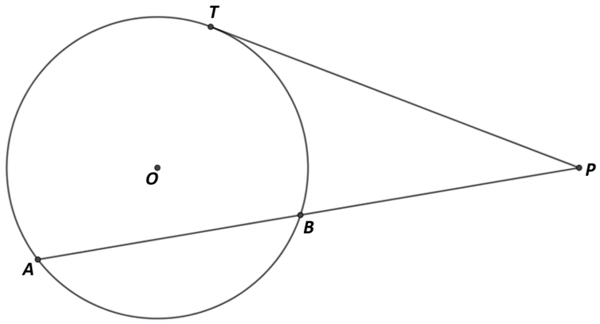
$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$$

■

Teorema 1.3 (Relação entre secante e tangente) *Seja P um ponto fora do círculo e T, A e B são pontos tais que o segmento PT é tangente e PA é secante, então*

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

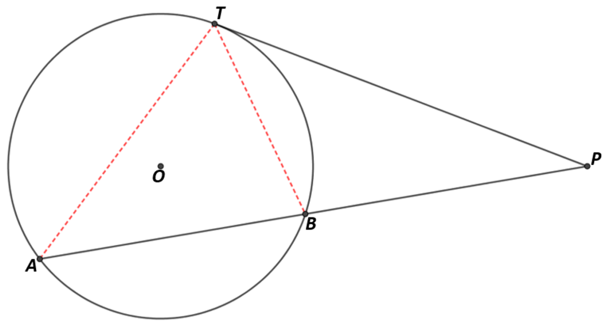
Figura 1.5: Relação entre Secante e Tangente



Fonte: Autor.

Demonstração: Construímos os segmentos AT e BT conforme a figura 1.6.

Figura 1.6: Relação entre Secante e Tangente



Fonte: Autor.

Considerando os triângulos $\triangle APT$ e $\triangle BPT$, note que eles são semelhantes. De fato, o ângulo $\angle P$ é comum aos dois triângulos. Além disso, os ângulos $\angle A$ e $\angle T$ dos triângulos $\triangle APT$ e $\triangle BPT$ respectivamente são congruentes, pois

$$\begin{cases} \angle A = \frac{\widehat{BT}}{2}, & \text{se } \angle A \text{ é ângulo inscrito} \\ \angle T = \frac{\widehat{BT}}{2}, & \text{se } \angle T \text{ é ângulo de segmento} \end{cases}$$

Agora, pela semelhança dos triângulos, temos que

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PB}},$$

portanto,

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

■

Capítulo 2

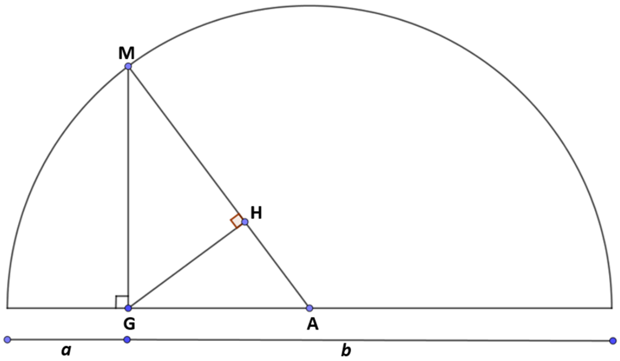
Algumas Interpretações Geométricas das Médias no $\mathbb{R}^2$

2.1 Interpretação geométrica na circunferência das médias: Aritmética, Geométrica e Harmônica

Segundo BOYER, (1968), Pappus de Alexandria reivindicou para si a prova de uma construção geométrica realizada por um geômetra anônimo grego sobre as três médias em uma circunferência no ano 320 d.C., dessa forma é possível visualizar geometricamente a relação $A(a,b) \geq G(a,b) \geq H(a,b)$ (para mais detalhes, ver referência [2], pág. 166).

A seguir apresentamos duas construções conhecidas para representar as médias geométricas na circunferência, na primeira delas consideramos um ponto M sobre a circunferência e na segunda construção consideramos o ponto M externo a circunferência , ver as figuras 2.1 e 2.3. As figuras apresentam as relações entre as médias Aritmética $A(a,b)$, Geométrica $G(a,b)$ e a Harmônica $H(a,b)$ de dois números reais positivos a e b.

Figura 2.1: M pertence a semicircunferência



Fonte: Autor.

Sejam a e b dois números, tal que $0 \leq a \leq b$, denotemos com as mesmas letras os segmentos associados aos dois números, respetivamente; justapondo sobre uma reta os segmentos a e b, eles determinam o diâmetro da semicircunferência (figura 2.1). O ponto A é o ponto médio do segmento $a+b$. Traçamos uma circunferência de centro em A. É possível interpretarmos geometricamente as *médias Aritmética, Geométrica e Harmônica* destes dois números.

De fato, $\overline{MA}$ é uma Média Aritmética, pois o diâmetro do circunferência é $a+b$ e o raio é justamente $\frac{a+b}{2}$, portanto $\overline{MA} = \frac{a+b}{2} = A(a,b)$. Por outro lado, note que $\overline{GA} = \frac{a+b}{2} - a$, ou seja, $\overline{GA} = \frac{b-a}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle GAM$ as seguintes equações são equivalentes

$$\begin{aligned}
\overline{MA}^2 &= \overline{MG}^2 + \overline{GA}^2, \\
\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &= \overline{MG}^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \\
\frac{a^2+2ab+b^2}{4} &= \overline{MG}^2 + \frac{b^2-2ab+a^2}{4},
\end{aligned}$$

daí

$$\overline{MG}^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{b^2-2ab+a^2}{4} = \frac{a^2+2ab+b^2-b^2+2ab-a^2}{4},$$

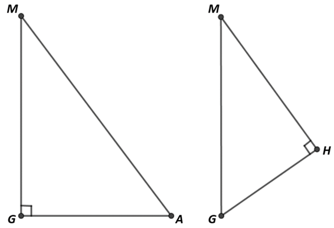
portanto

$$\overline{MG} = \sqrt{a \cdot b}.$$

Logo, $\overline{MG}$ é uma Média Geométrica de a e b, ou seja, $\overline{MG} = G(a,b)$.

Para garantir que $\overline{MH}$ é uma média harmônica, é preciso notar, inicialmente, que $\triangle GAM$ é semelhante ao $\triangle HGM$. De fato, isso é verdade pelo caso de semelhança AA, veja a Figura 2.2:

Figura 2.2: Semelhança dos triângulos GAM e GHM



Fonte: Autor.

Note que $\angle M$ é comum $\triangle GAM$ e $\triangle HGM$. Além disso, $\angle MGA$ e $\angle MHG$ são ângulos retos. Portanto, pelo caso AA, segue que $\triangle GAM \sim \triangle GHM$. Assim pela semelhança dos triângulos os seguintes lados são proporcionais

$$\frac{\overline{MG}}{\overline{MH}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MG}},$$

daí

$$\overline{MH} \cdot \overline{MA} = \overline{MG}^2,$$

segue-se

$$\overline{MH} = \frac{\overline{MG}^2}{\overline{MA}} = \frac{\left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{a \cdot b}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2a \cdot b}{a+b}.$$

Desse modo, $\overline{MH}$ é uma interpretação geométrica da Média Harmônica, ou seja, $\overline{MH} = H(a,b)$.

No $\triangle GAM$, o lado MA é a hipotenusa, portanto é o maior lado deste triângulo. Com isso, temos que $\overline{MA} \geq \overline{MG}$. Por outro lado, no $\triangle HGM$ o lado MG é a hipotenusa, ou seja, é o maior lado deste triângulo. Isto implica que $\overline{MG} \geq \overline{MH}$. Assim, concluímos que $\overline{MA} \geq \overline{MG} \geq \overline{MH}$.

Outra forma de relacionar essas médias é através de trigonometria no triângulo retângulo. Na Figura 2.2, denotemos o ângulo $\angle A$ por α, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Além disso, é fácil ver que o $\angle MGH$ também é α. Aplicando seno nos triângulos retângulos $\triangle GAM$ e $\triangle GHM$, obtemos no $\triangle GAM$

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{MG}}{\overline{MA}},$$

então

$$\begin{aligned} \overline{MA} \cdot sen(\alpha) &= \overline{MG} \\ A(a,b) \cdot sen(\alpha) &= G(a,b). \end{aligned} \tag{2.1}$$

De maneira análoga no $\triangle GHM$, segue que

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{MH}}{\overline{MG}},$$

daí

$$\begin{aligned} \overline{MG} \cdot sen(\alpha) &= \overline{MH} \\ G(a,b) \cdot sen(\alpha) &= H(a,b). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Substituindo a equação (2.1) na equação (2.2), obteremos

$$\begin{aligned} H(a,b) &= A(a,b) \cdot sen(\alpha) \cdot sen(\alpha) \\ &= A(a,b) \cdot sen^2(\alpha). \end{aligned}$$

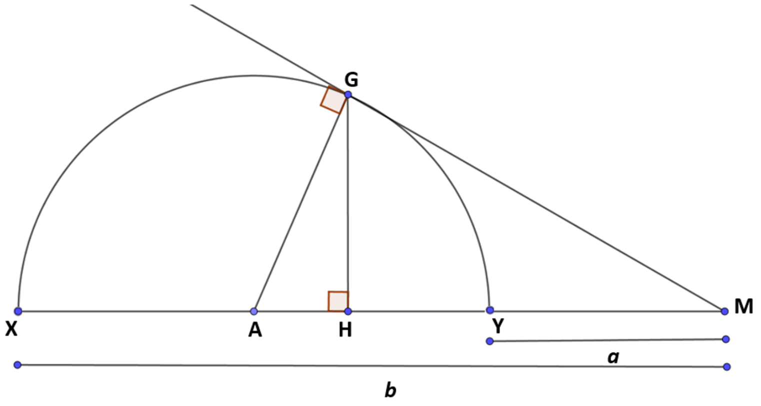
Ou seja, é possível encontrar as *médias Aritmética, Geométrica e Harmônica* em função do $sen(\alpha)$ e como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então as equações estão bem definidas.

$$\begin{cases} A(a,b) = \dfrac{1}{sen(\alpha)} \cdot G(a,b) \\ G(a,b) = \dfrac{1}{sen(\alpha)} \cdot H(a,b) \\ H(a,b) = A(a,b) \cdot sen^2(\alpha) \end{cases}$$

A segunda construção geométrica para interpretarmos geometricamente as médias *Aritmética*, *Geométrica* e *Harmônica* é a seguinte.

Sejam $b = \overline{XM}$ e $a = \overline{YM}$ números quaisquer e seus segmentos correspondentes dispostos como na Figura 2.3. No segmento XY consideremos seu ponto médio A, note que $\overline{XY} = b - a$ e que $\overline{AY} = \frac{b-a}{2}$. Tracemos a circunferência com centro em A e raio $\overline{AY}$. Observe que, o ponto M é externo à circunferência de diâmetro $\overline{XY} = b - a$. Primeiramente, traçamos uma semirreta MG tangente à circunferência no ponto G e passando pelo ponto M. Note que o raio $\overline{AG}$ e a tangente MG são perpendiculares em G.

Figura 2.3: M é ponto exterior à semicircunferência.



Fonte: Autor.

Assim temos que o comprimento $\overline{MG}$ é a Média Geométrica de a e b. De fato, usando a relação métrica da circunferência encontrada no Teorema 1.3, temos que

$$\overline{MG}^2 = \overline{MX} \cdot \overline{MY} = b \cdot a,$$

então

$$\overline{MG} = \sqrt{a \cdot b}.$$

Dessa forma, $\overline{MG}$ é uma interpretação geométrica da *Média Geométrica.*

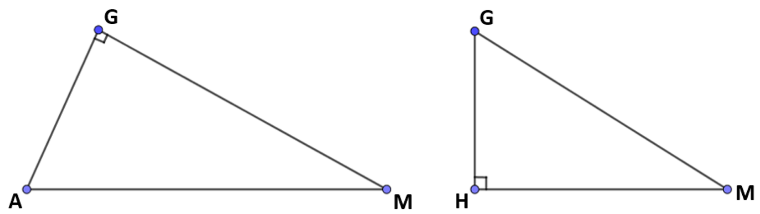
De outro lado, também podemos escrever o segmento MA da seguinte forma

$$\overline{MA} = \overline{MY} + \overline{YA} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Logo, $\overline{MA}$ é uma interpretação geométrica da *Média Aritmética.*

Para a Média Harmônica, como feito anteriormente, note que os triângulos $\triangle GAM$ e $\triangle HGM$ são semelhantes.

Figura 2.4: Semelhança dos triângulos GAM e HGM



Fonte: Autor.

De fato, o ângulo $\angle M$ é comum aos dois triângulos e os ângulos $\angle G$ do $\triangle GAM$ e $\angle H$ do $\triangle HGM$ são ângulos retos. Portanto, pelo caso de semelhança AA, segue que $\triangle GAM \sim \triangle HGM$. Assim, da semelhança dos triângulos $\triangle GAM$, $\triangle HGM$ os seguintes lados são proporcionais

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MG}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{MH}},$$

logo

$$\overline{MH} \cdot \overline{MA} = (\overline{MG})^2,$$

daí

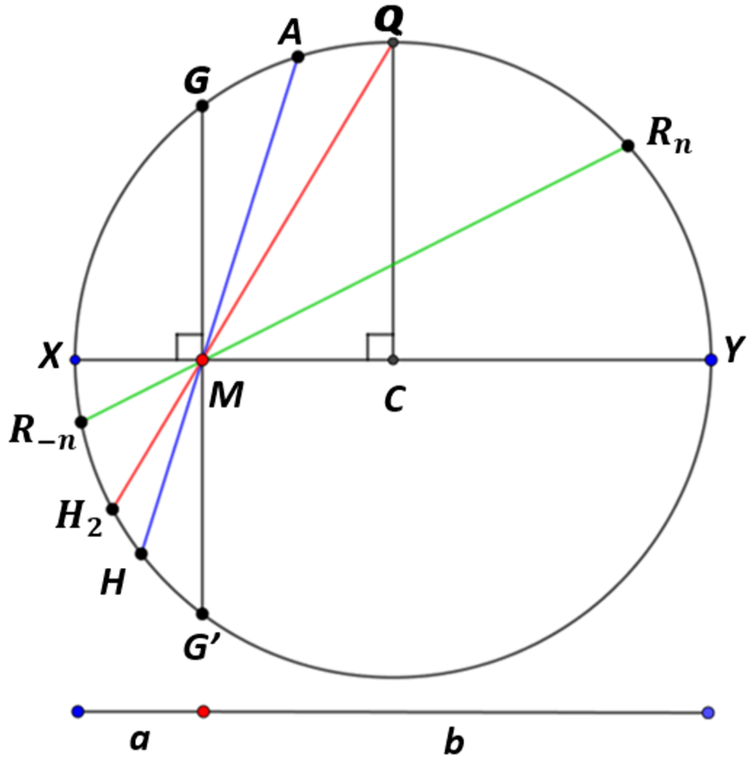
$$\overline{MH} = \frac{\overline{MG}^2}{\overline{MA}} = \frac{(\sqrt{a \cdot b})^2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2a \cdot b}{a+b}.$$

2.2 Interpretação Geométrica de Cinco médias na Circunferência

Nesta seção apresentaremos interpretações geométricas de cinco médias feitas em uma circunferência segundo MAOR (ver [15], pág. 29). Primeiramente, detalharemos a construção de cada uma das médias.

