Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

RECREDENCIADA PELO DECRETO ESTADUAL N° 9.996, DE 02 DE MAIO DE 2006

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UESB

Adriano Santos da Rocha

Nem Complexo, nem Imaginário.

Ressignificando o ensino de

Números Complexos

no Ensino Médio

Vitória da Conquista

2013

Adriano Santos da Rocha

Nem Complexo, nem Imaginário.

Ressignificando o ensino de

Números Complexos

no Ensino Médio

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional - PROFMAT, da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.

Orientadora: Profª. Drª. Maria Deusa Ferreira da Silva

Vitória da Conquista - Bahia

2013

Adriano Santos da Rocha

Nem Complexo, nem Imaginário.

Ressignificando o ensino de

Números Complexos

no Ensino Médio

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional - PROFMAT, da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.

Aprovado em:

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Maria Deusa Ferreira Silva (Orientadora)

Departamento de Ciências Exatas - UESB

____

Prof. Dr.

____

Prof. Dr.

Vitória da Conquista - Bahia

2013

DEDICATÓRIA

A Deus, por permitir mais essa vitória. Aos meus pais, por esta comigo em todos os momentos, à minha família pela paciência e carinho nestes anos e à minha querida esposa Ceilla Mírian por compartilhar momentos de alegria e dificuldades.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Profª. Drª. Maria Deusa Ferreira da Silva por toda a ajuda e demonstração de força de vontade. Também pela sua excelente orientação, apontando os melhores caminhos, dando-me estímulos para o desenvolvimento deste trabalho e pela amizade demonstrada ao longo desses anos.

Aos professores, pelos ensinamentos, dentro e fora da sala de aula, durante a época da graduação e agora do mestrado.

Aos meus colegas de mestrado, pelo companheirismo e pelo inegável apoio quando necessário.

A minha “nova família” (Elina, Tirbutino e Danilo) pela hospedagem e pelos cuidados com os meus filhos durante esse período.

A UESB, porque sem ela, eu não poderia ter realizado este sonho de conquista.

A todos aqueles que, embora não citados nominalmente, contribuíram direta e indiretamente para a execução deste trabalho.

RESUMO

Nem Complexo, nem Imaginário.

Ressignificando o ensino de

Números Complexos

no Ensino Médio

RESUMO

Atualmente, a abordagem dos Números Complexos em muitos livros didáticos do Ensino Médio traz limitações acerca de aspectos históricos, conceitos e aplicações. Todavia, esse trabalho visa mudar a atitude dos professores ao abordar esse conteúdo nas escolas, preocupando-se com uma abordagem correta acerca do surgimento dos Números Complexos que, segundo a história, tudo indica que os mesmos surgiram na tentativa de encontrar raízes de equações de grau superior a 2, fato que é omitido por vários livros didáticos. Nas interpretações geométricas das operações de soma, subtração e multiplicação, de modo a propiciar o leitor uma visão do poder que tem os Números Complexos para resolver problemas de geometria que envolvam rotações, translações e/ou homotetias.

Palavras-chave: Números Complexos, Geometria, Homotetia, Números, Operações, Problemas, Rotação, Translação.

LISTA DE FIGURAS

Sumário

1- CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA.

1.1- MINHA EXPERIÊNCIA COMO DOCENTE NA EDUCAÇÃO BÁSICA E O INTERESSE PELO TEMA.

Ingressei no curso de Licenciatura em Matemática junto à Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB no ano de 2001. Naquele momento não tinha, de fato, certeza se essa seria a profissão que escolheria. No entanto, tinha apenas uma certeza: eu estava tendo uma oportunidade única em minha vida.

Logo no primeiro semestre percebi que poderia aprender muito sobre a matemática e, por conseguinte, atuar nessa área com bastante segurança. No tocante às oportunidades de trabalho, ainda na graduação pude vivenciar experiências com a docência e após ter concluído o curso, as oportunidades se ampliaram. Atuei em diversas instituições de ensino básico como professor de matemática e nelas, acredito, obtive bons resultados no que diz respeito ao aprendizado dos alunos. Ainda com essas experiências tive a oportunidade de trabalhar quase todos os conteúdos matemáticos previstos para o ensino médio, dentre eles, Números Complexos, e até então acreditava estar fazendo o melhor.

Todavia, no ano de 2010 encontrei, quase que por acaso, um curso disponível gratuitamente na internet chamado PAPMEM[1]. Ao assistir às aulas disponíveis no site do PAPMEM sobre os Números Complexos concluí que, em minhas próprias aulas, ao versar sobre este tema específico, me faltavam diversos elementos importantes que poderiam enriquecer a maneira de abordar este conteúdo, dentre eles, as aplicações geométricas. Ao ministrar aulas com o tema de Números Complexos seguia, fielmente, um livro texto que, segundo Lima (2001), me fornecia uma motivação histórica incorreta.

De acordo com Lima (2001), os Números Complexos surgiram na tentativa de resolver equações de grau superior a dois e não para resolver equações do segundo grau arbitrárias conforme está na maioria dos livros didáticos, em especial o que vinha

[1] Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio

usando como livro texto. Além disso, o referido livro apresentava uma definição de Números Complexos, dividindo-os em parte real e parte imaginária, apresentando as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão entre Números Complexos. No entanto, não dava um significado geométrico. Resolvia, exaustivamente, vários problemas algébricos sem nenhuma aplicação relevante, e, por fim, apresentava a forma polar e as relações entre Números Complexos e a trigonometria, neste caso, dando algumas interpretações geométricas.

Assim, com o PAPMEM, percebi que poderia explorar melhor em minhas aulas o conteúdo Números Complexos e utilizá-los para resolver problemas geométricos que envolvem rotações, translações e homotetia, bem como dar sentido geométrico as suas operações. Na realidade, as aulas do PAPMEM me mostraram que os Números Complexos eram muito mais do que problemas algébricos sem aplicações práticas. Essas aulas me mostraram, ainda, que esse conteúdo pode ser usado como uma ferramenta poderosa para resolver problemas de geometria analítica que envolva rotações, translação e/ou homotetias. Desse modo, percebi que este seria um tema interessante e relevante para o ensino de matemática da Educação Básica. Daí, a escolha pelo tema Números Complexos para a realização do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

1.2- A RELEVÂNCIA DO TEMA.

Encontramos em Carneiro (2001), o seguinte problema, denominado de “problema da ilha do tesouro”, conforme segue:

> Dois piratas decidiram enterrar um tesouro em uma ilha. Escolheram como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, mediram o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, viraram, seguindo um ângulo de 90°, à direita e caminharam o mesmo número de passos até alcançarem um ponto, onde fizeram uma marca. Voltaram à árvore, mediram o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobraram à esquerda, segundo um ângulo de 90°, e caminharam o mesmo número de passos até alcançarem um ponto, onde fizeram outra marca. Finalmente, enterraram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas. Anos mais tarde, os dois piratas voltaram à ilha e decidiram desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constataram que a árvore não existia mais. Então um dos piratas decidiu arriscar. Escolheu ao acaso um

> ponto na ilha e disse: “Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui.” Repetiu então os mesmos procedimentos de quando houvera enterrado o tesouro: contou os passos até a primeira parte, dobrou à direita e encontrou o tesouro. A pergunta é: esse pirata era sortudo ou era matemático? (CARNEIRO, 2001, p. 3-4)

Nesse artigo, ainda é mencionado que tal problema foi apresentado a professores do ensino médio, alunos de cursos de formação continuada em um curso sobre Números Complexos e que tal problema causou, entre os professores do curso, “uma comoção”. Segundo o autor, todos os professores admitiram que, caso o curso não fosse sobre Números Complexos, a nenhum deles teria ocorrido à ideia de resolver o problema usando a álgebra dos Números Complexos. E, mesmo depois da sugestão de fazê-lo usando Números Complexos, quase ninguém conseguiu. Assim, esse problema é mais uma evidência que não tem sido feito nenhuma relação entre Números Complexos e a geometria analítica no ensino básico.

É importante ressaltar que os Números Complexos se destacam em diversas situações da matemática porque trazem em sua definição, além das propriedades dos vetores, as características de serem multiplicáveis entre si. Na aplicação à geometria essa propriedade é fundamental como destaca Motta (1999)

> É importante ter em mente que os Números Complexos não são apenas vetores; eles podem ser multiplicados. Nas aplicações à Geometria, nós faremos uso extensivo desta propriedade. Números Complexos são particularmente eficientes para certos tipos de problemas, mas podem gerar dificuldades artificiais em problemas que admitem soluções mais diretas utilizando outros métodos (MOTTA, 1999, p. 30-38).

Desse modo, os Números Complexos se tornam uma alternativa para resolver diversos problemas geométricos. Em muitos casos, utilizar os recursos disponíveis na álgebra dos Números Complexos pode gerar soluções mais simples, em problemas tidos como complicados de se resolver usando Geometria Analítica. Portanto, esses artigos juntamente com as aulas do PAPMEM, me inspiraram a buscar mais informações acerca do assunto o que culminou na realização deste trabalho.

A partir deles, vi que Números Complexos é um campo fértil para a visualização de transformações geométricas e abordagens simultâneas com Geometria Analítica, desde que esses dois conteúdos costumam ser apresentados na mesma série do ensino médio e, no entanto, parecem não ter nenhuma relação. De toda a discussão até aqui feita, podemos fazer a seguinte pergunta: **"De que modo é possível melhorar o ensino de Números Complexos, tornando-o mais atraente e relevante para o aluno do Ensino Médio?"**. Buscarei responder a essa pergunta ao longo do trabalho, para tanto apresento os seguintes objetivos.

1.3- OBJETIVOS GERAL

Pretendemos, como esse trabalho, apresentar um material que auxilie os professores no ensino dos Números Complexos para alunos do Ensino Médio contemplando, seu surgimento histórico, as interpretações geométricas de suas operações e aplicações na geometria. Assim, buscaremos atender aos seguintes objetivos:

- **Específicos**
- Refletir acerca do conteúdo Números Complexos bem como sua importância na Geometria Plana
- Apontar eventuais falhas cometidas em livros didáticos do Ensino Médio acerca de aspectos conceituais e geométricos.
- Introduzir o tema Números Complexos a partir de aspectos históricos;
- Interpretar geometricamente as operações com Números Complexos;
- Utilizar o conceito de Números Complexos e Vetores para resolver problemas geométricos;

Na sequência, faremos uma discussão acerca do surgimento e desenvolvimento dos Números Complexos.

2- CAPITULO II - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1- CONSIDERAÇÕES SOBRE O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Entre os séculos XV e XVI, a álgebra obteve resultados importantes graças aos esforços de vários matemáticos para encontrarem uma fórmula fechada, ou seja, um algoritmo que fornecesse as soluções de uma equação cúbica. Naquela época, os matemáticos tinham receio de operar com números negativos, desse modo, as equações cúbicas eram desmembradas em vários tipos, conforme as apresentadas por Al-Khayam[2] que dependiam da posição do termo quadrático, do termo linear e do termo independente.

Há registros de que no século XVI, Scpione Del Ferro (1465 - 1526)[3] descobrira uma fórmula utilizando radicais para resolver um certo tipo de equação cúbica. Assim, a inovação introduzida por Del Ferro consistia em um avanço para os padrões matemáticos da época, entretanto, infelizmente, essa descoberta ficara em segredo. Por volta de 1535, Niccolo Fontana[4], matemático conhecido pela alcunha de Tartaglia, resolveu alguns tipos de equações cúbicas, em particular, as do tipo $x^3 + mx^2 - n = 0$, utilizando uma notação mais moderna para a época.

Todavia, o matemático Girolamo Cardano[5], provavelmente, teve acesso a fórmula de Tartaglia, e prometeu não divulgá-la antes daquele. No entanto, publicou-a por volta do ano de 1545. Esses fato causou grande polêmica sobre a quem deveria ser atribuída a autoria da solução.

Ao resolver a cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$, utilizando a referida fórmula, Cardano chegou ”a seguinte expressão: $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Naquela época, expressões que continham raízes de números negativos não eram consideradas números e as equações que as geravam eram denominados “irredutíveis”. Todavia, para a equação em questão, Cardano sabia que $x = 4$ era solução. Com a convicção que esse

---

[2] Roque, et al (2013), 163

[3] Roque, et al (2013), 163 a

[4] Roque, et al (2013), 163 b

[5] Roque, et al (2013), 164 c

problema tinha solução e ao mesmo tempo observando raízes quadrados negativas ao utilizarem a fórmula que resolve equações cúbicas, eram motivos para que, mesmo sem entender, os matemáticos seguissem em frente e começassem operasse com raízes quadradas de números negativas.

Segundo Roque e Pitombeira (2013),

> O advento da álgebra trouxe à tona, ao mesmo tempo, o problema dos números negativos e de suas raízes que, apesar de surgirem no cálculo ou nas soluções das equações, não possuíam um estatuto definido.[6] Acrescenta os autores que nas civilizações mais antigas, a exemplo dos babilônios, dos egípcios, dos chineses e dos hindus, não se usavam os números negativos no sentido próprio. Para essas civilizações eram admitidas apenas operações de subtração e de multiplicação que envolvessem a subtração de um número maior por um menor, como $10 - 20$, mas o resultado numérico -10 não era admitido enquanto número. Já no tocante às regras de operações entre somas ou diferenças, que exprimimos hoje como $(a + b) \times (a - b)$ ou $(a - b) \times (a - b)$, e que eles exprimiam para valores numéricos específicos, deviam ser admitidas as regras de sinais. Os autores chegaram à conclusão de que "Muitos destes povos já sabiam, portanto, intuitivamente, que *mais com mais dá mais, menos com mais dá menos* e *menos com menos dá mais".* No entanto, esse problema, bem como o dos números imaginários, só surgirá, de modo mais explícito, com o desenvolvimento da álgebra a partindo Renascimento (ROQUE e PITOMBEIRA, 2013 p. 169, 170).

Assim, independente da polêmica sobre quem primeiro apresentou uma solução para a equação de terceiro grau, Cardano, foi um dos matemáticos que mais impulsionou o desenvolvimento da álgebra no século XVI e, já admitia a existência de raízes negativas de equações, contudo às designavam como soluções *fictícias*. Entretanto, os matemáticos deste período já vinham investigando as regras de operação com números negativos, ainda que a natureza destes números não estivessem claras. Cardano, por exemplo, não admitia que *menos com menos* pudesse dar mais. Assim ressalta os autores Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira.

> É interessante observar que números negativos, quando apareciam nos cálculos, já eram chamados, na maioria dos casos, de *negativos*. No entanto, quando representavam a solução de uma equação, deviam ser chamados de

[6] Roque, et al (2013), 165 d

> *fictícios*, como em Cardano. Isto mostra que, apesar do reconhecimento da utilidade prática destes números para os cálculos, eles não eram considerados números verdadeiros, ou seja, verdadeiros objetos matemáticos. Isto porque os objetos que deviam ser admitidos na Matemática ainda se confundiam com as grandezas geométricas e, por esta razão, o sentido matemático de um número negativo ainda não podia ser plenamente admitido. Em uma tentativa de dar sentido aos números negativos, ainda no século XVI, o italiano Bombelli chegou a enunciar que: *p* 15 com *m*20 dá *m*5 porque, se tivesse 15 unidades de moeda e devesse 20, pagando as 15 continuaria devendo 5 (ROQUE, 2013 p. 169, 170)

Existem, porém, diversos livros didáticos e alguns de matemática avançada que trabalham com a ideia de que os Números Complexos surgiram com o “desejo” de se resolver equações do segundo grau arbitrárias. Essa vertente é, entretanto, do ponto de vista histórico, controversa. Uma vez que, já nessa época, as equações do segundo grau serviam para resolver problemas práticos, muitos deles geométricos como o descrito a seguir:

Seja uma circunferência de raio 1, dada pela equação $x^2 + y^2 = 1$ e a reta $2x + 3y = k$. Em relação à interseções da circunferência com a reta, três situações podem acontecer, como descrito abaixo:

Resolvendo o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3y = k \end{cases}$, temos:

$2x = k - 3y \ \rightarrow 4x^2 = (k - 3y)^2$.

Como, $4x^2 + 4y^2 = 4$, temos que $(k - 3y)^2 = 4 - 4y^2$ que é equivalente a:

$13y^2 - 6ky + k^2 - 4 = 0$

Da equação do 2° grau $13y^2 - 6ky + k^2 - 4 = 0$, sabemos que tem raízes reais quando $\Delta \geq 0$. Resolvendo essa inequação temos:

$\Delta = (-6k)^2 - 4.13.(k^2 - 4)$

$= 36k^2 - 52k^2 + 208$

$\Delta = -16k^2 + 208$

Resolvendo a equação do 2° grau, podemos concluir que:

1. Para $k = \pm\sqrt{13}$, ($\Delta = 0$) temos a reta tangente à circunferência (um único ponto em comum).

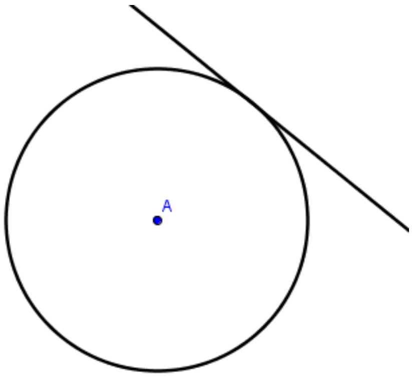


Figura 1: Reta tangente à circunferência.

2. Para a circunferência. Temos a reta secante à circunferência.

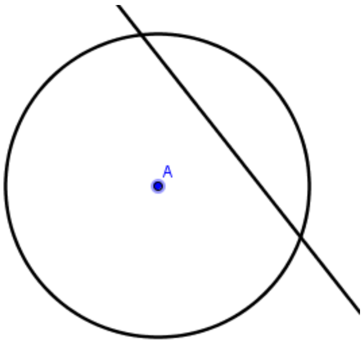


Figura 2: Reta secante à circunferência

3. Para $k < -\sqrt{13}\ ou\ k > \sqrt{13}$, ($\Delta < 0$) temos uma reta externa à circunferência nenhum ponto em comum

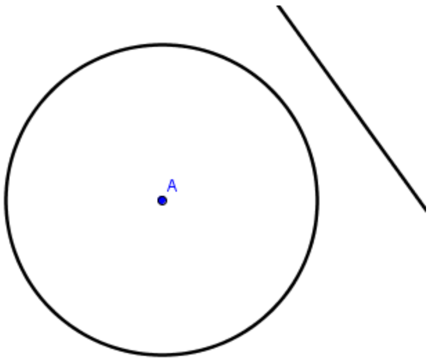


Figura 3: Reta externa à circunferência

Observando esse exemplo, podemos concluir que o problema enunciado na página anterior, não tem solução para $\Delta < 0$.

Em relação ao problema da circunferência e a reta, discutido anteriormente, concluímos então que, quando o valor de delta é negativo, ou seja $\Delta < 0$, o problema não tem solução. Desse modo, extrair a raiz quadrada de delta nesse caso, não fazia sentido e esses tipos problemas eram dado por encerrado, para $\Delta < 0$ estava evidente que a reta não tinha nenhuma interseção com a circunferência.

Entretanto, resolver equações do tipo $x^3 = px + q$, geometricamente significa encontrar os pontos de interseção entre uma função cúbica e uma função afim, o que sempre tem solução pois, existe sempre uma solução real para $x = \sqrt[3]{px + q}$. Esse fato pode ser mostrado na figura 4.

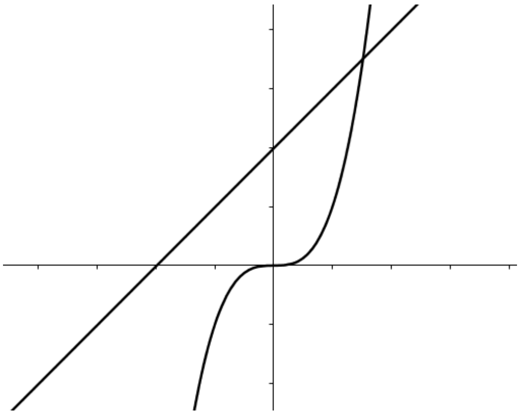


Figura 4: Gráfico $y = x^3$ e $y = x + 2$

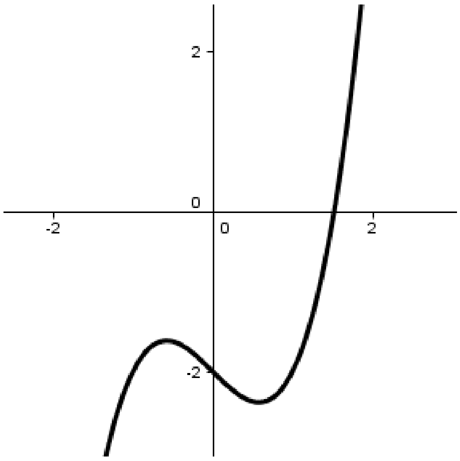


Figura 5: Gráfico da função $y = x^3 – x - 2$

Observando o gráfico acima, podemos concluir que a equação $x^3 = x + 2$ tem uma única solução real.

Um outro exemplo seria a observação do gráfico da função $y = x^3 - 3x - 1$.

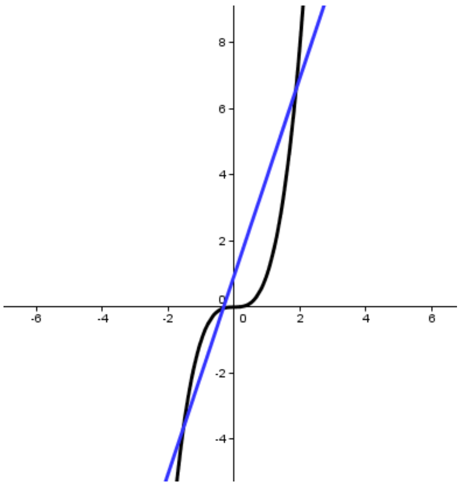


Figura 6: Gráfico das funções y = x^3 e y = 3x + 1

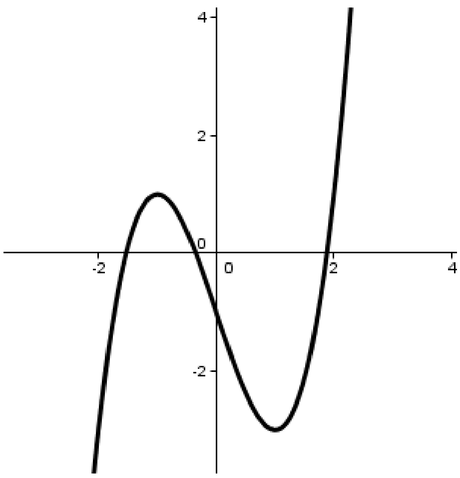


Figura 7: Gráfico da função y = x^3 - 3x - 1

Observando o gráfico da figuma 7, podemos observar que a função real $y = x^3 - 3x - 1$ toca o eixo x em três pontos, portanto, concluímos que a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$ tem três soluções reais.

Cardano, em seu livro *Ars Magna* (1545), apresenta o método para resolver a equação do terceiro grau do tipo $x^3 = px + q$.

A ideia é simples e consiste em escrever $x = u + v$.

Substituindo na equação teríamos:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0$$

Fazendo $3uv + p = 0$, teríamos $u^3 + v^3 = -q$. Nesse caso, basta resolver o sistema:

$\begin{cases} uv = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$ o que é equivalente a $\begin{cases} u^3.v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$ (I)

Recaímos em um problema conhecido que é de achar dois números conhecendo sua soma e seu produto.

Basta encontrar as raízes da equação $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$

Logo, $t = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$, $t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 + \frac{4p^3}{27}}{4}}$, $t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$

Como $t' = u^3$ e $t'' = v^3$, então $u = \sqrt[3]{t'}$ e $v = \sqrt[3]{t''}$

Desse modo temos,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Como $x = u + v$, temos que:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Exemplo: Resolva a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$

Por tentativa e erro, podemos perceber que $x = 3$ é uma solução da equação. Aplicando a fórmula de Cardano, temos:

$$p = -6 \;\; e \;\; q = -9$$

- $-\frac{q}{2} = -\frac{9}{2}$
- $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{81}{4} - \frac{216}{27} = \frac{81}{4} - 8 = \frac{81-32}{4} = \frac{49}{4}$

Assim $\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$

Desse modo, o exemplo anterior sugere que a fórmula de Cardano funciona.

Observando o gráfico dessa função temos:

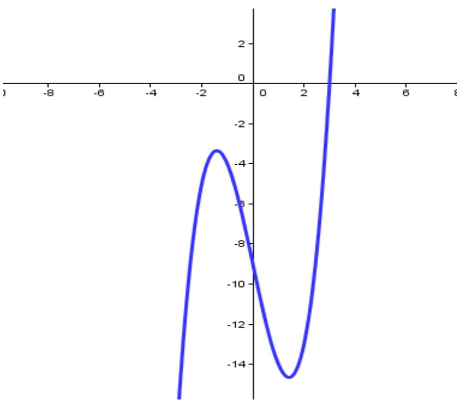


Figura 8: Gráfico da função y = x^3 - 6x - 9

Podemos ver claramente, pelo gráfico da função, que a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$ tem uma única solução real.

O problema das equações cúbicas irredutíveis foi resolvido por Bombelli[7], discípulo de Cardano que conhecia a fórmula para resolver de equações cúbicas. Em seu livro *L'Algebra,* Bombelli resolveu a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, utilizando a fórmula divulgada Cardano, ignorando os radicais negativos como mostra os procedimentos abaixo.

$$p = -15 \ e \ q = -4$$

- $-\frac{q}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$
- $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{16}{4} - \frac{3375}{27} = 4 - 125 = -121$

Desse modo temos:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

.

