



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

José Cláudio da Silva Teodista

**Uma apresentação da construção dos números
reais usando sequência de Cauchy para os
professores do Ensino Básico**

Campina Grande - PB

9 de agosto de 2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



José Cláudio da Silva Teodista

**Uma apresentação da construção dos números reais
usando sequência de Cauchy para os professores do
Ensino Básico**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho

Campina Grande - PB
9 de agosto de 2023

T314a Teodista, José Cláudio da Silva.
Uma apresentação da construção dos números reais usando sequência de Cauchy para os professores do Ensino Básico / José Cláudio da Silva Teodista. – Campina Grande, 2023.
129 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho".
Referências.

1. Números Reais. 2. Sequências de Cauchy. 3. Matemática – Estudo e Ensino. 4. Professor do Ensino Médio. I. Morais Filho, Daniel Cordeiro de. II. Título.

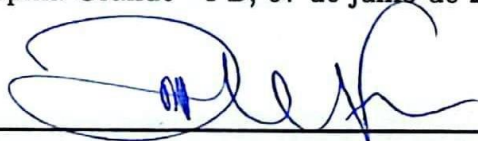
CDU 511.14(043)

José Cláudio da Silva Teodista

**Uma apresentação da construção dos números reais
usando sequência de Cauchy para os professores do
Ensino Básico**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

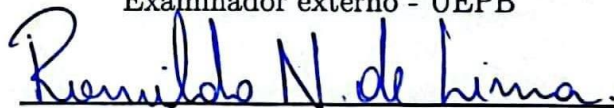
Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 07 de julho de 2023:



Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho
Orientador



Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Examinador externo - UEPB



Dr. Romildo Nascimento de Lima
Examinador interno - UFCG

Campina Grande - PB
Julho/2023

*À minha mãe, Maria da Conceição, e ao meu pai, Cícero Teodista, DEDICO.
In memoriam*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela vida e por me sustentar em todos os momentos em que eu achei que seriam difíceis.

Agradeço a minha esposa Flávia, por ser meu suporte, cuidar tão bem de mim e compreender as minhas ausências para dedicação ao mestrado.

À minha filha, Maria Júlia, é mais um pedido de desculpa por ter comprometido com as atividades do mestrado parte do tempo que eu teria com ela. E também agradeço por me inspirar a ser uma pessoa melhor a cada dia.

À minha cunhada e ex-aluna, Cléssia Luana, por ter cuidado com tanto zelo da nossa casa e da nossa filha. Sei que cuidar de Maria Júlia é quase tão difícil quando construir o conjunto \mathbb{R} .

A todos os meus colegas de turmas (que se transformaram em amigos), pois sem vocês esse caminho teria sido muito mais árduo e, tenho minhas dúvidas se teria conseguido. Então muito obrigado: André, Andresson, Benildo, Carlos, Eli, Érico, Erivan, Gilmar, Gilvandro, Idalice, João, Joy, Rafael, Wellington e Wirander. Vou comer um bode na casa de cada um de vocês.

Agradeço aos meus professores da UFCG pela passagem de conhecimento: Arimateia, Fernando, Marcelo, Jaime, Rodrigo e Deise.

Não posso esquecer do meu coordenador, professor e examinador Romildo que sempre nos tratou com muita sensibilidade, tanto no papel de professor, quanto no papel de coordenador (e espero que no de examinador também). Obrigado por ter contribuído para que essa caminhada fosse um pouco mais leve.

Já que falei da coordenação, não posso esquecer da nossa secretária Isabela, que sempre nos deu todo apoio necessário. Grato pela dedicação.

Também não poderei deixar de expressar meus agradecimentos ao pessoal do apoio que trabalha na UAMat. Então, na pessoa de Aninha, eu estendo meus agradecimentos a todos.

Ao professor Aldo Lourêdo, com quem aprendi muito quando foi meu professor na UEPB e estive na minha banca do TCC da graduação. Muito obrigado pela disponibilidade de ler esse trabalho e dar suas sugestões também nessa dissertação do mestrado.

Tenho que agradecer também ao trio gestor da minha escola: à diretora Emília e às coordenadoras Renata e Katiúscia por terem sido tão compreensivas, sem esse apoio de vocês eu não teria conseguido.

Também queria expressar meus agradecimentos ao professor Luiz Antônio, que era o coordenador quando eu ingressei no PROFMAT a primeira vez, sempre foi muito

atencioso e solícito. Não tive a honra de ser seu aluno, mas o admiro demais também.

Por fim, mas jamais o menos importante, quero agradecer ao meu orientador Professor Daniel Cordeiro que foi peça fundamental para que esse trabalho se realizasse. Obrigado por todos os ensinamentos. Muito mais que matemática, eu aprendi valores que vou levar para vida.

No mais agradeço a todos que torceram por mim, a todos que Brasil a fora, por meio do meu canal do youtube, acompanharam e interagiram nos vídeos sobre o PROFMAT.

*“Assim, permanecem agora estes três:
a fé, a esperança e o amor.
O maior deles, porém, é o amor.
(Bíblia Sagrada, Coríntios 13, 13)*

Resumo

Neste trabalho, faremos a construção formal dos números reais utilizando classes de equivalências de sequências de Cauchy de números racionais. Essa construção visa atender aos professores do Ensino Fundamental e Médio, trazendo uma apresentação com notações que facilitem a compreensão, diferentemente de outras apresentações que trazem uma notação muito simplificada, mas que dificultam ao leitor uma compreensão sólida do tema. Fizemos também um estudo de como esse tema é tratado no Ensino Básico, por meio da análise de livros didáticos e sites da internet (que na atualidade é uma das principais fontes de pesquisa para alunos e professores). Também pesquisamos sobre as habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ligadas aos números reais. Apresentamos os números racionais e suas deficiências, o que justifica a necessidade da completude desse conjunto por meio dos números irracionais. Supondo já conhecidas as expressões decimais finitas ou infinitas e periódicas, pois representam números que podem ser colocados na forma de fração com numerador e denominador inteiros (denominador diferente de zero), nesse trabalho daremos sentido também às expressões decimais infinitas e não periódicas o que ampliará o entendimento de número para além do conjunto dos números racionais.

Palavras-chave: Sequências de Cauchy. Números reais. Professor do Ensino Médio.

Abstract

In this work we will make the formal construction of real numbers using equivalence classes of Cauchy sequences of rational numbers. This construction aims to serve elementary and high school teachers, presenting a presentation with notations that facilitate understanding, unlike other presentations that present a very simplified notation, but that make it difficult for the reader to have a solid understanding of the subject. We also did a study of how this topic is treated in Basic Education, through the analysis of textbooks and internet sites (which is currently one of the main sources of research for students and teachers). We also researched the skills of the Base Nacional Comum Curricular (BNCC) linked to the real ones. We present the rational numbers and their deficiencies, which justifies the need for the completeness of this set through irrational numbers. As I already have an understanding of finite or infinite and periodic decimal expressions, as they represent numbers that can be put in the form of a fraction with an integer numerator and denominator (denominator other than zero), in this work we will also give meaning to infinite and non-repeating decimal expressions which will expand the understanding of number beyond the set of rational numbers.

Keywords: Cauchy sequences. Real numbers. Middle School Teacher.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)	14
Figura 2 – Habilidade da BNCC sobre números naturais no 6º ano	19
Figura 3 – Habilidade da BNCC sobre números racionais no 8ª ano	19
Figura 4 – Habilidade da BNCC sobre números reais no 9º ano	19
Figura 5 – Definição de número no dicionário Houaiss	27
Figura 6 – Definição de número no dicionário Escolar da Língua Portuguesa	28
Figura 7 – Uso de frações na aprovação de uma PEC	29
Figura 8 – Uso de frações em receita culinária	30
Figura 9 – Placa de transito dos Estados Unidos	31
Figura 10 – Simon Stevin	32
Figura 11 – Uso de números decimais no cálculo de área	32
Figura 12 – Existência (ou não) de supremo em \mathbb{Q}	56
Figura 13 – Marcando números racionais na reta	58
Figura 14 – Teorema de Pitágoras	59
Figura 15 – Propriedade arquimediana em $\tilde{\mathbb{R}}$	105
Figura 16 – Ínfimo de um conjunto	125
Figura 17 – Supremo de um conjunto	125
Figura 18 – Aproximação de π na prova do ENEM	130
Figura 19 – $\sqrt{2}$ nos livros didáticos	131

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos	15
1.1.1	Objetivo geral	15
1.1.2	Objetivos específicos	15
1.2	Organização	16
2	A PASSAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS PARA OS NÚMEROS REAIS	18
2.1	A passagem dos números racionais para os números reais na BNCC	18
2.2	A passagem dos números racionais para números reais em livros do Ensino Básico	20
2.3	A passagem dos números racionais para os números reais na Internet	23
2.4	O conceito de número no dia a dia e na mídia	26
2.4.1	O uso de frações no cotidiano	29
2.4.2	O uso de números decimais no cotidiano	31
3	CORPOS	34
3.1	Corpos ordenados	38
3.2	Cópias dos conjuntos numéricos em um Corpo Arquimediano	39
3.2.1	Cópia de \mathbb{N} em \mathbb{K}	39
3.2.2	Cópia de \mathbb{Z} em \mathbb{K}	40
3.2.3	Cópia de \mathbb{Q} em \mathbb{K}	41
4	O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS	42
4.1	Como as expressões decimais infinitas e periódicas são abordadas em livros didáticos e na internet	43
4.1.1	Método encontrado na internet para obtenção de uma fração geratriz	44
4.2	Definições de \mathbb{Q} e representação decimal	46
4.2.1	A equivalência entre Representação Decimal e fracionária	52
4.3	Indo além do Ensino Básico	54
4.4	Os cuidados com a definição de adição e multiplicação usando representação decimal	57
4.5	As deficiências de \mathbb{Q}	58
4.6	O que é número para nós	61

5	SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS	64
5.1	Sequências e os principais resultados que precisaremos	64
5.2	Sequências e representação decimal	71
5.3	Sequências de Cauchy	72
5.4	O Anel das sequências de Cauchy	80
6	A CONSTRUÇÃO DE \mathbb{R}	82
6.1	Construção dos números reais usando sequências de Cauchy	82
6.1.1	Operações em \mathcal{C}	83
6.1.2	Operações em $\tilde{\mathbb{R}}$	90
6.2	O conjunto $\tilde{\mathbb{R}}$ como corpo ordenado e completo	91
6.3	Comparação entre os corpos dos números racionais e dos números reais	108
6.3.1	As operações em \mathbb{R}	111
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	112
	REFERÊNCIAS	113
	APÊNDICES	116
	APÊNDICE A – RELAÇÕES BINÁRIAS	117
A.1	Relações de equivalência	117
A.2	Definindo as operação de Adição e Multiplicação em \mathbb{Q}	120
	APÊNDICE B – PROPRIEDADE ARQUIMEDIANA DOS NÚMEROS REAIS	124
B.1	Ínfimo e Supremo	124
	APÊNDICE C – TEOREMAS USADOS NA DISSERTAÇÃO	128
	APÊNDICE D – OS PRINCIPAIS NÚMEROS IRRACIONAIS APRESENTADOS NO ENSINO BÁSICO	129
D.1	O número π	129
D.2	O número $\sqrt{2}$	130
D.3	O número e	131

1 Introdução

Na grande maioria das sociedades modernas é impensável uma vida sem números. Acordamos logo cedo após termos programado um smartphone para alarmar às 6 horas da manhã, esse dispositivo é todo programado em código binário: 0 e 1. Após tomarmos café da manhã vamos ao trabalho de ônibus, que têm todos praticamente a mesma aparência, mas conseguimos distingui-los por sua numeração. Se a passagem do ônibus custar R\$ 3,60 e você paga com uma nota de R\$ 10,00, então o cobrador de te devolver, de troco, R\$ 6,40. Se você sabe que o trajeto de sua casa ao seu trabalho leva em torno de 45 minutos e que deverá chegar às 8h ao trabalho, sabe que deve sair de casa por volta de 7h e 45 minutos.

Esses exemplos simples podem estar associados a qualquer pessoa. Isso mostra que os números estão impregnados na rotina de praticamente todos os seres humanos. Mas por trás de um uso tão simples se esconde uma grande complexidade que diz respeito a sua construção, principalmente quando se trata do conjunto dos números reais.

Há também de se fazer uma diferenciação entre a matemática praticada pelas pessoas no cotidiano e aquela estudada de maneira formal por aluno, professores e pesquisadores da área. Esse uso dos números feito por estudantes, professores e pesquisadores precisa ter rigor e precisão para não gerar ambiguidades e contradições.

De forma empírica, os números naturais sempre estiveram associados a ideia de contagem. Os números inteiros podem ser construídos por meio dos naturais para sanar deficiências nas operações do tipo $4 - 5$, $10 - 20$, etc. Assim como os racionais surgem como uma razão entre dois inteiros (de denominador não nulo). Até aqui a passagem de um conjunto numérico para outro é feito de forma bastante intuitiva, apesar de necessitar de uma construção rigorosa, que geralmente é feita por meio de relações de equivalência, vide Apêndice A para compreender melhor.

Quando se chega na passagem dos números racionais para os números reais, o procedimento não é tão intuitivo quanto nos conjuntos numéricos anteriores. Tanto é que essa ideia de número irracional surge na Grécia Antiga, com descoberta do número irracional $\sqrt{2}$, por meio da incomensurabilidade entre o lado de um quadrado de lado 1 e sua diagonal, e, só foi concluída sua formalização no século XIX com os trabalhos de Georg Cantor (1845-1918), que construiu os reais por meio de classes de equivalências de sequências de Cauchy e Richard Dedekind (1831-1916) que os construiu por meio dos cortes de Dedekind, para saber sobre essa construção, consulte (SPIVAK, 1999, P. 509).

O coroamento da fundamentação matemática do conceito de número ocorreu somente no final do século XIX, principalmente através dos

trabalhos propostos por Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918) e Giuseppe Peano (1858-1932). Esses estudos foram motivados pelas demandas teóricas que surgiram a partir do volume de conhecimento matemático adquirido a partir do cálculo diferencial e integral de Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), no século XVII. (FERREIRA, 2013, p. 3)

Nesse trabalho, vamos construir os números reais por meio das sequências de Cauchy de números racionais e, faremos de modo que seja compreensível ao professor do Ensino Médio, por meio de diversos exemplos que possam facilitar essa compreensão.

Figura 1 – Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)



Fonte: Wikipédia

Nos livros de Ensino Fundamental e Médio das escolas brasileiras, quase sempre as explicações da passagem do conjunto dos números racionais para os reais são feitas de forma incompleta, o que se justifica pela complexidade do tema, mas acreditamos que esse trabalho poderá contribuir como fonte de consulta para o professor do Ensino Básico.

Não é uma tarefa fácil ser preciso nessas explicações e ainda manter o texto inteligível para o leitor, que são professores do Ensino Básico, os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental (anos finais) e 1ª série do Ensino Médio, mas é necessário ser preciso para não gerar dúvidas e ambiguidades.

Os livros didáticos e sites da internet são as principais fontes de consulta para o educando e para o professor. E é com foco nesse último que vamos desenvolver esse trabalho, a fim de dar-lhe suporte teórico sobre os conjuntos numéricos, principalmente o conjunto dos números racionais, irracionais e reais, de modo que o docente não fique refém, meramente, da teoria apresentada no livro didático, tendo assim mais uma fonte de consulta aprofundada sobre o tema.

Ainda no âmbito dessas considerações gerais, o crítico deve ter em mente que o livro didático é, na maioria dos casos, a única fonte de referência com que conta o professor para organizar suas aulas, e até mesmo para firmar seus conhecimentos e dosar a apresentação que fará em classe. Assim, é necessário que esse livro seja não apenas acessível e atraente para o aluno, como também que ele constitua uma base amigável confiável para o professor, induzindo-o a praticar os bons hábitos de clareza, objetividade e precisão, além de ilustrar, sempre que possível, as relações entre matemática e a sociedade atual. (LIMA; MORGADO; AL, 2001, p. 1)

Para tanto, iremos compreender o conceito de número e aplicar resultados de Análise Real, afim ser de sermos precisos na passagem de um conjunto numérico para outro. Reforçamos que não se trata de uma pesquisa voltada para o aluno do Ensino Básico, mas sim para o professor desse nível de ensino. Então, esse trabalho visa satisfazer o professor do Ensino Fundamental e Médio, sem no entanto, abrir mão do rigor da Análise Real.

O que diferencia esse trabalho dos demais a respeito desse tema é que, neste tivemos a preocupação de apresentar dezenas de exemplos que facilitarão a compreensão do leitor, apresentamos todos os resultados nos mínimos detalhes e com uma notação que, na nossa opinião, contribuirá significativamente para melhor compreender o que estamos construindo.

A princípio o leitor poderá até achar a notação exagerada demais, mas julgamos importante, principalmente, para quem não tem tanta familiaridade com Análise Real e Estruturas Algébricas. A notação diferenciada servirá para o leitor mais inexperiente não perder de vista em que conjunto estão os elementos que está usando.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

O objetivo geral desse trabalho é apresentar uma justificativa formal e rigorosa da passagem do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais por meio de classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais, dando sentido às expressões decimais infinitas e não periódicas para melhor compreensão do professor do Ensino Básico.

1.1.2 Objetivos específicos

Para chegarmos ao objetivo geral, temos como metas alcançar alguns objetivos específicos, são eles:

- Compreender o conceito de número, numa perspectiva do professor/estudioso de Matemática e não do leigo;
- Discutir como as definições de números racionais, irracionais e reais aparecem na BNCC, nos livros didáticos e na mídia;
- Aplicar resultados de Análise Real para dar precisão na passagem dos racionais para os reais;
- Compreender que os números irracionais têm representação decimal infinita e não periódica;
- Construir o conjunto dos número reais de forma rigorosa por meio de classes de equivalências de sequências de Cauchy de número racionais;
- Dar sentido às expressões decimais infinitas e não periódicas;
- Dar clareza a passagem dos racionais para os reais, de modo que possa ser inteligível ao professor do Ensino Básico;
- Gerar um trabalho que satisfaça os professores do Ensino Fundamental e Médio e o rigor da Análise Real.

1.2 Organização

Esse trabalho está dividido em 7 capítulos, sendo que o Capítulo 1 (Introdução) é destinado às considerações iniciais, onde serão expostos a motivação e os objetivos geral e específicos da dissertação. Nesse primeiro capítulo também mostraremos como o trabalho está organizado.

No Capítulo 2 abordaremos como o conceito de número é tratado em diferentes contextos. Começaremos analisando as sugestões da BNCC para abordagem desse tema no Ensino Básico. Depois veremos como os livros didáticos abordam esse conteúdo no Ensino Fundamental e Médio. Em seguida analisaremos com esse tema é abordado na internet e finalmente, como ele está inserido do cotidiano das pessoas.

No Capítulo 3, traremos os principais resultados sobre corpos. Vamos trazer as definições de corpo e seus axiomas, corpo ordenado, corpo arquimediano e corpo ordenado completo, bem como, diversos exemplos, para auxiliar no entendimento do leitor. Para finalizar o capítulo, traremos as cópias de \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{Q} em corpo arquimediano.

Dando continuidade, no Capítulo 4, abordaremos os números racionais em suas duas formas: decimal e fracionária. Discutiremos alguns resultados importantes sobre esse conjunto, os cuidados que devemos ter com as operações quando se usa a forma

decimal e apresentaremos as deficiências do conjunto \mathbb{Q} , o que justifica a necessidade da formalização de um outro conjunto numérico, os reais.

No Capítulo 5 apresentaremos e demonstraremos os principais resultados a cerca de sequências de números reais. Abordaremos subsequências, sequências limitadas, sequências convergentes, limites de sequências e as sequências de Cauchy, principal ferramenta será usada na construção do conjunto dos número reais.

Finalmente, no Capítulo 6 faremos a construção do conjunto dos números reais por meio das classes de equivalência das sequências de Cauchy. Mostraremos como partir do conjunto \mathbb{Q} para construir o conjunto \mathbb{R} , bem como mostrar que esse conjunto construído é um corpo arquimediano ordenado e completo.

No Capítulo 7 faremos apenas as considerações finais e apresentaremos as nossas impressões a cerca da pesquisa desenvolvida e do resultado final do trabalho.

Essa dissertação conta ainda com quatro apêndices, o Apêndice A sobre relações binárias, onde são apresentados os principais resultados sobre relações de equivalência, classes de equivalência e conjunto quociente. No Apêndice B, onde trouxemos os principais resultados sobre Propriedade Arquimediana dos número reais, supremo e ínfimo de conjuntos. Finalmente, no Apêndice C trouxemos alguns resultado que usaremos ao longo da dissertação. Finalmente, no Apêndice D trouxemos os principais números irracionais abordados no Ensino Básico.

2 A Passagem dos Números Racionais para os Números Reais

Nesse capítulo vamos analisar o que BNCC (BRASIL, 2018) sugere que seja abordado a respeito dos conjuntos numérico, veremos como os livros didáticos abordam esse tema e também como isso é ensinado na internet. Estudaremos como eles justificam a passagem do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais. Veremos também como o conceito de *número* é abordado no dia a dia e na mídia.

Escolhemos quatro coleções de livros didáticos, sendo duas do Ensino Fundamental (9º ano) e outras duas do Ensino Médio (1ª série) para fazermos uma análise à luz de (LIMA; MORGADO; AL, 2001), comentando como os autores abordam os números racionais e os números reais, principalmente.

Temos visto também que, na atualidade, os sites da internet se tornam enormes fontes de pesquisa para professores e alunos. Mas será que essas fontes são confiáveis? Faremos aqui uma análise de algumas página no que diz respeito a essa abordagem dos conjuntos numéricos.

2.1 A passagem dos números racionais para os números reais na BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) é um documento de caráter normativo que estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se esperam de um educando ao longo da vida escola na educação básica. Em Matemática, uma das competências esperadas do aluno é o domínio do conceito de número, desde os números naturais, que começam ser estudados no ensino fundamental, passando pelos números inteiros, racionais e, finalmente, os números reais, estudados no 9º ano do ensino fundamental e na 1ª série do ensino médio. Esse último conjunto de números é claramente o mais emblemático e é sobre ele que nos debruçaremos neste trabalho.

No 6º ano do ensino Fundamental a BNCC estabelece que o aluno seja capaz de reconhecer e comparar números racionais com representação decimal finita, isto é, aqueles números racionais cuja representação decimal não é uma dízima periódica. Apenas no 8º ano é que se exige dele a habilidade de trabalhar com números racionais cuja representação seja infinita e periódica (as dízimas periódicas), como podemos conferir nas Figuras 2 e 3.

Mas é no 9º ano que vem o passo mais problemático nas construção dos conjuntos

Figura 2 – Habilidade da BNCC sobre números naturais no 6º ano

HABILIDADES
(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.

Fonte: (BRASIL, 2018)

Figura 3 – Habilidade da BNCC sobre números racionais no 8ª ano

(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Fonte: (BRASIL, 2018)

numéricos (e que a BNCC não estabelece como deve ser feita, ficando a cargo dos livros didáticos): a passagem dos números racionais para os números reais, onde o aluno deve compreender um número irracional como número real cuja representação decimal é infinita e não periódica. Veja na Figura 4 o que diz a BNCC.

Figura 4 – Habilidade da BNCC sobre números reais no 9º ano

(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

Fonte: (BRASIL, 2018)

Na Figura 4, temos o principal ponto que queremos abordar, a caracterização dos números irracionais. Veremos como esse tópico é abordado nos mais diversos âmbitos (livro didático, sites da internet e na mídia de uma forma geral). Também faremos uma distinção entre o conceito de número que um leigo deve possuir em comparação com o conceito de número que um professor de Matemática deve ter.

2.2 A passagem dos números racionais para números reais em livros do Ensino Básico

Segundo (LIMA; MORGADO; AL, 2001), essa passagem dos números racionais para os números reais não é satisfatória em livro didático algum. Tal conclusão foi tirada após uma minuciosa análise de 12 coleções de livros didáticos do ensino médio, que resultou no livro Exames de Textos, onde os autores criticam duramente a abordagem dada a diversos assuntos do ensino médio, em particular, no que diz respeito a abordagem dos números reais, segundo eles, todas as obras deixam a desejar.

Para finalizar a análise deste capítulo, devemos esclarecer que nenhum autor brasileiro de textos para o Ensino Médio trata os números reais adequadamente. Há outros muito piores, como os que definem número racional como o quociente de dois inteiros e um número irracional como o número que não é racional, sem nunca ter dito o que é um número. (LIMA; MORGADO; AL, 2001, p. 9)

Nesse trabalho analisamos quatro coleções de livros didáticos do Ensino Básico, sendo duas do 9º ano do Ensino Fundamental e outras duas da 1ª série do Ensino Médio. Obviamente não citaremos título das obras nem autores, pois o objetivo é apenas analisarmos como é feita a abordagem desse tema nos livros didáticos. Chamaremos de A e B as coleções do Ensino Fundamental e C e D as coleções do Ensino Médio.

A coleção **A** apresentou alguns exemplos de números irracionais, principalmente envolvendo raízes quadradas e o número π . Essa coleção expôs apenas exemplos, em momento algum apresentou uma definição para os números irracionais.

No momento de definir o conjunto dos números reais usou a estratégia de dizer que é a reunião dos números racionais com os números irracionais. Veja a seguir como o livro apresentou:

*“Reunindo-se, em um conjunto, todos os números racionais e todos os números irracionais, formamos o **conjunto dos números reais**, representado por \mathbb{R} .”*

Mas o que é um número irracional? E mais, o que é um número? Isso não ficou estabelecido previamente.

A coleção **A** poderia ter explorado melhor os números irracionais em sua forma decimal, como fez a coleção **B**, que iniciou a abordagem dos números irracionais com dois exemplos interessantes: $0,101001000100001\dots$ e $2,71727374\dots$. Claramente esses números não tem periodicidade, apesar de terem uma lei de formação de fácil constatação.

Dando continuidade, define número irracional como sendo todo número cuja representação decimal é infinita e não periódica. No entanto, o autor em momento algum

definiu o que é número, apesar de ter usado esse conceito para definir número irracional. Veja como o autor define número irracional na coleção B.

“Número irracional é todo número cuja representação decimal é infinita e não periódica.”

Percebe-se que ele faz uma pretensa referências aos números reais, mas não os mencionou, pois ainda não os tinha definido. Essa definição de número real só aparece nas páginas seguintes. Veja como autor da coleção **B** define número real.

*“Reunindo-se o conjunto dos números racionais (\mathbb{Q}) com o conjunto dos números irracionais (\mathbb{I}), obtemos o **conjunto dos número reais** (\mathbb{R}).”*

As coleções A e B foram de livros adotados no Ensino Fundamental, mais precisamente no 9º ano, último ano dessa etapa de ensino. Os conjuntos numéricos são retomados na 1ª série do Ensino Médio, visto que os alunos já têm mais maturidade, seria uma boa oportunidade de aprofundar o estudo sobre os números, especialmente, do conjunto dos números reais, que necessita de uma atenção maior.

Nesse sentido, os livros didáticos de Ensino Médio poderiam trazer um abordagem mais aprofundada das expressões decimais infinitas e apresentar mais demonstrações de alguns resultados, como por exemplo, a irracionalidade de algumas expressões decimais. Para que o aluno não seja levado a acreditar que as verdades na Matemática são estabelecidas meramente pela observação de padrões.

Veremos a seguir a análise que fizemos das duas coleções de livro didático do Ensino Médio, dos volumes referentes à 1ª primeira série do conteúdo de conjuntos numéricos.

Analisando a coleção C, vemos que os autores começam apresentando os números naturais, em seguida, os inteiros, os racionais, bem como, exemplos de marcação desses números na reta real.

Quando tratam dos números racionais os autores afirmam, sem provar, que ao representar um número fracionário em sua forma decimal, obtém-se uma dízima periódica ou um decimal exato. Aqui os autores perdem uma excelente oportunidade de justificar esse fato, ou de pelo menos, instigar alunos e professores para isso. Pois esse resultado decorre diretamente do Princípio das Gavetas de Dirichet (vide Teorema C.1 do Apêndice C).

Por fim, apresentam o conjuntos dos números irracionais, trazendo uma pequena contextualização histórica do surgimento do número irracional $\sqrt{2}$ e, sem demonstração mas alegando que pode ser provado, afirmam que não pode ser colocar na forma p/q , p e q inteiro, $q \neq 0$. Faltou dizer que essa contatação não pode ser feita apenas observando

o número $\sqrt{2}$ com aproximação de algumas casas decimais. Dando continuidade os autores mencionam calculadoras e computadores para verificar algumas casas decimais, vejamos:

“Utilizando alguma uma calculadora ou um computador, podemos obter $\sqrt{2}$ com algumas casas decimais de aproximação.

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420\dots$$

Números com essas características formam o conjunto dos números irracionais, indicado por \mathbb{I} .”

Mesmo que o aluno ainda não tenha maturidade para compreender as demonstrações ¹, elas são importantes por dois motivos principais: 1. o livro didático é também um instrumento de consulta do professor e esse sim precisa compreender as demonstrações. 2. se as informações forem apresentadas sempre sem as devidas justificativas, o aluno pode começar a crer que apenas a observação de exemplos particulares é suficiente para estabelecer as verdades matemáticas.

Finalmente, a coleção C finaliza o capítulo sobre conjuntos numéricos apresentando a definição de números reais e o faz como os demais livros didáticos analisados, como sendo a reunião dos número racionais com os irracionais. Mas a pergunta persiste: o que é um número?

Para finalizar essa análise de livros didáticos para o Ensino Básico, traremos a coleção D. A organização do capítulo é bastante semelhante as demais coleções analisadas. Daremos mais atenção a alguns resultados que não foram mencionados nas coleções já citadas.

Nela autor afirma que ao dividir dois inteiros, denominador não nulo, resulta em um decimal exato ou em um decimal infinito e periódico, dando ainda as condições para ocorrer cada um dos casos, mas sem prova, baseado apenas em alguns exemplos.

“Dado um número racional $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, sua representação decimal é obtida dividindo-se a por b , podendo resultar em:

• decimais exatos, finitos, quando o denominador contiver apenas os fatores primos de 10 (2 e/ou 5). Exemplos:”

Após apresentar quatro exemplo o autor apresenta as condições para que se obtenha uma dízima periódica na divisão.

¹ Não estamos sugerindo a demonstração da irracionalidade de π , pois sabemos que usa uma matemática que não é acessível ao Ensino Básico, mas sim de resultados mais simples.

“• *decimais periódicos ou dízimas periódicas, infinitas, quando o denominador da fração na forma irredutível contiver algum fator primo diferente de 2 e 5.*

a) *Dízimas periódicas simples: o período apresenta-se logo após a vírgula.*

b) *Dízimas periódicas compostas: entre o período e a vírgula existe uma parte não periódica.*”

O autor apresentou vários exemplos, mas também não forneceu a explicação do porque a divisão de dois inteiros, nessas condições, sempre resulta em decimal ou infinito e periódico.

Vale ressaltar que o autor apresentou o conceitos de segmentos comensuráveis e incomensuráveis, relatando historicamente que os pitagóricos já sabiam que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis.

No entanto, na hora de definir o conjuntos dos irracionais, fez como os demais autores analisados, utilizou o conceito de número sem antes o ter definido.