Com efeito, dados dois segmentos de comprimento a e b tal que $0 \leq a \leq b$, tracemos uma circunferência de centro C e diâmetro $\overline{XY} = a + b$. Observemos que na Figura 2.5 o segmento CQ corresponde com o raio da circunferência. Seja M no diâmetro, o ponto em comum entre os dois segmentos de comprimento $a = \overline{XM}$ e $b = \overline{MY}$. Tracemos o segmento GG' perpendicular ao diâmetro XY no ponto M. Seja o ponto A na semicircunferência superior tomando MA com igual comprimento que CQ. Note que os segmentos MG e MG' tem igual comprimento. Prolonguemos o segmento MA até intersectar a circunferência no ponto H. Além disso, tracemos o segmento QM e prolonguemos ele até intersectar a circunferência no ponto H_2.

Figura 2.5: M pertence ao diâmetro



Fonte: Autor.

2.2.1 Média Aritmética - $A(a, b)$

Pela construção do segmento MA na circunferência, temos que

$$\overline{MA} = \overline{CQ} = \frac{\overline{XY}}{2} = \frac{a+b}{2} = A(a, b)$$

Logo, o segmento MA é uma interpretação geométrica para a Média Aritmética dos números a e b.

2.2.2 Média Geométrica - $G(a, b)$

Usando relação métrica da circunferência encontrada no Teorema 1.1 e o fato de que o comprimento de MG é igual ao comprimento de MG', temos que

$$\begin{aligned} \overline{MG} \cdot \overline{MG'} &= \overline{XM} \cdot \overline{MY} \\ \overline{MG} \cdot \overline{MG} &= a \cdot b, \end{aligned}$$

logo

$$(\overline{MG})^2 = a \cdot b,$$

daí

$$\overline{MG} = \sqrt{a \cdot b} = G(a, b).$$

Portanto, o segmento MG é uma interpretação geométrica da Média Geométrica dos números a e b.

2.2.3 Média Harmônica - $H(a, b)$

Aplicando a relação métrica da circunferência no Teorema 1.1, temos que

$$\begin{aligned} \overline{MA} \cdot \overline{MH} &= \overline{MG} \cdot \overline{MG'} \\ \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \overline{MH} &= \overline{MG}^2, \end{aligned}$$

então

$$\overline{MH} = \frac{(\sqrt{a \cdot b})^2}{(\frac{a+b}{2})},$$

portanto

$$\overline{MH} = \frac{2a \cdot b}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = H(a, b).$$

Desse modo, o segmento MH é uma interpretação geométrica da Média Harmônica dos números a e b.

2.2.4 Média Quadrática - $Q(a, b)$

Note que o comprimento do segmento MC pode ser escrito da seguinte forma:

$$\overline{MC} = \overline{XC} - \overline{XM} = (\frac{a+b}{2}) - a = \frac{b-a}{2}.$$

Usando este fato no Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle MQC$ com $\overline{QC} = \frac{a+b}{2}$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{MQ}^2 &= \overline{MC}^2 + \overline{QC}^2 \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{4} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2}, \end{aligned}$$

assim

$$\overline{MQ} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = Q(a,b).$$

Por conseguinte, o segmento $\overline{MQ}$ é uma interpretação geométrica da Média Quadrática dos números a e b.

2.2.5 Uma Quinta Média

Usando a relação das cordas encontrada no Teorema 1.1 segue que

$$\begin{aligned} \overline{H_2M} \cdot \overline{MQ} &= \overline{XM} \cdot \overline{MY} \\ \overline{H_2M} \cdot \sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}} &= a \cdot b \end{aligned}$$

logo

$$\overline{H_2M} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} = \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2 \cdot b^2}}},$$

então

$$\overline{H_2M} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}.$$

MAOR (1977) [16] denotou esta última expressão como sendo a raiz da média harmônica dos quadrados de a e b. MAOR generalizou ainda mais a definição de "média"para incluir todo R_n tal que $R_n = \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}$ para qualquer número real exceto o zero.

Nesta notação, observe na figura 2.5 que $\overline{H_2M}$ é R_{-2}, $\overline{MH}$ é R_{-1}, $\overline{MA}$ é R_1 e $\overline{MQ}$ é R_2. Perceba também que aplicando limite[1] em R_n, segue que

$$\lim_{n\to 0} R_n = \overline{MG}, \quad \lim_{n\to\infty} R_n = b \quad \text{e} \quad \lim_{n\to -\infty} R_n = a.$$

Dessa forma, cada corda através do ponto M determina duas médias.

A seguir daremos uma generalização da ideia das médias. Olhando para a sequência de médias $H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b)$ e a ordem entre elas, percebemos alguns padrões instigantes. Primeiramente, note que

$$\overline{MH} \cdot \overline{MA} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \frac{a+b}{2} = a \cdot b = G(a,b)^2,$$

daí

$$G(a,b) = \sqrt{\overline{MH} \cdot \overline{MA}},$$

[1]para mais detalhes sobre o estudo de limites, ver referência [23] pág. 65

portanto

$$G(H, A) = \sqrt{H \cdot A}. \tag{2.3}$$

De forma análoga, segue que

$$\overline{H_2M} \cdot \overline{MQ} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = a \cdot b = G(a, b)^2,$$

assim

$$G(a, b) = \sqrt{\overline{H_2M} \cdot \overline{MQ}},$$

portanto

$$G(H_2, Q) = \sqrt{H_2 \cdot Q}. \tag{2.4}$$

Vamos generalizar as médias quadráticas e a raiz média dos quadrados de dois números, ou seja, para cada n inteiro positivo, temos que

$$\overline{H_nM} = \sqrt[n]{\frac{2 \cdot a^n \cdot b^n}{a^n + b^n}} \tag{2.5}$$

e

$$R_n = \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}. \tag{2.6}$$

são médias.

Para $n = 1$, note que

$$\overline{H_1M} = \sqrt[1]{\frac{2 \cdot a^1 \cdot b^1}{a^1 + b^1}} = H(a, b) \quad \text{e} \quad R_1 = \sqrt[1]{\frac{a^1 + b^1}{2}} = A(a, b).$$

Além disso, perceba também que para cada n inteiro positivo, temos que

$$\overline{H_nM} \cdot R_n = \sqrt[n]{\frac{2 \cdot a^n \cdot b^n}{a^n + b^n}} \cdot \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}} = \sqrt[n]{a^n \cdot b^n} = a \cdot b = (\sqrt{a \cdot b})^2 = G(a, b)^2, \tag{2.7}$$

segue que $G(a, b) = \sqrt{\overline{H_nM} \cdot R_n} = G(\overline{H_nM}, R_n)$

Portanto,

$$G(\overline{H_nM}, R_n) = \sqrt{\overline{H_nM} \cdot R_n} \tag{2.8}$$

Pode-se provar que $\overline{H_nM} = R_{-n}$.[2] Assim a sequência

$$R_{-n}(a, b) \leq H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b) \leq R_n(a, b)$$

[2]mais a frente usaremos $HQ(a, b)$ para denotar R_{-n}

dá motivos para conjecturar que ela pode ser continuada para cima e para baixo na escala de ordens de tal forma que para cada n inteiro, positivo ou negativo, teremos $R_n \leq R_{n+1}$, então

$$R_n = \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}} = \frac{b}{\sqrt[n]{2}} \cdot \sqrt[n]{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n}.$$

Fazendo n tender ao infinito, temos que

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{\sqrt[n]{2}} \cdot \sqrt[n]{1 + (\frac{a}{b})^n} = b \cdot 1 = b.$$

Por um lado a fração $(\frac{a}{b})^n \to 0$ quando n vai para infinito, pois $a < b$. Por outro lado $\sqrt[n]{2} \to 1$ com n tendendo ao infinito.

De forma análoga, provamos que

$$\lim_{n\to\infty} R_{-n} = a.$$

Calculemos os valores de R_n e R_{-n} para $a = 1$ e $b = 2$.

1. Para $n = 1$, temos que

   - $R_1 = \frac{1+2}{2} = 1,50$
   - $R_{-1} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1+2} = \frac{4}{3} = 1,33$

2. Para $n = 2$, obtemos:

   - $R_2 = \sqrt[2]{\frac{1^2+2^2}{2}} = 1,58$
   - $R_{-2} = \sqrt[2]{\frac{2 \cdot 1^2 \cdot 2^2}{1^2+2^2}} = \sqrt[2]{\frac{8}{5}} = 1,26$

Fazendo o mesmo procedimento, construímos uma tabela encontrando valores de R_n e R_{-n} para alguns n inteiros positivos com $a = 1$ e $b = 2$

Tabela 2.1: Tabela de Generalização das Médias com $a = 1$ e $b = 2$.

n	R_n	R_{-n}
1	1,50	1,33
2	1,58	1,26
3	1,65	1,21
4	1,71	1,17
5	1,75	1,14
6	1,79	1,12
7	1,81	1,10
8	1,83	1,09
9	1,85	1,08
10	1,87	1,07
.	.	.
.	.	.
.	.	.

n	R_n	R_{-n}
20	1,93	1,03
.	.	.
.	.	.
.	.	.
50	1,97	1,01
.	.	.
.	.	.
.	.	.
100	1,98	1,007
.	.	.
.	.	.
.	.	.
200	1,99	1,003

Fonte: Autor

Vemos, então, que entre os valores $a = 1$ e $b = 2$ obtemos todo um conjunto de valores médios, cada um dos quais corresponde a um valor específico de n. Todos os valores de R_n estão localizados à direita de $G(a, b) = G(1, 2) = 1,41$, enquanto todos os valores de R_{-n} estão localizados à sua esquerda de $G(a, b)$.

A média geométrica de a e b ocupa assim uma posição central em nosso conjunto, o que naturalmente nos leva a especular se a própria média geométrica não pode também ser considerada como um caso especial dos R_n.

À primeira vista isso parece impossível, pois há uma lacuna nos valores das médias entre R_1 e R_{-1}, isto é, entre $A(a, b)$ e $H(a, b)$. Essa lacuna, no entanto, se deve ao fato de que nos limitamos até agora apenas a valores inteiros de n. Se essa restrição for removida e deixarmos qualquer valor real, obteremos um espectro contínuo de valores médios no intervalo entre a e b, dessa forma pode-se mostrar que

$$\lim_{n \to 0} R_n = G(a, b).$$

De fato, aplicando o logaritmo em

$$R_n = \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}},$$

temos

$$\begin{aligned}\ln(R_n) &= \ln\left(\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right).\end{aligned}$$

Fazendo $n \to 0$, o lado direito resulta em uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital (ver [23], pág. 267), segue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to 0}(\ln(R_n)) &= \lim_{n\to 0}\left(\frac{\frac{d}{dn}\ln\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)}{\frac{d}{dn}n}\right)\\ &= \lim_{n\to 0}\left(\frac{a^n\cdot\ln(a)+b^n\cdot\ln(b)}{a^n+b^n}\right)\\ &= \frac{a^0\cdot\ln(a)+b^0\cdot\ln(b)}{a^0+b^0}\\ &= \frac{1\cdot\ln(a)+1\cdot\ln(b)}{1+1}\\ &= \frac{\ln(a\cdot b)}{2}\\ &= \ln\left(\sqrt{a\cdot b}\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n\to 0}(R_n) = \sqrt{a\cdot b} = G(a,b).$$

Portanto, a Média Geométrica $G(a, b)$ torna-se única ocupando a posição central em nosso conjunto de valores, isto é, a posição correspondente a $n = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Não é um termo do R_n ou do R_{-n}, mas é abordado quando $n \to 0$.

2.3 Interpretações Geométrica de Quatro Médias usando Quadriláteros

No artigo [6], Ercolano chama atenção para a *Média Harmônica* de dois números positivos e sua relação com a *Média Aritmética* e a *Média Geométrica* dos mesmos números. Ele mostra como construir essas médias geometricamente, mas o que ainda se procura é uma ilustração ou exemplo no qual tal média é encontrada. De fato, exceto pela *Média Aritmética* de a e b, as outras médias não parecem ser tão fáceis de ver uma interpretação geométrica.

Nesta seção daremos uma interpretação geométrica para os três tipos de médias: *Aritmética*, *Geométricas* e *Harmônica* de dois números positivos a e b, em termos de um retângulo de lados a e b seguindo o artigo de MAOR ([16]). Além disso, será mostrado que o mesmo retângulo pode ser usado para introduzir uma quarta média fundamental, a *Média Quadrática.*

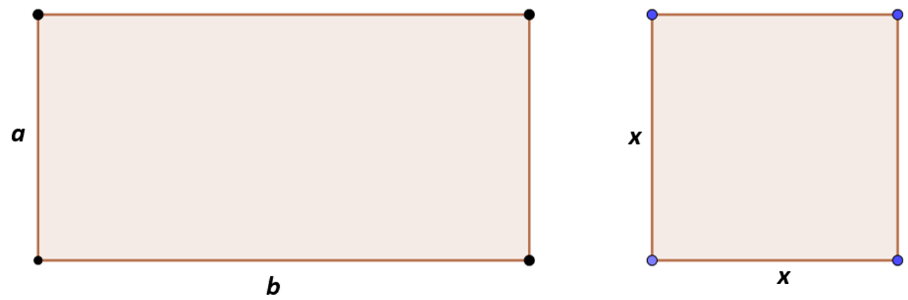
Os resultados podem então ser generalizados para três dimensões, usando um paralelepípedo de lados a, b e c. Mostraremos que outros tipos de médias são possíveis e podem ser introduzidas desta forma.

Apresentaremos interpretações geométricas das também conhecidas relações de ordem que existem entre essas médias e generalizaremos os resultados para mostrar que todo um espectro de valores médios é possível entre a e b. Também descobriremos alguns padrões interessantes nesse espectro.

2.3.1 Média através de Retângulos

Considere agora um retângulo com lados a e b. Um questionamento que fica é: *será que conseguimos construir um quadrado de lado x que seja equivalente ao retângulo de lados a e b se preservarmos algumas características?* Conforme a figura 2.6, atribuindo ao quadrado quatro condições diferentes, cada uma resultando em um valor diferente para x, vamos responder a essa pergunta.

Figura 2.6: Retângulo de lados a e b e quadrado de lados x



Fonte: Autor.