Tudo indica que essa foi a primeira vez que surge uma equação cúbica cuja solução apresenta raiz quadrada de números negativos, mas que, efetivamente, tem uma solução inteira. Bombelli sabia que $x = 4$ era uma solução dessa equação. Podemos observar esse fato pelo gráfico abaixo.

---

[7] Rafael Bombelli (Itália:1526 – 1572) - matemático, engenheiro hidráulico italiano.

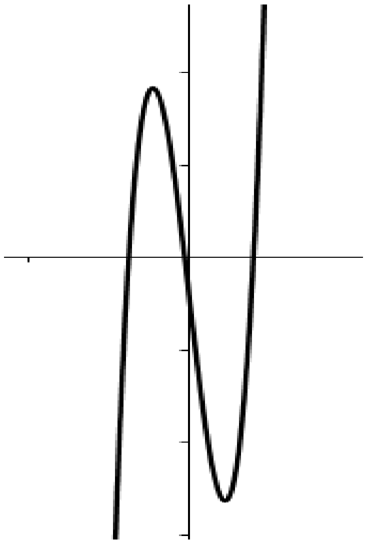


Figura 9: Gráfico da função y = x^3 – 15x - 4

Apesar de considerar as raízes quadradas de números negativos como inúteis e sofisticadas, Bombelli começou a operar com elas, aplicando as regras usuais as Álgebra.

Fazendo $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$, temos

$u = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$ e $v = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$

Bombelli observou que $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 3.2^2.\left(\sqrt{-1}\right) + 3.2.\left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3$, considerando $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ e $\left(\sqrt{-1}\right)^3 = \left(\sqrt{-1}\right)^2.\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$, teríamos

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\left(\sqrt{-1}\right) - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-11}$$

Analogamente

$$\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 8 - 12\left(\sqrt{-1}\right) - 6 + \sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-11}$$

Assim temos:

$$u = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$$

$$v = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Desse modo $x = u + v = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$

Por muitas razões, o conceito de número teve de ser estendido além do conjunto de números reais pela introdução dos chamados conjunto dos Números Complexos.[8] De acordo com os argumentos que estamos utilizando nesse presente texto. É notório que no desenvolvimento histórico da matemática, em particular, desenvolvimento histórico dos Números Complexos, todas as extensões e invenções não foram consequência de esforço individual, pelo contrário, os resultados e inovações surgem de forma gradual, sendo acrescentados novos resultados, na maioria das vezes, por pessoas distintas situadas em diferentes locais, onde não seria justo, uma única pessoa receber o crédito maior por tais inovações.

> Foi a necessidade de maior liberdade em cálculos formais que gerou a utilização de números negativos e racionais. Provavelmente em meados do século XIX os matemáticos compreenderam que a base lógica para ampliar e operar em extensões de conjuntos numéricos pré-estabelecidos, é cria-las, contendo definições que devem ser fórmula das de tal modo que as regras e propriedades importantes no conjunto original sejam preservadas em um domínio maior. "É da maior importância que estas extensões possam algumas vezes estar vinculadas a objetos "reais" e, desse forma, prover instrumentos para novas aplicações porém, isso pode oferecer apenas uma motivação e não uma prova lógica da validade da extensão" (COURANT, 2000, p.101, 102)

2.2- ALGUMAS APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Uma importante consequência do desenvolvimento dos Números Complexos é o famoso Teorema Fundamental da Álgebra afirmando que qualquer polinômio $P(z)$ com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ tem alguma raiz complexa.

> O suíço L. Euler (1707-1783) em 1742 enunciou que um polinômio com coeficientes reais pode ser fatorado como um produto de fatores lineares e fatores quadráticos, mas não conseguiu uma prova completa deste fato. Porém, Euler demonstrou tal teorema para polinômios reais de grau menor ou igual a seis. Euler também enunciou que um polinômio com coeficientes reais que tem "raízes imaginárias" tem então uma raiz da forma $a + b\sqrt{-1}$,

[8] COURANT, et al (2000), 101

> com a e b números reais. Ainda, Euler já utilizava extensivamente Números Complexos e a notação $i = \sqrt{-1}$ (OLIVEIRA, 2011, p. 5)

Ao passo que a humanidade se desenvolve, os Números Complexos ganham cada vez mais o seu espaço no desenvolvimento da matemática, em especial no campo da Álgebra. Entretanto, a aplicabilidade desse conjunto vai além da Álgebra e ultrapassa das barreiras da matemática, sendo útil em diferentes áreas do conhecimento como, Física Moderna, Engenharia, dentre outras como afirma LIMA em seu livro Meu Professor de Matemática e outras histórias.

> Não se julgue, entretanto, que a importância dos Números Complexos resulta apenas do Teorema Fundamental da Álgebra. Eles se fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da Matemática como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, etc. A Teoria das Funções de Variável Complexa é uma área nobre, de grande tradição matemática e, ao mesmo tempo, com notável vitalidade, refletida na intensa atividade de pesquisa que se desenvolve nos dias atuais (LIMA, 1991, p. 31).

Os Números Complexos aparecem como ferramenta para resolver diversos problemas ligados às engenharias, como mostra Ferreira em seu artigo, Números Complexos e seu uso na engenharia estrutural.

> Em engenharia, Números Complexos são de extrema importância em disciplinas de circuitos e instalações elétricas e, particularmente para a engenharia civil, em vibrações mecânicas, quando se pretende fazer a análise no domínio da frequência (FERREIRA, 2009, p. 61).

O presente artigo mostra o quanto os Números Complexos são úteis em diversos problemas que são naturais nas engenharias como, a equação de Euler e seu uso na solução, no domínio da frequência, da equação dinâmica de um sistema massa-mola submetido a uma carga temporal harmônica, a transformada de Fourier em suas formas contínua e discreta e sua aplicação na solução da equação dinâmica de um sistema submetido a uma carga temporal genérica, na relação deslocamento-carga, em função da frequência angular e na resposta temporal de uma estrutura típica a uma carga que simula uma rajada de vento.

> O Número Complexo é abordado extensivamente no curso de engenharia elétrica ao longo dos seus cinco anos, deixando os egressos com sólido

> conhecimento dos conceitos envolvidos e de sua aplicação na engenharia. Por outro lado, nos cursos de engenharia mecânica e civil o Número Complexo é apresentado rapidamente no curso de circuitos elétricos por um professor do curso de engenharia elétrica, portanto não familiarizado com aplicações práticas em estruturas. Para os estudantes desses cursos os conceitos fundamentais e definições de Números Complexos apresentam-se como algo extremamente difícil (FERREIRA, 2009, p. 55).

Contudo, os Números Complexos vem perdendo cada vez mais espaço na educação básica, sendo tratado, de certa forma, como uma extensão dos números reais.

3- CAPITULO III: METODOLOGIA

3.1- FUNDAMENTOS PARA A ANÁLISE DE LIVROS DE MATEMÁTICA DO ENSINO NÉDIO.

O matemático Elon Lages Lima liderou um belíssimo trabalho intitulado Análise de Textos – Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio que consistia em uma análise detalhada de 12 coleções de livros que erma adotados em Escolas públicas em todo o Brasil.

Ao analisar esse trabalho, chegamos à conclusão que os livros de matemática adotados em escolas públicas no Brasil traziam, em sua maioria, falha em definições, redações de exercícios, demonstrações, dentre outras.

Nesse trabalho, Elon define aspectos que devem ser levados em conta ao analisar livros didáticos de matemática.

> A análise dos livros-textos para o ensino da Matemática na Escola Média deve levar em conta, acima de tudo, sua adequação ás três competências básicas desse ensino, a saber: Conceituação, Manipulação e Aplicação. Em seguida, deve-se indagar se o livro examinado é organizado de modo a permitir ao seu leitor (professor ou aluno) o acesso aos, a familiarização com, e – posteriormente – a utilização efetiva dos conhecimentos adquiridos (LIMA, p.1, 2001)

Desse modo, Elon define a conceituação, manipulação e aplicação como segue abaixo:

> Compreende a formulação de definições, o enunciado de proposições, o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos, bem como a interpretação e reformulação dos mesmos sob diferentes aspectos. E importante destacar que a conceituação precisa é indispensável para o êxito das aplicações. De caráter essencialmente (não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado da Matemática assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a Música. A habilidade manuseio de equações, fórmulas, operações e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, sem perder tempo e energia com detalhes. O emprego de noções e teorias da Matemática em situações que

> vão de problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis provenientes de outras áreas, quer científicas, quer tecnológicas. Ela é a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e tão necessário (LIMA, p.1, 2001).

Coloca ainda que, deve-se ter em mente que o livro didático é, na maioria dos casos, a única fonte de referência com que conta o professor para organizar suas aulas, e até mesmo para firmar seus conhecimentos (LIMA, 2001, p. 1-3). Desse modo, um livro texto para o Ensino Médio não deve ser apenas acessível e atraente para o aluno, ele precisa ser também uma base confiável para o professor.

3.2- OS NÚMEROS COMPLEXOS NOS LIVROS DIDÁTICOS.

Resumiremos brevemente as principais falhas apontadas na obra "Exames de Textos" referente ao tema Números Complexo.

De modo geral, nos livros analisados, faltam:

1- Figuras para ilustrar que a soma entre dois Números Complexos se faz geometricamente pela regra do paralelogramo;
2- Que o conjugado de um Número Complexo é o seu simétrico em relação ao eixo real;
3- Que a distância entre dois Números Complexos é o módulo da diferença entre eles
4- Figuras para ilustrar a multiplicação entre Números Complexos.

Por muitas vezes uma interpretação geométrica poderia tornar uma explicação ou um problema mais simples como, por exemplo, interpretar módulo como distância. Em muitos livros analisados é dito erroneamente que foram as equações do segundo grau deram origem aos Números Complexos.

De todas as falhas apontadas pelos autores, a falta de intepretação geométrica das operações entre Números Complexos é a que mais causa prejuízos para os estudantes, embora os autores do livro Análise de Texto apontem, nas obras enumeras analisadas, outras falhas como frases incorretas e definições inadequadas.

3.3- EVANTAMENTOS DO CONTEÚDO NÚMEROS COMPLEXOS EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS ADOTADOS EM ESCOLAS PÚBLICAS BRASILEIRAS.

Podemos perceber que é de fundamental importância à apresentação geométrica dos Números Complexos juntamente com a apresentação Algébrica. O enfoque geométrico traz para o aluno do ensino médio um poderoso ferramental para resolver diversos problemas do cotidiano que tenham aspectos geométricos. É notório que a forma que é apresentado o tema Números Complexos nos livros didáticos, muitas vezes, não levam as estudantes a reconhecer os Números Complexos como uma opção para resolver problemas geométricos, conforme Carneiro (2004):

> Poderia ser dito que toda esta abordagem geométrica já está incorporada ao ensino tradicional, pois nada mais é do que a "forma trigonométrica ou polar" dos Números Complexos. Mas não é o que se vê por aí. A verdade é que o ensino dos Números Complexos permanece ainda excessivamente preso à sua origem histórica e até hoje ainda não se beneficiou como poderia e deveria da revolução iniciada há 200 anos por Wessel, Argand e Gauss. O enfoque algébrico permite começar logo a operar com Números Complexos sem dificuldade, mas a experiência tem mostrado que quando se perde a chance de apresentar os Números Complexos imediatamente como entes geométricos, em geral esta oportunidade não se recupera, mesmo quando, mais tarde, aparece a "forma trigonométrica". Duas consequências nocivas advêm daí: primeiro o iniciante permanece com uma visão demasiado formal e algebrizante, não se beneficiando da riqueza da visualização e não emprestando um "significado" aos Números Complexos. (CARNEIRO, 2004, p. 8).

Desse modo o tema "Números Complexos" vem sendo apresentado em alguns livros didáticos adotados, principalmente em escolas públicas no Estado da Bahia, de uma forma, no mínimo, questionável. A seguir analisaremos a apresentação de dois diferentes autores.

3.4- LIVRO 1: MANUEL PAIVA – MATEMÁTICA, 1ª EDIÇÃO, VOLUME 3, 2009

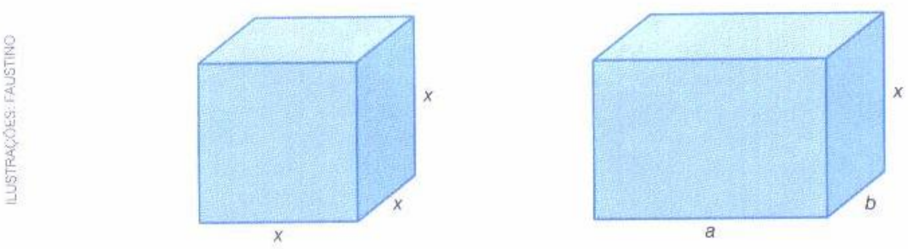
O primeiro deles é o autor Manoel Paiva que trabalha o tema "Números Complexos" da seguinte maneira: No tópico "A escalada dos números", o autor introduz o tema apresentando um problema geométrico que converge para uma equação do 3º grau, apresenta a resolução da equação e enfatiza que essa equação teria sido a principal motivação para o surgimento dos números complexos. Em seguida, o autor faz um breve comentário histórico acerca dos motivos que levaram matemáticos trabalharem com raízes de número negativo. Todavia, conforme discutimos anteriormente, seria conveniente uma nota histórica mais aprofundada para justificar o surgimento da fórmula que resolve as equações do 3º bem como, a demonstração da mesma.

A descoberta de um novo número

O problema a seguir mostrará a insuficiência dos números reais diante de certas situações concretas ou abstratas.

Um engenheiro projetou duas caixas-d'água de mesma altura: uma em forma de cubo e a outra em forma de um paralelepípedo reto-retângulo com 6 m² de área da base. O volume da caixa cúbica deve ter 4 m³ a menos que o volume da outra caixa. Qual deve ser a medida, em metro, da aresta da caixa cúbica?

Indicando por x a medida da aresta da caixa cúbica, temos:



$ab = 6$

Assim, o valor de x é raiz da equação $x^3 = 6x - 4$, que é equivalente a $x^3 - 6x + 4 = 0$.

Essa equação pode ser resolvida pelo método proposto por volta de 1535 pelo matemático italiano Niccolo Fontana, conhecido como Tartaglia (cerca de 1500-1557). Tal método consiste em substituir x por $u - v$, de modo que o produto uv seja igual à terça parte do coeficiente de x, ou seja, $uv = -\frac{6}{3} = -2$. Assim:

$$\begin{cases} (u-v)^3 - 6(u-v) + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases}, \text{ que é equivalente a } \begin{cases} u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 - 6u + 6v + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases}$$

Fazendo $uv = -2$ na primeira equação, obtemos:

$$\begin{cases} u^3 - v^3 + 4 = 0 & \text{(I)} \\ v = -\dfrac{2}{u} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), chegamos à equação $u^6 + 4u^3 + 8 = 0$, cuja resolução pode ser feita através da mudança de variável $u^3 = t$, com a qual obtemos a equação do 2º grau:

$$t^2 + 4t + 8 = 0$$

Figura 10: Livro Manoel Paiva. Pg: 124

Historicamente, Gerônimo Cardano (1501-1576), médico e matemático italiano, após ter aprendido com Tartaglia o método descrito na página anterior, foi o primeiro a admitir a existência de números não reais, durante a resolução de uma equação cúbica, como essa que discutimos. Após tal descoberta, um matemático contemporâneo de Cardano, Raphael Bombelli (cerca de 1526-1573), teve o que considerou uma "ideia louca": começou a operar com os números não reais estudados por Cardano. Bombelli admitiu, por exemplo, a identidade:

$$2 + \sqrt{-1} + 3 - \sqrt{-1} = 5,$$

dando, assim, subsídios para o início da construção de um novo conjunto de números: o **conjunto dos números complexos**.

Figura 11: Livro Manoel Paiva. Pg:125

Após essa breve introdução o autor apresenta a definição dos Números Complexos como sendo um número da forma $a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária e que $i^2 = -1$. Define também a igualdade entre Números Complexos e o seu conjugado. Essa é, sem dúvidas, uma maneira eficiente para introduzir os Números Complexos para alunos de Ensino Médio porém, caberia nesse tópico inserir imediatamente a representação geométrica dos Números Complexos, uma vez que, a definição de igualdade entre Números Complexos é análoga à definição de igualdade entre pares ordenados. Esse fato levaria os alunos a compreenderem a semelhança entre um Complexos e os Pares Ordenados e consequentemente compreender que esses números são vetores no plano e, consequentemente, podem ser representados no plano cartesiano. Outro ponto que o autor aborda nesse tópico é a definição de conjugado de um Número Complexo, contudo, novamente, falta uma figura para ilustrar que o conjugado de um Número Complexo z é a reflexão do ponto representado por $\bar{z}$ em relação ao eixo das abscissas.

2 Número complexo

A insuficiência dos números reais se revela na radiciação: não existem, em $\mathbb{R}$, raízes quadradas, quartas, sextas, ... de números negativos. Para que a radiciação seja sempre possível, os matemáticos ampliaram o conceito de número, definindo o número **i**, não real, que chamaram de **unidade imaginária** e que satisfaz a seguinte condição:

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

A partir da unidade imaginária, define-se:

Número complexo é todo número da forma $a + bi$, em que a e b são números reais e i é a unidade imaginária.

Figura 12: Livro Manoel Paiva. Pg:125

Igualdade entre números complexos

Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, são **iguais** se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais.

Ou seja:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Figura 13: Livro Manoel Paiva. Pg:126

Números complexos conjugados

O número complexo $a + bi$ é o **conjugado** do número complexo $c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são opostas.

Ou seja:

$$a + bi \text{ é conjugado de } c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -d \end{cases}$$

Figura 14: Livro Manoel Paiva. Pg:126

Em seguida, no tópico "Operações elementares com Números Complexos", o autor define soma, subtração, multiplicação e divisão entre Números Complexos de forma algébrica. Essa apresentação seria bem mais produtiva se o autor fornecesse figuras que ilustrasse geometricamente essas propriedades.

3 Operações elementares com números complexos

Antes de apresentar as operações elementares com números complexos, é importante ressaltar que elas foram definidas como extensões das operações em $\mathbb{R}$, de modo que fossem conservadas as propriedades dessas operações em $\mathbb{R}$.

Para a adição foram conservadas as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento oposto, de modo que:

- o elemento neutro da adição é o número zero, ou seja, $0 + 0i$;
- o oposto de um número complexo qualquer $z = a + bi$, com a e b reais, é o número complexo $-z = -a - bi$.

Para a multiplicação foram conservadas as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento inverso, de modo que:

- o elemento neutro da multiplicação é o número 1, ou seja, $1 + 0i$;
- o inverso de um número complexo não nulo $z = a + bi$ é o número complexo indicado por z^{-1} tal que $z^{-1} = \dfrac{1}{a + bi}$.

Foram conservadas também a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Esses princípios resultaram nas seguintes definições:

Para quaisquer números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, em que a, b, c e d são números reais, temos:

- $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $z_1 : z_2 = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}$ (com $z_2 \neq 0$)

Nota:
Observe como as propriedades distributiva, associativa e comutativa, que se estendem para a adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, permitem a definição de multiplicação de números complexos como foi apresentada anteriormente:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci + bd(-1)$$
$$\therefore\ z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Para agilizar as operações elementares com números complexos, aplicamos as propriedades operatórias — associativa, comutativa, elemento neutro, elemento oposto, elemento inverso e distributiva — em vez das definições, conforme mostram os exemplos a seguir.

Figura 15: Livro Manoel Paiva. Pg: 128

Quanto ao tópico “Potência de Números Complexos com expoentes inteiros”, o autor introduz a noção de potências do Número Complexo i de forma algébrica. Seria interessante ressaltar que as potência de i pertencentes ao conjunto $\{1, i, -1, -i\}$ e podem ser interpretadas como as interseções do círculo unitário com o plano Complexo, como podemos perceber na figura a seguir.

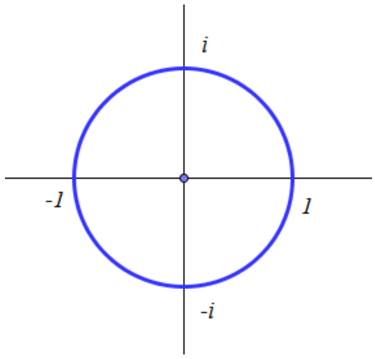


Figura 16: Círculo Complexo

Ou seja,

$i^0 = 1 \Longrightarrow$ ponto (1,0)

$i^1 = i \Longrightarrow$ o ponto (0,1)

$i^2 = -1 \Longrightarrow$ ponto (-1,0)

$i^3 = -i \Longrightarrow$ ponto (0,-1)

$i^4 = (i^2)(i^2) = (-1)(-1) = 1 \Longrightarrow$ponto (1,0)

$i^5 = (i^3)(i^2) = (-i)(-1) = i \Longrightarrow$ ponto (0,1)

$i^6 = (i^4)(i^2) = 1.(-1) = -1 \Longrightarrow$ ponto (-1,0)

$\vdots$

A nosso ver, essa abordagem traria uma compreensão, para o aluno, de um importante resultado, que é o seguinte: ao multiplicar um Número Complexo por i, estamos realizando uma rotação de 90° em torno da origem do plano Complexo no sentido anti-horário.

▶ Potências de i

O cálculo das potências de números complexos com expoentes inteiros envolve, particularmente, potências de i. Para agilizar esse tipo de cálculo, é conveniente conhecer o teorema a seguir.

Existem quatro, e somente quatro, valores para potências de i com expoentes inteiros. São eles:

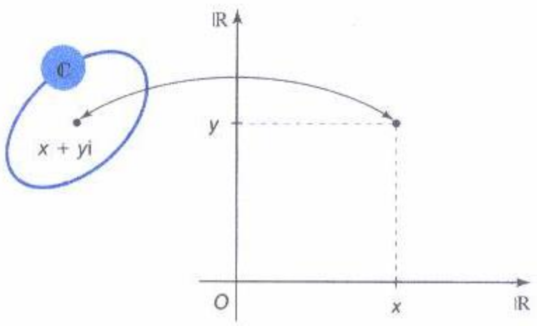
- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$

Figura 17: Livro Manoel Paiva. Pg: 131

Já no tópico “Representação geométrica do conjunto dos Números Complexos” é introduzida a representação geométrica de um Número Complexo no plano Complexo ou também conhecido como plano Argand-Gauss. Nesse ponto, pode-se observar a ausência de figuras enfatizando a representação geométrica dos Números Complexos, todavia acreditamos que seria mais produtivo para os alunos uma abordagem algébrica associada a uma abordagem geométrica, explorando essas duas ferramentas desde a definição dos Números Complexos.

▶ Plano complexo ou plano de Argand-Gauss

A cada número complexo $z = x + yi$, em que x e y são números reais, vamos associar o ponto do plano cartesiano determinado pelo par ordenado de números reais (x, y). Essa associação é biunívoca, isto é, cada número complexo está associado a um único ponto do plano cartesiano, e cada ponto desse plano está associado a um único número complexo.



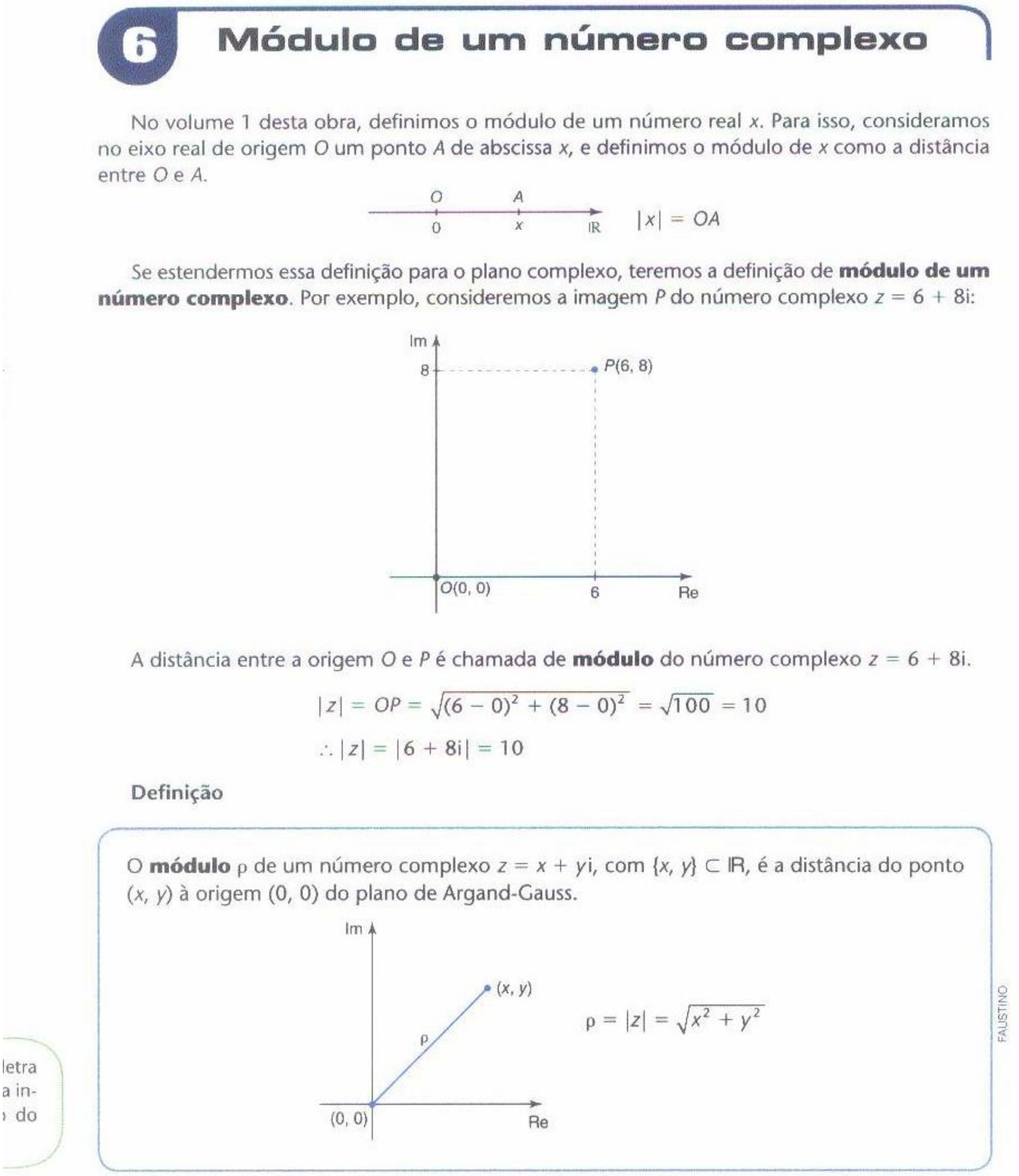
Por meio dessa associação, representa-se geometricamente o conjunto ℂ pelo plano, que é chamado de **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**, em homenagem aos seus criadores: o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e o guarda-livros suíço Jean Robert Argand (1768-1822).