Destacamos que de todas as coleções analisadas, a coleção D foi a única em que o autor apresentou uma demonstração (mesmo que nas leituras complementares) da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

As demonstrações são importantes na matemática para os que leitores não achem que os resultados são deduzidos meramente da observação, que obviamente são importantes, mas para estabelecer padrões e conjeturas, no entanto, necessitam de demonstrações formais, como já mencionamos.

2.3 A passagem dos números racionais para os números reais na Internet

Sabemos que a internet é uma riquíssima ferramenta de pesquisa, provavelmente é a principal fonte de pesquisa dos alunos e professores do ensino básico na atualidade. Mas é preciso ter cuidado, saber filtrar e ser capaz de diferenciar as coisas boas das coisas ruins na internet. Nem tudo que está na internet passou por uma correção para averiguação de possíveis erros, aliás, arrisco em dizer que a maioria das informações contidas na internet não passaram por essa averiguação.

Fomos também verificar como é feita a abordagem dos números racionais e reais em sites da internet. Se nos livros didáticos essa abordagem não é satisfatória, na internet é coisa é bem pior. Em um dos sites havia erros grotescos, por exemplo, havia a afirmação, em um deles, de que um número é irracional quando não conseguimos prever o próximo dígito de sua expansão decimal. Veja como estava escrito lá:

“Ao resolver-se essas raízes, a resposta vai ser uma aproximação, o que chamamos de dízimas não periódicas.

$$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508075\dots$$

Note que a parte decimal é infinita e que não existe um período, ou seja, uma sequência que faça com que a gente consiga prever o próximo número da parte decimal, e é por isso que chamamos esse número de dízima periódica. Não só as dízimas geradas por raízes não exatas, mas qualquer dízima não periódica é um número irracional.”

O autor desse texto da internet confunde o conceito de periódico de uma dízima periódica com o padrão de uma expansão decimal infinita de um número real. A expansão decimal infinita pode ter um padrão bem definido que nos permita prever quais os próximos dígitos e nem assim ser periódica.

Basta pensarmos no número ²

$$1,101001000100001\dots$$

que tem 1 como parte inteira, depois 1 seguido de um zero, depois 1 seguido de dois zeros, depois 1 seguido de três zeros e assim por diante, a quantidade de zero aumentando de um em um, intercalado pelo dígito 1. Esse número não representa uma dízima periódica, ou seja, trata-se de um número irracional, no entanto é perfeitamente possível prever qual é o próximo dígito de sua representação decimal.

$$\begin{aligned} 1,1010010001\dots &= 1 + \frac{1}{10^1} + \frac{0}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{0}{10^5} + \frac{1}{10^6} + \frac{0}{10^7} + \frac{0}{10^8} + \frac{0}{10^9} + \frac{1}{10^{10}} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{10}} + \dots \end{aligned}$$

Note que os expoentes das potências de 10 formam uma progressão aritmética de segunda ordem (para saber mais sobre o tema vide (MORGADO; CARVALHO, 2015)), (0, 1, 3, 6, 10, ...) e que essa expressão decimal é composta apenas pelos dígitos 0 e 1. Se quisermos saber, por exemplo, se a vigésima casa decimal dessa expansão é 0 ou se é 1, basta analisarmos se 20 faz parte dessa sequência (0, 1, 3, 6, 10, ...), se sim, a vigésima casa decimal é 1, se não, 0.

² Provaremos no Capítulo 4 que esse número é irracional.

Chamemos $b_n = (0, 1, 3, 6, 10, \dots)$, o termo geral dessa sequência é $b_n = \frac{n^2 - n}{2}$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= b_1 + 1 \\ b_3 &= b_2 + 2 \\ b_4 &= b_3 + 3 \\ &\vdots \\ b_n &= b_{n-1} + n - 1, \end{aligned}$$

Daí, somando membro a membro e utilizando a fórmula da soma de uma P.A. de primeira ordem, vide (MORGADO; CARVALHO, 2015), obtemos:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n &= 0 + b_1 + 1 + b_2 + 2 + b_3 + 3 + \dots + b_{n-1} + n - 1 \\ \Rightarrow b_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 \\ \Rightarrow b_n &= \frac{n^2 - n}{2}. \end{aligned}$$

Com isso é possível sabermos onde o dígito da expressão decimal será igual a 1 e os demais são iguais zero.

Exemplo 1. *Vamos verificar qual é o 100º dígito na expansão decimal de 1, 1010010001.... Devemos verificar se existe $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$100 = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Se sim, então o 100º dígito dessa expansão decimal é 1, caso contrário, zero.

Ora,

$$\begin{aligned} 100 &= \frac{n^2 - n}{2} \\ \Rightarrow n^2 - n - 200 &= 0 \\ \Rightarrow n_1 &= \frac{1 + \sqrt{801}}{2} \text{ ou } n_2 = \frac{1 - \sqrt{801}}{2}. \end{aligned}$$

Mas, nem n_1 , nem n_2 pertencem aos naturais.

Como não existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $100 = \frac{n^2 - n}{2}$, então concluímos que o 100º dígito de 1, 1010010001... é igual a zero.

Em outro site da internet, o qual chamaremos de site 2, o autor apresenta os conjuntos numéricos e comete várias imprecisões, principalmente na apresentação dos racionais, irracionais e reais.

Neste site o autor comete o deslize na hora de definir o conjunto dos números racionais, ele usa o próprio conjunto \mathbb{Q} para definir o conjunto \mathbb{Q} . O autor define assim:

$$“\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : x = a/b, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{N}\}”.$$

Além disso, o autor afirma que a pertence ao conjunto dos inteiros e b ao conjunto dos naturais. Não precisa fazer essa distinção de colocar a nos inteiros e b nos naturais, pois a e b podem ser inteiros. E ao fazer essa distinção ele caiu numa armadilha, pois não se pode ter $b = 0$. Mas na definição do conjunto dos naturais o autor inclui o zero e depois diz que o denominador é natural.

Ainda sobre o conjunto \mathbb{Q} o autor diz que tipo de número pode ser escrito na forma de fração: inteiros, decimais finitos e dízimas periódicas. Dando a entender que os decimais infinitos não podem ser colocados a forma de fração. As dízimas periódicas são decimais infinitos, não sabemos porque razão o autor fez essa distinção.

Ainda no site 2 da internet, analisando a definição de número irracional, o autor usou sem pudor algum o conceito de números reais (nos livros didáticos esse uso é meio que velado, aqui o autor falou explicitamente), mas na seção seguinte é que ele vai definir o conjunto dos números reais.

O autor do site 2 diz que os números que não pode ser escritos na forma de fração são os decimais infinitos e as raízes não exatas. Para o autor, incrivelmente, decimais infinitos e periódicos não são decimais infinitos.

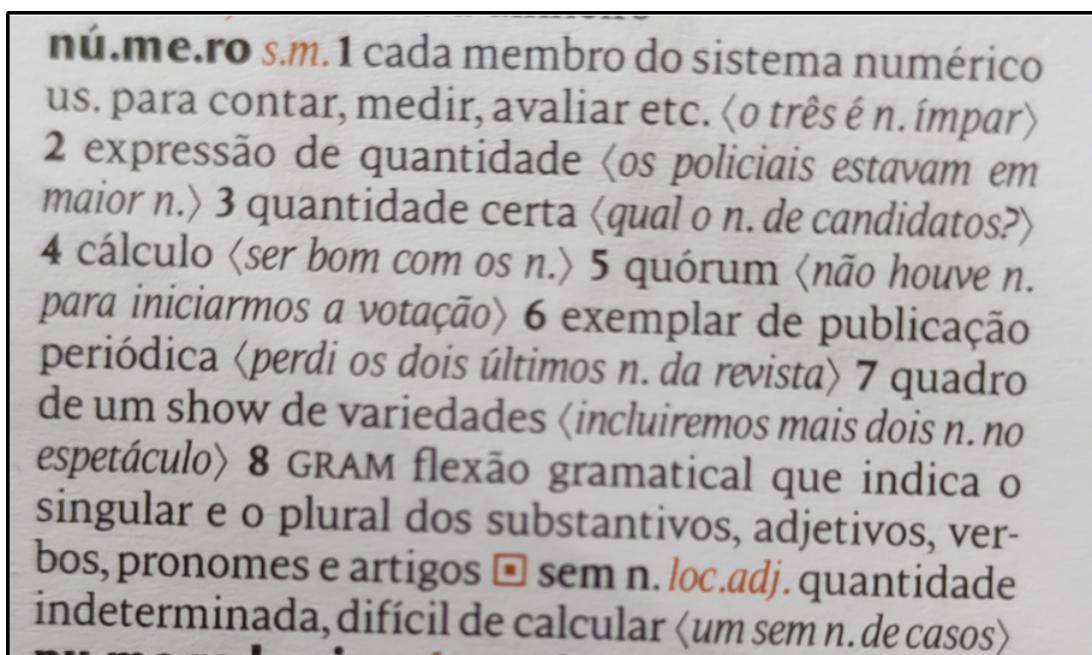
Em seguida define o conjunto dos números reais como a união do racionais com os irracionais, como fazem praticamente todos os sites da internet e livros didáticos do Ensino Básico. Além do mais, usa uma soma de conjuntos para representar o conjunto \mathbb{R} .

2.4 O conceito de número no dia a dia e na mídia

Nessa seção iremos apresentar as formas como o conceito de número é abordado no dia a dia das pessoas e na mídia, discutindo qual dos conjuntos numéricos são mais usados e a forma como as pessoas lidam com os diferentes tipos de números (naturais, inteiros, racionais e reais). Veremos também como o leigo em matemática faz uso dos números, mas ressaltamos que, em nosso entendimento, o professor de matemática, por razões óbvias, deve ter um conhecimento mais aprofundado sobre o conceito de números.

Vamos começar analisando como o conceito de número está apresentado nos dicionários. Vejamos primeiramente no dicionário (HOUAISS, 2001) como o conceito é exposto.

Figura 5 – Definição de número no dicionário Houaiss



Fonte: Dicionário (HOUAISS, 2001)

Veja que a conceituação de número nesse dicionário, apesar de ser bastante ampla, não é precisa. E está tudo bem, pois devemos entender que um dicionário de Língua Portuguesa não tem obrigação de ter precisão lógico-matemática tão rigorosa quantos os livros de matemática, por exemplo. Essa conceituação de número do dicionário visa atender pessoas leigas e não especialista em matemática.

Na Figura 6 temos uma conceituação de número, extraída de outro dicionário, (BUENO, 1982), que traz diversos contextos em que a palavra *número* é aplicada. Apesar de ser uma conceituação mais completa do que aquela feita por (HOUAISS, 2001), devemos concordar que ela também não tem o rigor matemático, pois também é destinada ao leigo em matemática.

Ao professor de matemática e demais pesquisadores da área deve ser apresentada uma definição de forma rigorosa e precisa. Sabemos que essa construção do conceito de número não é simples e desafiou muitos matemáticos ao longo dos séculos. No Capítulo 6 iremos apresentar uma construção dos números reais e uma definição que satisfaça o professor de matemática e demais pesquisadores da área.

Figura 6 – Definição de número no dicionário Escolar da Língua Portuguesa

NÚMERO, s.m. Expressão de quantidade; unidade; coleção de unidades ou de partes da unidade; série; conta certa; porção; abundância; cada um dos exemplares de uma publicação; harmonia resultante da disposição das palavras na prosa ou no verso; cadência; regularidade; cada um dos quadros ou cenas de uma peça teatral ou de um espetáculo de variedades; (Gram.) flexão nominal ou verbal indicativa de um ou mais objetos ou pessoas; — abstrato: aquele de que não está indicada a natureza da unidade; — atômico: numeração característica de cada elemento químico em ordem de seus pesos atômicos e que corresponde ao número total de cargas positivas do seu núcleo ou ao número de elétrons planetários do átomo do elemento em causa; — complexo: o que é expresso por diferentes espécies de unidade, ligadas por meio de relações estabelecidas; — concreto: o que designa a espécie das unidades de que é formado; — dígito: nome dado aos números inteiros até dez; — fracionário: o que é constituído por fração da unidade; o mesmo que número quebrado; — ímpar: aquele que termina em 1, 3, 5, 7, ou 9; — incompleto: denominação dos números concretos expressos em uma só unidade; — inteiro: aquele que contém a unidade certo número de vezes; — misto: o que consta de parte inteira e parte fracionária; — par: o que termina em zero, 2, 4, 6, ou 8; — perfeito: assim se denomina um número igual à soma de seus divisores, excetuado ele próprio; — quadrado: número multiplicado por si mesmo ou representado pelo expoente 2; — quebrado: número fracionário; — racional: o que pode ser expresso pelo quociente de dois números inteiros; — redondo: o que expressa apenas as unidades inteiras de certa ordem, desprezando as frações; —s binominais: denominação dada aos coeficientes do desenvolvimento de uma potência de um binômio; —s combinatórios: aqueles que representam as combinações de certa ordem de determinado número de objetos; —s naturais: assim se denominam os números inteiros (1, 2, 3 etc); —s primos entre si: os que só têm por divisor comum a unidade; ser um —; ser ingênuo, muito engraçado.

Fonte: Dicionário (BUENO, 1982)

2.4.1 O uso de frações no cotidiano

Segundo (BOYER, 1974), as frações são usadas desde o Antigo Egito. Nos dias atuais, com o advento e popularização das calculadoras, elas perderam o protagonismo para os números decimais que são mais facilmente manipuláveis.

No entanto, em diversas situações do cotidiano as frações ainda são usadas, podemos citar aqui aprovação de uma PEC ³ que só é aprovada se obter $\frac{3}{5}$ (três quintos) dos votos dos deputados e $\frac{3}{5}$ (três quintos) dos votos dos senadores. Vide Figura 7.

Figura 7 – Uso de frações na aprovação de uma PEC



The image shows a screenshot of the 'senadonoticias' website. The main article is titled 'Emenda Constitucional' and discusses the process of presenting and approving a PEC. The text states that a PEC can be presented by the President of the Republic, a third of federal deputies, or senators, and requires a three-fifths majority in both the Chamber of Deputies (308 votes) and the Senate (49 votes) for approval. The website header includes navigation menus and social media icons.

Fonte: (SENADO, 2023)

Outro uso muito comum no cotidiano das pessoas é feito na culinária, onde diversas receitas fazem uso de frações para indicar as quantidades de ingredientes necessários na preparação dos pratos. Veja um exemplo na Figura 8.

³ Termo: Proposta de Emenda à Constituição (PEC). É uma proposição legislativa destinada a alterar a Constituição Federal.

Figura 8 – Uso de frações em receita culinária

Creme de batata-doce

Creme de batata-doce com parmesão que a Ana Maria preparou para você servir de acompanhamento e surpreender. Veja que fácil!

Por Ana Maria Braga

Ingredientes

- 2 xícaras (chá) de batata-doce sem casca em cubos (300 g)
- Sal e pimenta-do-reino moída a gosto
- 2 xícaras (chá) de leite (480 ml)
- 1 e 1/4 de xícara (chá) de água (300 ml)
- 1 dente alho descascado (6 g)
- 1/2 xícara (chá) de tomilho debulhado (10 g)
- 1 xícara (chá) de parmesão (100 g)
- 3 colheres (sopa) de manteiga gelada (45 g)

Fonte: (GLOBO, 2023)

Um tipo de número estudado nas escolas são os números mistos, como por exemplo, $3\frac{4}{5}$, $1\frac{1}{2}$, $7\frac{3}{5}$, etc. Um fato curioso é que aqui no Brasil esses número tem pouquíssimo uso no cotidiano. Já nos Estado Unidos, por exemplo, é muito comum esse tipo de número na medição de distância. Vide Figura 9.

Figura 9 – Placa de transito dos Estados Unidos



Fonte: (TRANSPORTATION, 2009)

2.4.2 O uso de números decimais no cotidiano

Historicamente falando, os números decimais são bem recentes, só vieram a se popularizar no século XVI com os tratados sobre frações decimais de Simon Stevin (1548-1620), vide Figura 10, que estabelecia regras para operar números nesse formato. Segundo (BOYER, 1974), Stevin não foi o inventor das frações decimais, mas foi ele que teve a preocupação de mostrar como se operava de forma fácil com os números nesse formato.

É claro que Stevin não foi em nenhum sentido o inventor das frações decimais, nem o primeiro a usá-las sistematicamente. Na China antiga encontra-se um uso mais do que incidental de frações decimais, como também na Arábia medieval e na Europa do Renascimento; quando Viète as recomendou diretamente em 1579 elas já eram geralmente aceitas pelos matemáticos que se encontravam nas fronteiras da pesquisa. Entre o povo em geral, no entanto, e mesmo entre os praticantes de matemática, as frações decimais só se tornaram amplamente conhecidas quando Stevin se dispôs a explicar o sistema do modo elementar e completo. Ele queria ensinar a todos como efetuar, com facilidade nunca vista, todas as computações necessárias entre os homens por meio de inteiros sem frações. Isto é, estranhamente, Stevin se concentrava em seus décimos, centésimos, milésimos, etc., como numeradores inteiros, como fazemos na medida comum do tempo em minutos e segundos. (BOYER, 1974, p. 232)

Figura 10 – Simon Stevin



Fonte: (BRITANNICA, 2023)

Os números decimais são os mais usados no cotidiano: em pesquisas eleitorais, preços de produtos, para indicar medidas de comprimento, volume, área, massa, capacidade, velocidade, etc. Esses números podem ser decimais finitos ou decimais infinitos. Mas na prática as pessoas não se preocupam com isso.

Figura 11 – Uso de números decimais no cálculo de área

COMO CALCULAR OS AZULEJOS A SEREM COMPRADOS

Wagner de Souza
13 DE DEZEMBRO DE 2019 ÀS 20:48
minha casa tem 7 de larg/8,3 de comprimento quantos eu gasto de piso?

Wagner de Souza
18 DE NOVEMBRO DE 2019 ÀS 13:48
Meu banheiro tem 3 metros de comprimento por 1.80 de largura. Quantos metros de lajotas devo comprar pro piso?

Wagner de Souza
19 DE NOVEMBRO DE 2019 ÀS 10:09
Olá, Sonia. O mínimo de área de piso que você precisa então são $5,67\text{m}^2$, porque $3 \times 1,8 = 5,4$, mais 5% (0,27) dá 5,67. Se cada caixa tiver 2 metros, por exemplo, você precisará de 3 caixas. Abraços!

Fonte: página da internet - Dicas de Arquitetura

Vale ressaltar que, no dia a dia, as pessoas não fazem uso de números com infinitas casas decimais. Apesar desses números existirem e aparecerem em diversas aplicações, como, por exemplo, no cálculo de uma medida. Mas, na prática, eles são arredondados

para algumas poucas casas decimais e usados como se fossem decimais finitos. Engenheiros, arquitetos, pedreiros... não precisam usar infinitas casas decimais de $\sqrt{2}$ ou do número π (na prática isso nem seria possível) tendo em vista que toda medida tem erro, eles precisam apenas de uma aproximação razoável para o objetivo que querem atingir.

Nesse sentido, no dia a dia das pessoas existem apenas os números naturais, que elas usam o tempo todo que efetuar contagens. Existem os números inteiros que difere dos naturais pelos números negativos e, são usados para expressar dívidas, temperaturas abaixo de zero, andares no subsolo de edifícios, etc. É claro que as pessoas usam muito menos os números negativos do que os positivos devido a menor quantidade de aplicações. Por fim, outro tipo de número comum no cotidiano é o número decimal com uma quantidade finita de casas decimais.

Todavia, os números com infinitas casas decimais, apesar de não ter poucas aplicações práticas, precisam ser compreendidos pelo estudiosos do assunto para que possam promover o desenvolvimento da matemática.

Então número para nós são os números racionais e mais, os números racionais com uma quantidade finita de casas decimais, pois temos dificuldade de lidar com o conceito de infinito. Essa ideia de número, serve muito bem para o leigo em matemática, mas o professor de matemática mais perspicaz vai querer estender o seu conceito de número, com isso descobrirá o universo fantástico dos números reais.

3 Corpos

Nesse capítulo, iremos apresentar, baseado em (LIMA, 1976) e (FILHO, 2016), os principais resultados sobre corpos que serão usados no Capítulo 6 na construção do conjunto dos número reais. Estudaremos as propriedades de um corpo genérico \mathbb{K} e apresentaremos alguns exemplos para melhor compreensão por parte do leitor.

Definição 3.1. Chama-se **corpo** um conjunto \mathbb{K} munido de duas operações, ditas **adição** e **multiplicação**, que satisfazem certas condições chamadas os axiomas de corpo, especificadas abaixo.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{K}$ a sua soma $x + y \in \mathbb{K}$ e a multiplicação faz corresponder a esses elementos o seu produto $x \cdot y \in \mathbb{K}$. Em linguagem matemática, temos:

Adição:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto x + y. \end{aligned}$$

Multiplicação:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y. \end{aligned}$$

Seguem abaixo as propriedades que um corpo deve ter:

Propriedades da adição

- (A1) *Associatividade* - quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- (A2) *Comutatividade* - quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{K}$, tem-se $x + y = y + x$.
- (A3) *Elemento neutro da adição* - existe $0 \in \mathbb{K}$, tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$.
O elemento neutro chama-se **zero**.
- (A4) *Simétrico* - todo elemento $x \in \mathbb{K}$ possui simétrico $-x \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = 0$.

Propriedades da multiplicação

- (M1) *Associatividade* - quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- (M2) *Comutatividade* - quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{K}$, tem-se $x \cdot y = y \cdot x$.

(M3) *Elemento neutro da multiplicação* - existe $1 \in \mathbb{K}$, tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$. O elemento neutro chama-se **um**.

(M4) *Inverso multiplicativo* - todo elemento $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$ possui simétrico x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Propriedade distributiva

(D1) *Distributividade* - dados quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$, tem-se

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + y \cdot z.$$

Exemplo 2. Vamos mostrar que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2}; x, y \in \mathbb{Q}\}$ é um corpo.

Demonstração. Vamos definir as operações de adição e multiplicação da seguinte forma:

$$(x_1 + y_1\sqrt{2}) + (x_2 + y_2\sqrt{2}) = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)\sqrt{2}$$

e

$$(x_1 + y_1\sqrt{2}) \cdot (x_2 + y_2\sqrt{2}) = x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot y_1 \cdot y_2 + (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)\sqrt{2}.$$

Primeiro vamos mostrar que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ é fechado em relação a adição e multiplicação. É claro que

$$x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}],$$

pois $x_1 + x_2 \in \mathbb{Q}$ e $y_1 + y_2 \in \mathbb{Q}$. Temos também que

$$x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot y_1 \cdot y_2 + (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}],$$

pois $x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot y_1 \cdot y_2 \in \mathbb{Q}$ e $x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 \in \mathbb{Q}$. Donde concluímos que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ é fechado em relação as operações de adição e multiplicação.

Vamos mostrar que valem os propriedades de adição de um corpo.

(A1)

$$\begin{aligned} [(x_1 + y_1\sqrt{2}) + (x_2 + y_2\sqrt{2})] + (x_3 + y_3\sqrt{2}) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{2} + (x_3 + y_3\sqrt{2}) \\ &= [(x_1 + x_2) + x_3] + [(y_1 + y_2) + y_3]\sqrt{2} \\ &= [x_1 + (x_2 + x_3)] + [y_1 + (y_2 + y_3)]\sqrt{2} \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{2}) + [(x_2 + y_2\sqrt{2}) + (x_3 + y_3\sqrt{2})]. \end{aligned}$$

(A2)

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1\sqrt{2}) + (x_2 + y_2\sqrt{2}) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{2} \\ &= (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1)\sqrt{2} \\ &= (x_2 + y_2\sqrt{2}) + (x_1 + y_1\sqrt{2}). \end{aligned}$$

(A3) O elemento neutro da adição de \mathbb{Q} é $0 = 0 + 0\sqrt{2}$. De fato,

$$\begin{aligned}(x + y\sqrt{2}) + (0 + 0\sqrt{2}) &= (x + 0) + (y + 0)\sqrt{2} \\ &= x + y\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(A4) O elemento simétrico de um elemento $x + y\sqrt{2}$ de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ é $-x + (-y)\sqrt{2}$. De fato,

$$\begin{aligned}(x + y\sqrt{2}) + (-x + (-y)\sqrt{2}) &= (x + (-x)) + (y + (-y))\sqrt{2} \\ &= 0 + 0\sqrt{2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Vamos mostrar que valem as propriedades de multiplicação de um corpo.

(M1)

$$\begin{aligned}& [(x_1 + y_1\sqrt{2}) \cdot (x_2 + y_2\sqrt{2})](x_3 + y_3\sqrt{2}) \\ &= [x_1x_2 + 2y_1y_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{2}](x_3 + y_3\sqrt{2}) \\ &= [x_1x_2x_3 + x_1x_2y_3\sqrt{2} + 2y_1y_2x_3 + 2y_1y_2y_3\sqrt{2} + x_1y_2x_3 + x_1y_2y_3\sqrt{2} + \\ & \quad (x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{2}y_3\sqrt{2}] \\ &= [x_1x_2x_3 + 2y_1y_2x_3 + (x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3)\sqrt{2}] + [x_1x_2y_3\sqrt{2} + 2y_1y_2y_3\sqrt{2} + \\ & \quad (2x_1y_2y_3 + 2y_1x_2y_3)] \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{2}) \cdot [(x_2 + y_2\sqrt{2})(x_3 + y_3\sqrt{2})].\end{aligned}$$

(M2)

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1\sqrt{2}) \cdot (x_2 + y_2\sqrt{2}) &= x_1x_2 + x_1\sqrt{2}y_2 + \sqrt{2}y_1x_2 + 2y_1y_2 \\ &= x_2x_1 + x_1\sqrt{2}y_2 + \sqrt{2}x_2y_1 + 2y_2y_1 \\ &= (x_2 + y_2\sqrt{2})(x_1 + y_1\sqrt{2}).\end{aligned}$$

(M3) O elemento neutro da multiplicação é 1:

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1\sqrt{2}) \cdot (1 + 0 \cdot \sqrt{2}) &= x_1 \cdot 1 + x_1\sqrt{2} \cdot 0 + \sqrt{2}y_1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot y_1 \\ &= x_1 + y_1\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(M4) Inverso multiplicativo. Dado $\alpha = x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\alpha \neq 0$, precisamos encontrar $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, tal que $(x + y\sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) = 1$, assim

$$\begin{aligned}(x + y\sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) &= xa + x\sqrt{2}b + \sqrt{2}ya + 2yb = 1 + 0\sqrt{2} \\ \Rightarrow xa + 2yb + (xb + ya)\sqrt{2} &= 1 + 0\sqrt{2}\end{aligned}$$

Daí, é necessário que

$$xb + ya = 0 \Rightarrow a = \frac{-xb}{y}, \quad y \neq 0,$$

Como também,

$$\begin{aligned} xa + 2yb = 1 &\Rightarrow x \left(\frac{-xb}{y} \right) + 2yb = 1 \\ &\Rightarrow b \left(\frac{-x^2}{y} + 2y \right) = 1 \\ &\Rightarrow b = \frac{y}{-x^2 + 2y^2} \\ &\Rightarrow a = \frac{-x}{-x^2 + 2y^2}. \end{aligned}$$

É claro que $-x^2 + 2y^2 \neq 0$, pois só teríamos $-x^2 + 2y^2 = 0$ se $x = 0$ e $y = 0$, mas isso não ocorre, uma vez que $x + y\sqrt{2} \neq 0$.

Portanto,

$$(x + y\sqrt{2})^{-1} = \frac{-x}{-x^2 + 2y^2} + \frac{y}{-x^2 + 2y^2}.$$

■

Exemplo 3. O conjunto \mathbb{Q} dos números racionais com as operações de adição e multiplicação definidas a seguir é um corpo. Veja Apêndice A, Definições A.7 e A.8. Sejam p, q, p' e $q' \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ e $q' \neq 0$, definimos a adição como

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

e a multiplicação como

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

Exemplo 4. O conjunto \mathbb{N} dos números naturais com as operações usuais de adição e multiplicação não é um corpo.

Demonstração. Basta notar que a operação de adição não possui elemento neutro, nem elemento simétrico. Ou seja, dado $x \in \mathbb{N}$ não existe $\xi \in \mathbb{N}$ tal que $\xi + x = x$. Também não existe $\xi \in \mathbb{N}$, tal que $\xi + x = 0$.

Por sua vez, a multiplicação não possui elemento inverso. Ou seja, dado $x \in \mathbb{N}$ arbitrário, não existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $i \cdot x = 1$.

■

Exemplo 5. O conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ é um corpo com as operações de adição e multiplicação definidas como se segue:

$$\text{Adição: } \begin{cases} \bar{0} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{0} = \bar{1} \\ \bar{0} + \bar{0} = \bar{1} + \bar{1} = \bar{0} \end{cases} \quad \text{Multiplicação: } \begin{cases} \bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0} \cdot \bar{1} = \bar{0} \\ \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}. \end{cases}$$

3.1 Corpos ordenados

Definição 3.2. Chama-se **corpo ordenado** um corpo \mathbb{K} , no qual se destacou um subconjunto $P \subset \mathbb{K}$, chamado o conjunto dos elementos **positivos** de \mathbb{K} , tal que duas condições são satisfeitas:

1. Dados $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$
2. Dado $x \in \mathbb{K}$, uma e apenas uma das três alternativas seguintes ocorre:
 - a) $x = 0$
 - b) $x \in P$
 - c) $-x \in P$

Os elementos positivos de P indicaremos por \mathbb{K}_+ , isto é,

$$\mathbb{K}_+ = \{x \in \mathbb{K}; x \in P\}.$$

Vamos indicar por \mathbb{K}_- o conjunto dos elementos x , tal que $-x \in \mathbb{K}_+$ e os chamaremos de elementos **negativos** do corpo \mathbb{K} . Em notação de conjuntos, temos

$$\mathbb{K}_- = \{x \in \mathbb{K}; -x \in \mathbb{K}_+\}.$$

Exemplo 6. O conjunto \mathbb{Q} , como definido no Exemplo 3 é um corpo ordenado. No qual o conjunto P é formado pelos números racionais $\frac{p}{q}$, tais que $p \cdot q \in \mathbb{N}$. Isso significa que p e q tem o mesmo sinal.

Exemplo 7. O conjunto \mathbb{C} , dos números complexos, não é um corpo ordenado.

Demonstração. Num corpo ordenado, se $x \neq 0$, então $x^2 \in P$. De fato, dado $x \neq 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$. No primeiro caso $x^2 = x \cdot x \in P$. No segundo caso, $x^2 = (-x) \cdot (-x) \in P$. Em particular, em um corpo ordenado, $1 = 1 \cdot 1$ é positivo. De fato, $1 \neq 0$, então temos duas possibilidades: ou $1 > 0$ ou $1 < 0$. Suponhamos que $1 < 0$, então $-1 > 0 \Rightarrow (-1) \cdot (-1) > 0$. Mas isso é um absurdo, pois supomos $1 < 0$.

Como 1 é positivo, conseqüentemente, $-1 \in -P$. Daí concluímos que -1 não é quadrado de elemento algum.

Mas, no conjuntos dos números complexos $i^2 = -1$, portanto o conjunto dos números complexos não é ordenado. ■

Dados $a \in \mathbb{K}$ podemos considerar

$$\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ vezes}} := n \cdot a.$$

Definição 3.3. Um corpo ordenado \mathbb{K} é dito **Arquimediano** quando dados $a, b \in \mathbb{K}$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$.

Exemplo 8. O corpo \mathbb{Q} dos números racionais é Arquimediano. Vide (LIMA, 1976, p. 60).