As condições são:

1. ***Perímetros iguais***

Se o perímetro do quadrado for o mesmo do retângulo, então temos que

$$2(a + b) = 4x \quad \text{equivale a,} \quad x = \frac{a+b}{2}$$

Portanto, para ambos os quadriláteros terem o mesmo perímetro, é preciso que x seja a *Média Aritmética* dos lados do retângulo, ou seja, conseguimos construir um quadrado equivalente ao retângulo preservando a característica *perímetros iguais.*

2. ***Áreas iguais***

   Se a área do quadrado for a mesma do retângulo, então temos que

   $$a \cdot b = x^2, \quad \text{logo} \quad x = \sqrt{a \cdot b}.$$

   segue daí que, para ambos quadriláteros terem a mesma área, é preciso que x seja a *Média Geométrica* dos lados do retângulo, ou seja, conseguimos construir um quadrado equivalente ao retângulo preservando a característica *áreas iguais.*

3. ***Diagonais iguais***
   Se a diagonal do quadrado for a mesma do retângulo, então temos que

   $$\sqrt{a^2 + b^2} = x\sqrt{2}, \quad \text{assim} \quad x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

   Concluímos que, para ambos quadriláteros terem a mesma diagonal, é preciso que x seja a *Média Quadrática* dos lados do retângulo, ou seja, conseguimos construir um quadrado equivalente ao retângulo preservando a característica *diagonais iguais.*

4. ***Razão área-perímetro***
   Se um quadrado preserva a razão área-perímetro do retângulo, então temos que

   $$\frac{a \cdot b}{2(a+b)} = \frac{x^2}{4x}, \quad \text{daí} \quad x = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}.$$

   Portanto, para ambos quadriláteros preservarem a razão *área-perímetro*, é preciso que x seja a *Média Harmônica* dos lados do retângulo, ou seja, conseguimos construir um quadrado equivalente ao retângulo preservando a característica *razão área-perímetro.*

Vemos que todas as médias podem ser introduzidas de forma natural e significativa através da construção ***retângulo-quadrado***. Em todos os quatro casos, para manter a propriedade requerida em um valor constante, temos que encurtar o comprimento e aumentar a largura do retângulo; ou seja, temos que encontrar algum valor intermediário entre eles.

2.4 Uma Função Geradora das Médias

Considere a função

$$M(x) = \frac{\sqrt{x(a-b)^2 + 4ab}}{2} \tag{2.9}$$

com $0 < a < b$. Tomando $f(x) = M^2(x)$, ou seja,

$$f(x) = \frac{x(a-b)^2 + 4ab}{4},$$

e derivando f com respeito a x, segue que

$$f'(x) = \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Note que $f'(x) \geq 0$, ou seja, f é estritamente crescente, dessa forma M também é estritamente crescente para $a \neq b$ e sendo a igualdade verdadeira somente quando $a = b$.

- Para $x = \frac{-4a}{b-a}$, temos que

$$\begin{aligned} M\left(\frac{-4a}{b-a}\right) &= \frac{\sqrt{(\frac{-4a}{b-a})(a-b)^2 + 4ab}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(4a)(a-b) + 4ab}}{2} = \frac{\sqrt{4a^2}}{2} = a. \end{aligned}$$

  É possível encontrar um resultado semelhante apenas tomando $x = \frac{4b}{b-a}$ tal que $M(x) = b$.

- Para $x = \frac{4b}{b-a}$, temos que

$$\begin{aligned} M\left(\frac{4b}{b-a}\right) &= \frac{\sqrt{(\frac{4b}{b-a})(a-b)^2 + 4ab}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(-4b)(a-b) + 4ab}}{2} = \frac{\sqrt{4b^2}}{2} = b. \end{aligned}$$

Como M é uma função crescente e contínua, então para cada x pertencente ao intervalo $I = \left[\frac{-4a}{b-a}, \frac{4b}{b-a}\right]$ a imagem de x através da M pertencerá ao intervalo $[a, b]$, ou seja, $M(I) \subseteq [a, b]$. Indicando alguns valores de x no intervalo I obteremos algumas médias.

1. **Média Harmônica Quadrática**

   Tomando $x = \frac{-4ab}{a^2+b^2}$ no intervalo $I = \left[\frac{-4a}{b-a}, \frac{4b}{b-a}\right]$ e substituindo este valor de x na função dada em 2.9, temos que

$$\begin{aligned} M\left(\frac{-4ab}{a^2+b^2}\right) &= \frac{\sqrt{(\frac{-4ab}{a^2+b^2})(a-b)^2+4ab}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{-4a^3b+8a^2b^2-4ab^3+4a^3b+4ab^3}{a^2+b^2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{8a^2b^2}{a^2+b^2}}}{2} = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} = HQ(a,b). \end{aligned}$$

2. **Média Harmônica**

   Tomando $x = \frac{-4ab}{(a+b)^2}$ no intervalo $I = \left[\frac{-4a}{b-a}, \frac{4b}{b-a}\right]$ e substituindo este valor de x na função dada em 2.9, segue que

$$\begin{aligned} M\left(\frac{-4ab}{(a+b)^2}\right) &= \frac{\sqrt{(\frac{-4ab}{(a+b)^2})(a-b)^2+4ab}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{-4a^3b+8a^2b^2-4ab^3+4a^3b+8a^2b^2+4ab^3}{a^2+2ab+b^2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{16a^2b^2}{(a+b)^2}}}{2} = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{(a+b)} = H(a,b). \end{aligned}$$

   Note que $\frac{-4ab}{a^2+b^2} < \frac{-4ab}{(a+b)^2}$. Como $M(x)$ é uma função crescente, então

$$HQ(a,b) = M\left(\frac{-4ab}{a^2+b^2}\right) < M\left(\frac{-4ab}{(a+b)^2}\right) = H(a,b).$$

   Portanto, $HQ(a,b) < H(a,b)$.

3. **Média Geométrica**

   Considere o valor de $x = 0$ no intervalo $I = [\frac{-4a}{b-a}, \frac{4b}{b-a}]$ e substituindo este valor de x na função dada em 2.9, temos que

$$M(0) \;=\; \frac{\sqrt{(0)(a-b)^2+4ab}}{2} = \frac{\sqrt{4ab}}{2} = \sqrt{ab} = G(a,b).$$

Observe que $\frac{-4ab}{(a+b)^2} < 0$. Como $M(x)$ é crescente, segue que

$$H(a,b) = M(\frac{-4ab}{(a+b)^2}) < M(0) = G(a,b).$$

Logo, $H(a,b) < G(a,b)$.

4. **Média Aritmética**

   Considere o valor de $x = 1$ no intervalo $I = [\frac{-4a}{b-a}, \frac{4b}{b-a}]$ e substituindo este valor de x na função dada em 2.9, obtemos que

$$\begin{aligned} M(1) &= \frac{\sqrt{(1)(a-b)^2 + 4ab}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(a+b)^2}}{2} = \frac{a+b}{2} = A(a,b). \end{aligned}$$

   Observe que $0 < 1$ e como $M(x)$ é crescente, segue que

$$G(a,b) = M(0) < M(1) = A(a,b).$$

   Portanto, $G(a,b) < A(a,b)$.

5. **Média Quadrática**

   Considere o valor de $x = 2$ no intervalo $I = [\frac{-4a}{b-a}, \frac{4b}{b-a}]$ e substituindo este valor de x na função dada em 2.9, obtemos

$$\begin{aligned} M(2) &= \frac{\sqrt{(2)(a-b)^2 + 4ab}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2}}{2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = R(a,b). \end{aligned}$$

   Observe que $1 < 2$ e como $M(x)$ é crescente, segue que

$$A(a,b) = M(1) < M(2) = R(a,b).$$

   Portanto, $A(a,b) < R(a,b)$.

6. **Média - M(3)**

   Considere o valor de $x = 3$ no intervalo $I = [\frac{-4a}{b-a}, \frac{4b}{b-a}]$ e substituindo este valor de x na função dada em 2.9, segue que

$$\begin{aligned} M(3) &= \frac{\sqrt{(3)(a-b)^2 + 4ab}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2}}{2}. \end{aligned}$$

   Observe que $2 < 3$ e como $M(x)$ é crescente, segue que

$$Q(a,b) = M(2) < M(3).$$

   Portanto, $Q(a,b) < M(3)$.

7. **Média - M(4)**

   Considere o valor de $x = 4$ no intervalo $I = [\frac{-4a}{b-a}, \frac{4b}{b-a}]$ e substituindo este valor de x na função dada em 2.9, portanto

$$\begin{aligned} M(4) &= \frac{\sqrt{(4)(a-b)^2 + 4ab}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{4a^2 - 4ab + 4b^2}}{2} = \sqrt{a^2 - ab + b^2}. \end{aligned}$$

   Observe que $3 < 4$ e como $M(x)$ é crescente, segue que $M(3) < M(4)$.

Finalmente, por M ser uma função crescente estabelece, temos a seguinte relação de ordem entre as médias

$$HQ(a,b) < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < Q(a,b) < M(3) < M(4)$$

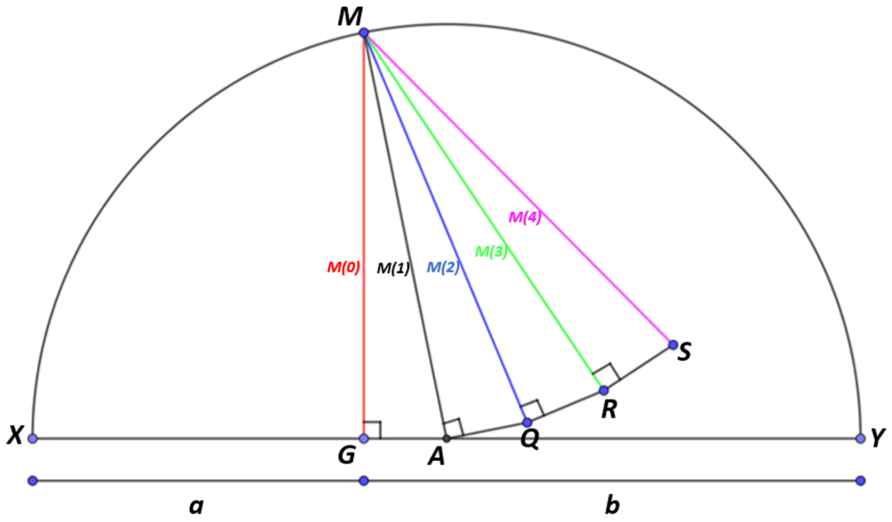
Uma observação a ser feita é que as igualdades irão ocorrer somente quando $a = b$, porém para a e b iguais a função não está definida.

Podemos estender a construção usada por ILES e WILSON (1977), encontrada no artigo [9], para incluir médias adicionais definidas pela função M para valores inteiros de x no intervalo $I = [\frac{-4a}{b-a}, \frac{4b}{b-a}]$.

Construiremos uma figura que interprete geometricamente as médias.

De fato, consideremos a e b dois números positivos com $0 < a \leq b$. Construamos XG e GY com comprimentos a e b, respectivamente, e tracemos uma circunferência com centro A e diâmetro $\overline{XY}$ (figura 2.7). Ergamos uma perpendicular em G interceptando a circunferência em M. Construamos o triângulo retângulo AGM. Marquemos o ponto Q de modo que o segmento $\overline{AQ}$ seja congruente ao segmento $\overline{GA}$ e que o triângulo AQM seja retângulo em A. Construamos o ponto R de modo que o segmento QR seja congruente ao segmento GA e que o triângulo QRM seja retângulo em Q. Construamos o ponto S de modo que o segmento RS seja congruente ao segmento GA e que o triângulo RMS seja retângulo em R.

Figura 2.7: Interpretação Geométrica das Médias



Fonte: Autor.

Note que o comprimento $\overline{GA}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\overline{GA} = \overline{XA} - \overline{XG} = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}.$$

Dessa forma, por construção,

$$\overline{GA} \equiv \overline{AQ} \equiv \overline{QR} \equiv \overline{RS} = \frac{b-a}{2}.$$

Agora, mostraremos que $\overline{MG}, \overline{MA}, \overline{MQ}, \overline{MR}$ e $\overline{MS}$ são iguais, respectivamente, a $M(0), M(1), M(2), M(3)$ e $M(4)$.

1. $\overline{MG} = M(0)$

   A demonstração é análoga a encontrada na figura 2.5, ou seja, GM tem comprimento igual a $\sqrt{ab} = M(0)$.

2. $\overline{MA} = M(1)$

   O comprimento de $\overline{MA}$, por ser o raio do circunferência, é $\frac{a+b}{2} = M(1)$. Logo, $\overline{MA} = M(1)$.

3. $\overline{MQ} = M(2)$

   De fato, pelo teorema de Pitágoras, temos que $\overline{MQ}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{AQ}^2$, assim

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2+b^2-2ab+a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

   Portanto, o segmento $\overline{MQ} = M(2)$.

4. $\overline{MR} = M(3)$

   Novamente, pelo teorema de Pitágoras, $\overline{MR}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{QR}^2$ segue que

$$\begin{aligned}\overline{MR} &= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2a^2+2b^2+b^2-2ab+a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2-2ab+3b^2}}{2}.\end{aligned}$$

   Logo, $\overline{MR} = M(3)$.

5. $\overline{MS} = M(4)$

   Segue de maneira análoga ao item anterior.

Vemos que essa construção produz médias para valores de $x \leq 4$. Para inteiros k maiores que 4, o domínio de M impõe certas relações entre a e b. Seja k um inteiro positivo maior que 4. Então, para que $M(k)$ seja uma média de a e b, devemos ter que

$$\frac{-4a}{b-a} \leq k \leq \frac{4b}{b-a},$$

pois k é um inteiro do intervalo $I = [\frac{-4a}{b-a}, \frac{4b}{b-a}]$.

Como $\frac{-4a}{b-a} \leq k \leq \frac{4b}{b-a}$, então $\frac{b}{a} \leq \frac{k}{k-4}$

Embora os valores inteiros de x sejam convenientes para esta construção, a função M pode ser um pouco simplificada por uma mudança de escala. Se deixarmos $y = \frac{(b-a)x}{4}$, obteremos $M(y) = \sqrt{(b-a)y+ab}$ definida no intervalo $[-a, b]$. Os valores correspondentes de y para obtermos as médias

$$HQ(a,b), H(a,b), G(a,b), A(a,b), Q(a,b), M(3) \quad \text{e} \quad M(4)$$

são, respectivamente,

$$\frac{-ab(b-a)}{a^2+b^2}, \frac{-ab(b-a)}{(a+b)^2}, 0, \frac{b-a}{4}, \frac{b-a}{2}, \frac{3(b-a)}{4} \quad \text{e} \quad b-a.$$

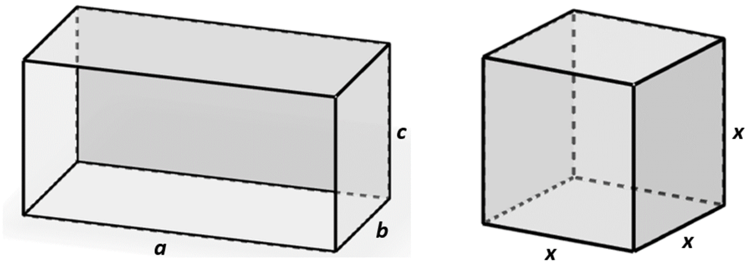
Capítulo 3

Interpretação Geométrica das Médias no $\mathbb{R}^3$

Vejamos agora que essas ideias podem ser estendidas a três dimensões seguindo o artigo [16]. Um questionamento análogo ao que foi feito no capítulo anterior, se faz presente neste capítulo: *será que conseguimos construir um cubo de arestas x, que seja equivalente ao paralelepípedo de arestas a, b e c, se preservarmos algumas características?*

Consideramos um paralelepípedo retangular de lados a, b e c e desejamos construir um cubo equivalente de lado x, cujo valor dependerá da condição que impomos ao cubo conforme a figura 3.1

Figura 3.1: Paralelepípedo de lados a, b e c e Cubo de lado x.