No plano de Argand-Gauss o eixo das abscissas é indicado por **Re** e é chamado de **eixo real**, e o eixo das ordenadas é indicado por **Im** e é chamado de **eixo imaginário**. Cada ponto $P(x, y)$ desse plano é a **imagem** ou **afixo** do número complexo $x + yi$.

Figura 18: Livro Manoel Paiva. Pg: 133

No tópico “Módulo de um Número Complexo”, a geometria começa a aparecer de forma contida. É introduzido o conceito de Módulo de forma algébrica e em seguida é apresentada uma figura que interpreta esse resultado de forma geométrica. Nesse momento seria importante a introdução do conceito de distância entre dois Números Complexos. É importante ressaltar que em nenhum momento o autor introduz a definição de distância deixando de fora da teoria um importante resultado que permite resolver inúmeros problemas interessantes.

A distância entre dois Números Complexos pode ser definida da seguinte forma: Sejam z_1 e z_2 números complexos. Dizemos que a distância entre z_1 e z_2 é igual a $|z_1 - z_2|$.



6 Módulo de um número complexo

No volume 1 desta obra, definimos o módulo de um número real x. Para isso, consideramos no eixo real de origem O um ponto A de abscissa x, e definimos o módulo de x como a distância entre O e A.

$$|x| = OA$$

Se estendermos essa definição para o plano complexo, teremos a definição de **módulo de um número complexo**. Por exemplo, consideremos a imagem P do número complexo $z = 6 + 8i$:

A distância entre a origem O e P é chamada de **módulo** do número complexo $z = 6 + 8i$.

$$|z| = OP = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\therefore |z| = |6 + 8i| = 10$$

Definição

O **módulo** ρ de um número complexo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, é a distância do ponto (x, y) à origem $(0, 0)$ do plano de Argand-Gauss.

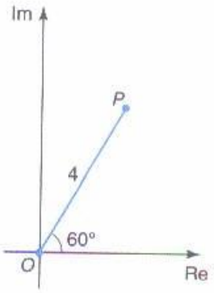
$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Figura 19: Livro Manoel Paiva. Pg: 134

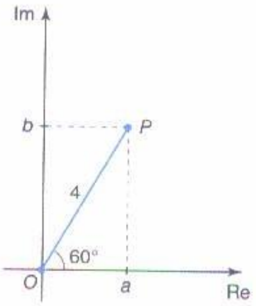
No tópico "Coordenadas polares no plano Complexo", é apresentado à definição de um Número Complexo em sua notação polar. Nesse ponto são exploradas as relações entre a forma polar e algébrica e como podemos chegar a uma a parti da outra. Os exercícios abordados nesse tópico, em sua maioria, exploram as transformações de um complexo para as citadas representações.

7 Coordenadas polares no plano complexo

A imagem de um número complexo no plano de Argand-Gauss pode ser determinada também por meio de uma distância e de um ângulo. Por exemplo, existe um único número complexo z cuja imagem P dista 4 unidades da origem O do sistema de modo que a semirreta $\overrightarrow{OP}$ forma com o semieixo positivo Ox um ângulo de 60°, medido no sentido anti-horário, a partir desse semieixo.



As medidas 4 e 60° são chamadas de **coordenadas polares** da imagem do número complexo z. Com essas coordenadas podemos determinar a parte real a e a parte imaginária b do número z. Observe:



$$\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{a}{4} \\ \text{sen } 60° = \dfrac{b}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{b}{4} \end{cases}$$

$$\therefore a = 2 \text{ e } b = 2\sqrt{3}$$

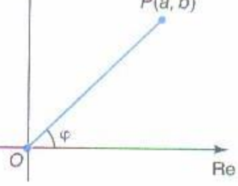
Logo, a forma algébrica do número z é:

$$z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$$

Reciprocamente, a partir da forma algébrica podemos determinar as coordenadas polares de um número complexo não nulo, conforme veremos a seguir.

Argumento de um número complexo

Dado um número complexo não nulo $z = a + bi$, com a e b reais, consideremos no plano complexo os pontos $O(0, 0)$, $P(a, b)$ e o ângulo de medida φ cujos lados são o semieixo positivo Ox e a semirreta $\overrightarrow{OP}$, conforme a figura abaixo:



A medida φ, obtida no sentido anti-horário a partir do semieixo positivo Ox, com $0 \leq \varphi < 2\pi$ ou $0° \leq \varphi < 360°$, é chamada de **argumento** do número complexo z.

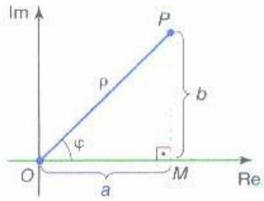
Figura 20: Livro Manoel Paiva. Pg:137

Cálculo do argumento de um número complexo

No exercício resolvido anterior, vimos que se a imagem do número complexo não nulo pertence a um dos eixos coordenados, então é muito simples a determinação do argumento. Vejamos agora como se calcula o argumento quando a imagem do número complexo não pertence a nenhum dos eixos coordenados.

Demonstraremos apenas para $a > 0$ e $b > 0$, porém, o resultado obtido vale também para os demais casos ($a < 0$ e $b > 0$, $a < 0$ e $b < 0$, $a > 0$ e $b < 0$).

Seja $z = a + bi$, com $a > 0$ e $b > 0$. A imagem $P(a, b)$ de z é um ponto do 1º quadrante:



A distância $OP = \rho$ é o módulo de z, isto é:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{(I)}$$

No triângulo OMP, temos: $\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} & \text{(II)} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} & \text{(III)} \end{cases}$

As igualdades (I), (II) e (III) determinam o argumento de z.

Nota:

As igualdades (I), (II) e (III), obtidas nos quatro casos, são válidas também quando a imagem $P(a, b)$ do número complexo não nulo $z = a + bi$ pertence a um dos eixos coordenados.

Figura 21: Livro Manoel Paiva. Pg:138

Os quatro casos e a nota acima nos permitem enunciar:

Se $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é um número complexo não nulo, de módulo ρ e argumento φ, então:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$$

Figura 22: Livro Manoel Paiva. Pg:139

No tópico “Operações com Números Complexos na forma trigonométrica”, o autor introduz a multiplicação, divisão e a potenciação com Números Complexos em sua forma polar. Novamente a interpretação geométrica é pouco explorada, pois, com a introdução da forma polar, ficam mais visíveis as propriedades geométricas dos

Números Complexos como, por exemplo, a propriedade de rotação e homotetia da multiplicação. Um outro fato relevante é que o autor não introduz a radiciação de um Número Complexo, que é uma operação bem definida e que traz propriedades interessantes para ser aplicadas no Ensino Médio como enfatiza Elon em seu livro Analise de Textos:

> O capítulo 17 aborda a representação geométrica e a forma trigonométrica dos Números Complexos. Embora os conceitos sejam apresentados corretamente, há uma série de omissões: as interpretações geométricas da adição e da multiplicação entre Números Complexos não são apresentadas, o que impede que parte do potencial de utilização de Números Complexos para facilitar a resolução de problemas de geometria fique inexplorada. São vistos alguns exemplos explorando o fato de que $|z - a|$ é a distância entre os Números Complexos z e a, mas não se emprega, por exemplo, o fato de que multiplicar um Número Complexo z por $(\cos(\alpha) + isen(\alpha))$ consiste em submetê-lo a uma rotação de ângulo α em torno da origem (Elon, 2001, p.34).

8 Operação com números complexos na forma trigonométrica

▶ Multiplicação

Sejam os números complexos $z = 3(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ e $w = \sqrt{2}\ (\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$. Efetuando a multiplicação $z \cdot w$, temos:

$$z \cdot w = 3(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) \cdot \sqrt{2}\ (\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) =$$
$$= 3\sqrt{2}\ (\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$z \cdot w = 3\sqrt{2}\ (\cos 30° \cos 240° + i \cos 30° \operatorname{sen} 240° + i \operatorname{sen} 30° \cos 240° + i^2 \operatorname{sen} 240° \operatorname{sen} 30°) =$$
$$= 3\sqrt{2}\ (\cos 30° \cos 240° + i \cos 30° \operatorname{sen} 240° + i \operatorname{sen} 30° \cos 240° - \operatorname{sen} 240° \operatorname{sen} 30°) =$$
$$= 3\sqrt{2}\ [(\cos 30° \cos 240° - \operatorname{sen} 240° \operatorname{sen} 30°) + i(\cos 30° \operatorname{sen} 240° + \operatorname{sen} 30° \cos 240°)] =$$
$$= 3\sqrt{2}\ [\cos (30° + 240°) - i \operatorname{sen} (30° + 240°)]$$

Generalizando esse resultado temos:

> Se $z = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ e $w = \lambda(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ são as formas trigonométricas dos números complexos z e w, então:
>
> $$z \cdot w = \rho\lambda[\cos (\alpha + \beta) + i \operatorname{sen} (\alpha + \beta)]$$

Figura 23: Livro Manoel Paiva Pg: 141

▶ Divisão

Do mesmo modo que fizemos para a multiplicação, podemos generalizar o resultado para a divisão de números complexos na forma trigonométrica.

Assim:

> Se $z = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ e $w = \lambda(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ são as formas trigonométricas dos complexos z e w, com $w \neq 0$, então:
>
> $$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\lambda}[\cos (\alpha - \beta) + i \operatorname{sen} (\alpha - \beta)]$$

Demonstração

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{\rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot \lambda(\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta)}{|w|^2} =$$
$$= \frac{\rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot \lambda\left[\cos(-\beta) + i \operatorname{sen}(-\beta)\right]}{\lambda^2}$$
$$\therefore \frac{z}{w} = \frac{\rho\lambda}{\lambda^2}\left[\cos (\alpha - \beta) + i \operatorname{sen} (\alpha - \beta)\right] = \frac{\rho}{\lambda}\left[\cos (\alpha - \beta) + i \operatorname{sen} (\alpha - \beta)\right]$$

Figura 24: Livro Manoel Paiva. Pg: 142

O autor termina sua explanação sobre os Números Complexos estudando a fórmula de De Moiver, enfatizando adequadamente a interpretação geométrica apontando, que as raízes de ordem n de um Número Complexo formam os vértices de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de centro na origem entretanto, uma figura (que não tem) para indicar esse fato seria importante.

▶ **Potências de números complexos na forma trigonométrica**

Sendo $z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ a forma trigonométrica do número complexo z, temos:

- $z^0 = 1 = 1(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0) = 1^0(\cos \mathbf{0}\varphi + i\,\text{sen}\,\mathbf{0}\varphi)$
- $z^1 = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) = \rho^1(\cos \mathbf{1}\varphi + i\,\text{sen}\,\mathbf{1}\varphi)$
- $z^2 = \rho^2(\cos \mathbf{2}\varphi + i\,\text{sen}\,\mathbf{2}\varphi)$
- $z^3 = \rho^3(\cos \mathbf{3}\varphi + i\,\text{sen}\,\mathbf{3}\varphi)$

Observe que cada resultado apresenta o módulo ρ elevado ao expoente de z, e o argumento φ multiplicado por esse expoente. Essas constatações podem ser generalizadas por meio do teorema a seguir, demonstrado pelo matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754).

Teorema de De Moivre

Se $z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ é a forma trigonométrica do número complexo não nulo z e n é um número inteiro qualquer, então:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\,\text{sen}\,n\varphi)$$

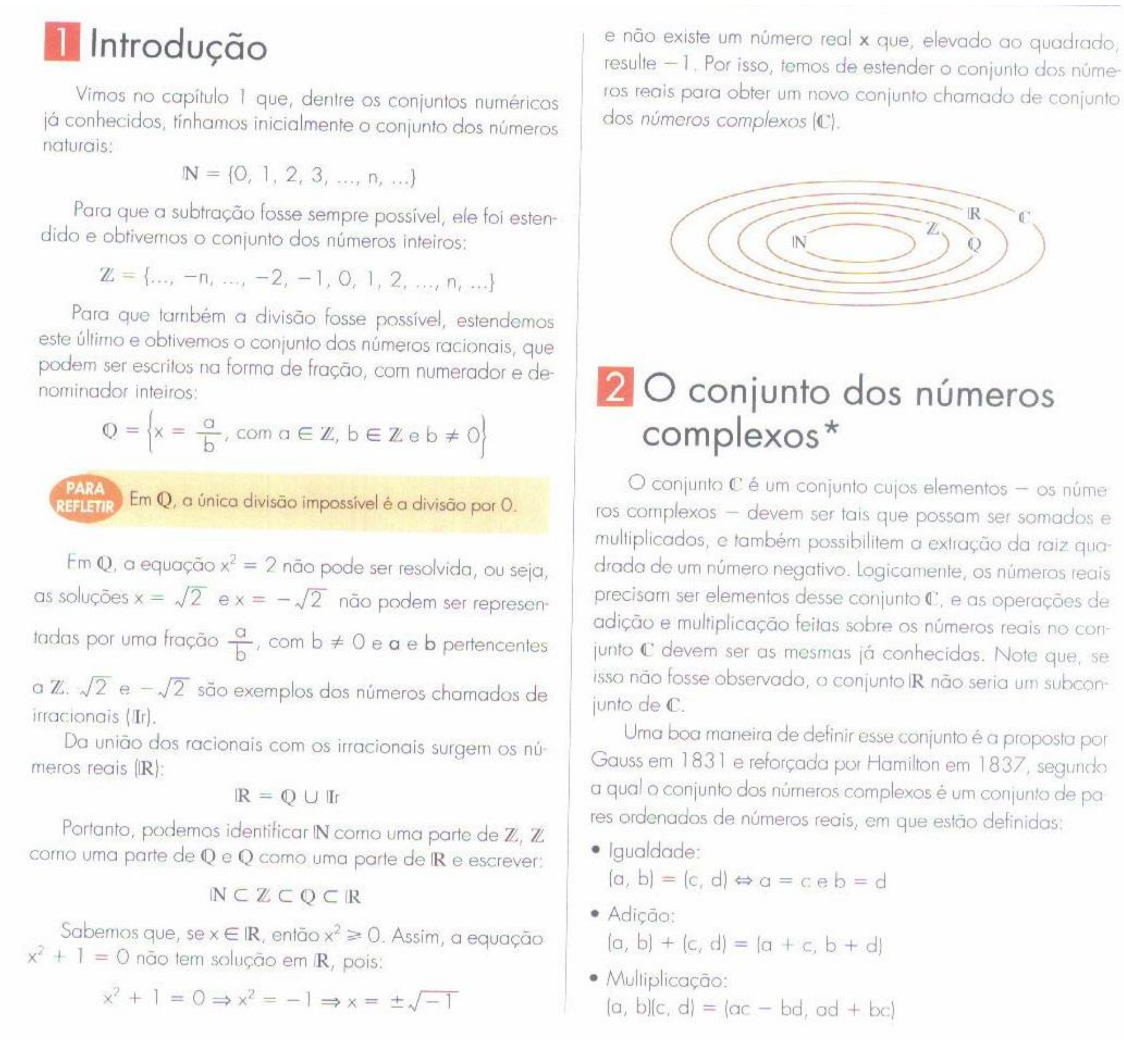
Figura 25: Livro Manoel Paiva. Pg: 143

3.5- LIVRO 2: LUIZ ROBERTO DANTE – MATEMÁTICA 1ª EDIÇÃO, VOLUME ÚNICO, 2008

Outro autor, que foi analisado na confecção desse trabalho, foi o Luiz Roberto Dante. O autor distribui o tema ao longo do seu livro da forma que iremos explanar.

No tópico “Introdução" o autor faz um passeio entre os números naturais, inteiros, racionais e reais. Ele introduz a equação, ou seja, ele diz que o número $\sqrt{-1}$ não é real, e imediatamente diz que precisa introduzir um novo conjunto chamado Números Complexos para dar sentido a esse novo número. Essa não é a maneira justa de introduzir os Números Complexos, pois, segundo a história, não foram às equações do segundo grau que de origem as Números Complexos, mas sim o desenvolvimento de técnicas para resolver equações do terceiro grau.

> A verdadeira história, entretanto, é diferente. Se um problema conduzia a uma equação do segundo grau cuja solução formal envolvia a raiz quadrada de um número negativo, o problema era simplesmente considerado sem solução. Durante dezenas de séculos foi assim. Somente depois da descoberta da fórmula das raízes de uma equação do terceiro grau é que os números complexos forçaram o seu reconhecimento matemático, pois as raízes reais daquelas equações eram representadas por expressões contendo raízes quadradas de números negativos (Elon, 2001, p.307).



1 Introdução

Vimos no capítulo 1 que, dentre os conjuntos numéricos já conhecidos, tínhamos inicialmente o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Para que a subtração fosse sempre possível, ele foi estendido e obtivemos o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

Para que também a divisão fosse possível, estendemos este último e obtivemos o conjunto dos números racionais, que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros:

$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$$

PARA REFLETIR Em $\mathbb{Q}$, a única divisão impossível é a divisão por 0.

Em $\mathbb{Q}$, a equação $x^2 = 2$ não pode ser resolvida, ou seja, as soluções $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ não podem ser representadas por uma fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e **a** e **b** pertencentes a $\mathbb{Z}$. $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são exemplos dos números chamados de irracionais ($\mathbb{I}r$).

Da união dos racionais com os irracionais surgem os números reais ($\mathbb{R}$):

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}r$$

Portanto, podemos identificar $\mathbb{N}$ como uma parte de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ como uma parte de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ como uma parte de $\mathbb{R}$ e escrever:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Sabemos que, se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geq 0$. Assim, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$, pois:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

e não existe um número real **x** que, elevado ao quadrado, resulte -1. Por isso, temos de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado de conjunto dos *números complexos* ($\mathbb{C}$).

2 O conjunto dos números complexos*

O conjunto $\mathbb{C}$ é um conjunto cujos elementos – os números complexos – devem ser tais que possam ser somados e multiplicados, e também possibilitem a extração da raiz quadrada de um número negativo. Logicamente, os números reais precisam ser elementos desse conjunto $\mathbb{C}$, e as operações de adição e multiplicação feitas sobre os números reais no conjunto $\mathbb{C}$ devem ser as mesmas já conhecidas. Note que, se isso não fosse observado, o conjunto $\mathbb{R}$ não seria um subconjunto de $\mathbb{C}$.

Uma boa maneira de definir esse conjunto é a proposta por Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1837, segundo a qual o conjunto dos números complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais, em que estão definidas:

- Igualdade:
  $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$
- Adição:
  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Multiplicação:
  $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Figura 26: Livro: Date pg. 431

No tópico “O conjunto dos Números Complexos”, o autor define um Número Complexo com um par ordenado. Segundo ele, essa proposta foi apresentada por Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1837, na qual ele define a igualdade, a adição e multiplicação entre Complexos. É uma boa forma de definir Números Complexos, pois permite a introdução da interpretação geométrica no plano de forma imediata o que não é feito pelo autor. Segundo Elon, a afirmação de que Gauss definiu um Número Complexo $a + bi$ como o par ordenado (a, b) e definir as operações entre esses números como sendo operações entre pares ordenados sem motivação não têm precedentes.

Ao fazer essa identificação, constatamos que $\mathbb{R}$ é subconjunto de $\mathbb{C}$, ou seja:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

As definições de adição e multiplicação e suas propriedades comportam-se para os números complexos da forma $(a, 0)$ como se fossem números reais **a**. Assim, por exemplo, temos:

- $(1, 0)$ identifica-se com o número real 1;
- $(-3, 0)$ com -3;
- $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ com $\frac{1}{2}$;
- $(0, 0)$ com 0.

A unidade imaginária

Criamos um nome e um símbolo para o número complexo $(0, 1)$. Ele será chamado de *unidade imaginária* e indicado por **i**, ou seja, o símbolo i identifica-se com o número complexo $(0, 1)$.

Observemos que:

$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$

Portanto:

$$i^2 = -1$$

PARA REFLETIR A unidade imaginária **i** é um número complexo não real.

que é a característica fundamental da unidade imaginária.

A forma algébrica

Um número complexo qualquer $z = (a, b)$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$z = (a, b) = (a + 0, b + 0) = (a, 0) + (0, b) \quad (I)$$

Como $(0, b) = (b, 0)(0, 1)$ (II), pois

$(b, 0)(0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b)$, e $(a, 0) = a$ e $(b, 0) = b$ (III), substituindo (II) e (III) em (I), temos:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = \underbrace{(a, 0)}_{a} + \underbrace{(b, 0)}_{b} \cdot \underbrace{(0, 1)}_{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = a + bi$$

Então, todo número complexo $z = (a, b)$ pode ser escrito de maneira única:

$$z = a + bi \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1)$$

Essa é a *forma algébrica* ou *forma binomial* de escrever um número complexo. Observemos que um número complexo escrito nessa forma tem duas partes:

$$z = \underbrace{a}_{\substack{\text{parte real}\\ \text{de z}}} + \underbrace{bi}_{\substack{\text{parte}\\ \text{imaginária}\\ \text{de z}}}$$

$\mathrm{Re}(z) = a$ $\qquad$ $\mathrm{Im}(z) = b$

PARA REFLETIR Podemos escrever a equivalência $(a, b) \Leftrightarrow a + bi$.

Devemos observar também que, se $b = 0$, temos $z = a$ (número real); e, se $a = 0$ e $b \neq 0$, temos $z = bi$, que é um número imaginário puro.

Exemplos:

1º) Em $z = 2 + 3i$, temos $\mathrm{Re}(z) = 2$ e $\mathrm{Im}(z) = 3$.

2º) Em $z = 3$, temos $\mathrm{Re}(z) = 3$ e $\mathrm{Im}(z) = 0$. Portanto, **z** é real.

3º) Em $z = -2i$, temos $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = -2$. Portanto, **z** é um número imaginário puro.

Usando a forma algébrica, as operações de adição, subtração e multiplicação são mais intuitivas do que com a representação por pares ordenados. Na multiplicação, por exemplo, basta aplicar a mesma propriedade distributiva usada na multiplicação de binômios, porém observando que i^2 é um número real e vale -1. Não há necessidade alguma de decorar fórmulas.

Exemplos:

1º) $(2 + 3i) + (-3 + 4i) = (2 - 3) + (3 + 4)i = -1 + 7i$

2º) $(1 + 2i)(2 - 3i) = 1 \cdot 2 + 1(-3i) + (2i)2 + (2i)(-3i) = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 2 + i - 6(-1) = 2 + i + 6 = 8 + i$

3º) $(1 + i) - (3 + 2i) = (1 + i) + (-3 - 2i) = (1 - 3) + (1 - 2)i = -2 - i$

4º) Vamos colocar na forma algébrica o número complexo $(-1, \sqrt{2})$.

Se $z = a + bi$ e, nesse caso, $a = -1$ e $b = \sqrt{2}$, então $z = -1 + \sqrt{2}i$.