Vide também Apêndice B, Teorema B.2 sobre a Propriedade Arquimediana dos número reais.

Exemplo 9. O corpo $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ não é Arquimediano. Para verificar isso, basta tomarmos $\bar{1} \in \mathbb{Z}_2$ e não teremos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot \bar{1} > \bar{1}$.

Definição 3.4. Um corpo arquimediano e ordenado \mathbb{K} é dito **completo** se todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente possuir supremo.

Para saber mais sobre conjuntos limitados superiormente, limitado inferiormente, supremo e ínfimo vide Apêndice B, (FIGUEIREDO, 1996), (LIMA, 2011) e (LIMA, 1976).

No Capítulo 6 adotaremos outra definição, usaremos sequências de Cauchy para definir corpo ordenado e completo, pois a construção dos número reais que faremos é por meio de sequências de Cauchy de números racionais.

Exemplo 10. O conjuntos dos números reais é completo.

Isso será provado no Capítulo 6, onde construiremos rigorosamente o conjuntos dos número reais.

Veremos no Capítulo 4, Exemplo 24, que o corpo dos números racionais não é completo, mostraremos que existe subconjunto de \mathbb{Q} não-vazio e limitado superiormente que não possui supremo.

3.2 Cópias dos conjuntos numéricos em um Corpo Arquimediano

Todo corpo Arquimediano possui uma cópia de \mathbb{N} , \mathbb{Z} e de \mathbb{Q} que preserva as operações, os respectivos elementos neutros das operações, bem como a relação de ordem. Vamos analisar nessa seção como essas cópias podem ser obtidas de forma bastante simples, usando apenas as propriedades de corpo apresentados no início do Capítulo 3.

3.2.1 Cópia de \mathbb{N} em \mathbb{K}

Dado um Corpo Arquimediano $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, <_{\mathbb{K}})$, em que “+” é a operação de adição, “ \cdot ” é a operação multiplicação, $0_{\mathbb{K}}$ é o elemento neutro da adição, $1_{\mathbb{K}}$ é o

elemento neutro da multiplicação e “ $<_{\mathbb{K}}$ ” é a relação de ordem definida sobre o corpo \mathbb{K} . É possível obter uma cópia de \mathbb{N} em \mathbb{K} . Vejamos!

Sejam as operações de Adição e Multiplicação sobre \mathbb{K} :

Adição:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto x + y. \end{aligned}$$

Multiplicação:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y. \end{aligned}$$

Seja $1_{\mathbb{K}}$ o elemento neutro da multiplicação de \mathbb{K} , assim definimos

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} &:= 2_{\mathbb{K}} \\ 2_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} &:= (1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}) + 1_{\mathbb{K}} := 3_{\mathbb{K}} \\ 3_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} &:= (1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}) + 1_{\mathbb{K}} := 4_{\mathbb{K}} \\ 4_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} &:= (1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}) + 1_{\mathbb{K}} := 5_{\mathbb{K}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento, podemos estabelecer

$$n_{\mathbb{K}} = \underbrace{1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}}}_{n \text{ vezes}} = n \cdot 1_{\mathbb{K}}. \quad (3.1)$$

Além disso, pela Propriedade Arquimediana, dado $a = 1_{\mathbb{K}}$, temos que

$$n \cdot 1_{\mathbb{K}} > (n - 1)_{\mathbb{K}}. \quad (3.2)$$

Assim a partir de 3.1 e 3.2, podemos obter uma cópia de \mathbb{N} em \mathbb{K} , a qual denotaremos por

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_{\mathbb{K}} &= \{1_{\mathbb{K}}, 2_{\mathbb{K}}, 3_{\mathbb{K}}, 4_{\mathbb{K}}, 5_{\mathbb{K}}, \dots\} \\ &= \{n_{\mathbb{K}}; n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

3.2.2 Cópia de \mathbb{Z} em \mathbb{K}

Considere o corpo \mathbb{K} como estabelecido na Subseção 3.2.1. Em \mathbb{K} vamos definir

$$x - y := x + (-y),$$

em que $-y$ é o elemento simétrico de y e sua existência está assegurada pelo fato de \mathbb{K} ser um corpo. Em \mathbb{K} já construímos uma cópia de \mathbb{N} ,

$$\mathbb{N}_{\mathbb{K}} = \{1_{\mathbb{K}}, 2_{\mathbb{K}}, 3_{\mathbb{K}}, 4_{\mathbb{K}}, 5_{\mathbb{K}}, \dots\}.$$

Ora, $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$, pois é o elemento neutro da adição. Temos ainda que $-1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$, pois é o elemento simétrico de $1_{\mathbb{K}}$. Do mesmo modo, $-2_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$, uma vez que é o simétrico de $2_{\mathbb{K}}$. Analogamente, $-3_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$, $-4_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ e assim por diante, podemos construir uma cópia de \mathbb{Z} em \mathbb{K} que denotaremos por

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} &= \{\dots, -5_{\mathbb{K}}, -4_{\mathbb{K}}, -3_{\mathbb{K}}, -2_{\mathbb{K}}, -1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 2_{\mathbb{K}}, 3_{\mathbb{K}}, 4_{\mathbb{K}}, 5_{\mathbb{K}}, \dots\} \\ &= \{n_{\mathbb{K}}; n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

3.2.3 Cópia de \mathbb{Q} em \mathbb{K}

Mais uma vez considerando o Corpo Arquimediano \mathbb{K} como estabelecido na Seção 3.2.1. Em \mathbb{K} vamos definir, para $y_{\mathbb{K}} \neq 0$,

$$\frac{x_{\mathbb{K}}}{y_{\mathbb{K}}} := (x_{\mathbb{K}}) \cdot (y_{\mathbb{K}}^{-1}),$$

em que $y_{\mathbb{K}}^{-1}$ é o elemento inverso multiplicativo de $y_{\mathbb{K}}$ e, novamente, sua existência está assegurada pelo fato de \mathbb{K} ser um corpo.

Ora, se $\frac{x_{\mathbb{K}}}{y_{\mathbb{K}}} \in \mathbb{K}$, então $-\frac{x_{\mathbb{K}}}{y_{\mathbb{K}}} \in \mathbb{K}$, pois todo elemento de \mathbb{K} possui elemento simétrico. Com isso obtemos uma cópia de \mathbb{Q} em \mathbb{K} , a qual denotaremos por

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} = \left\{ \frac{x_{\mathbb{K}}}{y_{\mathbb{K}}}; x_{\mathbb{K}}, y_{\mathbb{K}} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, y_{\mathbb{K}} \neq 0 \right\}.$$

Observe ainda que:

- Como $1_{\mathbb{K}}$ e $2_{\mathbb{K}}$, temos que $\frac{1_{\mathbb{K}}}{2_{\mathbb{K}}} \in \mathbb{K}$. Daí, por simetria da adição, $-\frac{1_{\mathbb{K}}}{2_{\mathbb{K}}} \in \mathbb{K}$.
- Como $5_{\mathbb{K}}$ e $3_{\mathbb{K}}$, temos que $\frac{5_{\mathbb{K}}}{3_{\mathbb{K}}} \in \mathbb{K}$. Também por simetria, $-\frac{5_{\mathbb{K}}}{3_{\mathbb{K}}} \in \mathbb{K}$. E pelo do inverso multiplicativo, temos que $\frac{5_{\mathbb{K}}}{3_{\mathbb{K}}} \in \mathbb{K}$, bem, como pelo simétrico em relação a adição que $-\frac{5_{\mathbb{K}}}{3_{\mathbb{K}}} \in \mathbb{K}$.

4 O Conjunto dos Números Racionais

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018) os alunos devem aprender sobre números racionais desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. No 6^o ano, no entanto, espera-se que o aluno tenha contato apenas com números racionais que tenham representação decimal finita, deseja-se que eles possam compará-los e representá-los na reta. As expressões decimais infinitas e periódicas só aparecem no 8^o ano do Ensino Fundamental. Nessa fase de ensino, os alunos devem adquirir habilidades para reconhecer e utilizar procedimentos para converter a forma decimal infinita e periódica de uma fração (chamada de fração geratriz) e vice-versa.

Os conjuntos numéricos são retomados na 1^a série do Ensino Médio, esperava-se que nessa fase do ensino houvesse um aprofundamento maior, visto que os alunos já têm mais maturidade. Mas a análise dos livros didáticos que fizemos, vide 2, Seção 2.2, revela que nas coleções analisadas, a abordagem não difere muito daquela feita no Ensino Fundamental. Portanto, os autores de textos para o Ensino Médio perdem uma excelente oportunidade de dar um tratamento mais rigoroso aos números reais.

Nesse capítulo definiremos o conjunto \mathbb{Q} dos número racionais tanto na forma fracionária, quanto na forma decimal. Além disso, chamaremos a atenção para alguns cuidados que devem ser tomados ao se definir as operações de adição e multiplicação usando a forma decimal dos números racionais, especialmente quando se trata dos números racionais que têm representação decimal infinita.

Mostraremos que o conjunto \mathbb{Q} apresenta deficiências. Ilustraremos com um exemplo de conjuntos não-vazios e limitados superiormente e outro inferiormente que não possui supremo e ínfimo ¹, respectivamente, em \mathbb{Q} . Tais conjunto são

$$X = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$

e

$$Y = \{y \in \mathbb{Q}; y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}.$$

Tais demonstrações serão apresentadas no Exemplo 24 deste capítulo.

¹ Para saber mais sobre supremo e ínfimo consulte a Seção B.1 do Apêndice B.

4.1 Como as expressões decimais infinitas e periódicas são abordadas em livros didáticos e na internet

É nesse momento de apresentar para os alunos do Ensino Fundamental as expressões decimais ¹ e as frações geratrizes que começam a surgir alguns métodos, meramente memorizados, para obtenção de fração geratriz de uma expressão decimal. Exibiremos esses métodos mais adiantes na Subseção 4.1.1 nos Exemplos 13 e 14. Na Seção 4.2 iremos apresentar esses métodos e as explicações precisas de como obter as frações geratrizes sem necessidade de memorização, bem como obter suas respectivas expressões decimais.

Esses conceitos de expressões decimais infinitas serão úteis para nós no Capítulo 6, onde as usaremos para na construção dos números reais. Em verdade, como já lidamos as expressões decimais finitas ou infinitas e periódicas, temos que dar sentidos às expressões decimais infinitas e não periódicas faremos isso oportunamente na Seção 6.3.

Vejam algumas definições que usaremos nessa seção a respeito das expressões decimais infinitas e periódicas.

Definição 4.1. Chamamos *dízima periódica simples*, toda expressão decimal do tipo

$$a_0, a_1a_2 \cdots a_n a_1a_2 \cdots a_n a_1a_2 \cdots a_n \cdots$$

em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ é chamado de *parte inteira da dízima periódica*, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ e $a_1a_2 \cdots a_n$ é chamado de *período da dízima periódica*.

Exemplo 11. São exemplos de dízimas periódicas simples:

(a) $0,3333 \cdots$

Parte inteira: 0

Período: 3.

(b) $4,353535 \cdots$

Parte inteira: 4

Período: 35.

(c) $-34,123123123 \cdots$

Parte inteira: -34

Período: 123.

¹ Na Subseção 4.2.1 apresentaremos formalmente a definição de expressão decimal.

Definição 4.2. Chamamos de **dízima periódica composta**, toda expressão decimal do tipo

$$a_0, b_1 b_2 \cdots b_s a_1 a_2 \cdots a_n a_1 a_2 \cdots a_n a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ é chamado de **parte inteira** da dízima periódica, $b_1, b_2, \dots, b_s \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $b_1 b_2 \cdots b_s$ é chamado de **antiperíodo da dízima periódica**, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ e $a_1 a_2 \cdots a_n$ é chamado de **período da dízima periódica**.

Exemplo 12. São exemplos de dízimas periódicas compostas:

(a) $0,04563333 \cdots$

Parte inteira: 0

Antiperíodo: 0456

Período: 3

(b) $4,123353535 \cdots$

Parte inteira: 4

Antiperíodo: 123

Período: 35

(c) $-34,1034123123123 \cdots$

Parte inteira: -34

Antiperíodo: 1034

Período: 123

Agora, vejamos como alguns sites da internet apresentam para os leitores os métodos para obtenção de fração geratriz, uma vez conhecida a expressão decimal do número racional. Na Seção 4.2 abordaremos o conjunto dos números racionais e alguns resultados importantes sobre ele. Por trás desse método está um importante resultado que provaremos no Teorema 4.1, que relaciona a forma decimal com a forma fracionária de um número racional.

4.1.1 Método encontrado na internet para obtenção de uma fração geratriz

Na internet encontramos um método rápido para obtenção da fração geratriz, uma vez que se conhece a expressão decimal do número racional. Apesar de simples e prático, essas formas meramente memorizadas impactam no processo criativo do educando.

Vejamos como é o procedimento:

Quando se trata de uma **Dízima periódica simples** o método consiste em colocar o numerador igual a parte inteira com o período, menos a parte inteira, e no denominador, uma quantidade de “noves” igual ao número de algarismo do período.

Exemplo 13. Vamos determinar a fração geratriz de cada dízima periódica simples que segue.

(a) $34,222\dots$

$$34,222\dots = \frac{342 - 34}{9} = \frac{308}{9}.$$

Parte inteira: 34

Parte inteira com o período: 342

Número de algarismos do período: 1

(b) $0,3535\dots$

$$0,3535\dots = \frac{35 - 0}{99} = \frac{35}{99}.$$

Parte inteira: 0

Parte inteira com o período: 35

Número de algarismos do período: 2

E se tivermos uma *Dízima periódica composta*?

Nesse caso o numerador será encontrado fazendo a subtração entre número formado pelos algarismos da parte inteira, os algarismos do antiperíodo e os algarismos do período (sem a vírgula) e o número formado pela parte inteira e os algarismos do antiperíodo, também sem a vírgula. No denominador, também colocamos tantos noves quantos forem os algarismos do período, entretanto, temos que colocar um zero para cada algarismo do antiperíodo.

Exemplo 14. Vamos determinar a fração geratriz de cada dízima periódica composta que segue.

(a) $1,3222\dots$

$$1,3222\dots = \frac{132 - 13}{90} = \frac{119}{90}.$$

Parte inteira: 1

Parte inteira com o período: 13

Número de algarismos do período: 1

Número de algarismos do antiperíodo: 1

(b) $4,1233535\cdots$

$$4,1233535\cdots = \frac{41235 - 4123}{99000} = \frac{408212}{99000}.$$

Parte inteira: 4

Parte inteira com o período: 4123

Número de algarismos do período: 2

Número de algarismos do antiperíodo: 3

Estes métodos apresentados nos Exemplos 13 e 14, apesar de serem eficazes na obtenção das frações geratrizes, são extremamente ineficazes quando se pretende gerar interesse no aluno, pois são métodos totalmente memorizados, fazendo com que o aluno não veja sentido e correlações com assuntos já estudados, como por exemplo, equações de primeiro grau que podem ser usadas para obtenção das frações geratrizes, como poderemos conferir nos Exemplos 16 e 17. Nesse capítulo, Seção 4.2, iremos justificar o porquê deste método funcionar, além de generalizar esse resultado.

Sem maiores explicações, é dito também nos livros didáticos, e amplamente divulgado pelos professores, que toda fração com numerador e denominador inteiros possui uma representação decimal finita ou infinita e periódica (dízima periódica). Mas o que assegura que essas representações de fato são dessa forma? Ou seja, como garantir que dada uma fração, com numerador e denominador inteiros, denominador diferente de zero, sua representação decimal seja finita ou infinita e periódica?

Além disso, como assegurar que vale a recíproca desse resultado, isto é, dada uma expressão decimal com representação finita ou infinita e periódica, o que nos garante que é possível expressá-la em forma de fração com numerador e denominador (não nulo) inteiros?

Apesar dessas explicações serem omitidas na maioria dos livros didáticos, ela é extremamente simples e totalmente compreensível pelo aluno do Ensino Básico. Na próxima seção também trataremos essa explicação com foco no professor do ensino básico, esperando que ele adapte tais explicações para que fique inteligível aos seus alunos.

4.2 Definições de \mathbb{Q} e representação decimal

Nessa seção vamos apresentar o conjunto \mathbb{Q} em suas duas representações (fracionária e decimal, mostrando que elas são equivalentes), além de justificar e generalizar os

métodos usados no ensino básico para obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica, bem como, obtenção da expressão decimal, uma vez conhecida a forma fracionária do número racional.

O conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é construído por meio do conjuntos do números inteiros \mathbb{Z} . Pode ser considerado como o conjunto dos elementos que podem ser escritos na forma de fração com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero. Tal conjunto é construído por meio de classes de equivalências de pares ordenados de números inteiros, para saber mais vide Seção A.2 do Apêndice A.

Definição 4.3. O conjunto dos *números racionais* é definido por

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

O Teorema 4.1 que apresentaremos a seguir justifica aqueles métodos de obtenção de fração geratriz apresentados na Seção 4.1, bem como a expressão decimal uma vez que se conhece a forma fracionária. Julgamos imprescindível que o professor do ensino fundamental e médio tenha conhecimento dele para que possa justificar os métodos para seus alunos.

Teorema 4.1. Um número é racional se, e somente se, tem uma representação decimal finita ou infinita e periódica.

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que o número seja racional, daí pela Definição 4.3, ele pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$.

Sem perda de generalidade, podemos tomar $a > 0$ e $b > 0$, pois os casos em que $a < 0$ e $b < 0$, $a < 0$ e $b > 0$ e $a > 0$ e $b < 0$ são análogos e o caso em que $a = 0$ é trivial. Pelo Teorema da Divisão de Euclides (TDE) (vide Apêndice C, Teorema C.2), o qual podemos conferir também em (MILIES; COELHO, 2006), (HEFEZ, 2016) e (VIEIRA, 2020), existem dois únicos números inteiros q e r tais que

$$a = bq + r_0, \quad 0 \leq r_0 < b.$$

Se $r_0 = 0$, então $\frac{a}{b} = q$, que é um número inteiro e possui uma representação decimal finita.

Se $r_0 \neq 0$, então, pelo TDE, existem únicos q_1 e r_1 inteiros tais que,

$$10r_0 = bq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b.$$

Se $r_1 = 0$, então $\frac{a}{b} = q, q_1$, que possui representação decimal finita.

Se $r_1 = r_0$, então $\frac{a}{b} = q, q_1 q_1 q_1 \dots$, que é uma dízima periódica de período q_1 .

Se $r_i \neq 0$, $r_i \neq r_j$, $i \neq j$, i e $j \in \{0, 1\}$ então pelo TDE, existem únicos q_2 e r_2 inteiros tais que,

$$10r_1 = bq_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < b.$$

Se $r_2 = 0$, então $\frac{a}{b} = q, q_1q_2$, que possui representação decimal finita.

Se $r_2 = r_1$, então $\frac{a}{b} = q, q_1q_2q_2q_2 \cdots$, que é um dízima periódica composta de período q_2 .

Se $r_2 = r_0$, então $\frac{a}{b} = q, q_1q_2q_1q_2 \cdots$, que é uma dízima periódica de período q_1q_2 .

Se $r_i \neq 0, r_i \neq r_j, i \neq j, i$ e $j \in \{0, 1, 2\}$ então, pelo TDE, existem únicos q_3 e r_3 inteiros tais que,

$$10r_2 = bq_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < b.$$

Se $r_3 = 0$, então $\frac{a}{b} = q, q_1q_2q_3$, que possui representação decimal finita.

Se $r_3 = r_2$, então $\frac{a}{b} = q_1q_2q_3q_3q_3 \cdots$, que é uma dízima periódica composta de período q_3 .

Se $r_3 = r_1$, então $\frac{a}{b} = q, q_1q_2q_3q_2q_3 \cdots$, que é uma dízima periódica composta de período q_2q_3 .

Se $r_3 = r_0$, então $\frac{a}{b} = q, q_1q_2q_3q_1q_2q_3 \cdots$, que é uma dízima periódica de período $q_1q_2q_3$.

⋮

E assim por diante: se $r_i \neq 0, r_i \neq r_j, i \neq j, i$ e $j \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$, então, pelo TDE, existem únicos b_q e r_q inteiros tais que

$$10r_{b-1} = bq_b + r_b, \quad 0 \leq r_b < b.$$

Mas, note que existem apenas b possíveis restos distintos, pois $r_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, b-1\}$, assim pelo princípio das gavetas de Dirichlet (vide Apêndice C, Teorema C.2) que também podemos conferir em (NETO, 1991) e (MORGADO; CARVALHO JOÃO BOSCO PITOMBEIRA, 1991), r_b deve ser igual a algum r_{j_0} e, portanto,

$$\frac{a}{b} = q, q_1q_2q_3 \cdots q_{j_0}q_{j_0+1}q_{j_0+2} \cdots q_bq_{j_0+1}q_{j_0+2} \cdots q_b \cdots$$

que é uma dízima periódica de período $q_{j_0+1}q_{j_0+2} \cdots q_b$.

Reciprocamente, suponhamos que o número a tem uma representação decimal finita ou infinita periódica. Ou seja,

$$a = a_0, a_1a_2 \cdots a_n$$

ou

$$a = a_0, b_1b_2 \cdots b_s a_1a_2 \cdots a_k a_1a_2 \cdots a_k a_1a_2 \cdots a_k \cdots$$

com $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, \dots, a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ e $b_1, b_2, \dots, b_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

No caso em que $a = a_0, a_1a_2 \cdots a_n$, basta fazer

$$a = a_0, a_1a_2 \cdots a_n = \frac{a_0a_1a_2 \cdots a_n}{10^n},$$

como $a_0a_1a_2 \cdots a_n \in \mathbb{Z}$ e $10^n \in \mathbb{Z}$, concluímos que a é um número racional.

No caso em que $a = a_0, b_1b_2 \cdots b_s a_1a_2 \cdots a_k a_1a_2 \cdots a_k a_1a_2 \cdots a_k \cdots$, temos

$$a = a_0, b_1b_2 \cdots b_s a_1a_2 \cdots a_k a_1a_2 \cdots a_k a_1a_2 \cdots a_k \cdots \quad (4.1)$$

$$\Leftrightarrow 10^s a = a_0 b_1 b_2 \cdots b_s, a_1 a_2 \cdots a_k a_1 a_2 \cdots a_k a_1 a_2 \cdots a_k \cdots \quad (4.2)$$

$$\Leftrightarrow 10^{s+k} a = a_0 b_1 b_2 \cdots b_s a_1 a_2 \cdots a_k, a_1 a_2 \cdots a_k a_1 a_2 \cdots a_k \cdots \quad (4.3)$$

De (4.2) e (4.3), temos

$$10^{s+k} a - 10^s a = a_0 b_1 b_2 \cdots b_s a_1 a_2 \cdots a_k, a_1 a_2 \cdots a_k a_1 a_2 \cdots a_k \cdots$$

$$- a_0 b_1 b_2 \cdots b_s, a_1 a_2 \cdots a_k a_1 a_2 \cdots a_k a_1 a_2 \cdots a_k \cdots$$

$$\Leftrightarrow 10^{s+k} a - 10^s a = a_0 b_1 b_2 \cdots b_s a_1 a_2 \cdots a_k - a_0 b_1 b_2 \cdots b_s$$

$$\Leftrightarrow a (10^{s+k} - 10^s) = a_0 b_1 b_2 \cdots b_s a_1 a_2 \cdots a_k - a_0 b_1 b_2 \cdots b_s$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{a_0 b_1 b_2 \cdots b_s a_1 a_2 \cdots a_k - a_0 b_1 b_2 \cdots b_s}{10^{s+k} - 10^s}$$

Sejam $p = a_0 b_1 b_2 \cdots b_s a_1 a_2 \cdots a_k - a_0 b_1 b_2 \cdots b_s$ e $q = 10^{s+k} - 10^s$, como p e q são números inteiros e $q \neq 0$, então

$$a = a_0, b_1 b_2 \cdots b_s a_1 a_2 \cdots a_k a_1 a_2 \cdots a_k a_1 a_2 \cdots a_k \cdots$$

é um número racional.

Note agora que, o número

$$a = \frac{a_0 b_1 b_2 \cdots b_s a_1 a_2 \cdots a_k - a_0 b_1 b_2 \cdots b_s}{10^{s+k} - 10^s} \quad (4.4)$$

é fração geratriz da expressão decimal

$$a = a_0, b_1 b_2 \cdots b_s a_1 a_2 \cdots a_k a_1 a_2 \cdots a_k a_1 a_2 \cdots a_k \cdots \quad (4.5)$$

■

Vejamoss ainda que nessa expressão 4.4, o numerador dessa fração é dado pela diferença entre o número composto pelos dígitos da parte inteira, do antiperíodo e do período da dízima periódica e o número composto pelos dígitos da parte inteira e do antiperíodo da dízima periódica (tudo sem a vírgula). Enquanto o denominador é formado por $10^{s+k} - 10^s$ que é um número composto por k dígitos “nove” seguido de s dígitos “zeros”.

Exemplo 15. *Vamos determinar a fração geratriz da expressão decimal*

$$23,345565656 \dots$$

Usando a expressão 4.4 que deduzimos anteriormente, temos

$$\begin{aligned} 23,345565656 \dots &= \frac{2334556 - 23345}{10^{3+2} - 10^3} \\ &= \frac{2311211}{10^5 - 10^3} \\ &= \frac{2311211}{99000} \end{aligned}$$

Perceba que esse Teorema 4.1 justifica aquele método que foi apresentado na Seção 4.1, Exemplos 11, 12, 13 e 14, mas percebemos aqui que apenas com manipulações algébricas o aluno pode obter qualquer fração geratriz sem precisar memorizar diversas regras desnecessárias.

Vejam os seguintes exemplos de como obter a fração geratriz de uma dízima periódica usando esse método que acabamos de demonstrar. Mas não iremos utilizar essa expressão, mas sim fazer as devidas manipulações nas expressões para obtermos a fração geratriz. Tais manipulações são análogas às feitas na demonstração da recíproca do Teorema 4.1, mas aqui nos próximos exemplos, aplicaremos aos casos particulares.

Exemplo 16. *Vamos determinar a fração geratriz de cada dízima periódica que se segue.*

(a) $1,3222 \dots$

Seja,

$$\begin{aligned} a &= 1,3222 \dots \\ \Rightarrow 10a &= 13,2222 \dots \\ \Rightarrow 100a &= 132,222 \dots \\ \Rightarrow 100a - 10a &= 132 - 13 \\ \Rightarrow 90a &= 119 \\ \Rightarrow a &= \frac{119}{90} \end{aligned}$$

(b) $4,1233535 \dots$

Seja,

$$\begin{aligned}
 a &= 4,1233535\cdots \\
 \Rightarrow 1000a &= 4123,3535\cdots \\
 \Rightarrow 100000a &= 412335,35\cdots \\
 \Rightarrow 100000a - 1000a &= 412335 - 4123 \\
 \Rightarrow 99000a &= 408212 \\
 \Rightarrow a &= \frac{408212}{99000}
 \end{aligned}$$

Vejam os que em cada caso o resultado confere rigorosamente com o método apresentado na Seção 4.1, Exemplos 11, 12, 13 e 14, mas a vantagem desse método exposto aqui é que o aluno e o professor podem justificar o porquê de sua validade, indo muito além de memorizar fórmulas sem saber de onde vêm, tornando a aprendizagem muito mais significativa e atraente.

Exemplo 17. *Vamos mostrar que $0,9999\dots = 1$.*

Seja

$$x = 0,9999\dots, \tag{4.6}$$

multiplicando toda equação por 10, obtemos

$$10x = 9,9999\dots \tag{4.7}$$

Subtraindo membro a membro as equações 4.7 e 4.6, obtemos

$$\begin{aligned}
 10x - x &= 9,9999\dots - 0,9999\dots \\
 \Rightarrow 9x &= 9 \\
 \Rightarrow x &= 1.
 \end{aligned}$$

Esse resultado de que $0,9999\dots = 1$ soa bastante estranho para muitas pessoas, pois elas não são acostumadas a lidar com infinito, sem contar que aprendem (equivocadamente) que se a parte inteira um número decimal a é maior que do a parte inteira de um número decimal b , então o número a é maior do que o número b . Mas isso nem sempre é verdade quando tratamos das representações decimais infinitas. Pois, como vimos no Exemplo 17, a parte inteira do número $0,9999\dots$ é menor do que a parte inteira do número 1, nem por isso, temos que o número $0,9999\dots$ é menor do que o número 1.

Essa representação usando a expressão decimal de um número que apresentaremos a seguir, Subseção 4.2.1 será útil no Capítulo 6 quando formos fazer o complemento do conjunto dos números racionais por meio das expressões decimais infinitas e não periódicas.

4.2.1 A equivalência entre Representação Decimal e fracionária

Como demonstramos no Teorema 4.1, todo número racional possui uma representação decimal finita ou infinita e periódica. Dessa forma podemos representar o conjunto dos números racionais por meio de sua expressão decimal.

Definição 4.4. Chamamos de **expressão decimal** em um corpo \mathbb{K} , toda expressão do tipo

$$a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i},$$

em que $a_0 \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ e $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, para $i > 0$. Se existir $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0$ implique $a_n = 0$, diremos que é uma **expressão decimal finita**, caso contrário, **expressão decimal infinita**.

A princípio, a definição será apenas formal, pois o limite e a soma parcial tem que existir. É claro que, nem toda expressão decimal dessa forma representa um número racional. Pois, pelo que provamos no Teorema 4.1, para que essa expressão represente um número racional é preciso que ela seja finita ou infinita e periódica. Isso nos dá subsídios para apresentarmos uma definição de \mathbb{Q} por meio de sua expressão decimal.

Definição 4.5.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}, a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, i > 0; \text{ a representação decimal é finita ou periódica} \right\}.$$

Se tivermos uma expressão decimal finita, significa que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a partir desse índice todos os termos serão nulos. Ou seja,

$$n > n_0 \Rightarrow a_n = 0.$$

Como foi provado no Teorema 4.1, as definições 4.3 e 4.5 são equivalentes. Isto é, todo número racional possui uma representação fracionária e cada número fracionário possui uma representação decimal. Vale ressaltar que essas representações não se dão de forma única, ou seja, um mesmo racional pode apresentar mais de uma representação fracionária e também mais de uma representação decimal.

Exemplo 18. Vamos apresentar uma representação decimal distinta para cada número racional que segue:

(a) 23,16

Podemos tomar a representação decimal 23,15999..., é fácil provar que $23,16 = 23,15999 \dots$, pois é análogo ao Exemplo 17.

(b) $-45,789$

Podemos tomar a representação decimal $-45,788999\dots$. Também é análogo ao Exemplo 17 provar que $-45,789 = -45,788999\dots$.

O Teorema 4.1 justifica como fazer a conversão de um formato no outro sem precisar memorizar fórmulas. Além disso, esse método apresentado no Teorema 4.1, nos casos particulares pode ser plenamente abordado com o aluno do Ensino Básico.

Exemplo 19. A expressão decimal $3,456$ é finita.

Pela Definição 4.4, temos

$$3,456 = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{6}{10^3},$$

e é claro, que

$$3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{6}{10^3} = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{0}{10^5} + \frac{0}{10^6} + \dots,$$

que a partir do 5º termo tem todos os demais nulos.

Exemplo 20. Vamos determinar a expressão decimal de cada número racional que segue.