Fonte: Autor.

1. ***Soma das medidas das arestas iguais***
   O cubo deve ter a mesma soma das arestas do paralelepípedo, então temos

$$4(a+b+c) = 12x, \quad \text{implica} \quad x = \frac{a+b+c}{3}.$$

Logo, para ambos prismas terem a mesma soma das arestas, é preciso que x seja a *Média Aritmética* dos lados do paralelepípedo.

2. ***Volumes iguais***
Se o volume do cubo for o mesmo do paralelepípedo, então temos que

$$a \cdot b \cdot c = x^3, \quad \text{logo} \quad x = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}.$$

Daí, para ambos os prismas terem o mesmo volume, é preciso que x seja a *Média Geométrica* dos lados do.

3. ***Diagonais iguais***
Se a diagonal do paralelepípedo for a mesma do cubo, então temos que

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = x\sqrt{3} \quad \text{daí ,} \quad x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}.$$

Então, para ambos os prismas terem a mesma diagonal, é preciso que x seja a *Média Quadrática* dos lados do retângulo.

4. ***Razão Volume - área da superfície***
Se um cubo preserva a razão volume-área da superfície com o paralelepípedo, então temos que:

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)} = \frac{x^3}{6x^2}, \quad \text{então} \quad x = \frac{3a \cdot b \cdot c}{(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)}.$$

Ou seja, para ambos prismas preservarem a razão *volume - área da superfície*, é preciso que x seja a *Média Harmônica* dos lados do paralelepípedo.

5. ***Áreas das superfícies iguais***

Se as áreas totais dos dois prismas forem iguais, então temos que

$$2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) = 6x^2, \quad \text{portanto} \quad x = \sqrt{\frac{a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a}{3}}.$$

Esta expressão de fato representa uma média de (a, b, c), pois todas as três propriedades vistas no capítulo 1 são satisfeitas.

A última expressão tem uma grande semelhança com a *Média Quadrática* de (a, b, c): em vez dos quadrados a^2, b^2 e c^2, empregamos os produtos mistos $a \cdot b$, $b \cdot c$ e $c \cdot a$. Isso sugere que podemos definir um sexto tipo de média que se relaciona de maneira semelhante à média harmônica de (a, b, c) :

6. ***Razão Volume - Soma das medidas das arestas***

   Se um cubo preserva a razão volume-soma das medidas das arestas com o paralelepípedo, ou seja,

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{4(a+b+c)} = \frac{x^3}{12x}, \quad \text{implica} \quad \frac{3 \cdot a \cdot b \cdot c}{a+b+c} = x^2,$$

   portanto

$$x = \sqrt{\frac{3 \cdot a \cdot b \cdot c}{a+b+c}}.$$

Essa última expressão também é uma média, pois satisfaz as propriedades de média vistas no primeiro capítulo.

Capítulo 4

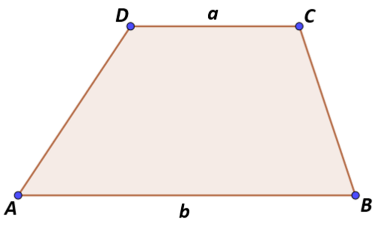
Interpretação Geométrica da Média Ponderada

4.1 Interpretação Geométrica da Média Ponderada no Trapézio

Na maioria dos trabalhos já publicados que trata de interpretações geométricas das médias, o que mais encontramos são representações geométricas das Médias Aritmética, Geométrica, Harmônica, Quadrática e interpretações de outras médias não conhecidas. Essas interpretações são vistas como segmentos de retas em semicírculos e círculos. No entanto, em nenhum dos trabalhos foi considerada a Média Ponderada. O objetivo deste capítulo é abordar uma interpretação geométrica desta média seguindo o artigo de HOEHN (ver referência [10]).

Para isso, iniciaremos considerando um trapézio qualquer $ABCD$ com comprimento da base maior $\overline{AB} = b$ e da base menor $\overline{CD} = a$, conforme a figura 4.1

Figura 4.1: Trapézio de bases a e b.



Fonte: Autor.

1. **Média Ponderada**

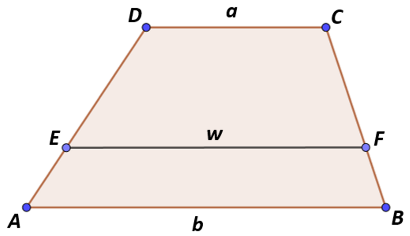
O comprimento de qualquer segmento de reta paralelo às duas bases e que seus extremos pertencem aos lados não paralelos de um trapézio pode ser considerado como a Média Ponderada dos comprimentos das duas bases.

O comprimento do segmento $\overline{EF} = w$ pode ser interpretado como a média procurada, ou seja, a média ponderada de a e b. Vale destacar que esse segmento paralelo as bases também pode ser interpretado como outras médias.

Consideremos que $\overline{CD} = a < b = \overline{AB}$ e que os segmentos EF, AB e CD paralelos. Sejam E e F pontos de AD e BC, respectivamente.

Observe na 4.2 que o segmento EF divide o trapézio $ABCD$ em dois trapézios menores: os trapézios $ABEF$ e $CDEF$.

Figura 4.2: Trapézio de bases a e b com EF, AB, CD paralelos.



Fonte: Autor.

Vamos denotar por $p + q$ o comprimento da altura do trapézio $ABCD$, sendo p o comprimento da altura do trapézio $CDEF$ e q o comprimento da altura do trapézio $ABEF$, como na Figura 4.3.

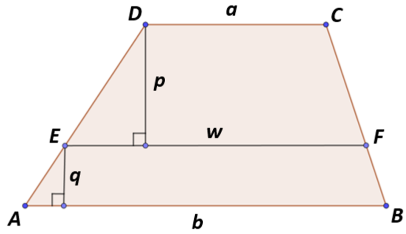
Da figura, note que $Area(ABCD) = Area(ABEF) + Area(CDEF)$, ou seja

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(p+q)}{2} &= \frac{(b+w)q}{2} + \frac{(a+w)q}{2} \\ ap + aq + bp + bq &= bq + wq + ap + wp \\ aq + bp &= w(p+q), \end{aligned}$$

assim

$$w = \frac{aq + bp}{p + q}$$

Figura 4.3: Trapézio de bases a e b com altura $p+q$.



Fonte: Autor.

Portanto, o comprimento do segmento $\overline{EF} = w$ é uma interpretação geométrica da Média Ponderada dos número a e b com respectivos pesos p e q.

Observe que,

a razão $\frac{p}{q}$ se determina considerando $w = \frac{aq+bp}{p+q}$, daí obtemos

$$\begin{aligned} wp + wq &= aq + bp \\ p(w-b) &= q(a-w), \end{aligned}$$

portanto

Está fórmula permite observar alguns casos especiais da Média Ponderada para várias razões dos pesos. Estes são dados na Tabela 4.1.

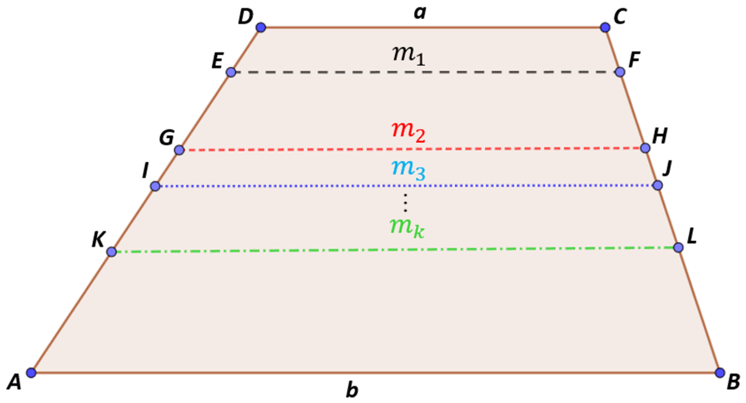
Tabela 4.1: Tabela das Médias

Nome das médias	Fórmulas das Médias	Razão dos Pesos
(1) Média Ponderada	$w = \frac{aq+bp}{p+q}$	$\frac{p}{q} = \frac{a-w}{w-b}$
(2) Média Harmônica	$H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$	$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$
(3) Média Geométrica	$G(a,b) = \sqrt{ab}$	$\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
(4) Média Aritmética	$A(a,b) = \frac{a+b}{2}$	$\frac{p}{q} = 1$
(5) Média Quadrática	$Q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	$\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2}}{b\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}}$
(6) Anti-Harmônica	$AH(a,b) = \frac{a^2+b^2}{a+b}$	$\frac{p}{q} = \frac{b}{a}$

Fonte: Autor.

Note que cada fórmula pode ser obtida por operações algébricas elementares.

Figura 4.4: Trapézio de bases a e b com possíveis médias m_i, com $i = 1, 2, 3, \cdots, k$.



Fonte: Autor.

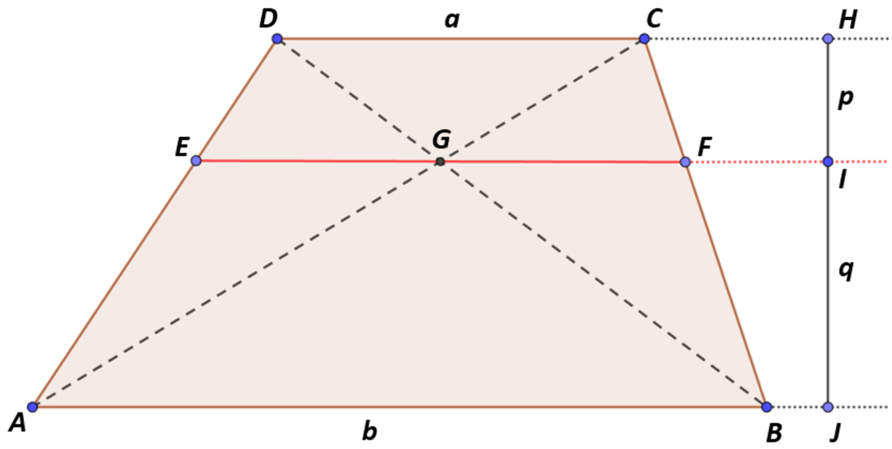
Vale ressaltar que no trapézio de bases a e b da figura 4.1, na medida que um segmento paralelo às bases, com extremidades nos dois lados oblíquos, percorre um caminho se afastando da base a na direção da base b, sua medida assume todos os valores entre a e b conforme a Figura 4.4, ou seja, em alguns momentos esse segmento assumirá o valor de todas as médias possíveis.

A seguir, vamos analisar em quais situações é possível determinar as Médias Harmônica, Geométrica, Aritmética, Quadrática e Anti-harmônica no trapézio. Na tabela 4.1 já afirmamos qual deve ser a razão entre os pesos p e q para encontrarmos cada média. Verificaremos a veracidade dessa afirmação.

2. **Média Harmônica**

   Sejam $ABCD$ um trapézio de bases a e b e diagonais AC e BD. Sendo o ponto G o ponto de interseção das diagonais. Tracemos um segmento paralelo às bases passando por G, denotaremos por EF este segmento.

Figura 4.5: Trapézio de bases a e b com interseção das diagonais no ponto G.



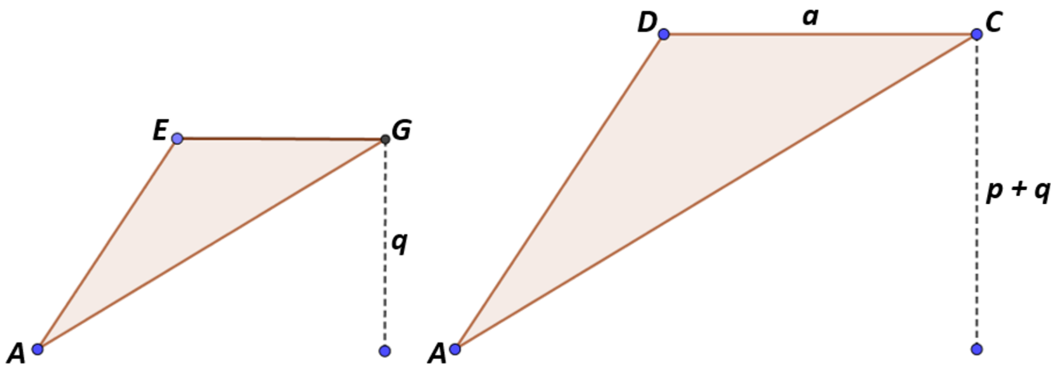
Fonte: Autor.

Observe na figura 4.5 que, pelo caso AA os triângulos $\triangle AGE \sim \triangle ACD$ são semelhantes. De fato, na Figura 4.6, perceba que o $\angle EAG = \angle DAC$. Pela construção CD, e EG são paralelos, logo os ângulos $\angle AEG$ e $\angle ADC$ são congruentes. Isso garante a semelhança dos triângulos pelo caso AA.

Daí $\triangle AGE \sim \triangle ACD$, portanto os respectivos lados e alturas são proporcionais, isto é,

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{CD}} = \frac{q}{p+q} \tag{4.1}$$

Figura 4.6: $\triangle AGE \sim \triangle ACD$.



Fonte: Autor

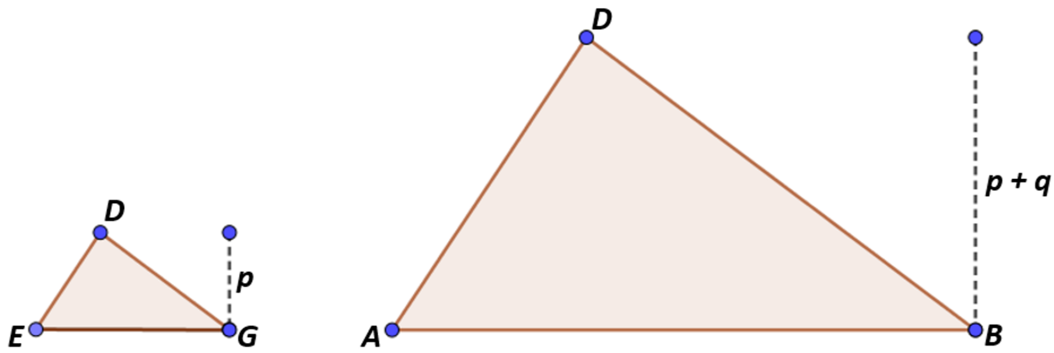
Por outro lado, verificaremos que os triângulos DEG e ABD são semelhantes.

De fato, na figura 4.7, note que o $\angle EDG = \angle ADB$. Pela construção EG é paralelo a AB, logo os ângulos $\angle DEG$ e $\angle DAB$ são congruentes. Isso garante a semelhança dos triângulos.

Como $\triangle EDG \sim \triangle ABD$, os respectivos lados e alturas são proporcionais, ou seja

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{AB}} = \frac{p}{p+q} \tag{4.2}$$

Figura 4.7: $\triangle DEG \sim \triangle ABD$.



