UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

MATHEUS BETT

EQUILÍBRIO DE NASH NO ENSINO MÉDIO

JOINVILLE
2023

MATHEUS BETT

EQUILÍBRIO DE NASH NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Rafael Santos Furlanetto

JOINVILLE
2023

Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Bett, Matheus
Equilíbrio de Nash no Ensino Médio / Matheus Bett. -- 2023.
120 p.

Orientador: José Rafael Santos Furlanetto
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2023.

1. Teoria dos Jogos. 2. Teoria Econômica dos Jogos. 3. Equilíbrio de Nash. 4. Educação Básica. 5. Produto Educacional. I. Furlanetto, José Rafael Santos. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

MATHEUS BETT

EQUILÍBRIO DE NASH NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Rafael Santos Furlanetto

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. José Rafael Santos Furlanetto
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membros:

Prof. Dr. Luís Henrique de Santana
Universidade Estadual de Maringá

Profa. Dra. Ligia Liani Barz
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 21 de julho de 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a força divina, pelo dom da vida e pelas oportunidades que tem me dado a cada momento.

Ao meu orientador por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa, a todos os professores do curso da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC pela excelência da qualidade técnica de cada um e aos membros da banca, por aceitarem o convite e participarem da defesa.

Aos meus pais, Edson e Gilvania, e irmão, Daniel, que sempre estarão ao meu lado me apoiando ao longo de toda a minha trajetória. Sou muito grato à vocês.

A minha esposa, Franciara, por ter dado todo amor, carinho, atenção e incentivo em todos os momentos. Muito obrigado pela sua cumplicidade e por aceitar ser minha companheira desse jogo chamado Vida.

A todos os colegas e amigos que com companheirismo e amizade me ajudaram a enfrentar com coragem e determinação essa etapa em minha vida.

Por fim, deixo um agradecimento especial, através das palavras ditas pelo Rapper Snoop Dogg: “Eu quero me agradecer por acreditar em mim mesmo, quero me agradecer por todo esse trabalho duro. Quero me agradecer por não tirar folgas. Quero me agradecer por nunca desistir. Quero me agradecer por ser generoso e sempre dar mais do que recebo. Quero me agradecer por tentar sempre fazer mais o certo do que o errado. Quero me agradecer por ser eu mesmo o tempo inteiro”.

“O melhor resultado acontece quando todos em
um grupo fazem o melhor por si próprios e pelo
grupo” (NASH, 2001)

RESUMO

A Teoria dos Jogos é uma área da matemática aplicada que busca compreender e modelar situações de conflitos em que há agentes que interagem entre si de forma racional, de modo a encontrar as melhores decisões a serem adotadas por cada indivíduo. Desta forma é possível modelar várias circunstâncias como jogo e a teoria pode ser aplicada nas mais diversas áreas, como, por exemplo, na economia, na política, no cotidiano e em guerras. Por ter esse grande leque de aplicação, a Teoria dos Jogos se divide em Teoria Combinatória dos Jogos e em Teoria Econômica dos Jogos. O estudo da Teoria dos Jogos e das suas vertentes está bem presente no meio acadêmico e praticamente inexistente na Educação Básica. Desta forma surgiu interesse em solucionar o seguinte questionamento: seria possível ensinar conceitos da Teoria dos Jogos, com enfoque na Teoria Econômica dos Jogos, no Ensino Básico brasileiro? Para solucionar essa pergunta, esta dissertação pretende expor os conceitos fundamentais da Teoria dos Jogos e elaborar um Produto Educacional que indique a possibilidade de apresentar conceitos básicos da Teoria dos Jogos no Ensino Básico. Para alcançar esses objetivos, o desenvolvimento deste trabalho baseou-se principalmente em estudos feitos por Neumann; Morgenstern (1953) e Nash (1949, 1950, 1951, 1953) para a Teoria dos Jogos e Brasil (2013, 2018) para o Produto Educacional. Este trabalho é uma pesquisa qualitativa. Através dos estudos é possível perceber a possibilidade de elaborar um material que possa ser aplicado no Ensino Médio, pois os documentos norteadores da educação brasileira asseguram a possibilidade de apresentar as noções da Teoria dos Jogos, uma vez que os conceitos matemáticos utilizados nessa área estão presentes no Ensino Médio. Por isso é possível produzir o Produto Educacional presente nesta dissertação que seja aplicável no Ensino Básico brasileiro.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos. Teoria Econômica dos Jogos. Equilíbrio de Nash. Educação Básica. Produto Educacional.

ABSTRACT

Game Theory is an area of applied mathematics that seeks to understand and model conflict situations in which there are agents that interact with each other in a rational way, in order to find the best decisions to be adopted by each individual. In this way, it is possible to model various circumstances as a game and the theory can be applied in the most diverse areas, such as, for example, in the economy, in politics, in daily life and in wars. Due to its wide range of applications, Game Theory is divided into Combinatorial Game Theory and Economic Game Theory. The study of Game Theory and its aspects is very present in academia and practically non-existent in Basic Education. In this way, interest arose in solving the following question: would it be possible to teach concepts of Game Theory, with a focus on Economic Theory of Games, in Brazilian Basic Education? To solve this question, this dissertation intends to expose the fundamental concepts of Game Theory and to elaborate an Educational Product that indicates the possibility of presenting basic concepts of Game Theory in Basic Education. To achieve these objectives, the development of this work was based mainly on studies carried out by Neumann; Morgenstern (1953) and Nash (1949, 1950, 1951, 1953) for Game Theory and Brazil (2013, 2018) for Educational Product. This work is a qualitative research. Through the studies, it is possible to perceive the possibility of elaborating a material that can be applied in High School, since the guiding documents of Brazilian education ensure the possibility of presenting the notions of Game Theory, since the mathematical concepts used in this area are present in high school. Therefore, it is possible to produce the Educational Product present in this dissertation that is applicable in Brazilian Basic Education.

Keywords: Game Theory. Economic Theory of Games. Nash Equilibrium. Basic Education. Educational Product.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ministrar aulas de matemática no Brasil é desafiador, uma vez que os indicadores avaliados dessa área em provas (inter)nacionais obtêm resultados inferiores ao esperado. Dessa forma entende-se que os estudantes não conseguem adquirir as competências e habilidades necessárias para a sua formação. Também é perceptível a desmotivação dos mesmos ante aos assuntos abordados na disciplina, uma vez que, segundo eles, são assuntos complexos e difíceis.

Um modo de deixar as aulas prazerosas e conseguir quebrar estigmas sobre a disciplina seria utilizar em sala de aula algo que está presente no cotidiano do estudante. Um exemplo para esse fato seria lecionar e aplicar jogos, visto que, desde o nascimento até o final da vida de qualquer ser humano as tomadas de decisões estão presentes. Além disso, estudos e documentos oficiais, como a Base Comum Curricular e Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, indicam que a utilização de jogos nas aulas potencializa o desenvolvimento do raciocínio e da tomada de decisão em situações de conflito, assim aperfeiçoando o pensamento matemático.

Os jogos, com certas características, são estudados a quase um século, pois possui uma matemática intrigante, fascinante e relevante para a sociedade. Por conta dessa particularidade, analisar essas brincadeiras têm como intenção descobrir, através de ferramentas matemáticas, um modo de como o jogador possa sempre maximizar o seu ganho em qualquer situação que possa adotar no jogo.

A área que estuda os jogos se chama Teoria dos Jogos e sua intenção é modelar fenômenos sociais, econômicos, políticos, ou quaisquer outras situações na qual haja uma ou mais pessoas que tenham que tomar alguma decisão racional. Através dos estudos desses fenômenos cria-se um ramo da Teoria dos Jogos, chamada de Teoria Econômica dos Jogos.

A Teoria Econômica dos Jogos procura encontrar uma solução na qual maximize os ganhos de todos os agentes presentes no jogo. Esses jogos podem resultar em ganhos em que necessita haver apenas um vencedor, mais de um ganhador ou mais de um perdedor, porém todos obtendo o menor prejuízo possível.

Por conta de todos os fatores descritos anteriormente, esse ramo é pesquisado pelo autor desse trabalho há alguns anos, uma vez que este tema despertou o interesse em compreender a matemática presente nas brincadeiras. Por conta desses estudos, foi produzido um trabalho que resultou na obtenção de grau de licenciado em matemática.

Tendo isso em mente surge a seguinte questão: seria possível ensinar conceitos da Teoria dos Jogos, com enfoque na Teoria Econômica dos Jogos, no Ensino Básico brasileiro?

Portanto, este trabalho pretende expor os conceitos básicos e fundamentais da Teoria dos Jogos, em especial a Teoria Econômica dos Jogos, e elaborar um Produto Educacional que indique a possibilidade de apresentar conceitos básicos da Teoria dos Jogos no Ensino Básico.

Para alcançar esse objetivo principal, pretende-se compreender o processo histórico da Teoria dos Jogos, assim como a sua divisão em Teoria Combinatória e Econômica dos Jogos; entender os jogos de uma pessoa ou vários jogadores finitos e encontrar um modo de como solucioná-los, de modo a encontrar uma solução que seja estratégica; descrever de forma nítida todos os conceitos da Teoria dos Jogos de modo que os docentes tenham uma base e uma breve formação a respeito dessa área e produzir um documento norteador para que professores da rede básica possam utilizar em suas aulas no Ensino Médio.

Assim, esse trabalho divide-se em nove capítulos, sendo essa introdução o primeiro capítulo. O segundo capítulo é apresentado um pouco da história da Teoria dos Jogos. O terceiro capítulo classifica-se e conceitua-se a Teoria dos Jogos em dois ramos, a Teoria Combinatória dos Jogos e a Teoria Econômica dos Jogos e no quarto capítulo destina-se ao embasamento teórico para os jogos de uma pessoa. Já o quinto capítulo é apresentado a fundamentação teórica para jogos com mais de um jogador e o sexto capítulo é apresentado jogos que ao somar os ganhos dos agentes em todos os cenários sempre resultarão no mesmo valor, sendo um caso particular desses jogos conhecidos como Jogos de Soma Zero. No sétimo capítulo é demonstrado a existência de uma solução estratégica para todos os jogos que podem ser representados por uma matriz de ganhos, sendo conhecida como Equilíbrio de Nash. O oitavo capítulo aponta um embasamento teórico educacional que fundamente a aplicação da Teoria Econômica dos Jogos, em especial a aplicação do Equilíbrio de Nash, no Ensino Médio. A partir de todos esses estudos, elabora-se um produto educacional, presente no apêndice. Por fim, no nono capítulo, são apresentadas algumas considerações finais sobre a pesquisa realizada.

2 UM POUCO DA HISTÓRIA DA TEORIA DOS JOGOS

Pesquisadores indicam a existência de jogos, em especial os jogos de salão, desde 2600 anos antes da era comum. Esses jogos eram utilizados por algumas culturas como rituais religiosos ou para adivinhação. Já na cultura indiana, os jogos eram usados tanto para lazer quanto para simular batalhas (SANTOS, 2016).

Assim

> É inegável a presença marcante dos jogos na sociedade humana, fazendo parte do desenvolvimento humano, todavia seu estudo foi sempre visto com certa desconfiança se não descaso, principalmente pelo aspecto dos jogos mais populares envolverem elementos aleatórios e imprevisíveis que poderiam influenciar de forma favorável a um dos participantes do jogo - denominados de acaso ou sorte, ou sua falta, o azar - conhecidos por jogos de azar. (SANTOS, 2016, p. 4)

Com o surgimento da Teoria das Probabilidades essa situação começou a mudar. Com a utilização deste conhecimento, os seres humanos foram capazes de resolver vários problemas que envolveriam os jogos de azar.

Por volta do século XVIII, Pierre Rémond de Montmort e Nicolaus Bernoulli começam a trocar mensagens e estudar um jogo estratégico e de azar sendo jogado com um baralho de 52 cartas e com no máximo 208 jogadores. Esse jogo de cartas chamado é Le Her. Uma situação simplificada é quando têm somente dois jogadores, que serão chamados de Paul e Pierre, e a sua solução não é simplesmente determinada.

> Paul retira duas cartas aleatoriamente, sendo uma para Pierre e outra para si mesmo do baralho. O objetivo principal de cada um é obter uma carta de maior valor que do seu adversário. A ordem de valor é *Ás(A)*, *Dois(2)*, *Três(3)*, $\cdots$, *Dez(10)*, *Valete(J)*, *Rainha(Q)* e *Rei(K)*. Caso Pierre não está contente com sua carta ele pode trocar a sua carta pelo, a do Paul, mas se Paul tem um *Rei* pode recusar-se de realizar a troca e continuar com o *Rei*. Por outro lado, se Paul não está contente com sua carta original, ou com a carta que foi obrigado a trocar com Pierre, ele pode trocar a sua carta por outra escolhida aleatoriamente da pilha de cartas restantes, mas se sua carta for um *Rei* ele terá de continuar com a carta. Se Paul e Pierre tem carta de mesmo valor, Pierre é considerado perdedor. (TODHUNTER, 1985, p.106, tradução própria).

Dessa forma fica perceptível que as cartas de valores altos não serão trocadas, já as de menores valores serão trocadas. Fica a dúvida do que fazer com as cartas que ficam no meio dos valores, como as de números sete e oito.

As correspondências enviadas por Montmort e Nicolaus Bernoulli depois de 1713, que nunca foram publicadas e ignoradas pelos historiadores, contêm notas científicas e futuras discussões, que apareceram na literatura, sobre problemas probabilísticos. O assunto principal das correspondências era um debate sobre o jogo Le Her. No entanto, havia também argumentações sobre vários problemas de álgebra, geometria, equações diferenciais e séries infinitas.

Montmort escreveu o problema inicialmente para quatro pessoas, fazendo a seguinte pergunta: quais são as oportunidades de cada jogador ganhar em relação à ordem de suas jogadas? Para isso, trocaram muitas correspondências de modo a dar respostas a essas perguntas e conseguirem chegar a algumas conclusões. Algumas foram bem parecidas, porém continham alguns erros. Esses erros foram encontrados por James Waldegrave (BELLHOUSE; FILLION, 2015).

Waldegrave escreveu o seguinte para Montmort:

> Argumentamos que é indiferente Paul trocar ou segurar uma carta sete, e para Pierre trocar ou segurar uma carta com oito. Para provar isso, devo primeiro explicar a sua sorte em todos os casos. Quando Paul tem um sete, é $\frac{780}{50 \cdot 51}$ para ele mudar, quando ele fica com a carta a sua sorte é $\frac{720}{50 \cdot 51}$ se Pierre ficar com o oito, e $\frac{816}{50 \cdot 51}$ se Pierre trocar para oito. O destino de Pierre tendo um oito é $\frac{150}{23 \cdot 50}$ se ele ficar com a carta, e $\frac{210}{23 \cdot 50}$ se ele mudar, caso Paul mantenha o sete; $\frac{350}{27 \cdot 50}$ ficando com ela, e $\frac{314}{27 \cdot 50}$ trocando caso Paul segura um sete. Então todos os resultados do jogo é $\frac{780}{50 \cdot 51}$ ou $\frac{720}{50 \cdot 51}$ ou $\frac{816}{50 \cdot 51}$ para a sorte de Paul e $\frac{150}{23 \cdot 50}$ ou $\frac{210}{23 \cdot 50}$ ou $\frac{350}{27 \cdot 50}$ ou $\frac{314}{27 \cdot 50}$ para as sortes de Pierre (BELLHOUSE; FILLION, 2015, p 5, tradução própria).

Com esses resultados é possível tabular os dados das probabilidades de Paul vencer dependendo de todas as estratégias que podem ocorrer no jogo. Veja a Tabela 1 que ilustra essa situação.

Tabela 1 – Chances de Pierre vencer dependendo das estratégias

		Pierre: Trocar oito (ou inferior)	Pierre: Ficar com o oito (ou superior)
Paul	Trocar o sete (ou inferior)	$\frac{2828}{5525}$	$\frac{2838}{5525}$
Paul	Ficar com o sete (ou superior)	$\frac{2834}{5525}$	$\frac{2828}{5525}$

Fonte: Bellhouse; Fillion(2015, p. 6, tradução própria).

Através dos dados dessa tabela, Waldegrave foi capaz de chegar em uma conclusão e encontrar uma solução para esse problema.

> Analisando a matriz de probabilidades de vitórias de Pierre e Paul, ele conclui que cada jogador não deve escolher uma regra de forma fixa, mas com uma certa aleatoriedade. Concluindo que para Pierre ele deve adotar a regra de manter cartas com valor igual a oito ou superior (e trocar cartas menores) com uma probabilidade de 5/8 e trocar cartas abaixo de oito com probabilidade de 3/8. E Paul deve utilizar, conforme esperado, as probabilidades contrárias, ou seja trocar com probabilidade de 5/8 e manter com probabilidade de 3/8. Esta solução, foi acatada por todos os envolvidos, onde Bernoulli inclusive elogia Waldegrave por sua análise (SANTOS, 2016, p.8)

A solução deste problema apresentado por Waldegrave através das correspondências a Montemort e Bernoulli fornece uma resposta através de um equilíbrio de estratégias mistas, que será visto mais adiante, porém ele não estendeu o estudo para uma teoria mais geral (SARTINI et al., 2004).

Um dos primeiros a elaborar informações importantes para a Teoria dos Jogos foi Antoine Augustin Cournot. No seu livro *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses* de 1838, expôs um modelo de duopólio que leva seu nome, o duopólio de Cournot. O que ele propôs foi o seguinte: As empresas vendem produtos iguais, ou seja, os consumidores não conseguem distinguir os produtos por sua procedência; A variável de controle é a quantidade produzida; Cada empresa decide de forma independente e simultânea a quantidade de produtos que produzirá; O custo é uma função definida pela quantidade produzida, ou seja, $C(q_i) = cq_i$; na qual q_i é a quantidade produzida pela indústria i, com $i \in \{1,2\}$, e c é o custo de produção de uma peça, considerado constante, sendo chamada de custo marginal; As fábricas não possuem restrições de capacidade, podendo atender toda demanda que forem receber; As empresas vendem o produto por um mesmo preço, pois se não fosse assim e por produzirem objetos idênticos os compradores adquiririam o produto que fosse mais barato; O preço P é uma função linear da demanda, $P = a - bQ$, na qual Q é a demanda total, que por sua vez é a soma das fabricações que cada empresa faz, ou seja, $Q = q_1 + q_2$. Já a é o maior valor que os indivíduos pagariam pela unidade do produto (SANTOS, 2016).

Em relação a essas hipóteses levantadas, a receita de cada empresa é uma função de sua produção e do preço utilizado para o produto, ou seja, $R_i = P \cdot q_i$.

Já o lucro de cada empresa é uma diferença entre o preço do produto e custo de fabricação da mesma. Dessa forma, a Equação (1) resultará no lucro de cada empresa.

$$\begin{aligned} L_i &= R_i - C(q_i) \\ &= P \cdot q_i - c \cdot q_i \\ &= (P - c) \cdot q_i \\ &= ((a - bQ) - c) \cdot q_i \\ &= (a - b(q_1 + q_2) - c) \cdot q_i \end{aligned} \tag{1}$$

Uma condição importante que deve-se considerar é que $a > c$. Isso é perceptível, pois caso o custo de produção fosse maior que o valor a ser pago pelos consumidores, não seria viável fabricar o produto. Logo não há demanda, preço e custo negativos. Assim $a > c > 0$.

O interesse das empresas é sempre maximimar o seu lucro. Uma maneira de encontrar o valor em que terá o maior retorno será utilizando noções básicas de Cálculo Diferencial, ou seja, obter o valor máximo quando a primeira derivada da função lucro em relação a sua produção for nula. Desta forma, tem-se as Equações a seguir.

$$\frac{dL_1}{dq_1} = 0 \Rightarrow a - c - 2bq_1 - bq_2 = 0 \Rightarrow 2q_1 + q_2 = \frac{a-c}{b} \tag{2}$$

$$\frac{dL_2}{dq_2} = 0 \Rightarrow a - c - 2bq_2 - bq_1 = 0 \Rightarrow 2q_2 + q_1 = \frac{a-c}{b} \tag{3}$$

Como cada empresa toma as suas decisões sem influência e o conhecimento da decisão da outra para obter a sua produção, temos que as variáveis q_1 e q_2 são independentes. Desta forma obtém-se o Sistema de Equações abaixo.

$$\begin{cases} 2q_1 + q_2 = \frac{a-c}{b} \\ 2q_2 + q_1 = \frac{a-c}{b} \end{cases} \tag{4}$$

Resolvendo-o, encontra-se que os valores de $q_1 = \frac{a-c}{3b}$ e $q_2 = \frac{a-c}{3b}$. Ou seja, a solução trazida por Cournot foi que as empresas devem decidir que a produção das quantidades das duas empresas tem que ser compatíveis entre si.

Outro pesquisador que ajudou na fundamentação da Teoria dos Jogos foi Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo. Ele mostrou, em 1913, que o xadrez é um jogo estritamente determinado, ou seja "em cada estágio do jogo pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia em mãos que lhe dará a vitória ou conduzirá o jogo a um empate" (SARTINI et al., 2004, p. 2).

Alguns anos depois, Félix Edouard Justin Emile Borel também teve uma grande contribuição. Borel dizia que:

> Os problemas de probabilidade e análise que se propõem com relação à arte da guerra, ou especulações econômicas e financeiras, não são isentos de analogia com os problemas que dizem respeito a jogos, embora possuam um maior grau de complexidade (FIANI, 2006, p. 35).

Borel se interessava nos jogos que dependiam da habilidade do jogador e da sorte, ou seja, jogos estratégicos. Assim, foi o primeiro a formular o conceito de estratégia que é utilizado nos dias de hoje. Ele chamou essa ideia de método de jogo, que é definido como uma norma que determina cada circunstância possível, exatamente o que cada jogador pode fazer. Para isso, supõem-se que são finitos jogadores.

> Uma contribuição, indireta, é o trabalho *The moral judgment of the children* publicado em 1932, de Jean Piaget (1896-1980), no qual faz uma comparação da aplicação real das regras pelas pessoas e as consciências das mesmas. O objetivo da comparação é definir a natureza pela qual os indivíduos atuam, em um sentido psicológico, ou sejam tomam decisões ou condutas frente a outros. Nos termos da atual Teoria dos Jogos seria a forma como as pessoas interagem nas situações estratégicas (os jogos) (SANTOS, 2016, p.11).

Apesar de estudos esparsos de jogos específicos, como os dos exemplos apresentados nas páginas anteriores, a Teoria dos Jogos estruturada como objeto de estudo matemático tem sua origem vinculada à John Von Neumann. Sua primeira divulgação sobre jogos foi *Mathematische Zur Theorie der Gessellchaftsspiele* de 1928. Nesse manuscrito há um teorema no qual diz que todos os jogos de soma zero com duas pessoas possui uma solução em estratégias mistas. A demonstração desse teorema usa topologia e análise funcional. Um tempo depois, ele forneceu uma nova demonstração usando o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (SARTINI et al., 2004; SOBRINHO, 2013).

O estudo mais aprofundado nos jogos de soma zero veio através da parceria de Von Neumann e Oskar Morgenstern, através do livro intitulado *The Theory of Games and Economic Behavior*, de 1944. Essa obra, para os estudiosos da Teoria dos Jogos, é considerado um clássico da literatura e de importância de leitura importante para quem quer seguir neste ramo, segundo os próprios teóricos dos jogos. Através dos estudos deles a Teoria dos Jogos foi conquistando a economia e a matemática aplicada. Este livro além de trazer jogos de soma zero, também trouxe a representação dos jogos em sua forma extensiva (FIANI, 2006; SARTINI et al., 2004). Porém, a questão principal que esse livro trouxe foi sobre os jogos de soma zero, mas isso gera uma restrição séria, já que temos mais jogos que são de soma não zero.

> Obviamente, essa não é a descrição adequada para um grande número de interações sociais. Como instrumento de análise das interações entre indivíduos e organizações na sociedade, em particular na economia, os jogos de soma zero se mostram inadequadamente restritivos. Era preciso encontrar ferramentas teóricas que permitissem analisar uma variedade maior de modelos de interação estratégica. (FIANI, 2006, p.36)

Em 1950 começa a surgir ferramentas que solucionam o problema acima. A solução desse problema possibilitou que três pessoas ganhassem o prêmio *The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1994*, ou seja, o Prêmio Nobel de Economia de 1994.

Jonh C. Harsanyi foi um desses ganhadores e suas contribuições vieram através de três artigos: *Games with Incomplete information Played by "Bayesian" Players, Part I, Part II and Part III*. Nesses textos há pareceres nos quais se afirma que muitas vezes os jogadores possuem alguma informação que os privilegia em relação aos demais, sobre algum elemento importante do jogo.

> Em outros termos, temos uma situação de informação assimétrica. Harsanyi desenvolveu um modelo para tratar desse tipo de situação, ao qual denominou modelo de informação incompleta.
> [$\cdots$] Antes da contribuição de Harsanyi, os economistas não dispunham de instrumental adequado para tratar da situação de interação estratégica em que a assimetria de informação produzia incerteza. Assim, na maior parte dos modelos, ou se supunha absoluta certeza, ou se supunha que havia uma distribuição de probabilidades objetivamente relacionada aos eventos possíveis, e que essa distribuição de probabilidades era do conhecimento de todos os agentes. A partir da contribuição de Harsanyi, os economistas se viram em condições de tratar formalmente situações de interação estratégica envolvendo assimetria de informação. (FIANI, 2006, p 37)

Reinhard Selten foi outro ganhador. Em seu artigo *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetrgheit* ele aprimorou a ideia de equilíbrio, sendo-o conhecido como equilíbrio perfeito em subjogos. Uma estratégia qualquer para ser um equilíbrio perfeito em subjogos, tem que ser ótima considerando todos os possíveis meios de interação estratégica.

Esse refinamento teve uma importância fundamental nas análises estratégicas pois em jogos que envolvem compromissos e ameaças foi permitido detectar quais tinham mais chances de ocorrerem ou não (FIANI, 2006).

John Forbes Nash Jr. foi o terceiro ganhador do prêmio, fazendo grandes contribuições para jogos não-cooperativos. Essas contribuições se encaixam nos jogos de soma zero e os que não são de soma zero. Nas suas publicações *Equilibrium Points in n-Person Games* e *Non-cooperative Games*, ele provou a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para os jogos citados anteriormente. Esse equilíbrio é chamado atualmente de **Equilíbrio de Nash**. Também nesses documentos foi sugerido uma abordagem para estudar jogos cooperativos de modo a torná-los na forma não-cooperativa. Já nos artigos *The Bargaining Problem* e *TwoPerson Cooperative Games* foi apresentado uma teoria de barganha, provando uma existência de solução para o problema da barganha de Nash. “Isto revolucionou a Teoria dos Jogos, trazendo a ideia de interações estratégicas considerando-se todas as possíveis jogadas do oponente” (SOBRINHO, 2013 p.17.).

A princípio, pode parecer que a utilização da Teoria dos Jogos se limita somente na economia ou na matemática. Porém, Santos(2016, p. 10) mostra alguns exemplos de sua aplicação também nas ciências biológicas.

> [$\cdots$] na primeira edição de The Descent of Man, and Selection in Relations to Sex de Charles Darwin(1809-1882), onde ele apresenta o primeiro argumento (implícito) teórico de jogos, em biologia evolucionária. Darwin argumenta que a natureza age para equalizar a razão entre os sexos mantendo a mesma sempre o mais próximo possível de $1:1$. Pois, se por exemplo, o nascimento de fêmeas são menos comuns que de machos, então uma fêmea recém-nascida terá melhores perspectivas de acasalamento que um macho recém-nascido e, consequentemente, pode esperar ter mais filhos. Assim, pais geneticamente dispostos a produzir fêmeas tendem a ter maior número médio de netos e dessa forma os genes para produção de fêmeas tendem a se espalhar e o nascimento de fêmeas torna-se mais comum. A medida que a proporção de $1:1$ para os sexos é atingida a vantagem associada com a produção de fêmeas acaba. O mesmo raciocínio vale se machos são substituídos por fêmeas. Portanto, $1:1$ é a razão de equilíbrio entre os sexos.

Com esses pontos elencados por Santos, pode-se encontrar a existência de uma relação entre a Teoria dos Jogos e a Teoria da Evolução de Darwin. Pode parecer estranho isso, pois o estudo da Teoria dos Jogos está mais relacionado a ciências sociais do que propriamente dito a biologia, porém ela pode ser muito útil para essa área.

> A Teoria dos Jogos não é muito conhecida para os biólogos, desta forma alguns de seus contornos gerais devem ser mostrados aqui. O que se segue não é uma descrição estritamente convencional da Teoria de Jogos e muito menos conceitos novos foram introduzidos. Há várias motivos para isso. Primeiramente, a Teoria dos Jogos tem suas raízes nas ciências sociais e, desta forma, grande parte da terminologia tem conceitos de comportamento intencional. As noções de “jogador”, “escolher uma estratégia”, “preferência de um resultado” são estranhas à biologia mecanicista moderna e assim devem ser descartadas ou com muito cuidado redefinidas. Em segundo lugar, alguns dos axiomas da Teoria dos Jogos partem de ideias diretamente ligadas ao comportamento intencional. A própria

> definição do conceito de “utilidade” de um resultado, depende tautologicamente das preferências humanas. Em terceiro lugar, muitos dos métodos adotados nas soluções não são aplicáveis pois apelam intuitivamente às preferências humanas. Esta última objeção é de grande ajuda para os evolucionistas, porque pode-se rejeitar muitas das soluções sugeridas e diminuir o campo de escolha que pode ser considerado como soluções evolutivamente importantes. Finalmente, os processos de evolução são suficientemente diferentes dos processos de escolha humana, mesmo que algumas ideias novas devem ser introduzidas nos conhecimentos clássicos da Teoria dos Jogos (LEWONTIN, 1976, p.384-385, tradução própria).

Todos os conceitos citados neste texto, como jogador, estratégias, utilidade entre outros, serão fundamentados e abordados nos próximos capítulos.

3 CLASSIFICAÇÃO DA TEORIA DOS JOGOS

A Teoria dos Jogos discute aspectos matemáticos envolvidos na racionalidade dos jogos estudados. Isto significa dizer que está buscando compreender qual é a melhor opção para iniciar determinado jogo, qual deve ser a melhor atitude a se tomar após uma jogada do adversário, a probabilidade de obter êxito na estratégia escolhida, entre outras situações, não ficando limitada somente a compreender jogos estritamente estratégicos.

Segundo Oliveira (2017,p 17)

> Em jogos envolvendo fatores atléticos por exemplo (futebol, vôlei, etc..) também há o uso do intelecto, da racionalidade, para se aumentar as chances de vitória. Analisar qual a melhor posição para os jogadores, quando avançar, quando recuar, quantos jogadores manter em posição ofensiva, quantos manter em defensiva, certamente contribuirá para o ideal de vencer o jogo.

Acontecimentos do dia a dia também podem ser considerados jogos. Situações do tipo como um grupo de amigos ter que escolher entre assistir a um filme de aventura ou de ação, empresas do ramo automobilístico que produzem carros semelhantes os quais tomam certas ações de modo a obter o maior lucro possível, uma atitude de uma determinada pessoa interessar-se conseguir um par romântico podem aumentar ou não as oportunidades de saírem à noite ou começarem a namorar.

A Teoria dos Jogos é dividida em dois ramos. A primeira é a Teoria Combinatória dos Jogos e a segunda é a Teoria Econômica dos Jogos, que é objeto de análise deste trabalho.

3.1 TEORIA COMBINATÓRIA DOS JOGOS

Pelo senso comum, costuma-se dizer que os jogos estão servem apenas para o lazer dos seres humanos. Porém, pode-se ir além e relacionar os jogos a situações que ocorrem no cotidiano das pessoas. Nas atividades lúdicas, em geral, há sempre regras que ditam o funcionamento do jogo, assim como para orientar os indivíduos que estão participando as ações que eles podem adotar.

Em poucas palavras, um jogo é uma atividade que possui um conjunto de jogadores, que são os agentes participantes da partida e esse conjunto pode ser nulo ou com uma quantidade finita de jogadores; um conjunto de posições, que são as maneiras como os jogadores estão arrumados na partida e quais são os movimentos que eles podem realizar; e as regras, que indicam quais são as jogadas realizáveis até o seu fim e a pontuação de cada jogador ao encerrar a partida.

Ao analisar esses pontos, é possível determinar e indicar certas características de um grupo de jogos.

> 1. Os jogadores jogam alternadamente e não há jogadas simultâneas;
> 2. Tem informação completa, cada jogador sabe exatamente todos os dados desse jogo: posições, jogadas, peças.