(a) $3,454545\dots$

$$3,454545\dots = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \dots + \frac{5}{10^{2n}} + \frac{4}{10^{2n+1}} + \dots.$$

(b) $-2,467$

$$\begin{aligned} -2,467 &= -\left(2 + \frac{4}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{0}{10^5} + \dots\right) \\ &= -\left(2 + \frac{4}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{7}{10^3}\right) \end{aligned}$$

Exemplo 21. Vamos mostrar usando expressões decimais infinitas que

$$0,99999\dots = 1.$$

Podemos reescrever $0,99999\dots$ como uma soma de infinitos termos em progressão geométrica:

$$\begin{aligned} 0,99999\dots &= 0,9 + 0,009 + 0,0009 + 0,00009 + \dots \\ &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}. \end{aligned}$$

Ora, o limite da soma $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \dots$ quando o número de parcelas tende a infinito (vide Apêndice C, Corolário C.4) é

$$S = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1.$$

Exemplo 22. A expressão decimal infinita

$$0,1010010001\dots = 0 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{10}} + \dots + \frac{1}{10^{\frac{n^2-n}{2}}} + \dots$$

não é racional.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $0,1010010001\dots$ seja racional. Como este número não tem expressão decimal finita, precisa, necessariamente, ter uma representação decimal periódica, pelo que foi provado no Teorema 4.1.

Digamos que o período dessa expressão decimal seja composta por n dígitos: $a_1a_2a_3\dots a_n$. Note ainda que $a_i \in \{0, 1\}$, $0 \leq i \leq n$. Além disso, não poderíamos ter

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0,$$

pois o período dessa expressão decimal deve conter o dígito 1.

Por outro lado, a quantidade de zeros entre dois dígitos 1 cresce em P.A. de razão 1, portanto é possível obter uma sequência de m zeros consecutivos entre dois dígitos 1, com $m > n$. O que é um absurdo, pois o período dessa expressão decimal deve conter o dígito 0 e o dígito 1. Consequentemente, a expressão decimal de

$$0,1010010001\dots$$

não é periódica, portanto, não se trata de um número racional. ■

4.3 Indo além do Ensino Básico

É imprescindível que o professor saiba mais do que meramente o conteúdo do qual vai ministrar suas aulas. Quanto mais o professor souber de determinado conteúdo, melhores serão as explicações que dará aos alunos. Nesse sentido, essa seção visa instigar os professores a irem além dos conceitos ensinados no Ensino Básico, pois certos assuntos só são compreendidos em sua totalidade com conceitos mais sofisticados da Matemática.

Esse conceito de supremo e ínfimo será relevante para compreendermos as deficiências do conjunto \mathbb{Q} e compreendermos a importância da completude de \mathbb{R} , o qual estudaremos mais profundamente no Capítulo 6.

Consideremos as seguintes expressões decimais que, sem perda de generalidade, consideramos não negativas:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 \\ x_2 &= a_0 + \frac{a_1}{10^1} \\ x_3 &= a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} \\ &\dots \\ x_n &= a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{10^i}, \quad a_0 \in \mathbb{Z}_+, \quad a_i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}, \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Agora consideremos o conjunto

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$$

donde vemos que $X \subset \mathbb{Q}$.

Vamos pensar um pouco mais sobre esse conjunto X por meio de duas perguntas:

1. X é limitado ²?
2. Existe $\sup X$?

Observação 4.1. *Estamos trabalhando com $\sup X$, pois tomamos $a_0 \geq 0$, se tivéssemos considerado $a_0 < 0$, trabalharíamos com $\inf X$.*

A resposta da primeira pergunta é sim. De fato,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots \geq \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{10^i}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

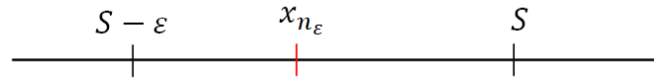
pois todas as parcelas de $\left(a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots\right)$ são não negativas. Logo, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$ é cota superior desse conjunto X , donde concluímos que ele é limitado superiormente. Claramente, X também é limitado inferiormente por a_0 , ou seja, para todo $x \in X$, tem-se $a_0 \leq x$.

E quanto à segunda pergunta, existe $\sup X = S$? Se existir, então

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}.$$

Para vermos isso, devemos mostrar que: $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X; x_\varepsilon > S - \varepsilon$,

$$x_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} \frac{a_{n_\varepsilon}}{10^{n_\varepsilon}}.$$

Figura 12 – Existência (ou não) de supremo em \mathbb{Q} 

Fonte: Autores, 2023

Como provar que n_ε existe nas condições dadas acima? Informalmente, queremos encontrar $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} \frac{a_i}{10^i} > \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} - \varepsilon &\Rightarrow \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} \frac{a_i}{10^i} > \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} \frac{a_i}{10^i} + \sum_{i=n_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} - \varepsilon \\ &\Rightarrow 0 > \sum_{i=n_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} - \varepsilon \\ &\Rightarrow \varepsilon > \sum_{i=n_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} > 0. \end{aligned}$$

Mas, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} &= \frac{a_{n_\varepsilon+1}}{10^{n_\varepsilon+1}} + \frac{a_{n_\varepsilon+2}}{10^{n_\varepsilon+2}} + \frac{a_{n_\varepsilon+3}}{10^{n_\varepsilon+3}} + \dots \\ &\leq \frac{9}{10^{n_\varepsilon+1}} + \frac{9}{10^{n_\varepsilon+2}} + \frac{9}{10^{n_\varepsilon+3}} + \dots \\ &= \frac{9}{10^{n_\varepsilon}} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{10^{n_\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Agora, basta provar que

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}; \frac{1}{10^{n_\varepsilon}} < \varepsilon,$$

o que equivale a mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0$. Ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N};$

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{10^n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Mas, Sabemos, pela Propriedade Arquimediana dos números reais (vide Teorema B.2) que,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon; n_\varepsilon > -\log \varepsilon.$$

² Para saber mais sobre conjunto limitado e supremo, vide Apêndice B, Definições B.1 e B.7.

Basta tomar

$$\begin{aligned} n_\varepsilon > -\log \varepsilon &\Rightarrow -n_\varepsilon \log 10 < \log \varepsilon \Rightarrow \log 10^{-n_\varepsilon} < \log \varepsilon \Rightarrow \log \left(\frac{1}{10^{n_\varepsilon}} \right) < \log \varepsilon \\ &\Rightarrow \left| \frac{1}{10^{n_\varepsilon}} - 0 \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que o supremo só existe em \mathbb{Q} se $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ for finita ou infinita e periódica.

Note que essa sequência

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

só faz sentido até agora se for periódica (ou se for finita), ou seja, se o número resultante dessa expansão decimal for racional, pois ainda não caracterizamos o corpo dos números reais.

4.4 Os cuidados com a definição de adição e multiplicação usando representação decimal

Utilizando a representação decimal não é fácil definir as operações de adição e multiplicação em \mathbb{Q} , especialmente quando envolvem números racionais com representação decimal infinita. Vamos pensar um exemplo simples, somar 2,34343434... com 35,01555555..., em que o primeiro é uma dízima periódica simples cuja parte inteira é 2 e o período é 34, enquanto o segundo é uma dízima periódica composta cuja parte inteira é 35, o antiperíodo é 01 e o período é 5. Daí calculando a soma, temos:

$$\begin{array}{r} 35,01555555... \\ +2,34343434... \\ \hline 37,35898989... \end{array}$$

que é uma dízima periódica composta, cuja parte inteira é 37, o antiperíodo é 35 e a período é 89.

Claramente, não teríamos essa mesma facilidade se tentássemos efetuar a soma abaixo

$$\begin{array}{r} 47,9688888... \\ +65,3434343... \\ \hline \end{array}$$

a dificuldade se dá por conta de que o algoritmo que nos conhecemos é aplicado da direita para esquerda, enquanto o desenvolvimento dos números se dá esquerda para

direita, assim apenas em casos particulares é possível efetuar as operações. Essa mesma dificuldade ocorre no caso da multiplicação e pelo mesmo motivo.

O fato é, que no caso geral, como afirma (LIMA; MORGADO; AL, 2016), dado $\alpha = a_0, a_1a_2a_3a_4a_5\dots$ e $\beta = b_0, b_1b_2b_3b_4b_5\dots$ com a_0 e $b_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ é impossível efetuar as operações $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ e $\frac{\alpha}{\beta}$, ($\beta \neq 0$), com todas as suas casas decimais.

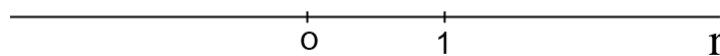
O que podemos fazer é tomar $n \in \mathbb{N}$ e considerar as aproximações de $\alpha_n = a_0, a_1a_2a_3\dots a_n$ e $\beta_n = b_0, b_1b_2b_3\dots b_n$. Daí, os números racionais $\alpha_n + \beta_n$, $\alpha_n - \beta_n$, $\alpha_n \cdot \beta_n$ e $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ são aproximações para $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$ e $\frac{\alpha}{\beta}$, respectivamente.

É óbvio que, quanto maior for o valor n , melhores são essas aproximações.

4.5 As deficiências de \mathbb{Q}

Vamos adotar uma interpretação geométrica dos números racionais em uma reta r , marcando dois pontos, o 0 e o 1.

Figura 13 – Marcando números racionais na reta



Fontes: Autores, 2023

De acordo com (FIGUEIREDO, 1996) Para marcarmos os números inteiros, basta tomarmos o segmento de extremidades 0 e 1 como unidade. A marcação dos números racionais se dá tomando as subdivisões adequadas da unidade adotada. Dado um número racional sobre a reta, podemos tomar um outro racional tão próximo quanto se queira, basta para isso, adotarmos subdivisões da unidade cada vez mais finas.

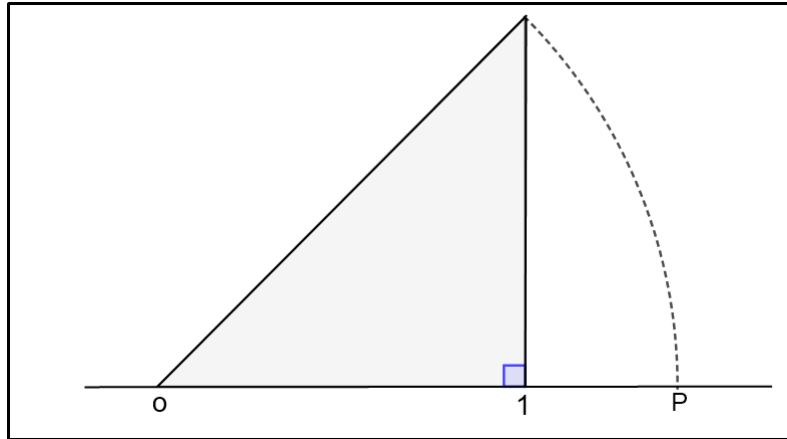
Esse fato nos levar a querer pensar que os números racionais completam toda a reta, isto é, que para cada ponto da reta existe um número racional. Mas os pitagóricos já sabiam que isso não é verdade, pois tomando um triângulo retângulo isósceles com cateto de medida 1 a hipotenusa h não é racional, ou seja, traçando uma circunferência de centro em 0 e raio 1, obteremos um ponto P da reta que não corresponde a um número racional (vide Figura 14).

Decorre diretamente do Teorema de Pitágoras que

$$h^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow h^2 = 2.$$

Mas não existe número racional algum, que satisfaça essa condição.

Figura 14 – Teorema de Pitágoras



Fonte: Autores, 2023

Exemplo 23. *Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional.*

Com efeito, suponhamos por contradição que exista um número racional satisfazendo a essa condição, ou seja, existe um racional da forma $\frac{p}{q}$, $p, q, \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $\text{mdc}(p, q) = 1$ tal que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Logo, pelo princípio da transpositividade (vide (FILHO, 2016)) p^2 é um número par, o que implica que p é par, isto é, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $p = 2k$. Portanto,

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2.$$

Logo, analogamente, q^2 é um número par, o que implica que q é par. Assim, $\text{mdc}(p, q) \geq 2$, o que é um absurdo. Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

Portanto, não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2. E com raciocínios análogos, podemos determinar diversos pontos da reta que não correspondem a número racional algum, o que indica uma deficiência do conjunto \mathbb{Q} .

O exemplo que se segue ilustra bem esse deficiência de \mathbb{Q} , no qual exibiremos dois conjuntos, um que não possui supremo³ (apesar de ser não vazio e limitado superiormente⁴) em \mathbb{Q} e outro que não possui ínfimo⁵ (apesar de ser não vazio e limitado inferiormente⁶) em \mathbb{Q} .

No Capítulo 6 veremos que nesses conjuntos algumas sequência de Cauchy não são convergentes e faremos o completamente de \mathbb{R} utilizando sequências de Cauchy

³ Vide Apêndice B, Definição B.1

⁴ Vide Apêndice B, Definição B.5

⁵ Vide Apêndice B, Definição B.2

⁶ Vide Apêndice B, Definição B.6

de números racionais. Mas enquanto não temos ferramentas para trabalharmos com seqüências de Cauchy iremos apresentar as deficiências de \mathbb{Q} baseado nos conceitos de supremo e ínfimo.

Exemplo 24. *Sejam $X = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ e $Y = \{y \in \mathbb{Q}; y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}$. Vamos mostrar que não existe $\sup X$, nem $\inf Y$ em \mathbb{Q} .*

Demonstração. As definições de supremo, ínfimo, elemento máximo e elemento mínimo foram feitas no Apêndice B, Definições B.1, B.2, B.8 e B.9, respectivamente.

Note que $X \subset [0, 2]$, pois $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x \notin X$. Isso significa que X é um conjunto limitado de números racionais. Por outro lado, $Y \subset (0, +\infty)$, ou seja, Y é limitado inferiormente. Para mostrarmos que não existem $\sup X$ nem $\inf Y$ provaremos antes alguns resultados:

A) *O conjunto X não possui elemento máximo.*

De fato, dado $x \in X$, existe, pela Propriedade Arquimediana ⁷ dos números racionais, $r \in \mathbb{Q}$, tal que $r < 1$ e $0 < r < \frac{2 - x^2}{2x + 1}$, pois $2 - x^2 > 0$ e $2x + 1 > 0$, daí $\frac{2 - x^2}{2x + 1} > 0$. Note que $x + r \in X$. Com efeito, de $r < 1$ segue-se que $r^2 < r$ e de $0 < r < \frac{2 - x^2}{2x + 1}$ segue-se que $r(2x + 1) < 2 - x^2$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (x + r)^2 &= x^2 + 2xr + r^2 \\ &= x^2 + r(2x + 1) \\ &< x^2 + 2 - x^2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Assim, $(x + r) \in X$, $x + r > x$, pois $r > 0$.

B) *O conjunto Y não possui elemento mínimo.*

De fato, dado $y \in Y$, temos $y > 0$ e $y^2 > 2$, daí $2y > 0$ e $y^2 - 2 > 0$, logo, $\frac{y^2 - 2}{2y} > 0$. Então, pela propriedade Arquimediana dos números racionais, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$0 < r < \frac{y^2 - 2}{2y} \Rightarrow 2yr < y^2 - 2 \Rightarrow y^2 - 2ry > 2.$$

Logo,

$$(y - r)^2 = y^2 - 2yr + r^2 > y^2 - 2ry > 2.$$

⁷ No Apêndice B tratamos da Propriedade Arquimediana dos números reais, mas vale também para os número racionais

Por outro lado,

$$\begin{aligned} r < \frac{y^2 - 2}{2y} &\Rightarrow 2ry < y^2 - 2 \\ &\Rightarrow y^2 - 2ry - 2 > 0 \\ &\Rightarrow y < r - \sqrt{r^2 + 2} \text{ ou } y > r + \sqrt{r^2 + 2} \end{aligned}$$

Note que $r - \sqrt{r^2 + 2} < 0$, mas $y > 0$, então teremos apenas $y > r + \sqrt{r^2 + 2}$. Além disso, como $\sqrt{r^2 + 2} > 0$, implica $y > r$. Daí $y - r \in Y$.

C) Se $x \in X$ e $y \in Y$, então $x < y$.

De fato, temos

$$\begin{aligned} x^2 < 2 < y^2 &\Rightarrow x^2 < y^2, \text{ com } x, y > 0 \\ &\Rightarrow x < y. \end{aligned}$$

Por contradição, suponhamos que

$$\sup X = a, \quad a > 0 \text{ e } a \in \mathbb{Q}.$$

Não podemos ter $a^2 < 2$, pois obrigaria $a \in X$, então a seria o elemento máximo de X . Mas já provamos em A) que X não possui elemento máximo.

Além disso, não podemos ter $a^2 < 2$, pois se isso ocorresse teríamos $a \in Y$, como Y não possui elemento mínimo (pelo fato B), deve existir $b \in Y$ tal que $b < a$. Porém, pelo fato C), $x < b < a$ o que contradiz o fato de que $\sup X = a$.

Por fim, só resta $a^2 = 2$ o que implica $a = \sqrt{2}$. Mas já mostramos no início dessa seção que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Portanto, X não possui supremo em \mathbb{Q} .

De modo análogo se mostra que não existe, em \mathbb{Q} , $\inf Y$. ■

Nesse trabalho não faremos a construção dos números reais usando as ideias de supremo e ínfimo, apesar de existir uma construção que utiliza cortes de Dedekind baseado nestes conceitos para construção de \mathbb{R} . Para saber mais vide (SPIVAK, 1999, p. 509).

4.6 O que é número para nós

A ideia de número remonta de milhares de anos antes de Cristo. Há cerca de 2000 anos A.C os babilônios já utilizavam sistema de numeração de base sexagesimal posicional, os egípcios já fazia uso de um sistema de numeração decimal não posicional. Apesar de hoje parecer um conceito bastante trivial, a formulação precisa de conceito de número levou muitos séculos, vindo a ser finalizada apenas no século XIX como aponta (FERREIRA, 2013).

Segundo (BOYER, 1974) as frações são utilizadas desde o Antigo Egito, na época da idade do bronze. Os gregos, por exemplo, também as usavam, mas não entendiam frações como números e sim como razões entre números, como afirma (FERREIRA, 2013). Os gregos, por exemplo, como vimos anteriormente descobriram o número $\sqrt{2}$ que não pode ser colocada na forma de fração.

Apesar do conceito de número ser muito antigo, não é simples definir precisamente os conjuntos numéricos e muitos autores ainda cometem alguns deslizes, como vimos no Capítulo 2.

É muito comum nos livros didáticos de Ensino Médio (Ensino Fundamental também), bem como em sites da internet, se definir um número racional como quociente de dois números inteiros, como denominador não nulo e, em seguida, definir se número irracional com sendo um número que não é racional. Por fim, definem o conjunto dos números reais como a união de dos racionais com os irracionais.

Segundo (LIMA; MORGADO; AL, 2001) há uma falha nessa definição, pois até o momento se conhece os números naturais, inteiros e racionais. Note que, o conceito de número real está sendo usado para se definir número irracional, sem que antes tenha se definido o que é um número real.

O entendimento informal de número real que temos é de que se trata de expressões decimais infinitas, que podem ser periódicas ou não. Ou sejam, é toda expressão decimal do tipo

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n \cdots \\ &= a_0 + 0, a_1 + 0, 0 a_2 + 0, 00 a_3 + 0, 000 a_4 + \cdots + 0, 000 \cdots 0 a_n + \cdots \\ &= \frac{a_0}{10^0} + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}, \end{aligned}$$

com $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Quando α admitir uma representação decimal finita ou infinita e periódica entendemos se trata de número racional, caso contrário, de número irracional.

Exemplo 25. (A) *A expressão decimal*

$$23,454545\dots$$

é um número real racional.

(B) *A expressão*

$$3,14159265\dots$$

*que representa a expressão decimal de π é um número real irracional*⁸

⁸ A irracionalidade do número π foi provada no século XVIII pelo matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777).

(C) *A expressão decimal*

1,101001000100001...

é um número real irracional.

As expressões decimais nem sempre pertencem ao conjunto dos números racionais. Apenas aquelas que são finitas ou infinita e periódicas pertencem a \mathbb{Q} . Mas ao conjunto dos números reais todas elas pertencem.

O que falta em \mathbb{Q} para que seja completo é a convergência das expressões decimais infinitas e não periódicas. Então daremos sentido a essas expressões para fazermos o “complemento” dos racionais.

5 Sequências de Números Reais

Nesse capítulo estudaremos as sequências de números reais. Veremos os principais resultados acerca de limite de sequência, subsequência, sequência limitada e sequência de Cauchy. As sequências de Cauchy definiremos também no corpo \mathbb{Q} , pois na construção de \mathbb{R} que faremos no Capítulo 6 utilizaremos sequência Cauchy em \mathbb{Q} .

5.1 Sequências e os principais resultados que precisaremos

Definição 5.1. *Chama-se **sequência de números reais** uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n , em que x_n é o **n -ésimo termo da sequência** ou **termo geral** da sequência.*

Notações:

1. (x_n)
2. $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$

Nesse Capítulo 5 usaremos a primeira notação para indicar uma sequência de números reais, mas no Capítulo 6 usaremos a segunda notação, que será mais conveniente.

Vejam os seguintes exemplos de sequências de números reais, expressas por meio do termo geral.

Exemplo 26. *São exemplos de sequência de números reais:*

1. $x_n = (-1)^n$
2. $x_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 100}$
3. Vamos agora pensar na sequência abaixo:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 3,1$$

$$x_3 = 3,14$$

$$x_4 = 3,1415$$

$$x_5 = 3,14159$$

⋮

x_n é a aproximação racional de π com n casas decimais.

$$x_n = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_n \text{ é a aproximação racional de } \pi \text{ com } n \text{ casas decimais.} \end{cases}$$

Nos itens (1) e (2) as sequências são definidas por expressões matemáticas fechadas, isto é, dependem apenas de n e cada termo da sequência pode ser determinado meramente substituindo o valor de n na expressão. No item (3) a sequência não possui uma expressão matemática fechada.

Definição 5.2. Diremos que (x_n) é uma **sequência limitada inferiormente**, quando existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 5.3. Diremos que (x_n) é uma **sequência limitada superiormente**, quando existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 5.4. Diremos que (x_n) é uma **sequência limitada**, quando existirem os números a e b reais tais que $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

A Definição 5.4 nos diz que todos os termos da sequência (x_n) pertencem ao intervalo $[a, b]$. Mas todo intervalo $[a, b]$ está contido num intervalo da forma $[-K, K]$, $K > 0$. Basta tomar $K = \max\{|a|, |b|\}$, daí $x_n \in [-K, K]$, o que é equivalente a $|x_n| \leq K$.

A Definição 5.4 ainda nos diz que se (x_n) é limitada, então existem os números reais a e b tais que $x_n \geq a$, o que implica que (x_n) é limitada inferiormente. E por outro lado, $x_n \leq b$, o que implica que (x_n) é limitada superiormente. Portanto, se (x_n) é limitada, pelas Definições 5.2 e 5.3, implica que (x_n) é limitada superiormente e inferiormente.

Exemplo 27. Vamos mostrar que a sequência das somas parciais de uma expressão decimal infinita $x_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}$, em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, é limitada.

Demonstração. Devemos mostrar que existe $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, tal que $|x_n| \leq K$. De fato, pela desigualdade triangular (vide (LIMA, 1976)), obtemos

$$\begin{aligned} |x_n| &= \left| a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} \right| \\ &\leq |a_0| + \left| \frac{a_1}{10^1} \right| + \left| \frac{a_2}{10^2} \right| + \left| \frac{a_3}{10^3} \right| + \dots + \left| \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} \right| \\ &\leq |a_0| + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^{n-1}} \\ &= |a_0| + 9 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |a_0| + 9 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} + \cdots \right) \\
&= |a_0| + 9 \left(\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \right) \\
&= |a_0| + 1
\end{aligned}$$

Portanto, basta tomarmos $K = |a_0| + 1 > 0$. ■

Definição 5.5. Dada uma sequência (x_n) , uma **subsequência** de (x_n) é uma restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots\}$, $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ e $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \dots$.

Observação 5.1. Note que $n_k \geq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Notação: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$.

Exemplo 28. Dado $a < -1$, formemos a sequência $x_n = a^n$. Desta sequência (x_n) vamos extrair duas subsequências:

(i) $2\mathbb{N} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$,

$$(x_n)_{n \in 2\mathbb{N}} = (a^2, a^4, a^8, \dots, a^{2n}, \dots).$$

(ii) $\mathbb{N}' = \{2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$,

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}'} = (a^1, a^3, a^5, \dots, a^{2n-1}, \dots).$$

A $(x_n)_{n \in 2\mathbb{N}} = (a^2, a^4, a^8, \dots, a^{2n}, \dots)$ é limitada apenas inferiormente, enquanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'} = (a^1, a^3, a^5, \dots, a^{2n-1}, \dots)$ é limitada apenas superiormente.

Com efeito, tomando a subsequência $(x_n)_{n \in 2\mathbb{N}}$, note que $0 \leq a^{2n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $(x_n)_{n \in 2\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente.

Por outro lado, $(x_n)_{n \in 2\mathbb{N}}$ não é limitada superiormente, ou seja, para todo $c \in \mathbb{R}$ existe $x_{n_0} \in (x_n)$ tal que $x_{n_0} > c$. De fato, se $a < -1$, então $a^2 > 1$. Daí $a^2 = 1 + k$, $k \in \mathbb{R}, k > 0$. Temos que $a^2 > 1$ que implica $a^4 > a^2 > 1$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
a^2 &= 1 + k \\
\Rightarrow a^4 &= (1 + k)(1 + k) = 1 + 2k + k^2 > 2k \\
\Rightarrow a^6 &= (1 + k)(1 + k)(1 + k) = 1 + 3k + 3k^2 + k^3 > 3k \\
&\vdots \\
\Rightarrow a^{2n} &= (1 + k)^n > nk.
\end{aligned}$$

Dado $c \in \mathbb{R}$, existe, pela propriedade arquimediana dos números reais, Teorema B.2, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 k > c$.

Logo,

$$a^{2n_0} > n_0 k > c.$$

Analogamente, se prova que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a^1, a^3, a^5, \dots, a^{2n-1}, \dots)$ é limitada apenas superiormente.

Definição 5.6. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o **limite de uma sequência** (x_n) quando para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que todos os termos x_n com índices $n > n_0$ cumprem a condição

$$|x_n - L| < \varepsilon.$$

Usaremos a notação $\lim x_n = L$ para indicarmos que o limite da sequência (x_n) é igual ao número real L , quando n tende a $+\infty$.

Simbolicamente:

$$\lim x_n = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Essa nos assegura, que para valores de n suficientemente grandes, os termos x_n se aproximam e se mantêm tão próximos de L quanto se queira.

Definição 5.7. Dizemos que (x_n) é **convergente** quando seu limite existe, caso contrário dizemos que (x_n) é **divergente**.

Exemplo 29. Mostre que $\lim \frac{n^2 + 1}{n^2 - 100} = 1$.

Demonstração. Informalmente, temos que

$$\left| \frac{n^2 - 1}{n^2 - 100} - 1 \right| = \left| \frac{n^2 + 1 - n^2 + 100}{n^2 - 100} \right| = \left| \frac{101}{n^2 - 100} \right| = \frac{101}{n^2 - 100}, \quad n > 10.$$

Dado $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} n > 10 &\Rightarrow \left| \frac{101}{n^2 - 100} \right| = \frac{101}{n^2 - 101} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \varepsilon(n^2 - 100) > 101 \\ &\Rightarrow n^2 - 100 > \frac{101}{\varepsilon} \\ &\Rightarrow n^2 > \frac{101}{\varepsilon} + 100 \\ &\Rightarrow n > \sqrt{\frac{100}{\varepsilon} + 100}. \end{aligned}$$

Pela Propriedade Arquimediana dos números reais, Teorema B.2, vide Apêndice B, existe $n_1 > \sqrt{\frac{100}{\varepsilon} + 100}$.

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $n_0 = \max\{10, n_1\}$, onde $n_1 > \sqrt{\frac{100}{\varepsilon} + 100}$. Assim,

$$\begin{aligned}
 n > n_0 &\Rightarrow n > n_1 \text{ e } n > 10 \\
 &\Rightarrow n > \sqrt{\frac{100}{\varepsilon} + 100} \\
 &\Rightarrow n^2 > \frac{101}{\varepsilon} + 100 \\
 &\Rightarrow n^2 - 100 > \frac{101}{\varepsilon} \\
 &\Rightarrow \frac{n^2 - 100}{101} > \frac{1}{\varepsilon} \\
 &\Rightarrow \frac{101}{n^2 - 100} < \varepsilon \\
 &\Rightarrow \left| \frac{101}{n^2 - 100} \right| < \varepsilon \\
 &\Rightarrow \left| \frac{n^2 + 1}{n^2 - 100} - 1 \right| < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim \frac{n^2 + 1}{n^2 - 100} = 1.$$

■

Teorema 5.1. *Se o limite de uma sequência (x_n) existe, então ele é único.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência qualquer de números reais. Suponha, por contradição, que existam os números reais L_1 e L_2 , $L_1 \neq L_2$, tais que

$$\lim x_n = L_1 \text{ e } \lim x_n = L_2.$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}|L_2 - L_1| > 0$, a definição de limite nos garante que existem n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\begin{aligned}
 n > n_1 &\Rightarrow |x_n - L_1| < \varepsilon, \\
 n > n_2 &\Rightarrow |x_n - L_2| < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então $n > n_0$ implica, desigualdade triangular, que

$$\begin{aligned}
 |L_2 - L_1| &= |L_2 - x_n + x_n - L_1| \\
 &\leq |L_2 - x_n| + |x_n - L_1| \\
 &< \varepsilon + \varepsilon \\
 &= 2\varepsilon \\
 &= 2 \frac{|L_2 - L_1|}{2} = |L_2 - L_1|,
 \end{aligned}$$

logo, $|L_2 - L_1| < |L_2 - L_1|$, o que é um absurdo, portanto, o limite de (x_n) é único. ■

Teorema 5.2. *Se $\lim x_n = L$, então toda subsequência de (x_n) converge para o limite L .*

Demonstração. Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ uma subsequência de (x_n) .

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ implica

$$|x_n - L| < \varepsilon. \quad (5.1)$$

Pela Observação 5.1 e pela inequação 5.1 para $n_k > k > k_0$, temos

$$|x_{n_k} - L| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim x_{n_k} = L. \quad \blacksquare$$

Teorema 5.3. *Toda sequência convergente é limitada*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente de números reais, com

$$\lim x_n = L.$$

Pela definição de limite, dado $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ implica

$$|x_n - L| < 1 \Rightarrow x_n \in (L - 1, L + 1).$$

Considere o conjunto $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, L - 1, L + 1\}$, onde $\min A = b$ e $\max A = c$. Todos os termos de (x_n) estão contidos no intervalo $[b, c]$. Logo, tomando $K = \max\{|b|, |c|\}$, temos que $|x_n| < K$.

Portanto (x_n) é limitada. ■

Teorema 5.4. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

A demonstração desse teorema pode ser conferida em (LIMA, 1976, p. 86).

Proposição 5.5 (Desigualdade de Bernoulli). *Se $1 + p > 0$, $p \in \mathbb{R}$, então*

$$(1 + p)^n \geq 1 + np,$$

para todo número natural n .

A demonstração desse resultado pode ser feita pelo princípio de indução finita e o leitor pode conferir em (RIBENBOIM, 2012, p. 83) e (LIMA, 1976, p.55).