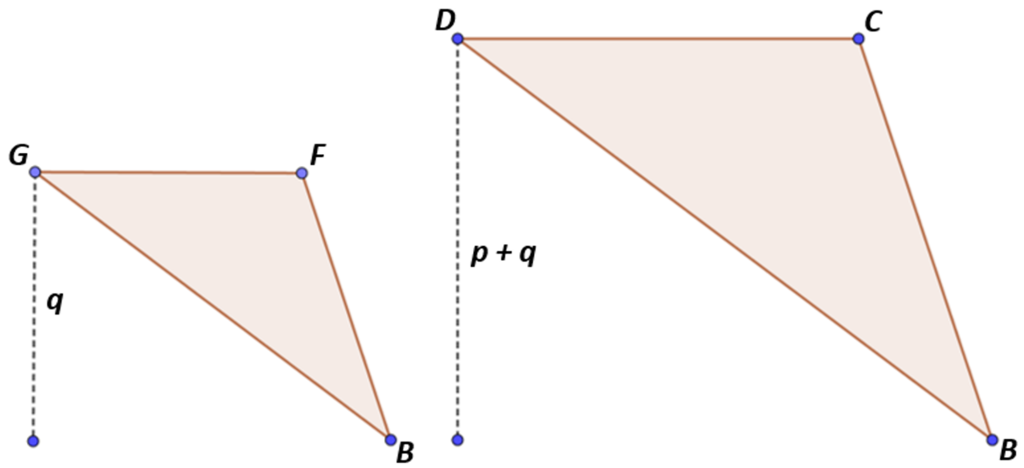
Fonte: Autor.

A seguir provaremos que os triângulos BFG e BCD são semelhantes. De fato, note que o $\angle GBF = \angle DBC$. Pela construção GF e CD são paralelos, logo os ângulos $\angle DCB$ e $\angle GFB$ são congruentes. Isso garante a semelhança dos triângulos.

Sendo $\triangle BFG \sim \triangle BCD$, temos a relação de proporção, isto é,

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{CD}} = \frac{q}{p+q} \tag{4.3}$$

Figura 4.8: $\triangle BFG \sim \triangle BCD$.



Fonte: Autor.

Das equações (4.1) e (4.3) , obtemos que $\overline{EG} \equiv \overline{FG}$

Das equações (4.1) e (4.2) , temos que

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{EG}}{\overline{CD}} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = 1$$

Como $\overline{AB} = b$ e $\overline{CD} = b$, então $\frac{\overline{EG}}{b} + \frac{\overline{EG}}{a} = 1$. Daí, segue que

$$\overline{EG}\left(\frac{a+b}{ab}\right) = 1, \quad \text{assim} \quad \overline{EG} = \frac{ab}{a+b}$$

Logo,

$$\overline{EG} = \overline{GF} = \frac{ab}{a+b}$$

Na Figura 4.5, note que

$$\overline{EF} = \overline{EG} + \overline{GF} = \frac{ab}{a+b} + \frac{ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$$

Ainda da figura 4.5, perceba que $\triangle AGB \sim \triangle CGD$. Com isso, os respectivos lados e alturas são proporcionais. Logo,

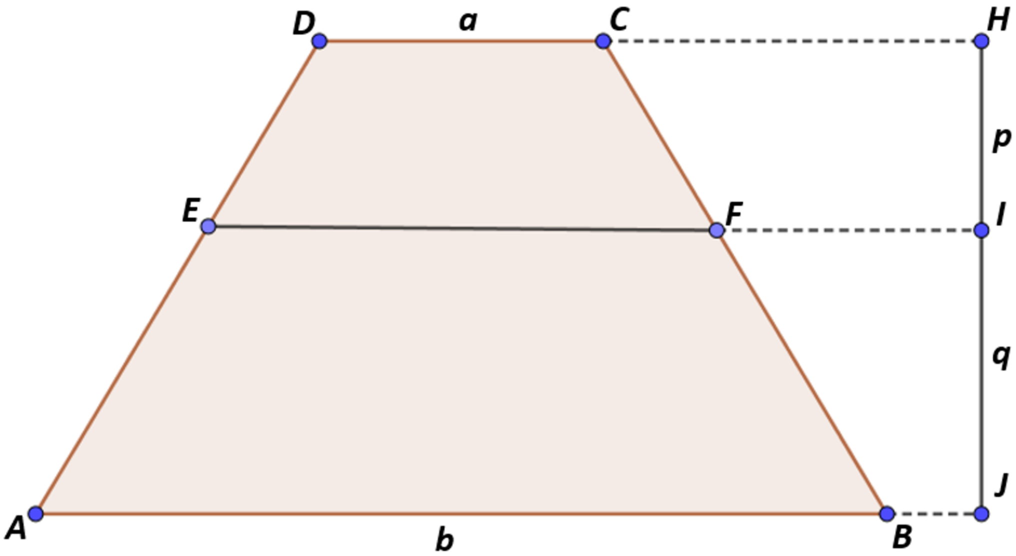
$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

Concluímos, portanto, que o segmento $\overline{EG} = \frac{2ab}{a+b}$ é uma interpretação geométrica da Média Harmônica e a razão dos pesos é dada por $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ conforme a Tabela 4.1.

3. **Média Geométrica**

   Tracemos um segmento EF de tal forma que os trapézios $ABFE$ e $EFCD$ sejam semelhantes. Veja a Figura 4.9.

   Figura 4.9: Trapézio $ABCD$ dividido por EF.

   Fonte: Autor.

   Como os trapézios $ABFE$ e $EFCD$ são semelhantes, então $\frac{a}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EF}}{b}$. Daí, $\overline{EF} = \sqrt{ab}$. Ainda pela semelhança dos trapézios $ABFE$ e $EFCD$, temos que

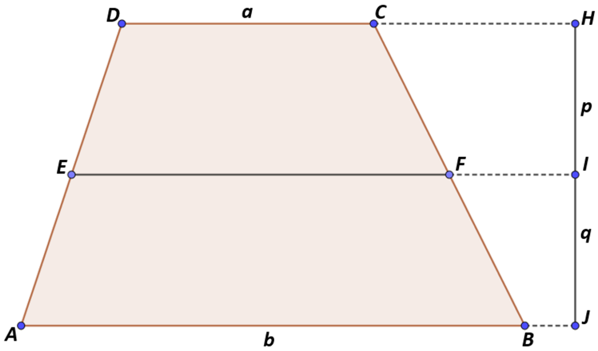
   $$\frac{p}{q} = \frac{a}{\overline{EF}} = \frac{a}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

   Logo, o segmento $\overline{EF}$ é uma interpretação geométrica da Média Geométrica e a razão dos pesos p e q é dada por $\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ como mostrado na tabela 4.1.

4. **Média Aritmética**

   Tracemos um segmento EF tal que os trapézios $ABFE$ e $EFCD$ tenham a mesma altura $p = q$, ou seja, a razão dos pesos $\frac{p}{q} = 1$. Veja na figura 4.10.

Figura 4.10: Trapézio $ABCD$ com razão dos pesos $\frac{p}{q} = 1$.



Fonte: Autor.

Note que, $Area(ABCD) = Area(ABFE) + Area(EFCD)$, assim

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(p+q)}{2} &= \frac{(b+\overline{EF})q}{2} + \frac{(a+\overline{EF})q}{2} \\ aq + bp &= \overline{EF}q + \overline{EF}p \\ &= \overline{EF}(p+q), \end{aligned}$$

daí

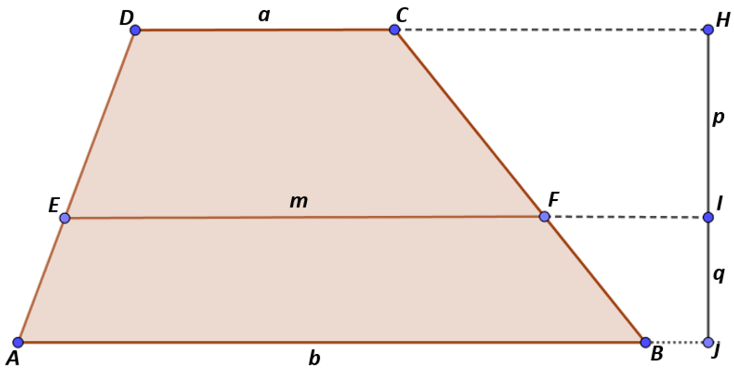
$$\overline{EF} = \frac{ap+bp}{p+p} = \frac{a+b}{2}$$

Portanto, $\overline{EF}$ é uma interpretação geométrica da Média Aritmética com razão dos pesos $\frac{p}{q} = 1$.

5. **Média Quadrática**

Construímos um segmento de comprimento $\overline{EF} = m$ tal que os trapézios $ABFE$ e $EFCD$ tenham a mesma área. Veja a Figura 4.11.

Figura 4.11: Trapézios $ABFE$ e $EFCD$ de mesma área.



Fonte: Autor.

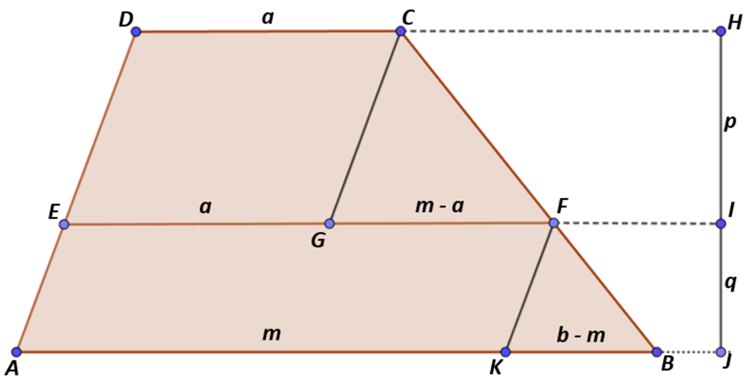
Por hipótese, $Area(ABFE) = Area(EFCD)$. Dessa forma

$$\frac{(b+m)(q)}{2} = \frac{(m+a)p}{2} \quad \text{implica} \quad \frac{p}{q} = \frac{b+m}{a+m}. \tag{4.4}$$

Uma vez que $a < b$ e $m > 0$, então $a + m < b + m$. Logo, $p > q$.

A seguir tracemos dois segmentos paralelos a AD passando pelos pontos C e F. Esses novos segmentos interceptam EF e AB nos pontos G e K, como mostrado na Figura 4.12.

Figura 4.12: Trapézio $ABCD$ com os segmentos $\overline{CG} \parallel \overline{FK}$.



Fonte: Autor.

Com essa construção, os triângulos $\triangle BFK$ e $\triangle FCG$ são semelhantes, pois $\angle KBF = \angle GFC$ e $\angle FKB = \angle CGF$. O caso de semelhança de triângulos

AA garante a semelhança. Dessa forma, segue que

$$\frac{p}{q} = \frac{m-a}{b-m}. \tag{4.5}$$

Igualando as equações (4.4) e (4.5) temos que

$$(b+m)(b-m) = (a+m)(m-a), \quad \text{implica} \quad b^2 - m^2 = m^2 - a^2, \tag{4.6}$$

daí

$$m = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{4.7}$$

Além disso, substituindo (4.7) em (4.5), tem-se

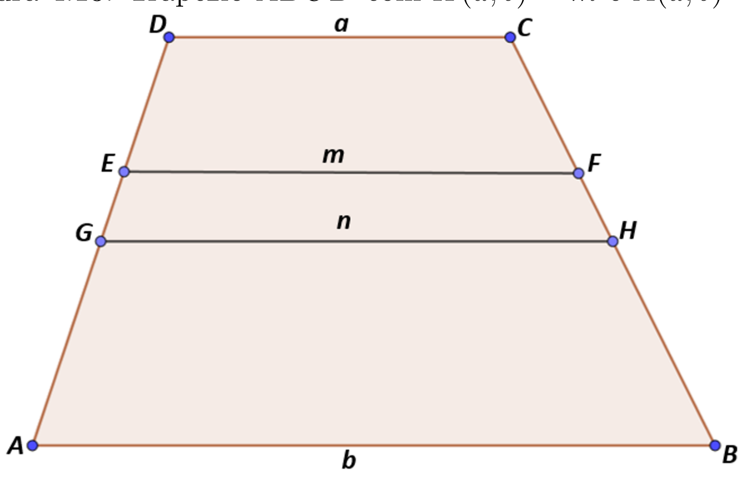
$$\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - a}{b - \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}} - a}{b - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a\sqrt{2}}{b\sqrt{2} - \sqrt{a^2+b^2}}$$

Logo, o segmento $\overline{EF}$ é uma interpretação geométrica da Média Quadrática e a razão dos pesos p e q é dada por $\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a\sqrt{2}}{b\sqrt{2} - \sqrt{a^2+b^2}}$ como mostrado na Tabela 4.1.

6. **Média Anti-Harmônica**

   Dado um trapézio $ABCD$, construamos as interpretações geométricas das Médias Harmônica e Aritmética como visto nos itens 2 e 4. Na figura 4.13, os comprimentos dos segmentos $\overline{EF} = m$ e $\overline{GH} = n$ representam as Médias Harmônicas e Aritméticas respectivamente.

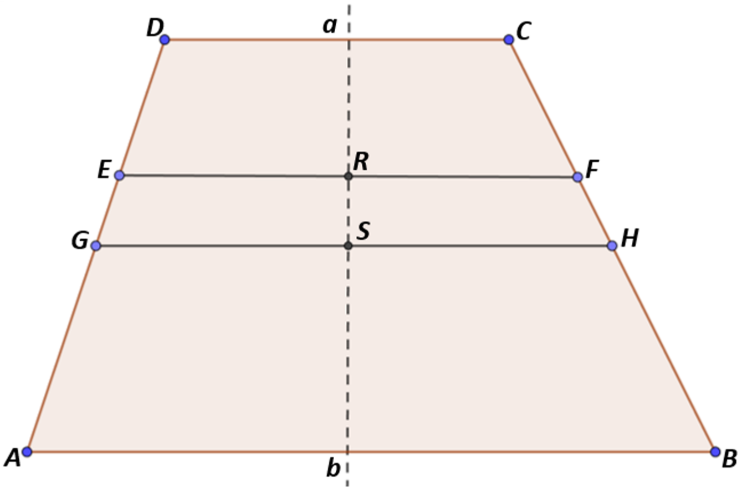
Figura 4.13: Trapézio $ABCD$ com $H(a,b) = m$ e $A(a,b) = n$.



Fonte: Autor.

Construímos a mediatriz do segmento EF e a prolongamos até interceptar GH no ponto S, conforme a Figura 4.14.

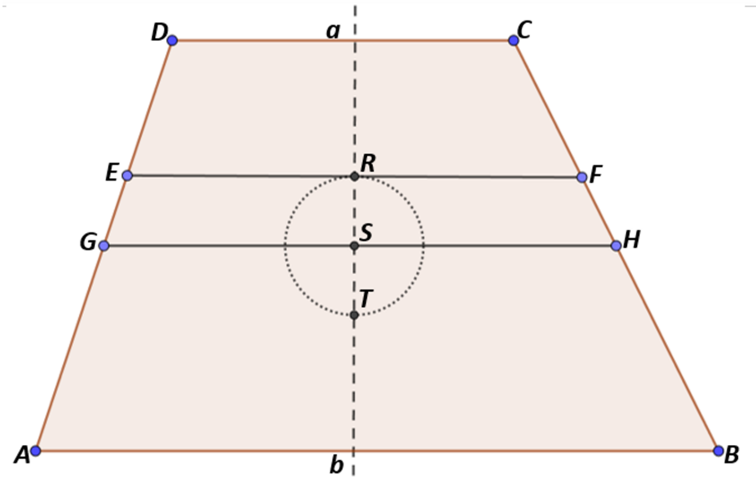
Figura 4.14: Trapézio $ABCD$ com a mediatriz do segmento $\overline{EF}$.