> 3. Não são permitidos nenhum tipo de dispositivos aleatórios ou de sorte, como dados e sorteios de cartas.
> 4. Existe uma regra bem definida e previamente conhecida para determinar o término do jogo, ou seja, uma posição da qual não se pode efetuar mais nenhuma jogada.
> 5. O jogo termina em um número finito de movimentos.
> 6. Ao final do jogo há um resultado bem definido: uma vitória para um dos jogadores ou um empate. (COSTA, 2016, p. 3 - 4)

Os jogos que possuem esses atributos são chamados de Jogos Combinatórios. Alguns exemplos são Xadrez, Mancala, Jogo da Velha, Jogo de Nim, Damas, Jogo da Vida, entre outros.

John Conway foi um grande pesquisador nos jogos combinatórios, criando um famoso jogo.

> Inspirado pelo matemático americano de origem húngara John von Neumann, Conway propôs um jogo para ... zero jogadores. Há jogos destinados a vários participantes, como Monopoly, mas muitos dos clássicos destinam-se a dois adversários, como o xadrez. Os jogos para um, como as paciências, também se designam por puzzles, ou quebra-cabeças. Neste jogo de Conway somente a configuração inicial depende do jogador, tudo o que se segue é automático (SANTOS; NETO; SILVA, 2007, p. 9).

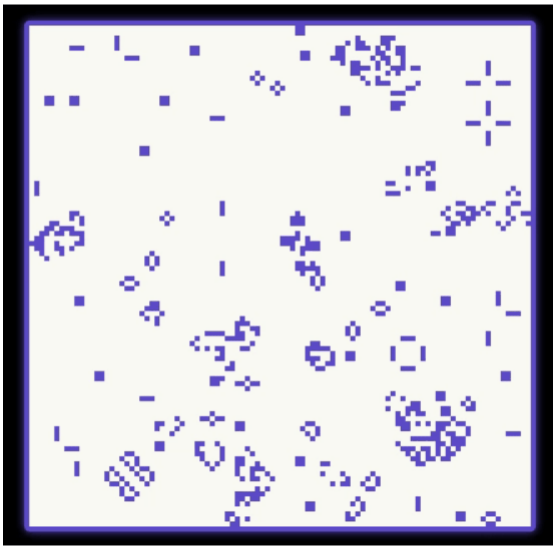
O jogo ocorre em tabuleiro quadriculado, como o do xadrez ou damas, em uma dimensão bem grande. Cada célula tem dois estados possíveis: viva ou morta. As próximas gerações das células obedecem três regras. A primeira regra afirma que uma célula viva continua viva se houver duas ou três células vivas na vizinhança. Entende-se como vizinhança as células que se encontram à esquerda; à direita; em cima ou embaixo da célula; assim como nas quatro diagonais. A segunda regra afirma que uma célula morta ganha vida se na vizinhança houver três células vivas. Por fim, a terceira regra diz que uma célula viva com menos de duas ou mais de três células em sua vizinhança morre (SANTOS; NETO; SILVA, 2007). A Figura 2 ilustra as regras do jogo, e a Figura 1 mostra uma representação do jogo.

Esse jogo trouxe grandes contribuições para outras aéreas do conhecimento, como na inteligência artificial, programação e biologia.

Outro grande pesquisador nesta área foi Ernst Zermelo. Ele mostrou que em qualquer jogo que tenha jogadas limitadas e com informações perfeitas, entre duas pessoas, em que os jogadores realizam um movimento de cada vez, alternando-se, e sem a interferência do acaso, sempre haverá uma estratégia vencedora que ao ser adotada garante no mínimo o empate entre os jogadores (OLIVEIRA, 2017) .

Um exemplo disso pode ser visto ao analisar o Jogo da Velha. Esse jogo é jogado alternadamente e não há interferência do acaso. Ou seja, haverá uma estratégia que será vencedora ou no mínimo que gerará um empate. Uma pesquisa rápida, encontram-se várias estratégias que levam à vitória. Outro exemplo que pode ser aplicado o Teorema de Zermelo é no jogo de xadrez. Porém, encontrar uma estratégia vencedora é uma tarefa um pouco difícil, mas existe uma solução, e quem garante é justamente este teorema.

Figura 1 – Representação do Jogo da Vida de John Conway



Fonte: Oliveira (2021).

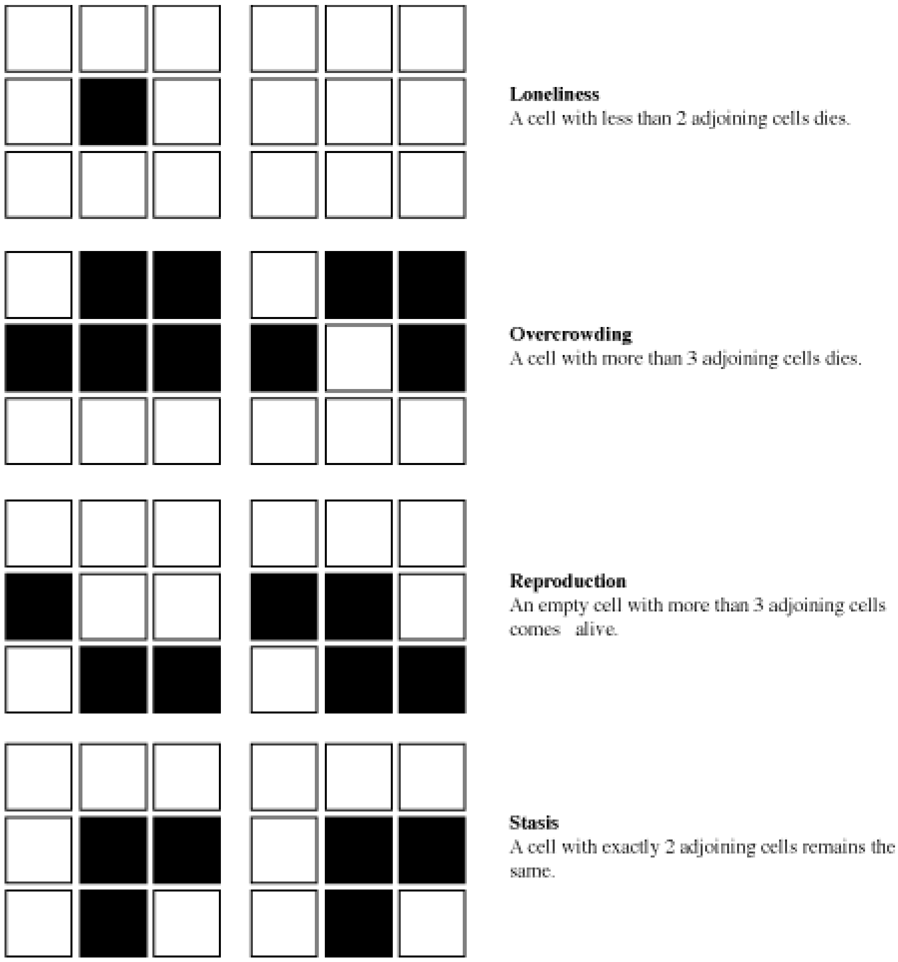
Os jogos combinatórios podem ser divididos em duas classes, observando as movimentações dos jogadores: se os agentes tiverem as mesmas opções de movimento, esse jogo é dito imparcial, se os jogadores tiverem opções de movimentos diferentes, então esse jogo é dito parcial (COSTA, 2016). O Jogo de Nim é um exemplo de jogo imparcial, já o Xadrez é um exemplo de jogo parcial.

No que lhe concerne, o conjunto de posições inclui a posição inicial, na qual cada indivíduo na sua vez se move de um lugar para outro, até a uma posição terminal, que é a posição na qual não é mais possível realizar nenhum movimento. Alguns movimentos realizados pelos jogadores na sua vez possa levá-los a vitória, essas posições são chamadas de posições **P** ou **P-posições**. Para as que levarão vitória ao oponente o nome dado será de posições **N** ou **N-posições**. Nos jogos imparciais, fica mais fácil determinar quais são as P-posições e as N-posições. Para tal, basta começar a observar a posição terminal e usar os seguintes critérios listados por Costa (2016, p.4) para classificá-las: "Todas as posições terminais são P-posições; Cada posição que pode atingir uma P-posição é uma N-posição; Cada posição que só se pode atingir uma N-posição é uma P-posição."

Costa (2016, p.4) também garante as seguintes propriedades: "De qualquer N-posição existe pelo menos uma jogada para uma P-posição; De qualquer P-posição todas as jogadas levam a uma N-posição."

Os pesquisadores da Teoria Combinatória dos Jogos descobrem, através da observação dos jogos, soluções e aplicam-nas para diversas áreas de interesse da humanidade. Esta é uma parte da Teoria dos Jogos muito importante, porém não é o foco deste trabalho, assim ficará limitada ao conteúdo até aqui. O foco será na Teoria Econômica dos Jogos, que será abordada na próxima seção.

Figura 2 – Ilustração das regras do Jogo da Vida



Fonte: Oliveira (2021).

3.2 TEORIA ECONÔMICA DOS JOGOS

Como já visto anteriormente, a noção de jogo está inserida na sociedade desde a infância de cada indivíduo, sendo relacionada, na maioria das vezes, à brincadeira. Essas brincadeiras em geral dependem de ações dos jogadores para que aconteça e geram algum ganho benéfico ou maléfico para os participantes.

Assim, a expressão *todos os atos geram consequências* faz todo sentido, uma vez que as pessoas buscam em qualquer situação, sejam elas de conflitos; interesses; brincadeiras ou nenhuma dessas, obter o melhor resultado possível, custe o que custar. Compreender a racionalidade das ações dos jogadores é o objeto de estudo da **Teoria Econômica dos Jogos**.

A Teoria Econômica dos Jogos analisa as atitudes de dois ou mais indivíduos envolvidas em uma situação a fim de estabelecer quais ações um jogador deve adotar para maximizar seus ganhos ou minimizar suas perdas.

Baseado nessa ideia e nos estudos de Fiani(2006) e Sartini, et. al.(2004) é possível definir a Teoria dos Jogos.

Definição 3.2.1 *Teoria dos Jogos é um ramo da matemática aplicada que analisa a interação de um grupo de agentes (ou jogadores) racionais que se comportam estrategicamente.*

Essa definição pode parecer muito informal, matematicamente falando, mas ela traz muitos conceitos importantes, que o próprio

> Agentes ou Jogadores: São as entidades que precisam tomar decisões em uma dada situação. Por exemplo, essas entidades podem ser indivíduos, empresas, animais, países, times, sindicatos, etc. Grupo: Em geral, assume-se que jogos contêm mais de um agente. Se a situação contém apenas um agente, o jogo se transforma em um problema de decisão. Interação: Deve existir pelo menos um agente cujas decisões influenciem nas decisões de algum outro agente do grupo, caso contrário, tem-se uma série de problemas de decisão independentes. Estrategicamente: Agentes levam em conta as interdependências entre suas escolhas quando tomando suas decisões. Racionais: Agentes levam em conta a interdependência entre suas escolhas e agem de forma a obter consequências mais próximas possíveis de objetivos preestabelecidos dado conhecimento de como outros agentes do grupo se comportam (RÊGO, 2011, p.1)

Ao analisar cada conceito é possível formalizá-los matematicamente. Assim, supondo que os jogos sejam finitos, tem-se que em cada jogo haverá finitos jogadores, que são representados por g_i, com $i \in \{1,2,3,...,n\}$ sendo n a quantidade de jogadores. Assim obtém-se o conjunto de todos os agentes, que é denotado por $G = \{g_1, g_2, g_3, ..., g_n\}$.

Cada jogador g_i toma uma decisão. Essa decisão é chamada de **Estratégia** do jogador, e é representada por s_{ij}, com $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Vale salientar que $j \geq 2$, pois $j = 1$ ficaria nítido qual seria a ação do agentes. As estratégias são classificadas em **Estratégias Puras**, que são ações que o jogador escolhe diretamente adotar, e **Estratégias Mistas**, que são ações que o jogador escolhe ao aplicar uma distribuição de probabilidades sobre elas.

O conjunto das estratégias do jogador g_i é $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, \ldots, s_{ij}\}$. Todos as possíveis estratégias de todos os agentes, chamado de **Espaço de Estratégia**, é definido como sendo $S = \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$. Um elemento que pertence a S é chamado de **Perfil de Estratégia**, que será representado por $\boldsymbol{s}$. Esse elemento é um vetor.

Para saber os ganhos dos agentes envolvidos, existe uma função, chamada **Função Utilidade**, que associa o ganho[1] do jogador g_i, chamado de u_i, a cada perfil de estratégia $\boldsymbol{s}$ que pertence a S. Ou seja, essa função é representada a seguir:

$$\begin{aligned} u_i \quad : \quad & S \to \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{s} \mapsto u_i(\boldsymbol{s}). \end{aligned} \tag{5}$$

Vale destacar que a existência dessa função utilidade é garantida através das seguintes condições propostas por Luce e Raiffa. Elas são:

> 1) Tudo é suscetível de comparação; 2) Preferência e indiferença são transitivas; 3) Um jogador é indiferente diante de prêmios equivalentes; 4) O jogador

[1] Na Teoria dos Jogos usa-se a palavra payoff para designar os ganhos dos jogadores.

> sempre se arriscará, se as possibilidades forem suficientemente boas; 5) Um sorteio será tanto melhor quanto mais ampla a possibilidade de conseguir o prêmio; 6) Os jogadores são indiferentes ao tipo do jogo (DAVIS, 1970, p.76).

Todos os jogos podem ser escritos na forma tabular. Na Teoria dos Jogos, essa tabela é chamada de **Matriz de Payoff**. Um exemplo dessa matriz está representada pela Tabela 2, considerando um jogo de dois jogadores, n estratégias para g_1 e m estratégias para g_2, com n e m sendo números naturais.

Tabela 2 – Matriz de payoff de um jogo com dois jogadores e com as suas respectivas estratégias e funções utilidades.

		g_2		
		s_{21}	$\cdots$	s_{2m}
	s_{11}	$(u_1(s_{11},s_{21}),u_2(s_{11},s_{21}))$	$\cdots$	$(u_1(s_{11},s_{2m}),u_2(s_{11},s_{2m}))$
g_1	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	s_{1n}	$(u_1(s_{1n},s_{21}),u_2(s_{1n},s_{21}))$	$\cdots$	$(u_1(s_{1n},s_{2m}),u_2(s_{1n},s_{2m}))$

Fonte: Acervo do autor

Nas seções a seguir seguem alguns exemplos de jogos que se enquadram nos estudos feitos pela Teoria Econômica dos Jogos. São elas: **Jogo do Elevador**, **Dilema dos Prisioneiros**, **A Batalha dos Sexos**; **Crise dos Mísseis**, **A Batalha no Mar de Bismark** e **Caça ao Cervo**.

3.3 JOGO DO ELEVADOR

Imagine que há uma pessoa que se encontra em um prédio de n andares. Para acessar cada um desses andares só existe uma única forma: usar um elevador. Suponha que ela queira acessar o andar a, com $a \leq n$.

Para acessar o andar a, essa pessoa pode entrar no elevador e apertar o botão que leve direto a esse andar, ou ir até o andar $n-a$ e depois ir para o andar a, ou até mesmo acessar todos os andares anteriores a a para assim chegar no andar desejado. Ou seja, há uma abundância de escolhas que essa pessoa pode adotar para chegar ao seu destino.

Dessa forma a decisão de escolher qual será o seu caminho, ou seja, a sua estratégia, está nas mãos da pessoa, uma vez que ela está “jogando contra ela mesma” e assim ela irá decidir e adotar a melhor opção.

3.4 DILEMA DOS PRISIONEIROS

Um exemplo clássico estudado na Teoria dos Jogos é o Dilema dos Prisioneiros. Esse problema foi formulado por Albert W. Tuker em 1950, em um seminário para psicólogos na Universidade de Stanford, para mostrar a dificuldade de se analisar certos jogos (SARTINI et al., 2004).

A situação proposta por Tuker foi a seguinte: dois assaltantes, que serão chamados de A e B, são capturados e acusados de um mesmo crime. Eles ficam encarcerados em selas diferentes e não conseguem se comunicar entre si. A autoridade da lei chama os presos, um de cada vez de modo a não trocarem informações, e faz a seguinte proposta: vocês podem escolher entre negar o crime ou confessar o crime. Se ambos negarem, serão submetidos a uma pena de 1 ano. Se ambos confessarem, então ambos terão uma pena de 5 anos. Caso um negar e outro confessar, então o que confessou será libertado e o que negou ficará preso por 10 anos.

A matriz de payoff do Dilema dos Prisioneiros é representada a seguir pela Tabela 3 .

Tabela 3 – Matriz de payoff do jogo O Dilema dos Prisioneiros.

		B: Confessar	B: Negar
A	Confessar	$(-5,-5)$	$(0,-10)$
A	Negar	$(-10,0)$	$(-1,-1)$

Fonte: Sartini et. al.(2004, p.7)

A utilização dos números negativos, representa o tempo que eles perdem ao ficarem presos.

3.5 A BATALHA DOS SEXOS

Um casal deseja passear, porém, cada um tem uma preferência em realizar certa atividade. A primeira pessoa prefere ir à praia e sentir a brisa do mar, enquanto a segunda pessoa prefere acampar no meio da natureza. Se ambos forem à praia, a primeira pessoa fica mais feliz que a segunda. Caso ambos forem acampar, então a segunda pessoa ficará mais feliz que a primeira. Caso ambos decidam ir cada um sozinho para uma das duas opções, então ambos ficarão infelizes. Assim, elaborando uma escala sendo 10, 5 e 0, na qual significam feliz, um pouco feliz e infeliz, respectivamente, tem-se então que a matriz de payoff está representa pela Tabela 4:

Tabela 4 – Matriz de payoff do jogo A Batalha dos Sexos

		Segunda Pessoa: Praia	Segunda Pessoa: Acampar
Primeira Pessoa	Praia	$(10,5)$	$(0,0)$
Primeira Pessoa	Acampar	$(0,0)$	$(5,10)$

Fonte: Sartini et. al.(2004, p.8)

3.6 CRISE DOS MÍSSEIS

Durante o período de 14 a 28 de outubro de 1962, o mundo viveu uma ameaça de uma guerra nuclear. Isso ocorreu, pois foi descoberto a existência de mísseis nucleares soviéticos em Cuba. Segundo a URSS a instalação desses mísseis em Cuba foi para a proteção deste país. Porém, as reais intenções dos soviéticos eram utilizá-los como medida de proteção do seu país, pois haviam mísseis nucleares americanos próximos da sua fronteira. Dessa maneira, um país começou a ameaçar o outro de modo a se beneficiar de algo.

Nessa situação, se um dos países ameça lançar um míssil, então ele ganharia um benefício para si, pois o outro país se sentiria intimidado. Caso não ameace lançar um míssil, o outro país ficaria neutro e não cederia. Assim considerando que se ambos ameaçarem a lançar os mísseis, cada um teria um ganho de -100, se um ameaçar e o outro não, o que ameaçou fica com um ganho de 10 e o outro com -10. Se nenhum ameaçar, ambos ficam com um ganho de 0. Assim, obtém-se a seguinte matriz de payoff, representada na Tabela 5:

Tabela 5 – Matriz de payoff do jogo Crise dos Mísseis

		URSS	
		Ameaçar	Não Ameaçar
EUA	Ameaçar	$(-100,-100)$	$(10,-10)$
	Não Ameaçar	$(-10,10)$	$(0,0)$

Fonte: Fiani(2006, p.207)

3.7 A BATALHA DO MAR DE BISMARK

Próximo de acabar o ano de 1942, o alto-comando de guerra japonês resolveu fazer uma transferência de soldados que estavam na China e no Japão para a cidade de Lae, que fica na Papua-Nova Guiné. Essa movimentação de tropas japonesas tinha como objetivo de o Japão se recuperar da derrota que teve em Guadalcanal, assim como de impedir o avanço americano no pacífico. Contudo, realizar um grande deslocamento de tropas pelo mar seria perigoso por conta do grande poderio Norte-americano no ar. Mesmo com esse risco os japoneses reuniram oito destróieres para a proteção de oito transportadores de tropas. Além de 100 aviões para a escolta aérea do comboio.

No dia 28 de fevereiro de 1943, uma frota japonesa sai da cidade de Rabaul, que também fica na Papua-Nova Guiné, transportando cerca de 6900 soldados de modo a reforçar as linhas defensivas em Lae. Para isso a frota japonesa contava com duas rotas de movimentação: contornar a ilha da Nova Bretanha pelo norte, a Rota Norte, ou contornar essa mesma ilha pelo sul, a Rota Sul. A Rota Sul apresentava sempre tempo bom e boa visibilidade já a Rota Norte geralmente apresentava um dia de tempo ruim e baixa visibilidade.

Os americanos possuíam uma quantidade de aviões de reconhecimento que poderia pesquisar somente uma rota de cada vez e procurar em qualquer uma das rotas consumia um dia inteiro. Eles também sabiam que se fossem para o Sul, e os japoneses mandassem seus navios para o Sul também, então poderiam bombardear durante três dias os navios japoneses. Agora se fossem para a Rota Sul, mas os japoneses para a Rota Norte, então os americanos perderiam um dia por ir ao local errado e mais um dia pelo mau tempo da Rota Norte, sobrando apenas um dia de bombardeio. Se os americanos se deslocassem para o Norte e os japoneses também, então teriam dois dias de bombardeio, devido ao mau tempo. Já se os americanos se dirigissem para o Norte mas os japoneses para o Sul, então perderiam somente um dia por ter ido no lugar errado, pois a rota sul está sempre com tempo bom (FIANI, 2006).

Dessa maneira a matriz de payoff dessa situação está representada na Tabela 6:

Tabela 6 – Matriz de payoff do jogo A batalha do Mar de Bismark

		Japão	
		Sul	Norte
EUA	Sul	$(3,-3)$	$(1,-1)$
	Norte	$(2,-2)$	$(2,-2)$

Fonte: Fiani(2006, p.8)

3.8 CAÇA AO CERVO

Esse jogo foi formulado através de um problema proposto por Jean-Jacques Rousseau através de seu livro Discurso sobre a origem e os fundamentos da desigualdade do homem. Essa obra discute sobre os desdobramentos e os inícios do desenvolvimento da cooperação entre os seres humanos. Dessa forma, este jogo é muito útil para os cientistas sociais que estudam o contrato social[2].

Suponha dois caçadores que se reuniram para caçar um cervo. Por ser um animal de grande porte e ágil, nenhum dos caçadores consegue caçar ele sozinho, desta forma, necessitando de uma cooperação mútua. Para que a caçada tenha êxito, cada caçador deve ocupar uma posição na floresta e ficar atento a qualquer presença do cervo. Vale salientar que qualquer barulho atrapalha a caçada.

Ocorre que no mesmo bosque há lebres. Sendo assim, os caçadores podem também abatê-las. A lebre é um animal mais fácil de capturar, uma vez que é menor e necessita apenas de um caçador. Sabe-se também que a carne de lebre tem um valor menor que a do cervo, pois há bem menos carne do que a metade de um cervo.

[2] Contrato social é um tipo de “contrato” na qual os indivíduos fazem implicitamente, de modo a viver em uma sociedade. Nesse contrato, as pessoas definem os seus direitos e deveres de forma a tornar possível a vivência em sociedade. O estado seria o agente encarregado de garantir o contrato social. (FIANI,2006, p. 113).

Por fim, se cada um dos caçadores optar por ir atrás das lebres, o cervo escapa, porém ele não é obrigado a ter que dividir a lebre com o seu parceiro. Pode-se supor que como a lebre é um animal pequeno, aquele que caçou o animal poderia esconder a carne com sucesso sem que o outro caçador descobrisse (FIANI, 2006).

Supondo que o valor da carne do cervo seja de três unidades e o da lebre for de uma unidade, tem-se que a representação desse jogo na matriz de payoff está feita na Tabela 7:

Tabela 7 – Matriz de payoff do jogo Caça ao Cervo

		Caçador 2	
		Cervo	Lebre
Caçador 1	Cervo	$(3,3)$	$(0,1)$
	Lebre	$(1,0)$	$(1,1)$

Fonte: Fiani(2006, p.114)

Assim, pelo que se apresenta nas seções Teoria Combinatória dos Jogos e Teoria Econômica dos Jogos é possível inferir que a Teoria dos Jogos faz uma modelagem das vivências humanas, ou seja, transforma situações cotidianas de modo a utilizar a formalização matemática. Entretanto, é perceptível que na sua base há várias outras teorias, pois, como o jogo é um modelo da realidade, esperar que um único modelo pudesse dar uma solução precisa de várias tarefas que geralmente são tão distintas seria muito ousado.

Termina-se aqui esse capítulo. Como o enfoque deste trabalho é em cima da Teoria Econômica dos Jogos, então todos os capítulos que virão em seguida se baseará nesse conhecimento. Desta forma, no próximo capítulo serão definidos os jogos de uma pessoa e como encontrar uma solução para esse tipo de jogo.

4 JOGOS DE UMA PESSOA

Os jogos que tem apenas um jogador são, sem dúvida nenhuma, os mais simples e básicos, conceitualmente falando. Por ter essa característica modesta, muitos pesquisadores não os consideram como sendo jogos. Apesar disso, na sua base e formalização, possui vários conhecimentos básicos para compreender as ações humanas, assim como estudar os demais jogos que existem.

Essa situação, pode-se encarar como sendo um jogo de um contra outro: o ser humano, ou o jogador, contra o universo, ou a natureza. O universo não é considerado outro jogador na partida, pois a natureza é imprevisível, ou seja, quando se joga contra a natureza, não tem como prever as suas ações e dessa maneira não tem como realizar alguma análise em suas intenções. Desta forma podem considerar que o universo está desinteressado no jogo, ou seja, qualquer resultado que for obtido será ótimo para ele. Um exemplo que possa ilustrar essa situação é o jogo do elevador, que está presente na seção 3.3

Os jogos de uma pessoa podem ser agrupados em três categorias, considerando o papel que a natureza realiza em cada uma delas. A primeira categoria considera que a natureza não exerce nenhuma função no jogo. Nesta situação o jogador faz a sua escolha e ela determinará os acontecimentos do jogo. A segunda categoria afirma que existirá uma grande participação do acaso, assim, o jogador realiza a sua escolha inicial, e a sorte determinará o resultado do jogo. A terceira categoria conjectura que o agente toma alguma decisão sem qualquer informação prévia de como a natureza pode reagir através dessa escolha.

Percebe-se que em jogos de uma pessoa, o jogador enfrenta situações nas quais ele tem que tomar uma decisão, sendo que as suas escolhas podem ter informações certas ou incertas. Essa situação é analisada através da utilização da Teoria da Decisão ou Teoria da Escolha Racional. É perceptível que nesse tipo de jogo não existe uma estratégia, propriamente dita, que esteja envolvida na situação.

A Teoria da Decisão, como mostrado acima, é dividida em situações onde o agente age com informações certas ou situações onde o indivíduo decide com informações incertas. Dessa maneira, a seguir será apresentado esse conhecimento nas seções intituladas **Escolha Sob Certeza** e **Escolha Sob Incerteza**. As demonstrações das proposições, lemas, teoremas e corolários presentes nesta seção serão omissos. Legente interessado pode encontra-los em Campello de Souza(2002) e Kreps(1988).

4.1 ESCOLHA SOB A CERTEZA

Nessa situação o indivíduo possui todas as informações possíveis sobre o jogo, assim como possui preferência em tomar alguma decisão. As ações dos outros agentes não influenciam nas preferências que o jogador tem sobre as opções disponíveis do jogador.

Um exemplo desse assunto é uma pessoa dentro de um elevador. Nesse elevador há um número finito de botões, e cada botão corresponde a um andar do prédio. Assim existe uma diversidade de resultados, e para determinar o resultado é necessário saber a preferência, ou seja, qual andar o indivíduo quer ir. Desse modo é perceptível que o agente não tem como escolher uma boa estratégia, enquanto não escolher para aonde quer ir.

Logo, para analisar situações desse tipo, é preciso compreender a ideia de **relação de preferência**. Para isso, inicialmente revisam-se conhecimentos básicos de álgebra, principalmente sobre relações binárias. Os estudos feitos, e apresentados nessa parte, estão presentes em Kreps(1988).

Definição 4.1.1 *Uma relação binária B no conjunto X é definida como um subconjunto de,* $X \times X$, *e* $(x,y) \in B$ *se o par ordenado* (x,y) *satisfaz a relação B. Uma outra maneira de escrever* $(x,y) \in B$ *é xBy. Se* $(x,y) \notin B$ *escreve-se* $\neg xBy$.

Em uma relação binária no conjunto X pode acontecer uma infinidade de propriedades. As propriedades presentes na Escolha sob certeza são: reflexiva, irreflexiva, simétrica, assimétrica, antissimétrica, transitiva, negativamente transitiva, completa ou conectada, fracamente conectada e acíclica.

Definição 4.1.2 *Seja uma relação binária B no conjunto X. Valem as seguintes propriedades:*

(a) Reflexiva: $xBx, \forall x \in X$;

(b) Irreflexiva: $\neg xBx, \forall x \in X$;

(c) Simétrica: $xBy \Rightarrow yBx, \forall x, y \in X$;

(d) Assimétrica: $xBy \Rightarrow \neg yBx, \forall x, y \in X$;

(e) Antissimétrica: xBy *e* $yBx \Rightarrow x = y, \forall x, y \in X$;

(f) Transitiva: xBy *e* $yBz \Rightarrow xBz, \forall x, y, z \in X$;

(g) Negativamente transitiva: $\neg xBy$ *e* $\neg yBz \Rightarrow \neg xBz$;

(h) Completa ou conectada: $\forall x, y \in X, xBy$ *ou* $yBx, \forall x, y \in X$;

(i) Fracamente conectada: $\forall x, y \in X, x = y$ *ou* xBy *ou* yBx;

(j) Acíclica: se $x_1Bx_2, x_2Bx_3, \cdots, x_{n-1}Bx_n \Rightarrow x_1 \neq x_n$.

Entre as propriedades, existem algumas relações importantes. Essas relações são caracterizadas por lemas ou corolários.

Lema 4.1.1 *Uma relação binária B é negativamente transitiva se, e somente se,* xBz *implica que,* $\forall y \in X, xBy$ *ou* yBz.

Corolário 4.1.1 *Se uma relação binária B é negativamente transitiva, então* $\forall x, y \in X$, *temos*

(1) xBy,

(2) yBx, *ou*

(3) $\forall z \in X$,

(a) xBz *se, e somente se,* yBz, *e*

(b) zBx *se, e somente se,* zBy.

Lema 4.1.2 *Se uma relação binária B é assimétrica e negativamente transitiva, então ela é*

(a) irreflexiva,

(b) transitiva e

(c) acíclica.

Com isso em mente, agora suponha que existe um conjunto de objetos X e um agente capaz de comparar esses objetos dois a dois de modo que "eu prefiro estritamente x a y". Essa situação será representada por $x \succ y$. Essa comparação é uma relação binária, pois obedece à definição. Usa-se a notação $x \not\succ y$ para representar "eu não prefiro estritamente a x a y", ou seja, $\neg x \succ y$.

Definição 4.1.3 *Uma relação binária $\succ$ em um conjunto X é chamada de relação de preferência se ela for assimétrica e negativamente transitiva.*

A relação $\succeq$ é chamada de preferência fraca, ou seja, ela expressa a pouca preferência que a pessoa tem sobre o determinado objeto, ou pode considerar como sendo a falta de preferência estrita. A relação $\sim$ é dita indiferença e ela expõem a ausência de preferência estrita entre dois objetos. Assim, obtém-se a seguinte relação: $x \succeq y$ se $y \not\succ x$ e $x \sim y$. Com isso, há a seguinte proposição.

Proposição 4.1.1 *Se $\succ$ é uma relação de preferência, então*

(a) Para todo x e y, exatamente uma dessas relações é válida: $x \succ y$, $y \succ x$, ou $x \sim y$.

(b) $\succeq$ é completa e transitiva.

(c) $\sim$ é reflexiva, simétrica, e transitiva.

(d) $w \succ x$, $x \sim y$, $y \succ z$ implicam $w \succ y$ e $x \succ z$.

(e) $x \succeq y$ se, e somente se, $x \succ y$ ou $x \sim y$.

(f) $x \succeq y$ e $y \succeq x$ implicam $x \sim y$.

Nessa proposição é perceptível que as relações de preferência fraca, $\succeq$, e de indiferença, $\sim$, são uma derivação da relação de preferência estrita, $\succ$. Assim para muitos indivíduos não fariam muito sentido usar a terminologia das relações de $\succeq$ e $\sim$.