Proposição 5.6. *Se a é um número real positivo fixado, então*

$$\lim a^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 1 \\ 1, & \text{se } a = 1 \\ 0, & \text{se } 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

Demonstração. Vamos considerar os três casos:

i) $a > 1$: Então, existe $p > 0$, tal que

$$a = 1 + p. \quad (5.2)$$

Devemos mostrar que para todo $k > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$a^n > k, \quad \forall n > n_0.$$

Pela propriedade arquimediana dos números reais, vide Teorema B.2, como $p > 0$, dado $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n_0 \cdot p > k - 1.$$

Por 5.2 e pela desigualdade de Bernoulli, Proposição 5.6, temos que

$$a^{n_0} = (1 + p)^{n_0} \geq 1 + n_0 \cdot p > k. \quad (5.3)$$

Por fim, como $a > 1$ temos que a sequência (a^n) é monótona e estritamente crescente. Daí, por 5.3, $n \geq n_0$ implica $a^n \geq a^{n_0} > k$. Donde concluímos que

$$\lim a^n = +\infty, \text{ se } a > 1.$$

ii) $a = 1$: Nesse caso, $a^n = 1^n = 1$. Que, claramente, converge para 1. Logo,

$$\lim a^n = 1, \text{ se } a = 1.$$

iii) $0 \leq a < 1$: Se $a = 0$, então $a^n = 0^n = 0$, que obviamente, converge para *zero*. Então assumiremos $a \neq 0$, isto é, $0 < a < 1$.

Seja $b = \frac{1}{a}$, temos $b > 1$, pois $0 < a < 1$. Daí, $b^n = \frac{1}{a^n}$, o que implica $a^n = \frac{1}{b^n}$. Pelo item i), $\lim b^n = +\infty$, ou seja, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$b^n > k, \quad \forall n > n_0.$$

Assim,

$$a^n < \frac{1}{k}, \quad \forall n > n_0.$$

Portanto,

$$\lim a^n = 0, \quad \text{se } 0 \leq a < 1.$$



Observação 5.2. *É possível demonstrar também que $\lim a^n = 0$, se $-1 < a < 0$. Essa demonstração pode ser conferida em (LIMA, 1976, p.80).*

5.2 Sequências e representação decimal

Consideremos a fração $\frac{2}{3}$, cuja representação decimal é infinita e periódica como apresentada abaixo

$$\frac{2}{3} = 0,6666666\cdots$$

Podemos construir uma sequência de números racionais com representação decimal finita cujos termos se aproximam de $0,666666\dots$, a medida em que n cresce, Vejamos

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,6 \\ a_2 &= 0,66 \\ a_3 &= 0,666 \\ a_4 &= 0,6666 \\ a_5 &= 0,66666 \\ &\vdots \\ a_n &= 0, \underbrace{66666\cdots 6}_{n \text{ casas decimais}} \end{aligned}$$

Podemos então colocar esses termos em uma sequência e sempre que tivermos tratando com sequências decimais, iremos separar os termos por meio do símbolo “;” (ponto e vírgula), pois o próprio termo já contém a “,” (vírgula) para separar a parte decimal da parte inteira.

$$\begin{aligned} (x_n) &= (a_1; a_2; a_3; a_4; \cdots; a_n; \cdots) \\ &= (0,6; 0,66; 0,666; 0,6666; 0,66666; \dots; 0, \underbrace{66666\cdots 66}_{n \text{ casas decimais}}, \dots) \end{aligned}$$

O termo geral de (x_n) pode ser dado por meio da soma

$$0,6 + 0,06 + 0,006 + \cdots + 0, \underbrace{0000\cdots 006}_{n \text{ casas decimais}} = \sum_{i=1}^n \frac{6}{10^i}$$

Mas se quisermos obter o número $\frac{2}{3} = 0,6666\dots$ devemos fazer essa quantidade de parcelas tender a infinito, ou seja,

$$\begin{aligned} 0,6666666\cdots &= 0 + 0,6 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + 0,00006 + \cdots \\ &= \frac{6}{10^1} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{10^5} + \cdots + \frac{6}{10^n} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n} \end{aligned}$$

Usando resultado de Progressões Geométricas (P.G.), vide (MORGADO; CARVALHO, 2015), sabemos que a soma dos seus infinitos termos, quando o primeiro termo é a_1 e razão q é tal que $-1 < q < 1$, é dada pela expressão

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} S &= \frac{6}{10^1} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{10^5} + \cdots + \frac{6}{10^n} + \cdots \\ &= \frac{\frac{6}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Considere a sequência

$$(a_0; a_0, a_1; a_0, a_1 a_2; a_0, a_1 a_2 a_3; \dots; a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n; \dots),$$

convencionaremos chamá-las de **sequências decimais**, que se trata das sequências das somas parciais das representações decimais infinitas. Separaremos seus termos por meio do símbolo “*ponto e vírgula*”, uma vez que a “*vírgula*” já é usada para separar a parte inteira da parte decimal nos termos da sequência.

5.3 Sequências de Cauchy

Nessa seção apresentaremos as sequências de Cauchy, umas das ferramentas importantes para a construção do conjunto dos números reais. No Capítulo 6 utilizaremos classes de equivalências de sequências de Cauchy de número racionais para construirmos o conjunto dos números reais.

Uma sequência é dita de Cauchy quando para índices suficientemente grandes, seus termos estão tão próximo quanto se queira, como definiremos rigorosamente abaixo. Iremos apresentar e demonstrar alguns resultados importantes baseados em (LIMA, 1976) e (LANG, 1972), seguidos de exemplos para melhor entendimento do leitor.

Definição 5.8. *Uma sequência (x_n) de elementos de \mathbb{R} é dita **Sequência de Cauchy** se $\forall \varepsilon > 0$ de \mathbb{R} , $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que*

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Sabemos que o número 2 pode ser escrito como 1,9999... com infinitas casas decimais iguais a 9. Podemos ainda escrever $1,9999\dots = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots$. Tomando as somas parciais x_n , temos

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 1 + \frac{9}{10} \\
x_3 &= 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} \\
x_4 &= 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} \\
&\vdots \\
x_n &= 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Mostraremos a seguir que essa sequência (x_n) das somas parciais é uma Sequência de Cauchy, como veremos a seguir.

Exemplo 30. *Vamos mostrar que $x_n = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^{n-1}}$ é uma Sequência de Cauchy.*

Demonstração. Sem perda de vamos supor $m > n$, daí, teremos

$$x_n = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^{n-1}}$$

e

$$x_m = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^{n-1}} + \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{9}{10^{m-1}}.$$

O que implica,

$$x_m - x_n = \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{9}{10^{m-1}}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ devemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $m > n > n_0$ implique $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Ora,

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= \left| \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{9}{10^{m-1}} \right| \\
&\leq \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{9}{10^{m-1}} \\
&= \frac{9}{10^n} \left(\frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{m-n-1}} \right) \\
&= -\frac{10}{10^n} \left(\left(\frac{1}{10} \right)^{m-n} - 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{10^{n-1+m-n}} + \frac{1}{10^{n-1}} \\
&= \frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^{m-1}} \\
&= \frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^{n+p_n-1}}, \quad m = n + p_n, \quad p_n \in \mathbb{N}, \\
&= \frac{1}{10^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{10^{p_n}}\right) \\
&< \frac{1}{10^{n-1}}, \quad \text{pois } \left(1 - \frac{1}{10^{p_n}}\right) < 1 \\
&< \varepsilon \\
&\Rightarrow \log\left(\frac{1}{10^{n-1}}\right) < \log \varepsilon \\
&\Rightarrow -n + 1 < \log \varepsilon \\
&\Rightarrow n > -\log \varepsilon + 1.
\end{aligned}$$

Pela propriedade arquimediana dos números reais, Teorema B.2, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n_0 > -\log \varepsilon + 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, para $n > n_0$, teremos

$$\begin{aligned}
n > n_0 &\Rightarrow n > -\log \varepsilon + 1 \\
&\Rightarrow \log\left(\frac{1}{10^{n-1}}\right) < \log \varepsilon \\
&\Rightarrow \frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \frac{1}{10^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{10^{p_n}}\right) < \varepsilon \\
&\Rightarrow \frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^{n+p_n-1}} < \varepsilon, \quad p_n \in \mathbb{N}, \quad p_n > 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^{m-1}} < \varepsilon \\
&\Rightarrow -\frac{1}{10^{n-1+m-n}} + \frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \\
&\Rightarrow -\frac{10}{10^n} \left(\left(\frac{1}{10}\right)^{m-n} - 1\right) < \varepsilon \\
&\Rightarrow \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{9}{10^{m-1}} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \left|\frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{9}{10^{m-1}}\right| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $x_n = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^{n-1}}$ é uma Sequência de Cauchy. ■

Exemplo 31. Vamos mostrar que $x_n = \frac{1}{n}$ é uma Sequência de Cauchy.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe, pela propriedade Arquimediana dos números reais, Teorema B.2, vide Apêndice B, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2} > 1$, isto é, $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Daí,

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \left| \frac{1}{m} \right| + \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Como $m, n > n_0$ implica $\frac{1}{m} < \frac{1}{n_0}$ e $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$, então

$$|x_m - x_n| \leq \left| \frac{1}{n_0} \right| + \left| \frac{1}{n_0} \right| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daí, (x_n) é de Cauchy. ■

Teorema 5.7. *Toda sequência de números racionais das somas parciais das representações decimais*

$$x_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ é de Cauchy.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ devemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $m, n > n_0$ implique $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Sem perda de generalidade, vamos tomar $m > n$.

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= \left| a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_m}{10^m} - a_0 - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} - \cdots - \frac{a_n}{10^n} \right| \\ &= \left| \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{a_m}{10^m} \right| \\ &= \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{a_m}{10^m} \\ &\leq \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{9}{10^m} \\ &= \frac{9}{10^n} \left(\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{m-n}} \right) \\ &= \frac{9}{10^n} \left(\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{m-n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} \right) \\ &= \frac{9}{10^n} \left(\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{m-n} - 1}{-\frac{9}{10}} \right) \\ &= \frac{9}{10^n} \left(\frac{10}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{m-n} \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{10^{n-1}}, \quad \text{pois } \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{m-n} \right) < 1 \\ &< \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \\ &\Rightarrow n > -\log \varepsilon + 1. \end{aligned}$$

Pela propriedade arquimediana dos números reais (Teorema B.2) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > -\log \varepsilon + 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Logo, basta fazer análogo ao Exemplo 30 para provar que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Portanto fica provado que toda sequência decimal é de Cauchy. ■

Teorema 5.8. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência que converge para um limite L no corpo \mathbb{R} , ou seja, $\lim x_n = L$. Isso significa que $\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$), $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$m > n_0 \Rightarrow |x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| &= |x_m - L - x_n + L| \\ &\leq |x_m - L| + | -x_n + L| \\ &= |x_m - L| + |x_n - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy. ■

E a recíproca deste Teorema 5.8 será verdadeira? Isto é, seja (x_n) uma sequência de Cauchy, (x_n) é convergente? A resposta é *não*. Vamos apresentar um contraexemplo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0,1 \\ x_3 &= 0,10 \\ x_4 &= 0,10\bar{1} \\ x_5 &= 0,1010 \\ x_6 &= 0,10100 \\ x_7 &= 0,101001 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como a sequência $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_n, \dots)$ se trata de uma sequência decimal de números racionais, já provamos (Teorema 5.7) que é de Cauchy. No entanto, ela

não converge para valor algum racional, pois vimos no Exemplo 22 que não se trata de uma expressão decimal periódica. Portanto, em geral, as sequências de Cauchy não são convergentes em \mathbb{Q} . Aqui constatamos mais uma deficiência de \mathbb{Q} : nem toda sequência de Cauchy é convergente nele.

Teorema 5.9. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um corpo \mathbb{R} . Tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow |x_{n_0} - x_n| < 1 \\ &\Rightarrow -1 < x_{n_0} - x_n < 1 \\ &\Rightarrow -1 - x_{n_0} < -x_n < 1 - x_{n_0} \\ &\Rightarrow 1 + x_{n_0} > x_n > -1 + x_{n_0} \\ &\Rightarrow x_{n_0} - 1 < x_n < x_{n_0} + 1 \\ &\Rightarrow x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1). \end{aligned}$$

Tome $\alpha = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}$ e $\beta = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}$. Logo, $x_n \in [\alpha, \beta]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Seja $K = \max\{\alpha, \beta\}$, assim $|x_n| \leq |K|$.

Portanto, (x_n) é limitada. ■

Teorema 5.10. *Sejam (x_n) e (y_n) sequência de Cauchy em um corpo \mathbb{R} . Então*

- (i) $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ é uma sequência de Cauchy.
- (ii) $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$ é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. (i) Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do mesmo modo, como (y_n) é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_2 \Rightarrow |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, para $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos

$$\begin{aligned} m, n > n_0 &\Rightarrow |x_n + y_n - (x_m + y_m)| \\ &= |x_n - x_m + y_n - y_m| \\ &\leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $(x_n) + (y_n)$ é uma sequência de Cauchy.

(ii) Temos

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x_m y_m| &= |x_n y_n - x_n y_m + x_n y_m - x_m y_m| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y_m| + |x_n y_m - x_m y_m| \\ &= |x_n| |y_n - y_m| + |y_m| |x_n - x_m|. \end{aligned}$$

Mas já provamos, Teorema 5.9, que (x_n) e (y_n) são limitadas, então existem k_1 e k_2 positivos, tais que

$$|x_n| \leq k_1 \text{ e } |y_n| \leq k_2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como (x_n) é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_1$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

- $m, n > n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2k_2}$.
- $m, n > n_2 \Rightarrow |y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2k_1}$.

Consequentemente, para $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$,

$$\begin{aligned} m, n > n_0 &\Rightarrow |x_n y_n - x_m y_m| \\ &\leq |x_n| |y_n - y_m| + |y_m| |x_n - x_m| \\ &< k_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2k_1} + k_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2k_2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, $(x_n \cdot y_n)$ também é uma sequência de Cauchy. ■

Teorema 5.11. Se $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim x_n = 0$ e (y_n) é uma sequência de Cauchy, então

$$\lim(x_n y_n) = 0.$$

Demonstração. Como (y_n) é uma sequência de Cauchy, sabemos, pelo Teorema 5.9, que ela é limitada, logo existe, $c \in \mathbb{R}$, $c >_{\mathbb{R}} 0$, tal que $|y_n| \leq c$.

Agora, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, $|x_n| < \frac{\varepsilon}{c}$. Logo,

$$\begin{aligned} n > n_0 \Rightarrow |x_n y_n - 0| &= |x_n y_n| \\ &= |x_n| |y_n| \\ &< c \cdot \frac{\varepsilon}{c} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim (x_n y_n) = 0. \quad \blacksquare$$

Definição 5.9. Seja (x_n) uma sequência de números reais. Dizemos que (x_n) é uma **sequência nula** se, dado um número real $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon.$$

Teorema 5.12. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} com $\lim x_n \neq 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e $n > 0$, $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n| > c.$$

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, existe uma sequência infinita $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, $n_1, n_2, n_3, \dots \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_{n_i}| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Como (x_n) é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Considere $n_i, n, m > n_0$, daí teremos pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} |x_m| &= |x_m - x_{n_i} + x_{n_i}| \\ &\leq |x_m - x_{n_i}| + |x_{n_i}| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Novamente, usando o fato de (x_n) ser de Cauchy, para $m, n > n_0$, pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} |x_n| = |x_n - x_m + x_m| &\leq |x_n - x_m| + |x_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\lim x_n = 0$, o que é uma contradição, pois $\lim x_n \neq 0$.

Portanto, fica provado o nosso teorema. ■

5.4 O Anel das sequências de Cauchy

Definição 5.10. Um **anel** R é um conjunto, cujos elementos podem ser adicionados e multiplicados e que satisfaz as seguintes condições:

(AN 1) Sob a adição, R é um grupo aditivo (abeliano)¹.

(AN 2) Para todos $x, y, z \in R$ temos

$$x(y + z) = xy + xz \text{ e } (y + z)x = yx + zx.$$

(AN 3) Para todos $x, y, z \in R$ temos $(xy)z = x(yz)$.

(AN 4) Existe um elemento $e \in R$ tal que $ex = xe = x$, para todo $x \in R$.

Exemplo 32. Seja R o conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros. R é um anel.

De fato, a soma e o produto de números inteiros resulta em um número inteiro. Além disso, dados $x, y, z \in \mathbb{Z}$ temos $x(y + z) = xy + xz$, pois em \mathbb{Z} vale a distributividade.

Teorema 5.13. O conjunto \mathcal{C} das sequências de Cauchy munido das operações de adição e multiplicação forma um anel comutativo.

Demonstração. De acordo com o Teorema 5.10 se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em um corpo \mathbb{R} , então $(x_n + y_n)$ também o é. Além disso, $-(x_n) = (-x_n)$. Logo qualquer sequência pertencente a \mathcal{C} possui elemento simétrico. O elemento neutro da adição é a sequência

$$(0) := (0, 0, 0, \dots).$$

Ainda de acordo com o Teorema 5.10 se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy, então $(x_n \cdot y_n)$ também o é. Assim o elemento neutro da multiplicação é a sequência

$$(1) := (1, 1, 1, \dots).$$
■

¹ Para saber mais sobre anel e grupo, vide (LANG, 1972, p. 10-50)

Vale ressaltar que o conjunto \mathcal{C} não constituem um corpo, pois nem toda sequência de Cauchy admite inverso multiplicativo. Veja por exemplo, a sequência $x_n = \frac{1}{n}$ (já provamos no Exemplo 31 que essa sequência é de Cauchy) cujo inverso multiplicativo seria

$$x_n^{-1} = \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = n$$

que não é limitada. Portanto, segue pelo Teorema 5.9 que $x_n^{-1} = n$ não é de Cauchy.

Teorema 5.14. *Seja $(x_n) \subset \mathbb{R}$ uma sequência de Cauchy, com $\lim x_n \neq 0$, então a sequência*

$$\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n > n_0}$$

é de Cauchy.

Demonstração. Pelo Teorema 5.12 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, temos $x_n \neq 0$. Considere a sequência (y_n) dada do seguinte modo:

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n < n_0 \\ x_n^{-1}, & \text{se } n > n_0. \end{cases}$$

Então a sequência $(x_n y_n)$ difere da sequência $(1) = (1, 1, 1, \dots)$ apenas por um número finito de termos. Daí,

$$x_n y_n - (1)$$

é uma sequência nula.

Pelo Teorema 5.12, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, temos $x_n > c$, $c > 0$. Daí,

$$\frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{c}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, tal que,

$$m, n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \cdot c^2.$$

Então para $m, n \geq n_0$ obtemos

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m} \right| = \left| \frac{x_m - x_n}{x_m x_n} \right| = \frac{|x_m - x_n|}{|x_m x_n|} < \frac{\varepsilon \cdot c^2}{c^2} = \varepsilon.$$

Portanto, $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ é uma sequência de Cauchy. ■

6 A construção de \mathbb{R}

Assim como o conjunto dos números inteiros é construído por meio dos naturais e o conjunto dos racionais por meio dos inteiros, construiremos o conjunto dos números reais por meio dos racionais.

Nesse capítulo iremos construir o conjuntos dos números reais por meio de classes de equivalências de sequências de Cauchy de número racionais. Para saber mais sobre relação binária, relação de equivalência, classe de equivalência e conjunto quociente, vide Apêndice A, lá apresentaremos os principais resultados que usaremos nesse capítulo.

Sabemos que em \mathbb{Q} nem todas as sequências de Cauchy são convergente, basta pesarmos, por exemplo, nas sequências decimais, que já provamos no Teorema 5.7 ser de Cauchy, no entanto, nem sempre converge em \mathbb{Q} . Só são convergentes nos racionais se for uma expressão decimal finita ou infinita e periódica. Então nesse capítulo faremos o complemento de \mathbb{Q} dando sentido às expressões decimais infinitas e não periódicas.

6.1 Construção dos números reais usando sequências de Cauchy

Pretendemos definir os números reais utilizando os números racionais que já nos são conhecidos. Se considerarmos formalmente as expressões decimais do tipo

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots ,$$

em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, para $i \geq 1$. Mesmo que α não seja um número racional, podemos encontrar sequências de somas parciais de números racionais que se aproximar de α , do seguinte modo:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 \\ x_2 &= a_0, a_1 \\ x_3 &= a_0, a_1 a_2 \\ x_4 &= a_0, a_1 a_2 a_3 \\ &\vdots \\ x_n &= a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \end{aligned}$$

A sequência $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ é composta apenas de número racionais que, pelo Teorema 5.7, é uma sequência de Cauchy.

Claramente, existem outras sequências que se aproximam de α , então para darmos sentido ao que conhecemos como representação decimal do número α devemos tomar a

classe de equivalência dessas sequências de números racionais, a partir de uma relação de equivalência adequada que definiremos (Definição 6.1) a seguir.

Vamos recordar o conjunto \mathcal{C} que definimos no Capítulo 5 como o conjunto de todas as sequências de Cauchy de números racionais, ou seja,

$$\mathcal{C} = \{(x_n); (x_n) \text{ é uma sequência de Cauchy de números racionais}\}.$$

6.1.1 Operações em \mathcal{C}

Em \mathcal{C} vamos definir duas operações, adição e multiplicação, do seguinte modo:

Adição:

$$\begin{aligned} + : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ ((x_n), (y_n)) &\mapsto (x_n) + (y_n) := (x_n + y_n) \end{aligned}$$

Multiplicação:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ ((x_n), (y_n)) &\mapsto (x_n) \cdot (y_n) := (x_n \cdot y_n). \end{aligned}$$

Dado (x_n) e $(y_n) \in \mathcal{C}$, pelo Teorema 5.10, temos que $(x_n) + (y_n)$ e $(x_n) \cdot (y_n) \in \mathcal{C}$, pois são, respectivamente, soma e produto de sequência de Cauchy. Esse conjunto \mathcal{C} munido dessas operações goza da propriedade associativa da adição e da multiplicação.

Associatividade da adição

$$\begin{aligned} (x_n) + [(y_n) + (z_n)] &:= (x_n) + (y_n + z_n) \\ &:= (x_n + (y_n + z_n)) \\ &:= ((x_n + y_n) + z_n) \\ &:= [(x_n) + (y_n)] + (z_n) \end{aligned}$$

Associatividade da multiplicação

$$\begin{aligned} (x_n) \cdot [(y_n) \cdot (z_n)] &:= (x_n) \cdot (y_n \cdot z_n) \\ &:= (x_n \cdot (y_n \cdot z_n)) \\ &:= ((x_n \cdot y_n) \cdot z_n) \\ &:= [(x_n) \cdot (y_n)] \cdot (z_n) \end{aligned}$$

O conjunto \mathcal{C} também goza da propriedade comutativa.

Comutatividade da adição

$$\begin{aligned}(x_n) + (y_n) &:= (x_n + y_n) \\ &= (y_n + x_n) \\ &:= (y_n) + (x_n).\end{aligned}$$

Comutatividade da multiplicação

$$\begin{aligned}(x_n) \cdot (y_n) &:= (x_n \cdot y_n) \\ &= (y_n \cdot x_n) \\ &:= (y_n) \cdot (x_n).\end{aligned}$$

O simétrico do elemento (x_n) em relação a adição vamos definir como sendo $(-x_n)$. O elemento neutro da adição vamos definir como sendo a sequência

$$(0) = (0, 0, 0, \dots).$$

Esse elemento neutro da adição chamaremos de zero. Em relação a multiplicação vamos definir a sequência

$$(1) = (1, 1, 1, \dots)$$

como sendo o elemento neutro da multiplicação, o qual chamaremos de unidade ou um.

O conjunto \mathcal{C} ainda goza da propriedade distributiva, que relaciona as operações de adição e multiplicação.

Distributividade

$$\begin{aligned}(x_n) \cdot (y_n + z_n) &:= (x_n \cdot (y_n + z_n)) \\ &= (x_n \cdot y_n + x_n \cdot z_n) \\ &:= ((x_n \cdot y_n) + (x_n \cdot z_n)) \\ &:= (x_n) \cdot (y_n) + (x_n) \cdot (z_n)\end{aligned}$$

Diante do exposto acima, para que esse conjunto \mathcal{C} seja um corpo, falta apenas que cada elemento seu admita um inverso multiplicativo, ou seja, dado $(x_n) \in \mathcal{C}$, deveria ter seu inverso multiplicativo $(x_n)^{-1} = (x_n^{-1}) \in \mathcal{C}$. Mas isso não ocorre, basta tomarmos como contraexemplo, a sequência $x_n = \frac{1}{n}$, que já provamos no Exemplo 31 que é de Cauchy, e teremos

$$x_n^{-1} = \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = n,$$

que não é de Cauchy. Portanto, \mathcal{C} não é um corpo ¹.

¹ O conjunto \mathcal{C} é um anel, como visto no Seção 5.4, Definição 5.10.

Mas a partir do conjunto \mathcal{C} , por meio de uma definição adequada de relação de equivalência (vide Apêndice A para saber mais sobre relação de equivalência, classe de equivalência e conjunto quociente), construiremos um corpo que seja ordenado e completo e mais, que contém \mathbb{Q} e que consideremos como o conjunto dos números reais.

A partir daqui adotaremos a notação

$$(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

em vez de, simplesmente,

$$(x_n),$$

para indicar uma sequência de Cauchy de números racionais, pois mais adiante essa segunda notação poderia gerar certas ambiguidades que queremos evitar.

Definição 6.1. *Sejam (x_1, x_2, x_3, \dots) e $(y_1, y_2, y_3, \dots) \in \mathcal{C}$, diremos que as sequências (x_1, x_2, x_3, \dots) e (y_1, y_2, y_3, \dots) **estão relacionadas** e indicaremos*

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \sim (y_1, y_2, y_3, \dots),$$

se

$$\lim(x_n - y_n) = 0.$$

Proposição 6.1. *A relação estabelecida na Definição 6.1 é de equivalência.*

Demonstração. Dadas as sequências (x_1, x_2, x_3, \dots) , (y_1, y_2, y_3, \dots) e $(z_1, z_2, z_3, \dots) \in \mathcal{C}$, devemos provar que valem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, de acordo com a Definição A.2, do Apêndice A.

(1) *Reflexiva:* Seja $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{C}$, é claro que

$$\lim(x_n - x_n) = \lim 0 = 0.$$

Portanto, qualquer sequência (x_1, x_2, x_3, \dots) está relacionada consigo mesma, provando assim a reflexividade.

(2) *Simétrica:* Sejam (x_1, x_2, x_3, \dots) e $(y_1, y_2, y_3, \dots) \in \mathcal{C}$.

Se $\lim(x_n - y_n) = 0$, então dado um número racional $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n - y_n| = |y_n - x_n| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Portanto, se $(x_1, x_2, x_3, \dots) \sim (y_1, y_2, y_3, \dots)$, então $(y_1, y_2, y_3, \dots) \sim (x_1, x_2, x_3, \dots)$, ou seja, a relação goza da propriedade simétrica.

(3) *Transitiva*: Sejam as sequências (x_1, x_2, x_3, \dots) , (y_1, y_2, y_3, \dots) e $(z_1, z_2, z_3, \dots) \in \mathcal{C}$. Devemos provar que se $\lim(x_n - y_n) = 0$ e $\lim(y_n - z_n) = 0$, então $\lim(x_n - z_n) = 0$.

Se $\lim(x_n - y_n) = 0$, então dado um número racional $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > n_1,$$

o que implica

$$-\frac{\varepsilon}{2} < x_n - y_n < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > n_1. \quad (6.1)$$

Por outro lado, se $\lim(y_n - z_n) = 0$, então dado um número racional $\varepsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|y_n - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > n_2,$$

o que implica

$$-\frac{\varepsilon}{2} < y_n - z_n < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > n_2. \quad (6.2)$$

Tomando, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e combinando as desigualdades 6.1 e 6.2, temos

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} &< x_n - y_n + y_n - z_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > n_0 \\ \Rightarrow -\varepsilon &< x_n - z_n < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \\ \Rightarrow |x_n - z_n| &< \varepsilon \quad \forall n > n_0 \\ \Rightarrow \lim(x_n - z_n) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a relação goza da propriedade transitiva, dessa forma fica provado que é uma relação de equivalência. ■

A classe de equivalência de uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{C}$ será indicada por

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)].$$

Recordamos que dois elementos pertencem a mesma classe de equivalência quando estão relacionados. Para saber mais vide Apêndice A.

Consideremos agora o conjunto quociente dado por

$$\mathcal{C} / \sim = \tilde{\mathbb{R}}.$$

Atente-se para o fato de que os elementos de $\tilde{\mathbb{R}}$ são classes de equivalência de sequências de Cauchy. E de acordo com o Apêndice A, Proposição A.2, se dois elementos estão relacionados, então suas classes de equivalência são iguais. Isto é, se (x_1, x_2, x_3, \dots) e (y_1, y_2, y_3, \dots) são sequências de Cauchy, tal que $\lim(x_n - y_n) = 0$, então

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)] = [(y_1, y_2, y_3, \dots)].$$

Isso significa que cada elemento de $\tilde{\mathbb{R}}$ pode admitir vários representantes.

A princípio, o fato de um único elemento de $\tilde{\mathbb{R}}$ admitir vários representantes pode nos parecer estranho. Mas vale recordar o conjunto \mathbb{Q} , que é definido como classes de equivalências de pares ordenados. No entanto, um mesmo número racional pode ser representado por diferentes pares ordenados, como vimos no Capítulo 4, Definição A.6.

Notação: Se tivermos um número racional r , usaremos (r) para indicarmos a sequência (r, r, r, \dots) . Ou seja,

$$(r) = (r, r, r, \dots).$$

Dessa forma,

$$[(r)] = [(r, r, r, \dots)].$$

Observação 6.1. Note que é importante representar uma sequência de Cauchy de números racionais por meio da notação (x_1, x_2, x_3, \dots) , pois a classe de equivalência dessa sequência é

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)].$$

Se usássemos (x_n) para representação sequência de Cauchy de números racionais, quando fôssemos tomar a classe de equivalência dessa sequência teríamos

$$[(x_n)],$$

gerando uma ambiguidade, uma vez que não saberíamos se estávamos nos referindo ao elemento $[(x_n, x_n, x_n, \dots)]$ ou ao elemento $[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$.

Exemplo 33. Vamos exibir algumas sequências em \mathcal{C} que pertencem a classe $[(0)]$.

Ora, pela Definição A.3 do Apêndice A uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots) \subset \mathcal{C}$ pertence a $[(0)]$ se estiver relacionada com a sequência (0) , ou seja, se

$$\lim(x_n - 0) = \lim x_n = 0.$$

Assim, podemos exibir algumas sequências que pertencem a classe do $[(0)]$. Vejamos:

(i) $a_n = 0$. Pois, pela Definição A.2 do Apêndice A todo elemento pertence a sua própria classe de equivalência, uma vez que está relacionado consigo mesmo.

(ii) $b_n = \frac{1}{n}$. Já provamos no Exemplo 31 que $\lim b_n = 0$.

(iii) $c_n = \frac{n^2 + 4}{-n^{2023} + 2022}$. Deixamos a cargo do leitor a demonstração de que $\lim c_n = 0$, pois é análogo ao Exemplo 29.

(iv) $(d_n) = (2, 3, 5, 0, 0, 0, \dots)$, $d_n = 0$, para todo $n \geq 4$. É fácil ver que $\lim d_n = 0$.

$$(v) (e_n) = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots\right).$$

Assim podemos escrever

$$\left\{ (0), \left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{n^2 + 4}{-n^{2023} + 2022}\right), (2, 3, 5, 0, 0, 0, \dots), \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots\right) \right\} \subset [(0)].$$

Obviamente, exibimos apenas alguns exemplos, mas existem infinitas seqüências que cumprem os requisitos acima.