Fonte: Autor.

Tracemos uma circunferência com centro no ponto S passando pelo ponto R e denotemos por T o ponto de interseção entre a circunferência e a mediatriz. Dessa forma, $\overline{SR} = \overline{ST} = r$.

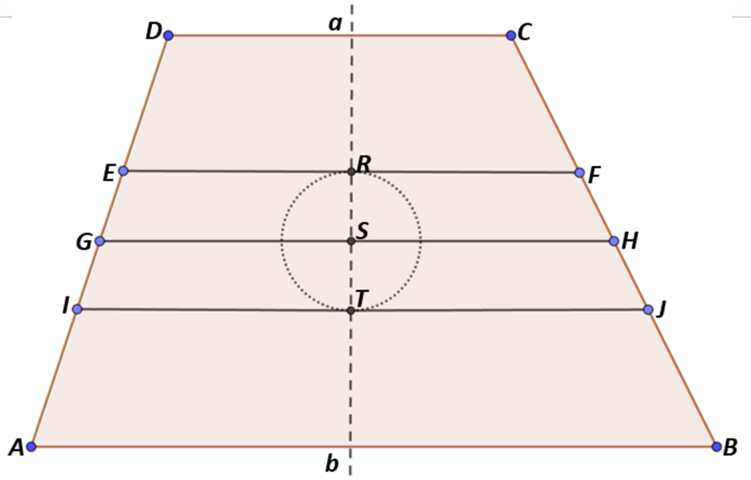
Figura 4.15: Trapézio $ABCD$ com a circunferência de centro S e raio r.



Fonte: Autor.

Tracemos um segmento paralelo a base AB passando pelo ponto T. Esse segmento irá interceptar os lados AD e BC nos pontos I e J respectivamente, conforme a Figura 4.16.

Figura 4.16: Trapézio $ABCD$ com o segmento $\overline{IJ}$.



Fonte: Autor.

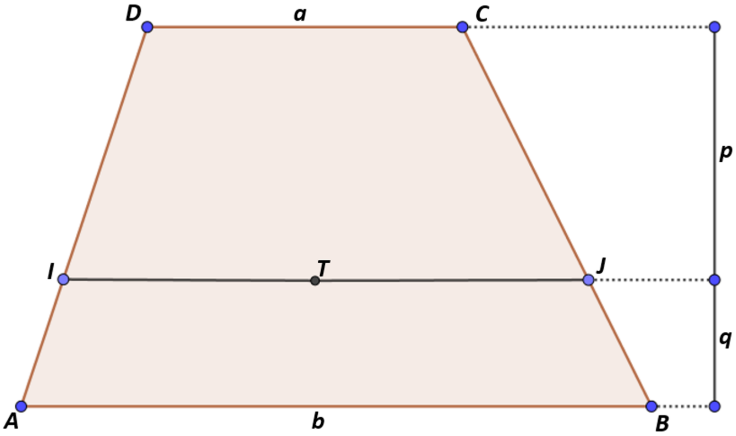
Agora, note que $Area(IJFE) = Area(IJHG) + Area(GHFE)$

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\overline{IJ} + \frac{2ab}{a+b}\right) 2r}{2} &= \frac{\left(\overline{IJ} + \frac{a+b}{2}\right) r}{2} + \frac{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{2ab}{a+b}\right) r}{2} \\
2\left(\overline{IJ} + \frac{2ab}{a+b}\right) &= \left(\overline{IJ} + \frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{2} + \frac{2ab}{a+b}\right)
\end{aligned}$$

$$\overline{IJ} = a + b + \frac{2ab}{a+b} - \frac{4ab}{a+b} = a + b - \frac{2ab}{a+b} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 2ab}{a+b} = \frac{a^2 + b^2}{a+b}$$

Dessa forma, o segmento $\overline{IJ}$ é uma interpretação geométrica da Média Anti-harmônica.

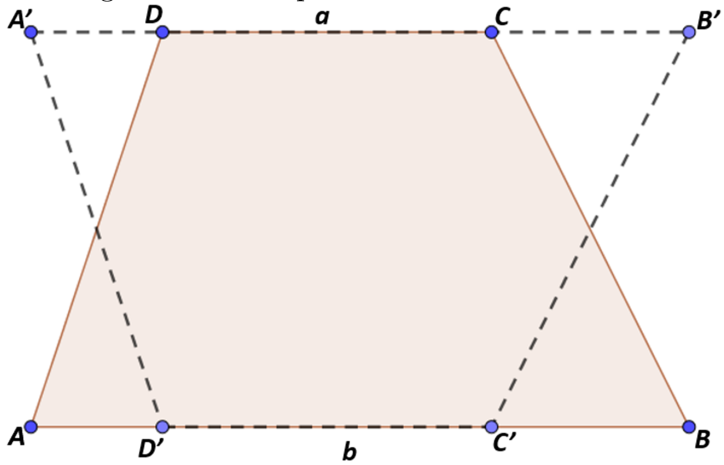
Figura 4.17: interpretação geométrica da média Anti-Harmônica.



Fonte: Autor.

Outra forma de encontrar o ponto T é rotacionar o trapézio $ABCD$ da Figura 4.1 em 180° criando assim o trapézio $A'B'C'D'$ sobrepondo as bases dos dois trapézios.

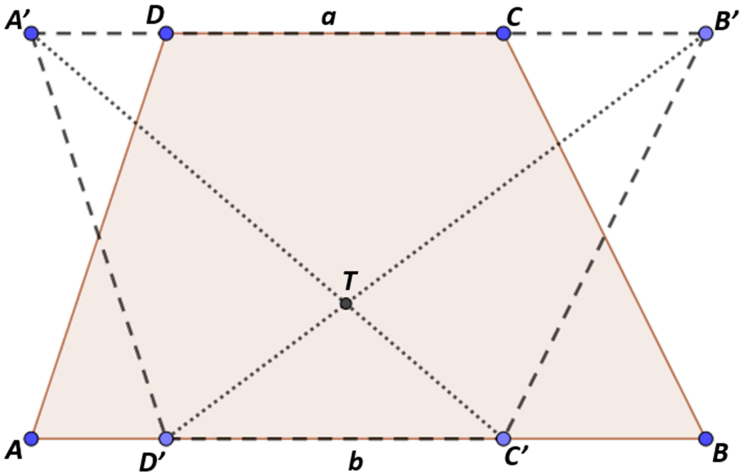
Figura 4.18: Trapézios $ABCD$ e $A'B'C'D'$.



Fonte: Autor.

As diagonais do trapézio $A'B'C'D'$ se interceptam justamente no ponto T.

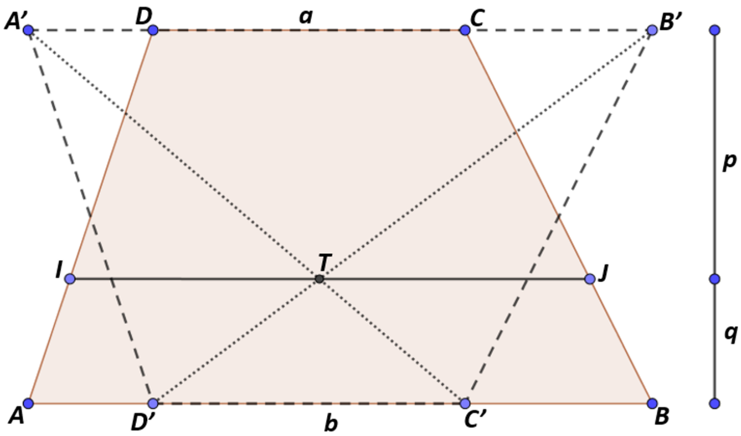
Figura 4.19: Diagonais do trapézio $A'B'C'D'$ se interceptam em T.



Fonte: Autor.

A partir daí, basta traçar um segmento paralelo as bases passando pelo ponto T, este segmento é a interpretação geométrica da Média Anti-harmônica.

Figura 4.20: Interpretação geométrica da média Anti-Harmônica.



Fonte: Autor.

Além disso, os triângulos $A'TB'$ e $D'TC'$ são semelhantes, dessa forma, pela proporcionalidade dos lados e alturas, segue que:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q}, \quad \text{implica} \quad \frac{b}{a} = \frac{p}{q}$$

Portanto, $\overline{IJ}$ é uma interpretação geométrica da Média Anti-harmônica com razão dos pesos $\frac{p}{q} = \frac{b}{a}$ como apresentado na Tabela 4.1.

Podemos obter as Médias Harmônicas, Geométrica, Aritmética, Quadrática e Anti-harmônica a partir da Média Ponderada. Assim, através de manipulações algébricas podemos reescrever a média ponderada da seguinte forma:

$$w = \frac{aq+bp}{p+q} = \frac{\frac{aq+bp}{q}}{\frac{p+q}{q}} = \frac{a+b(\frac{p}{q})}{(\frac{p}{q})+1} \tag{4.8}$$

Para obter as médias harmônicas, geométrica, aritmética, quadrática e anti-harmônica a partir da média ponderada, basta substituir a razão dos pesos das respectivas médias na expressão (4.8).

- **Média Harmônica**

  A razão dos pesos da Média Harmônica, de acordo com a Tabela 4.1, é $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$. Substituindo essa razão na expressão (4.8) , segue que

  $$w = \frac{a+b(\frac{a}{b})}{(\frac{a}{b})+1} = \frac{2ab}{a+b} = H(a,b)$$

  Assim, a média harmônica pode ser vista como um caso particular da média ponderada, basta considerar a razão dos pesos $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$.

- **Média Geométrica**

  A razão dos pesos da média geométrica é $\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ como já visto na Tabela 4.1. Substituindo essa razão na expressão (4.8), segue

  $$w = \frac{a+b\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)+1} = \frac{a+b\left(\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}\right)+1} = \frac{a+\sqrt{ab}}{\frac{\sqrt{ab}}{b}+1} = \frac{ab+b\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+b}\left(\frac{\sqrt{ab}-b}{\sqrt{ab}-b}\right)$$

  então

  $$w = \frac{ab\sqrt{ab}-ab^2+ab^2-b^2\sqrt{ab}}{ab-b^2} = \sqrt{ab}\left(\frac{ab-b^2}{ab-b^2}\right) = \sqrt{ab} = G(a,b)$$

  Logo, a Média Geométrica pode ser vista como um caso particular da Média Ponderada, basta considerar a razão dos pesos $\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

- **Média Aritmética**

  A razão dos pesos da média aritmética é $\frac{p}{q} = 1$ como já visto na Tabela 4.1. Substituindo essa razão em (4.8),

  $$w = \frac{a+b\cdot 1}{1+1} = \frac{a+b}{2} = A(a,b)$$

  Daí, a média aritmética pode ser vista como um caso particular da média ponderada, basta considerar a razão dos pesos $\frac{p}{q} = 1$.

- **Média Quadrática**

  A razão dos pesos da média harmônica, de acordo com a Tabela 4.1, é $\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2}}{b\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}}$. Substituindo essa razão na equação (4.8),

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{a + b\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2}}{b\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2}}{b\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}}\right)+1} = \frac{\frac{a\left(b\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}\right)+b\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2}\right)}{b\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}}}{\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}}{b\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}}\right)} \\
&= \frac{a(b\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2})+b(\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2})}{\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{a(b\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2})+b(\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2})}{-a\sqrt{2}+b\sqrt{2}} \\
&= \frac{ab\sqrt{2}-a\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{a^2+b^2}-ab\sqrt{2}}{-a\sqrt{2}+b\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

  daí

$$
w = \frac{-a\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{a^2+b^2}}{-a\sqrt{2}+b\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = Q(a,b)
$$

  Em consequência, a Média Quadrática pode ser vista como um caso particular da média ponderada, basta considerar a razão dos pesos $\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2}}{b\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}}$.

- **Média Anti-Harmônica**

  A razão dos pesos da média aritmética é $\frac{p}{q} = \frac{b}{a}$ como já visto na Tabela 4.1. Substituindo essa razão na equação (4.8),

$$
w = \frac{a + b(\frac{b}{a})}{(\frac{b}{a})+1} = \frac{a^2+b^2}{a+b} = AH(a,b)
$$

  Portanto, a Média Anti-harmônica pode ser vista como um caso particular da Média Ponderada, basta considerar a razão dos pesos $\frac{p}{q} = \frac{b}{a}$.

4.2 Interpretação Geométrica da Média Ponderada no Retângulo

Como visto no capítulo 2, é possível construirmos um quadrado de lado x equivalente ao retângulo de lados a e b preservando algumas características. De forma semelhante ao que foi visto, iremos apresentar uma interpretação geométrica da Média Ponderada no retângulo.

Na figura 2.6, temos um retângulo de lados a e b e um quadrado de lados x. Dados dois segmento de comprimentos p e q, vamos prolongar as medidas do retângulo e do quadrado até atingir um comprimento equivalente a p e q, ou seja, $\overline{BI} = \overline{FK} = p$ e $\overline{DJ} = \overline{HL} = q$ como mostrado na Figura 4.21.

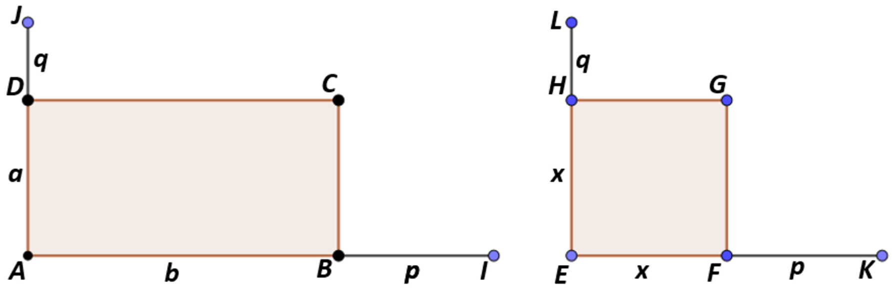
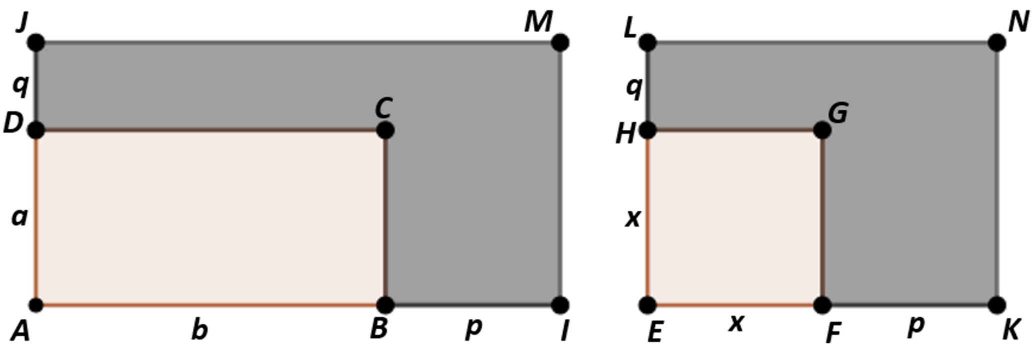


Figura 4.21: Retângulo $ABCD$ e Quadrado $EFGH$ com segmentos p e q

Construímos o retângulo $AIMJ$ e o retângulo $EKNL$, como na Figura 4.22. Assim, procuramos encontrar uma condição para x de tal forma que relacione as áreas sombreadas na Figura 4.22.