De modo a determinar os ganhos do jogador, define-se uma função utilidade u que relaciona as preferências com os seus ganhos.

Definição 4.1.4 *Define-se uma função utilidade $u : X \to \mathbb{R}$ de modo que dados $x, y \in X$ vale $x \succ y$ se, e somente se, $u(x) \succ u(y)$.*

A partir desta definição, chega-se em um teorema que declara que para uma relação binária ser representada por uma função utilidade, essa relação binária deve ser uma relação de preferência.

Teorema 4.1.1 *Seja X um conjunto finito ou infinito enumerável. Uma relação binária pode ser representada por uma função de utilidade u no sentido da Definição 4.1.4 se, e somente se, for uma relação de preferência.*

Também há um teorema que afirma que essa função utilidade é única, à exceção de haver uma transformação estritamente crescente. Desta forma, essas funções utilidades são chamadas de funções utilidades ordinais.

Teorema 4.1.2 *Dado um conjunto X, uma relação de preferência $\succ$ e funções u e $\dot{u}$ que representam $\succ$ no sentido da Definição 4.1.4, então existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que*

(a) f é estritamente crescente em $\{r : \exists x \in X, r = u(x)\}$ e

(b) $\ddot{u}(x) = f(u(x)), \forall x \in X$.

Além disso, para qualquer função estritamente crescente $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ddot{u}(x) = g(u(x)), \forall x \in X$ também representa $\succ$.

Também define-se uma relação binária contínua. Para que ela ocorra necessita-se saber o que é um espaço métrico separável.

Definição 4.1.5 *Seja M um conjunto. M será um espaço métrico se houver $d : M \times M \to \mathbb{R}$ chamada de distância que satisfaz, para todo $x, y, z \in M$, as seguintes propriedades:*

(a) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

(b) $d(x,y) = d(y,x)$.

(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Diz-se que o espaço métrico M é separável, se ele tiver um subconjunto enumerável M_0 e M for igual à união de M_0 com todos os pontos de acumulação de M_0.

Definição 4.1.6 *Uma relação binária $\succ$ definida em um espaço métrico separável X é contínua se para todas as (x_n) de X com $x_n \to x$,*

(a) se $x \succ y$ para algum $y \in X$, então para todo n grande o suficiente, $x_n \succ y$; e

(b) se $y \succ x$ para algum $y \in X$, então para todo n grande o suficiente, $y \succ x_n$.

Voltando às preferências, se ela for contínua então vai existir uma função utilidade que irá representá-la e será contínua, mesmo que o conjunto não seja enumerável. Esse fato é garantido pelo teorema abaixo.

Teorema 4.1.3 *Seja X um subconjunto de um espaço métrico separável. Uma relação binária em X pode ser representada por uma função de utilidade contínua $u : X \to \mathbb{R}$ no sentido da Definição 4.1.4 se, e somente se, for uma relação de preferência contínua.*

Portanto, ao utilizar todos esses conhecimentos estabelecidos nesta seção, é possível indicar os ganhos do agente e determinar qual será a ação do agente que resulta no melhor ganho.

Para isso, basta identificar as preferências dele, no jogo e nos ganhos que cada preferência terá ao tomar uma ação.

Um exemplo de aplicação é o Jogo do Elevador, apresentado na seção 3.3. Nessa situação, ele quer chegar no andar a. Como a pessoa está no elevador sozinho e têm preferência de ir até ao andar desejado, a sua escolha será apertar o batão que o levará até o andar a. Portanto, essa atitude resulta no melhor ganho nesse jogo.

4.2 ESCOLHA SOB A INCERTEZA

Existem situações em que o jogador escolhe uma entre todas as suas estratégias de modo que ele não tem a certeza do que a natureza fará através da sua escolha, ou seja, não sabe qual será as suas consequências perante a sua decisão. Desse modo, analisando as categorias descritas no início do capítulo, os jogos que possuem essas características se encaixam na segunda e terceira categorias para jogos de uma pessoa.

Há várias regras de tomada de decisão que podem ser escolhidas dependendo da situação em que a pessoa tem que realizar uma escolha sob incerteza. Deste modo, considera-se que o agente escolhe ações de modo que gere uma consequência, benéfica ou maléfica, e que ele seja capaz de determinar qual a utilidade dessas consequências. Essas regras são expostas por Campello de Souza(2002) e mostradas a seguir.

Uma dessas regras é o Maximin. Esta é uma regra conservadora, sendo assim, ela opta pela ação que se dá no melhor cenário no pior caso possível, ou seja, tenta encontrar o melhor na pior situação. Matematicamente, dada uma ação $a \in A$, defina-se $pior_u(a)$ como sendo a utilidade da pior consequência possível para a ação a como sendo a Equação 6

$$pior_u(a) = min\{u_a(s) : s \in S\}. \tag{6}$$

O Maximin afirma que $a \succ \tilde{a}$ se, e somente se, $pior_u(a) \succ pior_u(\tilde{a})$.

A regra que "contrapõe" o Maximin é o Maximax, pois ela é uma regra otimista. Deste modo, ela resolve escolher a melhor ação no melhor caso possível, ou seja, escolhe o melhor esperando que o melhor possível ocorrerá. Formalmente, seja uma ação $a \in A$, defina $melhor_u(a)$ a utilidade da melhor consequência para a ação a como sendo a Equação 7.

$$melhor_u(a) = max\{u_a(s) : s \in S\}. \tag{7}$$

A regra de Maximax estabelece que $a \succ \tilde{a}$ se, e somente se, $melhor_u(a) \succ melhor_u(\tilde{a})$.

Uma lei que engloba o Maximin e o Maximax é a regra otimismo-pessimismo. Nesta regra é feita uma média ponderada entre o melhor e o pior cenário, sendo o peso o quão otimista for o agente. Desta forma, define-se esse fato como sendo a Equação 8

$$opt_u^{\alpha}(a) = \alpha \cdot melhor_u(a) + (1-\alpha)pior_u(a). \tag{8}$$

Se $\alpha = 1$ tem-se a regra de Maximax e $\alpha = 0$ obtém-se a regra Maximin. Através desta regra percebe-se que dado α, $a \succ \tilde{a}$ se, e somente se, $opt_u^{\alpha}(a) \succ opt_u^{\alpha}(\tilde{a})$

Já a regra Minimax Arrependimento tem como finalidade minimizar o quão arrependido fica o jogador ao descobrir o verdadeiro estado da natureza. Assim, para cada estado s, seja a_s a ação com a melhor consequência em s.

$$arrependimento_u(a,s) = u_{a_s}(s) - u_a(s) \tag{9}$$

$$arrependimento_u(a) = \max_{s \in S} arrependimento_u(a,s) \tag{10}$$

Sendo $arrependimento_u(a)$ o maior arrependimento que o agente poderia ter se ele escolher a ação a. Com essa regra bem estabelecida, tem-se que

$$a \succ \tilde{a} \Leftrightarrow arrependimento_u(a) < arrependimento_u(\tilde{a}) \tag{11}$$

Para ilustrar essa situação, suponha que haja quatro ações e quatro estados da natureza em uma determinada situação, cujos ganhos estão representados na Tabela 8. Nesse jogo serão utilizadas as regras simultaneamente de modo a compreender a sua aplicabilidade.

Tabela 8 – Exemplo de matriz para jogos de uma pessoa tendo a escolha sob a certeza

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	1	2	3	4
a_2	0	-5	-8	-1
a_3	5	9	3	2
a_4	6	-8	-10	0

Fonte: Acervo do Autor

Considerando os números em azul os valores nos quais têm o menor resultado em uma determinada ação, os números em vermelho os valores onde se obtém o maior valor na determinada ação e os destacados em amarelo os que tem a melhor ação em cada estado da natureza, conclui-se que se utilizar o Maximin tem-se $a_3 \succ a_1 \succ a_2 \succ a_4$ e se utilizar o Maximax tem-se $a_3 \succ a_4 \succ a_1 \succ a_2$. Ao utilizar o Minimax Arrependimento tem-se que os maiores valores obtidos em cada estado da natureza serão:

$$u_{as_1}(s_1) = 6;$$
$$u_{as_2}(s_2) = 9;$$
$$u_{as_3}(s_3) = 3;$$
$$u_{as_4}(s_4) = 4.$$

E os valores obtidos pelo arrependimento ao escolher cada ação será:

$$arrependimento_u(a_1) = \max(6-1, 9-2, 3-3, 4-4) = 7;$$
$$arrependimento_u(a_2) = \max(6-0, 9-(-5), 3-(-8), 4-(-1)) = 14;$$
$$arrependimento_u(a_3) = \max(6-5, 9-9, 3-3, 4-2) = 2;$$
$$arrependimento_u(a_4) = \max(6-6, 9-(-8), 3-(-10), 4-0) = 17.$$

Portanto no Minimax arrependimento tem-se $a_3 \succ a_1 \succ a_2 \succ a_4$.

Dessa maneira, nas três regras a melhor opção de escolha é a ação a_3. Vale destacar que nem sempre isso acontecerá, pois, cada regra tem uma maneira diferente de decidir sobre a tomada de decisão.

Essas situações de incerteza, na Teoria dos Jogos, podem ser classificadas como incertezas subjetivas e incertezas objetivas. As incertezas objetivas, segundo Anscombe e Aumann (apud RÊGO, 2011, p.18) surgem, por exemplo, de situações aleatórias como lançamento de moedas ou dados honestos, urnas com bolas enumeradas, etc. Já a incerteza subjetiva pode aparecer da negligência de alguns agentes sobre as estratégias utilizadas pelos demais participantes do jogo.

Desta forma, considere um conjunto Z finito que será das consequências ou prêmios obtidos no jogo. Também, considera-se um conjunto S finito de todos os estados da natureza que podem ocorrer no jogo. Adotam-se esses conjuntos finitos por conta da simplicidade. Seja um conjunto X dado e uma relação binária B em X, defina-se $\Delta(B)$ como sendo o conjunto de todas as distribuições de probabilidade em $(B, 2B)$. Adota-se o conjunto F de todas as ações $f : S \to \Delta(Z)$ como sendo o conjunto sobre o qual o jogador terá que apresentar as suas preferências.

Percebe-se que os resultados da ação f dependem de S, ou seja, do estado da natureza. Assim, o participante do jogo pode possuir incerteza subjetiva sobre o estado da natureza em que se encontra, e por consequência, possuir incerteza subjetiva sobre as consequências de suas ações. Um estado da natureza $f(s)$ que descreve a incerteza objetiva nas quais cada resultado serão obtidas se o jogador escolher a ação f e o estado da natureza for s.

Com isso definido, ainda se denota $p \in \Delta(Z)$ a ação constante que será igual a esse valor p em todos os estados da natureza. Também, dados quaisquer ações $f, g \in F$, para todo $a \in [0,1]$, seja $af + (1-a)g$ a seguinte ação:

$$(af + (1-a)g)(s) = af(s) + (1-a)g(s), \forall s \in S \tag{12}$$

Todavia, essas ações não evidenciam que possa existir um modo de quantificar a incerteza do agente a respeito do real estado da natureza. Mesmo que exista um modo de medir essa incerteza, não fica claro se é possível combiná-la com a ação que o jogador escolhe diante das consequências que pode ocorrer, ou seja, escolher uma distribuição de probabilidade sobre as consequências, nem se esta medida de incerteza subjetiva é independente dos riscos.

Por isso deve existir alguns axiomas para poder encontrar e definir essas ações. Esses axiomas são:

> Axioma 1: $\succ$ em F é uma relação de preferência, ou seja, assimétrica e transitiva negativa. Axioma 2: $f \succ g$ e $a \in (0,1]$ implica que $af + (1-a)h \succ ag + (1-a)h$, para todo $h \in F$. Axioma 3: $f \succ f' \succ f''$ implica que existem $a, b \in (0,1)$ tal que $af + (1-a)f'' \succ f' \succ bf + (1-b)f''$. Axioma 4: Existem $f, g \in F$ tais que $f \succ g$. Axioma 5: Se $f \in F$; $p, q \in \Delta(Z)$, e $f - sp \succ f - sq$, então para todo estado não-nulo s' temos $f - s'p \succ f - s'q$ (RÊGO, 2011, p. 20).

A partir desses cinco axiomas é garantido e construído o seguinte teorema:

Teorema 4.2.1 *Os Axiomas 1–5 são necessários e suficientes para que existam uma função não constante $u : Z \to \mathbb{R}$ e uma distribuição de probabilidade π em S tal que*

$$f \succ g \text{ se e somente se, } \sum_{s \in S} \pi(s) \left[\sum_{z \in Z} u(z) f(s)(z) \right] > \sum_{s \in S} \pi(s) \left[\sum_{z \in Z} u(z) g(s)(z) \right].$$

Além disso, a distribuição de probabilidade π é única e a função u é única, exceto por uma transformação positiva afim nesta representação.

A prova desse teorema está disponível em Kreps(1988).

Desse teorema conclui-se que existe uma relação entre cada estado da natureza, na qual possui uma probabilidade independente das probabilidades sobre as consequências. Também, percebe-se que cada consequência possui uma utilidade u tal que a escolha entre as ações é adotada de acordo com a utilidade esperada da função utilidade u.

Diz-se que um estado da natureza s é nulo se $f \sim g$ para todos os pares de ações $f, g \in F$ e que são iguais em todas as possibilidades que a natureza possa admitir exceto, possivelmente, em s. Ou seja, um estado s é nulo se não pode encontrar ações que se diferenciam apenas no estado s e que não são indiferentes.

Com isso tudo posto neste capítulo fica definido e orientado como são os jogos de uma pessoa e como encontrar as utilidades do jogador. Como o foco principal são os jogos com vários agentes então esse capítulo será finalizado por aqui. Vale destacar que os jogos com um jogador são importantes para compreender as atitudes de cada pessoa presente em jogos com mais de um jogador.

Para finalizar e dar início no próximo capítulo que mostrará como são os jogos finitos com várias pessoas, será admitido que os jogadores são racionais se eles escolherem estratégias que maximizarão suas utilidades esperadas. Assim admite-se, implicitamente, que os axiomas 1-5 da seção 4.2 definem o que são preferências racionais.

5 JOGOS COM N PESSOAS

No capítulo anterior foi visto como é o jogo com apenas uma pessoa e como analisá-lo para obter as respostas de como o jogador se comporta contra a natureza (ou “contra ele mesmo”). Neste capítulo, falar-se-á sobre jogos com mais de uma pessoa. Portanto, nessa situação, deve-se conseguir responder perguntas do tipo: O que acontece quando temos mais de um agente? Qual é a estratégia que deve-se adotar para obter o melhor ganho possível?

Para responder essas questões deve-se lembrar que cada jogador toma alguma ação que influência no resultado do jogo e para isso ele pode utilizar dois tipos de estratégia: as estratégias puras ou estratégias mistas.

Nesse capítulo os resultados apresentados estão baseados em Fiani (2006), Oliveira (2017), Santos (2016) e Sartini et al.(2004).

5.1 ESTRATÉGIAS PURAS

No Capítulo 3 foi definido e caracterizado todos os entes presentes em qualquer jogo, desde aqueles que possuem apenas uma pessoa até com uma quantidade finita de pessoas. Desta maneira, relembra-se que cada jogador tem um conjunto de estratégias. Quando se escolhe uma estratégia tem-se uma situação, ou perfil, no espaço de todas as situações, ou perfis, possíveis de ocorrer no jogo e que cada jogador tem preferências em cada situação e dessa maneira age racionalmente.

Traduzindo para uma linguagem matemática, tem-se que cada jogador possui uma função utilidade que atribui um número real, que significa o ganho, ou o payoff, do jogador em cada situação do jogo. Logo, existe um conjunto finito de jogadores, denotado por $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$, e que cada jogador $g_i \in G$ possui um conjunto finito de estratégias puras do jogador sendo representada por $S_i=\{s_{i1},s_{i2},...,s_{im_i}\}$, com $i \in \{1,2,...,n\}$ e $m_i \geq 2$.

Um vetor $\mathbf{s}=(s_{1j_1},s_{2j_2},...,s_{nj_n})$ onde s_{ij_i} é uma estratégia pura do jogador $g_i \in G$, sendo chamado de perfil de estratégia pura. O conjunto de todos os perfis de estratégia pura forma o espaço de estratégia pura do jogo, que é o produto cartesiano $S=\prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$.

Cada jogador $g_i \in G$ admite a existência de uma função utilidade, definida pela função a seguir.

$$\begin{aligned} u_i \ : \ & S \rightarrow \mathbb{R} \\ & \mathbf{s} \mapsto u_i(\mathbf{s}). \end{aligned} \tag{13}$$

Para encontrar a solução em um jogo é necessário compreender o que seria esse conceito. Assim,

> $[\cdots]$ o que se entende como solução de um jogo em estratégias puras é um perfil de estratégias puras onde cada jogador não tem incentivo de mudar sua estratégia se os demais jogadores não o fizerem. Em jogos com dois jogadores, isto equivale a dizer que ambos usaram uma estratégia tal que não haja outra

> que sirva de melhor resposta para a usada por seu oponente (OLIVEIRA, 2017, p.27).

Existem vários processos para encontrar essa solução, porém neste trabalho serão utilizados os conceitos mais usuais: **Dominância** e **Equilíbrio de Nash**.

Ao pensar na semântica da palavra dominância conclui-se que a estratégia escolhida irá dominar a outra, ou seja, exercerá uma grande influência, ou poder, sobre as demais. Dessa maneira se uma estratégia sempre apresentar um ganho menor do que qualquer outra de um jogador, para qualquer estratégia escolhida pelo oponente, essa estratégia é chamada de Estratégia Pura Estritamente Dominada.

É sabido que, qualquer jogador quer sempre maximar seus ganhos nos jogos. Desta maneira se uma estratégia é estritamente dominada, não há motivos para o agente optar por ela. Assim, pode-se eliminar todas as estratégias puras estritamente dominadas de um jogo. Ao fazer a eliminação, observa se as estratégias restantes passaram a ser estritamente dominadas. Caso isso ocorra, repete o mesmo processo. A isto dá-se o nome de dominância estrita iterada. Caso se obtém um único perfil de estratégias puras, este perfil é um conhecido como equilíbrio das estratégias dominantes.

Tendo isso em mente, pode-se matematizar essa situação. Para isso, inicialmente define-se o subíndice $-i$. Esse subíndice representa que está sendo tirado do conjunto tudo que está relacionado ao jogador g_i. Ou seja, vale a equação abaixo.

$$\mathbf{s}_{-i} = (s_{1j_1}, ..., s_{(i-1)j_{i1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, ..., s_{nj_n}) \in S_{-i} = S_1 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n. \qquad (14)$$

Essa relação representa uma escolha de todos os jogadores, tirando o jogador g_i. Assim, um perfil de estratégias pode ser descrito como na equação a seguir.

$$\mathbf{s} = (s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i}) = (s_{1j_1}, ..., s_{(i-1)j_{i1}}, s_{ij_i}, s_{(i+1)j_{i+1}}, ..., s_{nj_n}) \qquad (15)$$

Com isso tudo posto, pode-se definir a Estratégia Pura Estritamente Dominada.

Definição 5.1.1 *(Estratégia Pura Estritamente Dominada)*

Uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ do jogador $g_i \in G$ é estritamente dominada por uma estratégia $s_{ik'} \in S$ se valer a inequação a seguir

$$u_i(s_{ik'}, \boldsymbol{s}_{-i}) > u_i(s_{ik}, \boldsymbol{s}_{-i}); \forall \boldsymbol{s}_{-i} \in S_{-i}. \qquad (16)$$

A estratégia $s_{ik} \in S_i$ é fracamente dominada pela estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se valer a inequação abaixo

$$u_i(s_{ik'}, \boldsymbol{s}_{-i}) \geq u_i(s_{ik}, \boldsymbol{s}_{-i}); \forall \boldsymbol{s}_{-i} \in S_{-i} \qquad (17)$$

Uma maneira de aplicar esse conhecimento utiliza somente os perfis de estratégias de apenas um único jogador $g_i \in G$ que irá variar, enquanto que as demais estratégias permanecerão fixas. Frequentemente usa-se essa abordagem para buscar a solução do problema.

Com isso em mente, pode-se agora resolver o exemplo presente na seção 3.4. O Dilema do Prisioneiro tem a sua matriz de payoff representada na Tabela 3. Usando a Definição 5.1.1 para encontrar a solução desse problema, tem-se que a estratégia Confessar do prisioneiro A é a melhor opção, pois

$$u_A(\text{Confessar}, \text{Confessar}) = -5 \quad > \quad -10 = u_A(\text{Negar}, \text{Confessar}); \tag{18}$$
$$u_A(\text{Confessar}, \text{Negar}) = 0 \quad > \quad -1 = u_A(\text{Negar}, \text{Negar}). \tag{19}$$

Ou seja,

$$u_A(\text{Confessar}, \mathbf{s}_{-i}) > u_A(\text{Negar}, \mathbf{s}_{-i}). \tag{20}$$

Portanto, segundo a definição, pode-se eliminar os resultados que são dominados da matriz de payoff. Nesse caso, será eliminada a segunda linha, resultando na seguinte matriz, atualizada, representada na Tabela 9.

Tabela 9 – Remoção dos ganhos do jogador A que foram dominados no jogo Dilema dos Prisioneiros.

		B	
		Confessar	Negar
A	Confessar	$(-5,-5)$	$(0,-10)$

Fonte: Acervo do Autor

Para o prisioneiro B, confessar também é uma ótima escolha pois

$$u_B(\text{Confessar}, \mathbf{s}_{-i}) = -5 > -10 = u_B(\text{Negar}, \mathbf{s}_{-i}). \tag{21}$$

Assim, reutilizando a definição 5.1.1 na Tabela 9, pode-se eliminar novamente parte da matriz. Neste caso será retirada a segunda coluna da matriz, como mostra a Tabela 10.

Tabela 10 – Remoção dos ganhos do jogador B que foram dominados no jogo Dilema dos Prisioneiros.

		B	
		Confessar	
A	Confessar	$(-5,-5)$	

Fonte: Acervo do Autor

Ao utilizar esse processo, chega-se sempre em apenas uma solução no jogo. Pode acontecer de essa técnica fornecer vários perfis, nenhum perfil ou até mesmo fornecer todas as estratégias. Um exemplo na qual esse fato ocorre é no jogo *Batalha dos Sexos*, que possui nenhuma estratégia estritamente dominada. Para situações desse tipo, deve-se utilizar outro conceito para encontrar a solução.

Para isso, deve-se ter em mente que o agente busca sempre maximizar o seu ganho, e dessa forma age racionalmente. Portanto, deve existir uma atitude em que ele possa agir estrategicamente, ou seja, é a melhor resposta de todas. Essa solução é chamada de **Equilíbrio de Nash**.

Definição 5.1.2 *(Equilíbrio de Nash)*

Um perfil de estratégia $\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*)$ é dito Equilíbrio de Nash se

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i}^*), \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \forall j_i \in \{1, \cdots, m_i\} (m_i \leq 2) \tag{22}$$

Ao voltar para ao exemplo da subseção 3.4, o Dilema do Prisioneiro, tem-se que o vetor (Confessar, Confessar) = (-5, -5) é um Equilíbrio de Nash, pois a desigualdade $u_i(\text{Confessar}, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i}^*)$, sempre é válida para ambos os jogadores. Nesse jogo esse resultado é o único Equilíbrio de Nash, em estratégias puras.

Perceba que o resultado encontrado utilizando o processo de dominância no jogo Dilema do Prisioneiro é o mesmo que foi encontrado aqui. Dessa forma, analisando um caso particular, dá para intuir que se uma estratégia sobrevive ao processo de eliminação da Dominância estrita dominada, então essa estratégia é um Equilíbrio de Nash.

Claro que a intuição pode gerar algumas falácias, porém para esse caso não. A seguir há uma proposição que garante que essa relação é verdadeira.

Proposição 5.1.1 *Se $\mathbf{s}^*$ é um Equilíbrio de Nash de um jogo em forma estratégica, então para todo jogador g_i ele sobrevive ao processo de eliminação de estratégias estritamente dominadas.*

Demonstração: Omitida. Ver proposição 3.5.6 em Rêgo(2011, p.37)

■

O Equilíbrio de Nash permite a existência de mais de um perfil que possua essa característica. Um exemplo é o jogo Batalha dos Sexos, presente na seção 3.5, em que os perfis (Praia, Praia) e (Acampar, Acampar), são Equilíbrios de Nash, pois

$$u_1(\text{Praia}, \text{Praia}) = 10 \geq 0 = u_1(\text{Acampar}, \text{Praia}); \tag{23}$$

$$u_2(\text{Praia}, \text{Praia}) = 5 \geq 0 = u_2(\text{Acampar}, \text{Praia}); \tag{24}$$

$$u_1(\text{Acampar}, \text{Acampar}) = 5 \geq 0 = u_1(\text{Praia}, \text{Acampar}); \tag{25}$$

$$u_2(\text{Acampar}, \text{Acampar}) = 10 \geq 0 = u_2(\text{Praia}, \text{Acampar}). \tag{26}$$

Existem jogos que não possuem Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras, como por exemplo no jogo da subseção 3.6. Nesse jogo não dá para aplicar esse conceito do Equilíbrio de Nash, pois sempre haverá uma utilidade que será maior a que foi escolhida para ser o Equilíbrio de Nash.

Dessa forma, para poder encontrar algum Equilíbrio de Nash nos jogos, caso exista, precisa-se adicionar o conceito de probabilidade nessas situações. Ao fazer esse acréscimo para a análise, entra-se nas Estratégias Mistas.

5.2 ESTRATÉGIAS MISTAS

Como visto anteriormente, a noção que se baseia as Estratégias Mistas é considerar o jogo do ponto de vista probabilístico. Ou seja, ao invés de escolher um perfil de estratégias puras, o jogador adota uma distribuição de probabilidades sobre as suas estratégias puras.

Denotavam-se anteriormente as Estratégias Puras como sendo **s**. Agora para uma estratégia mista, adota-se a notação $\boldsymbol{p}_i$, na qual cada $\boldsymbol{p}_i$ se refere ao jogador $g_i \in G$ e essa sendo uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto S_i. Ou seja,

$$\boldsymbol{p}_i \in \Delta_{m_i} = \left\{ (x_1, ..., x_{m_i}); x_1 \geq 0, ..., x_{m_i} \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1 \right\} \text{, com } m_i \geq 2 \tag{27}$$

Se $\boldsymbol{p}_i = (p_{i1}, ..., p_{im_i})$, então $p_{i1} \geq 0, ..., p_{im_i} \geq 0$ e $\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1$. Os vértices do conjunto Δ_{m_i} são pontos da forma $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \mathbf{e}_{m_i} = (0, 0, \cdots, 1)$.

Esses pontos resultam em probabilidade 1 às estratégias puras $s_{i1}, s_{i2}, \cdots, s_{im_i}$. Assim, conclui-se que $\mathbf{e}_k$ é a estratégia mista que representa a estratégia pura s_{ik} do jogador g_i. Portanto, a estratégia pura é um caso particular das estratégias mistas.

Realizando o produto cartesiano de todos os conjuntos de estratégias mistas, obtém-se o espaço de estratégias mistas, denotado por $\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \cdots \times \Delta_{m_n}$.

Um vetor $\boldsymbol{p} \in \Delta$ é chamado de perfil de estratégia mista e a notação $\boldsymbol{p}_{-i}$ caracteriza as estratégias mistas de todos os jogadores, exceto do jogador g_i. Seja $\boldsymbol{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$, cada um desses vetores determina um ganho esperado no jogo, ou seja, resulta em uma média ponderada das distribuições de probabilidades $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$. Assim, tem-se que

$$\boldsymbol{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = (\underbrace{p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1m_1}}_{\mathbf{p}_1}; \underbrace{p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2m_2}}_{\mathbf{p}_2}; \ldots; \underbrace{p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nm_n}}_{\mathbf{p}_n}). \tag{28}$$

Desta forma, tem-se que a função utilidade, em estratégias mistas será dada pela equação a seguir

$$u_i(\boldsymbol{p}) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{kj_k} u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2} \ldots, s_{njn}) \right). \tag{29}$$

Ao aplicar essa definição no jogo da subseção 3.4, tem-se que $m_1 = 2, m_2 = 2, n = 2$ e $\boldsymbol{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, com $\mathbf{p}_1 = (p, 1-p)$ e $\mathbf{p}_2 = (q, 1-q)$. Quando o jogo tem apenas dois jogadores usualmente utiliza-se p e q para representar uma distribuição de probabilidades. Portanto:

$$
\begin{aligned}
u_i(\boldsymbol{p}) &= \sum_{j_1=1}^{2}\sum_{j_2=1}^{2}\left(\prod_{k=1}^{2} p_{kj_k}u_i(s_{1j_1},s_{2j_2})\right)\\
&= \sum_{j_1=1}^{2}\sum_{j_2=1}^{2}\left(p_{1j_1}p_{2j_2}u_i(s_{1j_1},s_{2j_2})\right)\\
&= \sum_{j_1=1}^{2}\left(p_{1j_1}p_{21}u_i(s_{1j_1},s_{21})+p_{1j_1}p_{22}u_i(s_{1j_1},s_{22})\right) \qquad (30)\\
&= (p_{11}p_{21}u_i(s_{11},s_{21})+p_{12}p_{21}u_i(s_{12},s_{21}))+(p_{11}p_{22}u_i(s_{11},s_{22})+p_{12}p_{22}u_i(s_{12},s_{22}))\\
&= p_{11}(p_{21}u_i(s_{11},s_{21})+p_{22}u_i(s_{11},s_{22}))+p_{12}(p_{21}u_i(s_{12},s_{21})+p_{22}u_i(s_{12},s_{22})).
\end{aligned}
$$

Como $p_{11}=p, p_{12}=1-p, p_{21}=q,$ e $p_{22}=1-q$, obtém-se a equação a seguir

$$u_i(\boldsymbol{p}) = p(qu_i(s_{11},s_{21})+(1-q)u_i(s_{11},s_{22}))+(1-p)(qu_i(s_{12},s_{21})+(1-q)u_i(s_{12},s_{22})). \quad (31)$$

E mais, sabe-se que

- $u_1(s_{11},s_{21}) = u_{\mathrm{A}}(\text{confessar,confessar}) = -5;$
- $u_1(s_{11},s_{22}) = u_{\mathrm{A}}(\text{confessar,negar}) = 0;$
- $u_1(s_{12},s_{21}) = u_{\mathrm{A}}(\text{negar,confessar}) = -10;$
- $u_1(s_{12},s_{22}) = u_{\mathrm{A}}(\text{negar, negar}) = -1$
- $u_2(s_{11},s_{21}) = u_{\mathrm{B}}(\text{confessar,confessar}) = -5$
- $u_2(s_{11},s_{22}) = u_{\mathrm{B}}(\text{confessar,negar}) = -10$
- $u_2(s_{12},s_{21}) = u_{\mathrm{B}}(\text{negar,confessar}) = 0$
- $u_2(s_{12},s_{22}) = u_{\mathrm{B}}(\text{negar, negar}) = -1$

Assim, a função utilidade de cada jogador é $u_1(\boldsymbol{p}) = u_{\mathrm{A}}(\mathbf{p}) = 4pq-9q+p-1$ e $u_2(\boldsymbol{p}) = u_{\mathrm{B}}(\mathbf{p}) = 4pq-9p+q-1$.

Se o jogador A escolher uma estratégia mista $\mathbf{p}_1 = (\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ e o jogador B adotar a estratégia mista $\mathbf{p}_2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, o perfil de estratégia obtido será $\boldsymbol{p} = (\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) = (\frac{3}{4},\frac{1}{4};\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, com $p=\frac{3}{4}$ e $q=\frac{1}{2}$. Portanto, a utilidade de cada um será:

$$u_A(\boldsymbol{p}) = 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-9\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-1 = \frac{-13}{4} = -3,25; \quad (32)$$

$$u_B(\boldsymbol{p}) = 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-9\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-1 = \frac{-23}{4} = -5,75. \quad (33)$$

Portanto, os prisioneiros A e B “ficariam” presos por 3,25 anos e 5,75 anos, respectivamente.

Assim com toda essa formalização pode-se expandir os conceitos de Dominância e Equilíbrio de Nash, definidos nas Estratégias Puras, para Estratégias Mistas.