Exemplo 34. *Vamos exibir algumas seqüências em \mathcal{C} que pertencem a classe $[(1)]$.*

De modo análogo ao que foi feito no Exemplo 33, temos que $a_n = 1 \in [(1)]$. Além disso, qualquer seqüência (x_1, x_2, x_3, \dots) que cumpra a condição

$$\lim(x_n - 1) = 0$$

pertencerá a $[(1)]$. Como $\lim 1 = 1$, basta escolhermos (x_1, x_2, x_3, \dots) , tal que, $\lim x_n = 1$. Daí podemos exibir algumas seqüências que cumprem essa condição.

$$(i) (b_n) = (0, 9; 0, 99; 0, 999; 0, 9999; \dots) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k}\right). \text{ Veja o Exemplo 17.}$$

$$(ii) c_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 100}. \text{ Já provamos no Exemplo 29 que } \lim \frac{n^2 + 1}{n^2 - 100} = 1.$$

$$(iii) d_n = n \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n}\right). \text{ Fazendo } t = \frac{1}{n}, \text{ se } n \text{ tende a infinito, então } t \text{ tende a zero.}$$

Assim, teremos $\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$, pois é o limite fundamental da trigonometria, vide (THOMAS, 2012) e (LANG, 1977).

Do mesmo modo podemos escrever

$$\left\{ (1), (0, 9999 \dots), \left(\frac{n^2 + 1}{n^1 - 100}\right), \left(n \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n}\right)\right) \right\} \subset [(1)].$$

Obviamente, aqui constam apenas alguns representantes da classe da seqüência $(1, 1, 1, 1, \dots)$.

Exemplo 35. *Como podemos “enxergar” $\frac{3}{2}$ em $\tilde{\mathbb{R}}$?*

Notemos inicialmente que que $\frac{3}{2} = 1,5$, que podemos representar como uma seqüência de Cauchy do seguinte modo

$$(1, 5; 1, 5; 1, 5; 1, 5; 1, 5; \dots),$$

então

$$\left[\left(\frac{3}{2} \right) \right] = [(1, 5; 1, 5; 1, 5; 1, 5; 1, 5; \dots)]$$

Mas, temos ainda que $1,5 = 1,4999999\dots$, daí representando como sequência de Cauchy, temos

$$(1; 1, 4; 1, 49; 1, 499; 1, 4999; 1, 49999; \dots)$$

como outro representante da classe do $\left(\frac{3}{2} \right)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{3}{2} \right) \right] &= [(1; 1, 4; 1, 49; 1, 499; 1, 4999; 1, 49999; \dots)] \\ &= [(1, 5; 1, 5; 1, 5; 1, 5; 1, 5; \dots)]. \end{aligned}$$

Exemplo 36. Considere $r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots \in \mathbb{Q}$. Como podemos “enxergar” r em $\tilde{\mathbb{R}}$?

Já mostramos no Teorema 5.7 que toda sequência decimal é de Cauchy. Além disso,

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n \dots,$$

então podemos enxergar r como sequência de Cauchy como se segue

$$\begin{aligned} x_n &= (a_0; a_0, a_1; a_0, a_1 a_2; a_0, a_1 a_2 a_3; \dots; a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n; \dots) \\ &= \left(\sum_{i=0}^0 \frac{a_i}{10^i}; \sum_{i=0}^1 \frac{a_i}{10^i}; \sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{10^i}; \sum_{i=3}^0 \frac{a_i}{10^i}; \dots, \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{10^i}; \dots \right) \end{aligned}$$

Portanto, podemos enxergar r em $\tilde{\mathbb{R}}$ como a classe de equivalência dessa sequência $(a_0; a_0, a_1; a_0, a_1 a_2; a_0, a_1 a_2 a_3; \dots; a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n; \dots)$, isto é

$$\begin{aligned} r_{\tilde{\mathbb{R}}} &= [(a_0; a_0, a_1; a_0, a_1 a_2; a_0, a_1 a_2 a_3; \dots; a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n; \dots)] \\ &= \left[\left(\sum_{i=0}^0 \frac{a_i}{10^i}; \sum_{i=0}^1 \frac{a_i}{10^i}; \sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{10^i}; \sum_{i=3}^0 \frac{a_i}{10^i}; \dots, \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{10^i}; \dots \right) \right] \\ &= [(r, r, r, \dots, r, \dots)], \end{aligned}$$

pois a sequência $(a_0; a_0, a_1; a_0, a_1 a_2; a_0, a_1 a_2 a_3; \dots; a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n; \dots)$ converge para r .

Como r é um número racional qualquer, podemos estabelecer uma cópia de \mathbb{Q} em $\tilde{\mathbb{R}}$, a qual denotaremos por $\tilde{\mathbb{Q}}$ e é dada por

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \{[(r)]; r \in \mathbb{Q}\}.$$

Nosso objetivo aqui é provar que $\tilde{\mathbb{R}}$ é um corpo ordenado, arquimediano e completo. Para tanto, no que se segue iremos apresentar algumas definições e provaremos alguns resultados a respeito do conjunto $\tilde{\mathbb{R}}$ que nos possibilitem atingir esse objetivo.

6.1.2 Operações em $\tilde{\mathbb{R}}$

Nessa subseção, por simplicidade de notação, quando escrevermos (x_n) estaremos nos referindo a sequência de números racionais $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$. Nas demais seções, a menos que se especifique o contrário, a notação (x_n) significará a sequência $(x_n, x_n, x_n, \dots, x_n, \dots)$, também de números racionais.

Adição:

$$\begin{aligned} + : \tilde{\mathbb{R}} \times \tilde{\mathbb{R}} &\longrightarrow \tilde{\mathbb{R}} \\ ([x_n], [y_n]) &\longmapsto [x_n] + [y_n] := [(x_n) + (y_n)]. \end{aligned}$$

Mostraremos que o resultado dessa operação de adição (chamado de soma) em $\tilde{\mathbb{R}}$ não depende dos representantes escolhidos da classe do elemento. Em outras palavras, dados $(x_n), (x'_n), (y_n), (y'_n) \in \mathcal{C}$, se

$$(x_n) \sim (x'_n) \quad e \quad (y_n) \sim (y'_n)$$

então

$$[x_n] + [y_n] = [x'_n] + [y'_n].$$

De fato, como $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$, então $\lim(x_n - x'_n) = 0$ e $\lim(y_n - y'_n) = 0$, daí

$$\begin{aligned} [(x'_n)] + [(y'_n)] &= [(x'_n) + (x_n) - (x'_n)] + [(y'_n) + (y_n) - (y'_n)] \\ &= [x_n] + [y_n] \\ &:= [(x_n) + (y_n)]. \end{aligned}$$

Pois, $\lim(x_n - (x'_n)) = 0$.

Portanto, a soma independe dos representantes escolhidos, como queríamos demonstrar.

Vamos agora definir a operação de multiplicação em $\tilde{\mathbb{R}}$ do seguinte modo:

Multiplicação:

$$\begin{aligned} \cdot : \tilde{\mathbb{R}} \times \tilde{\mathbb{R}} &\longrightarrow \tilde{\mathbb{R}} \\ ([x_n], [y_n]) &\longmapsto [x_n] \cdot [y_n] := [(x_n) \cdot (y_n)]. \end{aligned}$$

Provaremos também que o resultado dessa operação de multiplicação (chamado de produto) independe dos representantes escolhidos da classe de equivalência. Ou seja, dados $(x_n), (x'_n), (y_n), (y'_n) \in \mathcal{C}$, se

$$(x_n) \sim (x'_n) \quad e \quad (y_n) \sim (y'_n)$$

então

$$[x_n] \cdot [y_n] = [x'_n] \cdot [y'_n].$$

De fato, Como $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$, então $\lim(x'_n - x_n) = 0$ e $\lim(y'_n - y_n) = 0$. Com isso em vista, temos,

$$\begin{aligned} [(x_n)] \cdot [(y_n)] &= [(x_n) + (x'_n - x_n)] \cdot [(y_n) + (y'_n - y_n)] \\ &= [(x_n + x'_n - x_n)] \cdot [(y_n + y'_n - y_n)] \\ &= [(x'_n)] \cdot [(y'_n)] \end{aligned}$$

Então fica demonstrado que tanto a soma quando o produto não dependem dos representantes escolhidos.

6.2 O conjunto $\tilde{\mathbb{R}}$ como corpo ordenado e completo

Nessa seção iremos definir uma ordem e uma métrica (módulo) em $\tilde{\mathbb{R}}$. Definiremos sequências de Cauchy em $\tilde{\mathbb{R}}$, para podermos compará-la além com as sequências de Cauchy em \mathbb{R} na seção subsequente.

Dando continuidade, provaremos que $\tilde{\mathbb{R}}$ é um corpo, e mais, que ele é ordenado e completo. Para que não fique uma demonstração muito extensa e cansativa, faremos isso dividido em lemas e teoremas. Por fim, vamos explicar o que a completude de $\tilde{\mathbb{R}}$ tem a ver com o fato de \mathbb{R} ser também um corpo ordenado e completo.

Já apresentamos no Capítulo 3 (Definição 3.4) uma definição de corpo ordenado e completo usando o conceito de supremo. A partir de agora adotaremos outra definição usando sequências de Cauchy. A equivalência entre as definições podem ser conferidas em (LANG, 1972) e para saber mais sobre corpos ordenados e completos vide (OLIVEIRA, 2017).

Definição 6.2. *Um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot, >, |\cdot|)$ é dito **completo** se toda sequência de Cauchy converge em \mathbb{K} .*

Teorema 6.2. *Sejam \mathbb{K} um corpo arquimediano ordenado e completo. Então todo subconjunto não vazio S de \mathbb{K} limitado possui supremo.*

A demonstração desse resultado pode ser verificada em (LANG, 1972, p. 118-119). Esse Teorema 6.2 prova a equivalência entre as Definições 3.4 e 6.2.

Definição 6.3. *Seja $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{C}$. Dizemos que (x_n) é uma **sequência nula** se, dado um número racional $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon.$$

Lema 6.3. *Seja $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{C}$ uma sequência que não é nula. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e um número racional $c > 0$ tais que $|x_n| \geq c$ para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, existe uma sequência infinita $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, com $n_1, n_2, n_3, \dots \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_{n_i}| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Como $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{C}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Considere $n_i, n, m > n_0$, daí teremos pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} |x_m| &= |x_m - x_{n_i} + x_{n_i}| \\ &\leq |x_m - x_{n_i}| + |x_{n_i}| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Novamente, usando o fato de $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{C}$, para $m, n > n_0$, pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} |x_n| = |x_n - x_m + x_m| &< |x_n - x_m| + |x_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, (x_1, x_2, x_3, \dots) é uma sequência nula. Absurdo! Pois por hipótese, ela é não nula. Portanto, fica provado o nosso lema. ■

Teorema 6.4. *O conjunto $\tilde{\mathbb{R}}$ é um corpo.*

Demonstração. Devemos provar que $\tilde{\mathbb{R}}$ satisfaz as propriedades das operações de corpo de acordo com a Definição 3.1. Ora, associatividade e comutatividade da adição decorrem diretamente das definições de adição feita sobre os conjuntos $\tilde{\mathbb{R}}$ e \mathcal{C} . O elemento neutro da adição é $[(0)]$ e o simétrico de um elemento $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \in \tilde{\mathbb{R}}$ é o elemento $-[(x_1, x_2, x_3, \dots)] = [(-x_1, -x_2, -x_3, \dots)]$.

A respeito da multiplicação: associatividade e comutatividade decorrem, mais uma vez, diretamente das operações de multiplicação definidas em \mathcal{C} e em $\tilde{\mathbb{R}}$ nas seções 6.1.1 e 6.1.2, respectivamente. O elemento neutro da multiplicação é o $[(1)]$.

Resta apenas mostrar que existe um elemento inverso multiplicativo para cada elemento não nulo de $\tilde{\mathbb{R}}$. Isto é, dado $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \in \tilde{\mathbb{R}} - \{[(0)]\}$, existe uma sequência $(y_1, y_2, y_3, \dots) \in \mathcal{C}$, tal que

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \cdot [(y_1, y_2, y_3, \dots)] = [(1)].$$

Como $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \neq [(0)]$, pelo Lema 6.3, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$, ou seja, existe $c \in \mathbb{Q}$ com $|x_n| \geq c$, $\forall n > n_0$. Então definamos a seqüências $(y_n) = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots)$ do seguinte modo:

$$y_n = \begin{cases} y_n = 1, & \text{se } n < n_0 \\ y_n = x_n^{-1}, & \text{se } n \geq n_0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Note que o produto $(x_1, x_2, x_3, \dots) \cdot (y_1, y_2, y_3, \dots)$ difere da seqüência $(1, 1, 1, \dots)$ apenas por uma quantidade finita de termos. Logo,

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \cdot (y_1, y_2, y_3, \dots) - (1, 1, 1, \dots)$$

trata-se de uma seqüência nula. Daí,

$$\lim ((x_1, x_2, x_3, \dots) \cdot (y_1, y_2, y_3, \dots) - (1, 1, 1, \dots)) = 0,$$

o que implica

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots) \cdot (y_1, y_2, y_3, \dots)] = [(1, 1, 1, \dots)].$$

Devemos mostrar ainda que $(y_1, y_2, y_3, \dots) \in \mathcal{C}$. Ora, existe $c > 0$, tal que

$$|x_n| \geq c > 0, \quad \forall n > n_0.$$

Logo,

$$\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{1}{c}, \quad \forall n > n_0. \quad (6.4)$$

Por outro lado, para todo $n \geq n_0$, temos

$$y_n = x_n^{-1} = \frac{1}{x_n}.$$

Como $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{C}$, dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, tal que

$$m, n > n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \cdot c^2. \quad (6.5)$$

Logo, para $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, por 6.4 e 6.5, temos

$$\begin{aligned} n > n_2 \Rightarrow |y_n - y_m| &= \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m} \right| \\ &= \left| \frac{x_m - x_n}{x_m x_n} \right| \\ &= \frac{|x_m - x_n|}{|x_m| |x_n|} \\ &< \frac{\varepsilon \cdot c^2}{c \cdot c} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Assim, (y_1, y_2, y_3, \dots) é uma seqüência de Cauchy, isto é, $(y_1, y_2, y_3, \dots) \in \mathcal{C}$. Portanto, $\tilde{\mathbb{R}}$ é um corpo, o que finaliza a demonstração do nosso. ■

Os resultados que se seguem visam mostrar que o corpo $\tilde{\mathbb{R}}$ pode ser ordenado.

Lema 6.5. *Seja $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{C}$, então ocorre exatamente uma das três possibilidades:*

- i) (x_1, x_2, x_3, \dots) é uma sequência nula;*
- ii) Existe $c \in \mathbb{Q}$, $c > 0$, e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq c$, $\forall n > n_0$.*
- iii) Existe $c \in \mathbb{Q}$, $c > 0$, e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq -c$, $\forall n > n_0$.*

Demonstração. Se (x_1, x_2, x_3, \dots) é uma sequência nula é claro que (x_1, x_2, x_3, \dots) não satisfaz (ii) nem satisfaz (iii).

Vamos supor (x_1, x_2, x_3, \dots) não nula. Então existe, pelo Lema 6.3, $c \in \mathbb{Q}$, $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n| \geq c, \quad \forall n \geq n_0.$$

Daí, pela definição de módulo em \mathbb{Q} , temos duas possibilidades:

- $x_n \geq c$, se x_n é positivo;
- $-x_n \geq c$, se x_n é negativo.

Suponhamos que para índices muito grandes os termos da sequência possam ficar mudando de sinal, ou seja, para m e n suficientemente grandes, possamos ter, simultaneamente

$$x_n > 0 \text{ e } x_m < 0.$$

Logo, pelo que vimos acima

$$x_n - x_m \geq 2c > 0.$$

Mas isso é uma contradição, pois a sequência (x_n) é de Cauchy.

Assim, as possibilidades (ii) e (iii) não podem ser ambas satisfeitas simultaneamente. Portanto, ou ² $x_n > 0$, para $n \geq n_0$ ou $x_n < 0$, para $n \geq n_0$, o que garante a validade do Lema 6.5.

O que finaliza a nossa demonstração. ■

Definição 6.4. *Em $\tilde{\mathbb{R}}$ definimos o seguinte conjunto:*

$$P = \left\{ [(x_1, x_2, x_3, \dots)] \in \tilde{\mathbb{R}}; \exists c \in \mathbb{Q}, c > 0 \text{ e } n_0 \in \mathbb{N}; x_n \geq c, \forall n > n_0 \right\}.$$

² Esse “ou” é exclusivo

A seguir vamos mostrar que o corpo $\tilde{\mathbb{R}}$ é um corpo ordenado. Ou seja, é possível destacar um conjunto P que preserva as operações de adição e a multiplicação, isto é, dados dois elementos em P a soma e produto deles também pertencem ao conjunto P .

Proposição 6.6. *O conjunto P define uma ordem em $\tilde{\mathbb{R}}$, ou seja, dado $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \in \tilde{\mathbb{R}}$, uma e apenas uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] = [(0)]$;
2. $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \in P$;
3. $-[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \in P$.

Demonstração. Seja $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{C}$, tal que $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \in \tilde{\mathbb{R}}$. Se (x_1, x_2, x_3, \dots) não é nula e não satisfaz a propriedade (ii) do Lema 6.5, então $-(x_1, x_2, x_3, \dots)$ satisfaz essa propriedade, pois as propriedades (ii) e (iii) deste Lema 6.5 são mutuamente excludentes.

Devemos mostrar ainda que adição e multiplicação de elementos de P resultam em elementos também de P . Consideremos $[(x_1, x_2, x_3, \dots)], [(y_1, y_2, y_3, \dots)] \in \tilde{\mathbb{R}}$ que são representados pelos elementos $(x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \tilde{\mathbb{R}}$ que satisfazem a propriedade (ii) do Lema 6.5. Daí, $[(x_1, x_2, x_3, \dots)], [(y_1, y_2, y_3, \dots)] \in P$. Logo, existem $c_1 > 0$, $c_1 \in \mathbb{Q}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$x_n \geq c_1, \quad \forall n > n_1.$$

Por outro lado, pelo mesmo lema, existem $c_2 > 0$, $c_2 \in \mathbb{Q}$, tal que

$$y_n > c_2, \quad \forall n \geq n_2.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos

$$x_n + y_n \geq c_1 + c_2 > 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim,

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)] + [(y_1, y_2, y_3, \dots)] \in P.$$

Em relação a multiplicação,

$$x_n y_n \geq c_1 c_2 > 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

Daí,

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)][(y_1, y_2, y_3, \dots)] \in P.$$

Portanto, fica provado que a soma e o produto de elementos de P também pertencem a P . Donde concluímos que P define uma ordem em $\tilde{\mathbb{R}}$, ou seja, $\tilde{\mathbb{R}}$ é um corpo ordenado. ■

Definição 6.5. Chamaremos de elementos **positivos** de $\tilde{\mathbb{R}}$ aqueles dotados da propriedade 2 da Proposição 6.6, de elementos **negativos** aqueles dotados da propriedade 3 e de elementos **nulos** aqueles dotados da propriedade 1 da mesma proposição.

Seja $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \in \tilde{\mathbb{R}}$ usaremos as seguintes notações para indicar se ele é nulo, positivo ou negativo, respectivamente:

- $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] = [(0)];$
- $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \succ [(0)];$
- $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \prec [(0)].$

Usaremos também as seguintes notações:

- $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \succeq [(0)]:$ para indicar que o elemento $[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$ é positivo ou nulo, ou seja, é não negativo.
- $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \preceq [(0)]:$ para indicar que o elemento $[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$ é negativo ou nulo, ou seja, não positivo.

O conjunto dos elementos positivos de $\tilde{\mathbb{R}}$ indicaremos por $\tilde{\mathbb{R}}_+$, isto é,

$$\tilde{\mathbb{R}}_+ = \{[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \in \tilde{\mathbb{R}}; [(x_1, x_2, x_3, \dots)] \succ [(0)]\}.$$

E o conjunto dos elementos negativos de $\tilde{\mathbb{R}}$ vamos indicar por $\tilde{\mathbb{R}}_-$, isto é,

$$\tilde{\mathbb{R}}_- = \{[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \in \tilde{\mathbb{R}}; [(x_1, x_2, x_3, \dots)] \prec [(0)]\}.$$

Exemplo 37. São elementos positivos de $\tilde{\mathbb{R}}$:

- (a) $[(1; 1, 9; 1, 99; 1, 999; \dots)] = [(2)].$ Chamemos a sequência

$$(1; 1, 9; 1, 99; 1, 999; \dots) = (x_n).$$

Claro que $[(x_n)] \succ [(0)]$, pois basta tomar $c = 1$, ($c \in \mathbb{Q}$), que teremos $x_n \geq 1$ para todo $n \geq 1$, então pelo item (ii) do Lema 6.5 e pelo item 2 da Proposição 6.6 segue-se que $[(2)]$ é um elemento positivo de $\tilde{\mathbb{R}}$. O qual podemos denotar assim:

$$[(2)] \succ [(0)].$$

- (b) $[(-10, -100, -15, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, \dots)] = [(3)].$ Analogamente ao item anterior, seja $(x_n) = (-10, -100, -15, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, \dots)$, basta tomar $c = 3$ que teremos $x_n \geq 3$ para todo $n \geq 7$. Logo, $[(3)]$ é um elemento positivo de $\tilde{\mathbb{R}}$. Claro que podemos denotar assim:

$$[(3)] \succ [(0)].$$

(c) $\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)\right] = [(1)]$. Isso ocorre, pois,

$$\lim\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1.$$

Daí, basta tomar $c = 1$, que teremos $\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq 1$, para todo $n \geq 1$. Portanto,

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)\right] \succ [(0)].$$

(d) $[(0, 1; 0, 12; 0, 121; 0, 1212; 0, 12122; 0, 121221; 0, 1212212; 0, 12122122; 0, 121221222; 0, 1212212221; 0, 12122122212; \dots)]$.

Essa sequência $(x_n) = (0, 1; 0, 12; 0, 121; 0, 1212; 0, 12122; 0, 121221; 0, 1212212; 0, 12122122; 0, 121221222; 0, 1212212221; 0, 12122122212; \dots)$ é construída de modo que a quantidade de “2” entre dois “1” vai aumentando em P.A. de razão 1.

Tomando um número racional $c = 0, 1$, temos $x_n \geq c$, para todo $n \geq 1$, portanto,

$$[(x_n)] \succ [(0)].$$

(e) $\left[\left(\frac{2023n^2 - 2023}{n^2 - 2023}\right)\right] = [(2023)]$. Tomando $c = 2022$, temos

$$\frac{2023n^2 - 2023}{n^2 - 2023} \geq 2022,$$

para todo $n \geq 45$. Portanto,

$$\left[\left(\frac{2023n^2 - 2023}{n^2 - 2023}\right)\right] \succ [(0)].$$

Exemplo 38. São elementos negativos de $\tilde{\mathbb{R}}$:

(a) $[(2; 3; 0; -0, 6; -0, 66; -0, 666; -0, 6666; \dots)] = \left[\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$.

Seja $(x_n) = (2; 3; 0; -0, 6; -0, 66; -0, 666; -0, 6666; \dots)$, basta tomar $c = -0, 1$, que teremos $x_n \leq -0, 1$ para todo $n > 3$. Portanto, segue pelo item (iii) do Lema 6.5 que

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\right] \prec [(0)].$$

(b) $\left[\left(\frac{-2023n^2 + 2023}{n^2 + 2022}\right)\right] = [(-2023)]$. Neste caso basta tomar $c = -1$, que teremos

$$\frac{-2023n^2 + 2023}{n^2 + 2022} \leq -1,$$

para todo $n \geq 2$. Mais uma vez pelo item (iii) do Lema 6.5 segue-se que

$$\left[\left(\frac{-2023n^2 + 2023}{n^2 + 2022}\right)\right] \prec [(0)].$$

Exemplo 39. São exemplos de elementos nulos de $\tilde{\mathbb{R}}$:

- (a) $\left[\left(\frac{1}{n}\right)\right] = [(0)]$. Já provamos no Exemplo 31 (Capítulo 5, Seção 5.3) que $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge para zero.
- (b) $\left[\left(\frac{n^2 + 4}{-n^{2023} + 2022}\right)\right] = [(0)]$.
- (c) $\left[\left(\frac{(-1)^n}{n^4}\right)\right] = [(0)]$.

Observação 6.2. Dado $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \in \mathcal{C}$. Se tivermos $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ não implica $[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \succ [(0)]$. Vide Exemplo 39, item (a), onde todos os termos da sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ são positivos, mas $\left[\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ não o é, pois $\left[\left(\frac{1}{n}\right)\right] = [(0)]$. Todavia, não poderemos ter $[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \prec [(0)]$, pois para isso ocorrer, deveria existir, pela Definição 6.5, um número racional $c > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n < -c, \forall n > n_0$, mas isso não ocorre, visto que $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, dado $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \in \mathcal{C}$, se $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ teremos que

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \succeq [(0)],$$

ou seja, um elemento positivo ou nulo de $\tilde{\mathbb{R}}$.

Observação 6.3. Se $c \in \mathbb{Q}$ e $c > 0$, então

$$[(c)] \succ [(0)].$$

Definição 6.6. Dados dois elementos $[(x_1, x_2, x_3, \dots)], [(y_1, y_2, y_3, \dots)] \in \tilde{\mathbb{R}}$ diremos que $[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$ é **maior** do que $[(y_1, y_2, y_3, \dots)]$ e indicaremos por

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \succ [(y_1, y_2, y_3, \dots)],$$

quando $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] - [(y_1, y_2, y_3, \dots)] \succ [(0)]$. Diremos que $[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$ é **menor** do que $[(y_1, y_2, y_3, \dots)]$ e indicaremos por

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \prec [(y_1, y_2, y_3, \dots)],$$

quando $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] - [(y_1, y_2, y_3, \dots)] \prec [(0)]$. E, se $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] - [(y_1, y_2, y_3, \dots)] = [(0)]$, diremos que $[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$ é **igual** a $[(y_1, y_2, y_3, \dots)]$ e indicaremos por

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)] = [(y_1, y_2, y_3, \dots)].$$

Definição 6.7. Em $\tilde{\mathbb{R}}$ vamos definir o **valor absoluto (ou módulo)** de um elemento $[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$, do seguinte modo:

$$\|[(x_1, x_2, x_3, \dots)]\| = \begin{cases} [(x_1, x_2, x_3, \dots)], & \text{se } [(x_1, x_2, x_3, \dots)] \succeq [(0)] \\ -[(x_1, x_2, x_3, \dots)], & \text{se } [(x_1, x_2, x_3, \dots)] \prec [(0)]. \end{cases} \quad (6.6)$$

Proposição 6.7. *Seja $[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$ e $[(a)]$ elementos de $\tilde{\mathbb{R}}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $-[(a)] \preceq [(x_1, x_2, x_3, \dots)] \preceq [(a)]$;
- (ii) $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \preceq [(a)]$ e $-[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \preceq [(a)]$;
- (iii) $\|[(x_1, x_2, x_3, \dots)]\| \preceq [(a)]$.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (LIMA, 1976, p. 57), onde o autor demonstrar para um corpo ordenado qualquer.

Teorema 6.8 (Desigualdade trinagular). *Sejam $[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$ e $[(y_1, y_2, y_3, \dots)]$ elementos arbitrários de $\tilde{\mathbb{R}}$, então*

$$\|[(x_1, x_2, x_3, \dots)] + [(x_1, x_2, x_3, \dots)]\| \preceq \|[(x_1, x_2, x_3, \dots)]\| + \|[(x_1, x_2, x_3, \dots)]\|.$$

A demonstração desse teorema também pode ser conferida em (LIMA, 1976, p. 58).

Observação 6.4. *Seja $\tilde{\varepsilon} \in \tilde{\mathbb{R}}$, vamos considerar*

$$\underbrace{\tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} + \dots + \tilde{\varepsilon}}_{n \text{ vezes}} := n \cdot \tilde{\varepsilon},$$

daqui por diante adotaremos esse fato.

A demonstração do resultado que se segue é baseado em (KIMING, 2004).

Teorema 6.9 (Propriedade arquimediana de $\tilde{\mathbb{R}}$). *(1) Seja $\tilde{\varepsilon} \succ [(0)]$, $\tilde{\varepsilon} \in \tilde{\mathbb{R}}$ e seja $[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$ um elemento qualquer de $\tilde{\mathbb{R}}$. Então existe $k \in \mathbb{N}$, tal que*

$$k \cdot \tilde{\varepsilon} \succ [(x_1, x_2, x_3, \dots)].$$

(2) Seja $\tilde{\varepsilon} \succ [(0)]$, $\tilde{\varepsilon} \in \tilde{\mathbb{R}}$. Então existe $[(q)] \in \tilde{\mathbb{Q}}$, $[(q)] \succ [(0)]$, tal que $[(q)] \prec \tilde{\varepsilon}$.

(3) Seja $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \in \tilde{\mathbb{R}}$ e seja $\tilde{\varepsilon} \succ [(0)]$, $\tilde{\varepsilon} \in \tilde{\mathbb{R}}$. Então existe um número racional q tal que

$$\|[(x_1, x_2, x_3, \dots)] - [(q)]\| \prec \tilde{\varepsilon}.$$

Demonstração. (1) Sejam $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots)$ e (x_1, x_2, x_3, \dots) elementos de \mathcal{C} que representam $\tilde{\varepsilon}$ e $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \in \tilde{\mathbb{R}}$, respectivamente.

Como $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{C}$ então, pelo Teorema 5.9, ela é limitada. Logo, existe $c > 0$, $c \in \mathbb{Q}$, tal que

$$|x_n| \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em particular,

$$x_n \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\tilde{\varepsilon} \succ [(0)]$, existem $d \in \mathbb{Q}$, $d > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tais que

$$e_n \geq d, \quad \forall n > n_0. \quad (6.7)$$

Consideremos $\frac{c+1}{d} \in \mathbb{Q}$. Existe, pela propriedade arquimediana em \mathbb{Q} (vide Teorema B.2), $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$k > \frac{c+1}{d}, \quad (6.8)$$

o que acarreta pela equação 6.7

$$k \cdot e_n > \frac{c+1}{d} \cdot d = c+1 \geq x_n + 1, \quad \forall n \geq n_0,$$

pois $x_n \leq c$.