Figura 4.22: Retângulos $AIMJ$ e $EKNL$



Fonte: Autor.

Suponhamos que as áreas sombreadas sejam iguais, temos que

$$\begin{aligned} Area(AIMJ) - Area(ABCD) &= Area(EKNL) - Area(EFGH) \\ (b+p)(a+q) - ab &= (x+p)(x+q) - x^2 \\ ba + bq + pa + pq - ab &= x^2 + xq + px + pq - x^2, \end{aligned}$$

logo

$$x = \frac{ap + bq}{p + q}$$

Portanto, para ambos as áreas sombreadas serem iguais, é preciso que x seja a *Média Ponderada* dos lados do retângulo a e b com os pesos p e q respectivamente.

Capítulo 5

Aplicações das Médias

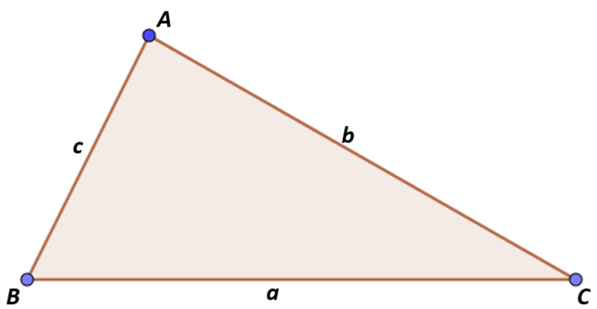
Neste capitulo apresentaremos uma aplicação na geometria analítica relacionada aos pontos notáveis de um triangulo, cujas coordenadas de cada um deles pode ser vista como uma Média Ponderada. Além disso, apresentamos algumas aplicações da Media Ponderada em problema no ENEM, IMO, etc.

Lembremos que os pontos notáveis do triângulo em coordenadas cartesianas se definem assim:

- **Baricentro** é o ponto de intersecção das três medianas do triângulo.
- **Ortocentro** é o ponto de intersecção das três alturas do triângulo
- **Incentro** é o ponto de intersecção das três bissetrizes internas do triângulo

Para isso, consideremos um triângulo de vértices A, B e C com lados de comprimento a, b e c, cujas coordenadas cartesianas sejam da seguinte forma: $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.

Figura 5.1: Triângulo com vértices A, B e C.



Fonte: Autor

Os detalhes da aplicação deixaremos para apresentar no final deste capítulo na forma de problemas, esta e outros resultados podem ser consultados em JÚNIOR [13](2014, p. 17).

Além dos problemas 1 e 2 do ENEM [12] são encontradas em todas as edições do ENEM com seus respectivos gabaritos questões envolvendo médias.

Problema 1:(ENEM 2018)[12] Os alunos da disciplina de estatística, em um curso universitário, realizam quatro avaliações por semestre com os pesos de 20%, 10%, 30% e 40%, respectivamente. No final do semestre, precisam obter uma média nas quatro avaliações de, no mínimo, 60 pontos para serem aprovados. Um estudante dessa disciplina obteve os seguintes pontos nas três primeiras avaliações: $46, 60$ e 50, respectivamente. O mínimo de pontos que esse estudante precisa obter na quarta avaliação para ser aprovado é:
a) $29,8$.
b) $71,0$.
c) $74,5$.
d) $75,5$.
e) $84,0$.

Solução: Seja x a nota da quarta avaliação. Fazendo a média ponderada de $46, 60, 50$ e x com os respectivos pesos 20%, 10%, 30% e 40%, temos que

$$\frac{46 \cdot 20\% + 60 \cdot 10\% + 50 \cdot 30\% + x \cdot 40\%}{20\% + 10\% + 30\% + 40\%}$$

Para que um estudante seja aprovado na disciplina, a média ponderada deverá ser, no mínimo, igual a 60. Assim,

$$\begin{aligned} 60 &= \frac{46 \cdot 20\% + 60 \cdot 10\% + 50 \cdot 30\% + x \cdot 40\%}{20\% + 10\% + 30\% + 40\%} \\ &= 30,2 + x \cdot 0,4, \end{aligned}$$

daí

$$x = 74,5.$$

Portanto, para ser aprovação na disciplina, o aluno precisará obter $74,5$ na quarta avaliação.

Problema 2: (ENEM 2017)[12] A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas (M)
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte.

Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação *Bom* ou *Excelente* conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é

a) $7,00$.
b) $7,38$.
c) $7,50$.
d) $8,25$.
e) $9,00$.

Solução Seja x a nota da disciplina I. Fazendo a média ponderada de $x, 8, 6, 5$ e $7,5$ com os pesos $12, 4, 8, 8$ e 10 respectivamente, temos que

$$\frac{x \cdot 12 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 8 + 5 \cdot 8 + 7,5 \cdot 10}{12 + 4 + 8 + 8 + 10}$$

Para o aluno atingir seu objetivo, o mínimo que ele precisa é de uma avaliação *Bom*, ou seja, vamos igualar a média ponderada a $7,0$. Daí,

$$\begin{aligned} 7 &= \frac{x \cdot 12 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 8 + 5 \cdot 8 + 7,5 \cdot 10}{12 + 4 + 8 + 8 + 10} \\ &= \frac{12x + 195}{42}, \end{aligned}$$

assim
$$x = 8,25.$$
Portanto, para conseguir prioridade nas disciplinas que deseja no semestre seguinte, o aluno precisa obter $8,25$ na disciplina I.

Problema 3:[20] Sejam x, y e z números reais positivos. Mostre que $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$.

Solução. Como x, y e z são números reais positivos, então
$$A\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right) \geq G\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right).$$
Assim,
$$\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x}} \quad \text{implica} \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3\sqrt[3]{1}.$$
Portanto, $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$. Note que a igualdade é valida quando $x = y = z$.

Problema 4: (Austrália 2000)[20] Seja x um número real não nulo e y um número real. Prove que $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x} \geq \sqrt{3}$.
Solução: Primeiramente, vamos reescrever a expressão $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x}$ da seguinte forma
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x} &= x^2 + y^2 + (\frac{1}{4x^2} + \frac{3}{4x^2}) + \frac{y}{x} \\ &= \left(y^2 + \frac{1}{4x^2} + \frac{y}{x}\right) + \left(x^2 + \frac{3}{4x^2}\right) \\ &= \left(y + \frac{1}{2x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{3}{4x^2}\right). \end{aligned}$$
Por outro lado, $A\left(x^2, \frac{3}{4x^2}\right) \geq G\left(x^2, \frac{3}{4x^2}\right)$, ou seja
$$\frac{x^2 + \frac{3}{4x^2}}{2} \geq \sqrt{x^2 \frac{3}{4x^2}} \quad \text{implica} \quad x^2 + \frac{3}{4x^2} \geq \sqrt{3}.$$
Como $\left(y + \frac{1}{2x}\right)^2 \geq 0$, temos que
$$\left(y + \frac{1}{2x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{3}{4x^2}\right) \geq \left(y + \frac{1}{2x}\right)^2 + \sqrt{3} \geq \sqrt{3}$$
Portanto, $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x} \geq \sqrt{3}$.

Problema 5:[20] Determinar o valor mínimo da expressão $f(x) = x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$, se $x > 0$.

Solução: Primeiramente, vamos reescrever $f(x)$ da seguinte forma

$$f(x) = x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}} = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Aplicando $A(x^2, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x}}}_{4 \text{ vezes}}) \geq G(x^2, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x}}}_{4 \text{ vezes}})$, temos que

$$\frac{x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{5} \geq \sqrt[5]{x^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad \text{implica} \quad x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 5,$$

logo $f(x) \geq 5$. Portanto, o valor mínimo de $f(x)$ é 5 e ocorre quando $x = 1$.

Problema 6: (IMO 2012) [11] Seja $n > 3$ um inteiro e sejam $a_2, a_3, \ldots, a_n$ números positivos tais que $a_2 a_3 ... a_n = 1$. Prove que

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdot \cdots \cdot (1 + a_n)^n \geq n^n$$

Solução: Primeiramente, para cada k inteiro, note que

$$1 + a_k = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k-1}}}_{(k-1) \text{ vezes}} + a_k$$

Aplicando $A(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{k-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k-1}}}_{(k-1) \text{ vezes}}, a_k) \geq G(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{k-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k-1}}}_{(k-1) \text{ vezes}}, a_k)$,

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\overbrace{\frac{1}{\sqrt{k-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k-1}}}^{(k-1) \text{ vezes}} + a_k}{k} &\geq \sqrt[k]{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{k-1}} \cdots \frac{1}{\sqrt{k-1}}}_{(k-1) \text{ vezes}} a_k} \\ \frac{1 + a_k}{k} &\geq \sqrt[k]{(\frac{1}{k-1})^{(k-1)} a_k}, \end{aligned}$$

logo

$$(1+a_k)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{(k-1)}}a_k.$$

Fazendo o k variar de 2 até n nessa última desigualdade, segue que

$$\begin{array}{rcl}
(1+a_2)^2 & \geq & \dfrac{2^2}{(2-1)^{(2-1)}}a_2 \\
(1+a_3)^3 & \geq & \dfrac{3^3}{(3-1)^{(3-1)}}a_3 \\
(1+a_4)^4 & \geq & \dfrac{4^4}{(4-1)^{(4-1)}}a_4 \\
& \vdots & \\
(1+a_n)^n & \geq & \dfrac{n^n}{(n-1)^{(n-1)}}a_n
\end{array}$$

Multiplicando todos as desigualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned}
(1+a_2)^2(1+a_3)^3(1+a_4)^4 \quad \ldots \quad & (1+a_n)^n \\
& \geq \frac{2^2}{(2-1)}a_2\frac{3^3}{(3-1)^2}a_3\frac{4^4}{(4-1)^3}a_4\ldots\frac{n^n}{(n-1)^{(n-1)}}a_n \\
& = a_2a_3\ldots a_nn^n
\end{aligned}$$

Como $a_2a_3\ldots a_n = 1$, segue, portanto, que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3(1+a_4)^4\ldots(1+a_n)^n \geq n^n.$$

5.1 Coordenadas do Baricentro, Incentro e Ortocentro

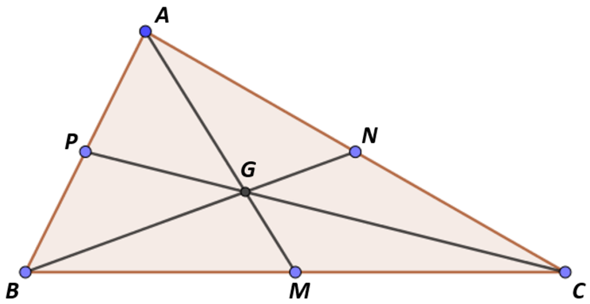
Nesta seção estudamos uma aplicação na geometria analítica relacionada aos pontos notáveis de um triangulo, cujas coordenadas de cada um deles pode ser vista como uma *Média Ponderada* seguindo as referências [13] e [17].

Baricentro ou Centroide

Problema 7:[13] O ponto $G(x_G, y_G)$ do $\triangle ABC$ é chamado de baricentro ou centroide e suas coordenadas são determinadas pela média aritmética das coordenadas dos vértices do triângulo, ou seja,

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Figura 5.2: Triângulo com medianas e baricentro (G)



Fonte: Autor.

Demonstração: Seja M o ponto médio do lado BC. Por hipótese, G é o baricentro do triângulo ABC, então $\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{2}{1}$, logo $\overline{AG} = 2\overline{GM}$. Em coordenadas cartesianas, vamos trabalhar com a entrada x e posteriormente com a y. Segue que

$$AG = 2GM, \quad \text{equivale a} \quad x_G - x_A = 2(x_M - x_G),$$

portanto

$$x_G = \frac{x_A + 2x_M}{3}.$$

Como M é o ponto médio do lado BC, então podemos escrever x_M como sendo $\frac{x_B + x_C}{2}$.

Daí, note que

$$x_G = \frac{x_A + 2x_M}{3} = \frac{x_A + 2(\frac{x_B + x_C}{2})}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}.$$

Logo, $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$. De forma análoga, pode-se encontrar $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$. ■

Incentro

Problema 8:[13] O ponto $I(x_I, y_I)$ do $\triangle ABC$ é chamado de incentro e suas coordenadas são determinadas pela média ponderada das coordenadas dos vértices do triângulo com pesos $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, ou seja,

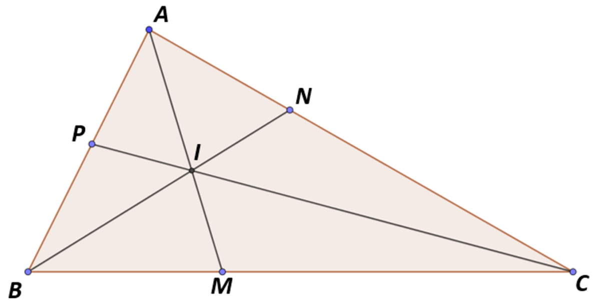
$$x_I = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c} \quad \text{e} \quad y_I = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c}.$$

Demonstração:

Pelo Teorema da Bissetriz Interna (5.1), temos que

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{c}{b}, \tag{5.1}$$

Figura 5.3: Triângulo com as bissetrizes e o Incentro (I)



Fonte: Autor.

logo M divide BC em segmentos proporcionais a b e c. Então, $\overline{BM} + \overline{MC} = \overline{BC}$ e pela equação (5.1) temos $\overline{MC} = \frac{b}{c}\overline{BM}$. Daí,

$$\overline{BM} + \frac{b}{c}\overline{BM} = \overline{BC}, \quad \text{logo} \quad \overline{BM} = \frac{c}{b+c}\overline{BC}.$$

Trazendo para coordenadas, com $M = (x, y)$, $B = (x_1, y_1)$ e $C = (x_2, y_2)$. Dessa forma, temos a seguinte equação

$$\begin{aligned} \overline{BM} &= \frac{c}{b+c}\overline{BC} \\ (x - x_1, y - y_1) &= \frac{c}{b+c}(x_2 - x_1, y_2 - y_1), \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} (x, y) &= \frac{c}{b+c}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) + (x_1, y_1) \\ &= (\frac{c}{b+c}x_2 - \frac{c}{b+c}x_1 + x_1, \frac{c}{b+c}y_2 - \frac{c}{b+c}y_1 + y_1) \\ &= \left(\frac{c}{b+c}x_2 + \frac{b}{b+c}x_1, \frac{c}{b+c}y_2 + \frac{b}{b+c}y_1\right) \\ &= \left(\frac{b}{b+c}x_1, \frac{b}{b+c}y_1\right) + \left(\frac{c}{b+c}x_2, \frac{c}{b+c}y_2\right) \\ &= \frac{b}{b+c}(x_1, y_1) + \frac{c}{b+c}(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Portanto

$$M = \frac{bB + cC}{b+c}.$$

De modo análogo $P = \frac{aA+bB}{a+b}$.