Definição 5.2.1 *(Dominância Estrita Iterada)*

Sejam $S_i^{(0)} = S_i$ e $\Delta_{m_i}^{(0)} = \Delta_{m_i}$. Definam-se

$$S_i^{(n)} = \{s \in S_i^{n-1};\ \nexists \boldsymbol{p} \text{ tal que } \forall s_{-i} \in S_{-i}^{n-1}, u_i(\boldsymbol{p}, s_{-i}) > u_i(s, s_{-i})\} \tag{34}$$

$$\Delta_{m_i}^{(n)} = \{\boldsymbol{p} = (p_1, ..., p_{m_i}) \in \Delta m_i | \forall k \in \{1, ..., m_i\}, p_k > 0 \text{ se, e somente se } s_{ik} \in S_i^{(n)}\}. \tag{35}$$

Compreende-se que $u_i(\boldsymbol{p}, s_{-i})$ representa o ganho esperado no qual o jogador g_i escolhe a estratégia $\boldsymbol{p}$ e os demais agentes escolhem as estratégias mistas que correspondem as estratégias puras dado por s_{-i}. O conjunto $S_i^{\infty} = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_i^{(n)}$ é chamado de conjunto de estratégias puras e a Equação (36) é o conjunto de todas às estratégias mistas de g_i que sobrevive ao processo de eliminação da técnica de Dominância Estrita Iterada.

$$\Delta_{m_i}^{\infty} = \{\boldsymbol{p} \in \Delta_{m_i} | \nexists \boldsymbol{p}' \in \Delta_{m_i} \text{ tal que } \forall s_{-i} \in S_{-i}^{\infty}, u_i(\boldsymbol{p}', s_{-i}) > u_i(\boldsymbol{p}, s_i)\} \tag{36}$$

Definição 5.2.2 *(Equilíbrio de Nash para Estratégias Mistas)*

Diz-se que um perfil de estratégias mistas $\boldsymbol{p}^* = (\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{p}_2^*, ..., \boldsymbol{p}_n^*) \in \Delta$ é um Equilíbrio de Nash se valer a inequação abaixo

$$u_i(\boldsymbol{p}_i^*, \boldsymbol{p}_{-i}^*) \geq u_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_{-i}^*), \forall \boldsymbol{p} \in \Delta_{m_i} \tag{37}$$

Ou seja, nenhum jogador tem motivo de trocar sua estratégia mista se os demais agentes não o fizerem.

Aplicando a definição de Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas no jogo Dilema do Prisioneiro, presente na subseção 3.4, tem-se que a estratégia mista $\boldsymbol{p}^* = (\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*) = (1,0;1,0)$ é um Equilíbrio de Nash, pois para todo $\mathbf{p} = (p, 1-p) \in \Delta_2, \mathbf{q} = (q, 1-q) \in \Delta_2$ valem

$$u_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2^*) = 5p - 10 \leq -5 = u_1(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*); \tag{38}$$

$$u_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1^*) = 5q - 10 \leq -5 = u_2(\mathbf{p}_2^*, \mathbf{p}_1^*). \tag{39}$$

Note que esse Equilíbrio é o mesmo encontrado na seção 5.1, que era (Confessar, Confessar). Esse perfil é o único Equilíbrio que o jogo possui.

Perceba que as Estratégias Puras são casos particulares das Estratégias Mistas, desta forma, se um determinado jogo tem Equilíbrio de Nash em Estratégia Pura por consequência, ele também será equilíbrio em Estratégias Mistas. Porém, essa afirmação não garante que o Equilíbrio de Nash é único nos jogos. Ou seja, pode ocorrer de o jogo possuir equilíbrio em Estratégia Pura e Mista simultaneamente.

Um exemplo que isso pode ocorrer é no jogo da subseção 3.5, na qual possui os equilíbrios $(1,0;1,0)$ e $(0,1;0,1)$ que são perfis de Estratégias Puras, além de ter o perfil de Estratégia Mista $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ como Equilíbrio de Nash.

6 JOGOS DE SOMA CONSTANTE COM DOIS JOGADORES

Corriqueiramente vêem-se situações em que para um jogador ganhar o outro precisa perder, ou seja, jogos extremamente competitivos e que necessitam que haja um vencedor como, por exemplo, em jogos de lançar moedas. Nesse caso pode-se imaginar que ao somar os ganhos dos jogadores em todas as suas estratégias sempre serão as mesmas. Esses jogos intitulam-se como Jogos de Soma Constante.

A fundamentação teórica desse capítulo está baseada em estudos que constam em Andrade; Zanko(2018), Fiani(2006) e Sartini et al.(2004), tendo um enfoque principal no trabalho de Von Neumann; Morgenstern(1953), uma vez que são os pioneiros dessa área.

Definição 6.0.1 *(JOGOS DE SOMA CONSTANTE COM DOIS JOGADORES)*

Um jogo de soma constante com dois jogadores é um jogo com dois agentes, denominados jogador linha e jogador coluna, com estratégias $S_{Jogador\ linha} = \{1,2,...,m\}$, *e* $S_{Jogador\ coluna} = \{1,2,...,n\}$, *e matriz de payoff representada na Tabela 11.*

Tabela 11 – Matriz de payoff nos jogos de soma constante com dois jogadores

		Jogador coluna			
		1	2	$\dots$	n
Jogador linha	1	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})	$\dots$	(a_{1n},b_{1n})
	2	(a_{21},b_{21})	(a_{22},b_{22})	$\dots$	(a_{2n},b_{2n})
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	m	(a_{m1},b_{m1})	(a_{m2},b_{m2})	$\dots$	(a_{mn},b_{mn})

Fonte: Acervo do Autor

Para que o jogo seja de soma constante deve-se valer a equação abaixo, com $c \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,\cdots,m\}$ *e* $j \in \{1,\cdots,n\}$.

$$a_{ij} + b_{ij} = c. \tag{40}$$

Seja $\mathbf{p} = (p_1,p_2,...,p_m) \in \Delta_m$ uma Distribuição de Probabilidades de Estratégias Puras do Jogador linha e $\mathbf{q} = (q_1,q_2,...,q_n) \in \Delta_n$ uma Distribuição de Probabilidades de Estratégias Puras do Jogador coluna. A função utilidade é dada através da equação a seguir:

$$u_i(\mathbf{p}) = \sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{m_n}\left(\prod_{k=1}^{n} p_{kj_k} u_i(s_{1j_1},s_{2j_2}...,s_{nj_n})\right). \tag{41}$$

Considera-se que $\boldsymbol{p} = (\mathbf{p},\mathbf{q})$, portanto a função utilidade esperada para o Jogador linha é dada pela equação a seguir

$$u_l(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Assim, conclui-se que o ganho esperado pelo jogador linha será representada pela equação abaixo

$$u_l = \mathbf{p}^T A\mathbf{q}, \text{ com } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

De forma idêntica o Jogador coluna terá o seu ganho esperado representado pela equação a seguir

$$u_c = \mathbf{p}^T B\mathbf{q}, \text{ com } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Adotando o jogo como sendo de soma constante, tem-se que vale a equação

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & c & \dots & c \\ c & c & \dots & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \dots & c \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Portanto, conclui-se a seguinte equação

$$A+B = C = \begin{bmatrix} c & c & \dots & c \\ c & c & \dots & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \dots & c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} = c\,\boxed{1}. \quad (46)$$

A representação $\boxed{1}$ significa uma matriz $m \times n$ formada por 1 em todos os seus elementos. Portanto, tem-se que vale a equação

$$u_c(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}^T B\mathbf{q} = \mathbf{p}^T (c\,\boxed{1} - A)\,\mathbf{q} = c\mathbf{p}^T\,\boxed{1}\,\mathbf{q} - \mathbf{p}^T A\mathbf{q}. \quad (47)$$

Como $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ são distribuições de probabilidades, ou seja,$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ e $\sum_{j=1}^{n} q_i = 1.$, tem-se que $\mathbf{p}^T\,\boxed{1}\,\mathbf{q} = 1$. Portanto, vale a equação

$$u_c(\mathbf{p},\mathbf{q}) = c - u_l(\mathbf{p},\mathbf{q}). \quad (48)$$

Através dessa igualdade, chega-se no seguinte caso particular.

$$u_l(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*) \geq u_l(\mathbf{p},\mathbf{q}^*) \text{ se, e somente se, } u_c(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*) \leq u_c(\mathbf{p},\mathbf{q}^*). \tag{49}$$

Esse caso particular é uma relação importante, pois com ela define-se o Equilíbrio de Nash. Nas seções a seguir, define-se o Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras e Mistas nos jogos de soma constante e procura-se uma forma de como encontrá-los.

6.1 EQUILÍBRIO DE NASH EM ESTRATÉGIAS PURAS

Define-se, inicialmente, o que é um ponto de sela em uma matriz. Realiza-se essa definição agora para dar base e formalidade para o Equilíbrio de Nash.

Definição 6.1.1 *(PONTO DE SELA)*

Diz-se que um elemento a_{ij} de uma matriz A é ponto de sela se ele for simultaneamente um mínimo em sua linha e um máximo em sua coluna. Ou seja valem as inequações a seguir

$$\begin{aligned} a_{ij} &\leq a_{il}, \forall l \in \{1,\cdots,n\}; \\ a_{ij} &\geq a_{kj}, \forall k \in \{1,\cdots,m\}. \end{aligned} \tag{50}$$

Ao analisar a definição, pode-se intuir que se um dos ganhos dos jogadores representados na matriz de payoff, que é um elemento de uma matriz, for um ponto de sela,então esse ponto será um Equilíbrio de Nash. Essa intuição através da análise feita pela definição é garantida pelo Teorema a seguir.

Teorema 6.1.1 *O elemento a_{ij} é um ponto de sela da matriz A se, e somente se, o par (i, j) é um Equilíbrio de Nash em estratégias puras para o jogo.*

Demonstração:

Suponha que a_{ij} é um ponto de sela de A. Como é ponto de sela, sabe-se que é máximo em sua coluna, portanto vale $u_l(i, j) = a_{ij} \geq a_{kj} = u_l(k, j)$, para todo $k \in \{1,\cdots,m\}$.

O jogador linha não pode aumentar seu ganho, caso o outro jogador mantenha a escolha da coluna j, assim tem-se que a_{ij} é mínimo em sua linha.

Portanto vale $u_c(i, j) = b_{ij} = c - a_{ij} \geq c - a_{il} = b_{il} = u_c(i,l)$, para todo $l \in \{1,\cdots,n\}$

E essa relação na qual chegou-se é a propriedade que define o Equilíbrio de Nash, a Equação (49), pois o jogador coluna não consegue aumentar seu ganho enquanto o jogador linha manter a sua escolha da linha i.

Logo, o perfil de estratégia pura (i, j) é um Equilíbrio de Nash.

Reciprocamente, suponha que o par (i, j) é um Equilíbrio de Nash. Assim pela Equação (49) tem-se que

$u_l(i, j) \geq u_l(k, j)$ se, e somente se, $u_c(i, j) \leq u_c(l, j)$.

Portanto, pela Definição 6.1.1 obtém-se que a_{ij} é ponto de sela.

■

O próximo teorema garante que se uma matriz possui dois pontos de sela, então haverá, na verdade, mais dois outros pontos de sela, totalizando quatro pontos de sela. Portanto, pelo teorema anterior conclui-se que haverá quatro Equilíbrios de Nash no jogo.

Teorema 6.1.2 *Se a_{ij} e a_{rs} são dois pontos de sela da Matriz A, então a_{is} e a_{rj} também são pontos de sela da Matriz A e vale a equação a seguir*

$$a_{ij} = a_{rs} = a_{is} = a_{rj}. \tag{51}$$

Demonstração:

Sejam a_{ij} e a_{rs} pontos de sela da matriz A.

Pela Definição 6.1.1 conclui-se que $a_{ij} \leq a_{is}$ e $a_{ij} \geq a_{rj}$;$a_{rs} \leq a_{rj}$ e $a_{rs} \geq a_{is}$.

Logo, por transitividade obtém-se $a_{ij} \leq a_{is} \leq a_{rs} \leq a_{rj} \leq a_{ij}$.

Assim $a_{ij} = a_{rs} = a_{is} = a_{rj}$.

Portanto a_{rs} e a_{rj} são pontos de sela.

■

O ganho mínimo do jogador linha, se ele escolher a linha k, é dado pela equação abaixo

$$\underline{a_k} = \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl}. \tag{52}$$

Já, o ganho mínimo do jogador coluna, se ele escolher a coluna l, é $c - \overline{a_l}$ é dada pela equação a seguir

$$\overline{a_l} = \max_{1 \leq k \leq m} a_{kl}. \tag{53}$$

Utilizando as Equações (52) e (53), define-se v_l, intitulada de Maximin e v_c, chamada de Minimax, respectivamente

$$v_l(A) = \max_{1 \leq k \leq m} \underline{a_k} = \max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl}. \tag{54}$$

$$v_c(A) = \min_{1 \leq l \leq n} \overline{a_l} = \min_{1 \leq l \leq n} \max_{1 \leq k \leq m} a_{kl} \tag{55}$$

Teorema 6.1.3 *Para toda Matriz A, tem-se $v_c(A) \geq v_l(A)$.*

Demonstração:

Para todo $k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ tem-se que vale $a_{kj} \geq \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl}$.

Portanto $\max_{1 \leq k \leq m} a_{kj} \geq \max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl} = v_l(A)$, para todo $j \in \{1, \ldots n\}$.

Sabe-se que $\max_{1 \leq k \leq m} a_{kj} \leq v_c(A)$.

Assim, escolhe-se o menor dos $\max_{1 \leq k \leq m} a_{kj}$ e a desigualdade ainda continua válida, logo tem-se que vale a seguinte inequação

$$v_c(A) = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq k \leq m} a_{kj} \geq \max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl} = v_l(A). \tag{56}$$

■

Através desse teorema chega-se em um outro que relaciona $v_c(A)$ e $v_l(A)$ com os pontos de uma matriz A.

Teorema 6.1.4 *Uma matriz A tem um ponto de sela, se e somente se, $v_l = v_c$.*

Demonstração:

Suponha que a_{ij} é um ponto de sela da Matriz A. Assim $a_{ij} = \min\limits_{1\leq l\leq n} a_{il} = \underline{a_i}$.

Sabe-se que $v_l(A) = \max\limits_{1\leq k\leq m} \underline{a_k}$, logo $v_l(A) \geq \underline{a_i} = a_{ij}$.

Como, $a_{ij} = \max\limits_{1\leq k\leq m} a_{kj} = \overline{a_j}$ e $v_c(A) = \min\limits_{1\leq l\leq n} \overline{a_l}$, obtém-se que $v_c(A) \leq \overline{a_j} = a_{ij}$.

Portanto, das duas relações encontradas, obtém-se $v_c(A) \leq v_l(A)$.

O Teorema 6.1.3, garante que $v_c(A) \geq v_l(A)$, logo $v_c(A) = v_l(A)$.

Reciprocamente, suponha que $v_c(A) = v_l(A)$. Sabe-se que $v_l(A) = \max\limits_{1\leq r\leq m} a_r$, portanto existe uma linha i tal que $v_l(A) = \underline{a_i}$.

Como $\underline{a_i} = \min\limits_{1\leq s\leq n} a_{is}$, logo existe uma coluna l tal que $\underline{a_i} = a_{il}$. Assim $v_l(A) = \underline{a_i} = a_{il}$.

Também sabe-se que $v_c(A) = \min\limits_{1\leq s\leq n} a_s$, logo existe uma coluna j tal que $v_c(A) = \overline{a_j}$. Como $\overline{a_j} = \max\limits_{1\leq r\leq m} a_{rj}$, então existe uma linha k tal que $\overline{a_j} = a_{kj}$. Assim $v_c(A) = \overline{a_j} = a_{kj}$.

Portanto $a_{il} = \underline{a_i} = v_l(A) = v_c(A) = \overline{a_j} = a_{kj}$.

Como $a_{ij} \leq \overline{a_j} = \underline{a_i} \leq a_{is}, \forall s = 1,\ldots,n$, então a_{ij} é o mínimo da sua linha e $a_{ij} \geq \underline{a_i} = \overline{a_j} \geq a_{rj}, \forall r = 1,\ldots m$. Isto é, a_{ij} é máximo de sua coluna.

Logo a_{ij} é ponto de sela da matriz A.

■

Desse teorema, chega-se no seguinte corolário:

Corolário 6.1.1 *Um jogo de dois jogadores com soma constante definido pela matriz de* payoffs *A do jogador linha tem um Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras se e somente se $v_l(A) = v_c(A)$.*

Demonstração:

Do Teorema 6.1.4, sabe-se que uma matriz A tem um ponto de sela se e somente se $v_l(A) = v_c(A)$. E do Teorema 6.1.1 sabe-se que uma matriz tem ponto de sela, se e somente se, esse ponto é Equilíbrio de Nash. Portanto conclui-se que o jogador linha tem Equilíbrio de Nash se e somente se $v_l(A) = v_c(A)$.

■

6.2 EQUILÍBRIO DE NASH EM ESTRATÉGIAS MISTAS

Define-se, inicialmente, as relações $v_l(A)$ e $v_c(A)$ em relação às distribuições de probabilidades, ou seja, às equações abaixo

$$v_l(A) = \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}. \tag{57}$$

$$v_c(A) = \min_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}. \tag{58}$$

A partir dessa definição chega-se no primeiro teorema para Estratégias Mistas.

Teorema 6.2.1 *Para toda Matriz A, tem-se $v_c(A) \geq v_l(A)$.*

Demonstração:

Seja $\mathbf{p} \in \Delta_m$ tal que, vale a relação $\mathbf{p}^T A\mathbf{q} \geq \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{p}^T A\mathbf{y}$.

Assim, obtém-se que $\max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q} \geq \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{p}^T A\mathbf{y} = v_l(A)$.

Sabe-se que $\max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q} \leq v_c(A)$, logo ao pegar o menor dos $\max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}$ continua válida a desigualdade. Ou seja vale a inequação a seguir

$$v_c(A) = \min_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q} \geq \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{p}^T A\mathbf{y} = v_l(A). \tag{59}$$

■

O seguinte teorema garante a existência do Equilíbrio de Nash através das funções v_l e v_c.

Teorema 6.2.2 *Um perfil de Estratégia Mista $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ é um Equilíbrio de Nash de um jogo de dois jogadores com soma constante com uma matriz de payoffs A do jogador linha se, e somente se, valer a equação abaixo*

$$v_l(A) = v_c(A) = \boldsymbol{p}^{*T} A\boldsymbol{q}^*. \tag{60}$$

Demonstração:

Suponha que $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um Equilíbrio de Nash. Pela Equação (49) tem-se que $\mathbf{p}^{*T} A\mathbf{p}^* = u_l(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq u_l(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) = \mathbf{p}^T A\mathbf{q}^*, \forall \mathbf{p} \in \Delta_m$.

Em particular,$\mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}^* = \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}^* \geq \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}^* = v_c(A)$.

Sabe-se também que $\mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}^* = c - u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq c - u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}, \forall \mathbf{q} \in \Delta_n$.

E, em particular $\mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}^* = \min_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{p}^* A\mathbf{q} \leq \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T A\mathbf{q} = v_l(A)$.

Por transitividade das relações encontradas anteriormente, obtém-se a inequação abaixo

$$v_l(A) \geq v_c(A). \tag{61}$$

Pelo Teorema 6.2.1 sabe-se que $v_c(A) \geq v_l(A)$. Portanto, conclui-se que a seguinte equação é válida.

$$v_l(A) = v_c(A). \tag{62}$$

Reciprocamente, suponha que $v_l(A) = v_c(A)$.

Como $v_l(A) = \max\limits_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \min\limits_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}$, logo $\exists \mathbf{p}^* \in \Delta_m$ tal que $v_l(A) = \min\limits_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}$.

Sabe-se que $v_c = \min\limits_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \max\limits_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}$, portanto $\exists \mathbf{q}^* \in \Delta_n$ tal que $v_c(A) = \max\limits_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}^*$.

Por hipótese, tem-se $\min\limits_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q} = v_l(A) = v_c(A) = \max\limits_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}^*$.

Logo, $u_l(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}^* \geq \min\limits_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q} = \max\limits_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}^* \geq \mathbf{x}^T A\mathbf{q}^* = u_l(\mathbf{x}, \mathbf{q}^*)$, para todo $\mathbf{x} \in \Delta_m$.

Assim, tem-se que é a válida a relação a seguir

$$
\begin{array}{rcl}
u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) & = & c - \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}^* \\
& \geq & c - \max\limits_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}^* \\
& = & c - \min\limits_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q} \\
& \geq & c - \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{y} \\
& = & u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in \Delta_n,
\end{array}
\tag{63}
$$

Portanto, o ponto $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um Equilíbrio de Nash.

■

Um caso particular dos jogos de soma constante são os jogos de soma zero. Esse jogo é um caso em que para que haja um vencedor deve haver um perdedor, ou seja, as utilidades dos jogadores são simétricas.

6.3 JOGOS DE SOMA ZERO

A Definição 6.0.1 garante como são os jogos de soma constante. Adotando $c = 0$, obtém-se a igualdade abaixo.

$$a_{ij} + b_{ij} = 0. \tag{64}$$

Quando há um jogo no qual os ganhos de um jogador "anula" os ganhos do outro jogador, esse jogo é chamado de Jogo de Soma Zero. Todos os teoremas definidos neste capítulo valem para esses jogos.

Contudo, para esses jogos existe um teorema especial que só pode ser aplicado neles. Esse teorema se chama Teorema minimax de Von Neumann, que garante que em jogos de soma zero, com uma matriz de payoff A, existe pelo menos um ponto que é a melhor solução para ambos os jogadores, ou seja, é uma solução estratégica.

Como os estudos de Von Neumman e Morgenstern foram elaborados antes da criação da definição de Equilíbrio de Nash, então na sua literatura original não recebe esse nome. Com o advento e as atualizações, adota-se esse nome como sendo as soluções encontradas pelo seu Teorema.

Teorema 6.3.1 *(Minimax de Von Neumann)*

Para todo jogo de soma zero com dois jogadores representado pela matriz de payoffs A *do jogador linha, sempre existe um perfil de estratégias mista* $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ *que satisfaz a seguinte igualdade*

$$v_l(A) = \max_{\boldsymbol{p} \in \Delta_m} \min_{\boldsymbol{q} \in \Delta_n} \boldsymbol{p}^T A \boldsymbol{q} = \min_{\boldsymbol{q} \in \Delta_n} \max_{\boldsymbol{p} \in \Delta_m} \boldsymbol{p}^T A \boldsymbol{q} = v_c(A). \tag{65}$$

O ponto $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ *é um Equilíbrio de Nash do jogo.*

Demonstração: Ver Andrade; Zanko(2018).

■

A partir desse teorema, conclui-se que ao realizar o minimax em um jogador e o maximin no outro e ambos derem o mesmo valor, então esse perfil será um Equilíbrio de Nash. Se analisar com os estudos apresentados nesse capítulo, fica claro que o Teorema Minimax de Von Neumann é um método de encontrar os pontos de sela de uma matriz $m \times n$.

Considere a seguinte situação para aplicação do Teorema Minimax de Von Neumann: Seja uma campanha publicitária entre duas empresas A e B que vendem perfumes. A empresa A pode anunciar seu produto no rádio, na televisão ou no jornal e a empresa B pode anunciar o seu produto no rádio, na televisão, no jornal, ou via e-mail. Seja a seguinte matriz de payoff das empresas nessa situação, representado pela Tabela 12. Os números presentes na tabela representam percentuais de ganhos, ou perdas ao adotarem a respectiva ação.

Tabela 12 – Matriz de payoff do jogo campanha publicitária.

		B			
		Rádio	Televisão	Jornal	E-mail
	Rádio	$(10,-10)$	$(0,0)$	$(11,-11)$	$(-1,1)$
A	Televisão	$(8,-8)$	$(7,-7)$	$(8,-8)$	$(10,-10)$
	Jornal	$(0,0)$	$(6,-6)$	$(-7,7)$	$(7,-7)$

Fonte: Adaptado de Feliciano(2007, p.52).

Uma maneira para encontrar as soluções é separar essa tabela em uma que represente somente os ganhos de um dos jogadores. Desta maneira, seja então a Tabela 13 que represente somente os ganhos da empresa A.

Realizando o mínimo nas linhas da Tabela 13 e o máximo nas colunas dessa mesma tabela, tem-se a Tabela 14.

Nessa tabela foram destacados dois resultados, um em amarelo e outro em verde. O resultado em amarelo é o Minimax do jogador linha, e o resultado em verde é o Maximin do Jogador coluna. Como os resultados foram iguais então o perfil (Televisão, Televisão) é o Equilíbrio de Nash nesse jogo de soma zero. Ao montar uma tabela que represente os ganhos do jogador B, chegará nos mesmos resultados encontrados.

Tabela 13 – Matriz de payoff do jogador A no jogo campanha publicitária.

		B			
		Rádio	Televisão	Jornal	E-mail
	Rádio	10	0	11	-1
A	Televisão	8	7	8	10
	Jornal	0	6	-7	7

Fonte: Adaptado de Feliciano(2007, p.52).

Tabela 14 – Matriz com o mínimo das linhas e o máximo das colunas feitas na Tabela 13.

		B				
		Rádio	Televisão	Jornal	E-mail	Min linha
	Rádio	10	0	11	-1	-1
A	Televisão	8	7	8	10	7
	Jornal	0	6	-7	7	-7
	Max col	10	7	11	10	

Fonte: Acervo do Autor.

Perceba que o resultado encontrado é uma maneira de descobrir as soluções em Estratégias Puras. Para Estratégias Mistas não será realizado neste trabalho.

Com esse exemplo que ilustra um modo de aplicar o Teorema Minimax de Von Neumann, termina-se esse capítulo. No próximo capítulo será mostrado que todos os jogos que podem ser representados na tabela de payoff possuem um Equilíbrio de Nash.

7 EXISTÊNCIA DO EQUILÍBRIO DE NASH EM JOGOS COM NÚMERO FINITO DE JOGADORES

Na seção 6.3, o Teorema Minimax de Von Neumann, Teorema 6.3.1, garante a existência do Equilíbrio de Nash para um grupo bem restrito de jogos. Porém, a existência desse perfil de estratégia é bem mais geral, abrangendo muito mais jogos.

Todo jogo que pode ser definido por uma matriz de payoff possui um Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas. Assim, neste capítulo todos os estudos estão baseados em trabalhos de John Forbes Nash, intitulados *Equilibrium Points in n-Person Games* (NASH, 1949), *The Bargaining Problem* (NASH, 1950), *Non-cooperative Games* (NASH, 1951) e *Two-Person Cooperative Games* (NASH, 1953).

Para mostrar que todos os jogos com representação na matriz de payoff têm Equilíbrio de Nash se faz necessário ter-se alguns teoremas auxiliares.

7.1 TEOREMAS AUXILIARES

Começa-se essa seção definindo uma função que representa o ganho ou a perda do jogador g_i quando ele troca a distribuição de probabilidades $\boldsymbol{p}_i$ pela estratégia pura s_{ij}. Assim, seja $i \in \{1,\ldots,n\}$ e $j \in \{1,\ldots,m_i\}$, define-se a função que está sendo representada pela relação abaixo

$$\begin{aligned} z_{ij} \;&:\; \Delta \to \mathbb{R} \\ &\boldsymbol{p} \mapsto z_{ij}(\boldsymbol{p}) = u_i(s_{ij},\boldsymbol{p}_{-i}) - u_i(\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{p}_{-i}). \end{aligned} \tag{66}$$

Teorema 7.1.1 *Um ponto $\boldsymbol{p}^*$ é Equilíbrio de Nash se, e somente se, $z_{ij}(\boldsymbol{p}^*) \leq 0$.*

Demonstração:

Suponha que $\boldsymbol{p}^* = (\boldsymbol{p}_i^*,\boldsymbol{p}_{-i}^*)$ um ponto que é um Equilíbrio de Nash. Sabe-se pela Definição 5.2.2 que $u_i(\boldsymbol{p}_i^*,\boldsymbol{p}_{-i}^*) \geq u_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}_{-i}^*)$.

Assim, escolhendo $\boldsymbol{p} = s_{ij}$, obtém-se $u_i(\boldsymbol{p}_i^*,\boldsymbol{p}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij},\boldsymbol{p}_{-i}^*)$.

Logo, para cada $i = 1,\ldots,n$ e $j = 1,\ldots,m_i$, vale $z_{ij}(\boldsymbol{p}^*) = u_i(s_{ij},\boldsymbol{p}_{-i}^*) - u_i(\boldsymbol{p}_i^*,\boldsymbol{p}_{-i}^*) \leq 0$.

Reciprocamente, suponha que $z_{ij} \leq 0$. Para cada $i = 1,\ldots,n$ e $j = 1,\ldots,m_i$, tem-se $z_{ij}(\boldsymbol{p}^*) = u_i(s_{ij},\boldsymbol{p}_{-i}^*) - u_i(\boldsymbol{p}_i^*,\boldsymbol{p}_{-i}^*) \leq 0$.

Sabe-se que a estratégia pura pode ser representada por uma estratégia mista que tem 1 em uma coordenada e 0 nas demais. Ou seja, $s_{ij} = \boldsymbol{e}_j$, na qual $\boldsymbol{e}_j$ representa um vetor de $\mathbb{R}^{m_i}$ que tem 1 na j-ésima coordenada e zero nas restantes. Assim $u_i(s_{ij},\boldsymbol{p}_{-i}^*) = u_i(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{p}_{-i}^*) \leq u_i(\boldsymbol{p}_i^*,\boldsymbol{p}_{-i}^*)$.

Assim, basta mostrar que para todo $\boldsymbol{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{im_i}) \in \Delta_{m_i}$, vale $u_i(\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{p}_{-i}^*) \leq u_i(\boldsymbol{p}_i^*,\boldsymbol{p}_{-i}^*)$.

Sabe-se que a função utilidade $u_i(\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{p}_{-i}^*)$ é funcional linear, pois $\sum\limits_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1, \forall \boldsymbol{p}_i \in \Delta_{m_i}$.

Logo, tem-se que a equação abaixo é válida.

$$u_i(\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{p}^*_{-i}) = u_i\left(\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{p}^*_{-i}\right) = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}u_i(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{p}^*_{-i}) \leq \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}u_i(\boldsymbol{p}^*_i,\boldsymbol{p}^*_{-i}) = u_i(\boldsymbol{p}^*_i,\boldsymbol{p}^*_{-i}). \quad (67)$$

Portanto, $\boldsymbol{p}^*$ é um Equilíbrio de Nash.

■

Seja uma função g_{ij}, com i e j definidos neste capítulo anteriormente, que obedeça a seguinte lei

$$\begin{aligned} g_{ij} \ &: \ \Delta \to \mathbb{R} \\ &\boldsymbol{p} \mapsto g_{ij}(\boldsymbol{p}) = \max\{0, z_{ij}(\boldsymbol{p})\}. \end{aligned} \quad (68)$$

Teorema 7.1.2 *Um ponto $\boldsymbol{p}$ é um Equilíbrio de Nash, se somente se, $g_{ij}(\boldsymbol{p}) = 0$.*

Demonstração:
Seja $\boldsymbol{p}$ um Equilíbrio de Nash. Pelo Teorema 7.1.1, tem-se que $z_{ij}(\boldsymbol{p}) \leq 0$.
Ou seja, o valor máximo que a função g_{ij} pode assumir é 0.
Portanto $g_{ij}(\boldsymbol{p}) = \max\{0, z_{ij}(\boldsymbol{p})\} = 0$.

■

Para o próximo teorema auxiliar se faz necessário introduzir a noção de um ponto fixo intitulado de Brouwer. Esse ponto possui uma característica que dada uma função, se aplicar nessa função um ponto qualquer resultar no próprio ponto, então esse valor é um ponto de Brouwer.

Teorema 7.1.3 *(PONTO FIXO DE BROUWER)*
Se Δ é um subconjunto compacto e convexo de um espaço euclidiano de dimensão finita e $\boldsymbol{F} : \Delta \to \Delta$ é uma função contínua, então $\boldsymbol{F}$ possui um ponto fixo em Δ, ou seja, $\exists \boldsymbol{p}^* \in \Delta$ tal que

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}^*) = \boldsymbol{p}^*.$$

Demonstração: Ver Andrade; Zanko (2018).