5º) Dados os números complexos $z_1 = (1, 3)$ e $z_2 = (-2, 1)$, vamos calcular:

a) $z_1 + z_2$ $\qquad$ c) z_1^2

b) $z_1 z_2$ $\qquad$ d) $z_1 + z_2^2$

a) $z_1 + z_2 = (1 + 3i) + (-2 + i) = (1 - 2) + (3 + 1)i = -1 + 4i$

b) $z_1 z_2 = (1 + 3i)(-2 + i) = 1(-2) + 1 \cdot i + 3i(-2) + 3i \cdot i = -2 + i - 6i + 3i^2 = -2 - 5i + 3(-1) = -5 - 5i$

c) $z_1^2 = (1 + 3i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 = 1 + 6i + 9i^2 = 1 + 6i + 9(-1) = -8 + 6i$

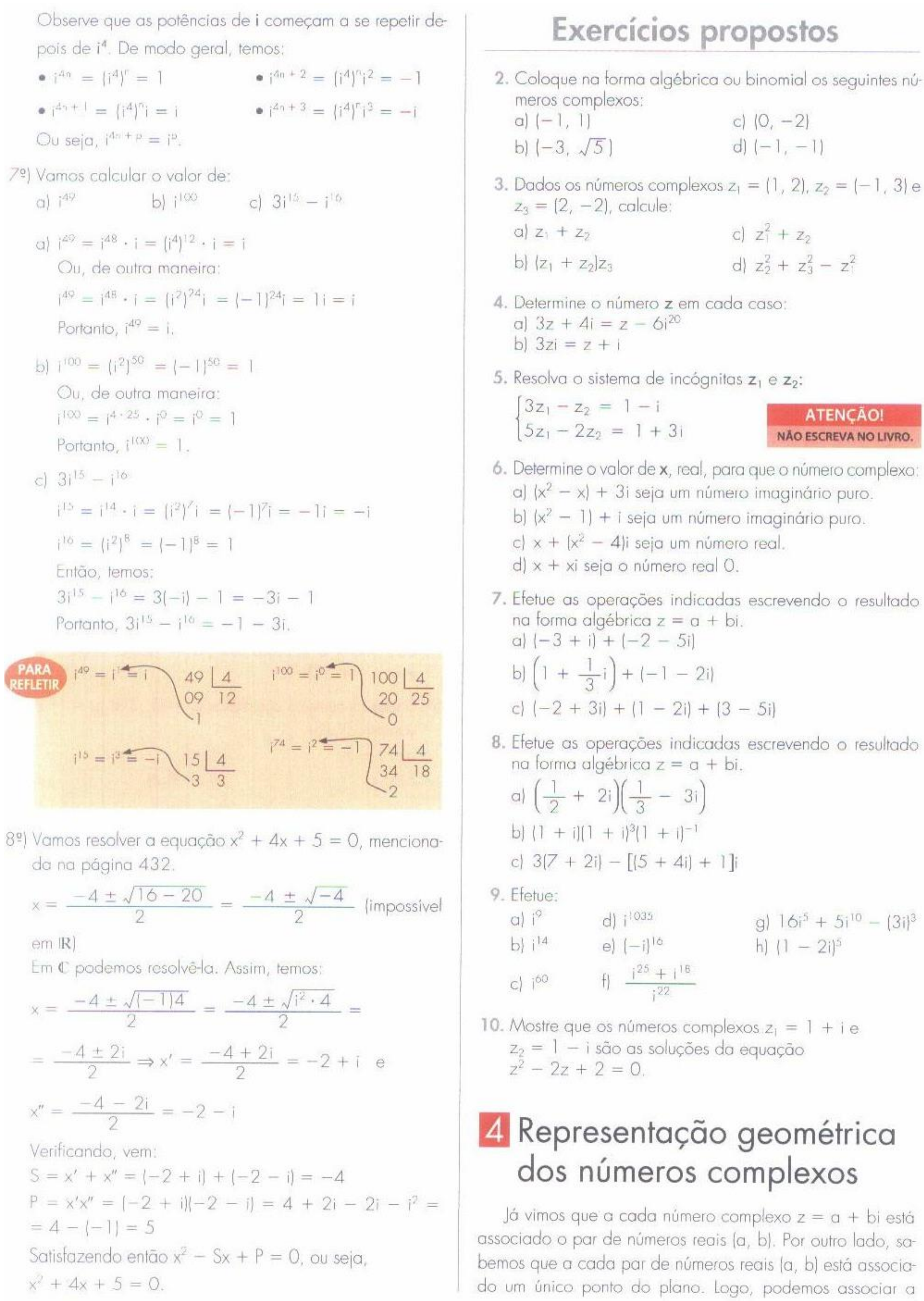
d) $z_1 + z_2^2 = (1 + 3i) + (-2 + i)^2 = (1 + 3i) + [4 - 4i + i^2] = (1 + 3i) + [4 - 4i + (-1)] = (1 + 3i) + (3 - 4i) = 1 + 3i + 3 - 4i = 4 - i$

6º) Vamos calcular o valor de $i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8$.

- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$
- $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$
- $i^5 = i^4 i = 1i = i$
- $i^6 = i^4 i^2 = 1(-1) = -1$
- $i^7 = i^4 i^3 = 1(-i) = -i$
- $i^8 = i^4 i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

Figura 27: Livro: Date pg. 433

No tópico “Fórmula algébrica dos Números Complexos”, Luiz Dante, a partir da definição proposta no capítulo anterior, introduz a forma algébrica de um Número Complexo $z = a + bi, com\ a, b \in R\ e\ i^2 = -1$. Nesse tópico também são exploradas as potências de i dando à explanação caráter puramente algébrico.



Observe que as potências de **i** começam a se repetir depois de i^4. De modo geral, temos:

- $i^{4n} = (i^4)^n = 1$
- $i^{4n+1} = (i^4)^n i = i$
- $i^{4n+2} = (i^4)^n i^2 = -1$
- $i^{4n+3} = (i^4)^n i^3 = -i$

Ou seja, $i^{4n+p} = i^p$.

7º) Vamos calcular o valor de:

a) i^{49} b) i^{100} c) $3i^{15} - i^{16}$

a) $i^{49} = i^{48} \cdot i = (i^4)^{12} \cdot i = i$

Ou, de outra maneira:

$i^{49} = i^{48} \cdot i = (i^2)^{24} i = (-1)^{24} i = 1i = i$

Portanto, $i^{49} = i$.

b) $i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$

Ou, de outra maneira:

$i^{100} = i^{4 \cdot 25} \cdot i^0 = i^0 = 1$

Portanto, $i^{100} = 1$.

c) $3i^{15} - i^{16}$

$i^{15} = i^{14} \cdot i = (i^2)^7 i = (-1)^7 i = -1i = -i$

$i^{16} = (i^2)^8 = (-1)^8 = 1$

Então, temos:

$3i^{15} - i^{16} = 3(-i) - 1 = -3i - 1$

Portanto, $3i^{15} - i^{16} = -1 - 3i$.

PARA REFLETIR

$i^{49} = i^1 = i$ $\quad 49 \div 4$: $49 = 4 \cdot 12 + 1$ (09, 1)

$i^{100} = i^0 = 1$ $\quad 100 \div 4$: $100 = 4 \cdot 25 + 0$ (20, 0)

$i^{15} = i^3 = -i$ $\quad 15 \div 4$: $15 = 4 \cdot 3 + 3$

$i^{74} = i^2 = -1$ $\quad 74 \div 4$: $74 = 4 \cdot 18 + 2$ (34, 2)

8º) Vamos resolver a equação $x^2 + 4x + 5 = 0$, mencionada na página 432.

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$ (impossível em ℝ)

Em ℂ podemos resolvê-la. Assim, temos:

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-1)4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{i^2 \cdot 4}}{2} =$

$= \frac{-4 \pm 2i}{2} \Rightarrow x' = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$ e

$x'' = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$

Verificando, vem:

$S = x' + x'' = (-2 + i) + (-2 - i) = -4$

$P = x'x'' = (-2 + i)(-2 - i) = 4 + 2i - 2i - i^2 =$
$= 4 - (-1) = 5$

Satisfazendo então $x^2 - Sx + P = 0$, ou seja, $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Exercícios propostos

2. Coloque na forma algébrica ou binomial os seguintes números complexos:
   a) $(-1, 1)$ c) $(0, -2)$
   b) $(-3, \sqrt{5})$ d) $(-1, -1)$

3. Dados os números complexos $z_1 = (1, 2)$, $z_2 = (-1, 3)$ e $z_3 = (2, -2)$, calcule:
   a) $z_1 + z_2$ c) $z_1^2 + z_2$
   b) $(z_1 + z_2)z_3$ d) $z_2^2 + z_3^2 - z_1^2$

4. Determine o número **z** em cada caso:
   a) $3z + 4i = z - 6i^{20}$
   b) $3zi = z + i$

5. Resolva o sistema de incógnitas $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$:
   $$\begin{cases} 3z_1 - z_2 = 1 - i \\ 5z_1 - 2z_2 = 1 + 3i \end{cases}$$

ATENÇÃO!
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

6. Determine o valor de **x**, real, para que o número complexo:
   a) $(x^2 - x) + 3i$ seja um número imaginário puro.
   b) $(x^2 - 1) + i$ seja um número imaginário puro.
   c) $x + (x^2 - 4)i$ seja um número real.
   d) $x + xi$ seja o número real 0.

7. Efetue as operações indicadas escrevendo o resultado na forma algébrica $z = a + bi$.
   a) $(-3 + i) + (-2 - 5i)$
   b) $\left(1 + \frac{1}{3}i\right) + (-1 - 2i)$
   c) $(-2 + 3i) + (1 - 2i) + (3 - 5i)$

8. Efetue as operações indicadas escrevendo o resultado na forma algébrica $z = a + bi$.
   a) $\left(\frac{1}{2} + 2i\right)\left(\frac{1}{3} - 3i\right)$
   b) $(1 + i)(1 + i)^3(1 + i)^{-1}$
   c) $3(7 + 2i) - [(5 + 4i) + 1]i$

9. Efetue:
   a) i^9 d) i^{1035} g) $16i^5 + 5i^{10} - (3i)^3$
   b) i^{14} e) $(-i)^{16}$ h) $(1 - 2i)^5$
   c) i^{60} f) $\frac{i^{25} + i^{18}}{i^{22}}$

10. Mostre que os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - i$ são as soluções da equação $z^2 - 2z + 2 = 0$.

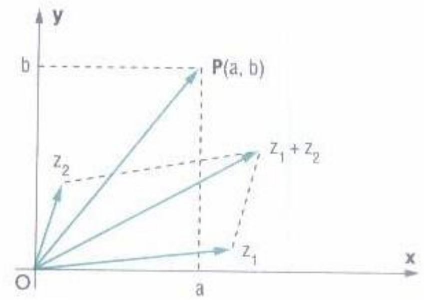
4 Representação geométrica dos números complexos

Já vimos que a cada número complexo $z = a + bi$ está associado o par de números reais (a, b). Por outro lado, sabemos que a cada par de números reais (a, b) está associado um único ponto do plano. Logo, podemos associar a

Figura 28: Livro: Date pg. 433

No tópico "Representação geométrica dos Números Complexos", o autor apresenta a interpretação geométrica de um Número Complexo no plano cartesiano, dando um exemplo da soma entre dois Números Complexos e mostrando sua interpretação geométrica. Logo em seguida, o autor apresenta a noção de conjugado, ressaltando a existência do inverso multiplicativo de um Número Complexo bem como sua interpretação no plano cartesiano em seguida, o autor introduz a divisão algébrica entre dois Números Complexos e o módulo de um Número Complexo em sua forma algébrica e geométrica. Logo após o autor introduz o conceito de divisão entre dois Números Complexos, utilizando a noção de conjugado como mostra as figuras a seguir .

complexos, $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$, e a soma deles, $z_1 + z_2$ (diagonal do paralelogramo formado por $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$).



6) A associação dos números complexos $z = a + bi$ aos vetores permite o uso dos números complexos em diversos campos nos quais as grandezas são vetoriais. Um exemplo disso é o estudo da eletricidade em nível superior; o aluno que optar por um curso superior na área de exatas descobrirá que corrente elétrica, voltagem, impedância, etc. são todos números complexos.

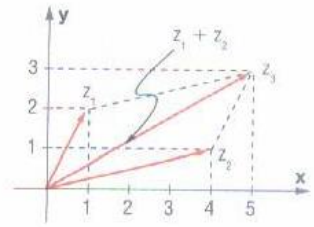
Exemplo:

Vamos efetuar algébrica e geometricamente a adição dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 + i$.

Algebricamente, temos:

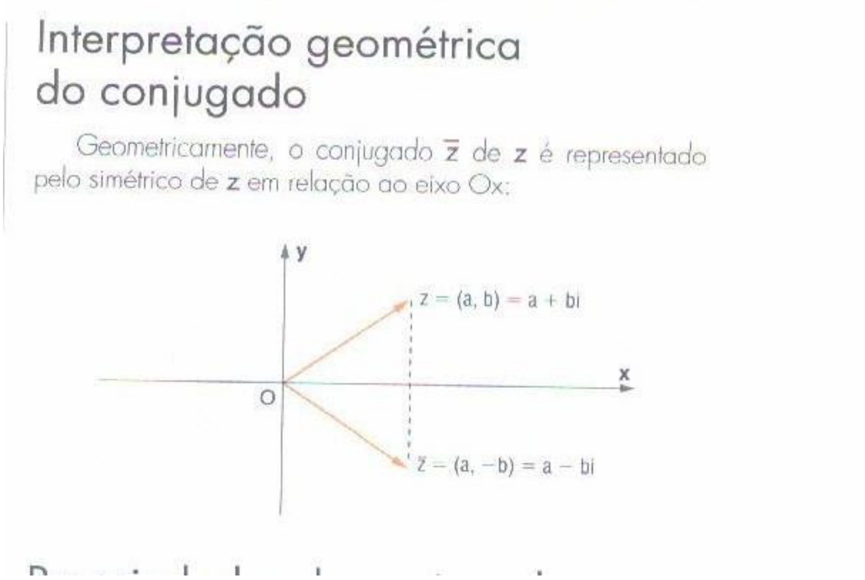
$z_1 + z_2 =$
$= (1 + 2i) + (4 + i) =$
$= 5 + 3i = z_3$

Geometricamente, vem o gráfico ao lado.



Observe que $\mathbf{z_3}$ corresponde ao ponto (5, 3), ou seja, ao número complexo $z_3 = 5 + 3i$.

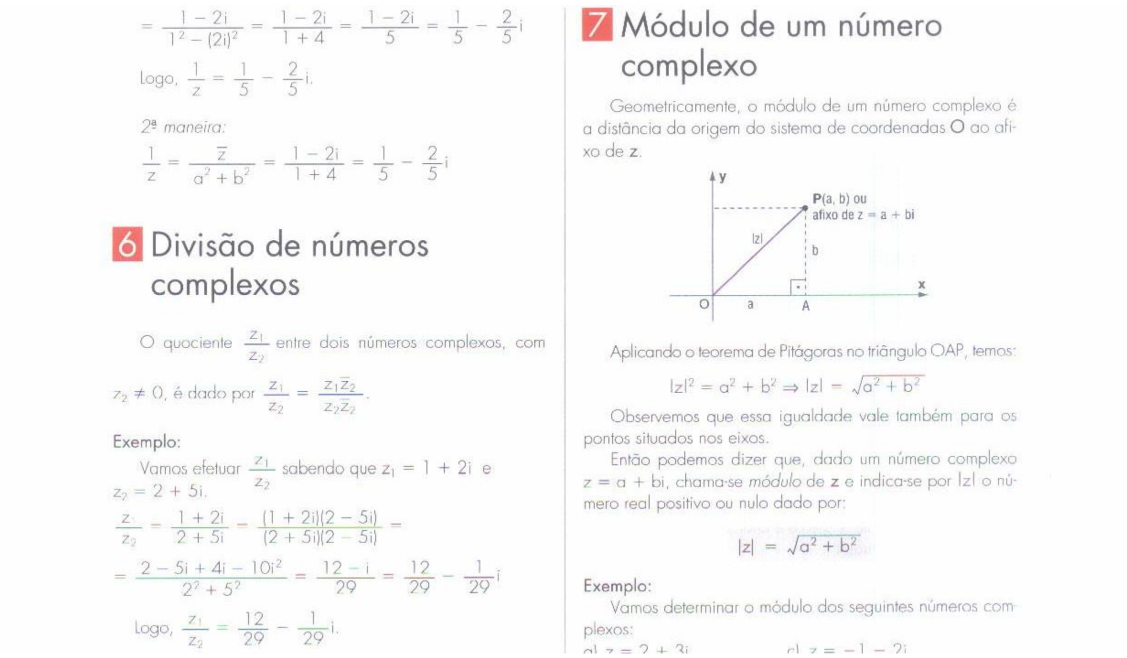
Figura 29: Livro: Date pg. 433



Interpretação geométrica do conjugado

Geometricamente, o conjugado $\overline{z}$ de **z** é representado pelo simétrico de **z** em relação ao eixo Ox:

Figura 30: Livro: Date pg. 436



$$= \frac{1-2i}{1^2-(2i)^2} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Logo, $\frac{1}{z} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

2ª maneira:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

6 Divisão de números complexos

O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ entre dois números complexos, com $z_2 \neq 0$, é dado por $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$.

Exemplo:

Vamos efetuar $\frac{z_1}{z_2}$ sabendo que $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 + 5i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{2+5i} = \frac{(1+2i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} =$$

$$= \frac{2-5i+4i-10i^2}{2^2+5^2} = \frac{12-i}{29} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$$

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$.

7 Módulo de um número complexo

Geometricamente, o módulo de um número complexo é a distância da origem do sistema de coordenadas **O** ao afixo de **z**.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OAP, temos:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Observemos que essa igualdade vale também para os pontos situados nos eixos.

Então podemos dizer que, dado um número complexo $z = a + bi$, chama-se *módulo* de **z** e indica-se por $|z|$ o número real positivo ou nulo dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Exemplo:

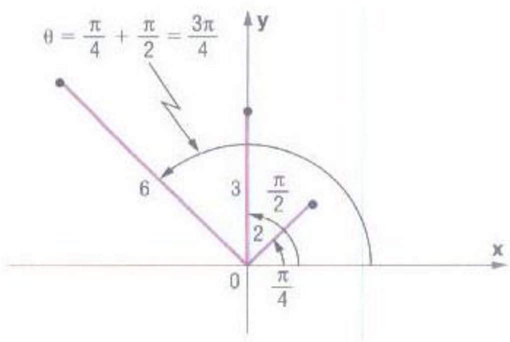
Vamos determinar o módulo dos seguintes números complexos:

a) $z = 2 + 3i$ c) $z = -1 - 2i$

Figura 31: Livro Date pg. 437

No tópico "forma trigonométrica de um Número Complexo", é introduzido a forma polar de um Número Complexo, definido a multiplicação e a divisão entre dois Números Complexos na forma polar bem como, faz-se uma interpretação geométrica da multiplicação em um exemplo, mostrando, que esta operação produz uma rotação no sentido anti-horário em torno da origem. Em seguida, define a potência de um Número

Complexo na forma trigonométrica. É importante ressaltar que o autor não define a radiciação de um Número Complexo na forma trigonométrica. Em seguida, no tópico "outras aplicações" são introduzidas algumas aplicações à geometria como a rotação de um ângulo 90° no sentido anti-horário em torno da origem ao multiplicar um Número Complexo por *i* como mostra a figura a seguir. É importante destacar que defendemos que o conceito de rotação deve ser explorado no início da teoria e não como algo que venha ser sinalizado em capítulos finais e de forma bem informal, como por exemplo, em exemplos.



Em z_1z_2, houve uma rotação positiva a $\mathbf{z_1}$ de um ângulo igual ao ângulo de $\mathbf{z_2}$. Ou seja, nesse caso, houve uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ a $\mathbf{z_1}$. Como o argumento de $\mathbf{z_1}$ era $\frac{\pi}{4}$ e $\mathbf{z_1}$ recebeu uma rotação de $\frac{\pi}{2}$, o produto z_1z_2 passa a ter argumento igual a $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$. Já o módulo de z_1z_2 é 6, que corresponde a $2 \cdot 3$ ou $|z_1||z_2|$.

Observação: A fórmula da multiplicação de dois números complexos, segundo a qual *basta multiplicar os módulos e somar seus argumentos*, é válida para um número qualquer finito de valores. Isso nos levará à potenciação de números complexos.

Figura 32: Livro Date pg. 439

Outras falhas encontradas pelos autores do livro "Análise de Textos" acerca do livro de Dante é o fato de que o autor menciona vetores sem nenhuma explicação. Eles ressaltam ainda que o conceito de vetor deveria aparecer no tratamento da Geometria Analítica e/ou no capítulo de Álgebra Linear bem com a falta de aplicações pois, segundo Elon, os Números Complexos são um instrumentos de grande valia para resolver problemas de geometria plana.

4- CAPITULO IV: NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES

4.1- DEFINIÇÃO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Existem muitas maneiras de definir um Número Complexo porém, adotaremos a definição apresentada no livro "Trigonometria e Números Complexos". Manfredo Perdigão do Carmo, Augusto César Morgado e Eduardo Wagner 3. Ed. Rio de Janeiro*:* SBM, 2005"

Os Números Complexos constituem um conjunto $\mathbb{C}$, onde estão definidas operações de adição (indicado pelo sinal +) e de multiplicação (indicado pela simples justaposição de letras) com as propriedades *comutativa, associativa, distributiva relativa à adição, elemento neutro da adição e da multiplicação, elemento simétrico.* Além disso, os números reais estão incluídos em $\mathbb{C}$.

a) Existe um Número Complexo i com $i^2 = -1$
b) Todo Número Complexo pode ser escrito de uma maneira única na forma $a + bi$, onde a e b são reais.
c) Usa-se a notação $Re(a + bi) = a$ (parte real do Número Complexo $a + bi$) e $Im(a + bi) = b$ (parte imaginária do Número Complexo $a + bi$)

Observação: podemos operar com os Números Complexos de maneira análoga à que operamos com os números reais, com o cuidado de tomar $i^2 = -1$

Exemplos:

a) $(3 + 2i) + (5 + 6i) = 3 + 5 + (2 + 6)i = 8 + 8i$
b) $(3 + 2i)(5 + 6i) = 3(5 + 6i) + 2i(5 + 6i) = 15 + 18i + 10i + 36i^2 =$
$$= 15 - 36 + 28i = -21 + 28i$$

Observações:

1. Os Números Complexos da forma $a + 0i$ são os números reais;
2. Se $a + bi = c + di$ então, $a = c \; e \; b = d$, ou seja, se dois Números Complexos são iguais então suas partes reais e imaginárias são iguais;
3. Usaremos $z = a + bi$, $w = c + di$, etc. para indicar Números Complexos.

A parti da definição de Números Complexos juntamente com a definição de igualdade entre dois Números Complexos é possível uma imediata ralação desses números com o plano pois, a definição de igualdade entre Números Complexos é equivalente à definição de igualdade entre dois pares ordenados.

A parti desse momento apresentaremos uma proposta de sequência didática que servirá como sugestão para uma possível apresentação do tema Números Complexos para alunos do Ensino Médio.

Utilizaremos como ferramenta o Software Geogebra com o objetivo de dar ênfase às propriedades geométricas contidas nos Números Complexos pois o Geogebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multi-plataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria e álgebra, dentre outras ferramentas. A utilização do Geogebra neste trabalho visa uma melhor explicação das propriedades de rotação, translação e homotetia contidas nos Números Complexos contribuindo assim para a visualização dessas propriedades.

4.2- UNIDADE IMAGINÁRIA.

Sabemos que $a^2 \geq 0 \; com \; a \in R$, ou seja, todo número real elevado ao quadrado é positivo ou igual a zero. Esse ponto é exatamente o que diferencia os Números Complexos dos números reais, pois $i^2 = -1$ e $(-i)^2 = -1$. Agora temos números que elevados ao quadrado tem como resultado um número negativo.

Quando realizamos multiplicações com Números Complexos aparecem as potências de *i*:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = (i^2)(i^2) = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = (i^3)(i^2) = (-i)(-1) = i$$

$$i^6 = (i^4)(i^2) = 1.(-1) = -1$$

$\vdots$

E essa configuração se repete, ou seja, sempre temos a sequência $1,\ i, -1$ e $-i$.

É interessante ressaltar que as potências de i pertencentes ao conjunto $\{1, i, -1, -i\}$ e podem ser interpretadas como as interseções do círculo unitário com o plano Complexo, como podemos perceber na figura 33.

As potências de i são introduzidas, pela maioria dos livros didáticos, logo no início do conteúdo Números Complexos. Desse modo a interpretação geométrica dessas multiplicações deveria ser abordadas imediatamente nesse momento, visando uma familiarização dos alunos com a importante propriedades de rotação que contem a multiplicação entre Números Complexos.

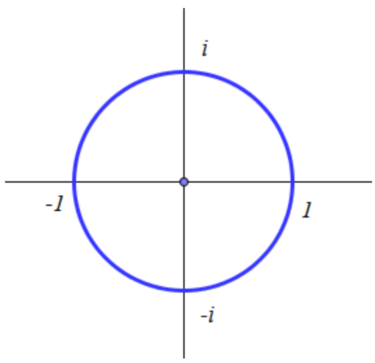


Figura 33: Círculo Complexo

Ou seja,

$i^0 = 1 \Longrightarrow$ ponto (1,0)

$i^1 = i \Longrightarrow$ o ponto (0,1)

$i^2 = -1 \Longrightarrow$ ponto (-1,0)

$i^3 = -i \Longrightarrow$ ponto (0,-1)

$i^4 = (i^2)(i^2) = (-1)(-1) = 1 \Longrightarrow$ponto (1,0)

$$i^5 = (i^3)(i^2) = (-i)(-1) = i \Longrightarrow \text{ponto } (0,1)$$

$$i^6 = (i^4)(i^2) = 1.(-1) = -1 \Longrightarrow \text{ponto } (-1,0)$$

$$\vdots$$

Uma sugestão de atividade para apresentar as potências de i, para alunos do ensino médio, utilizando o Geogebra, é a seguinte. Essa atividade poderá ser desenvolvida em um laboratório de computação com computadores individuais ou em

1° passo: Construir o círculo complexo de raio 1:

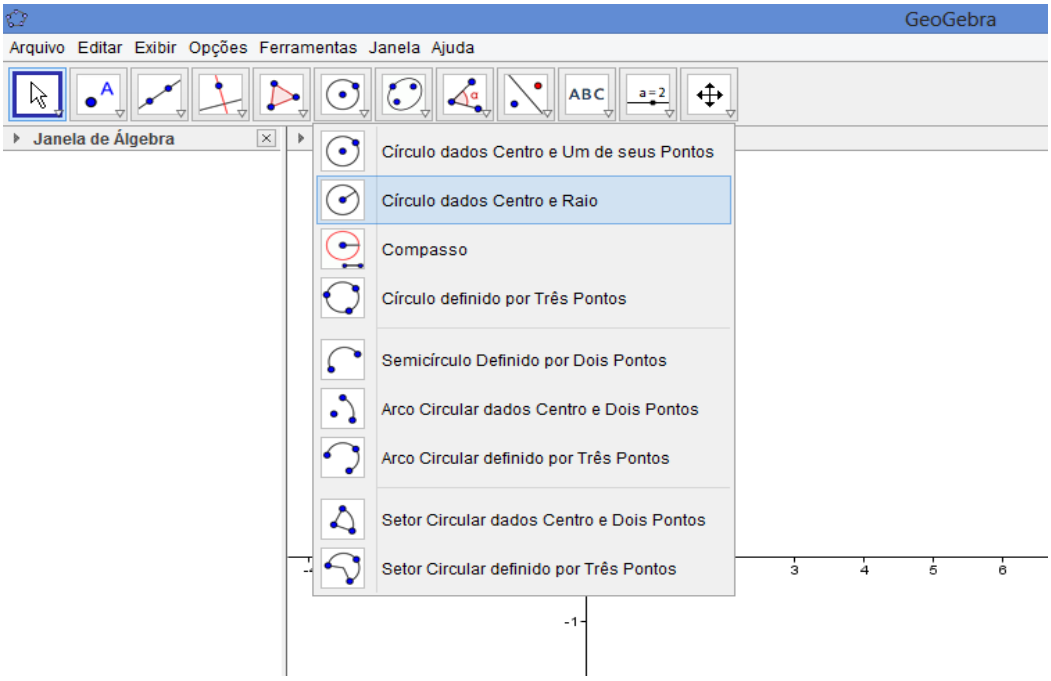


Figura 34: Construção do círculo unitário.