Isso mostra que os termos da sequência

$$(k \cdot e_1 - x_1, k \cdot e_2 - x_2, k \cdot e_3 - x_3, \dots, k \cdot e_n - x_n, \dots)$$

são todos maiores do que ou iguais a 1, para todo $n \geq n_0$. Isso implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$k \cdot e_n - x_n \geq 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [(ke_1 - x_1, ke_2 - x_2, ke_3 - x_3, \dots)] &\succ [(0)] \\ \Rightarrow k \cdot \tilde{\varepsilon} &\succ [(x_1, x_2, x_3, \dots)]. \end{aligned}$$

- (2) O elemento $[(1)] \in \tilde{\mathbb{R}}_+$. Como $\tilde{\varepsilon}$ é positivo, então admite inverso multiplicativo $\tilde{\varepsilon}^{-1}$. Pelo que foi provado no item **(1)**, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$[(k)] \cdot [(1)] \succ \tilde{\varepsilon}^{-1}.$$

Daí,

$$\frac{[(1)]}{[(k)]} \prec \tilde{\varepsilon}.$$

Mas,

$$\frac{[(1)]}{[(k)]} \in \tilde{\mathbb{Q}} \quad \text{e} \quad \frac{[(1)]}{[(k)]} \succ [(0)],$$

então tomemos $[(q)] = \frac{[(1)]}{[(k)]}$ e teremos

$$[(q)] \prec \tilde{\varepsilon}.$$

(3) Vamos considerar as três possibilidades:

a) $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] = [(0)]$: nesse caso podemos escolher $q = 0$ e teremos,

$$\| [(x_1, x_2, x_3, \dots)] - [(q)] \| = \| [(0)] - 0 \| = \| [(0)] \| \prec \tilde{\varepsilon}.$$

b) $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \succ [(0)]$: se $[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \prec \tilde{\varepsilon}$, basta tomarmos $q = 0$, que teremos $\| [(x_1, x_2, x_3, \dots)] - [(q)] \| \prec \tilde{\varepsilon}$. Então vamos assumir

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)] \succeq \tilde{\varepsilon}.$$

Pelo que foi provado no item (2), existe $d \in \mathbb{Q}$, $d > 0$, tal que

$$[(d)] \prec \tilde{\varepsilon}.$$

Pelo item (1), existe $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$k \cdot [(d)] \succ [(x_1, x_2, x_3, \dots)]. \quad (6.9)$$

Tomemos, então, o menor $k_0 \in \mathbb{N}$ (sabemos que existe pelo PBO, axioma C.5) que satisfaz a inequação 6.9. Como $[(d)] \prec \tilde{\varepsilon} \prec [(x_1, x_2, x_3, \dots)]$ e como k_0 é o menor valor possível que satisfaz a inequação 6.9, devemos ter

$$[(k_0 - 1)] \cdot [(d)] \preceq [(x_1, x_2, x_3, \dots)].$$

Então,

$$0 \preceq [(x_1, x_2, x_3, \dots)] - [(k_0 - 1)] \cdot [(d)] \prec [(k_0)] \cdot [(d)] - [(k_0 - 1)] \cdot [(d)] = [(d)] \prec \tilde{\varepsilon}.$$

Daí, podemos tomar $[(q)] = [(k_0 - 1)] \cdot [(d)]$, que teremos

$$\| [(x_1, x_2, x_3, \dots)] - [(q)] \| \prec \tilde{\varepsilon}.$$

c) $[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \prec [(0)]$: nesse caso, $-[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \succ [(0)]$, então pelo que foi provado no item (b), existe $q \in \mathbb{Q}$, tal que

$$\| -[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] - [(q)] \| \prec \tilde{\varepsilon} \Rightarrow \| [(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] - (-[(q)]) \| \prec \tilde{\varepsilon}.$$

Mas se $[(q)] \in \mathbb{Q}$, então $-[(q)] \in \mathbb{Q}$, o que finaliza a demonstração. ■

Corolário 6.10. *O conjunto $\tilde{\mathbb{R}}$ é um corpo ordenado e arquimediano.*

A demonstração decorre diretamente da Definição 3.3 e do Teorema 6.9 que acabamos de provar.

Definição 6.8. Dizemos que uma sequência $(X_1, X_2, X_3, \dots) \subset \tilde{\mathbb{R}}$ é **convergente** quando dado $\varepsilon \succ [(0)]$, ($\varepsilon \in \tilde{\mathbb{R}}$), existem $L \in \tilde{\mathbb{R}}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tais que

$$n > n_0 \Rightarrow \|X_n - L\| \prec \varepsilon.$$

Definição 6.9. Dizemos que $L \in \tilde{\mathbb{R}}$ é o **limite** de uma sequência $(X_n) \subset \tilde{\mathbb{R}}$ quando para todo $\varepsilon \succ [(0)]$, ($\varepsilon \in \tilde{\mathbb{R}}$), existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|X_n - L\| \prec \varepsilon.$$

Definição 6.10. Dizemos que $(X_1, X_2, X_3, \dots) \subset \tilde{\mathbb{R}}$ é uma **sequência de Cauchy**, se dado $\varepsilon \in \tilde{\mathbb{R}}$, $\varepsilon \succ [(0)]$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow \|X_n - X_m\| \prec \varepsilon.$$

Já vimos na Definição 6.2 que um corpo arquimediano é dito completo quando toda sequência de Cauchy é convergente. Em outras palavras, considerando

$$(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots) \subset \mathbb{K}$$

uma sequência de Cauchy, se \mathbb{K} é um corpo ordenado completo, dado ε positivo em \mathbb{K} , existe um elemento $L \in \mathbb{K}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tais que

$$|x_n - L| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Lema 6.11. Seja $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \in \mathcal{C}$ e seja $c > 0$, $c \in \mathbb{Q}$. Se existir $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|x_n| \leq c, \forall n > n_0$, então

$$\|[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)]\| \preceq [(c)].$$

Demonstração. Se $[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] = [(0)]$, então é imediato constatar que $[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \preceq [(c)]$. Assim, vamos supor $[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \neq [(0)]$.

Se $[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \succ [(0)]$: então pela Definição 6.7 (definição de módulo em $\tilde{\mathbb{R}}$), temos

$$\|[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)]\| = [(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)].$$

Portanto, devemos mostrar que

$$[(c)] - [(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \succ [(0)].$$

Como $|x_n| \leq c$, temos

$$c - x_n \geq 0, \quad \forall n > n_0. \tag{6.10}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} [(c)] - [(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] &= [(c, c, c, \dots)] - [(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \\ &= [(c - x_1, c - x_2, c - x_3, \dots, c - x_n, \dots)] \end{aligned}$$

que pela equação 6.10 e pela definição de ordem em $\tilde{\mathbb{R}}$ (Definição 6.4) é maior do que ou igual a $[(0)]$.

Assim,

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \preceq [(c)]. \quad (6.11)$$

De modo análogo, podemos provar também que

$$-[(c)] \preceq [(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)]. \quad (6.12)$$

Daí, combinando as equações 6.11 e 6.12, concluímos que

$$\begin{aligned} -[(c)] \preceq [(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \preceq [(c)] \\ \Rightarrow \parallel [(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)] \parallel \preceq [(c)]. \end{aligned}$$

■

O corolário que enunciaremos e demonstraremos a seguir nos diz que seqüências de Cauchy de números racionais são levadas em seqüências de Cauchy em $\tilde{\mathbb{R}}$.

Corolário 6.12. *Seja $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \in \mathcal{C}$, então a seqüência*

$$([(x_1)], [(x_2)], [(x_3)], \dots) \subset \tilde{\mathbb{R}}$$

é de Cauchy em $\tilde{\mathbb{R}}$.

Demonstração. Queremos mostrar que a seqüência $([(x_1)], [(x_2)], [(x_3)], \dots)$ é de Cauchy em $\tilde{\mathbb{R}}$, isto é, dado $\tilde{\varepsilon} \succ [(0)]$, $\tilde{\varepsilon} \in \tilde{\mathbb{R}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\parallel [(x_n)] - [(x_m)] \parallel \prec \tilde{\varepsilon}, \quad \forall m, n > n_0. \quad (6.13)$$

Dado $\tilde{\varepsilon} \in \tilde{\mathbb{R}}_+$, existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$, pelo item (2) do Teorema 6.9, tal que

$$[(\varepsilon)] \prec \tilde{\varepsilon}. \quad (6.14)$$

Seja $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \in \mathcal{C}$. Como se trata de uma seqüência de Cauchy de números racionais, então para o $\varepsilon > 0$ dado acima, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \quad \forall m, n > n_0. \quad (6.15)$$

O que implica, pela equação (6.15) e pelo Lema 6.11,

$$\parallel [(x_n - x_m)] \parallel \preceq [(\varepsilon)] \prec \tilde{\varepsilon}, \quad \forall m, n > n_0.$$

Como $\| [(x_n - x_m)] \| = \| [(x_n)] - [(x_m)] \|$, vemos, então, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\| [(x_n)] - [(x_m)] \| \prec \tilde{\varepsilon}, \quad \forall m, n > n_0.$$

Portanto, fica provado que

$$([(x_1)], [(x_2)], [(x_3)], \dots, [(x_n)], \dots)$$

é uma sequência de Cauchy de elementos de $\tilde{\mathbb{R}}$. ■

Lema 6.13. *Seja $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \in \mathcal{C}$. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ([(x_1)], [(x_2)], [(x_3)], \dots, [(x_n)]) = [(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)].$$

Demonstração. Queremos mostrar que dado $\tilde{\varepsilon} \in \tilde{\mathbb{R}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\| [(x_n)] - [(x_1, x_2, x_3, \dots)] \| \prec \tilde{\varepsilon}, \quad \forall n > n_0.$$

Sabemos pelo item (2) do Teorema 6.9 que dado $\tilde{\varepsilon} \in \tilde{\mathbb{R}}$, $\tilde{\varepsilon} \succ [(0)]$, existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$, tal que

$$[(\varepsilon)] \prec \tilde{\varepsilon}. \tag{6.16}$$

Como $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \in \mathcal{C}$, então para o ε dado acima, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \quad \forall m, n > n_0.$$

o que implica,

$$-\varepsilon < x_m - x_n < \varepsilon, \quad \forall m, n > n_0. \tag{6.17}$$

Da equação 6.17, em particular, temos que

$$\begin{aligned} -\varepsilon < x_m - x_n &\Rightarrow x_m - x_n > -\varepsilon \\ &\Rightarrow x_m - x_n + \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Fixando $m > n_0$, variando m , temos

$$\begin{aligned} x_{n_0+1} - x_n + \varepsilon &> 0, \\ x_{n_0+2} - x_n + \varepsilon &> 0, \\ x_{n_0+3} - x_n + \varepsilon &> 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo,

$$[(x_1 - x_n + \varepsilon, x_2 - x_n + \varepsilon, \dots, x_{n_0} - x_n + \varepsilon, x_{n_0+1} - x_n + \varepsilon, x_{n_0+2} - x_n + \varepsilon, \dots)] \succeq [(0)]. \tag{6.18}$$

Façamos,

$$X_n := [(x_n, x_n, x_n, \dots)] = [(x_n)].$$

Da equação (6.18), temos,

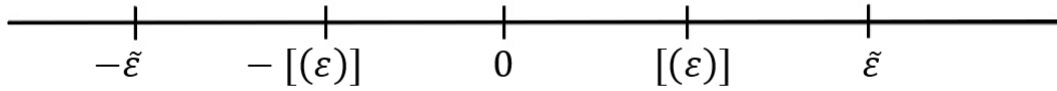
$$\begin{aligned} & [(x_1 - x_n + \varepsilon, x_2 - x_n + \varepsilon, \dots, x_{n_0} - x_n + \varepsilon, x_{n_0+1} - x_n + \varepsilon, x_{n_0+2} - x_n + \varepsilon, \dots)] \succeq [(0)] \\ \Rightarrow & [(x_1, x_2, x_3 \dots, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+3}, \dots) - (x_n, x_n, x_n, \dots) + (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots)] \succeq [(0)] \\ \Rightarrow & [(x_1, x_2, x_3 \dots, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+3}, \dots)] - X_n + [(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots)] \succeq [(0)] \\ \Rightarrow & [(x_1, x_2, x_3 \dots, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+3}, \dots)] - X_n \succeq [(\varepsilon)] \end{aligned}$$

Pela equação (6.16), temos

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)] - X_n \succ -\tilde{\varepsilon}. \tag{6.19}$$

Vide também ilustração na Figura 15 para melhor compreensão.

Figura 15 – Propriedade arquimediana em $\tilde{\mathbb{R}}$



Fonte: Autores, 2023

Analogamente, da equação 6.17, podemos provar que

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)] - X_n \prec \tilde{\varepsilon}, \quad \forall n > n_0. \tag{6.20}$$

Das equação (6.19) e (6.20), concluimos pela definição de módulo em $\tilde{\mathbb{R}}$ (Definição 6.7) que

$$\begin{aligned} & \| [(x_1, x_2, x_3, \dots)] - X_n \| \prec \tilde{\varepsilon}, \quad \forall n > n_0. \\ \Rightarrow & \| X_n - [(x_1, x_2, x_3, \dots)] \| \prec \tilde{\varepsilon}, \quad \forall n > n_0 \\ \Rightarrow & \| [(x_n)] - [(x_1, x_2, x_3, \dots)] \| \prec \tilde{\varepsilon}, \quad \forall n > n_0. \end{aligned}$$

E isso prova que

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$$

é o limite da sequência

$$([(x_1)], [(x_2)], [(x_3)], \dots, [(x_n)]).$$

Ou seja,

$$\lim([(x_1)], [(x_2)], [(x_3)], \dots, [(x_n)]) = [(x_1, x_2, x_3, \dots)].$$

■

Corolário 6.14. *Se $([(x_1)], [(x_2)], [(x_3)], \dots, [(x_n)], \dots)$, $x_i \in \mathbb{Q}$, for uma sequência de Cauchy em $\tilde{\mathbb{R}}$, então $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{Q} .*

Demonstração. Seja $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$. Como $([(x_1)], [(x_2)], [(x_3)], \dots, [(x_n)], \dots)$ é uma sequência de Cauchy em $\tilde{\mathbb{R}}$, para $[(\varepsilon)] > [(0)]$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$-[(\varepsilon)] \prec [(x_m - x_n)] \prec [(\varepsilon)], \quad \forall m, n > n_0.$$

Ora,

$$\begin{aligned} & [(x_m - x_n)] \prec [(\varepsilon)] \\ \Rightarrow & [(\varepsilon - x_m + x_n)] \succ [(0)] \\ \Rightarrow & \varepsilon - x_m + x_n \succ 0 \\ \Rightarrow & x_m - x_n \prec \varepsilon, \quad \forall m, n > n_0. \end{aligned}$$

De maneira análoga, se prova que $x_m - x_n \succ -\varepsilon$.

Daí, para o $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$, acima, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \quad \forall m, n > n_0.$$

Portanto, (x_1, x_2, x_3, \dots) é uma sequência de Cauchy de números racionais. ■

Teorema 6.15. *O conjunto $\tilde{\mathbb{R}}$ é um corpo arquimediano ordenado e completo.*

Demonstração. Seja (X_1, X_2, X_3, \dots) uma sequência de Cauchy em $\tilde{\mathbb{R}}$. Pelo item (3) do Teorema 6.9, dado $X_n \in \tilde{\mathbb{R}}$ e $\varepsilon = \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \mathbb{Q}$, tal que

$$\|X_n - [(x_n)]\| \prec \left[\left(\frac{1}{n} \right) \right]. \quad (6.21)$$

Além disso, como (X_1, X_2, X_3, \dots) é uma sequência de Cauchy em $\tilde{\mathbb{R}}$, dado $\tilde{\varepsilon} \succ [(0)]$, $\tilde{\varepsilon} \in \tilde{\mathbb{R}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|X_n - X_m\| \prec \frac{\tilde{\varepsilon}}{3}, \quad \forall m, n > n_0. \quad (6.22)$$

Seja ainda $n_1 > n_0$, tal que

$$\left[\left(\frac{1}{n} \right) \right] \prec \frac{\tilde{\varepsilon}}{3}, \quad \forall n > n_1, \quad (6.23)$$

cuja existência é assegurada pelo item (1) do Teorema 6.9 (propriedade arquimediana de $\tilde{\mathbb{R}}$). Então, para todos $m, n > n_1$, temos pela desigualdade triangular (Teorema 6.8)

e pela desigualdades (6.21), (6.22) e (6.23)

$$\begin{aligned}
 \| [(x_m)] - [(x_n)] \| &= \| [(x_m)] - X_n + X_n - X_m + X_m - [(x_n)] \| \\
 &\preceq \| [(x_m)] - X_m \| + \| X_n - X_m \| + \| X_n - [(x_n)] \| \\
 &\prec \left[\left(\frac{1}{m} \right) \right] + \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} + \left[\left(\frac{1}{n} \right) \right] \\
 &\prec \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} \\
 &= \tilde{\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Isso demonstra que

$$([x_1], [x_2], [x_3], \dots)$$

é uma sequência de Cauchy em $\tilde{\mathbb{R}}$, que pelo Lema 6.13 converge para $[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$. Agora, pelo Corolário 6.14, (x_1, x_2, x_3, \dots) é uma sequência de Cauchy de números racionais, isto é $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{C}$.

Devemos provar agora que a sequência (X_1, X_2, X_3, \dots) converge para algum elemento de $\tilde{\mathbb{R}}$, que nesse caso será, pelo Lema 6.13, $[(x_1, x_2, x_3, \dots)]$.

Pelo Lema 6.13, dado $\tilde{\varepsilon} > [(0)]$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$, tal que

$$\| [(x_n)] - [(x_1, x_2, x_3, \dots)] \| \prec \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}, \quad \forall n > n_2. \quad (6.24)$$

Pela desigualdade triangular (Teorema 6.8), e pelas desigualdades (6.21) e (6.24), temos, para $n > n_2$,

$$\begin{aligned}
 \| X_n - [(x_1, x_2, x_3, \dots)] \| &\preceq \| X_n - [(x_n)] \| + \| [(x_n)] - [(x_1, x_2, x_3, \dots)] \| \\
 &\prec \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \\
 &= \tilde{\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

O que demonstra que

$$(X_1, X_2, X_3, \dots)$$

converge para

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots)].$$

Ou seja, tomando uma sequência de Cauchy arbitrária em $\tilde{\mathbb{R}}$, provamos que ela converge para algum elemento de $\tilde{\mathbb{R}}$, então segue-se pela Definição 6.2 que $\tilde{\mathbb{R}}$ é um corpo arquimediano ordenado e completo. ■

6.3 Comparação entre os corpos dos números racionais e dos números reais

Vamos considerar a expressão decimal $1,989898\cdots$, que se trata de uma dízima periódica simples de parte inteira igual a 1 e período igual a 98. Podemos aproximar esse número por uma sequência de Cauchy de número racionais, pois já vimos no Teorema 5.7 que toda sequência desse tipo é de Cauchy:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 \\x_2 &= 1,9 \\x_3 &= 1,98 \\x_4 &= 1,989 \\x_5 &= 1,9898 \\x_6 &= 1,98989 \\x_7 &= 1,989898 \\&\vdots\end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$(x_n) = (1; 1,9; 1,98; 1,989; 1,9898; 1,98989; 1,989898; \cdots).$$

Pelo Corolário 6.12 essa sequência (x_1, x_2, x_3, \cdots) em \mathbb{Q} é levada na sequência

$$([(1)]; [(1,9)]; [(1,98)]; [(1,989)]; [(1,9898)]; [(1,98989)]; [(1,989898)]; \cdots)$$

em $\tilde{\mathbb{R}}$. Daí, pelo Lema 6.13, a sequência

$$([(1)]; [(1,9)]; [(1,98)]; [(1,989)]; [(1,9898)]; [(1,98989)]; [(1,989898)]; \cdots)$$

converge para

$$[(1; 1,9; 1,98; 1,989; 1,9898; 1,98989; 1,989898; \cdots)] = [(1,989898\cdots)],$$

que pertence à cópia de \mathbb{Q} em $\tilde{\mathbb{R}}$. Ou seja,

$$\lim([(1)]; [(1,9)]; [(1,98)]; [(1,989)]; [(1,9898)]; [(1,98989)]; \cdots) = [(1,989898\cdots)].$$

Mas, sabemos que algumas sequências de Cauchy de números racionais não são convergentes em \mathbb{Q} , por exemplo, tomando a sequência

$$(x_n) = (1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \cdots),$$

tal que x_n é a aproximação racional de $\sqrt{2}$ com n casas decimais, sabemos que (x_n) não converge em \mathbb{Q} , como vimos no Exemplo 19.

Pelo Corolário 6.12, a sequência de Cauchy

$$(x_n) = (1, 4; 1, 41; 1, 414; 1, 4142; \dots)$$

em \mathbb{Q} é levada na sequência

$$([(1, 4)]; [(1, 41)]; [(1, 414)]; [(1, 4142)]; \dots),$$

em $\tilde{\mathbb{R}}$ a qual converge, pelo Lema 6.13, para

$$[(1, 4; 1, 41; 1, 414; 1, 4142; \dots)]$$

em $\tilde{\mathbb{R}}$. Isto é,

$$\lim([(1, 4)]; [(1, 41)]; [(1, 414)]; [(1, 4142)]; \dots) = [(1, 4; 1, 41; 1, 414; 1, 4142; \dots)].$$

Mas esse elemento $[(1, 4; 1, 41; 1, 414; 1, 4142; \dots)]$ para nós é estranho, pois não pertence à cópia de \mathbb{Q} em $\tilde{\mathbb{R}}$, mas sabemos que pertence a $\tilde{\mathbb{R}}$. Então vamos interpretá-lo, assim

$$\lim([(1, 4)]; [(1, 41)]; [(1, 414)]; [(1, 4142)]; \dots) = [(1, 4; 1, 41; 1, 414; 1, 4142; \dots)],$$

o qual sabemos que é um elemento de $\tilde{\mathbb{R}}$, uma vez que $(1, 4; 1, 41; 1, 414; 1, 4142; \dots)$ é uma sequência de Cauchy de números racionais.

Exemplo 40. *Considere a expressão decimal*

$$1, 1010010001 \dots = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{10}} + \dots + \frac{1}{10^{\frac{n^2-n}{2}}}.$$

Tomemos a sequência de números racionais

$$S = \left(\sum_{i=0}^0 \frac{1}{10^{\frac{i^2-1}{2}}}, \sum_{i=0}^1 \frac{1}{10^{\frac{i^2-1}{2}}}, \sum_{i=0}^2 \frac{1}{10^{\frac{i^2-1}{2}}}, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{10^{\frac{i^2-1}{2}}}, \dots \right)$$

E consideremos a imersão de S em $\tilde{\mathbb{R}}$

$$\tilde{S} = \left(\left[\left(\sum_{i=0}^0 \frac{1}{10^{\frac{i^2-1}{2}}} \right) \right], \left[\left(\sum_{i=0}^1 \frac{1}{10^{\frac{i^2-1}{2}}} \right) \right], \left[\left(\sum_{i=0}^2 \frac{1}{10^{\frac{i^2-1}{2}}} \right) \right], \dots, \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{10^{\frac{i^2-1}{2}}} \right) \right], \dots \right),$$

então

$$\lim \tilde{S} := \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{\frac{i^2-1}{2}}} \right) \right].$$

O que não faria sentido para nós, uma vez que

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{\frac{i^2-1}{2}}} \right) \notin \mathcal{C}.$$

Mas veremos a seguir como superar essa dificuldade e dar sentido a expressões decimais desse tipo.

De modo genérico, em $\tilde{\mathbb{R}}$ vamos apresentar a sequência decimais. Então consideremos a expressão decimal

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots .$$

Daí, definiremos

$$\begin{aligned} [(x_1)] &:= [(x_1, x_1, x_1, \cdots)] := [(a_0, a_0, a_0, \cdots)] = \left[\left(\sum_{i=0}^0 \frac{a_i}{10^i} \right) \right] \\ [(x_2)] &:= [(x_2, x_2, x_2, \cdots)] := \left[\left(a_0 + \frac{a_1}{10}, a_0 + \frac{a_1}{10}, a_0 + \frac{a_1}{10}, \cdots \right) \right] = \left[\left(\sum_{i=0}^1 \frac{a_i}{10^i} \right) \right] \\ [(x_3)] &:= [(x_3, x_3, x_3, \cdots)] \\ &:= \left[\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \cdots \right) \right] \\ &= \left[\left(\sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{10^i} \right) \right] \\ &\quad \vdots \\ [(x_n)] &:= [(x_n, x_n, x_n, \cdots)] \\ &:= \left[\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}, \cdots \right) \right] \\ &= \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{10^i} \right) \right], \quad a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, i \geq 1. \end{aligned}$$

Pelo Lema 6.12, temos que

$$S = \left(\sum_{i=0}^0 \frac{a_i}{10^i}, \sum_{i=0}^1 \frac{a_i}{10^i}, \sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{10^i}, \cdots, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{10^i}, \cdots \right)$$

que está contida em \mathbb{Q} é lavada em

$$\tilde{S} = \left(\left[\left(\sum_{i=0}^0 \frac{a_i}{10^i} \right) \right], \left[\left(\sum_{i=0}^1 \frac{a_i}{10^i} \right) \right], \left[\left(\sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{10^i} \right) \right], \cdots, \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{10^i} \right) \right], \cdots \right)$$

que está contido em $\tilde{\mathbb{R}}$.

Pelo Lema 6.13 temos

$$\lim \left(\left[\left(\sum_{i=0}^0 \frac{a_i}{10^i} \right) \right], \left[\left(\sum_{i=0}^1 \frac{a_i}{10^i} \right) \right], \left[\left(\sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{10^i} \right) \right], \cdots, \left[\left(\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{10^i} \right) \right] \right) = \left[\left(\sum_{i=0}^0 \frac{a_i}{10^i}, \sum_{i=0}^1 \frac{a_i}{10^i}, \sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{10^i}, \cdots \right) \right].$$

Denotaremos assim,

$$\left[\left(\sum_{i=0}^0 \frac{a_i}{10^i}, \sum_{i=0}^1 \frac{a_i}{10^i}, \sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{10^i}, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{10^i}, \dots \right) \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

Em \mathbb{Q} encontramos apenas as expressões decimais finitas ou infinitas e periódicas. As expressões decimais infinitas e não periódicas não pertencem a \mathbb{Q} , mas em $\tilde{\mathbb{R}}$ as expressões decimais infinitas e não periódicas podem ser encontradas.

Vamos ver \mathbb{R} levando em consideração o entendimento que temos de $\tilde{\mathbb{R}}$ e as expressões decimais. Daí podemos ver os números reais como o conjunto de todas as expressões decimais, como veremos na Definição 6.11 abaixo.

Definição 6.11.

$$\mathbb{R} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}; a_0 \in \mathbb{Z} \text{ e } a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, i > 0 \right\}.$$

Com isso, podemos “encarar” que toda expressão decimal faz sentido, seja ela finita, infinita e periódica ou infinita e não periódica.

A demonstração de que esse conjunto é um corpo ordenado e completo, usando as expressões decimais, pode ser vista em (FARDIN, 2021).

6.3.1 As operações em \mathbb{R}

E as operações em \mathbb{R} fazem como proceder? Veremos a seguir como podemos dar sentido as operações de adição e multiplicação.

Considere

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} = \left[\left(\sum_{i=0}^0 \frac{a_i}{10^i}, \sum_{i=0}^1 \frac{a_i}{10^i}, \sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{10^i}, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{10^i}, \dots \right) \right]$$

e

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{10^i} = \left[\left(\sum_{i=0}^0 \frac{b_i}{10^i}, \sum_{i=0}^1 \frac{b_i}{10^i}, \sum_{i=0}^2 \frac{b_i}{10^i}, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{10^i}, \dots \right) \right],$$

elementos de \mathbb{R} . Vemos que fazem sentido as operações do seguinte modo:

Adição:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{10^i} = \left[\left(\sum_{i=0}^0 \frac{a_i}{10^i} + \sum_{i=0}^0 \frac{b_i}{10^i}, \left(\sum_{i=0}^1 \frac{a_i}{10^i} + \sum_{i=0}^1 \frac{b_i}{10^i} \right), \left(\sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{10^i} + \sum_{i=0}^2 \frac{b_i}{10^i} \right), \dots \right) \right]$$

Multiplicação:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{10^i} = \left[\left(\sum_{i=0}^0 \frac{a_i}{10^i} \cdot \sum_{i=0}^0 \frac{b_i}{10^i}, \left(\sum_{i=0}^1 \frac{a_i}{10^i} \cdot \sum_{i=0}^1 \frac{b_i}{10^i} \right), \left(\sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{10^i} \cdot \sum_{i=0}^2 \frac{b_i}{10^i} \right), \dots \right) \right]$$

Com essa interpretação fazem sentido as operação de adição e multiplicação em \mathbb{R} como conhecemos, o que conclui a construção do corpo ordenado e completo \mathbb{R} .

7 Considerações finais

A construção dos números reais envolveu um processo muito demorado e complexo ao longo da história da Matemática. Essa formalização foi extremamente importante para aprimorar o conceito de número. Pois, até então não se sabia ao certo o que seria um número real.

Percebemos que essa construção envolve conceitos matemáticos que não são acessíveis aos alunos do Ensino Básico. Nesse sentido, o professor dessa fase de ensino exercerá uma função muito importante e não simples, que é a de adequar as explicações para ficarem inteligíveis aos alunos, sem que cometa imprecisões matemáticas.

No entanto, é muito importante que o professor compreenda como se deu tal construção, atentando para o aspecto histórico e os avanços decorrentes dessa construção formal e rigorosa desse conjunto numérico. O professor de Matemática precisa ter uma formação matemática sólida que requer um nível de abstração acima daqueles que não são estudiosos do tema.

Nesse viés, este trabalho pretende contribuir para melhor compreensão da construção dos números reais usando sequências de Cauchy de número de racionais, pois apresentamos uma notação que deixa muito claro com que objetos matemáticos estamos lidando em cada ocasião. O leitor deve ter notado que certas vezes estávamos lidando com elementos racionais, outras vezes com elementos do conjunto $\tilde{\mathbb{R}}$, mas o uso de notações diferenciadas, como fizemos, facilita muito na hora de fazermos essa distinção.

A princípio, para quem tem muita familiaridade com Estruturas Algébricas e Análise Real, pode não fazer tanta diferença. Mas vale ressaltar que o foco desse trabalho é o professor do Ensino Básico que não tem tanta familiaridade com essa matemática do ensino superior.

Com nossa abordagem, pudemos interpretar a construção do corpo ordenado e completo que fizemos, o qual chamamos de $\tilde{\mathbb{R}}$ nele “enxergamos” os números reais como expressões decimais infinitas.

Já existem provas de que o conjuntos das expressões decimais formam um corpo ordenado e completo, mas é um fato que requer matemática bem mais avançada. Quem quiser saber mais sobre essa demonstração pode conferir em (FARDIN, 2021).

Referências

- AVILA, G. *Análise matemática para licenciatura*. São Paulo-SP: Editora Edgard Blücher, 2005. Citado na página 124.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo-SP: Edgard Blücher Ltda, 1974. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 62.
- BRASIL. *Base Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 04 jan 2023. Citado 4 vezes nas páginas 18, 19, 42 e 129.
- BRITANNICA, O. E. d. E. *Simon Stevin*. 2023. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Simon-Stevin#/media/1/565994/14526>>. Acesso em: 02 abr 2023. Citado na página 32.
- BUENO, F. d. S. *Dicionário Escolar da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro-RJ: Ministério da Educação, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- FARDIN, N. *Real numbers as infinite decimals*. 2021. Disponível em: <<https://scholarworks.unt.edu/tme/vol18/iss1/4/>>. Acesso em: 06 jun 2023. Citado 2 vezes nas páginas 111 e 112.
- FERREIRA, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 14, 61 e 62.
- FIGUEIREDO, D. G. d. *Análise I*. Rio de Janeiro-RJ: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 39, 58 e 124.
- FILHO, D. C. d. M. *Um Convite à Matemática*. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 59.
- GLOBO. *Creme de batata-doce*. 2023. Disponível em: <<https://anamariabraga.globo.com/receita/creme-de-batata-doce/>>. Acesso em: 01 abr 2023. Citado na página 30.
- HEFEZ, A. *Aritmética*. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 47, 117 e 128.
- HOUAISS, A. *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. São Paulo-SP: Ed. Objetiva, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- KIMING, I. *Construction of the real numbers*. 2004. Disponível em: <http://web.math.ku.dk/~kiming/papers/2020_real_numbers/real_numbers_supervisor.pdf>. Acesso em: 01 nov 2022. Citado na página 99.
- LANG, S. *Estruturas Algébricas*. Rio de Janeiro-RJ: Ao Livro Técnico S.A., 1972. Citado 3 vezes nas páginas 72, 80 e 91.
- LANG, S. *Cálculo 1*. Rio de Janeiro-RJ: Livros Técnicos e Científico Editora S.A., 1977. Citado na página 88.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro-RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976. Citado 9 vezes nas páginas 34, 39, 65, 69, 70, 71, 72, 99 e 124.