■

Sejam $\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \cdots \times \Delta_{m_n}$, $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\ldots,\boldsymbol{p}_n) \in \Delta$, $\boldsymbol{p}_i = (\boldsymbol{p}_{i1},\boldsymbol{p}_{i2},\ldots,\boldsymbol{p}_{im_i})$ e $\boldsymbol{y}_i(\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{y}_{i1}(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{y}_{i2}(\boldsymbol{p}),\ldots,\boldsymbol{y}_{im_i}(\boldsymbol{p})) \in \Delta$. Através desses entes, cria-se a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \ &: \ \Delta \to \Delta \\ &\boldsymbol{p} \mapsto \mathbf{F}(\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{p}),\ldots,\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{p})). \\ &y_{ij}(\boldsymbol{p}) = \frac{p_{ij} + g_{ij}(\boldsymbol{p})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\boldsymbol{p})}. \end{aligned} \quad (69)$$

Teorema 7.1.4 *Um ponto $\boldsymbol{p}^*$ é um Equilíbrio de Nash, se e somente se, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}^*) = \boldsymbol{p}^*$, ou seja, $\boldsymbol{p}^*$ é um Equilíbrio de Nash, se e somente se, $\boldsymbol{p}^*$ é um ponto fixo da aplicação $\boldsymbol{F}$.*

Demonstração:

Pelo Teorema 7.1.2 sabe-se que $g_{ij}(\boldsymbol{p}) \geq 0$, logo $\sum\limits_{k=1}^{m_i} g_{ik} \geq 0$. De $p_{ij} \geq 0$, tem-se que $y_{ij}(\boldsymbol{p}) = \frac{p_{ij}+g_{ij}(\boldsymbol{p})}{1+\sum\limits_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\boldsymbol{p})} \geq 0$.

Portanto para cada $\boldsymbol{y}_i(\boldsymbol{p}) \in \Delta_{m_i}$, vale a seguinte equação

$$\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{m_i} \frac{p_{ik}+g_{ik}(\boldsymbol{p})}{1+\sum\limits_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\boldsymbol{p})} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m_i} p_{ik} + \sum\limits_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\boldsymbol{p})}{1+\sum\limits_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\boldsymbol{p})} = \frac{1+\sum\limits_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\boldsymbol{p})}{1+\sum\limits_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\boldsymbol{p})} = 1. \tag{70}$$

Assim $\mathbf{F}(\Delta) \subset \Delta$.

Suponha que $\boldsymbol{p}^*$ é um Equilíbrio de Nash, então $g_{ij}(\boldsymbol{p}^*) = 0, \forall i = 1,\ldots,n$ e $\forall j = 1,\ldots,m_i$. Assim, $y_{ij}(\boldsymbol{p}) = p^*_{ij}, \forall i = 1,\ldots,n$ e $\forall j = 1,\ldots,m_i$, ou seja $\boldsymbol{y}_i(\boldsymbol{p}^*) = \boldsymbol{p}^*_i, \forall i \in \{1,\ldots n\}$. Logo $\mathbf{F}(\boldsymbol{p}^*) = \boldsymbol{p}^*$, ou seja, é um Ponto Fixo de Brouwer.

Reciprocamente, suponha que $\boldsymbol{p}^* = (\boldsymbol{p}^*_1,\ldots,\boldsymbol{p}^*_n)$ é um ponto fixo de Brouwer da aplicação dada anteriormente, isto é,

$$p^*_{ij}(\boldsymbol{p}) = \frac{p^*_{ij}+g_{ij}(\boldsymbol{p}^*)}{1+\sum\limits_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\boldsymbol{p}^*)}.$$

Portanto, multiplicando ambos os lados da igualdade por $[1+\sum\limits_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\boldsymbol{p}^*)]$, obtém-se $p^*_{ij}\sum\limits_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\boldsymbol{p}^*) = g_{ij}(\boldsymbol{p}^*)$.

Do Teorema 7.1.2 conclui-se que se $g_{ij}(\boldsymbol{p}^*) = 0$ então esse ponto é Equilíbrio de Nash.

Para que se conclua isso, deve-se mostrar que $\sum\limits_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\boldsymbol{p}^*) = 0$.

Suponha, por absurdo, que $\sum\limits_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\boldsymbol{p}^*) > 0$, assim, $g_{ij}(\boldsymbol{p}^*) > 0$ se, e somente se, $p^*_{ij} > 0$.

Sem perda de generalidade, suponha que $p^*_{i1} > 0, p^*_{i2} > 0, \ldots, p^*_{il} > 0$ e $p^*_{i(l+1)} = p^*_{i(l+2)} = \cdots = p^*_{im_i} = 0$.

Sabe-se que $\boldsymbol{p}^*_i = \sum\limits_{k=1}^{m_i} p^*_{ik}\boldsymbol{e}_k$, na qual $\boldsymbol{e}_i$ é o $\boldsymbol{i}$-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{m_i}$.

Como $g_{ik}(\boldsymbol{p}^*) > 0, \forall k \in \{1,\ldots,l\}$, então $u_i(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{p}^*_{-i}) > u_i(\boldsymbol{p}^*_i,\boldsymbol{p}^*_{-i})$.

Logo $u_i(\boldsymbol{p}^*_i,\boldsymbol{p}^*_{-i}) = u_i\left(\sum\limits_{k=1}^{m_i} p^*_{ik}\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{p}^*_{-i}\right) = \sum\limits_{k=1}^{m_i} p^*_{ik}u_i\left(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{p}^*_{-i}\right) > \sum\limits_{k=1}^{m_i} p^*_{ik}u_i\left(\boldsymbol{p}^*_{ik},\boldsymbol{p}^*_{-i}\right) = u_i(\boldsymbol{p}^*_i,\boldsymbol{p}^*_{-i})$.

Absurdo. Portanto, $g_{ij}(\boldsymbol{p}^*) = 0$. Logo, pelo Teorema 7.1.2, $\boldsymbol{p}^*$ é Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas.

■

Finalmente, consegue-se enunciar o Teorema do Equilíbrio de Nash.

7.2 TEOREMA DO EQUILÍBRIO DE NASH

Teorema 7.2.1 *(Teorema do Equilíbrio de Nash)*

Todo jogo definido por matriz de payoffs possui um Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas.

Demonstração: Seja uma função $\mathbf{F} : \Delta \rightarrow \Delta$, como definida na equação (69). Sabe-se que Δ é um conjunto compacto e convexo. Pelo Teorema do ponto fixo de Brouwer (Teorema 7.1.3) a função $\mathbf{F}$ possui um ponto fixo $\boldsymbol{p}^*$. Ou seja $\mathbf{F}(\boldsymbol{p}^*) = \boldsymbol{p}^*$.

Pelo Teorema 7.1.4, conclui-se que $\boldsymbol{p}^*$ é um Equilíbrio de Nash.

■

O resultado desse teorema garante que todos os jogos com n agentes tem pelo menos um Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas se o jogo for representado em uma matriz de payoffs.

Existem várias maneiras de determinar o Equilíbrio de Nash. Sartini et al. (2004) e Andrade; Zanko(2018) mostram um método para calcular os Equilíbrios de Nash através de otimização não-linear. Esse é o melhor método para encontrar esse ponto, porém como o enfoque desse trabalho é um produto educacional que possa ser aplicado no ensino básico, então esse método fica inviável. Por isso, serão adotados jogos em que se pode aplicar somente o Teorema Minimax de Von Neumann, o procedimento utilizado por Fiani (2006) ou o método indicado por Pereira (2014, p.77).

O processo indicado por Fiani (2006) obtém as funções utilidades de cada jogador e em seguida analisa cada distribuição de probabilidades. Essa análise parte do ponto que uma distribuição de probabilidade deve "eliminar" a outra. Na seção seguinte há exemplos da aplicabilidade desse método.

Já Pereira (2014, p.77) indica um modo de determinar o Equilíbrio de Nash, para jogos com dois jogadores. Para isso, considere a seguinte matriz de payoff, representada pela Tabela 15.

Tabela 15 – Matriz de payoff de um jogo com dois agentes

		J_2 E	J_2 D
J_1	S	(α, β)	(γ, λ)
J_1	I	(μ, σ)	(τ, φ)

Fonte: Adaptado de Pereira (2014, p.76)

Para encontrar o Equilíbrio de Nash em Estratégia Pura analisa-se os seguintes aspectos:

> se $\alpha \geq \mu$ e $\beta \geq \lambda$ então (S,E) é um equilíbrio de Nash de estratégias puras;
> se $\mu \geq \alpha$ e $\sigma \geq \varphi$ então (I,E) é um equilíbrio de Nash de estratégias puras;
> se $\gamma \geq \tau$ e $\lambda \geq \beta$ então (S,D) é um equilíbrio de Nash de estratégias puras;
> se $\tau \geq \gamma$ e $\varphi \geq \sigma$ então (I,D) é um equilíbrio de Nash de estratégias puras (PEREIRA, 2014, p.77).

Já para encontrar o Equilíbrio de Nash em Estratégia Mistas utiliza-se os seguintes resultados: $p = \frac{\varphi - \sigma}{\beta - \lambda + \varphi - \sigma}$ e $q = \frac{\tau - \gamma}{\alpha - \mu + \tau - \gamma}$, com $p \in [0,1]$ e $q \in [0,1]$.

A utilização desses processos está ilustrada nas seções a seguir que resolvem os jogos apresentados na seção 3.2

7.3 DETERMINAÇÃO DO EQUILÍBRIO DE NASH DO JOGO "CRISE DOS MÍSSEIS"

Esse jogo está definido na seção 3.6. Ao analisar esse jogo pelas estratégias puras, tem-se que as estratégias (Ameaçar, Não Ameaçar) e (Não Ameaçar, Ameaçar) são Equilíbrios de Nash, pois caso EUA decida ameaçar, o melhor que a URSS possa fazer é ceder, $-10 > -100$, e caso EUA decida não ameaçar, então o melhor que a URSS possa fazer é ameaçar para obter o maior ganho, $10 > 0$, dessa forma, nenhum dos jogadores tem preferência em mudar a sua estratégia escolhida.

Para analisar esse jogo pelas Estratégias Mistas, deve-se determinar a função utilidade de cada jogador. Assim, considerando uma distribuição de probabilidade p para o EUA e q para a URSS, a função utilidade de cada jogador esta representada pelas equações abaixo:

$$\begin{aligned} u_{EUA} &= p \cdot q \cdot (-100) + (1-p) \cdot q \cdot (-10) + p \cdot (1-q) \cdot 10 + (1-p) \cdot (1-q) \cdot 0 \\ &= -100pq - 10q + 10p, \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} u_{URSS} &= p \cdot q \cdot (-100) + (1-p) \cdot q \cdot 10 + p \cdot (1-q) \cdot (-10) + (1-p) \cdot (1-q) \cdot 0 \\ &= -100pq - 10p + 10q. \end{aligned} \tag{72}$$

Para encontrar uma solução para esse jogo, deve-se colocar em evidência, em cada função utilidade, as probabilidades que representam o seu jogador. Em seguida identificar quando a outra probabilidade "elimina" a preferência do jogador rival. Em outra linguagem, é realizar a derivada em relação a p na função u_{EUA} e a derivada em relação a q na função u_{URSS} e igualar ambos os resultados a zero. Realizando esse processo, têm-se as igualdades abaixo

$$\begin{aligned} u_{EUA} &= p(-100q + 10) - 10q \\ &\Rightarrow -100q + 10 = 0 \\ &\Rightarrow q = \frac{1}{10}. \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned} u_{URSS} &= q(-100p + 10) - 10p \\ &\Rightarrow -100p + 10 = 0 \\ &\Rightarrow p = \frac{1}{10}. \end{aligned} \tag{74}$$

Assim o perfil $(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}; \frac{1}{10}, \frac{9}{10})$ é um Equilíbrio de Nash.

Pelo método de Pereira (2014) tem-se que (Ameaçar, Não Ameaçar) e (Não Ameaçar, Ameaçar) são equilíbrios de Nash em Estratégias Puras pois 10 > 0 e -10 > -100. E mais as igualdades a seguir garantem as Estratégias Mistas a serem adotadas por cada agente.

$$p = \frac{0-10}{-100-(-10)+0-10}\frac{-10}{-100} = \frac{1}{10}. \tag{75}$$

$$q = \frac{0-10}{-100-(-10)+0-10}\frac{-10}{-100} = \frac{1}{10}. \tag{76}$$

Portanto o perfil $(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}; \frac{1}{10}, \frac{9}{10})$ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Com esses resultados, é perceptível que os métodos indicados por Fiani (2006) e Pereira (2014) obtém um mesmo resultado, porém por "caminhos" diferentes.

7.4 DETERMINAÇÃO DO EQUILÍBRIO DE NASH DO JOGO "A BATALHA DO MAR DE BISMARK"

Na seção 3.7 é definido e descrito esse jogo. Pela sua matriz de payoff, percebe-se que esse jogo é de soma zero. Assim, para encontrar um Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras, usa-se o Teorema de Minimax de Von Neumann. Seja a Tabela 16 que representa o ganho dos EUA no jogo com a determinação do mínimo de cada linha e o máximo de cada coluna desse jogo.

Tabela 16 – Matriz de payoff com o mínimo de cada linha e do máximo de cada coluna do jogo "A Batalha do Mar de Bismark"

		Japão		
		Sul	Norte	Min Linha
EUA	Sul	3	1	1
	Norte	2	2	2
	Max col	3	2	

Fonte: Acervo do Autor

Ao analisar a Tabela 16 percebe-se que o minimax da linha é o valor 2 e o maxmin da coluna é 2. Como resultou em um mesmo valor, então o perfil de estratégia (Norte, Norte) é um Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras.

Para determinar o perfil de Estratégias Mistas que seja um Equilíbrio de Nash, utiliza-se do processo realizado na seção 7.3. Dessa forma, a função utilidade de cada país, com EUA e Japão escolhendo uma distribuição de probabilidade $(p, 1-p)$ e $(q, 1-q)$ respectivamente, serão dados pelas equações abaixo

$$u_{EUA}(\boldsymbol{p}) = 2pq - p + 2. \tag{77}$$

$$u_{Jap}(\boldsymbol{p}) = -2pq + p - 2. \tag{78}$$

Dessa forma, colocando p em evidência na função u_{EUA} e q na função u_{Jap}, conclui-se que o valor de p e q são dadas pelas igualdades a abaixo, respectivamente.

$$\begin{aligned} u_{EUA} &= p(2q-1)+2 \\ &\Rightarrow 2q-1=0 \\ &\Rightarrow q=\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned} u_{Jap} &= q(2p)+p-2 \\ &\Rightarrow 2p=0 \\ &\Rightarrow p=0. \end{aligned} \tag{80}$$

Já pelo outro processo, tem-se que os valores das distribuições de probabilidades p e q são dadas pelas igualdades (81) e (82) respectivamente:

$$p = \frac{-2-(-2)}{-3-(-1)+(-2)-(-2)} = \frac{0}{-2} = 0. \tag{81}$$

$$q = \frac{2-1}{3-2+2-1} = \frac{1}{2}. \tag{82}$$

E, dessa maneira, tem-se que o perfil $(0,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ é um Equilíbrio de Nash, pois, tomando $u_{EUA}(0,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 2\cdot 0\cdot \frac{1}{2} - 0 + 2 = 2 = u_{EUA}(0,1;0,1) = u_{EUA}(Norte, Norte)$. Assim, conclui-se que os japoneses teriam 50% de chance de escolher a rota sul, enquanto os americanos teriam 0% de chance de escolher a rota sul.

7.5 DETERMINAÇÃO DO EQUILÍBRIO DE NASH DO JOGO “CAÇA AO CERVO”

Na seção 3.8 é definido e descrito esse jogo. Analisando o método utilizado na seção 7.3 para determinar o Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras, tem-se que os perfis (Cervo, Cervo) e (Lebre, Lebre) são soluções estratégicas, pois ambos os jogadores não têm preferência em trocar os suas estratégias, uma vez que seu ganho sempre será menor.

Para determinar o perfil de Estratégias Mistas que seja um Equilíbrio de Nash, considere uma distribuição de probabilidade $(p, 1-p)$ e $(q, 1-q)$ respectivamente para o Caçador 1 e o Caçador 2. As funções utilidades de cada um estão representadas pelas equações abaixo.

$$u_1(\boldsymbol{p}) = 3pq + 1 - p. \tag{83}$$

$$u_2(\boldsymbol{p}) = 3pq + 1 - q. \tag{84}$$

Assim ao colocar p em evidência na função u_1 tem-se a igualdade (85). Ao evidenciar o q na função u_2 obtém-se a igualdade (86).

$$\begin{aligned} u_1 &= p(3q-1)+1 \\ &\Rightarrow 3q-1=0 \\ &\Rightarrow q=\frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= q(3p-1)+1 \\ &\Rightarrow 3p-1=0 \\ &\Rightarrow p=\frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{86}$$

Pelo método de Pereira (2014) obtém-se as Igualdades a seguir.

$$p = \frac{1-0}{3-1+1-0} = \frac{1}{3} \tag{87}$$

$$q = \frac{1-0}{3-1+1-0} = \frac{1}{3} \tag{88}$$

E dessa maneira tem-se que o perfil $(\frac{1}{3},\frac{2}{3};\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ é um equilíbrio de Nash, pois, tomando $u_1(\frac{1}{3},\frac{2}{3};\frac{1}{3},\frac{2}{3}) = 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3} = 1 = u_1(0,1;0,1) = u_1(Lebre,Lebre)$. Portanto conclui-se que ambos os caçadores tem uma preferência de aproximadamente 33% de caçar um cervo.

Finaliza-se assim a fundamentação teórica matemática sobre a Teoria dos Jogos. O próximo capítulo abordará a fundamentação e aplicação da Teoria dos Jogos no Ensino Básico.

8 TEORIA DOS JOGOS E O ENSINO BÁSICO

A Teoria dos Jogos está presente em diversos campos no ambiente acadêmico de nível superior, mas é praticamente impossível encontrá-la nas grades curriculares da educação básica. Sabe-se que o currículo de matemática é extenso e propor a inclusão de mais um tópico seria conflitante na atual situação educacional brasileira, uma vez que os resultados obtidos pelos estudantes em avaliações nacionais, como o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, com a sigla SAEB, e internacionais como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos, com a sigla PISA, ficam aquém do mínimo. Porém, a sua utilização em certos tópicos de matemática que já são trabalhados em todo o Brasil seria possível.

Percebe-se a desmotivação dos estudantes nas aulas de matemática e dessa lecionar essa área de conhecimento na Educação Básica é extremamente dificultoso. Desenvolver um currículo que seja dinâmico, une as ciências de hoje e se relacionam com os problemas atuais ao interesse do estudante, é desafiador. Para isso, o professor de matemática deve se qualifique a todo momento e busque sempre um embasamento teórico progressivamente maior.

A aplicação da Teoria dos Jogos no Ensino Básico não seria uma utopia, mas sim uma realidade aplicável nos dias atuais, uma vez que ela realiza reflexões e previsões sobre a natureza dos agentes segundo as tomadas de decisão que cada um faz.

> [···] Poderíamos dizer que a matemática é o estilo de pensamento dos dias de hoje, a linguagem adequada para expressar as reflexões sobre a natureza e as maneiras de explicação. Isso tem naturalmente importantes raízes e implicações filosóficas. Pode-se prever que na matemática do futuro serão importantes o que hoje se chama matemática discreta e igualmente o que se chamavam "casos patológicos", desde não linearidade até teoria do caos, fractais, fuzzies, teoria dos jogos, pesquisa operacional, programação dinâmica (D'AMBROSIO, 2009, p.58-59).

Para que se possa fazer uma inserção de um tema nos tópicos que já estão bem estabelecidos no ensino de matemática, é necessário que as diretrizes, leis e normas que regem a educação brasileira possa garantir esse fato.

Assim, no ano de 2013, foi realizado uma atualização nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Se fez necessário essa modernização para respeitar a Lei nº 13.415 de 2017[1]. Esse documento é norteador para todos os estados brasileiros, sendo aplicado a todas as esferas governamentais e privadas, a todos os níveis de ensino básico, desde o ensino infantil ao ensino de jovens e adultos.

> Assume-se, portanto, que as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica terão como fundamento essencial a responsabilidade que o

[1] A Lei nº 13.415 de 2017 é uma lei que altera as Leis nº 9394 de 1996, na qual determina as diretrizes e bases da educação nacional, e 11494 de 2007, que regula o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação. Também consolida, para os profissionais da educação, as Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5452 de 1943, e o Decreto-Lei nº 236 de 1967. Revoga a Lei nº 11161 de 2005 e cria a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral.

> Estado brasileiro, a família e a sociedade têm de garantir a democratização do acesso, inclusão, permanência e sucesso das crianças, jovens e adultos na instituição educacional, sobretudo em idade própria a cada etapa e modalidade; a aprendizagem para continuidade dos estudos; e a extensão da obrigatoriedade e da gratuidade da Educação Básica (BRASIL, 2013), p. 15).

Um dos pontos na qual esse documento se atenta é na qualidade de ensino do país. Para isso, foca-se na qualidade das relações entre todos os sujeitos que nela atuam de maneira direta e indiretamente, ou seja, se preocupem na qualidade social da educação brasileira. Desta forma, compreende-se que "a educação é um processo de socialização da cultura da vida, no qual se constroem, se mantêm e se transformam conhecimentos e valores. Socializar a cultura inclui garantir a presença dos sujeitos das aprendizagens na escola" (BRASIL, 2013, p.20). Portanto, a qualidade social da educação escolar pressupõem a troca de experiência entre os discentes, assim como o acesso e permanência dos estudantes.

> O conceito de qualidade na escola, numa perspectiva ampla e basilar, remete a uma determinada ideia de qualidade de vida na sociedade e no planeta Terra. Inclui tanto a qualidade pedagógica quanto a qualidade política, uma vez que requer compromisso com a permanência do estudante na escola, com sucesso e valorização dos profissionais da educação. Trata-se da exigência de se conceber a qualidade na escola como qualidade social, que se conquista por meio de acordo coletivo. Ambas as qualidades – pedagógica e política – abrangem diversos modos avaliativos comprometidos com a aprendizagem do estudante, interpretados como indicações que se interpenetram ao longo do processo didático-pedagógico, o qual tem como alvo o desenvolvimento do conhecimento e dos saberes construídos histórica e socialmente (BRASIL, 2013, p.21).

Outro ponto na qual as diretrizes trás a reflexão é sobre o currículo escolar. Segundo o documento,

> [···] o entendimento de que currículo é o conjunto de valores e práticas que proporcionam a produção e a socialização de significados no espaço social e que contribuem, intensamente, para a construção de identidades sociais e culturais dos estudantes. E reitera-se que deve difundir os valores fundamentais do interesse social, dos direitos e deveres dos cidadãos, do respeito ao bem comum e à ordem democrática, bem como considerar as condições de escolaridade dos estudantes em cada estabelecimento, a orientação para o trabalho, a promoção de práticas educativas formais e não-formais (BRASIL, 2013, 27).

Dessa forma, a utilização da Teoria dos Jogos no Ensino Básico está assegurada pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, uma vez que a aplicação desse conhecimento tem raízes nas ciências sociais, que por sua vez, tenta compreender os atos e consequências das ações dos seres humanos no meio ambiente. Portanto, obedece toda definição da Teoria dos Jogos.

No ano de 2018, o Ministério da Educação homologou um documento no qual todos os municípios e estados da federação deverão seguir em suas redes de ensino. Esse documento se chama Base Nacional Comum Curricular, cuja sigla é BNCC.

Esse documento é de caráter normativo que define quais são as aprendizagens essenciais que todos os educandos devem desenvolver ao longo de toda Educação Básica, assegurando-se todos os direitos de aprendizagem e desenvolvimento, conforme o Plano Nacional de Educação, cuja sigla é PNE. A sua orientação está pautada nos princípios éticos, políticos e estéticos de modo a alcançar uma formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva (BRASIL, 2018).

A BNCC tem como fundamentos pedagógicos o foco nas competências e na educação integral dos estudantes. Nesse documento também é garantido que todas as aprendizagens essenciais adquiridas na Educação Básica devem estar alinhadas com o desenvolvimento de dez competências[2] gerais.

As dez competências gerais que a BNCC diz que todos os educandos devem ter:

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
> 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
> 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
> 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

[2] Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 6).

> 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários (BRASIL, 2018, p. 8-9).

Em cima dessas competências são geradas as competências específicas para cada nível da Educação Básica, assim como para cada área de conhecimento. Também são definidos quais devem ser os objetivos ou as aprendizagens que cada estudante deve adquirir em cada ano.

8.1 ENSINO MÉDIO

Este é o último estágio da Educação Básica, atendendo jovens com no mínimo de quinze anos, permanecendo pelo menos três anos nessa etapa. Nesse sentido esta etapa é palco responsável pela conclusão do processo formativo da educação básica, sendo que deve ser organizado de forma que o aluno receba uma formação uniforme, de acordo com as determinações sociais e o modo de pensar, compreender e articular um trabalho, ciência, tecnologia e cultura de modo a obter uma vida produtiva.

Por ser a etapa final, fica mais evidente que a realidade educacional do país torna esse nível um gargalo na garantia dos direitos à educação à juventude Brasileira. "Para além da necessidade de universalizar o atendimento, tem-se mostrado crucial garantir a permanência e as aprendizagens dos estudantes, respondendo às suas demandas e aspirações presentes e futuras" (BRASIL, 2018, p. 461).

Para que os estudantes possam conseguir atingir as aprendizagens mínimas, proposta pela BNCC, o educador deve entender que o público dessa etapa não é um grupo homogêneo e muito menos admitir que a juventude é um simples rito de passagem da infância à maturidade. Ou seja, é fundamental reconhecer que

> [···]a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes (BRASIL, 2011, p. 12-13 apud BRASIL, 2018, p. 463).

Assumir essa definição de juventude mais ampla e plural, significa entender as suas singularidades, e dessa forma, ver que os jovens são sujeitos ativos na sociedade dinâmica e diversa na qual está inserido. Também, considerar a multipluralidade desse grupo implica que o ambiente escolar deva acolher as diversidades, garantir e permitir o protagonismo na definição do seu projeto de vida.

> Para formar esses jovens como sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis, cabe às escolas de Ensino Médio proporcionar experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentadas. O mundo deve lhes

> ser apresentado como campo aberto para investigação e intervenção quanto a seus aspectos políticos, sociais, produtivos, ambientais e culturais, de modo que se sintam estimulados a equacionar e resolver questões legadas pelas gerações anteriores – e que se refletem nos contextos atuais –, abrindo-se criativamente para o novo (BRASIL, 2018, p. 463).

Assim, deve-se adotar que os princípios e as finalidades do Ensino Médio sejam:

> I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> II – a preparação básica para o trabalho, tomado este como princípio educativo, e para a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de enfrentar novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> III – o aprimoramento do estudante como um ser de direitos, pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV – a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos presentes na sociedade contemporânea, relacionando a teoria com a prática (BRASIL, 2013, p. 39).

Para alcançar esses princípios e as finalidades, o currículo do Ensino Médio é composto pela Base Nacional Comum Curricular, com suas competências e habilidades para cada área de conhecimento, e por itinerários formativos, que são um conjunto de disciplinas; projetos; oficinas; núcleos de estudo; entre outros; nos quais os estudantes escolherão no ensino médio a fim de se aprofundar em uma determinada área.

Ou seja, o currículo terá uma formação geral básica, que garante as aprendizagens essenciais definidas na BNCC, e os itinerários formativos, que assegura uma flexibilização da organização curricular, pois possibilita que o estudante escolha um caminho no qual gostaria de seguir. Segundo Brasil (2018, p. 477), o itinerário de Matemática e suas tecnologias é para um

> [···] aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino.

Também na BNCC, a área de Matemática e suas tecnologias aconselha que deve-se consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens desenvolvidas no ensino fundamental. "Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade" (BRASIL, 2018, p.527)

Portanto, de acordo com as competências gerais da BNCC, os jovens devem conseguir desenvolver as seguintes competências:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das

> Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

A organização curricular está pautada em três áreas : Números e Álgebra; Geometria e Medidas; e Probabilidade e Estatística. Cada área possui as suas habilidades que devem ser adquiridas pelos estudantes no período que estiverem no Ensino Médio. O diferencial dessas habilidades é que são habilidades que são trabalhadas sempre e em todos os anos, diferindo, por exemplo, das adquiridas no ensino fundamental, pois lá cada ano terá uma habilidade diferente a ser obtida.

Ao analisar cada habilidade do Ensino Médio e os objetivos de estudos da Teoria dos Jogos, é possível elaborar a Tabela 17 que ilustra quais são as habilidades que devem ser adquiridas pelos jovens ao estudar a Teoria dos Jogos.

Ao analisar as aprendizagens listadas na Tabela 17, fica-se inteligível que é aplicável os conhecimentos da Teoria dos Jogos nesse nível, uma vez que se realiza comparações entre números reais a fim de encontrar os máximos e os mínimos; elaboração de tabelas e gráficos de funções com dados retirados de textos e interpretação crítica de situações cujas relações sociais impactam no seu cotidiano. Logo, elaborar atividades para a juventude seria viável, já que os mesmos obtêm os conhecimentos de realizar as representações das situações em matrizes de payoffs e em suas funções utilidades, além de encontrar o Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras e Mistas. Para isso, deve-se trazer problemas que haja situações de conflito entre pessoas, organizações, entre outros, de modo que os estudantes interpretem o problema, representem os ganhos na forma matricial e encontrem a melhor solução para o jogo.

No Apêndice A há um produto educacional que indica algumas possibilidades de atividades e brincadeiras que podem ser aplicados nesse nível educacional.

Tabela 17 – Tabela de algumas habilidades que os estudantes devem adquirir no Ensino Médio

Código	Habilidades
(EM13MAT101)	Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102)	Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT106)	Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
(EM13MAT203)	Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
(EM13MAT301)	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302)	Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT311)	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT311)	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT401)	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT501)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT511)	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Adaptado de Brasil(2013, p. 543-546)

8.2 MOTIVOS DE SE ESTUDAR A TEORIA DOS JOGOS

A palavra jogo está no vocabulário das pessoas, sendo corriqueiro o seu uso. Como já visto, esse termo está relacionado à brincadeira, passatempos e ao lazer do seres humanos. Contudo, o seu uso também está empregado em expressões como jogo político, jogo de interesses, jogo da vida, entre outros.

Os seres humanos são animais racionais, ou seja, a maioria dos indivíduos tem uma capacidade de tomar ações e decisões, não dependo somente do instinto, como são para os demais animais. Para isso, cada indivíduo utiliza-se de experiências e informações obtidas durante os anos e dentro de certa lógica, de modo que cada ser possa conseguir decidir qual será a sua tomada de decisão.

Um modo de identificar essa lógica é a partir dos diferentes modos que as pessoas foram se organizando em sociedades ao longo do tempo criando estruturas políticas; judiciárias e religiosas. Essas estruturas estabelecem regras para que haja um convívio mais equilibrado possível entre todos.

Assim, reflete-se que é possível relacionar com a definição de jogos, uma vez que "qualquer situação regida por regras que possua um resultado bem definido o qual é caracterizado por uma interdependência estratégica" (SANTOS, 2016, p.15) é considerado como jogo.

Ao analisar todos os termos descritos anteriormente, pode-se compreender que uma pessoa que estuda e aplica a Teoria dos Jogos em sua vida, poderá obter uma vantagem sobre os demais, pois a sua tomada de decisão tenderá a escolher a ação que seja a mais estratégica, de modo a maximizar o seu ganho.

Além desse ponto, Fiani (2006) garante que existem outras duas vantagens em estudar a Teoria dos Jogos, a primeira consiste que "a Teoria dos Jogos ajuda a entender teoricamente o processo de decisão de agentes que interagem entre si, a partir da compreensão da lógica da situação em que estão envolvidos" (FIANI, 2006, p. 9).

Com esse dado, é possível inferir que a Teoria dos Jogos utiliza-se de ferramentas teóricas a fim de determinar qual será a decisão de qualquer agente, além de identificar qual é a lógica processual da interação, desde que as hipóteses da teoria sejam respeitadas, aplicando-se a um modelo que se adapta à situação nas especificidades do problema. Caso os resultados encontrados forem destoantes dos que foram previstos, então ou as hipóteses não foram respeitadas, ou as particularidades do problema não estão bem compreendidas.

A segunda vantagem consiste afirmar que "a Teoria dos Jogos ajuda a desenvolver a capacidade de raciocinar estrategicamente, explorando as possibilidades de interação dos agentes, possibilidades estas que nem sempre correspondem à intuição" (FIANI, 2006, p. 10).

Assim, ao explorar todas as possibilidades de uma interação estratégica entre todas as pessoas gerarão uma ótima forma de desenvolver o raciocínio estratégico no agente. Quando os jogadores que estão envolvidos em um processo no qual há uma interação estratégica algumas soluções passariam despercebidas, uma vez que a Teoria dos Jogos mostra alguns caminhos para encontrar a solução estratégica.

Dessa forma, uma pessoa que utilize noções da Teoria dos Jogos em sua vida, poderá tomar a melhor decisão para as situações que pode vir a enfrentar.