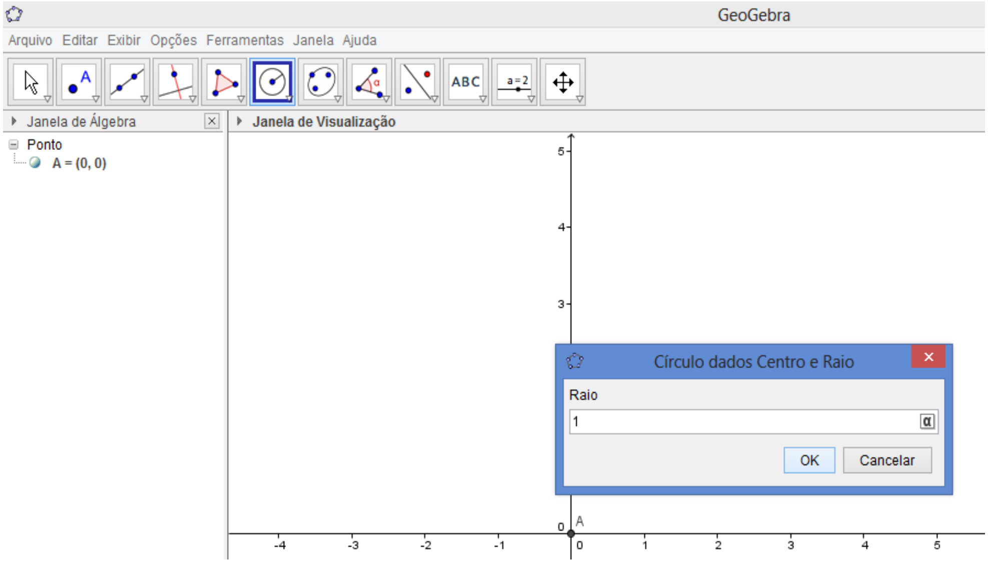


Figura 35: Construção do círculo unitário.

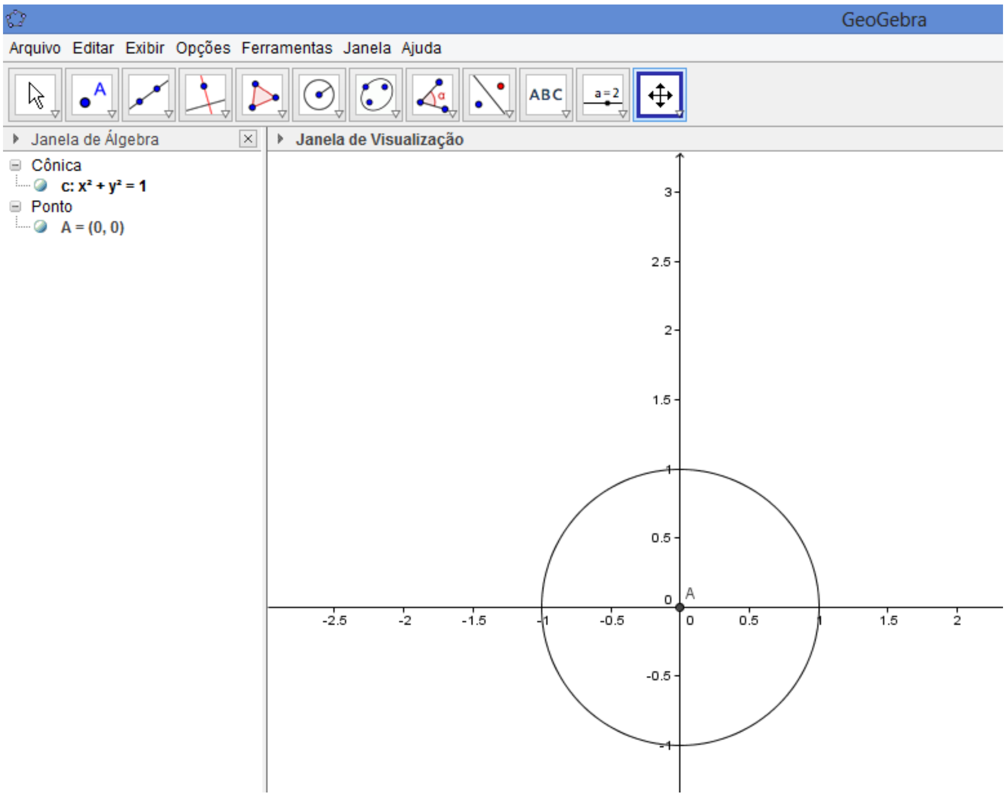


Figura 36: Construção do círculo unitário.

2° passo: Construção do Número Complexo ou vetor (0,1):

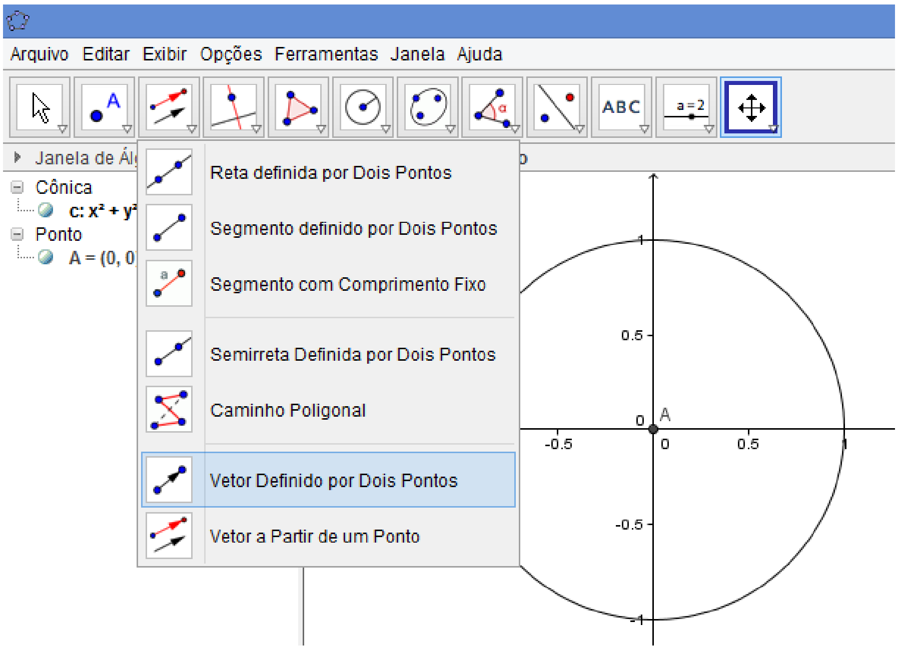


Figura 37: Representação geométrica de Número Complexo.

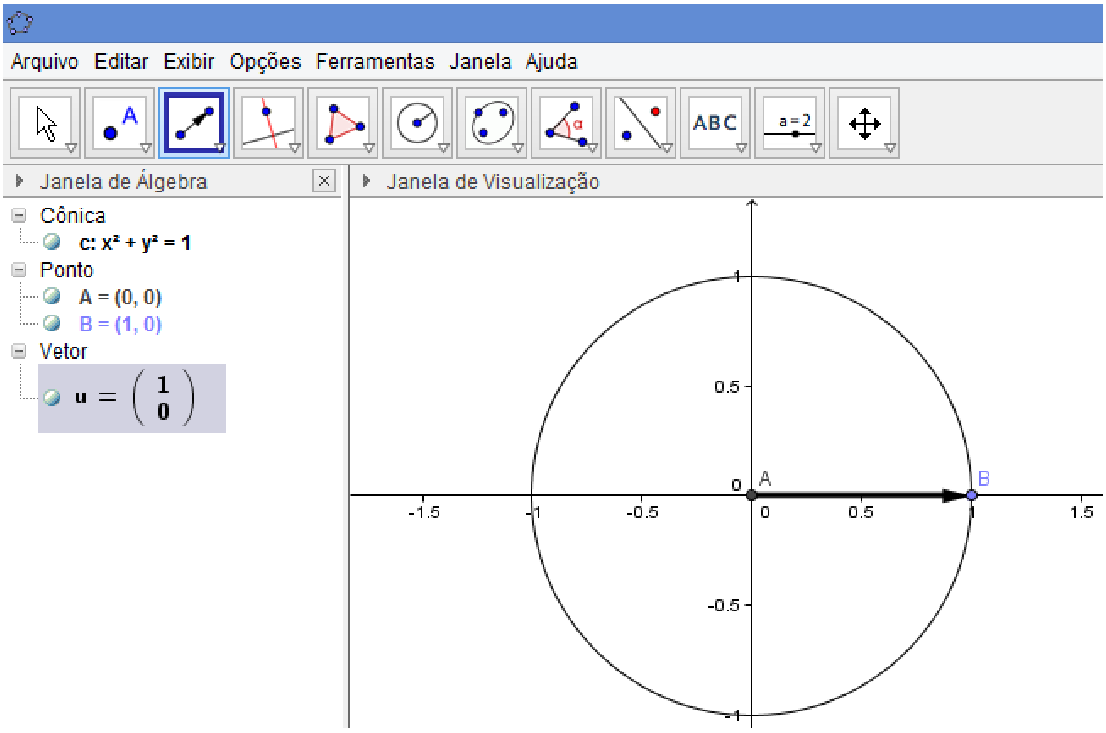


Figura 38: Representação geométrica de Número Complexo.

O vetor $\overrightarrow{AB}$ representa o Número Complexo $z = 1$. Multiplicando o Número Complexo z por i tempo o Número Complexo $w = z.i = 1.i = i$.

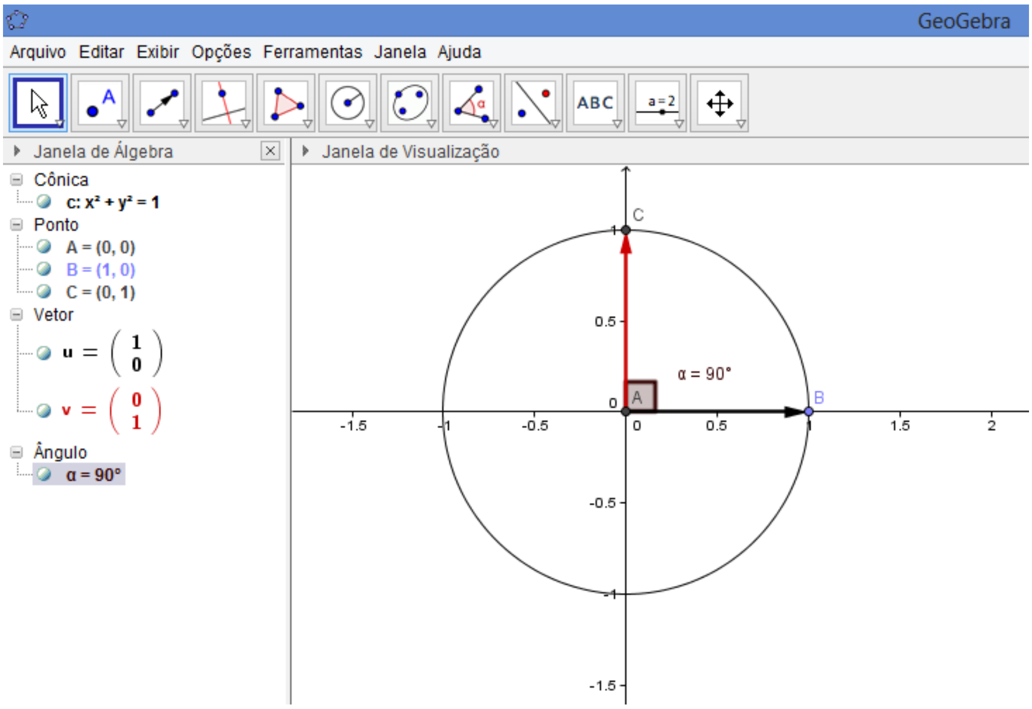


Figura 39: Representação geométrica de Número Complexo.

Podemos observar que o Número Complexo $w = i$ é o Número Complexo $i = 1$ segundo uma rotação 90° no sentido anti-horário.

Utilizando o Geogebra para essa atividade, os alunos compreenderão a propriedade de rotação contida na multiplicação entre Números Complexos e começarão a compreender a aplicação dessa propriedade na Geometria.

4.3- CONJUGADO.

Se $z = a + bi$, então o conjugado de z denotado por $\bar{z}$ é $\bar{z} = a - bi$.

Geometricamente temos:

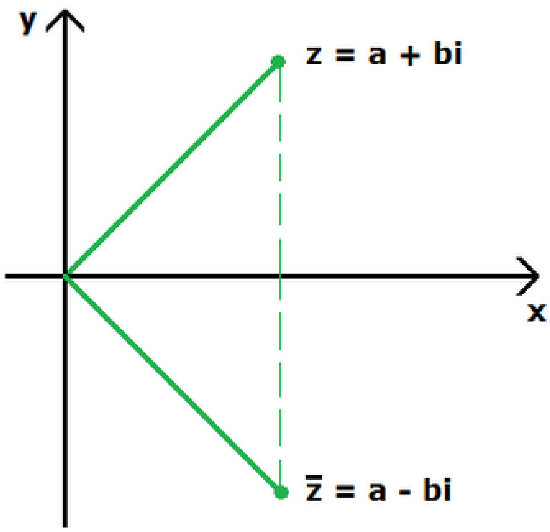


Figura 40: Conjugado do complexo z

Propriedades do conjugado:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
3) $\bar{\bar{z}} = z$

Demostraremos a propriedade 1.

1) Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ logo, $\overline{z_1} = a - bi$ e $\bar{z}_2 = c - di.$
   $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ logo, $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i.$
   Fazendo $\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i.$

Podemos utilizar o Geogebra como auxilio para a compreensão dessa propriedade. Uma sugestão de uma atividade utilizando esse software é a seguinte:

1° passo: Representar um Número Complexo (utilizaremos como exemplo $z = 1 + 2i$) no plano:

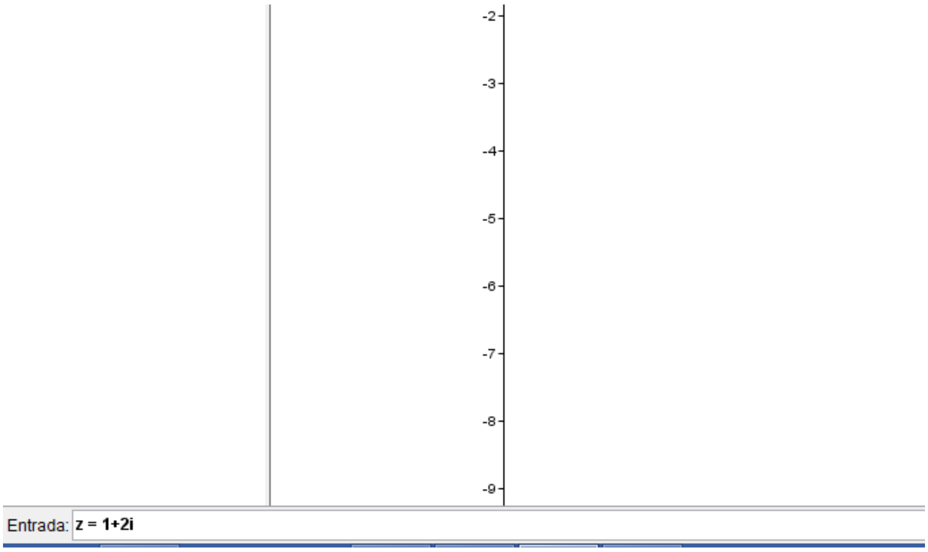


Figura 41: Inserir o Número Complexo z = 1 + 2i na janela algébrica do Geogebra.

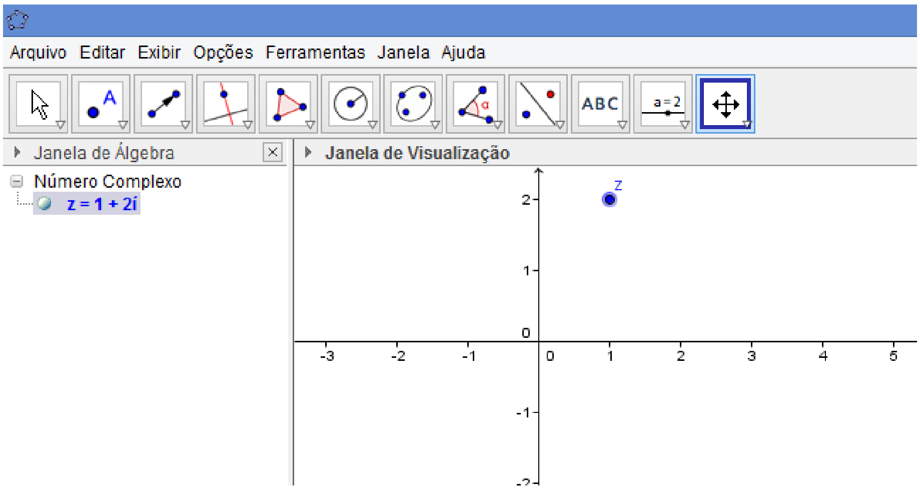


Figura 42: representação do Número Complexo z no Geogebra.

Para representarmos o conjugado w, do Número Complexo *z* basta inserimos na janela algébrica do Geogebra w = x(z) – y(z)i, como mostra a figura 43. Essas informação vai fazer com que o programa interpretar que desejamos construir um Número Complexo *w* que tenta, a mesma coordenada de *z* no eixo x e uma coordenada simétrica no eixo y.

Figura 43: Inserir w = x(z) – y(z)i na janela algébrica do Geogebra.

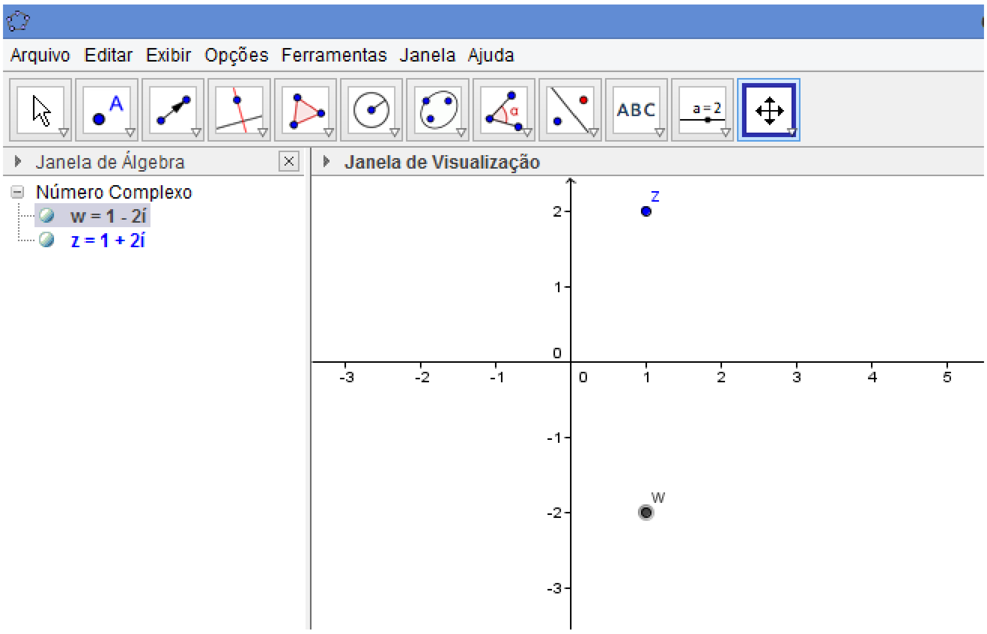


Figura 44: Representação do Número Complexo z e o seu conjugado w.

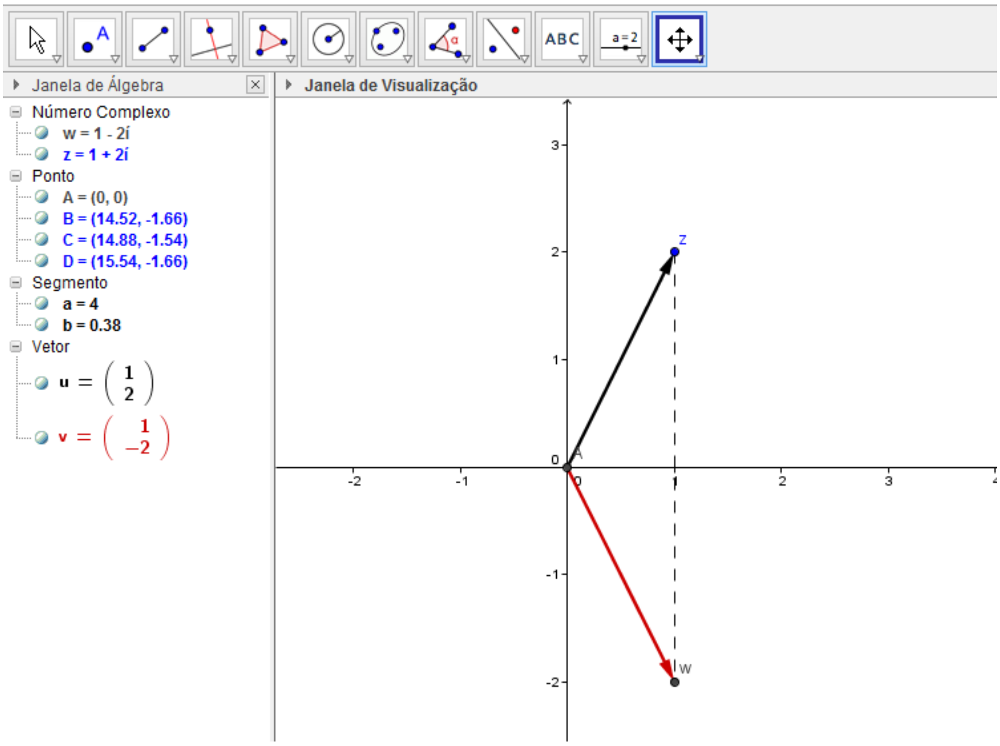


Figura 45: Representação geométrica do Número Complexo z e o seu conjugado w.

Podemos observar que $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$. Logo, $z\bar{z} \in R$, ou seja, $z\bar{z}$ é um número real. Esse resultado será muito útil, pois ele permitirá dividir Números Complexos e encontrar um número da forma $a + bi$.

Nesse momento é pertinente fazer a seguinte pergunta:

Dado $z = a + bi$, existe $\frac{1}{z}$? A resposta para essa pergunta é sim e utilizaremos o conjugado de um Número Complexo para justificar a sua resposta. Na realidade, o que queremos sabem é que, dado um Número Complexo, existe outro Número Complexo de modo que o produto desses Números Complexos é igual a um?

Já sabemos que $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ que é um número real.

Desse modo, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, logo, podemos concluir que o inverso de um Número Complexo é o seu conjugado dividido pelo quadrado do módulo de z. Esse fato nos permitirá dividir Números Complexos.

Responderemos duas outras perguntas importantes acerca dos Números Complexos:

Dado um Número Complexo $a + bi$, existe um Número Complexo $z = x + yi$ tal que $z^2 = a + bi$? E existe um Número Complexo z tal que $z^n = a + bi$, com $n \in N$? Se essa pergunta fosse feita a respeito dos números reais, a resposta seria “depende”. Nos números reais, extrair raízes depende muito se o índice da raiz é par ou impar, ou se a base da potência é negativa ou positiva. Para os Números Complexos essa resposta é sempre SIM e esse fato é uma propriedade fundamental dos Números Complexos. No fundo, essa pergunta é o que encaminha o famoso “Teorema Fundamental da Álgebra” o qual diz que equações polinomiais de grau n tem n soluções reais ou complexas. Iremos responder a primeira pergunta nesse momento, pois é possível responde-la utilizando somente a forma algébrica dos Números Complexos, para a segunda pergunta, iremos respondê-la quando for introduzida a forma trigonométrica para os Números Complexos.