Como o vetor $\overrightarrow{AI}$ é um múltiplo do vetor $\overrightarrow{AM}$ e o vetor $\overrightarrow{CI}$ é um múltiplo do vector $\overrightarrow{CP}$, então existem α e β tais que

$$\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AM} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CI} = \beta\overrightarrow{CP}.$$

Como $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC}$, temos que $\alpha\overrightarrow{AM} - \beta\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AC}$, logo

$$\alpha(M - A) - \beta(P - C) = (C - A).$$

Vamos determinar o valor de β. Consideremos o ponto A como sendo a origem do sistema, ou seja $A = (0, 0)$. Substituindo os valores em M e P, obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha(M - A) - \beta(P - C) &= (C - A)\\
\alpha M - \beta P + \beta C &= C\\
\alpha\frac{bB + cC}{b + c} - \beta\frac{bB}{a + b} + \beta C &= C\\
\left(\frac{\alpha b}{b + c} - \frac{\beta b}{a + b}\right)B + \left(\frac{\alpha c}{b + c} - 1 + \beta\right)C &= 0.
\end{aligned}$$

Como $B = B - A = \overrightarrow{AB}$ e $C = C - A = \overrightarrow{AC}$ são vetores não paralelos. Logo, devemos ter

$$\left(\frac{\alpha b}{b + c} - \frac{\beta b}{a + b}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\alpha c}{b + c} - 1 + \beta\right) = 0$$

Da equação $(\frac{\alpha b}{b+c} - \frac{\beta b}{a+b}) = 0$, segue que $\alpha = \frac{\beta(b+c)}{a+b}$.

Substituindo a expressão de α na equação $\frac{\alpha c}{b+c} - 1 + \beta = 0$, obtemos

$$0 \;=\; \frac{\frac{\beta(b+c)}{a+b}c}{b + c} - 1 + \beta = \frac{\beta c}{a + b} - 1 + \beta,$$

assim

$$\beta\left(\frac{c}{a + b} + 1\right) = 1 \quad \text{implica} \quad \beta = \frac{a + b}{a + b + c}.$$

Por outro lado, temos que $\overrightarrow{CI} = \beta\overrightarrow{CP}$, logo

$$\begin{aligned}
I - C &= \beta(P - C)\\
I &= C + \frac{a + b}{a + b + c}\left(\frac{aA + bB}{a + b} - C\right)\\
&= C + \frac{a + b}{a + b + c}\left(\frac{aA + bB - (a + b)C}{a + b}\right)\\
&= C + \left(\frac{aA + bB - (a + b)C}{a + b + c}\right),
\end{aligned}$$

portanto

$$I = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}.$$

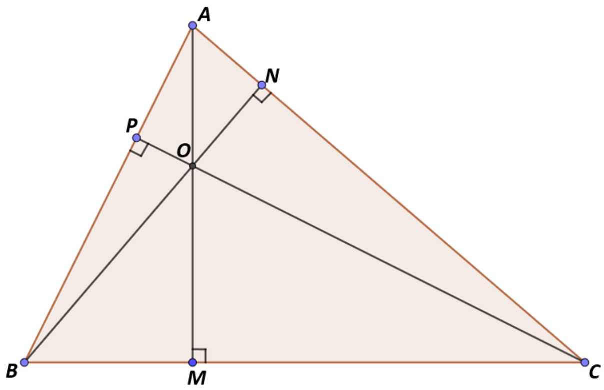
Em consequência, as coordenadas do Incentro de um triângulo qualquer pode ser interpretado como uma *Média Ponderada* das coordenadas dos vértices e os pesos como sendo os comprimentos dos respectivos vértices. ■

Ortocentro

Problema 9:[13] As coordenadas do ortocentro do triângulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ e ângulos internos medindo, respectivamente $\alpha = \angle A, \beta = \angle B$ e $\gamma = \angle C$, é dado pela média ponderada dos vértices tendo como pesos as $\tan(\alpha), \tan(\beta)$ e $\tan(\gamma)$, ou seja,

$$O = \frac{A\tan(\alpha) + B\tan(\beta) + C\tan(\gamma)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma)}.$$

Figura 5.4: Ortocentro de um triângulo (O)



Fonte: Autor.

Demonstração: Consideremos um triângulo ABC não retângulo. Sejam M, N e P os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C respectivamente. Observe que no $\triangle BPC$ temos que

$$\tan(\beta) = \frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}, \qquad \text{implica} \qquad \overline{CP} = \overline{PB}\ \tan(\beta).$$

Analogamente no $\triangle APC$ temos

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{CP}}{\overline{AP}}, \qquad \text{implica} \qquad \overline{CP} = \overline{AP}\ \tan(\alpha).$$

Daí, segue que $\overline{AP}\tan(\alpha) = \overline{PB}\tan(\beta)$. Logo, $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)}$. Portanto, P divide o segmento $\overline{AB}$ em partes proporcionais a $\tan(\beta)$ e $\tan(\alpha)$.

Sendo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}$, segue que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overline{AP}\,\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)} = \overline{AP}\,\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{\tan(\beta)}$$

Sendo $P = (x, y)$, então

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB}\,\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}\\
(x - x_1, y - y_1) &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)\,\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
(x, y) &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} + (x_1, y_1).\\
&= \left((x_2 - x_1)\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} + x_1, (y_2 - y_1)\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} + y_1\right)\\
&= (x_2\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} - x_1\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} + x_1,\\
&\quad y_2\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} - y_1\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} + y_1)\\
&= \left(x_2\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} + x_1\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}, y_2\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} + y_1\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}\right)\\
&= (x_1, y_1)\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} + (x_2, y_2)\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}\\
&= A\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} + B\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}
\end{aligned}$$

Portanto

$$P = \frac{A\tan(\alpha) + B\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}$$

De modo análogo,

$$M = \frac{B\tan(\beta) + C\tan(\gamma)}{\tan(\beta)+\tan(\gamma)}.$$

Como o vetor $\overrightarrow{CO}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{CP}$ e o vetor $\overrightarrow{AO}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{AM}$, então existem constantes reais λ e μ, tais que

$$\overrightarrow{CO} = \lambda\overrightarrow{CP} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AO} = \mu\overrightarrow{AM}$$

Como $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{CO}$, temos que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \mu\overrightarrow{AM} - \lambda\overrightarrow{CP}\\
C - A &= \mu(M - A) - \lambda(P - C).
\end{aligned}$$

A seguir determinemos λ. Para simplificar os cálculos, consideremos o ponto $A = (0,0)$. Daí, seque que

$$\begin{aligned}
C - A &= \mu(M - A) - \lambda(P - C)\\
C &= \mu M - \lambda(P - C) + (1 - \mu)A\\
C &= \mu M - \lambda P + \lambda C\\
C &= \mu\frac{B\tan(\beta) + C\tan(\gamma)}{\tan(\beta) + \tan(\gamma)} - \lambda\frac{A\tan(\alpha) + B\tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)} + \lambda C\\
C &= \mu\frac{B\tan(\beta) + C\tan(\gamma)}{\tan(\beta) + \tan(\gamma)} - \lambda\frac{B\tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)} + \lambda C\\
0 &= \mu\frac{B\tan(\beta) + C\tan(\gamma)}{\tan(\beta) + \tan(\gamma)} - \lambda\frac{B\tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)} + \lambda C - C\\
0 &= \mu\frac{B\tan(\beta)}{\tan(\beta) + \tan(\gamma)} + \mu\frac{C\tan(\gamma)}{\tan(\beta) + \tan(\gamma)} - \lambda\frac{B\tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)} + \lambda C - C
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos, segue que

$$\left(\frac{\mu\tan(\beta)}{\tan(\beta) + \tan(\gamma)} - \frac{\lambda\tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}\right)B + \left(\frac{\mu\tan(\gamma)}{\tan(\beta) + \tan(\gamma)} + \lambda - 1\right)C = 0.$$

Como $B = B - A = \overrightarrow{AB}$ e $C = C - A = \overrightarrow{AC}$ não são paralelos, obtemos

$$\frac{\mu\tan(\beta)}{\tan(\beta) + \tan(\gamma)} - \frac{\lambda\tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)} = 0$$

e

$$\frac{\mu\tan(\gamma)}{\tan(\beta) + \tan(\gamma)} + \lambda - 1 = 0 \tag{5.2}$$

Daí, segue que

$$\frac{\mu\tan(\beta)}{\tan(\beta) + \tan(\gamma)} = \frac{\lambda\tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}, \quad \text{implica} \quad \mu = \frac{\lambda(\tan(\beta) + \tan(\gamma))}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}.$$

Substituindo μ na equação (5.2) obtemos

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\mu\tan(\gamma)}{\tan(\beta)+\tan(\gamma)} + \lambda - 1 &= \frac{\left(\frac{\lambda\left(\tan(\beta)+\tan(\gamma)\right)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}\right)\tan(\gamma)}{\tan(\beta)+\tan(\gamma)} + \lambda - 1 \\
&= \frac{\lambda\tan(\gamma)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} + \lambda - 1,
\end{aligned}
$$

daí

$$
\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{\tan(\gamma)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} + 1\right)\lambda \\
&= \left(\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}\right)\lambda
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\lambda = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)}.
$$

Como $\overrightarrow{CO} = \lambda\overrightarrow{CP}$, então

$$
O - C = \lambda(P - C), \quad \text{implica} \quad O = \lambda P - \lambda C + C
$$

portanto

$$
O = (1-\lambda)C + \lambda P \tag{5.3}
$$

Agora, substituindo as expressões de λ e de P na equação 5.3, segue que

$$
\begin{aligned}
O &= \left(1 - \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)}\right)C + \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)}\frac{A\tan(\alpha)+B\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} \\
&= \left(\frac{\tan(\gamma)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)}\right)C + \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)}\frac{A\tan(\alpha)+B\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} \\
&= \left(\frac{\tan(\gamma)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)}\right)C + \frac{A\tan(\alpha)+B\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)} \\
&= \frac{A\tan(\alpha)+B\tan(\beta)+C\tan(\gamma)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, as coordenadas do *Ortocentro* de qualquer triângulo é dada pela média ponderada das coordenadas dos vértices com os pesos sendo a tangente dos respectivos ângulos internos de cada vértice.

■

Apêndice

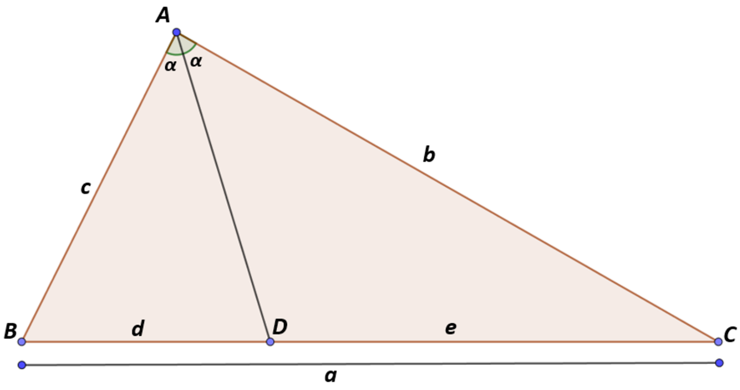
Resultado Complementar

Trazemos aqui um resultado de complementação para deixar o texto mais auto contido. O enunciado, a demonstração e alguns exemplos do Teorema 5.1 podem ser encontrados em [18].

Teorema 5.1 (Bissetriz Interna) *Seja ABC um triângulo qualquer. Se a bissetriz interna do ângulo $\angle A$ intersecta o lado BC no ponto D, então D divide o lado BC em dois segmentos proporcionais aos outros dois lados, isto é,*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$$

Figura 5.5: Triângulo ABC com AD sendo a bissetriz do ângulo $\angle A$



Fonte: Autor.

Referências Bibliográficas

[1] BECKENBACH, E.; BELLMAN, R. An Introduction to inequalities. Random House: New York, 1961.

[2] BOYER, C. B.; MERZBAC, U. C. A History of Mathematics. 3 ed. John Wiley & Sons, Inc.New York, 1968.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponível em: https://acesse.one/basenacionalcomum. Acesso em: 13 mai. 2023.

[4] BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. Estatística básica. Saraiva: São Paulo, 2017.

[5] SANTANA, C. V. H. B. Simetria de invariância de escala discreta, Log-Periodicidadee singularidades em tempo finito. Dissertação (Mestrado) – PPGF - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2013.

[6] ERCOLANO, Joseph L. Geometric interpretations of some classical, inequalities. Math. Magazine, v. 45, n. 3, p. 127-132, 1972.

[7] EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: ed. UNICAMP, 1995.

[8] GASPERI, J. O problema de Apolônio. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT - Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.

[9] ILES, Kim; WILSON, Lester J. An Improvement of a historic construction. Math. Teacher, v. 73, n. 4, p. 270-274, 1980.

[10] HOEHN, Larry. A Geometrical Interpretation of the Weighted Mean. The College Mathematics Journal. Taylor & Francis, Ltd. on behalf of the Mathematical Association of America. Mar., 1984.

[11] IMO. International Mathematical Olympiad. Disponível em: https://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em: 13 mai. 2023.

[12] INEP. Enem: provas e gabaritos. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos. Acesso em: 20 abr. 2023.

[13] JÚNIOR, A. S. B. Pontos Notáveis de um Triângulo: Uma Abordagem Geométrica e Analítica. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT - Universidade Federal do Ceará, 2014.

[14] LIMA, E. L.; MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E. A Matemática do Ensino Médio - Volume 2. 5 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

[15] MAOR, Eli; JOST, Eugen. Beautiful Geometry. Math. Teacher. Princeton University Press, New Jersey, 2014.

[16] MAOR, Eli. A mathematicians repertoire of means. Math. Teacher, v. 70, n. 6, p. 438 - 442, 1977.

[17] MORGADO, A. C.. Revista Professor de Matemática – RPM 43. Coordenadas para o centro do triângulo. Rio de Janeiro, RJ. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/43/5.htm. Acesso em: 20 abr. 2023.

[18] MUNIZ NETO, A. C.; OLIVEIRA, M. M.. Portal da Matemática – Obmep. Disponível em: https://l1nq.com/portaldaobmep. Acesso em: 13 mai. 2023.

[19] MUNIZ NETO, A. C.; Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2. Geometria Euclidiana Plana. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012

[20] OBMEP. Médias aplicações. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/medias-e-desigualdades-aplicacoes/. Acesso em: 20 abr. 2023.

[21] SCHILD, Albert. Geometry of the means. Math. Teacher, v. 67, n. 7, p. 554-558, 1974.

[22] SLAY, Jack C.; SOLOMON, J. L. A mean generating function. TYCMJ, v. 12, n. 2, p. 79-84, 1981.

[23] STEWART, James. Cálculo: volume 1. 8ª edição. SÃO PAULO: Cengage Learning, 2016, 672 p.