8.3 PRODUTO EDUCACIONAL

Para que esse trabalho possa alcançar a prática, se faz útil a produção de um produto educacional. O papel de um produto educacional produzido dentro de um contexto sócio-histórico-cultural é de fornecer ferramentas aos professores que estão em diferentes cenários no país (RIZZATTI et al., 2020). E mais

> No Mestrado Profissional, distintamente do Mestrado Acadêmico, o mestrando necessita desenvolver um processo ou produto educativo e aplicado em condições reais de sala de aula ou outros espaços de ensino, em formato artesanal ou em protótipo. Esse produto pode ser, por exemplo, uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, um conjunto de vídeo-aulas, um equipamento, uma exposição, entre outros. A dissertação/tese deve ser uma reflexão sobre a elaboração e aplicação do produto educacional respaldado no referencial teórico metodológico escolhido (BRASIL, 2019, p.15)

Assim, desenvolveu-se um produto educacional resultado da pesquisa feita nesta dissertação, intitulado “Equilíbrio de Nash: Proposta de aula para o Ensino Médio”, presente no Apêndice A. O objetivo principal desse material é oferecer de forma sucinta o contexto histórico e os conceitos importantes da Teoria dos jogos, assim como apresentar propostas de atividades a serem aplicadas durante o Ensino Básico que trabalhem os conceitos, sejam de forma lúdica ou resolvendo problemas.

O produto é dividido em cinco capítulos, sendo o primeiro a dar uma introdução ao caderno, o segundo apresenta a história da teoria, os principais conceitos da Teoria dos Jogos e os jogos no meio educacional, o terceiro capítulo é apresentado uma proposta de aula, contendo atividades a serem trabalhadas com o Ensino Médio sobre a temática Equilíbrio de Nash, o quarto capítulo são apresentadas as respostas de cada atividade, indicando o passo a passo para a sua resolução e no quinto capítulo são apresentadas algumas considerações finais referente ao caderno pedagógico.

Vale destacar que todas as atividades que estão no produto podem ser alteradas, da forma mais conveniente, pelo professor que for aplicar, respeitando os níveis de conhecimento que cada turma uma possa ter.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa dissertação teve por finalidade expor os conceitos básicos e fundamentais da Teoria dos Jogos, em especial a Teoria Econômica dos Jogos, e elaborar um Produto Educacional que indique a possibilidade de apresentar conceitos básicos da Teoria dos Jogos no Ensino Básico, de modo a buscar respostas para a pergunta: Seria possível ensinar conceitos da Teoria dos Jogos, com enfoque na Teoria Econômica dos Jogos, no Ensino Básico brasileiro?

Para solucionar essa pergunta, inicialmente realizou-se uma pesquisa bibliográfica sobre o contexto histórico, as classificações e conceitos importantes da Teoria dos Jogos. A partir dessa pesquisa foi possível perceber a formação e aplicação da teoria nas diversas áreas do conhecimento. Assim, apresentar a história desse ente matemático é um meio de motivar os estudantes a estudarem no Ensino Básico, assim como indicar alguns meios de como o educador possa introduzir esse conhecimento em suas aulas. Também, fica claro que os conceitos utilizados na Teoria dos Jogos, como Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos; Probabilidade; Funções; Relações de Ordem; Tabelas e Matrizes, já estão presentes na Educação Básica, sendo assim, não abandonaria o currículo das instituições de ensino e seria mais uma ferramenta para aplicar e potencializar os estudos dos entes matemáticos citados anteriormente. Um exemplo de aplicação de fato é o Produto Educacional presente no Apêndice A.

A fim de corroborar e garantir a aplicação da Teoria dos Jogos na Educação Básica, buscou-se encontrar referenciais bibliográficos que contenham a importância em estudar a Teoria dos Jogos e que orientam e normatizam o ensino no Brasil. Através desses estudos foi possível identificar que uma pessoa que estuda esse ente matemático ajuda a compreender o processo de decisão dos agentes envolvidos que se interagem mutuamente, entendendo a lógica na qual estão inseridos, e desenvolve uma capacidade de raciocinar estrategicamente ao explorar e analisar todas as possibilidades de ações possíveis de ocorrer no jogo. Portanto, conclui-se que a tomada de decisão de uma pessoa que estudou a Teoria dos Jogos seria melhor que dos demais, pois essa estaria sempre buscando a solução que resulte nos maiores ganhos possíveis perante a todas as ações.

Em posse de toda a pesquisa bibliográfica realizada, foi possível elaborar um produto educacional que contêm o contexto histórico, os conceitos importantes da Teoria dos Jogos e atividades a serem aplicadas no Ensino Médio, presente no Apêndice A. Ou seja, nessa pesquisa foi possível responder a pergunta inicial somente na modalidade do Ensino Médio. Os demais níveis presentes na Educação Básica, fica para pesquisas futuras.

As atividades indicadas no Produto Educacional a serem aplicadas no Ensino Médio foram desenvolvidas e pensadas nas especificidades de cada indivíduo, ou seja, que cada aluno, dentro da sua faixa etária, seja capaz de realizar e assim compreender os conceitos da Teoria dos Jogos. No final da seção que possui as atividades, há uma outra seção que contêm as respostas das questões, de modo que o professor possa ver as resoluções das mesmas. Vale destacar que o educador pode alterar as atividades da forma que achar mais conveniente, ou seja, aplicando integralmente ou parcialmente as atividades em suas turmas, respeitando as especificidades que cada uma possa ter.

Futuramente, espera-se, que seja possível aplicar as atividades desenvolvidas, para assim identificar possíveis falhas, pontuar melhorias e adaptações do produto perante as necessidades da sala de aula. Além do mais, também seria interessante identificar, comparar e registrar as dificuldades encontradas pelos estudantes e educadores perante a aplicabilidade das propostas de atividades no Ensino Médio. Com isso, na posteridade pretende-se produzir um trabalho que apresente os resultados das atividades desenvolvidas nessa dissertação.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Doherty; ZANKO, Thiago. Introdução à teoria dos jogos. **Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática**, Departamento de Matemática - Universidade Estadual de Maringá, v. 2, n. 2, p. 25–51, 2018. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/kit/jeepema-1/art8.pdf>. Acesso em: 17 set. 2022.

BELLHOUSE, David.R; FILLION, Nicolas. Le her and other problems in probability discussed by bernoulli, montmort and waldegrave. **Statistical Science**, Institute of Mathematical Statistics, v. 30, n. 1, p. 26–29, 2015. Disponível em: <https://projecteuclid.org/journals/statistical-science/volume-30/issue-1/Le-Her-and-Other-Problems-in-Probability-Discussed-by-Bernoulli/10.1214/14-STS469.full>. Acesso em: 04 jan. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Comum Currícular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 24 set. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Diretoria de Avaliação. **Documentos de Área - Ensino**. Brasília: MEC, 2019. Disponível em: <https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/ENSINO.pdf>. Acesso em: 24 set. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 24 set. 2022.

CAMPELLO DE SOUZA, Fernando Menezes. **Decisões racionais em situações de incerteza**. 1. ed. Recife: Editora Universitária, 2002.

COSTA, Joseane Sousa Lima. **Nim: Uma introdução a teoria dos jogos combinatórios.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2016. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <http://profmat.uefs.br/arquivos/File/JOSEANE_SOUSA_LIMA_COSTA.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2022.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:Da teoria à prática**. 17. ed. Campinas: Papirus, 2009.

DAVIS, Morton D. **Teoria dos Jogos: Uma Introdução Não-Técnica**. São Paulo: Cultrix, 1970.

FELICIANO, Léa Paz da Silva. **Teoria dos Jogos: Uma nova proposta para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Disponível em: <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11249>. Acesso em: 11 jan. 2022.

FIANI, Ronaldo. **Teoria dos Jogos: com aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

KREPS, David Marc. **Notes on the Theory of Choice: Underground Classics in Economics**. Boulder: Westview Press, 1988.

LEWONTIN, R.C. Evolution and the theory of games. **Topics in the Philosophy of Biology**, Reidel Publishing Company, v. 84, p. 382–403, 1976. Disponível em: <https://www.academia.edu/1088843/Evolution_and_the_Theory_of_Games>. Acesso em: 11 jan. 2022.

NASH, John Forbes. **Equilibrium Points in n-Person Games**. Princeton: Princeton University Press, 1949.

NASH, John Forbes. The bargaining problem. **Econometria**, v. 18, n. 2, p. 155–162, 1950. Disponível em: <https://www.eecs.harvard.edu/cs286r/courses/spring02/papers/nash50a.pdf>. Acesso em: 19 set. 2022.

NASH, John Forbes. Non-cooperative games. **Annals of Mathematics**, v. 54, n. 2, p. 286–295, 1951. Disponível em: <https://www.cs.upc.edu/~ia/nash51.pdf>. Acesso em: 19 set. 2022.

NASH, John Forbes. Two-penson cooperative games. **Econometria**, v. 21, n. 1, p. 128–140, 1953. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/1906951>. Acesso em: 19 set. 2022.

NEUMANN, John Von; MORGENSTERN, Oskar. **Theory of Games and Economic Behavior**. 3. ed. Cambridge: Princeton University Press, 1953.

OLIVEIRA, Davi Lessa de. **Teoria Econômica dos Jogos e o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática e Estatística. Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3423&id2=150280321>. Acesso em: 11 jan. 2022.

OLIVEIRA, Murilo. **Learning HTML, CSS and Javascript Vanilla - Reproducing the John Conway's Game of Life**, 2021. Disponível em: <https://dev.to/akadot_/learning-html-css-and-javascript-vanilla-reproducing-the-john-conways-game-of-life-9pn>. Acesso em: 30 abr. 2023.

PEREIRA, Emanoel Fabiano Menezes. **Teoria dos Jogos com Aplicações no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2014. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1446&id2=462>. Acesso em: 10 dez. 2022.

RIZZATTI, Ivanise Maria et al. Os produtos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposição de um grupo de coladoradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1–17, 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em: 11 nov. 2022.

RÊGO, Leandro Chaves. **Notas de Aula do Curso de Pós-Graduação em Teoria dos Jogos**, Recife, 2011. Disponível em: <https://zdocs.mx/doc/aulas-teoria-dos-jogos-2011-1-d1m45qwdz910>. Acesso em: 12 jan. 2022.

SANTOS, Carlos Pereira dos; NETO, João Pedro; SILVA, Jorge Nuno. **Jogar com a matemática dos gênios: John Conway + Ouri**. Norprint, 2007. Disponível em: <http://jnsilva.ludicum.org/hm2008_9/Livro3.pdf>. Acesso em: 14 jan. 2022.

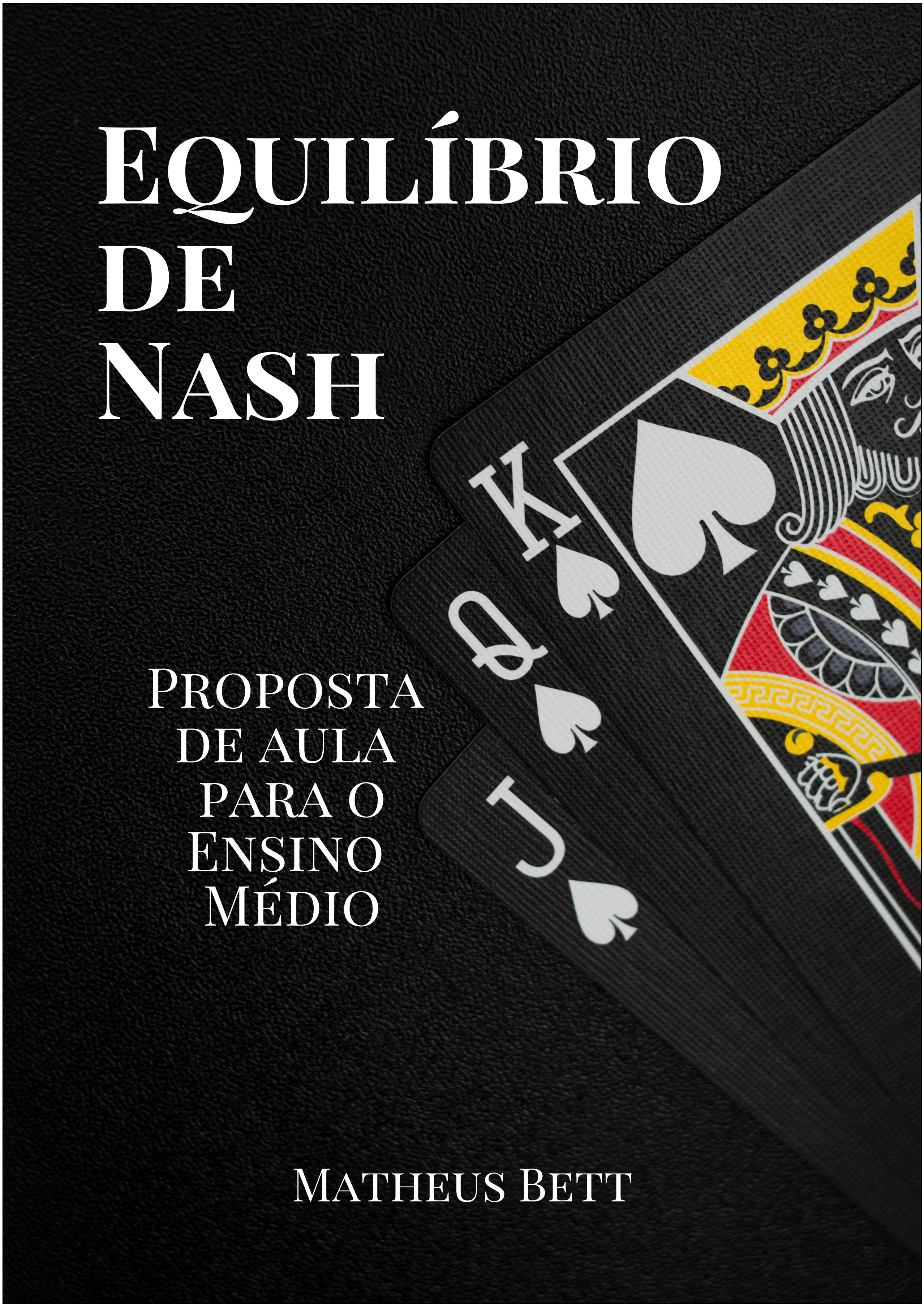
SANTOS, Carlos Souza. **Introdução à Teoria dos Jogos para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.Universidade Federal de Sergipe, Aracaju, 2016. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/8805/2/CLEVERTON_SOUZA_SANTOS.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2022.

SARTINI, Brígida Alexandre et al. Uma introdução a teoria dos jogos. **Bienal da SBM**, Anais.Salvador: Universidade Federal da Bahia, v. 2, p. 62, 2004. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2022.

SOBRINHO, Carlos Alberto Silva. **Estratégias discretas em teoria dos jogos**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática e Estatística. Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=522&id2=41482>. Acesso em: 11 jan. 2022.

TODHUNTER, Issac. **A History of the Mathematicaln Theory of Probability From the time of Pascal to that Laplace**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/books/history-of-the-mathematical-theory-of-probability/2760F1E18CD24818F5937EEED9BF8433>. Acesso em: 24 abr. 2023.

APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL


Equilíbrio
de
Nash
Proposta
de aula
para o
Ensino
Médio
Matheus Bett

APRESENTAÇÃO

Caríssimo legente;

O presente documento é resultado da dissertação intitulada “Equilíbrio de Nash no Ensino Médio”, desenvolvido junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Catarina, sob orientação do professor Dr. José Rafael Santos Furlanetto.

O objetivo deste material é oferecer a você, docente do Ensino Médio, sugestões de atividades que possam ser trabalhadas em suas aulas, cujo tema é a Teoria dos Jogos. Essas atividades trabalham os conceitos de lógica, operações básicas, conjuntos, operações entre conjuntos, funções e matrizes. Em cada atividade proposta neste caderno haverá uma seção destinada aos exercícios a serem aplicados em sala de aula e uma seção com as resoluções das mesmas.

As práticas existentes neste trabalho são mutáveis, ou seja, podem ser modificadas a todo momento por você. Sinta-se à vontade para utilizá-las do modo que achar mais conveniente, integralmente ou em partes se assim preferir.

Espera-se que esse produto possa contribuir com a sua atividade docente e que desperte em você a usabilidade e as potencialidades que a Teoria dos Jogos pode proporcionar ao ensino de matemática.

Atenciosamente

Matheus Bett

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A palavra jogo corriqueiramente é empregada no cotidiano das pessoas. Alguns exemplos disso são nas brincadeiras de crianças ou adultos, no meio empresarial ou político, produtos lúdicos ou eletrônicos, entre outros. Porém, todas essas situações, a princípio, são bem diferentes, mas empregam essa palavra, pois possuem características em que se assemelham. Essas características são: ter uma quantidade de pessoas que tomam alguma decisão de modo a obter o melhor resultado possível, obedecendo às regras preestabelecidas. Ou seja, pode-se entender que um jogo é uma atividade que tem um grupo de jogadores, um conjunto de estratégias, posições e regras.

Desse modo, desconstruindo o pensamento que relaciona somente os jogos a brincadeiras com finalidades recreativas, pode-se correlacioná-los a situações que ocorrem no cotidiano das pessoas. Atividades como um grupo de amigos escolher entre ir ao cinema ou a uma festa; uma pessoa escolher usar certa roupa para ir a um determinado lugar; ou um indivíduo adotar a ação de flertar uma outra pessoa pode aumentar, ou não, as chances de terem um caso romântico e virarem namorados, ou simplesmente ficarem somente amigos, são considerados jogos também.

Assim, ao realizar pesquisas, encontrou-se que o ente matemático que sistematiza essas situações são a Teoria dos Jogos. Por conta disso, o autor desse caderno produziu uma dissertação intitulada **Equilíbrio de Nash no Ensino Médio**, na qual aborda toda formulação matemática e os principais resultados da Teoria dos Jogos, assim como documentos que indicam a aplicabilidade da Teoria dos Jogos no Ensino Médio.

A Teoria dos Jogos é uma área de estudos na matemática cujo objeto de estudo são situações nas quais uma ou mais pessoas devam tomar alguma decisão, de modo a obter o melhor resultado possível no problema dado. Ou seja, busca-se entender qual é a melhor jogada inicial em um determinado jogo, quais são as ações mais desejáveis a se adotar a uma ação do oponente, a probabilidade de obter êxito na estratégia escolhida, entre outras situações. Portanto, a Teoria dos Jogos pretende encontrar a racionalidade dos agentes envolvidos nos jogos.

A Teoria dos Jogos pode ser dividida em dois ramos: a *Teoria Combinatória dos Jogos* e a *Teoria Econômica dos Jogos*.

A Teoria Combinatória dos Jogos estuda jogos em que os jogadores fazem jogadas alternadas e sabem todas as informações que o jogo tem, como posições, jogadas, peças, e o número de movimentos é finito; não podem ter nenhum dispositivo que ocorra situações aleatórias ou sorte, como dados e sorteio de cartas; existe uma posição na qual não pode ocorrer nenhum movimento, gerando o término do mesmo; e no final do jogo haverá um resultado bem definido: a vitória para um dos participantes ou um empate. Alguns exemplos de jogos combinatórios são: Xadrez, Mancala, Jogo da velha, Jogo de Nim, Damas, Jogo da Vida, entre outros.

Já a Teoria Econômica dos Jogos investiga a inter-relação de um grupo de pessoas racionais que se comportam e tomam alguma ação de modo estratégico. Ou seja, a Teoria

Econômica dos Jogos busca compreender a tomada de decisão, em especial a decisão estratégica, em situações de conflito.

Neste trabalho o foco é a Teoria Econômica dos Jogos, especialmente no Equilíbrio de Nash, e serão apresentadas propostas de atividades a serem trabalhadas no Ensino Médio. Assim, este documento será divido em cinco capítulos.

O primeiro capítulo é essa introdução apresentada. No segundo capítulo será apresentada uma breve história da Teoria dos Jogos e os conceitos importantes que fundamentam essa área da matemática. Já no terceiro capítulo haverá propostas de atividades para o Ensino Médio. No quarto capítulo terá a resolução dos exercícios propostos para o Ensino Médio. Por fim, no quinto capítulo serão apresentadas as considerações finais sobre esse material.

Vale salientar que esse material é construído através das pesquisas apresentadas na dissertação **Equilíbrio de Nash no Ensino Médio**, sendo assim, você leitor, necessitará dominar os conteúdos apresentados na dissertação para ler e entender esse caderno.

2 TEORIA DOS JOGOS

Neste primeiro capítulo será apresentado um pouco da história da Teoria dos Jogos. Em seguida será explanado, de maneira sucinta, os conceitos mais importantes da Teoria Econômica dos Jogos. Também será explanado um pouco sobre os jogos e a educação.

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Dados históricos apontam que primeiros sinais de jogos, mais precisamente jogos de salão, são por volta de 2600 A.C. Em diversas culturas ancestrais essas brincadeiras eram utilizadas para rituais religiosos, adivinhação ou para simulações de batalhas (SANTOS, 2016).

Estudar os jogos, até por volta do século XVII, gerava uma certa desconfiança ou descaso, por conta que muitas vezes, essas brincadeiras envolviam dispositivos aleatórios e imprevisíveis que poderiam favorecer mais um participante do que outro. Essa visão começou a mudar com o surgimento da teoria das probabilidades, e assim podendo resolver vários problemas que envolviam os jogos de acaso, mais precisamente, os jogos de azar.

O primeiro registro de estudo de um jogo de azar foi feito por volta do século XVIII com Pierre Rémond de Montmort e Nicolaus Bernoulli. Eles trocavam correspondência sobre o jogo de cartas chamado Le Her (SARTINI et al., 2004).

Le Her é um jogo de azar e estratégico em um baralho de 52 cartas, com quantidade miníma de participantes sendo dois e a máxima a quantidade de cartas do baralho. Para ilustração, considere apenas dois jogadores, Pierre e Paul. Pierre entrega uma carta do baralho para Paul e depois pega uma carta para si. Paul pode ficar com essa carta ou trocar pela do Pierre (Pierre só pode negar a troca se a sua carta for um rei). Após Paul tomar a sua decisão de ficar ou trocar de carta, Pierre escolhe entre ficar com a carta que possui ou trocá-la por uma do baralho. Se Paul e Pierre tem carta de mesmo valor, Pierre é considerado perdedor. O jogador com a carta de maior valor ganha a partida, caso haja um empate, como Pierre deu as cartas ele ganhará o jogo. Vale destacar que a sequência dos valores das cartas, em ordem crescente é A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Q, J, K (BELLHOUSE; FILLION, 2015; TODHUNTER, 1985).

Fica claro que as cartas de valores menores que sete terão mais chances de serem trocadas e as de valores maiores que sete terão a possibilidade de permanecer na mão. A dúvida fica justamente para a carta de valor sete, que é a intermediária desse baralho.

Montmort escreveu esse problema para quatro pessoas. A sua pergunta para esse grupo foi: quais são as chances de cada jogador em relação à ordem de suas jogadas? Após várias correspondências trocadas de modo a solucionar o problema, conseguiram chegar em algumas conclusões, sendo-as bem parecidas. Contudo esses resultados continham alguns erros, que foram detectados por James Waldegrave (BELLHOUSE; FILLION, 2015).

Após algumas correspondências entre Waldegrave e Montmort de modo a mostrar o erro, Waldegrave envia uma carta com a sua conclusão sobre o problema. Para ele, para que tanto Paul quanto Pierre possam ganhar no jogo, deve-se escolher uma estratégia que contenha uma certa aleatoriedade, e não uma regra fixa. Assim Pierre deve adotar uma estratégia de manter cartas com valor igual a oito ou superior (e trocar cartas menores) numa probabilidade de $\frac{5}{8}$ e trocar cartas de oito ou abaixo com probabilidade de $\frac{3}{8}$. Já Paul deve utilizar as probabilidades contrárias, ou seja, trocar com probabilidade de $\frac{5}{8}$ e manter com probabilidade de $\frac{3}{8}$ (SANTOS, 2016). Segundo Sartini, et.al (2004), essa solução apresentada por Waldegrave fornece uma resposta através de um equilíbrio de estratégias mistas, porém não se estendeu no estudo para uma teoria mais geral.

O primeiro a desenvolver e expor informações sistemáticas para a Teoria dos Jogos foi Antoine Augustin Cournot. No seu livro *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, de 1838, há um modelo de mercado no qual duas empresas dividem entre si toda uma produção, ou seja, um duopólio, que leva seu nome: o duopólio de Cournot. A sua proposta consiste em considerar que:

- As empresas oferecem produtos iguais ao mercado, sendo assim, os consumidores não conseguem diferenciar os produtos por sua procedência;
- A única variável de controle é a quantidade produzida por cada empresa;
- Cada empresa decide, de forma independente e simultânea, a quantidade de produtos que produzirá;
- O custo de produção é uma função definida como $C(q_i) = cq_i$, com $i \in \{1,2\}$; donde q_i é a quantidade produzida pela indústria i e a constante c é o custo de produção de uma peça;
- As fábricas podem atender toda demanda que forem receber, ou seja, a sua produção é “infinita”;
- As empresas vendem o produto por um mesmo preço, uma vez que os compradores tendem sempre a comprar o produto mais barato;
- O preço é a função $P = a - bQ$, na qual $Q = q_1 + q_2$, e a é o maior valor que os indivíduos pagariam pela unidade do produto (SANTOS, 2016).

Baseado nesses pontos e sabendo que as empresas pretendem maximar os seus lucros, Cournot indica que as empresas devem decidir que a quantidade de produção de suas fábricas tenham que ser compatíveis entre si, ou seja, ambos devem produzir a mesma quantidade.

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo ajudou na fundamentação da Teoria dos Jogos. Em 1913, ele demonstrou que em cada rodada do xadrez, ao menos um dos jogadores possui uma estratégia que lhe dará a vitória ou um empate.

Alguns anos depois, Félix Edouard Justin Emile Borel fez uma grande contribuição. O seu interesse era nos jogos que dependiam da habilidade do jogador e da sorte, ou seja, jogos estratégicos. Por conta disso, foi o primeiro a formular o conceito de estratégia, sendo esse utilizado até os dias de hoje.

Mesmo havendo vários autores que estudaram os jogos e ajudaram a formular a Teoria dos Jogos, o seu vínculo de surgimento e criação está ligada a John Von Neumann. Sua primeira divulgação sobre o estudo dos jogos foi através do livro *Mathematische Zur Theorie der Gessellchaftsspiele*, de 1928, que trazia um teorema referente a todos os jogos que possui um ganhador e um perdedor. Esse tipo de jogo é conhecido como jogo de soma zero com dois jogadores. Esse resultado indica que todos os jogos de soma zero com dois jogadores possui uma solução estratégica em estratégias mistas. Através de uma parceria com Oskar Morgenstern saiu o livro *The Theory of Games and Economic Behavior*, de 1944. Nesse manuscrito, além de trazer jogos de soma zero, também indicava a representação dos jogos em sua forma extensiva. Por conta desse livro, a Teoria dos Jogos foi conquistando a economia e a matemática aplicada. Segundo Fiani (2006) muitos estudiosos da Teoria dos Jogos consideram a leitura desse livro como primordial para compreender e seguir no ramo da Teoria dos Jogos.

Os estudos de Von Neumann e Morgenstern se limitam apenas a jogos de soma zero, e isso gera uma restrição séria uma vez que há mais jogos que não são de soma zero. Essa situação começa a mudar por volta de 1950, pois surgem ferramentas que investem nessa limitação. Essas ferramentas proporcionaram a três pessoas ganharem o Prêmio Nobel de Economia de 1994.

Um desses ganhadores foi Jonh C. Harsanyi. A sua contribuição para a teoria está presente em três artigos, intitulados *Games with Incomplete information Played by "Bayesian" Players, Part I, Part II and Part III*. Nesses textos, ele indica que muitas vezes os agentes possuem alguma informação que os privilegia em relação aos demais.

Reinhard Selten foi o outro ganhador. Em suas pesquisas, foi capaz de aprimorar a ideia de equilíbrio, sendo conhecida como Equilíbrio Perfeito em Subjogos. Para que uma estratégia seja Equilíbrio Perfeito em Subjogos ela tem que ser a melhor entre todos os casos de interação entre os jogadores. Através dessa noção fica fácil detectar quais são as chances de ocorrerem ou não os compromissos e ameaças nos jogos. Esse resultado está presente em seu artigo intitulado *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetrgheit*.

O último ganhador do prêmio foi John Forbes Nash Jr.. Em seus trabalhos foi capaz de produzir grandes contribuições para jogos não-cooperativos. Em uma dessas contribuições ele foi capaz de englobar e expandir os estudos de Von Neumann e Morgenstern, mostrando a existência de um equilíbrio em estratégias mistas, atualmente chamado de Equilíbrio de Nash. Esses resultados estão presentes nos artigos *Equilibrium Points in n-Person Games* e *Non-cooperative Games*. A outra contribuição está presente nos artigos *The Bargaining Problem* e *Two Person Cooperative Games*, na qual indica uma teoria de barganha e prova uma existência de solução para o problema da barganha de Nash. "*Isto revolucionou a Teoria dos Jogos, trazendo a ideia de interações estratégicas considerando-se todas as possíveis jogadas do oponente*" (SOBRINHO, 2013, p.17).

2.2 RESUMO DOS CONCEITOS IMPORTANTES DA TEORIA DOS JOGOS

Nessa seção serão apresentadas de forma sucinta os conceitos mais importantes da Teoria dos Jogos. Para um melhor aprofundamento de cada ente matemático apresentado nesta parte, indica-se a leitura da dissertação **Equilíbrio de Nash no Ensino Médio**.

Lembre-se que jogo é compreendido como sendo as situações que possui interação de um grupo de agentes (ou jogadores) racionais que se comportam estrategicamente, obedecendo certas regras que possam existir. Desse modo, a primeira noção é a de quantidade de jogadores. Essa quantidade se supõem finita e natural, e define-se como sendo n a quantidade de jogadores. Os jogadores são representados por g_i, com $i \in \{1,2,3,...,n\}$. E o conjunto de todos os jogadores presentes no jogo é definido por $G = \{g_1, g_2, g_3, ..., g_n\}$.

Cada jogador escolhe uma estratégia que pode ser aplicada no jogo. As estratégias são representadas por s_{ij}, com $j \in \{1,2,3,...,m\}$ e $m \in \mathbb{N}$. Haverá sempre mais de uma estratégia a ser escolhida pelo jogador, pois caso contrário ficaria nítido qual ação a pessoa iria adotar. O conjunto das estratégias de cada jogador é representando por $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, \ldots, s_{ij}\}$, com $i \in \{1,2,3,...,n\}$.

A escolha das estratégias pode ser feita por meio da escolha sob a certeza ou a incerteza, principalmente se o jogo for de uma pessoa.

Na escolha sob a certeza, o indivíduo possui todas as informações possíveis sobre o jogo, assim como possui preferência em tomar alguma decisão. Já na escolha sob a incerteza, a adoção das estratégias se baseia em tomar atitudes que possam ser:

- Conservadoras: Nesse cenário o jogador escolhe o melhor resultado no pior cenário possível. Esse caso é conhecido como Maximin;
- Otimista: Nessa situação o jogador escolhe o melhor resultado no melhor cenário possível. Esse caso é conhecido como Maximax; ou
- Arrependida: Nesse caso a pessoa escolhe uma ação de modo a minimizar o quão arrependido fica ao descobrir o verdadeiro estado da natureza. Esse caso é conhecido como Minimax Arrependimento.

As possíveis estratégias que podem ser adotadas por todos os agentes, chamado de Espaço de Estratégia, é definido por $S = \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, ou seja, é a realização do produto cartesiano entre os conjuntos.

O Espaço de Estratégias pode ser feito por Estratégias Puras ou Estratégias Mistas. As Estratégias Puras são as estratégias que os agentes tomam no jogo. As Estratégias Mistas são as possíveis estratégias que podem ser adotadas no jogo, ou seja, é aplicada uma distribuição de probabilidade.

Para determinar os ganhos dos agentes envolvidos, existe uma função, chamada função Utilidade, que associa o ganho[1] do jogador g_i, chamado de u_i, a cada perfil de estratégia s que pertence a S. Ou seja:

$$\begin{aligned} u_i \quad : \quad & S \to \mathbb{R} \\ & \mathbf{s} \mapsto u_i(\mathbf{s}). \end{aligned} \tag{1}$$

E, por fim, todos os jogos podem ser escritos na forma tabular. Na Teoria dos Jogos, essa tabela é chamada de matriz de payoff. A tabela 1 indica como ficaria um jogo de duas pessoas, g_1 e g_2, com as suas estratégias, n para o jogador g_1 e m para o jogador g_2 e seus ganhos.