Devemos encontrar x e y tais que $(x + yi)^2 = a + bi$, efetuando o produto temos, $(x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi$. Dois Números Complexos são iguais quando eles têm a mesma parte real e imaginária, logo, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Desse modo temos que $y = \frac{b}{2x}$. Substituindo na primeira equação temos $x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$. Desse modo temos:

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

Chegamos a uma equação biquadrada que nada mais é que uma equação quadrada de variável x^2. Resolvendo essa equação temos:

$$x^2 = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 + 16b^2}}{8} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \begin{cases} \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \geq 0 \\ \dfrac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \leq 0 \end{cases}$$

Logo, como queremos o quadrado do número real x, só nos serve a solução $x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ e $y = \frac{b}{2x}$.

Exemplo: Encontre as raízes quadradas de $3 + 4i$.

Resposta: $x^2 = \frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{2} = \frac{3+\sqrt{25}}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$ logo, $x = \pm 2$.

Para $x = 2$, $y = \frac{4}{2*2} = 1$ Portanto, $2 + i$

Para $x = -2$, $y = \frac{4}{2.(-2)} = -1$ Portanto, $-2 - i$

Resposta: $\pm(2 + i)$

Da definição adotada decorre que o Número Complexo $z = a + bi$ fica perfeitamente determinado pelo par ordenado (a, b) do plano. Essa interpretação é válida, pois quando definimos um Número Complexo da forma $z = a + bi$, podemos perceber que i é fixo e a e b variam e $a + bi = b + ai$ se, e somente se $a = b$. Essa propriedade nos remete a definição de pares ordenados, pois nos leva a observar a ordem de a e b e, portanto, os Números Complexos podem ser interpretados geometricamente como pontos no plano. Essa nova interpretação dos Números Complexos é extremamente poderosa, pois, desse ponto em diante podemos utilizar Números Complexos para entender melhor o plano e utilizar o plano para entender os Números Complexos através de figuras geométricas, gráficos e desenhos.

Outra forma de ver os Números Complexos é como vetores no plano, isto é, o segmento orientado com origem no ponto (0,0) do sistema de coordenadas e extremidade (a, b), isto é, o Número Complexo z é representado também pelo vetor $\overrightarrow{Oz}$ onde os números a e b são chamados de *componentes* do vetor como veremos a seguir.

4.4- VETORES E OS NÚMEROS COMPLEXOS

Nesse trabalho definiremos vetores com "classes de equipolência" de segmentos orientados. Quando nos referimos ao segmento de reta orientado $\overline{AB}$, essa notação significará que o sentido de percurso vai da origem A para a extremidade B. O mesmo segmento de reta $\overline{BA}$ possui sentido oposto, ou seja, origem em B e extremidade em A.

Dizemos que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes, e escreve-se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, quando eles:

i) Têm o mesmo comprimento (módulo);
ii) São paralelos ou colineares;
iii) Têm o mesmo sentido.

Sejam A e B pontos no plano. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a $\overline{AB}$. Cada segmento equipolente a $\overline{AB}$ é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$

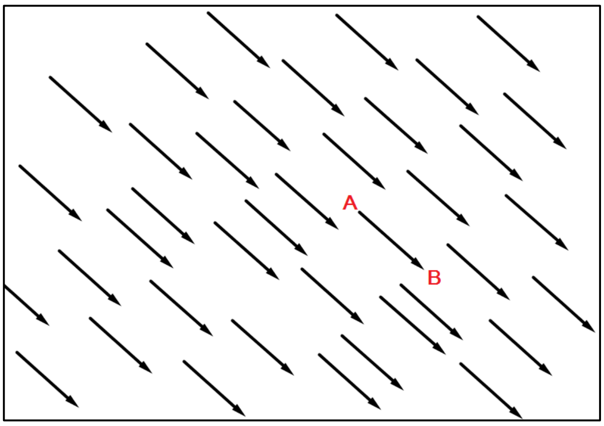


Figura 46: Representantes de v ⃗=(AB) ⃗

Desse modo, podemos concluir que qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$
Dados os pontos A e B de coordenadas $A = (x_a,\ y_a)$ e $B = (x_b,\ y_b)$, os números $x_b - x_a$ e $y_b - y_a$ são as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e escrevemos $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_b - x_a,\ y_b - y_a)$.

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano. Para todo vetor $\vec{v}$ existe um único ponto $P(x_0,\ y_0)$ tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, sendo o ponto $O = (0,\ 0)$ a origem do sistema de coordenadas. Além disso, as coordenadas do ponto P coincidem com as coordenadas do vetor $\vec{v}$, ou seja, $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x_0,\ y_0)$.

É importante lembrar que a escolha de um sistema de eixos ortogonais nos permite identificar pontos do plano com pares ordenados de números reais no plano, ou seja, R^2. A argumentação acima nos permite estabelecer outra identificação em que a cada vetor do plano corresponde, também, um par ordenado em R^2 que é exatamente a interpretação geométrica de um Número Complexo. Logo, desse ponto em diante, falaremos em Números Complexos, pares ordenados e vetores com sendo o mesmo objeto. Essa analogia será muito importante, pois poderemos trazer a álgebra dos vetores para operar com os Números Complexos.

CONCLUSÃO

Ponto no Plano ⟺ Vetor do Plano ⟺ Par Ordenado em R^2 ⟺ Número Complexo

$$P \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} \quad \Leftrightarrow \quad (a,\ b) \quad \Leftrightarrow \quad a+bi$$

Exemplo 1: Dados $A = (-3,\ 4)$ e $B = (2, -1)$, determine o ponto P tal que $\overrightarrow{OP} \equiv \overrightarrow{AB}$. Interprete sua solução geometricamente. Conclua que o ponto $P = (a,\ b)$ será o representante do vetor $\overrightarrow{OP}$ e consequentemente o representante do complexo $a + bi$.

Solução: Se $\overrightarrow{OP} \equiv \overrightarrow{AB}$ então $P - (0{,}0) = B - A$. Logo, $P = (2, -1) - (-3,\ 4) = (5, -5)$.

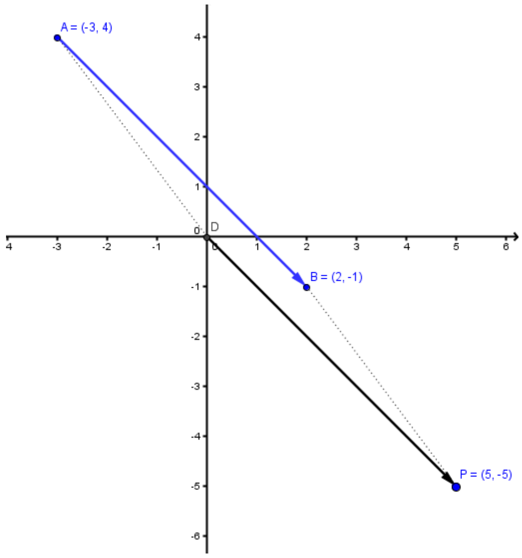


Figura 47: Solução do exemplo 1

Portanto, o vetor $\overrightarrow{OP} = (5, -5)$ é equivalente ao Número Complexo $5 - 5i$.

Muitos autores costuma diferenciar o Número Complexo $a + bi$ do par ordenado (a, b) dizendo que o ponto (a, b) é a imagem do Número Complexo $a + bi$ e o Número Complexo $a + bi$ é o afixo do ponto. Ainda podemos encontrar autores que faz o contrário chamando o Número Complexo de afixo do ponto e o ponto de imagem do Número Complexo. Em nosso trabalho iremos identificar $a + bi$ com o par ordenado

$(a, b) \in R^2$, ou seja, trataremos Números Complexo, ponto e ainda vetores com origem no ponto (0,0) indistintamente.

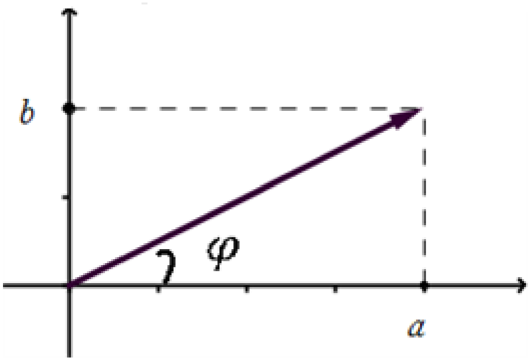


Figura 48: Número Complexo z = a + bi

4.5- MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO.

Chamamos de módulo do Número Complexo z o comprimento do vetor correspondente ao Número Complexo. Olhando a figura 48, podemos perceber que o comprimento do vetor é exatamente a hipotenusa de um triângulo retângulo onde os catetos são a e b.

Logo,

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} \quad (\#)$$

Geometricamente temos:

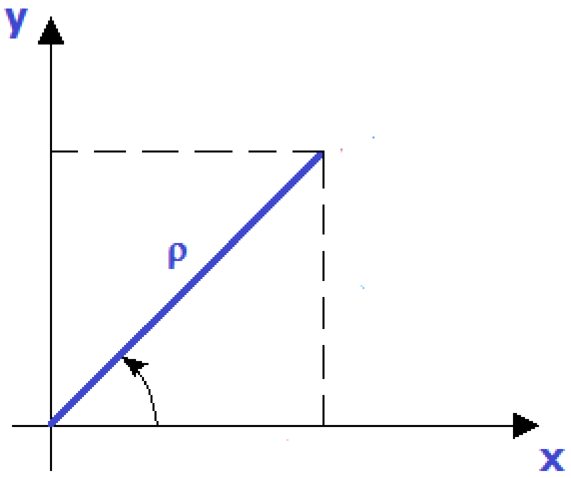


Figura 49: Plano Complexo

Propriedades:

Sejam z e w números complexos, com $w \neq 0$

1) $z\bar{z} = |z|^2$
2) $|z| = |\bar{z}|$
3) $|z| \geq 0$
4) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
5) $|z| + |w| \leq |z + w|$
6) $|z.w| = |z|.|w|$
7) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Observação 1: As demonstrações dessas propriedades seguem direto da definição de módulo de um Número Complexo e ficará como um exercício para o leitor.

Observação 2: O conjunto dos Números Complexos não é um conjunto **ordenado,** logo não podem existir desigualdades entre Números Complexos, mas apenas entre seus **módulos,** que são números Reais e positivos.

O módulo de um Número Complexo é um número real positivo. Desse modo, seu valor numérico pode ser encontrado utilizando o teorema de Pitágoras como vimos em (#). Além disso, podemos utilizar o Geogebra para calcular esse módulo seguindo os seguintes passos:

1° passo: Inserir o Número Complexo em questão na área algébrica do Geogebra: Tomaremos como exemplo o Número Complexo $z = 4 + 3i$.

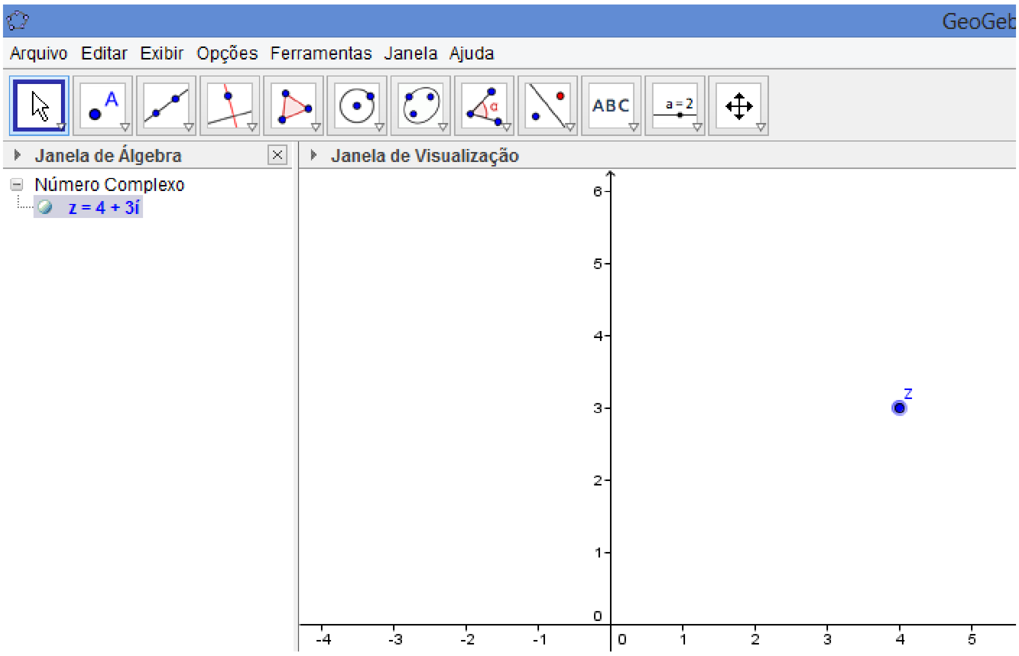


Figura 50: Número Complexo z representado no Geogebra.

2° passo: Para calcularmos o módulo de um Número Complexo z utilizando o Geogebra, basta utilizar a ferramenta “Distância”, inserindo na janela algébrica do Geogebra o comendo Distância[(0,0) , z] como mostra a figura 51.

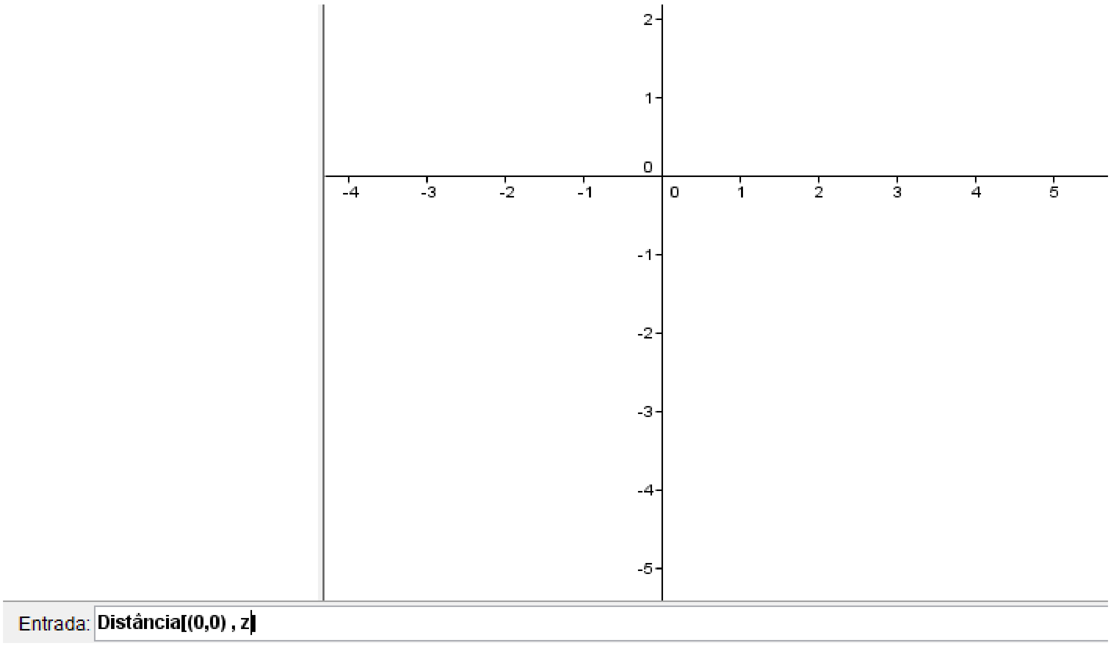


Figura 51: Cálculo do módulo do Número Complexo z.

Em seguida obtemos o módulo do Número Complexo z. Essa distância é representada por $a = 5$, como mostra a figura 52.

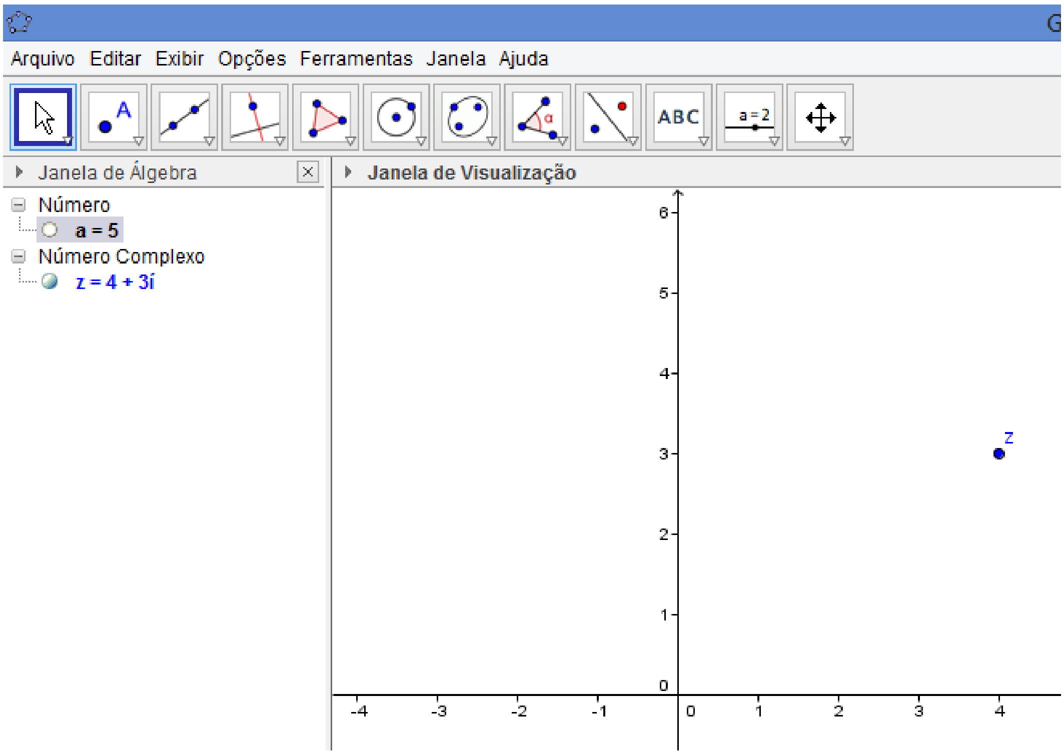


Figura 52: Módulo do Número Complexo z.

4.6- ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO.

É o ângulo orientado θ formado pelo eixo real e o vetor correspondente ao Número Complexo.

Argumento principal são os ângulos compreendido no intervalo de $(-\pi, \pi]$.

$$\theta = \arg(z)$$

Geometricamente temos:

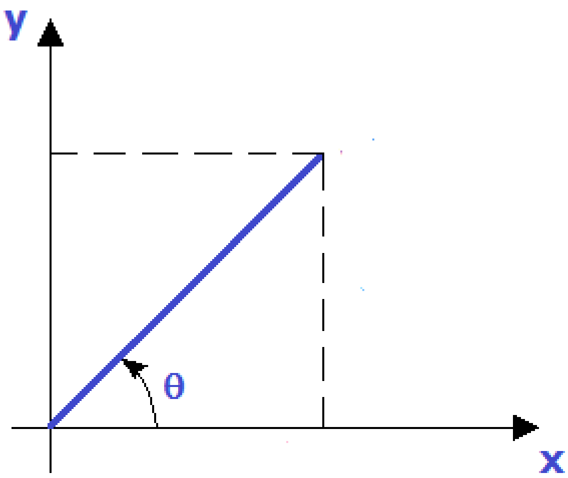


Figura 53: Plano Complexo

4.7- DISTÂNCIA ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS.

Sejam z_1 e z_2 Números Complexos. Dizemos que a distância entre z_1 e z_2 é igual a $|z_1 - z_2|$.

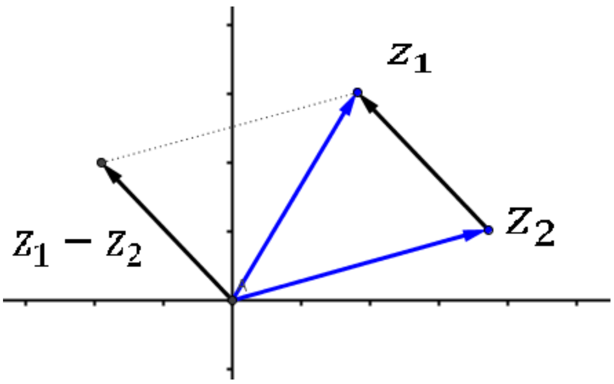


Figura 54: Diferênca entre Números Complexo

Observando a figura 54, podemos interpretar geometricamente a distância entre $z_1\ e\ z_2$ como sendo o módulo do Número Complexo $z_1 - z_2$.

Exemplo 2: Qual o lugar geométrico do Número Complexo z tal que $|z - 2 - 3i| = 5$.

Solução: Podemos reescrever a expressão acima como $|z-(2+3i)|=5$. Usando a definição de distância, podemos interpretar a expressão acima como sendo a distância do Número Complexo z ao Número Complexo $2+3i$ é sempre igual a cinco. Isso nos fornece uma circunferência de centro no ponto $(2,3)$ e de raio 5. Como podemos observar na figura 55.

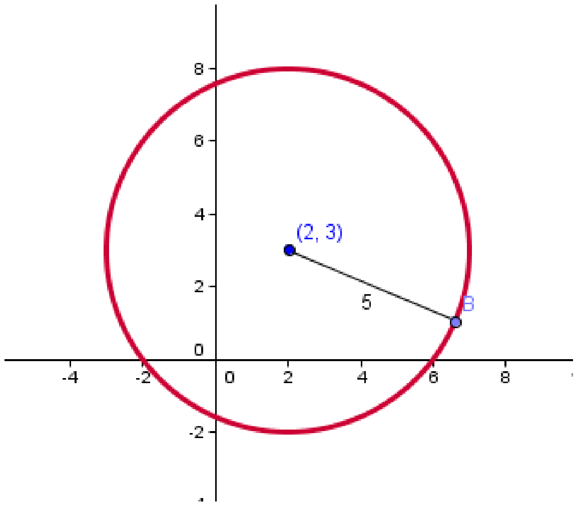


Figura 55: Lugar Geométrico do Exemplo 2

Exemplo 3: Encontre o lugar geométrico do Número Complexo z tal que $|z+1|=|z-5|$.

Solução: Reescrevendo a expressão acima temos: $|z-(-1)|=|z-5|$ podemos interpretar a expressão acima como sendo a distância do Número Complexo z a 1 deve ser igual a distância do Número Complexo z a 5. Isso nos lema a mediatriz perpendicular ao eixo das abcissas que passa pelo ponto (2, 0), como mostra a figura abaixo:

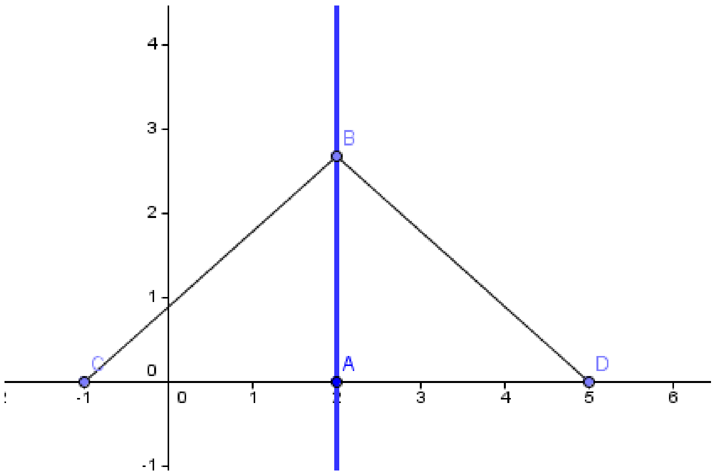


Figura 56: Lugar Geométrico do Exemplo 3

Exercício 2: Qual o lugar geométrico do Número Complexo w tal que $|w-3|=3$

Exercício 3: Determine o lugar geométrico que satisfazem as seguintes condições:

$|z-2-3i|=5$ e $|z+1|=|z-5|$.

4.8- A GEOMETRIA DA ADIÇÃO E DA MULTIPLICAÇÃO

Veremos como se traduz as operações de adição e multiplicação pensando nos Números Complexos como vetores do plano, utilizando as propriedades citadas na definição.

Adição entre Números Complexos

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{i})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\boldsymbol{i})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})\boldsymbol{i}$$

Interpretação Geométrica da Soma

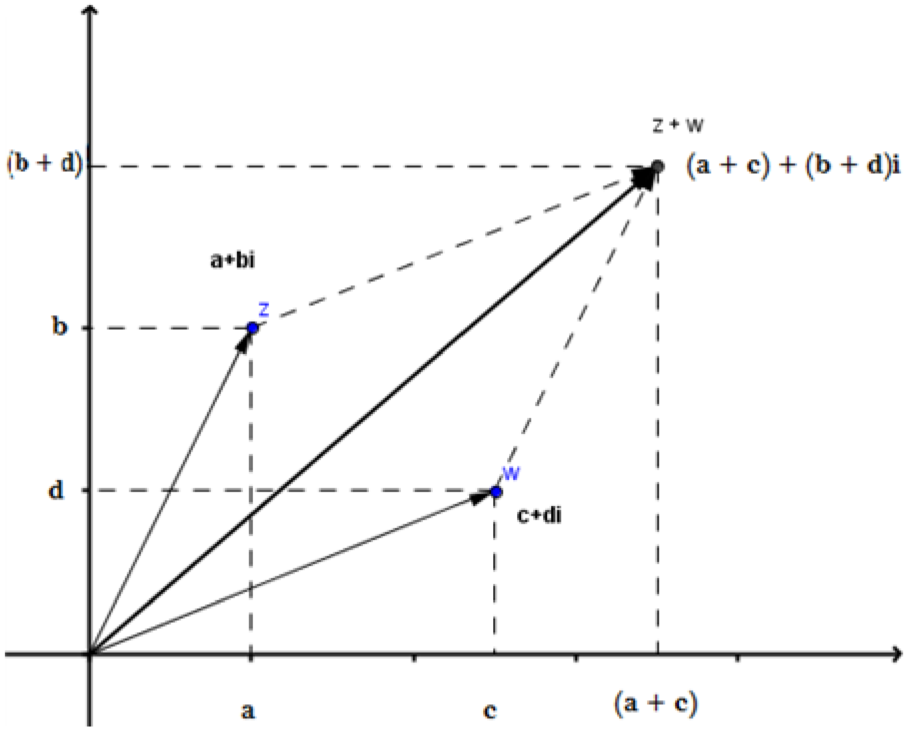


Figura 57: Interpletação Geométrica da Soma entre Dois Números Complexos

Multiplicação entre Números Complexos

O produto entre dois Números Complexos algebricamente e realizado da seguinte forma:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{di}) = \boldsymbol{ac}+\boldsymbol{adi}+\boldsymbol{bci}+\boldsymbol{bdi^2} = \boldsymbol{ac}-\boldsymbol{bd}+(\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bc})\boldsymbol{i}$$

Falaremos em multiplicação de Números Complexos e sua interpretação gráfica com mais rigor ao definir a forma trigonométrica de um Número Complexo, porém, podemos adiantar que um Número Complexo $z = a + bi$ fica bem definido quando conhecemos o seu módulo (distância da origem do sistema até o ponto (a, b)) e o seu argumento (ângulo formado entre o eixo das abscissas até o segmento que define o Número complexo $\overline{Oz}$). Desse modo, multiplicar dois Números Complexos é basicamente multiplicar os seus módulos e somar os seus argumentos. Da mesma forma, dividir dois Números Complexos é dividir seus módulos e subtrair os seus argumentos.