LIMA, E. L. *Análise Real volume 1: Funções de uma variável*. Rio de Janeiro-RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011. Citado na página 39.

LIMA, E. L.; MORGADO, A. C.; AL et. *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 15, 18, 20 e 62.

LIMA, E. L.; MORGADO, A. C.; AL et. *A Matemática do Ensino Médio Volume 1, 11ª edição*. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado na página 58.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. *Números: Uma Introdução à Matemática*. São Paulo-SP: Editora da Universidade de São Paulo, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 47, 117 e 128.

MORGADO, A. C. d. O.; CARVALHO JOÃO BOSCO PITOMBEIRA, e. a. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 128.

MORGADO, A. C. d. O.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta, Coleção PROFMAT, 2ª edição*. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 24, 25, 72 e 128.

NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: Combinatória*. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. Citado na página 48.

OLIVEIRA, F. N. d. *Uma prova elementar da irracionalidade de π* . São Paulo-SP: Revista Eletrônica Paulista de Matemática, ISSN 2316-9664 Vol. 13, 2018. Disponível em: <<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v13a02-uma-prova-elementar-da-irracionalidade.pdf>>. Acesso em: 30 jul 2023. Citado na página 129.

OLIVEIRA, M. M. D. *Conceitos de Análise Matemática na reta para bem compreender os Números Reais no Ensino Médio*. 2017. Disponível em: <<http://mat.ufcg.edu.br/profmat/egressos-tccs/>>. Acesso em: 14 jun 2023. Citado na página 91.

RIBENBOIM, P. *Funções, Limites e Continuidade*. Rio de Janeiro-RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012. Citado na página 70.

SENADO, A. *Emenda Constitucional*. 2023. Disponível em: <<https://www12.senado.leg.br/noticias/glossario-legislativo/emenda-constitucional>>. Acesso em: 01 abr 2023. Citado na página 29.

SPIVAK, M. *Calculus*. Londres: Publish or Perish, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 61.

THOMAS, G. B. *Cálculo Volume 1, 12ª ed*. São Paulo: Ed. Pearson Education do Brazil, 2012. Citado na página 88.

TRANSPORTATION, U. D. *Manual on Uniform Traffic Control Devices*. 2009. Disponível em: <<https://mutcd.fhwa.dot.gov/htm/2009r1r2/part2/part2e.htm>>. Citado na página 31.

VIEIRA, V. L. *Um Curso Básico em Teoria dos Números*. São Paulo-SP: Editora Livraria da Física, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 47, 117 e 128.

Apêndices

APÊNDICE A – Relações binárias

Neste Apêndice iremos apresentar os principais resultados referentes a relações de equivalências e classes de equivalência. Para saber mais consulte (VIEIRA, 2020), (HEFEZ, 2016) e (MILIES; COELHO, 2006).

A.1 Relações de equivalência

Definição A.1. Chama-se **relação binária** de E em F todo subconjunto \sim de $E \times F$.

Definição A.2. Uma **relação binária** \sim sobre um conjunto não vazio E é chamada **relação de equivalência** se cumprir as três propriedades abaixo:

1. (Reflexiva) Se $x \in E$, então $x \sim x$.
2. (Simétrica) Se $x, y \in E$ e $x \sim y$, então $y \sim x$.
3. (Transitiva) Se $x, y, z \in E$, $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

Exemplo 41. A relação de igualdade sobre o conjunto dos números naturais é uma relação de equivalência.

Demonstração. Vamos demonstrar que a relação de igualdade satisfaz as três propriedades.

1. Reflexiva: Dado $x \in \mathbb{N}$, temos que $x = x$.
2. Simétrica: Se $x, y \in \mathbb{N}$ e $x = y$, então $y = x$.
3. Transitiva: Se $x, y, z \in \mathbb{N}$, $x = y$ e $y = z$, então $x = z$.

■

Exemplo 42. : Seja $\mathbb{Z}X\mathbb{Z}^* = \{(a, b); a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$. Dados dois elementos (a, b) e (c, d) do conjunto $\mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*$, diremos que $(a, b) \sim (c, d)$ se

$$ad = bc.$$

Vamos mostrar que a relação \sim é de equivalência.

Demonstração. Iremos mostrar que tal relação satisfaz as três propriedades.

1. Reflexiva: para todo par $(a, b) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*$, temos $(a, b) \sim (a, b)$, pois $ab = ba$.

2. Simétrica: Sejam (a, b) e $(c, d) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*$ tais que $(a, b) \sim (c, d)$, então $ad = bc$, o que implica $cb = ba$, portanto,

$$(c, d) \sim (a, b).$$

3. Transitiva: Sejam $(a, b), (c, d)$ e $(d, e) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*$ tais que $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$. Então

$$\begin{aligned} ad = bc \quad e \quad cf = de \\ \Rightarrow \quad adf = bcf \quad e \quad bcf = bde \\ \Rightarrow \quad adf = bde, \quad d \neq 0. \\ \Rightarrow \quad af = be = eb \\ \Rightarrow \quad (a, b) \sim (e, f). \end{aligned}$$

■

Definição A.3. *Seja A um conjunto não vazio e \sim uma relação de equivalência em \sim . Para cada elemento $a \in A$, chama-se classe de equivalência de a o conjunto*

$$[a] = \{x \in A; x \sim a\}.$$

Exemplo 43. *Sejam a e b elementos de \mathbb{Z} . Sobre \mathbb{Z} considere a relação de equivalência $a \sim b$ se $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.*

Se os elementos a e b estiverem relacionados, denotaremos assim:

$$a \equiv b(\text{mod}3) \iff a - b = 3k, k \in \mathbb{Z}.$$

Temos

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 0(\text{mod}3)\}.$$

Daí,

$$x \in \bar{0} \iff x \equiv 0(\text{mod}3) \iff x = 3k.$$

Portanto,

$$[0] = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}.$$

Analogamente, vamos determinar $[(1)]$:

Temos

$$\begin{aligned} [1] &= \{x \in \mathbb{Z}; x \sim 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 1(\text{mod}3)\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}; x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}. \end{aligned}$$

Agora vamos determinar $[10]$. Vejamos

$$\begin{aligned}
 [10] &= \{x \in \mathbb{Z}; x \sim 10\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 10(\text{mod}3)\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}; x = 3k + 10, k \in \mathbb{Z}\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}; x = 3k + 9 + 1 = 3k' + 1, k' \in \mathbb{Z}\} \\
 &= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}.
 \end{aligned}$$

O leitor deve ter notado que $[1]$ e $[10]$ determinam o mesmo conjunto, isto é,

$$[1] = [10]$$

isso ocorrer porque

$$10 \equiv 1(\text{mod}3).$$

Mais adiante provaremos que ser dois elemento estão relacionados, então determinam a mesma classe de equivalência.

Definição A.4. Chamamos de conjunto quociente de A por \sim o conjunto formado por todas as classes de equivalência determinadas por \sim no conjunto A . Simbolicamente,

$$A/\sim = \{[a]; a \in A\}.$$

A seguir apresentaremos alguns resultados importantes a respeito das classes de equivalência.

Proposição A.1. Toda classe de equivalência é não vazia.

Demonstração. Seja $a \in A$ dada por $[a] = \{x \in A; a \sim x\}$. Dado $a \in A$, temos pela propriedade reflexiva das relações de equivalência que $a \sim a$ o que implica $a \in [a]$. ■

Proposição A.2. Sejam $a, b \in A$. Se $a \sim b$, então $[a] = [b]$.

Demonstração. Seja $x \in [a]$. Daí, $a \sim x$. Como \sim é simétrica, temos que $a \sim b \Rightarrow b \sim a$. Mas \sim é transitiva, logo $b \sim a$ e $a \sim x \Rightarrow b \sim x$. Portanto, $x \in [b]$.

Analogamente, tome $y \in [b]$. Daí, $b \sim y$. Mas \sim é transitiva, logo $a \sim b$ e $b \sim y \Rightarrow a \sim y$. Logo, $y \in [a]$.

Portanto, $[a] = [b]$. ■

Proposição A.3. Sejam $a, b \in A$. Se a não estão relacionado com b , então $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Demonstração. Suponha por contradição que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Então existe $c \in A$ tal que $c \in [a]$ e $c \in [b]$. Logo, $a \sim c$ e $b \sim c$. Como a relação de equivalência é simétrica, temos que $a \sim c \Rightarrow c \sim a$. E como a relação de equivalência é transitiva, temos que $b \sim c$ e $c \sim a$ implica $b \sim a$. Logo $a \sim b$. Que é uma contradição. Donde concluímos que $[a] \cap [b] = \emptyset$. ■

Proposição A.4. *A união de todas as classes de equivalência do conjunto A é igual ao conjunto A .*

$$\text{Notação: } \bigcup_{x \in A} [x] = A$$

Demonstração. Note que $[a] \in A$, $\forall a \in A$. Pois a classe de qualquer elemento é composta só por elementos de A . Logo,

$$\bigcup_{x \in A} [x] \subset A.$$

Por outro lado, dado $a \in A$, temos que $a \in [a] \subset \bigcup_{x \in A} [x]$. Logo,

$$A \subset \bigcup_{x \in A} [x].$$

Portanto,

$$A = \bigcup_{x \in A} [x].$$

■

A.2 Definindo as operação de Adição e Multiplicação em \mathbb{Q}

Nessa seção definiremos de forma precisa duas operação, Adição e Multiplicação, sobre o conjuntos dos números racionais.

Definição A.5. *Dados dois elementos (a, b) e $(c, d) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*$, se $(a, b) \sim (c, d)$ então $ad = bc$.*

Vamos representar o par (a, b) por sua classe de equivalência

$$\begin{aligned} [(a, b)] &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*; (x, y) \sim (a, b)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*; xb = ya\} \\ &= \{(ak, bk); k \in \mathbb{Z}^*\}. \end{aligned}$$

A classe de equivalência do par (a, b) vamos denotar por $\left[\frac{a}{b}\right]$, ou seja,

$$[(a, b)] = \left[\frac{a}{b}\right].$$

Definição A.6. $\mathbb{Q} = \left\{ \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right]; (a, b) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^* \right\}$

Exemplo 44.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; (x, y) \sim (1, 2)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; 2x = 1\}. \end{aligned}$$

Então $(1, 2) \in \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right]$, $(3, 6) \in \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right]$, $(-7, -14) \in \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right]$, por exemplo. Por outro lado, $(3, 2) \notin \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right]$, $(-1, 4) \notin \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right]$, $(-8, -3) \notin \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right]$.

Exemplo 45.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} 6 \\ 1 \end{array} \right] &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; (x, y) \sim (6, 1)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; 2x = 1\}. \end{aligned}$$

Então $(6, 1) \in \left[\begin{array}{c} 6 \\ 1 \end{array} \right]$, $(12, 2) \in \left[\begin{array}{c} 6 \\ 1 \end{array} \right]$, $(-24, -4) \in \left[\begin{array}{c} 6 \\ 1 \end{array} \right]$, por exemplo. Por outro lado, $(3, 2) \notin \left[\begin{array}{c} 6 \\ 1 \end{array} \right]$, $(-3, 5) \notin \left[\begin{array}{c} 6 \\ 1 \end{array} \right]$, $(-7, -2) \notin \left[\begin{array}{c} 6 \\ 1 \end{array} \right]$.

Definição A.7. Dados $\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right]$ e $\left[\begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right] \in \mathbb{Q}$ definiremos a **Operação de Adição** do seguinte modo:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ \left(\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right] \right) &\mapsto \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} ad + bc \\ b \cdot d \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Notação: “+” representa a operação de adição em \mathbb{Q} .

Resta-nos saber se essa definição apresentada é boa, ou seja, se não apresenta ambiguidade. Para isso precisamos provar que o resultado dessa operação independe do representante escolhido, o que é equivalente a provarmos a proposição que segue.

Proposição A.5. Se $(a, b) \sim (a', b')$ e $(c, d) \sim (c', d')$, então

$$\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} a' \\ b' \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} c' \\ d' \end{array} \right].$$

Demonstração. Temos $(a, b) \sim (a', b') \Rightarrow ab' = ba'$ e $(c, d) \sim (c', d') \Rightarrow cd' = dc'$. Além disso,

$$\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right] := \left[\begin{array}{c} ad + bc \\ b \cdot d \end{array} \right]$$

e

$$\left[\begin{array}{c} a' \\ b' \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} c' \\ d' \end{array} \right] := \left[\begin{array}{c} a'd' + b'c' \\ b' \cdot d' \end{array} \right].$$

Daí, é suficiente mostrar que

$$\left[\frac{ad + bc}{b \cdot d} \right] = \left[\frac{a'd' + b'c'}{b' \cdot d'} \right].$$

Ou equivalentemente,

$$(ad + bc)b'd' = (a'd' + b'c')bd.$$

Mas,

$$\begin{aligned} (ad + bc)b'd' &= adb'd' + bcb'd' \\ &= b'add' + bb'cd' \\ &= ba'dd' + bb'c'd \\ &= bd(a'd' + b'c'). \end{aligned}$$

Como queríamos provar.

Portanto, o resultado da adição independe dos representantes escolhidos das classes de equivalências frações. ■

Definição A.8. Dados $\left[\frac{a}{b} \right]$ e $\left[\frac{c}{d} \right] \in \mathbb{Q}$ definiremos a **Operação de Multiplicação** do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ \left(\left[\frac{a}{b} \right], \left[\frac{c}{d} \right] \right) &\mapsto \left[\frac{a}{b} \right] \cdot \left[\frac{c}{d} \right] = \left[\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \right]. \end{aligned}$$

Notação: “ \cdot ” representa a operação de adição em \mathbb{Q} .

Assim como fizemos na adição, precisamos provar que o resultado dessa operação de multiplicação também independe dos representantes das classes escolhidos.

Proposição A.6. Se $(a, b) \sim (a', b')$ e $(c, d) \sim (c', d')$, então

$$\left[\frac{a}{b} \right] \cdot \left[\frac{c}{d} \right] = \left[\frac{a'}{b'} \right] \cdot \left[\frac{c'}{d'} \right].$$

Demonstração. Procedendo analogamente como fizemos na adição, temos

$$\left[\frac{a}{b} \right] \cdot \left[\frac{c}{d} \right] := \left[\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \right]$$

e

$$\left[\frac{a'}{b'} \right] \cdot \left[\frac{c'}{d'} \right] := \left[\frac{a' \cdot c'}{b' \cdot d'} \right].$$

Daí, é suficiente mostrar que

$$\left[\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \right] = \left[\frac{a' \cdot c'}{b' \cdot d'} \right].$$

Ou equivalentemente,

$$ac \cdot b'd' = bd \cdot a'c'.$$

Mas note que,

$$\begin{aligned} ac \cdot b'd' &= (ab')(cd') \\ &= ba' \cdot dc' \\ &= (a'c')(bd). \end{aligned}$$



APÊNDICE B – Propriedade Arquimediana dos Números Reais

Nesse apêndice apresentaremos a Propriedade Arquimediana dos Números Reais, resultado bastante importante que foi amplamente utilizados ao longo dessa pesquisa. A grosso modo essa propriedade nos diz que fixado um número real qualquer é sempre possível exibir um número natural maior do aquele fixado inicialmente. Vejamos rigorosamente como esse resultado pode ser apresentado.

Para se aprofundar nesse tema consulte (FIGUEIREDO, 1996), (AVILA, 2005) e (LIMA, 1976).

B.1 Ínfimo e Supremo

Definição B.1. *Seja $X \subset \mathbb{K}$ um conjunto não vazio. Chamamos **cota superior** de X o elemento $b \in \mathbb{K}$ tal que, $\forall x \in X$, tem-se $b \leq x$. A menor das cotas superiores de X chamamos de **supremo** do conjunto X , denotado por $\sup X$.*

Desse modo para que $b \in \mathbb{K}$ seja supremo de $X \subset \mathbb{K}$ é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as condições abaixo:

S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

S2. Se $c \in \mathbb{K}$ é tal que $x \leq c, \forall x \in X$, então $b \leq c$.

A condição S1 assegura que b é cota superior de X , enquanto S2 diz nos diz que qualquer outra cota superior é maior do que ou igual a b .

Podemos reformular S2 da seguinte forma:

S2': Dado $c < b$ em \mathbb{K} , existe $x \in X$ tal que $c < x$.

De fato, a condição S2' nos diz que nenhum elemento de \mathbb{K} que seja inferior a b pode ser cota superior de X .

Definição B.2. *Seja $X \subseteq \mathbb{K}$ un conjunto não vazio. Chamamos **cota inferior** do conjunto X o elemento $a \in \mathbb{K}$, tal que, $\forall x \in X$, tem-se $a \leq x$. A maior da cotas inferiores de X chamaremos de **ínfimo** do conjunto X e denotaremos por $\inf X$.*

Exemplo 46. *Dado $X = \left\{ 3 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$. São cotas inferiores de X , por exemplo: $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 1$ e $b_3 = 2$. De fato, $\frac{1}{2} \leq 3 + \frac{1}{n}$, $1 \leq 3 + \frac{1}{n}$ e $2 \leq 3 + \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $b_4 = 5$ não é cota inferior de X , pois $3,5 \in X$ e $4 > 3,5$.*

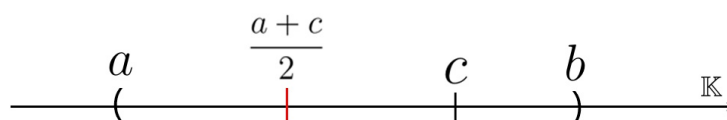
É possível provar que $b = 3$ é a maior da cotas inferiores de X , logo $\inf X = b$.

Exemplo 47. Dado $a < b$ em \mathbb{K} , seja $X = (a, b)$, intervalo aberto de extremos a e b . Prove que $\inf X = a$ e $\sup X = b$.

Demonstração. Note que a é cota inferior de X . Devemos provar que não existe $c \in \mathbb{K}$, $a < c$, tal que c é cota inferior de X .

Se $c \geq b$, claramente c não é cota inferior de X . Por outro lado, se $a < c < b$ então tome $x \in X$ tal que $x = \frac{a+c}{2}$, com $a < x < c$. Provando que c não é cota inferior de X .

Figura 16 – Ínfimo de um conjunto



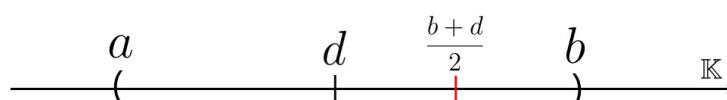
Fonte: Autores, 2023

Logo, a é a maior das cotas inferiores de X . Portanto

$$\inf X = a.$$

Agora, vamos provar que $\sup X = b$. De fato, b é cota superior de X , devemos provar, então, que é a menor das cotas superiores. Ou seja, que não existe $d \in \mathbb{K}$, $d < b$ tal que d é cota superior de X .

Figura 17 – Supremo de um conjunto



Fonte: Autores, 2023

Suponhamos, por contradição, que existe d nessas condições. Se $d \leq a$ o resultado é óbvio. Por lado, se $a < d < b$, então tome $x \in X$, tal que, $x = \frac{b+d}{2}$, com $d < x < b$. Absurdo, pois d não é cota superior, uma vez que exibimos um elemento em X maior do que ele. Portanto,

$$\sup X = b.$$

■

Proposição B.1. O supremo de um conjunto, se existir, ele é único.

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que existem b e b' em \mathbb{K} , $b \neq b'$, que satisfazem as condições S1 e S2, então $b \leq b'$ e $b' \leq b$, donde concluímos que $b = b'$. Absurdo! Portanto, o supremo de um conjunto, quando existir, é único. ■

Definição B.3. Dizemos que um conjunto X é **limitado superiormente** quando existe $r \in \mathbb{R}$, tal que $x \leq r$, para todo $x \in X$.

Definição B.4. Dizemos que um conjunto X **não é limitado superiormente** quando para todo $r \in \mathbb{R}$, existe $x \in X$ tal que $x > r$.

Definição B.5. Dizemos que um conjunto X é **limitado inferiormente** quando existe $r \in \mathbb{R}$, tal que $r \leq x$, para todo $x \in X$.

Definição B.6. Dizemos que um conjunto X é **não é limitado inferiormente** quando para todo $r \in \mathbb{R}$, existe $x \in X$, tal que $x < r$.

Definição B.7. Quando o conjunto X é limitado inferiormente e superiormente dizemos simplesmente que ele é **limitado**.

Definição B.8. Seja X um conjunto não vazio, dizemos que $x \in X$ o **elemento máximo** de X quando para todo $y \in X$, temos $x \geq y$.

Definição B.9. Seja X um conjunto não vazio, dizemos que $x \in X$ o **elemento mínimo** de X quando para todo $y \in X$, temos $x \leq y$.

Teorema B.2 (Propriedade Arquimediana dos números reais).

- I. O conjunto \mathbb{N} dos números naturais não é limitado superiormente.
- II. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.
- III. Se $X = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$ então $\inf X = 0$.

Demonstração. I. Suponhamos, por contradição, que \mathbb{N} é limitado superiormente e tomemos $b = \sup \mathbb{N}$. Dois casos são possíveis:

(i) $b \in \mathbb{N}$. Mas isso implica $b + 1 \in \mathbb{N}$ o que contradiz o fato de que $b = \sup \mathbb{N}$. Logo, não podemos ter $b \in \mathbb{N}$.

(ii) $b \notin \mathbb{N}$. Por definição de supremo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b - \frac{1}{2} < n \leq b$. Daí, $b + \frac{1}{2} < n + 1$, o que implica $b < n + 1$. Mas $n + 1 \in \mathbb{N}$. Absurdo, pois não pode haver em \mathbb{N} um elemento maior do que seu supremo. Portanto, \mathbb{N} não é limitado superiormente.

II. Tome $r \in \mathbb{R}$, $r = \frac{y}{x}$. Como o conjunto \mathbb{N} é ilimitado superiormente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > r$, daí $n > \frac{y}{x}$ o que implica $nx > y$.

III. Inicialmente, note que 0 (zero) é uma cota inferior de X , pois $0 \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para provarmos que $\inf X = 0$ é suficiente mostrarmos que 0 é a maior das cotas inferiores.

De fato, tome $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Como \mathbb{N} é ilimitado superiormente, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{c}$, daí $c > \frac{1}{n}$. Logo, c não é cota superior de X . Portanto, $\inf X = 0$. ■

APÊNDICE C – Teoremas usados na dissertação

Teorema C.1 (Princípio das Gavetas de Dirichlet). *Se $n + 1$ objetos ou mais são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos um gaveta recebe mais de um objeto.*

A demonstração desse resultado e diversos exemplos podem ser conferidos em (MORGADO; CARVALHO, 2015, p. 166) e (MORGADO; CARVALHO JOÃO BOSCO PITOMBEIRA, 1991, p. 70)

Teorema C.2 (Divisão da Divisão de Euclides). *Sejam a e b números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < |b|.$$

A demonstração desse teorema pode ser verificada em (HEFEZ, 2016, p. 46-47) e (MILIES; COELHO, 2006, p. 49-51).

Teorema C.3. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, é*

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

A demonstração desse resultado pode ser conferida em (MORGADO; CARVALHO, 2015, p. 53-54).

Corolário C.4. *Nas progressões geométricas (a_n) em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos quando n tende a infinito é*

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Essa demonstração também pode ser conferida em (MORGADO; CARVALHO, 2015, p.54).

Teorema C.5 (Princípio da Boa Ordenação - PBO). *Se S é um subconjunto não vazio e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.*

Para saber mais consulte (HEFEZ, 2016, p.10) e (VIEIRA, 2020, p.17).

APÊNDICE D – Os Principais números irracionais apresentados no Ensino Básico

Os números irracionais geralmente são apresentados aos alunos ao final do Ensino Fundamental. A BNCC (BRASIL, 2018) sugere que essa apresentação seja feita no 9º ano. A partir daí existem diversas situações onde os números irracionais aparecem tanto no Ensino fundamental como no Ensino Médio, como por exemplo, em problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras, problemas modelados por meio de logaritmos e problemas trigonométricos.

Apesar de ser bastante recorrente as aplicações onde aparecem os números irracionais, no Ensino Básico, essa diversidade não é tão bem explorada, aparecendo quase sempre os mesmos exemplos repetidos. Nessa seção apresentaremos os principais números irracionais abordados no ensino Fundamental e no Ensino Médio.

D.1 O número π

Efetuada a divisão entre o comprimento de uma circunferência pela seu diâmetro obtemos uma das constantes mais famosas e importantes da matemática: o número π , que vale aproximadamente 3,1415. Aproximações para esse número π são usadas desde o Antigo Egito, onde foi encontrado no papiro de Rhind, datado de 1660 A.C, o uso de uma aproximação de 3,1604.

Na Grécia Antiga, um importante matemático que se dedicou ao estudo do π foi Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.)¹, descobrindo que o valor de π estava compreendido entre 3,14016 e 3,14208, que se trata de uma aproximação excepcional, dado os recursos que ele tinha há cerca de 250 A.C. .

Hoje em dia com os avanços computacionais já é possível calcular o valor de π com trilhões de casas decimais. Mas isso não é suficiente para assegurar sua irracionalidade, as provas em matemática não são estabelecidas pela mera observação de casos particulares, mesmo que seja uma quantidade muito grande de casos. A irracionalidade de π só foi provada no século XVIII por Johann Heinrich Lambert (1728-1777) no ano de 1767. Para uma demonstração da irracionalidade de π vide (OLIVEIRA, 2018).

O número π é essencial no cálculo de áreas de figuras arredondadas, como por exemplo, círculos e setores circulares e o volume de corpos redondos, onde podemos

¹ Arquimedes de Siracusa foi um inventor, físico, matemático, filósofo, engenheiro e astrônomo grego.

citar cilindro, cone e esfera, por exemplo. Isso justifica sua apresentação aos alunos do Ensino Básico desde o Ensino Fundamental.

Diante disso, os livros didáticos sempre dão bastante importância ao número π , apresentando suas aplicações em problemas práticos e um pouco da história da matemática ao longo dos séculos envolvendo esse número.

Geralmente, no Ensino Básico, os alunos são orientados a aproximar o valor de π para duas casas decimais após a vírgula, utilizando assim 3,14 nos cálculos. Na prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é muito comum também a aproximação para 3,1 ou simplesmente 3, como podemos ver na Figura 18.

Figura 18 – Aproximação de π na prova do ENEM

Questão 167 enem2021

Um povoado com 100 habitantes está passando por uma situação de seca prolongada e os responsáveis pela administração pública local decidem contratar a construção de um reservatório. Ele deverá ter a forma de um cilindro circular reto, cuja base tenha 5 metros de diâmetro interno, e atender à demanda de água da população por um período de exatamente sete dias consecutivos. No oitavo dia, o reservatório vazio é completamente reabastecido por carros-pipa.

Considere que o consumo médio diário por habitante é de 120 litros de água. Use 3 como aproximação para π . Nas condições apresentadas, o reservatório deverá ser construído com uma altura interna mínima, em metro, igual a

Fonte: INEP, 2021

D.2 O número $\sqrt{2}$

Nessa seção iremos tratar apenas do número $\sqrt{2}$, mas no Ensino Básico também é muito comum o uso de números como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc. Ou seja, \sqrt{a} , $a \in \mathbb{N}$, tal que a não é um número quadrado perfeito.

O número irracional $\sqrt{2}$ é um dos primeiros números irracionais apresentados aos alunos do Ensino Básico e, provavelmente, tenha sido um dos primeiros números irracionais descobertos na história da matemática, pois pelo Teorema de Pitágoras, os gregos descobriram que dado um quadrado de lado 1, a diagonal e o lado deste quadrado são segmentos incomensuráveis. Isto é, não existe uma unidade de medida u que caiba

uma quantidade inteira de vezes na diagonal e uma quantidade inteira de vezes no lado do quadrado.

Em outras palavras, seja d a medida do diagonal deste quadrado e 1 a medida do lado, pelo Teorema de Pitágoras, $d = \sqrt{2}$. Os gregos perceberam também que não existe uma unidade de medida u e os inteiros p e q , tais que

$$u \cdot p = \sqrt{2} \text{ e } u \cdot q = 1.$$

O que significa que a razão entre a medida da diagonal e o lado do quadrado não pode ser expressa por um número racional. Essa demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ foi feita no Capítulo 4, Exemplo 19.

Geralmente, os livros didáticos introduzem esse número por meio de exemplos geométricos e atrelados ao Teorema de Pitágoras. A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, quando é feita, ocorre nas leituras complementares do capítulo, como podemos verificar na Figura 19:

Figura 19 – $\sqrt{2}$ nos livros didáticos

H

Um pouco de História

Euclides de Alexandria (século III a.C.), usando um tipo de raciocínio denominado "redução ao absurdo", provou que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Veja como o matemático grego pensou.

Ele supôs que $\sqrt{2}$ fosse um número racional. Assim, pela definição de número racional, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com p e q números inteiros, $q \neq 0$ e p e q números primos entre si, ou seja, 1 é o único divisor comum entre p e q ($\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível).

Elevando ambos os membros ao quadrado, ele encontrou o seguinte resultado.

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \text{ ou seja, } p^2 = 2q^2 \text{ (I)}$$

A partir disso, podemos concluir que p^2 é par.

Não existe nenhum número inteiro ímpar que elevado ao quadrado resulte em um número par. Além disso, se o quadrado de um número inteiro tem o 2 como um dos divisores, esse número precisa ter também o 2 como divisor, ou seja, precisa ser par.

Dessa maneira, podemos concluir que p é par, isto é, $p = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$. (II)

Se $p = 2n$, então podemos dizer que $p^2 = 4n^2$.

Retomando a equação I, podemos dizer que $2q^2 = 4n^2$; portanto, $q^2 = 2n^2$. Isso significa que q^2 é par e, como já vimos, podemos concluir que q é par. (III)

Temos, então, que as conclusões II e III são contraditórias, já que p e q foram supostos primos entre si, ou seja, não poderiam ter nenhum divisor em comum; nesse caso, descobrimos que 2 seria um divisor comum de p e q .

Por que chegamos a esse absurdo? Por supor que $\sqrt{2}$ é um número racional. Assim, podemos concluir que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Fonte: Livros didáticos

D.3 O número e

O número irracional e é apresentado aos alunos na 1ª série do Ensino Médio, quando estão estudando o assunto de logaritmos, pois trata-se da base do Logaritmo Natural,

também conhecido como Logaritmo Neperiano.

Esse número é conhecido como número de Euler, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler por ter introduzindo o símbolo e , e no Ensino Básico é utilizado como aproximadamente 2,71. Mas esse é um número irracional, ou seja, possui uma representação decimal infinita e não periódica.

Sabemos que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

mas no Ensino Médio, ainda não está estabelecido esse conceito de limite, então os autores de livros didáticos usam a ideia intuitiva de limite, sem formalização, para introduzir o número e .