Tabela 1 – Matriz de payoff de um jogo com dois jogadores e com as suas respectivas estratégias e funções utilidades.

		g_2		
		s_{21}	$\cdots$	s_{2m}
g_1	s_{11}	$(u_1(s_{11},s_{21}),u_2(s_{11},s_{21}))$	$\cdots$	$(u_1(s_{11},s_{2m}),u_2(s_{11},s_{2m}))$
	s_{12}	$(u_1(s_{12},s_{21}),u_2(s_{12},s_{21}))$	$\cdots$	$(u_1(s_{12},s_{2m}),u_2(s_{12},s_{2m}))$
	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	s_{1n}	$(u_1(s_{1n},s_{21}),u_2(s_{1n},s_{21}))$	$\cdots$	$(u_1(s_{1n},s_{2m}),u_2(s_{1n},s_{2m}))$

Fonte: Acervo do autor

Vale salientar que todos os jogos aqui descritos possuem solução, sendo que a mais desejada a se encontrar é a solução estratégica. Essa solução estratégica é conhecida como Equilíbrio de Nash.

Para determinar o Equilíbrio de Nash pode-se utilizar dois processos. O primeiro é o Teorema Minimax de Von Neumman. Para isso, deve-se pegar o mínimo de cada linha e o máximo de cada coluna da tabela de ganhos de um jogador. Determinados esses valores, do resultado do mínimo de cada linha, deve-se escolher o maior valor, e do máximo de cada coluna deve-se adotar o menor valor. Se os valores forem iguais, então esse ponto será o Equilíbrio de Nash.

O segundo processo é o método de Pereira[2]. Para realizar esse processo, deve-se considerar a matriz de payoff, representada pela Tabela 2.

Para encontrar o Equilíbrio de Nash analisa-se os seguintes aspectos:

- se $\alpha \geq \mu$ e $\beta \geq \lambda$ então o ponto (S,E) é um Equilíbrio de Nash em estratégias puras;
- se $\mu \geq \alpha$ e $\sigma \geq \varphi$ então o ponto (I,E) é um Equilíbrio de Nash em estratégias puras;
- se $\gamma \geq \tau$ e $\lambda \geq \beta$ então o ponto (S,D) é um Equilíbrio de Nash em estratégias puras;

[1] Na Teoria dos Jogos usa-se a palavra payoff para designar os ganhos dos jogadores.
[2] O método de Pereira está presente na dissertação Equilíbrio de Nash no Ensino Médio na página 58. Também pode encontrá-lo em Pereira (2014,p. 77).

Tabela 2 – Matriz de payoff de um jogo com dois agentes

		J_2	
		E	D
J_1	S	(α,β)	(γ,λ)
	I	(μ,σ)	(τ,φ)

Fonte: Adaptado de Pereira (2014, p.76)

- se $\tau \geq \gamma$ e $\varphi \geq \sigma$ então o ponto (I,D) é um Equilíbrio de Nash em estratégias puras;
- considerando $p \in [0,1]$ e $q \in [0,1]$ então o Equilíbrio de Nash em estratégias mistas é dado por $p = \frac{\varphi-\sigma}{\beta-\lambda+\varphi-\sigma}$ e $q = \frac{\tau-\gamma}{\alpha-\mu+\tau-\gamma}$

A aplicação desses resultados é indicada no Capítulo 4.

2.3 OS JOGOS NO MEIO EDUCACIONAL

Jogar é algo inato nas pessoas, ou seja, desde quando nascemos até os últimos dias de vida estaremos envoltos por brincadeiras e tomadas de decisões. Desse modo, no meio educacional também há jogos, gerando contribuições tanto para a Teoria dos Jogos quanto para a educação.

> Uma contribuição, indireta, é o trabalho The moral judgment of the children publicado em 1932, de Jean Piaget (1896-1980), no qual faz uma comparação da aplicação real das regras pelas pessoas e a consciências das mesmas. O objetivo da comparação é definir a natureza pela qual os indivíduos atuam, em um sentido psicológico, ou sejam tomam decisões ou condutas frente a outros. Nos termos da atual Teoria dos Jogos seria a forma como as pessoas interagem nas situações estratégicas (os jogos) (SANTOS, 2016, p.11).

Segundo Grando (2000), pensar em uma aula em que aplica jogos e a Teoria dos Jogos aprimora e facilita o aprendizado, em especial dos conhecimentos matemáticos dos estudantes, pois serão construídos os conceitos envolvidos e memorizados por eles. Ainda afirma que o seu uso em sala de aula torna o ambiente mais agradável e eficiente do que uma lista de exercícios.

D'Ambrosio (2009) afirma que a matemática importante para a sociedade, em um futuro não tão distante, será Matemática Discreta, Teoria do Caos, Fractais, Fuzzies, **Teoria dos Jogos**, Pesquisa Operacional e Programação Dinâmica. Portanto, inserir tópicos de Teoria dos Jogos já na educação básica não seria utópico, mas desejável, uma vez que iria trazer à tona uma matemática que muito provavelmente o estudante irá encontrar na vida fora da escola.

Pensando em qualidade de ensino, em 2013 foi produzido um documento oficial e nacional que se preocupa com esse tema. Esse documento são as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Por conta desse fato esse material considera a educação como sendo um processo de socialização entre as diferentes culturas presentes no ambiente escolar, sendo que se constroem, mantêm e transformam os conhecimentos e os valores de cada indivíduo (BRASIL, 2013).

Ou seja, para que a educação seja de qualidade os estudantes devem ser capazes de interagir e tomar decisões que afetem a sociedade ao seu redor. Com isso, é perceptível a ação presente dos jogos e da Teoria dos Jogos na vida dos estudantes.

Para que os estudantes sejam capazes de tomar as decisões, eles devem adquirir habilidades que possam solucionar problemas. Essas habilidades são adquiridas durante toda a vida escolar, juntamente com as competências definidas pela Base Comum Curricular. Através das dez competências gerais da Base Comum Curricular, os estudantes devem tomar atitudes e valores que possam resolver problemas complexos da vida cotidiana, do exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018).

Portanto, para que os estudantes resolvam os problemas que possam aparecer, estes devem tomar uma ação de modo a receber um resultado positivo, negativo ou nulo. Novamente fica perceptível a influência dos jogos e da Teoria dos Jogos no cotidiano dos educandos.

Um modo de resolver esses problemas é “transformá-los” em jogos. Realizar esse processo é uma forma interessante, pois admite que os problemas possam ser vistos de uma maneira mais atrativa, favorecendo a criatividade na hora de produzir as estratégias para solucioná-lo (BRASIL, 1998).

Desse modo, os documentos oficiais indicam a possibilidade da aplicação dos jogos e da Teoria dos Jogos na Educação Básica. Portanto, elaborar e aplicar atividades, em especial no Ensino Médio é concebível, uma vez que utiliza conteúdos abordados nesse nível para solucionar os jogos e reforça aos estudantes escolherem as melhores opções em uma situação de conflito. Assim, no próximo capítulo serão expostas propostas de atividades a serem abordadas no Ensino Médio.

3 ENSINO MÉDIO

Essa é a última etapa do Ensino Básico, por isso os estudantes já possuem uma bagagem matemática grande. Por conta desses fatores, é possível estudar e compreender os conceitos da Teoria dos Jogos como jogadores, estratégias, espaço de estratégias, estratégias puras e mistas, representação tabular (matriz de payoff) e Equilíbrio de Nash.

Para esse nível é proposto uma sequência didática, ou seja, uma aula que possui um encadeamento de passos, etapas e atividades interligadas e de forma sequencial de modo a tornar o ensino-aprendizagem mais eficiente.

Para essa sequência, as habilidades a serem adquiridas pelos estudantes estão presentes na Tabela 3, os conceitos estruturantes da área de Matemática utilizados são Álgebra; Geometria; Probabilidade e Estatística e os objetos de conhecimentos empregados são Funções; Tabelas e Gráficos, Planilhas Eletrônicas e Probabilidade. O tempo estimado para a sua aplicação é de 10 à 11 aulas (aulas de 45 a 50 minutos).

O objetivo geral desse plano de aula é compreender os conceitos que dão base à Teoria dos Jogos, identificando-os nas mais diversas áreas do conhecimento, como economia, política, guerras, e no cotidiano das pessoas.

Os objetivos específicos a serem alcançados pelos estudantes são: compreender os conceitos de jogador(es), estratégias, racionalidade, espaço de estratégias, função utilidade e matriz de payoff; aplicar os conceitos da Teoria dos Jogos em situações-problemas; identificar e solucionar jogos de uma pessoa; identificar jogos de vários jogadores em diversas situações; encontrar o Equilíbrio de Nash nos jogos; solucionar situações que são modeladas como jogos de soma zero com dois jogadores, utilizando como ferramenta o Teorema Minimax de Von Neumman ou o Método de Pereira[1].

A metodologia a ser utilizada nessa sequência é uma aula expositiva, com explicação do professor trazendo exemplos práticos e concretos presentes no dia a dia, e explanativa, através da participação dos estudantes nos tópicos abordados. Os recursos utilizados para a sequência são textos, material impresso ou projetado, lousa e materiais para escrita.

Pensando em uma metodologia e recursos para a educação inclusiva, sugere-se que os textos e atividades elaboradas sejam adaptados de modo a utilizar gravuras e elementos lúdicos que representem o conteúdo trabalhado, respeitando, sempre que possível, a especificidade de cada estudante.

A avaliação pode ser feita através das participações dos alunos nas aulas, execução das atividades propostas pelo ou pela docente realizadas em sala e nas tarefas para casa, assim como uma avaliação realizada em sala. A recuperação dos conteúdos acontecerá sempre que houver a necessidade de melhoria da aprendizagem, podendo ser em forma de recuperação de conteúdo, avaliação substitutiva ofertada aos alunos com dificuldades de aprendizagem, ou na forma de

[1] O método de Pereira está presente na dissertação Equilíbrio de Nash no Ensino Médio na página 59. Também pode encontrá-lo em Pereira (2014, p. 77).

trabalho realizado em sala de aula, servindo como nota complementar.

Tabela 3 – Tabela das habilidades que os estudantes do Ensino Médio adquirem ao estudarem a Teoria dos Jogos

Código	Habilidades
(EM13MAT101)	Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102)	Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT106)	Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
(EM13MAT203)	Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
(EM13MAT301)	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302)	Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT311)	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT401)	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT501)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT511)	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Adaptado de Brasil(2013, p. 543-546)

3.1 PRIMEIRA ATIVIDADE: ÁREA DE ESTUDOS E CONHECIMENTOS PRÉVIOS SOBRE A TEORIA DOS JOGOS

Nessa primeira atividade, cujo objetivo é compreender a formação e aplicação da Teoria dos Jogos, sugere-se iniciar a aula colocando no quadro as perguntas a seguir, pedindo que os estudantes respondam cada uma:

- O que são jogos para vocês?
- Quem são os jogadores?
- Quantos jogadores podem ter em um jogo? Há uma quantidade miníma ou máxima?
- O que são as estratégias?
- Para escolher uma estratégia é necessário saber a estratégia do outro jogador?
- Seria possível quantificar a preferência de um jogador?
- Quais seriam os possíveis ganhos dos jogadores nos jogos? Esses ganhos podem ser quantificados?
- Existem estratégias em um jogo de modo que todos os jogadores podem obter o melhor ganho dentro de todas as combinações de estratégias possíveis?

Realizar essa atividade fará com que você, educador, diagnostique os conhecimentos prévios que cada estudante possui. Em seguida, para cada item apresente e defina os conceitos importantes da Teoria dos jogos, como o que é jogo, jogadores, estratégias, ganhos e Equilíbrio de Nash. Para isso, utilize como base para explicação o texto apresentado na Seção 2.2 e a dissertação **Equilíbrio de Nash no Ensino Médio** do autor desse caderno.

A resposta de cada um desses itens feitos pelos estudantes, mais a explanação do professor com os conceitos importantes citados anteriormente visa resultar na compreensão dos conceitos fundamentais da Teoria dos Jogos. Para a pergunta *Quem são os jogadores?*, seria interessante, perguntar se os animais poderiam ser considerados jogadores.

Após essa atividade, apresentar uma breve história da Teoria dos Jogos, a sua finalidade, objetivo, algumas áreas do conhecimento que a utilizem e a noção de jogos de soma zero. Uma sugestão de texto ou tópicos a serem abordados em sala de aula é a seguinte:

· A Teoria dos Jogos tem seu início vinculado a John von Neumann, por conta de suas publicações intituladas *Mathematische Zur Theorie der Gesellchaftsspiele* de 1928 e *The Theory of Games and Economic Behavior* de 1944. Este último ele escreveu em parceria com Oskar Morgenstern.

· Porém, há registro de estudo de jogos por volta de 2600 A.C. Como Neumann fundamentou e apresentou maneiras de solucionar jogos, em especial os jogos com dois jogadores em que resulta em um vencedor, então foi dado a ele esse título de "pai da Teoria dos Jogos".
· John Forbes Nash aprimorou os conhecimentos apresentados por Neumann e Morgenstern de modo a generalizar a busca pela melhor solução, ou seja, Nash trouxe meios e ferramentas que apresenta a melhor estratégia a ser adotada por cada jogador de modo a obter o melhor resultado possível dentro de todos os casos. Esse resultado é chamado de Equilíbrio de Nash.
· Essa teoria foi desenvolvida com a intenção de analisar situações que envolvam interesses conflitantes entre pessoas; empresas; organizações; entre outros; de modo que cada jogador deseja maximizar os seus ganhos ou minimizar suas perdas.
· A aplicação da Teoria dos Jogos pode ser vista nas áreas da economia, da ciência política, da psicologia, da sociologia, das finanças, da guerra e na evolução biológica que possui fatores quantificáveis.
· Os jogos podem ser classificados em jogos de soma zero ou jogos de soma não zero.
· Os jogos de soma zero são jogos que necessariamente precisa haver um vencedor e um perdedor ou empatar. Recebe esse nome, pois ao somar os ganhos dos jogadores em cada situação sempre resultará em zero.
· Os jogos de soma não zero são jogos que podem resultar em ganhos positivos, negativos ou nulo para cada jogador. Recebem esse nome, pois ao somar os ganhos dos jogadores em cada situação não resultará em zero em todos os casos. Nesses jogos podem haver mais de um vencedor ou perdedor.

3.2 SEGUNDA ATIVIDADE: RECONHECER OS JOGOS DE SOMA ZERO E OS JOGOS DE SOMA NÃO ZERO

A segunda atividade pretende distinguir os jogos de soma zero dos que não tem essa caraterística. Através desse exercício, o educando será capaz de perceber que há diversos jogos e identificar quando um jogo é de soma zero. Essa habilidade será importante para o decorrer desta sequência.

Para esse exercício, relembre o que define um jogo ser de soma zero e coloque no quadro, ou entregue em uma folha impressa, a seguinte atividade:

Sabendo que os jogos de soma zero são jogos em que deve existir sempre um vencedor e um perdedor, classifique os jogos abaixo como sendo Jogos de Soma Zero (Z) e jogos de Soma Não Zero (N) .
(___) Jogo de *Cara ou Coroa*: Dois jogadores decidem em escolher Cara ou Coroa de uma moeda. Em seguida lança-se a moeda para o alto de modo a obter um dos dois resultados. Ganha o jogador que escolheu a face voltada para cima da moeda;

(___) Jogo de *Pedra, Papel ou Tesoura*: Dois jogadores optam escolher entre Pedra, Papel ou Tesoura. Em seguida apresentam a estratégia escolhida. Os resultados são: Pedra ganha de Tesoura, Tesoura ganha de Papel, Papel ganha de Pedra e se houver estratégias iguais haverá um empate;
(___) Jogo da *Galinha (covarde)*: Dois participantes posicionam os seus automóveis em uma pista reta, com cada um em lados opostos da pista, ou seja, frente a frente, e devem arrancar ao mesmo tempo. Os jogadores possuem duas opções: desistir, desvia do caminho, ou não desistir, segue em frente. Caso os dois oponentes não desistam, perdem tudo, inclusive a vida. Se apenas um desiste, o que não desiste ganha, e o outro perde. Se ambos desistem, ambos perdem o respeito dos amigos, mas ainda têm seus carros e suas vidas;
(___) Game show *Sete ou Meio*: Duas pessoas se posicionam um de frente ao outro e recebem duas placas que contêm: **7** e **meio**. A dupla tinha que conversar e assim convencer, um ao outro, a escolher a carta **meio**, para que ele escolha a **7**. Ou seja, se um deles escolhesse **7** e o outro **meio**, aquele que escolhesse **7** levava sozinho uma grande quantia de dinheiro conquistado por ambos. Se ambos escolhessem **meio**, cada um ficava com metade da soma e se escolhessem **7** ninguém levava;
(___) Duas pessoas combinam em trocar malas fechadas, com o acordo de que uma delas tenha dinheiro e a outra um objeto que está sendo comprado. Cada jogador pode escolher entre seguir o acordo, colocando o que foi combinado dentro da mala, ou enganar e entregar uma mala vazia.
(___) Duas pessoas jogam um jogo com um baralho de 13 cartas de um mesmo naipe que são embaralhadas. Cada jogador recebe uma carta que só ele vê e uma terceira carta é colocada virada para baixo que ninguém vê o valor. O jogador 1 deve decidir se mantém a sua carta ou a troca com a carta do jogador 2. O jogador 2 deve decidir se mantém a sua carta ou troca com a carta que está virada na mesa. Ganha quem tiver a carta de maior valor.
(___) Dois caçadores se reuniram e combinaram de caçar um cervo. Como esse animal é de grande porte muito rápido e ágil, nenhum dos dois caçadores teria condição de caçar esse animal sozinho, sendo assim, é necessária a ajuda de uma outra pessoa. Para que a caçada tenha maiores chances de sucesso, cada um vai para uma direção da mata, não conseguindo se comunicar entre si. Porém, nessa mata também é possível caçar lebre, porém a carne da lebre é de menor valor, uma vez que a quantidade de carne de uma lebre não chega a metade da de um cervo. Dessa forma cada caçador pode escolher entre caçar o cervo ou caçar lebre.
(___) Duas empresas concorrentes produzem um mesmo produto e têm custos fixos por mês, independente de quanto conseguem vender. Ambas competem pelo mesmo mercado e devem escolher entre um preço alto ou um preço baixo. Se uma empresa vender a preço alto e a outra a preço baixo, a que tem preço baixo irá vender todo o estoque e terá um ganho positivo em relação ao concorrente. Se ambos venderem a preço baixo ou a preço alto, ambos terão que dividir o valor, e desse modo receberão nenhum ganho em cima do oponente.

Após a realização da atividade, socialize os resultados obtidos pelos estudantes e discuta cada item.

Estima-se que o tempo de aplicação da primeira e segunda atividades juntas seja de aproximadamente 45 a 50 minutos, ou seja, uma aula.

3.3 TERCEIRA ATIVIDADE: DETERMINAR OS JOGADORES E ESTRATÉGIAS ATRAVÉS DO JOGO CARA OU COROA

Essa atividade tem como objetivo determinar os conjuntos dos jogadores e das estratégias, assim como distinguir as estratégias puras das mistas. Com isso, o estudante relembra, ou é introduzido, os conceitos de conjuntos e produto cartesiano.

Para esse exercício, relembre os conceitos de estratégias com os estudantes (que foram apresentados na primeira atividade).

Neste exercício, peça para que os estudantes formem duplas, de modo a jogarem entre si o jogo Cara ou Coroa[2]. Para isso, peça para os alunos fazerem alguma marcação em um dos lados de sua borracha para definir esse lado como sendo Cara. Em seguida, entregue uma cópia para cada estudante da seguinte atividade:

Vamos jogar Cara ou Coroa. Para isso, formem duplas e joguem apenas uma rodada. Lembrem-se, para jogar esse jogo um de vocês devem escolher **Cara**, e o outro deve escolher **Coroa**. Em seguida complete a tabela abaixo com os resultados obtidos nessa partida única.

EU ESCOLHI	MEU PARCEIRO ESCOLHEU	RESULTADO (GANHEI OU PERDI)	QUAL FOI O MOTIVO DE ESCOLHER ESSA AÇÃO?

Agora vamos jogar mais cinco partidas desse mesmo jogo. Anote os resultados obtidos na tabela abaixo.

[2] Lembre-se que o jogo Cara ou Coroa é uma brincadeira com dois jogadores que decidem em escolher uma das faces *Cara* ou *Coroa* de uma moeda. Em seguida lança-se a moeda para o alto de modo a obter um dos dois resultados. Ganha o jogador que escolher a face voltada para cima da moeda.

RODADA	EU ESCOLHI	MEU PARCEIRO ESCOLHEU	RESULTADO (GANHEI OU PERDI)
1			
2			
3			
4			
5			

Após anotar os resultados, responda as seguintes perguntas:

1) Você adotou a mesma estratégia para cada rodada?

____

____

____

2) Como você poderia narrar a sua estratégia para vencer o jogo?

____

____

____

3) Qual é o conjunto dos jogadores?

____

____

____

4) Qual é o conjunto de estratégia de cada jogador?

___

___

___

5) Seria possível quantificar os seus ganhos, ou seja, dá para indicar um número para vitória e outro para a derrota? Se sim qual valor você acha melhor para colocar?

___

___

___

Após todos realizarem a atividade e explanarem os resultados, você, docente, oriente e explique a diferença entre as Estratégias Puras e Estratégias Mistas. Lembre-se que as Estratégias Puras são as ações adotadas em cada situação possível e as Estratégias Mistas consistem na alternância das ações através do uso de probabilidade em cada estratégia escolhida.

Também estimule discussões sobre os ganhos (função Utilidade) que esse e outros jogos possuem. Para isso, a atividade a seguir propõem que os estudantes elenquem as suas preferências musicais, atribuindo valores de 1 a 5, sendo 1 “não gosta tanto” e 5 “gosta mais sobre de todas as opções”. Discuta com os estudantes que em determinadas situações geralmente não aparece a preferência de seu maior gosto ao realizar alguma ação, e por isso deve escolher “a menos pior”. Também, pergunte se foi fácil elencar as preferências e se houve alguma dificuldade, questionando as suas escolhas.

Nos parênteses abaixo, elenque de forma numérica as suas preferências de gosto musical, sendo a escala de 1 a 5 na qual 5 é o ritmo musical que mais prefere ouvir e 1 para o que menos prefere.

(___) Rock; (___) Pagode; (___) Sertanejo; (___) Funk; (___) Eletrônica.

Após a realização da atividade, socialize os resultados obtidos pelos estudantes e discuta com eles os resultados.

O tempo estimado para a aplicação desse exercício é de aproximadamente 45 a 50 minutos, ou seja, uma aula.

3.4 QUARTA ATIVIDADE: DETERMINAR OS CONCEITOS DE JOGADOR, ESTRATÉGIA, PERFIL DE ESTRATÉGIAS E OS GANHOS DE UM JOGO

Para essa atividade serão retomados os conceitos de conjuntos, produto cartesiano e tabelas que os estudantes já aprenderam. Caso deseje aplicar para as turmas do primeiro ano, esse tema pode servir como sendo uma introdução ao conteúdo de conjuntos. Sugere-se relembrar com os estudantes os conceitos aprendidos na Atividade 1.

A atividade que se sugere para aplicar e compreender esses conceitos é a seguinte:

(**Batalha dos Sexos**) Suponha que um casal, Cris e Eli, estão decidindo qual será o programa da noite. Ambos valorizam, mais do que qualquer outra coisa, passar juntos a noite. Eles têm a opção ***ir ao jogo de futebol*** ou ***ir a um show de música***. Cris gosta de ir e assistir um jogo de Futebol. Eli gosta de assistir um show de música. Suponha uma escala de 0 à 10 em relação ao gosto de ir ao jogo de futebol ou a ir a um show de música. Se ambos forem ao jogo de futebol, Cris terá um ganho de 10, pois gosta muito de futebol e está em casal no evento, e Eli terá um ganho de 5, pois está em casal mas não gosta muito de futebol. Se ambos forem ao show, Eli terá um ganho de 10, pois gosta muito de show e está com a pessoa amada, e Cris terá um ganho de 5, pois está em casal no evento mas não gosta muito do show. Se Cris for para o jogo de futebol e Eli for para o show ou Eli for para o jogo de futebol e Cris for para o show, ambos terão ganho de 0 pois não gostam de estar sozinhos nos eventos, mas sim juntos. Analisando essa situação, responda as seguintes questões:

a) Qual é o conjunto que representa os jogadores nesse jogo?

____

____

____

b) Qual é o conjunto da estratégia que Cris pode escolher? E de Eli?

____

____

____

c) Qual é o perfil de estratégias desse jogo? Ou seja, qual é o conjunto "combinação" dos conjuntos estratégias dos jogadores?

____

____

____

d) Qual é o conjunto dos ganhos de cada jogador?

____

____

____

e) As Tabelas 9 e 10, representam os ganhos dos jogadores em cada situação. Complete essas tabelas, inserindo os ganhos de cada jogador em cada situação que pode acontecer nesse jogo.

f) A tabela 11 é conhecida como Matriz de payoff. Complete a Tabela 11 para representar esse jogo na forma tabular, considerando α, γ, μ e τ, sendo os ganhos do Jogador 1 e β, λ,σ e φ os ganhos do Jogador 2.

g) Se você fosse escolher um perfil de estratégias, qual você escolheria? Por quê?

h) Você indicaria se existe pelo menos uma solução que seja boa para ambos? Por quê?

Após a realização da atividade, socialize os resultados obtidos pelos estudantes e discuta cada item, em especial no item (h), pois é uma questão para introduzir a noção de Equilíbrio de Nash. A atividade que irá abordar mais a fundo esse tema é próxima atividade. Espera-se que os estudantes cheguem nos perfis (Futebol, Show) e (Show, Futebol) pois esses perfis são Equilíbrios de Nash.

Tabela 9 – Tabela de ganhos de Cris

		Eli	
		Futebol	Show
Cris	Futebol		
	Show		

Fonte: Acervo do Autor

Tabela 10 – Tabela de ganhos de Eli

		Eli	
		Futebol	Show
Cris	Futebol		
	Show		

Fonte: Acervo do Autor

Estima-se que o tempo dessa atividade seja de aproximadamente uma aula, cerca de 45 a 50 minutos.

Tabela 11 – Matriz de payoff do jogo Batalha dos Sexos

		Jogador 2:_____	
		Estratégia 1:_____	Estratégia 2:_____
Jogador 1:_____	Estratégia 1:__________	(α,β) (_____, _____)	(γ,λ) (_____ _____)
	Estratégia 2:__________	(μ,σ) (_____, _____)	(τ,φ) (_____ _____)

Acervo do Autor

3.5 QUINTA ATIVIDADE: DETERMINAR O EQUILÍBRIO DE NASH EM JOGOS DE SOMA NÃO ZERO PELO MÉTODO DE PEREIRA

O objetivo dessa atividade é perceber e aplicar um método de resolução de jogos que facilite a busca da determinação do Equilíbrio de Nash. Para isso, o estudante irá utilizar o método de Pereira[3]. Vale destacar e salientar que esse processo só é válido em jogos de duas pessoas.

Para isso, retorne ao jogo da atividade anterior e traga à tona as respostas que os estudantes elencaram nos itens (g) e (h). Em seguida, traga novamente o conceito do Equilíbrio de Nash que foi apresentado na primeira atividade. Após, coloque no quadro a matriz de payoff desse jogo, que está representada na Tabela 12, e a matriz de payoff genérica, representada pela Tabela 13.

Tabela 12 – Matriz de payoff do jogo Batalha dos sexos

		Eli	
		Futebol	Show
Cris	Futebol	(10, 5)	(0,0)
	Show	(0,0)	(5,10)

Fonte: Acervo do Autor

Tabela 13 – Matriz de payoff genérica

		J_2	
		E	D
J_1	S	(α,β)	(γ,λ)
	I	(μ,σ)	(τ,φ)

Fonte: Acervo do Autor

Em seguida, faça os seguintes questionamentos:

[3] O método de Pereira está presente na dissertação Equilíbrio de Nash no Ensino Médio na página 59. Também pode encontrá-lo em Pereira (2014, p. 77).

1) Compare a tabela de ganhos do jogo anterior com a genérica e responda os seguintes itens:
a) Qual é o valor de $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \sigma, \tau$ e φ?
$\alpha =$ ____________________
$\beta =$ ____________________
$\gamma =$ ____________________
$\lambda =$ ____________________
$\mu =$ ____________________
$\sigma =$ ____________________
$\tau =$ ____________________
$\varphi =$ ____________________
b) Classifique as sentenças a seguir em verdadeiras ou falsas.
(___) $\alpha \geq \mu$ e $\beta \geq \lambda$
(___) $\mu \geq \alpha$ e $\sigma \geq \varphi$
(___) $\gamma \geq \tau$ e $\lambda \geq \beta$
(___) $\tau \geq \gamma$ e $\varphi \geq \sigma$.
c) Alguma dessas quatro sentenças é verdadeira? Se sim, o perfil de estratégias encontrado por esse método é o mesmo discutido no início da aula? Por quê?
____
____
____
d) É possível inferir e concluir que esse processo resulta na obtenção do Equilíbrio de Nash?
____
____
____

Após a realização desse exercício, discuta em sala de aula os resultados obtidos pelos estudantes. Após terem realizado essa conversa, retome os conceitos de estratégias puras e mistas e mostre que o Equilíbrio de Nash encontrado nos exercícios anteriores é uma estratégia pura. Para encontrar o Equilíbrio de Nash em estratégias mistas, realize o seguinte exercício:

Um modo de encontrar o Equilíbrio de Nash em estratégia mistas é determinar as probabilidades que irão ser aplicadas em cada estratégia. A "fórmula" que indica qual é o perfil de estratégias mistas que é Equilíbrio de Nash, é dada por $p = \frac{\varphi - \sigma}{\beta - \lambda + \varphi - \sigma}$ e $q = \frac{\tau - \gamma}{\alpha - \mu + \tau - \gamma}$ donde $p \in [0, 1]$ e $q \in [0, 1]$. Caso os valores encontrados por p ou q estiverem fora deste intervalo, não "há" um perfil de estratégia mistas que soluciona o problema.

Desta forma, voltando ao problema anterior, qual será o perfil de Estratégias Mistas que soluciona esse problema?

Após a realização da atividade, socialize os resultados obtidos pelos estudantes e discuta cada item.

Afirme para os estudantes que esse processo de determinar o Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras e Mistas funciona nos jogos de soma não zero, como é a Batalha dos Sexos, e os de soma zero. É importante salientar esse fato pois senão os estudantes cairiam na falácia de usar esse método nos jogos de soma não zero, uma vez que a próxima atividade irá abordar o Teorema Minimax de Von Neumann que só se aplica nos jogos de soma zero.

Estima-se que o tempo de aplicação dessa atividade é de aproximadamente uma aula, ou seja, 45 a 50 min.

3.6 SEXTA ATIVIDADE: DETERMINAR O EQUILÍBRIO DE NASH EM JOGOS DE SOMA ZERO USANDO O TEOREMA MINIMAX DE VON NEUMANN

O objetivo dessa atividade é compreender de forma prática a aplicabilidade do Teorema Minimax de Von Neumann em jogos de soma zero a fim de determinar o melhor resultado. A realização desse exercício proporciona nos educandos aprimorar a leitura e interpretação de problemas, assim como compreender a utilização da matriz de pagamentos como uma simplificação do problema.

Inicie a aula fazendo os seguintes questionamentos aos estudantes:

- Se pudesse tomar uma decisão em cima dos resultados de um jogo, você preferiria escolher dentro de todos os piores resultados o melhor (Pessimista-Otimista), ou dentro de todos os melhores resultados o pior (Otimista-pessimista)? Por quê?
- Você acha que se em uma situação o melhor resultado dentro de todos os piores for igual ao pior resultado dentro todos os melhores, então essa estratégia será melhor a ser adotada por ambos jogadores? Por quê?