Considerando somente Números Complexos unitários, ou seja, Números Complexos que tenha módulo igual a um, multiplicar ou dividir Números Complexos é basicamente realizar rotações em um círculo unitário.

Iremos mostrar esse fato utilizando o programa de geometria dinâmica GeoGebra.

Sejam $z = 1 + 2i$ e $w = 3 + i$ inserido na caixa de entrada do GeoGebra, os Números Complexos são representados como mostra a figura 58.

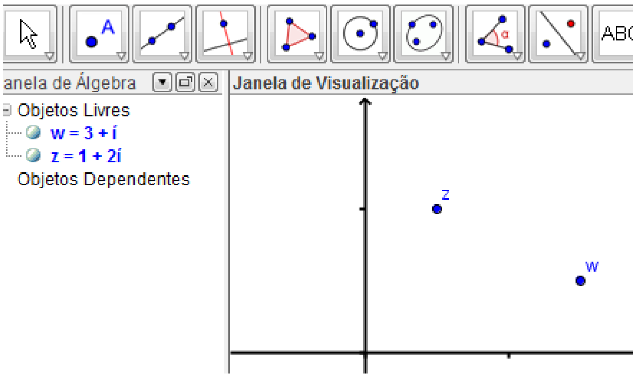


Figura 58: Representação dos Númeoros Complexos no Geogebra

Inserindo na caixa de entrada do GeoGebra a operação (1+2i)*(3+i) como mostra a figura 59, o programa realiza a multiplicação dos Números Complexos.

Figura 59: Multiplicação entre Números Complexos no Geogebra

Onde o resultado da operação que é o Número Complexo $z_1 = 1 + 7i$ como podemos observar na figura 60.

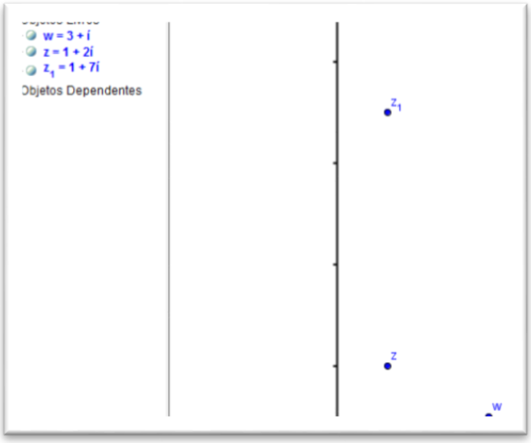


Figura 60: Resultado da Multiplicação Entre dois Números Complexos no Geogebra

Agora, abrindo a 6ª janela do GeoGebra.

1° passo: Clicando em círculo dados centro e raio, construímos um círculo unitário com centro na origem:

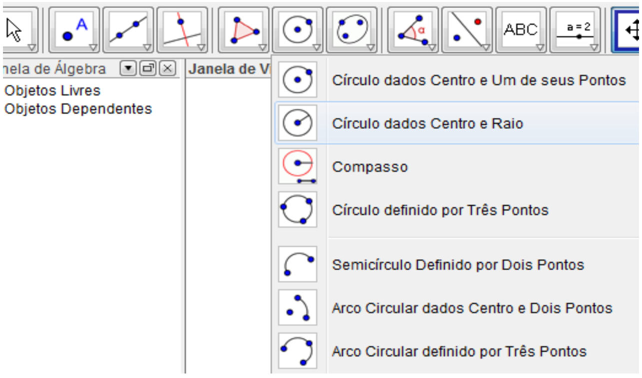


Figura 61: Construção do circulo de raio 1 no Geogebra

2° passo: Clicamos na origem do sistema e colocamos 1 para o raio.

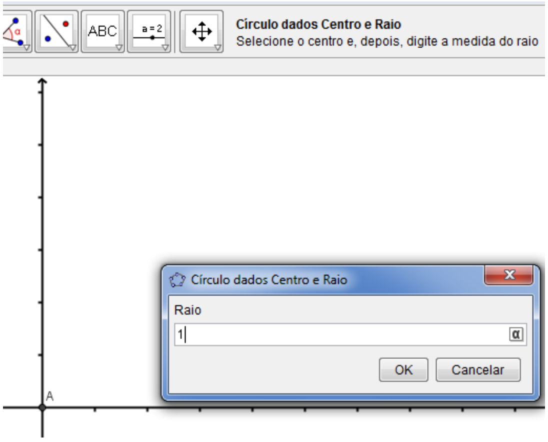


Figura 62: Construção do circulo de raio 1 no Geogebra

3° passo: Clicamos em OK e está construído o círculo unitário como podemos observar na figura 63.

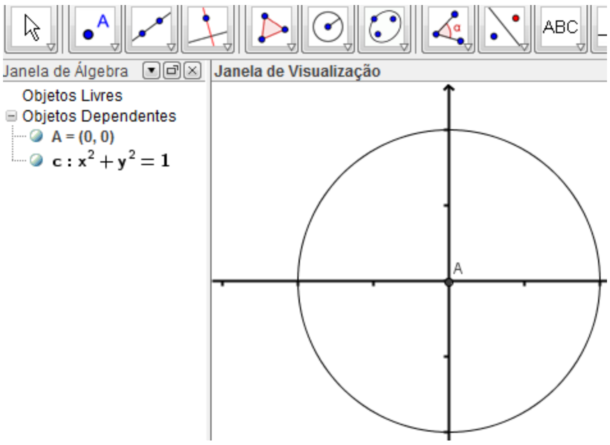


Figura 63: Circulo de raio 1 no Geogebra

Indo na 2ª janela do GeoGebra e selecionando a função novo ponto, podemos inserir dois pontos B e C no perímetro do círculo.

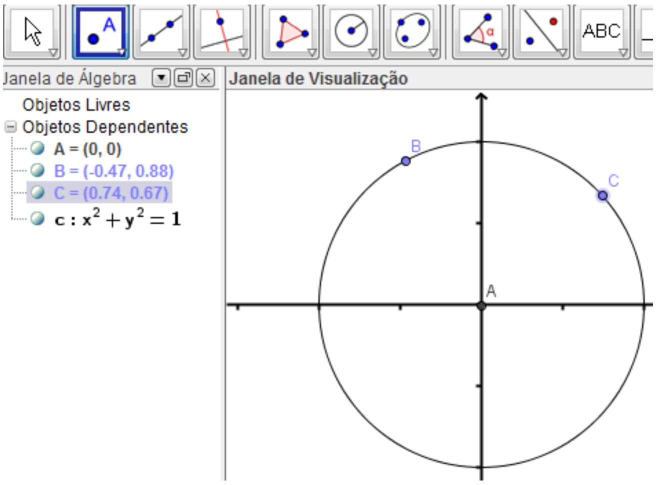


Figura 64: Representação de pontos no circulo de raio 1 no Geogebra

Indo na 3ª janela do GeoGebra e selecionando a função vetor definido por dois pontos podemos construir os vetores $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

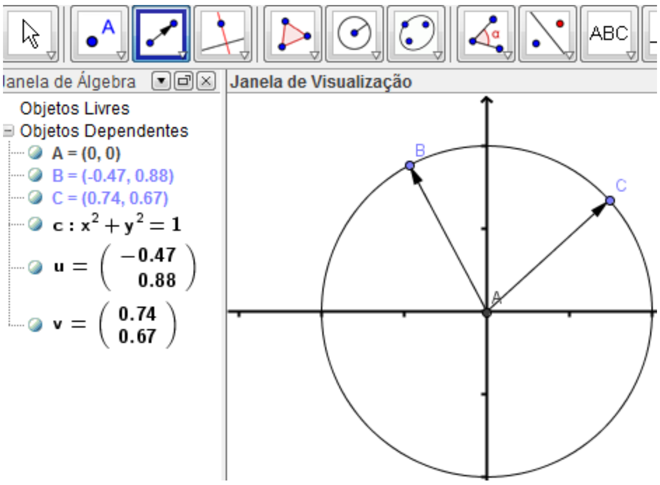


Figura 65: Representação de Vetores inscrito no circulo no Geogebra

Clicando com botão direito do mouse em um dos vetores e selecionando a função propriedade, podemos perceber que os pontos estão escritos em coordenadas cartesianas. Podemos reescrever esses pontos como Números Complexos como podemos ver na figura 66.

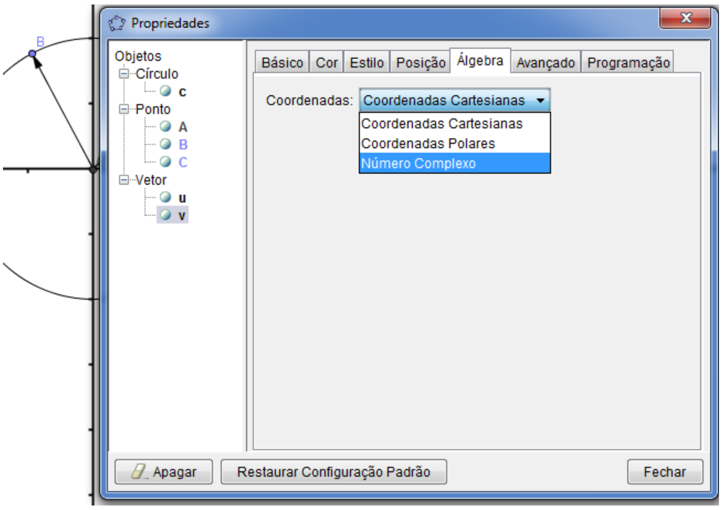


Figura 66: Representação de Números Complexos No Geogebra

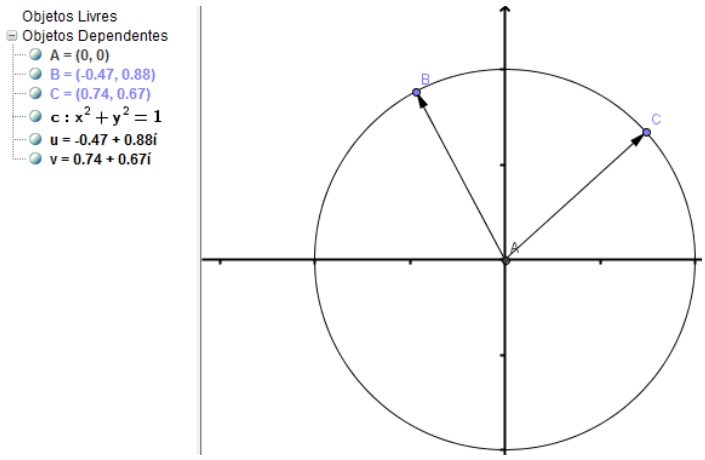


Figura 67: Representação de Números Complexos no Geogebra

De acordo com as construções realizadas acima, os Números Complexos, u e v são unitários, pois os pontos A e B intersecta o círculo unitário. Agora vamos descobrir os seus argumentos utilizando o Geogebra. Sejam D e E os pontos de interseção entre o círculo e o eixo das abscissas.

Na 8ª janela do GeoGebra e selecionando a função Ângulo, podemos medir os argumentos dos Números Complexos u e v.

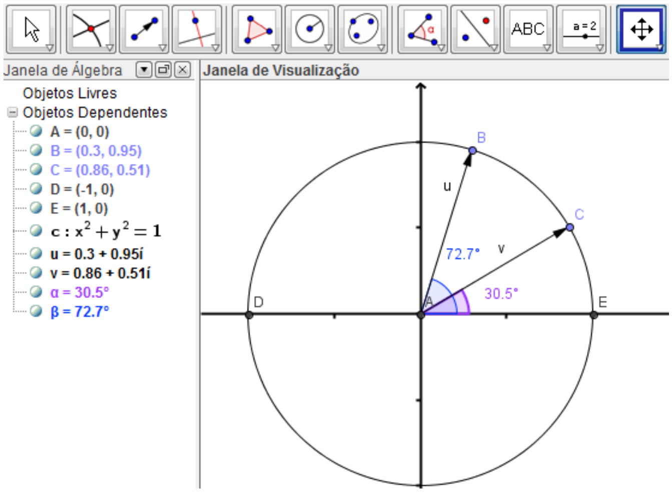


Figura 68: represenração dos argumentos de Números Complexos no Geogebra

Logo, os Números Complexos, u e v têm argumentos 72,7° e 30,5° respectivamente.

Pela definição de produto entre Números Complexos, u*v deve ser um Número Complexo unitário de argumento 72,7° + 30,5° = 103,2°.

O que pode ser confirmado realizando o produto entre Números Complexos no GeoGebra:

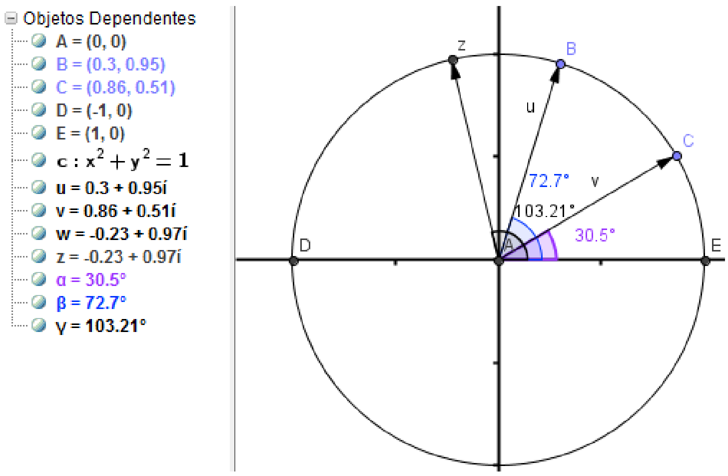


Figura 69: Produto entre dois Números Complexos No Geogebra

4.9- ROTAÇÃO E HOMOTETIA.

Rotações e homotetias são transformações no plano definidas por funções que associa a cada ponto do plano ou outro ponto também do plano através de certas regras. “Uma transformação T no plano Π é uma função $T: \Pi \rightarrow \Pi$ que associa a cada ponto A do plano um outro ponto $A' = T(A)$ do plano chamado imagem de A por T” (Wagner, 2007, p.70). As transformações rotação e homotetia são funções bijetivas pois pontos distintos possuirão sempre imagens distintas e cada ponto desse plano será imagem de outro ponto desse plano.

Uma **Rotação** em torno da origem do sistema cartesiano seria um movimento circular de um ponto ao redor da origem do sistema cartesiano, ou seja, sendo a origem do sistema o ponto O (o sentido positivo é o anti-horário) e dado uma ângulo α, a rotação de centro O e ângulo α é a transformação que a cada ponto A do sistema orientado, associa um ponto A' de tal forma que $\overline{OA} = \overline{OA'}$ e $\widehat{AOA'} = \alpha$ como mostra a figura 70.

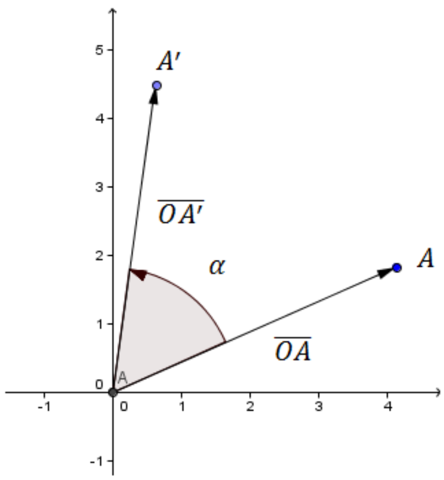


Figura 70: Rotação de um Vetor

Teorema:

Seja z um Número Complexo, zi é o resultado da rotação de z em torno da origem por um ângulo de 90°.

Demonstração:

Para demonstrar esse teorema utilizaremos congruência de triângulos.

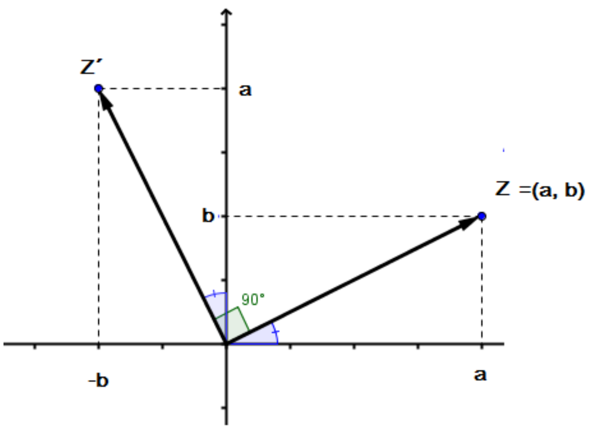


Figura 71: Rotação segundo um ângulo de 90° de um Número Complexo

Seja o Número Complexo $z = a + bi$, por hipótese, $|z| = |z'|$ e $z\hat{O}z' = 90°$ queremos mostrar que $z' = zi$. Ora, $|z| = |z'|$ é a hipotenusa dos triângulos retângulos construídos na figura acima, e esses triângulos tem um ângulo agudo congruente, isso é o suficiente para mostrar que os dois triângulos são congruentes. Logo, $z' = (-b, a) = -b + ai = (a + bi)i = zi$. Portanto, fica demonstrado o teorema.

Com esse teorema poderemos resolver alguns exemplos interessantes.

Exemplo 4: Seja o segmento $\overline{AB}$ um lado de um quadrado ABCD cujas coordenadas de A e B são $A = (2, 1)$ e $B = (-3, 5)$. Determine os outros vértices do quadrado.

Solução: Inicialmente podemos perceber que o problema acima possui duas soluções como mostra a figura abaixo.

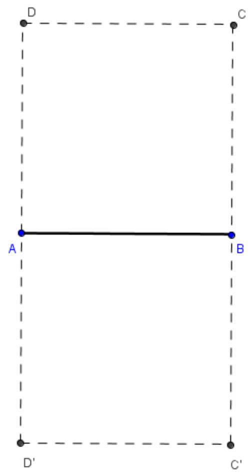


Figura 72: Quadrado ABCD e ABC'D'

Utilizando o teorema da rotação, podemos perceber que $\overline{AD} = \overline{AB}$ girado 90° em torno da origem, ou seja, $\overline{AD} = \overline{AB}.i$, logo, $D - A = [B - A].i$, $D = A + [B - A].i$ $D = 2 + i + [-3 + 5i - (2 + i)].i = 2 + i + (-5 + 4i).i = 2 + i - 5i - 4 =$ $-2 - 4i$. Logo, $D = (-2, -4)$. Para encontrar o ponto C não há necessidade de utilizar rotação, pois $\overline{BC} = \overline{AD}$. (Observe que o ponto C também poderia ser encontrado fazendo a seguinte rotação, $\overline{BC} = \overline{BA}.(-i)$)

$\overline{BC} = \overline{AD} = C - B = D - A \rightarrow C = B + D - A = C = (-3,5) + (-2, -4) - (2,1)$

$C = (-7, 0)$.

Para encontrar os pontos C´e D´, não há necessidade de utilizar rotação, basta perceber que $A = \frac{D+D´}{2}$ e $B = \frac{C+C´}{2}$. (Como A e B são pontos médios dos segmentos $\overline{DD´}$ *e* $\overline{CC´}$, respectivamente. (Vamos utilizar o fato da geometria analítica de que o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ é determinado da seguinte forma: $M = \frac{A+B}{2}$)

$A = \frac{D+D´}{2} \Rightarrow D´ = 2A - D \Rightarrow D´ = (4,2) - (-2, -4) = (6,6)$

$B = \frac{C+C´}{2} \Rightarrow C´ = 2B - C = (-6,10) - (-7,0) = (1,10)$

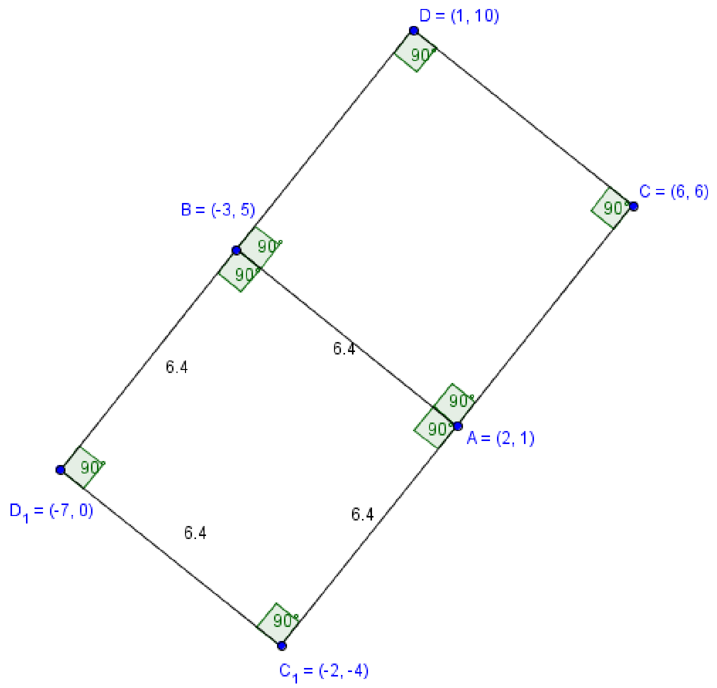


Figura 73: Solução do Exemplo 4

Exercícios como esses não pode ficar de fora dos livros didáticos pois ele mostra claramente uma das principais propriedades dos Números Complexos: A Rotação. Podemos também trabalhar com os alunos construção de triângulos equiláteros, hexágono, dentre outros exercícios que envolvam rotação de ângulo e/ou homotetia de segmento.

Exemplo 5: Seja o segmento $\overline{AC}$ a diagonal do quadrado ABCD cujas coordenadas de A e C são $A = (1, 2)$ e $C = (7,6)$. Determine os vértices B e D do quadrado.

Solução: Podemos perceber, segundo a figura 74, que o problema tem apenas uma solução.

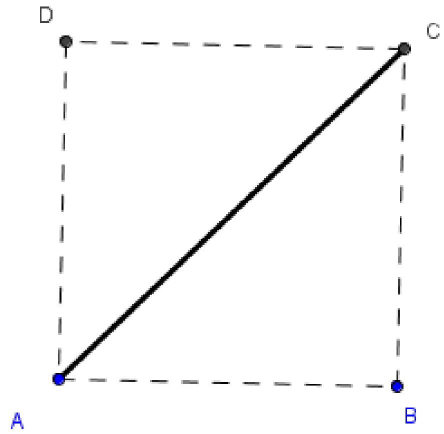


Figura 74: Quadrado ABCD

Esse problema tem essencialmente duas maneiras de resolvê-lo, utilizando rotação de modo que, uma delas teríamos que realizar uma rotação de 45° e outra utilizando uma rotação de 90°. Vamos resolver fazendo uma rotação de 90°.

Sabemos que $M = \frac{A+C}{2}$ é o ponto médio de $\overline{AC}$. Logo $M = \frac{(1,2)+(7,6)}{2} = \frac{(8,8)}{2} = (4,4)$.

Podemos perceber que o ponto D é igual a $\overline{MC}$ girado 90°, ou seja, $\overline{MD} = \overline{MC}.i$.

$D - M = [C - M].i = M + [C - M].i = 4 + 4i + [7 + 6i - (4 + 4i)].i$

$D = 4 + 4i + [3 + 2i].i = 4 + 4i + 3i - 2 = 6 + 7i = (2,7)$

Para encontrar o ponto B, basta observar que $M = \frac{D+B}{2} \Longrightarrow B = 2M - D$

$B = (8,8) - (2,7) = (6,1)$

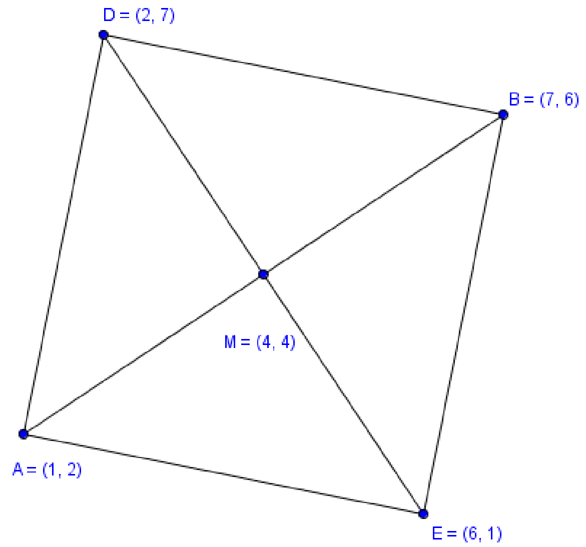


Figura 75: Solução do Exemplo 5

Exercício 4: (Problema do Tesouro- Clássico)

Dois piratas decidiram enterrar um tesouro em uma ilha. Escolheram como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, mede o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo um ângulo de 90°, à direita e caminha o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde faz uma marca. Voltam à árvore, mede o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobra a esquerda, segundo um ângulo de 90°, e caminha o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde faz outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas. Anos mais tarde, os dois piratas voltaram à ilha e decidiram desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais. Então uns dos piratas decidiu arriscar. Escolhe ao acaso um ponto na ilha e diz: “Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui.” Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira parte, dobra a direita etc, e encontra o tesouro. A pergunta é: esse pirata era sortudo ou era matemático?