Após responderem e discutirem as respostas, entregue em uma folha, ou escreva no quadro, a seguinte situação:

Sejam duas empresas que estão disputando lugar no mercado, de modo que se uma ganha espaço a outra perde. A primeira é a empresa Von que tem a possibilidade de lançar quatro tipos diferentes de produtos, que são chamadas pelos codinomes A, B, C e D. A segunda empresa é a Neumann e também pode lançar 4 tipos diferentes de produtos, que são conhecidos como X, Y, Z e T. Cada empresa só pode lançar um produto de cada vez. A Tabela 17 abaixo indica a matriz de payoff de cada combinação dos lançamento dos produtos:

Responda as questões a seguir:
1) Qual é a matriz de payoff da empresa Von?
2) Complete a Tabela 18, determinando o valor mínimo de cada linha (pior cenário) e máximo de cada coluna (melhor cenário). Em seguida responda:
a) Entre os valores mínimos de cada linha, qual é o maior valor? __________________ (Este valor é chamado Maxmin).
b) Entre os valores máximos de cada linha, qual é o menor valor ? __________________ (Este valor é chamado Minimax).
c) Qual deve ser a solução ótima neste jogo? __________________
d) O minimax é igual ao maximin? Se sim, esse seria o melhor resultado, ou seja, o Equilíbrio de Nash? _____________

Tabela 17 – Tabela de ganhos das empresas

		Neumann			
		X	Y	Z	T
Von	A	(- 10, 10)	(20,-20)	(-15,15)	(30,-30)
	B	(40,-40)	(30,-30)	(50,-50)	(55,-55)
	C	(35,-35)	(-25,25)	(-20,20)	(40,-40)
	D	(25,-25)	(-15,15)	(35,-35)	(-60,60)

Fonte: Acervo do Autor

Após a realização da atividade, socialize os resultados obtidos pelos estudantes e discuta cada item. Nesse momento, você docente deve apresentar o Teorema Minimax de Von Neumann e explicar que só funciona para os jogos de soma zero.

Estima-se que o tempo de aplicação dessa atividade é de aproximadamente uma aula, ou seja, 45 a 50 min.

Tabela 18 – Tabela dos ganhos da empresa Von - Mínimo de cada linha e máximo de cada coluna

		Neumann X	Y	Z	T	Mínimo linha
Von	A					
	B					
	C					
	D					
	Máximo coluna					

Fonte: Acervo do Autor

3.7 SÉTIMA ATIVIDADE: DETERMINAR O EQUILÍBRIO DE NASH NO JOGO DILEMA DOS PRISIONEIROS

Nesta atividade o objetivo é encontrar o Equilíbrio de Nash no jogo Dilema dos Prisioneiros. Para isso será realizada uma atividade lúdica com esse jogo, ou seja, os estudantes serão os "prisioneiros" e terão que tomar a decisão de "confessar o crime" ou "negar o crime".

Peça para que todos os estudantes saiam da sala e esperem fora. Prepare o ambiente da maneira que achar mais conveniente, e deixe reservado dois lugares de modo a ficarem distantes um do outro. Chame dois estudantes e peça para irem a esses locais reservados que, cada um, conterá um pedaço de papel com a seguinte informação:

> Você e seu parceiro que está nesta sala de aula estão sendo acusados de um mesmo crime. Você pode escolher entre negar o crime ou confessar o crime. Saibam que se ambos negarem, terão uma pena de 1 ano. Se ambos confessarem, então ambos receberão uma pena de 5 anos. Se um negar e outro confessar, então o que confessou será libertado e o que negou ficará preso por 10 anos.
> Qual será a sua escolha?
>
> (___) Confessar (___) Negar
>
> Por que tomou essa decisão?
>
> ____
> ____
> ____

Após todos participarem dessa dinâmica, mostre os resultados obtidos em cada rodada, indicando a justificativa da escolha. Em seguida, questione se as duplas agiram estrategicamente ou não, e peça para que os estudantes criem a matriz de payoff do jogo e indique qual será o Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras e Mistas. Espera-se que os alunos cheguem no perfil (Confessar, Confessar).

Estima-se que o tempo dessa atividade será de duas aulas de cerca de 45 á 50 min.

3.8 OITAVA ATIVIDADE: AVALIAÇÃO

Neste exercício o objetivo é avaliar os estudantes em relação à aprendizagem obtida com as atividades anteriores. Para isso, peça para os estudantes que formem grupos, de até quatro pessoas, e produzam jornais sobre o jogo que cada equipe irá receber.

A sugestão é que essa atividade final seja interdisciplinar, ou seja, possa conversar e se relacionar com as áreas de conhecimentos.

Como a intenção é produzir um jornal, então já estaria se relacionando com a área das Linguagens. Os jogos propostos para os estudantes solucionarem serão situações de guerra, em especial da Segunda Guerra Mundial. Assim, esses jogos estarão interligados com a disciplina de História.

O jornal deverá conter, no mínimo, a descrição da situação (jogo), mapa da localidade onde ocorreu o jogo, a matriz de ganhos e os Equilíbrios de Nash em Estratégias Puras e Mistas.

As propostas de situações são as seguintes:

Batalha do Mar de Bismark[4]
Em dezembro de 1942 o alto comando japonês decidiu transferir reforços da China e do Japão para Lae, em Papua-Nova Guiné. Isso permitiria que os japoneses se recuperassem da derrota de Guadalcanal e se preparassem para a próxima ofensiva aliada. Para isso os japoneses reuniram oito destróieres, oito transportadores de tropas e mais cem aviões de escolta para a operação. A frota japonesa partiu de Rabaul, também em Papua-Nova Guiné, em 28 de fevereiro de 1943, transportando cerca de 6.900 soldados para reforçar suas linhas de defesa em Lae.
O comboio japonês poderia adotar duas rotas: a rota pelo sul, que apresentava tempo bom e boa visibilidade, e a rota pelo norte, que apresentava tempo ruim e baixa visibilidade. As forças aliadas possuíam, aviões de reconhecimento para pesquisar uma rota por vez. Cada pesquisa consumia um dia inteiro de busca. Dessa forma, se as forças aliadas enviassem seus aviões de reconhecimento para a rota certa, poderiam começar o ataque em seguida, mas se mandassem os aviões para a rota errada, perderiam um dia de bombardeio. O tempo para realizar essa operação é de no máximo três dias.

[4] Adaptado de Fiani (2006).

Assim, se os aliados e os japoneses escolhessem a rota sul, os aliados teriam três dias de bombardeios pois foram localizados de imediato e há sempre um bom tempo. Se os aliados mandassem os aviões para o sul mas os japoneses tivessem escolhido a rota norte, os aliados teriam um dia para realizar os bombardeios, pois erraram o local da busca e nesta rota sempre há uma baixa visibilidade.
Agora, se os aliados mandarem seus aviões para a rota norte, independente da escolha dos japoneses, sempre haverá dois dias de bombardeios, pois se mandarem os aviões para o local errado a outra rota terá boa visibilidade, mas se mandarem para o local certo a rota terá uma baixa visibilidade, fazendo assim perder um dia de bombardeio.

Batalha de Fornovo di Taro[5]
Na tarde do dia 27 de abril de 1945, um dia antes da ofensiva a Fornovo di Taro, o major brasileiro Cordeiro Oeste convenceu um vigário que levasse aos alemães a sugestão de se renderem. O vigário caminhou seis quilômetros até o local onde se encontrava os oficiais alemães. Indagado sobre o poderio e a localização das tropas brasileiras, o vigário afirmou que os alemães estavam cercados e deviam se render. Um desses oficiais, pediu ao vigário que obtivesse por escrito condições para a rendição e voltasse com elas.
Desta forma, na manhã do dia seguinte o oficial brasileiro redigiu o ultimato de rendição e o vigário levou esse ultimato aos alemães, retornando com uma mensagem dizendo que a resposta seria dada depois de consulta a seus superiores.
Como combinado entre os aliados, no dia 28 começou o ataque à cidade, porém a noite deste mesmo dia, oficiais alemães cruzaram as linhas brasileiras para negociar os pormenores da rendição.
Desta forma, os oficiais brasileiros poderiam aceitar condições dos oficiais para a rendição ou negar as condições. E por sua vez os oficiais alemães poderiam se render ou não.
Se os brasileiros aceitassem as condições e os alemães se rendessem, os brasileiros teriam um ganho de valor um, pois as condições iriam favorecer os alemães. Caso os alemães não se rendessem, mesmo os brasileiros aceitando as condições, os brasileiros receberiam um valor negativo de uma unidade, pois acreditaram nos alemães e deram a eles benefícios.
Agora se os brasileiros não aceitam condições, em ambas as situações os seus ganhos teriam um valor de dois, pois caso os alemães se rendessem o moral das tropas iria aumentar drasticamente, e se os alemães não se rendessem, as tropas brasileiras iriam destruir toda a resistência, também assim aumentando o moral das tropas.

[5] Produzido pelo Autor.

Dia D[6]
No ano de 1944 os aliados começaram a elaborar um plano de invasão a França, a fim de retirar os alemães desse local. Para isso, os aliados começaram a realizar algumas movimentações na Grã-Bretanha, mais precisamente na região de Kent e Sussex. Essa região da Grã-Bretanha é a mais próxima da França, tendo cerca de quatrocentos quilômetros de distância. A cidade francesa mais perto é Calais.
Sabendo desse fato, o alto comando aliado planejava invadir a França em junho, ou pela cidade de Calais ou na região da Normandia, sendo esta bem distante de Calais. Já os alemães teriam a opção de reforçar as tropas em Calais ou não, uma vez que acreditavam que seria por essa rota a invasão aliada.
Se os aliados atacarem em Calais e os alemães reforçarem a cidade, os aliados teriam um prejuízo no valor de dez, pois a cidade estaria bem preparada e esperando o ataque aliado. Se os alemães não reforçarem a cidade de Calais, o ganho dos aliados seria no valor de cinco, pois como é a cidade mais próxima da Grã-Bretanha então ela está bem fortificada.
Se os aliados atacarem a Normandia, em qualquer decisão que os alemães adotarem, o ganho dos aliados será de 10, pois os alemães acreditam fielmente que os aliados farão uma incursão em Calais, e deste modo não esperam que haja um ataque na Normandia.

Batalha de Avranche [7]
Em agosto de 1944, o exército estadunidense estava transportando cerca de 100 mil soldados por uma passagem ao sul da Normandia, após o dia D. Essas forças se deslocavam nas direções sul, leste e noroeste da França. Porém, a passagem podia ser fechada caso o exército alemão alcançasse a cidade de Avranches, no sul da Normandia, isolando toda a península na qual as tropas aliadas se encontravam instaladas na França.
Desta forma, o oficial alemão sofria com o seguinte dilema: atacar as tropas aliadas para tentar fechar a passagem de suprimentos, isolando as tropas estadunidenses que se moviam no interior da França ou recuar, para fortalecer e consolidar suas defesas. Já o oficial estadunidense tinha duas opções: avançar para atacar o exército alemão em seu flanco ou aguardar com as forças de reserva até que os alemães adotassem escolher atacar ou recuar.

[6] Produzido pelo Autor.
[7] Adaptado de Fiani (2006).

Assim, se os alemães recuassem e os aliados avançassem então os aliados poderiam exercer uma forte pressão sobre a retirada alemã e sofreriam algumas baixas, obtendo assim um ganho no valor de cinco. Porém, se os aliados avançassem e os alemães atacassem a passagem, a linha de suprimentos seria totalmente danificada e muito provavelmente seria fechada a passagem, deixando os aliados em situação muito difícil. Desta forma, os aliados sofreriam um prejuízo de um valor de dez.
Agora se os aliados aguardassem com as forças reservas, haveria a possibilidade de deslocar as tropas para defender a passagem, caso os alemães atacassem, tendo a chance de cercar as forças inimigas e impor-lhes uma severa derrota, sendo assim, ganhando valor de oito. Também os aliados poderiam exercer alguma pressão, ainda que moderada, sobre uma retirada alemã. Neste cenário, receberiam um ganho no valor de sete.

Vale salientar que o professor tem a autonomia de adotar as situações que achar mais conveniente. Sendo assim, pode trazer questões de economia ou outras batalhas das diversas guerras.

O tempo estimado para a realização dessa atividade é de três a quatro aulas de aproximadamente 45 a 50 min.

4 SOLUÇÕES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo serão apresentados as soluções das atividades propostas.

4.1 SOLUÇÃO DA PRIMEIRA ATIVIDADE

As possíveis respostas para cada item, que o estudante possa responder, podem ser:

- O que são jogos para vocês?
  R: São situações na qual há interações entre entidades de modo a gerar um bônus.
- Quem são os jogadores?
  R: As entidades que participam de maneira racional em cada situação, que podem ser pessoas, empresas, governos, entre outros.
- Quantos jogadores podem ter em um jogo? Há uma quantidade miníma ou máxima?
  R: Pode ter a quantidade que a situação permitir, ou seja, desde uma entidade até várias, podendo ser infinitos jogadores.
- O que são as estratégias?
  R: São as ações que cada agente toma no jogo.
- Para escolher uma estratégia é necessário saber a estratégia do outro jogador?
  R: Não é obrigatório, mas se está buscando o melhor resultado possível é melhor saber ou prever a estratégia do oponente.
- Seria possível quantificar a preferência de um jogador?
  R: Sim é possível, pois cada jogador tem preferência em cima de algo, elencando as que prefere mais das que prefere menos. Dessa forma, é possível associar um número a cada preferência obedecendo as relações de ordem.

4.2 SOLUÇÃO DA SEGUNDA ATIVIDADE

A solução da segunda atividade é a seguinte:

- (**Z**) Jogo de Cara ou Coroa;
- (**Z**) Jogo de Pedra, Papel ou Tesoura;
- (**N**) Jogo da Galinha (covarde) ;
- (**N**) Game show Sete ou Meio;

- (**N**) Duas pessoas combinam em trocar malas fechadas, com o acordo de que uma delas tenha dinheiro e a outra um objeto que está sendo comprado. Cada jogador pode escolher entre seguir o acordo, colocando o que foi combinado dentro da mala, ou enganar e entregar uma mala vazia.
- (**Z**) Duas pessoas jogam um jogo com um baralho de 13 cartas de um mesmo naipe que são embaralhadas. Cada jogador recebe uma carta que só ele vê e uma terceira carta é colocada virada para baixo que ninguém vê o valor. O jogador 1 deve decidir se mantém a sua carta ou a troca com a carta do jogador 2. O jogador 2 deve decidir se mantém a sua carta ou troca com a carta que está virada na mesa. Ganha quem tiver a carta de maior valor.
- (**N**) Dois caçadores se reuniram e combinaram de caçar um cervo. Como esse animal é de grande porte muito rápido e ágil, nenhum dos dois caçadores teria condição de caçar esse animal sozinho, sendo assim, é necessária a ajuda de uma outra pessoa. Para que a caçada tenha maiores chances de sucesso, cada um vai para uma direção da mata, não conseguindo se comunicar entre si. Porém nessa mata também é possível caçar lebre, porém a carne da lebre é de menor valor, uma vez que a quantidade de carne de uma lebre não chega a metade da de um cervo. Dessa forma cada caçador pode escolher entre caçar o cervo ou caçar lebre.
- (**Z**) Duas empresas concorrentes produzem um mesmo produto e têm custos fixos por mês, independente de quanto conseguem vender. Ambas competem pelo mesmo mercado e devem escolher entre um preço alto ou um preço baixo. Se uma empresa vender a preço alto e a outra a preço baixo, a que tem preço baixo irá vender todo o estoque e terá um ganho positivo em relação ao concorrente. Se ambos venderem a preço baixo ou a preço alto, ambos terão que dividir o valor, e desse modo receberão nenhum ganho em cima do oponente.

4.3 SOLUÇÃO DA TERCEIRA ATIVIDADE

As respostas dessa atividade são pessoais, mas algumas possíveis respostas de cada item podem ser:

- Qual foi o motivo que fez você adotar essa escolha?
  R: Tenho 50% de acerto em todas as chances; aleatório; Gosto mais da cara; ...
- 1) Você adotou a mesma estratégia para cada rodada?
  R: Não, pois ficaria mais fácil de identificar minha estratégia; Sim, pois tentei enganar meu oponente para ele achar que eu mudaria em algum momento; ...
- 2) Como você poderia narrar a sua estratégia para vencer o jogo?
  R: Pensei na estratégia que o adversário fosse jogar e usei um número contrário do

que supostamente ele iria jogar; Usei o número contrário do que falei, para enganar o oponente; ...
3) Qual é o conjunto dos jogadores?
R: G = {Eu, Meu parceiro}

- 4) Qual é o conjunto de estratégia de cada jogador?
R: S_{Eu} = {Cara, Coroa} e $S_{\text{Meu parceiro}}$ = {Cara, Coroa}

- 5) Seria possível quantificar os seus ganhos, ou seja, dá para indicar um número para vitória e outro para a derrota? Se sim, qual valor você acha melhor para colocar?
R: Sim, é possível quantificar e ordenar as estratégias em relação às preferências. Um possível valor para representar a vitória seria 1 e a derrota - 1.

4.4 SOLUÇÃO DA QUARTA ATIVIDADE

As respostas das questões dessa atividade são:

- a) Qual é o conjunto que representa os jogadores nesse jogo?
R: $G = \{\text{Cris, Eli}\}$

- b) Qual é o conjunto da estratégia que Cris pode escolher? E de Eli?
R: $S_{\text{Cris}} = \{\text{Futebol, Show}\}$ e $S_{\text{Eli}} = \{\text{Futebol, Show}\}$

- c) Qual é o perfil de estratégias desse jogo? Ou seja, qual é o conjunto "combinação" dos conjuntos estratégias dos jogadores?
R:
$S = S_{\text{Cris}} \times S_{\text{Eli}} = \{(\text{Futebol, Futebol}), (\text{Futebol, Show}), (\text{Show, Futebol}), (\text{Show, Show})\}$

- d) Qual é o conjunto dos ganhos de cada jogador?
R: $P_{\text{Cris}} = \{0, 5, 10\}$ e $P_{\text{Eli}} = \{0, 5, 10\}$

- e) As Tabelas 9 e 10, representam os ganhos dos jogadores em cada situação. Complete essas tabelas, inserindo os ganhos de cada jogador em cada situação que pode acontecer nesse jogo.
R:

Tabela de ganhos de Cris

		Eli	
		Futebol	Show
Cris	Futebol	10	0
	Show	0	5

Tabela de ganhos de Eli

		Eli: Futebol	Eli: Show
Cris	Futebol	5	0
	Show	0	10

- f) A tabela 11 é conhecida como Matriz de payoff. Complete a Tabela 11 para representar esse jogo na forma tabular, considerando α, γ, μ e τ, sendo os ganhos do Jogador 1 e β, λ,σ e φ os ganhos do Jogador 2.
  R:

		Jogador 2: Eli — Estratégia 1: Futebol	Jogador 2: Eli — Estratégia 2: Show
Jogador 1: Cris	Estratégia 1: Futebol	(α,β) (10, 5)	(γ,λ) (0, 0)
	Estratégia 2: Show	(μ,σ) (0, 0)	(τ,φ) (5, 10)

- g) Se você fosse escolher um perfil de estratégias, qual você escolheria? Por quê?
  R: Escolheria (Futebol, Futebol) ou (Show, Show) pois são os melhores resultados que pode-se obter.

- h) Você indicaria se existe pelo menos uma solução que seja boa para ambos? Por quê?
  R: Sim existem soluções, pois nos perfis (Futebol, Futebol) ou (Show, Show) nenhum dos jogadores se sente motivado a trocar a sua estratégia, uma vez que trocando de estratégia iriam receber ganhos menores.

4.5 SOLUÇÃO DA QUINTA ATIVIDADE

As respostas dessas questões são as seguintes:

- 1) Analisando essa tabela de ganhos, a escolha de lançar os produtos B e Y continua sendo a melhor decisão? Por quê?
  R: Sim, continua a melhor decisão, pois nenhuma empresa tem interesse em lançar outro produto, uma vez que esse resultado dá melhores ganhos a todos.

- 2) a) Qual é o valor de $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\sigma,\tau$ e φ?
  $\alpha = 10$
  $\beta = 5$
  $\gamma = 0$

$\lambda = 0$
$\mu = 0$
$\sigma = 0$
$\tau = 5$
$\varphi = 10$
b) Classifique as sentenças a seguir em verdadeiras ou falsas.
(V) $\alpha \geq \mu$ e $\beta \geq \lambda$
(F) $\mu \geq \alpha$ e $\sigma \geq \varphi$
(F) $\gamma \geq \tau$ e $\lambda \geq \beta$
(V) $\tau \geq \gamma$ e $\varphi \geq \sigma$.
c) Alguma dessas quatro sentenças é verdadeira? Se sim, o perfil de estratégias encontrado por esse método é o mesmo discutido no início da aula? Por quê?
R: Sim, tem-se duas sentenças que são verdadeiras e estas resultaram nos perfis (Futebol,Futebol) e (Show,Show) que foram discutidos e apontados como melhores soluções no início da aula.
d) É possível inferir e concluir que esse processo resulta na obtenção do Equilíbrio de Nash?
R: Sim, é possível concluir isso pois sabe-se que os melhores resultados esperados em um jogo são as estratégias que são Equilíbrios de Nash.

- Um modo de encontrar o Equilíbrio de Nash em estratégia mistas é determinar as probabilidades que irão ser aplicadas em cada estratégia. A "fórmula" que indica qual é o perfil de estratégias mistas que é Equilíbrio de Nash, é dada por $p = \frac{\varphi-\sigma}{\beta-\lambda+\varphi-\sigma}$ e $q = \frac{\tau-\gamma}{\alpha-\mu+\tau-\gamma}$ donde $p \in [0,1]$ e $q \in [0,1]$. Caso os valores encontrados por p ou q estiverem fora deste intervalo, não "há" um perfil de estratégia mistas que soluciona o problema.
  Desta forma, voltando ao problema anterior, qual será o perfil de estratégias mistas que soluciona esse problema?
  R:

$$p = \frac{10-0}{5-0+10-0} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$q = \frac{5-0}{10-0+5-0} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Portanto, o perfil $(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ é um Equilíbrio de Nash.

4.6 SOLUÇÃO DA SEXTA ATIVIDADE

As respostas dessas questões são as seguintes:

- Se pudesse tomar uma decisão em cima dos resultados de um jogo, você preferiria escolher dentro de todos os piores resultados o melhor (Pessimista-Otimista), ou dentro de todos os melhores resultados o pior (Otimista-pessimista)? Por quê?
  R: Qualquer um dos dois, pois não teria tanta diferença escolher uma ou outra se for adotar a escolha estratégica.

- Você acha que se em uma situação o melhor resultado dentro de todos os piores for igual ao pior resultado dentro todos os melhores, então essa estratégia será melhor a ser adotada por ambos jogadores? Por quê?
  R: Sim, pois mostra que se adotar uma escolha mais conservadora-otimista ou mais otimista-pessimista não resultará em ganhos melhores para qualquer jogador.

- Responda as questões a seguir:
  1) Qual é a matriz de payoff da empresa Von?
  R:

Tabela dos ganhos da empresa Von

		Neumann			
		X	Y	Z	T
Von	A	- 10	20	-15	30
	B	40	30	50	55
	C	35	-25	-20	40
	D	25	-15	35	-60

2) Complete a Tabela 18, determinando o valor mínimo de cada linha (pior cenário) e máximo de cada coluna (melhor cenário). Em seguida responda:

Tabela dos ganhos da empresa Von - Mínimo de cada linha e máximo de cada coluna

		Neumann				
		X	Y	Z	T	Mínimo linha
Von	A	- 10	20	-15	30	- 15
	B	40	30	50	55	30
	C	35	-25	-20	40	-25
	D	25	-15	35	-60	-60
	Máximo coluna	35	30	50	55	

a) Entre os valores mínimos de cada linha, qual é o maior valor?

R: 30.
b) Entre os valores máximos de cada linha, qual é o menor valor ?
R: 30.
c) Qual deve ser a solução ótima neste jogo?
R: A melhor solução seria a empresa Von lançar o produto B e a empresa Neumann lançar o produto Y
d) O minimax é igual ao maximin? Se sim, esse seria o melhor resultado, ou seja, o Equilíbrio de Nash?
R: Sim, são iguais e seria o melhor resultado, pois dentro de todos os cenários possíveis, esse é o que resulta nos melhores ganhos para ambas as empresas.

4.7 SOLUÇÃO DA SÉTIMA ATIVIDADE

A resposta dessa questão é pessoal de cada estudante. Abaixo segue a matriz de payoff do jogo e o Equilíbrio de Nash.

Tabela 24 – Matriz de payoff do jogo O Dilema dos Prisioneiros.

		Jogador 2	
		Confessar	Negar
Jogador 1	Confessar	$(-5,-5)$	$(0,-10)$
	Negar	$(-10,0)$	$(-1,-1)$

O Equilíbrio de Nash em estratégias puras desse jogo é o perfil $(Confessar, Confessar) = (-5,-5)$, pois $\alpha = \beta = -5 > -10 = \mu = \lambda$.

O Equilíbrio de Nash em estratégias mistas é dado por:

$$p = \frac{-1-0}{-5-(-10)+(-1)-0} = -\frac{1}{4}$$

e

$$q = \frac{-1-0}{-5-(-10)+-1-0} = -\frac{1}{4}.$$

Como os resultados deram valores negativos, então nesse jogo não há uma distribuição de probabilidade sobre as estratégias puras. Sendo assim, o único ponto que é Equilíbrio de Nash é (-5,-5).

4.8 SOLUÇÃO DA OITAVA ATIVIDADE

Nesta seção serão apresentados as matrizes de payoff dos jogos propostos e o Equilíbrio de Nash de cada jogo.

No jogo Batalha do Mar de Bismark, a matriz de payoff é a seguinte:

Tabela 25 – Matriz de payoff do jogo A batalha do Mar de Bismark

		Japão	
		Sul	Norte
EUA	Sul	$(3,-3)$	$(1,-1)$
	Norte	$(2,-2)$	$(2,-2)$

Fonte: Acervo do Autor

O Equilíbrios de Nash em Estratégia Pura do jogo Batalha do Mar de Bismark é dada por (Norte, Norte) = (2,-2), por causa do Minimax de Von Neumann e por $\tau = -2 \geq -1 = \gamma$ e $\varphi = -2 \geq -2 = \sigma$. O Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas é dada por:

$$p = \frac{-2-(-2)}{-3-(-1)+(-2)-(-2)} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$q = \frac{2-1}{3-2+2-1} = \frac{1}{2}.$$

Ou seja o perfil $(0,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ é o Equilíbrio de Nash. Assim, conclui-se que que os japoneses teriam 50% de chance de escolher a rota sul, enquanto os americanos teriam 0% de chance de escolher a rota sul.

Já no jogo Batalha de Fornovo di Taro, tem-se que a matriz de payoff é a seguinte:

Tabela 26 – Matriz de payoff do jogo Batalha de Fornovo di Taro

		Alemães	
		Render	Não se render
Brasileiros	Aceitar condições	$(1,-1)$	$(-1,1)$
	Não aceita condições	$(2,-2)$	$(2,-2)$

Fonte: Acervo do Autor

O Equilíbrio de Nash em estratégias puras para o jogo Batalha de Fornovo di Taro é (Não aceitar condições, Render) = (2,-2). Chega-se neste resultado pelo Teorema Minimax de Von Neumann ou por $\mu = 2 \geq 1 = \alpha$ e $\sigma = -2 \geq -2 = \varphi$. Já o Equilíbrio de Nash deste jogo é dado por

$$p = \frac{-2-(-2)}{-1-1+(-3)-(-2)} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$q = \frac{2-(-1)}{1-2+2-(-1)} = \frac{3}{2}.$$

Como q deu resultado maior que 1, então esse jogo não terá uma distribuição de probabilidades.

Tabela 27 – Matriz de payoff do jogo Dia D

		Alemães	
		Reforçar Calais	Não reforçar Calais
Aliados	Atacar Calais	$(-10,10)$	$(5,-5)$
	Atacar Normandia	$(10,-10)$	$(10,-10)$

No jogo Dia D, a tabela de ganhos é representado pela seguinte matriz de payoff acima.

O Equilíbrio de Nash deste jogo em estratégias puras é *(Atacar Normandia, Reforçar Calais)* = $(10,-10)$. Para encontrar esse resultado usa-se o Teorema minimax de Von Neumann ou $\mu = 10 \geq -10 = \alpha$ e $\sigma = -10 \geq -10 = \varphi$. Já o Equilíbrio de Nash em estratégias mistas é dado por:

$$p = \frac{-10-(-10)}{10-(-5)+(-10)-(-10)} = \frac{0}{15} = 0$$

$$q = \frac{10-5}{-10-10+10-5} = \frac{5}{-15} = -\frac{1}{3}.$$

Portanto, como q deu um valor negativo, então esse jogo não possui uma distribuição de estratégias que resulte no Equilíbrio de Nash.

A matriz de payoff do jogo Batalha de Avranche é a seguinte:

Tabela 28 – Matriz de payoff do jogo Batalha de Avranche

		Alemães	
		Atacar	Recuar
Aliados	Avançar	$(-10,10)$	$(5,-5)$
	Esperar	$(8,-8)$	$(7,-7)$

O Equilíbrio de Nash da Batalha de Avranche em estratégias puras é $(Esperar, Recuar) = (7,-7)$. Para encontrar esse resultado usa-se o Teorema minimax de Von Neumann ou $\tau = 7 \geq 5 = \lambda$ e $\varphi = -7 \geq -8 = \sigma$. Já o Equilíbrio de Nash em estratégias mistas é dado por:

$$p = \frac{-7-(-8)}{10-(-5)+-7-(-8)} = \frac{1}{16}$$

e

$$q = \frac{7-5}{-10-8+7-5} = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}$$

Como o valor de q deu resultado negativo, então não há uma distribuição de probabilidade sobre as estratégia neste jogo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse documento se propõem a trazer de forma sucinta conceitos e teoremas da Teoria dos Jogos, assim como indicar ferramentas e meios de inserir esse conteúdo nas aulas do Ensino Médio. Sendo assim espera-se que este material possa servir como motivação e incentivo aos educadores em suas práticas pedagógicas.

As atividades propostas para o Ensino Médio utilizam conhecimentos, habilidades e competências que os estudantes adquirem durante toda a sua vida escolar, em especial os desse nível da Educação Básica. Sendo assim, aplicar esses exercícios pode ser como um meio de iniciar ou reforçar os assuntos de relação de ordem, conjuntos, produto cartesiano, funções, matrizes e probabilidade.

Também, aplicar essas atividades no Ensino Médio introduz outros conhecimentos matemáticos como relação de preferência, estratégias, jogadores e jogos. Portanto, os exercícios propostos para esse nível tem a finalidade de trazer os arcabouços matemáticos presentes na Teoria dos Jogos, de modo que os estudantes adquiram essas ferramentas, para assim poderem resolver situações que podem ser modeladas como jogos.

Vale destacar que aprender a Teoria dos Jogos pode ajudar no desenvolvimento da inteligência emocional e das tomadas de decisões do dia a dia, uma vez que todas as nossas ações geram ganhos ou prejuízos, e dessa forma vivemos dentro de um "jogo".

REFERÊNCIAS

BELLHOUSE, David.R; FILLION, Nicolas. Le her and other problems in probability discussed by bernoulli, montmort and waldegrave. **Statistical Science**, Institute of Mathematical Statistics, v. 30, n. 1, p. 26–29, 2015. Disponível em: <https://projecteuclid.org/journals/statistical-science/volume-30/issue-1/Le-Her-and-Other-Problems-in-Probability-Discussed-by-Bernoulli/10.1214/14-STS469.full>. Acesso em: 04 jan. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2023.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Comum Currícular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 24 set. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 24 set. 2022.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:Da teoria à prática**. 17. ed. Campinas: Papirus, 2009.

FIANI, Ronaldo. **Teoria dos Jogos: com aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

GRANDO, Regina Célia. **O Conhecimento Matemático e o uso de jogos na sala de aula**: Doutorado em educação. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, Campinas, 2000. Descrição física. Disponível em: <https://repositorio.unicamp.br/Busca/Download?codigoArquivo=457042>. Acesso em: 15 jan. 2023.

PEREIRA, Emanoel Fabiano Menezes. **Teoria dos Jogos com Aplicações no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2014. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1446&id2=462>. Acesso em: 10 dez. 2022.

SANTOS, Carlos Souza. **Introdução à Teoria dos Jogos para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.Universidade Federal de Sergipe, Aracaju, 2016. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/8805/2/CLEVERTON_SOUZA_SANTOS.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2022.

SARTINI, Brígida Alexandre et al. Uma introdução a teoria dos jogos. **Bienal da SBM**, Anais.Salvador: Universidade Federal da Bahia, v. 2, p. 62, 2004. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2022.

SOBRINHO, Carlos Alberto Silva. **Estratégias discretas em teoria dos jogos**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática e Estatística. Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=522&id2=41482>. Acesso em: 11 jan. 2022.

TODHUNTER, Issac. **A History of the Mathematicaln Theory of Probability From the time of Pascal to that Laplace**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/books/history-of-the-mathematical-theory-of-probability/2760F1E18CD24818F5937EEED9BF8433>. Acesso em: 24 abr. 2023.