A **homotetia** é outra transformação que está incluída na multiplicação entre Números Complexo, pois, a mesma consiste em uma ampliação ou a redução de distâncias a partir de um ponto fixo. Se multiplicar Números Complexos consiste basicamente em multiplicar seus módulos e somar seus argumentos, na multiplicação de um Número Complexo por outro com módulo diferente de um, a homotétia é natural.

Wagner (2007) define a homotetia da seguinte forma. “Fixando um ponto O no plano Π e dado um número real $k \neq 0$, *a homotetia de centro O e razão k* é a transformação que a cada ponto A do plano Π associa o ponto $A' = H_{O,k}(A)$ tal que $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$”(Wagner, 2007, p.80).

4.1.1- FORMA POLAR DE UM NÚMERO COMPLEXO.

Em sua forma polar, um Número Complexo fica definido de acordo com a figura 76:

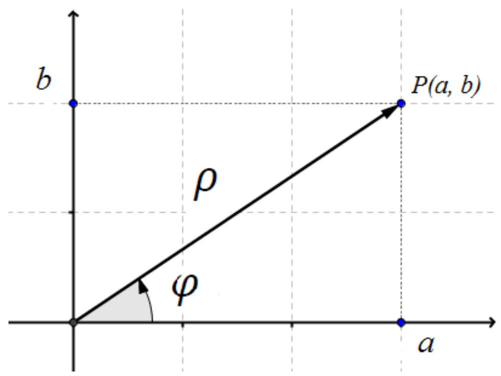


Figura 76: Plano Complexo

Onde, $\boldsymbol{z = a + bi = (a, b),\ \ a, b \in R, \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$ **e** $\boldsymbol{\varphi = argumento\ do\ complexo\ z}$

Desse modo, usando o Teorema de Pitágoras e a trigonometria em um triângula retângulo temos:

$$sen\varphi = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho sen\varphi$$

$$cos\varphi = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho cos\varphi$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Assim temos,

$$z = a + bi = \rho cos\varphi + i\rho sen\varphi = \rho(cos\varphi + isen\varphi)$$

Onde, $z = \rho(cos\varphi + isen\varphi)$ é conhecido como **forma polar** ou **representação trigonométrica** de um Número Complexo.

Exemplo 6. Para o Número Complexo $z = -1 + \sqrt{3}i$, temos

$$|z| = \rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Além disso,

$cos\theta = -\frac{1}{2}$ e $sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, um dos valores possíveis para θ é $\frac{2\pi}{3}$ e a forma trigonométrica de z é

$$z = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3}\right).$$

Geometricamente temos

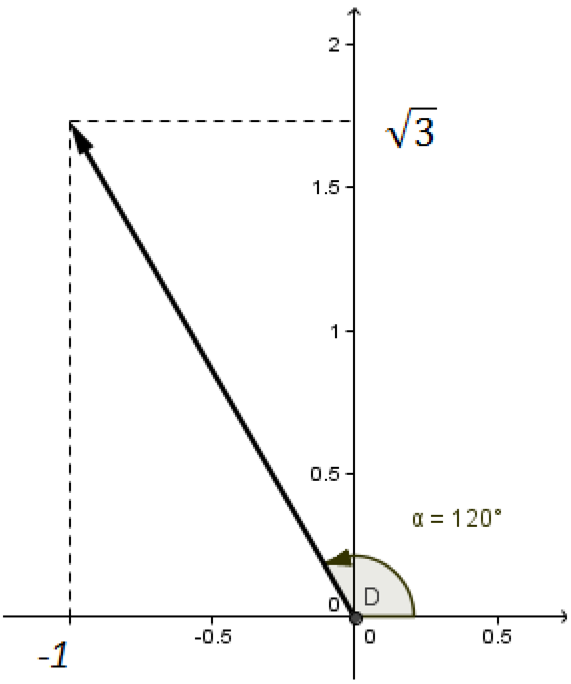


Figura 77: Representação do Exemplo 6

Agora podemos interpretar geometricamente a **multiplicação** entre dois Números complexos.

Sejam os Números Complexos,

$$z_1 = \rho_1(cos\varphi_1 + isen\varphi_1) \quad e \quad z_2 = \rho_2(cos\varphi_2 + isen\varphi_2)$$

Onde z_1 e z_2 estão representados no plano Complexo, como mostra a figura 78.

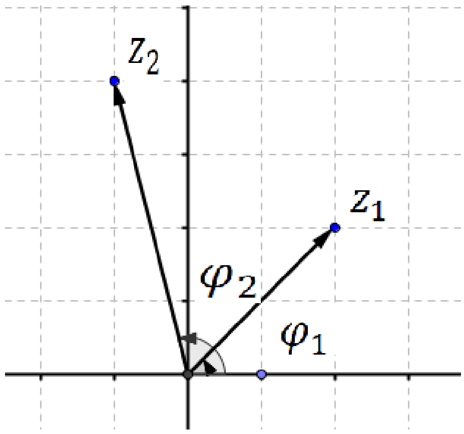


Figura 78: Representação geométrica dos Números Complexos z_1 e z_2

Vamos afirmar que os Números Complexos z_1z_2 é representado no plano Complexo conforme a figura a seguir:

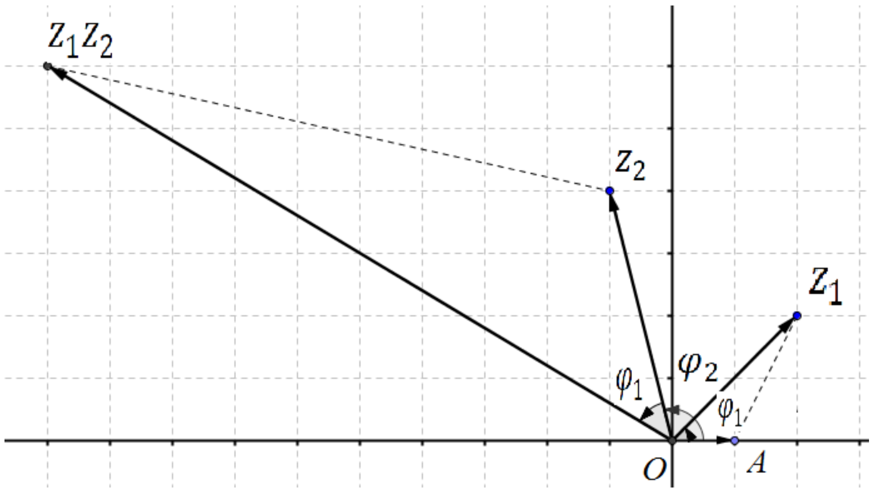


Figura 79: Representação Geométrica do produto entre os Números Complexos z_1 e z_2

Em que os triângulos OAz_1 e $Oz_2(z_1z_2)$ são semelhantes.

Justificaremos este fato utilizando a forma polar dos Números Complexos.

Observem que, $z_1z_2 = [\rho_1(cos\varphi_1 + isen\varphi_1)][\rho_2(cos\varphi_2 + isen\varphi_2)] =$

$$= \rho_1\rho_2[(cos\varphi_1 cos\varphi_2 - sen\varphi_1 sen\varphi_2) + i(sen\varphi_1 cos\varphi_1 + sen\varphi_2 cos\varphi_2)] =$$

$$= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isen(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Temos que $O\hat{A}z_1 = O\widehat{z_2}(z_1 z_2)$ e $\frac{\rho_1}{1} = \rho_1$, e $\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2} = \rho_2$ logo, os triângulos são semelhantes.

Exercício 5: (RPM N° 1) Construímos dois triângulos equiláteros: ABE interno e BFC externo ao quadrado ABCD. Prove que os pontos D, E e F se localizam na mesma reta. (Sug: comece por uma figura e...).

Foram apresentadas soluções desse problema na RPM 2. Uma solução foi batizada com geométrica e outra como analítica. Agora utilizaremos a álgebra dos Números Complexos para apresentar alternativa para outra solução do problema.

Solução: Colocando eixo coordenado e atribuindo a unidade para o lado do quadrado, como mostra a figura abaixo, temos:

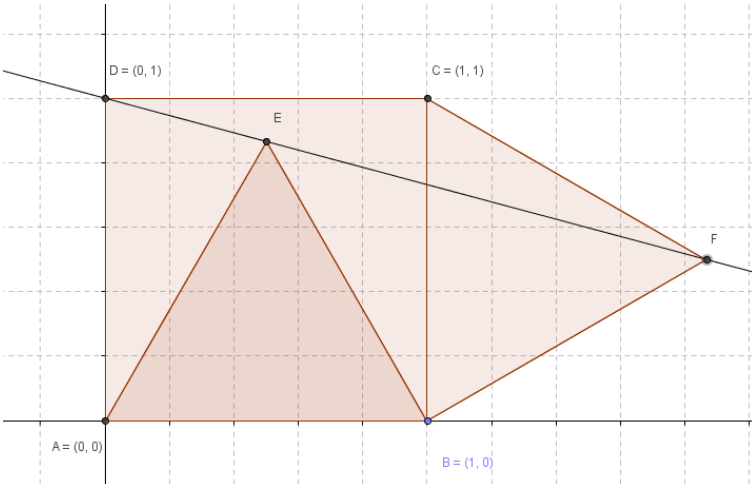


Figura 80: Solução do Exemplo 7

$$A = (0{,}0), \qquad B = (1{,}0), \qquad C = (1{,}1), \quad D = (0{,}1).$$

Logo, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \times (cos60° + isen60°) \Rightarrow E - A = B - A\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow E = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} \times (\cos(-60°) + isen(-60°) \Rightarrow F = (\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Para resolver o problema, basta constatar que os pontos D, E e F estão alinhados, desse modo, utilizaremos um resultado da geometria analítica, que diz o seguinte:

Para que os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ estejam alinhados, temos que ter:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$, os pontos D, F e F são alinhados.

Exemplo 8: Seja o segmento $\overline{AC}$ a diagonal do quadrado ABCD cujas coordenadas de A e C são $A = (1, 2)$ e $C = (7,6)$. Determine os vértices B e D do quadrado.

Solução: Resolveremos esse problema realizando uma rotação de 45° e uma homotetia.

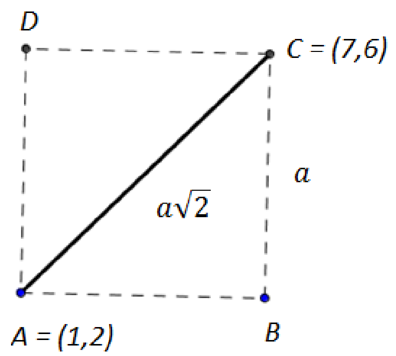


Figura 81: Quadrado ABCD

Podemos achar o ponto D com uma rotação de 45° no vetor AC, no sentido anti-horário porém, somente a rotação não basta pois $AD = a$ e $AC = a\sqrt{2}$. Desse modo precisamos fazer uma homotetia dividindo o vetor AC por $\sqrt{2}$. Assim

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot (cos45° + isen45°)}{\sqrt{2}}$$

$$D - (1 + 2i) = \frac{(6 + 4i)\left(\sqrt{2}/_2 + \sqrt{2}/_2\, i\right)}{\sqrt{2}} \Rightarrow D = (1 + 2i) + (6 + 4i)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \Rightarrow$$

$$D = 2 + 7i$$

Desse modo, podemos concluir que o ponto $D = (2,7)$.

Podemos calcular B fazendo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $B - A = C - D$, assim temos que,

$$B = A + C - D = (1,2) + (7,6) - (2,7) \Rightarrow B = (6,1).$$

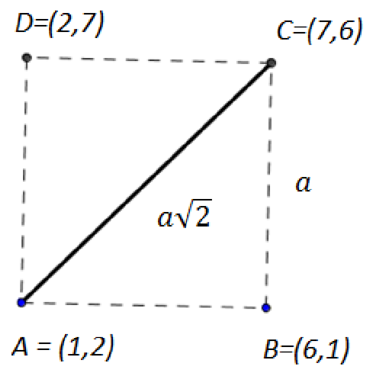


Figura 82: Solução do Exemplo 8

4.1.2- OPERAÇÕES OPOSTAS

Consideramos a subtração e a divisão como operações opostas da adição e da multiplicação, respectivamente.

A **subtração** entre dois Números Complexos z e w pode ser definida como a adição entre o Número Complexo z e o simétrico de w, definido como $-w$. O **simétrico** do Número Complexo $w = a + bi$ é o número$-w = -(a + bi)$, ou seja $-w = (-a) + i(-b)$ que é correspondente a uma rotação de 180º do afixo de w em torno da origem. Em notação polar, o simétrico de $w = \rho(cos\theta + isen\theta)$ é igual a $-w = \rho[-\cos(-\theta) + isen(-\theta)]$.

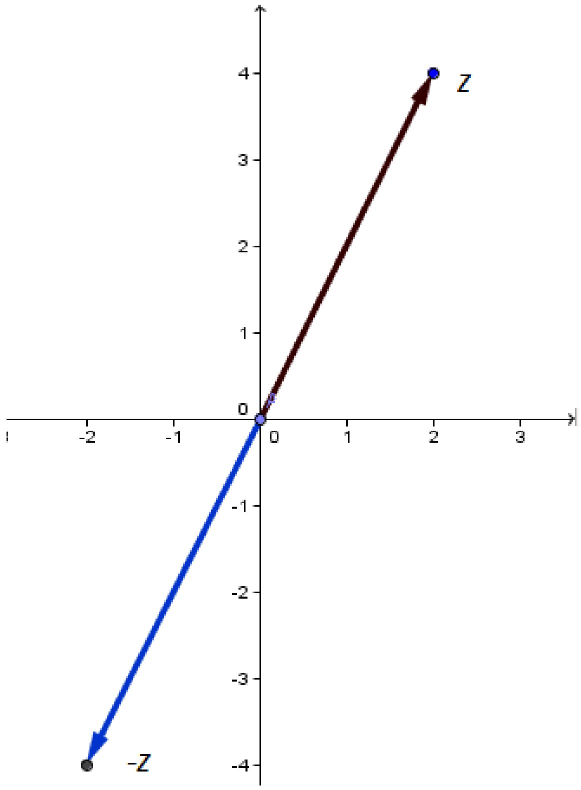


Figura 83: representação geométrica do Número Complexo z

Desse modo, $z - w = z + (-w)$. Com essa definição, podemos utilizar a regra do paralelogramo para interpretar geometricamente a subtração entre dois Números Complexos, como podemos observar na figura abaixo.

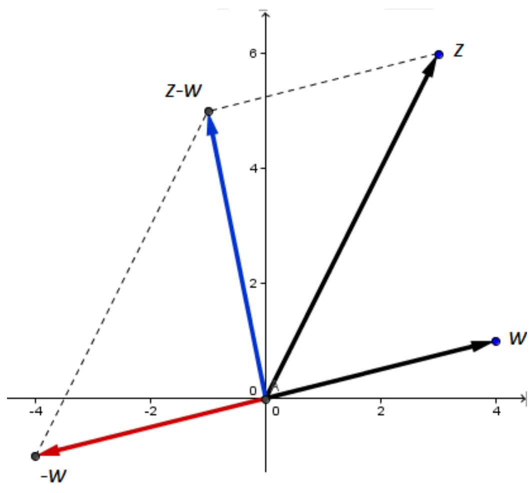


Figura 84: Diferênca entre os Números Complexos z e w

Observando a multiplicação entre Números Complexos em sua forma polar, $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isen(\varphi_1 + \varphi_2)]$ podemos perceber que nessa multiplicação, multiplicamos os módulos e somamos os argumento dos respectivos Números Complexos.

Na **divisão**, definida como sendo,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isen(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Podemos observar que, geometricamente, dividimos os módulos e subtraímos os argumentos dos respectivos Números Complexos.

4.1.3- POTENCIAÇÃO

Da fórmula que estabelecemos para multiplicar dois Números Complexos, aplicando a propriedade associativa da multiplicação podemos definir a multiplicação de n Números Complexos da seguinte forma:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = (\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_n)[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

Onde $\rho_1, \ \rho_2, \ \ldots, \ \rho_n$ e $\theta_1, \ \theta_2, \ldots, \theta_n$ são os módulos e os argumentos dos Números Complexos $z_1, \ z_2, \ldots, z_n$, respectivamente.

Fazendo $z = z_1 = z_2 = \cdots = z_n$, $\rho = \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_n$ e $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n$, podemos definir a potenciação entre Números Complexo como sendo,

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)], n \in \mathbb{Z}$$

Essa expressão é denominada primeira fórmula de De Moivre em homenagem ao matemático francês Abraham de Moivre.

Prova: (Para $n = 0$ ou $n = 1$, a fórmula é óbvia). Para n inteiro maior que 1, a fórmula decorre da aplicação repetida da fórmula da multiplicação. Desse modo, vamos provar a fórmula para o caso de n inteiro negativo.

Seja $n = -k$, com k inteiro negativo. Temos:

$$(\rho[\cos(\theta) + isen(\theta)])^n = (\rho[\cos(\theta) + isen(\theta)])^{-k} = \frac{1}{(\rho[\cos(\theta) + isen(\theta)])^k}$$

$$\frac{1.cos0 + isen0}{\rho^k[\cos(k\theta) + isen(k\theta)]} = \frac{1}{\rho^k} \cdot [\cos(0 - k\theta) + isen(0 - k\theta)]$$

$$\rho^{-k}[\cos(-k\theta) + isen(-k\theta) = \rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)].$$

Exemplo 1. Calcule $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{50}$.

Solução:

Sabemos que $\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ = $2(\cos(60°) + i\ sen(60°))$

Desse modo, $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{50}$= $2^{50}(\cos(50 \times 60°) + i\ sen(50 \times 60°))$ =

$2^{50}(\cos(120°) + i\ sen(120°))$ = $2^{50}(-\frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2})$

4.1.4- RADICIAÇÃO

Vejamos agora como calcular as raízes n-esimas de um Número Complexo, ou seja, calcular z tal que $z = \sqrt[n]{\rho[cos\theta + isen\theta]}$ que é equivalente a determinar os Números Complexos z tais que

$$z^n = \rho[cos\theta + isen\theta].$$

Tomando o Número Complexo $z = \omega[cos\alpha + isen\alpha]$, obtemos

$$(\omega[cos\alpha + isen\alpha])^n = \rho[cos\theta + isen\theta]$$

Utilizando a fórmula para multiplicar Números Complexos, temos

$$\omega^n[\cos(n\alpha) + isen(n\alpha)] = \rho[cos\theta + isen\theta].$$

Pela definição de igualdade entre Números Complexos temos que Números Complexos iguais terão módulos iguais e argumentos congruentes, ou seja, $\omega^n = \rho$ e $n\alpha = \theta + 2k\pi$, com k inteiro.

Daí temos

$$\sqrt[n]{\rho[cos\theta + isen\theta]} = \sqrt[n]{\omega} \cdot \left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

As n raízes de z têm por imagem os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio $\sqrt[n]{\omega}$.

A figura abaixo ilustra a as raízes do Número Complexo $\sqrt[n]{\rho[cos\theta + isen\theta]}$.

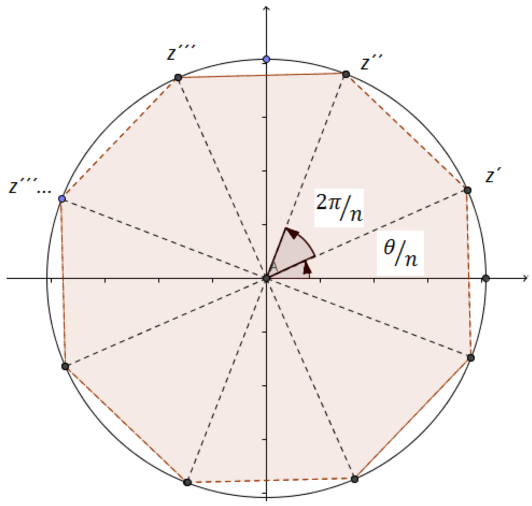


Figura 85: Raízes do Número Complexo $\sqrt[n]{\rho[cos\theta + isen\theta]}$

5- CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Observando as discussões abordadas nesse trabalho, concluímos que os livros didáticos precisarão sofrer alterações no tocante ao conteúdo Números Complexos. Essas alterações não poderão ser, todavia, tão somente referente a aspectos geométricos contidos na definição do mesmo mas, defendemos uma interligação entre os conteúdos Números Complexos e Geometria Analítica pois, acreditamos que a união dos mesmos trará uma potencialização em relação às resoluções de problemas geométricos. Defendemos também que retirar o conteúdo Números Complexos dos livros didáticos não nos trará benefícios algum, em relação ao amadurecimento matemáticos dos alunos, pois o mesmo nos traz uma grande oportunidade para trabalharmos os conceitos rotação, translação e homotetia.

6- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CARNEIRO, José Paulo. A Geometria e o Ensino dos Números Complexos, 2004. Disponível em < http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2013.

[2] CARNEIRO, José Paulo. A ilha do tesouro, dois problemas e duas soluções In: **Revista do Professor de Matemática**, n. 47. SBM, 3° quadrimestre de 2001.

[3] COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

[4] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar Volume 6**. 6 ed. – São Paulo: Atual, 1993.

[5] LIMA, E. et al. **A Matemática do Ensino Médio Volume 1.** - 6 ed.- Rio de Janeiro: SBM 2006.

[6] LIMA, E. et al. **A Matemática do Ensino Médio Volume 2.** - 6 ed.- Rio de Janeiro: SBM 2006.

[7] LIMA, E. et al. **A Matemática do Ensino Médio Volume 3.** - 6 ed.- Rio de Janeiro: SBM 2006.

[8] LIMA, E. et al. **A Matemática do Ensino Médio Volume 4.** Rio de Janeiro: SBM 2010.

[9] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Sociedade Brasileira de Matemática.1991.

[10] LIMA, E. et al. **Exames de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

[11] LINTZ, R.C. **História da Matemática** / Rubens G. Lintz. –Blumenau: Ed. Da FURB, 1999.

[12] Luiz Roberto Dante – Matemática, 1º edição _São Paulo: Ática 2008, Volume Único

[13] MOTTA, Edmilson. *Aplicações dos Números Complexos à geometria*. *Eureka*!, nº 6.

[14] Paiva, Manoel – Matemática, 1º edição –São Paulo: Moderna, 2009 - Volume 3

[15] Números Complexos. **Professor Luiz Henrique**. Rio de Janeiro. Cursos do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio. 23 de julho de 2008. 1 videocassete (65min): VHS. NTSC, son., color. Disponível em: <http://video.impa.br/index.php?page=julho-de-2008>. Acesso em: 15 março de 2013

[16] Números Complexos. **Professor Luciano**. Rio de Janeiro. Cursos do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio. 26 de Janeiro de 2011. 1 videocassete (67min): VHS. NTSC, son., color. Disponível em: < http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2011>. Acesso em: 15 março de 2013

[17] Números Complexos - Parte 1. **Professor Morgado**. Rio de Janeiro. Cursos do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio. 29 de Janeiro de 2002. 1 videocassete (65min.): VHS. NTSC, son., color. Disponível em: < http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2002>. Acesso em: 15 março de 2013

[18] Números Complexos - Parte 2. **Professor Morgado**. Rio de Janeiro. Cursos do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio. 30 de Janeiro de 2002. 1 vídeo-aula (74,08 min.): VHS. NTSC, son., color. Disponível em: < http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2002>. Acesso em: 15 março de 2013

[19] Números Complexos - Parte 1. **Professor Morgado**. Rio de Janeiro. Cursos do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio. 23 de Janeiro de 2006. 1 videocassete (75min): VHS. NTSC, son., color. Disponível em: < http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2006>. Acesso em: 15 março de 2013

[20] Números Complexos - Parte 2. **Professor Morgado**. Rio de Janeiro. Cursos do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio. 25 de Janeiro de 2006. 1 videocassete (74min.): VHS. NTSC, son., color. Disponível em: < http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2006>. Acesso em: 15 março de 2013

[21] OLIVEIRA, Osvaldo. Teorema Fundamental da Álgebra, 2011. Disponível em <http://www.ime.usp.br/~oliveira/TFACOLEGIAL5.pdf>. Acesso em: 22 de fevereiro de 2013.

[22] OLIVEIRA, C. **NÚMEROS COMPLEXOS Um estudo dos registros de representações e de aspectos gráficos:** 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontífica Universidade Católica de São Paulo PUC/SP.

[23] REVISTA DE ENSINO DE ENGENHARIA, v. 28, n. 2, p. 54-63, 2009 – ISSN 0101-5001. Disponível em

<http://www.upf.br/seer/index.php/ree/article/view/248>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2013

[24] Revista do Professor de Matemática n° 1. SBM, Seção Problemas.

[25] WAGNER, Eduardo com a colaboração de José Paulo Q. Carneiro – Construções Geométricas – 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.