Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Premissas sobre Equações de Recorrências: Teoria, Aplicações e Propostas de Resolução de Problemas no Ensino Básico

Erivaldo Lima Santos

São Cristóvão – SE
2023

Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Erivaldo Lima Santos

Premissas sobre Equações de Recorrências: Teoria, Aplicações e Propostas de Resolução de Problemas no Ensino Básico

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática junto ao Programa Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe.

Orientador: Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo

São Cristóvão – SE
2023

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Santos, Erivaldo Lima
S237p Premissas sobre equações de recorrência: teorias, aplicações e propostas de resolução de problemas no ensino básico / Erivaldo Lima Santos ; orientador Gerson Cruz Araujo. - São Cristóvão, 2023.
102 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2023.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Sequências (Matemática). 3. Raciocínio. 4. Equações. I. Araujo, Gerson Cruz orient. II. Título.

CDU 512.1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Premissas sobre Equações de Recorrências: Teoria, Aplicações e Propostas de Resolução de Problemas no Ensino Básico

por

Erivaldo Lima Santos

Aprovada pela Banca Examinadora:

Gerson Cruz Araujo
Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo - UFS
Orientador

Dayane Ribeiro Cruz
Prof.ª Dr.ª Dayane Ribeiro Cruz - UFS
Primeiro Examinador

Crislene Santos da Paixão
Prof.ª Dr.ª Crislene Santos da Paixão - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 11 de Julho de 2023.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: profmat@academico.ufs.br

Erivaldo Lima Santos

Premissas sobre de Equações Recorrências: Teoria, Aplicações e Propostas de Resolução de Problemas no Ensino Básico.

MEMBROS DA BANCA:

Presidente - 2730629 - Prof. Dr. GERSON CRUZ ARAUJO

Universidade Federal de Sergipe - UFS

Externo à Instituição - Prof. Dr. DAYANE RIBEIRO CRUZ

Universidade de Campinas - UNICAMP

Externo à Instituição - Prof. Dr. CRISLENE SANTOS DA PAIXÃO

Instituto Federal de Sergipe - IFS

São Cristóvão-SE
2023

AGRADECIMENTOS.

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de me presentear com a presença de todos que participam diretamente e indiretamente de minha vida.

Seguidamente a meus pais, Erivaldo Santos e Matilde Francisca Lima Santos, a minha esposa Alessandra Almeida de Souza, meus filhos, Ellen Matilde Rodrigues Santos, Erivaldo Santos Neto e Luciano Rodrigues Santos e meus irmãos Marina Lima Santos, Epifânio Lima Santos e Eduardo Lima Santos por compreenderem minha ausência no período que perdurou o curso.

A todos meus professores que participaram de minha jornada durante esses quatro anos de mestrado pela paciência que tiveram comigo e pelos conhecimentos que me forneceram, em especial a meu orientador professor, Dr. Gerson Cruz Araujo, por ter acreditado em mim num período em que mais necessitava de uma pessoa que confiasse na minha capacidade, você foi ela. Só Deus, para lhe ofertar todo merecimento de suas ações nesse plano, muito obrigado.

Aos meus amigos de curso, onde buscamos a compreensão, a harmonia e o conhecimento acadêmico, em especial para Robson Francisco dos Santos e Wallisson Almeida Barros que participaram de todas as alegrias e angústias dentro e fora do curso, sendo companheiros íntegros e honrados.

Ao coordenador, Disson Soares dos Prazeres, pela paciência e forma de conduzir o profmat com muita maestria e seriedade.

RESUMO

O âmago deste trabalho é apresentar através do estudo de equações de recorrências, tendo o conhecimento prévio de assuntos do ensino base, que podemos modelar situações problemas de cunho prático em diversas áreas do conhecimento, decorrente do raciocínio recursivo, formulando matematicamente tipos especiais de expressões, a saber, equações de recorrência e exibir possíveis soluções dos problemas abordados. Além dos conteúdos teóricos, explanaremos exemplos de equações de diferença de duas espécies, equações de diferença de primeira e segunda ordem, enfatizando aspectos que fornecem suporte à resolução de problemas que desenvolve o processo de aquisição do conhecimento, tanto elaborando soluções de fenômenos clássicos, que foram suporte para a teoria, quanto de maneira mais objetiva, advindas das questões diversas retiradas das avaliações e cadernos da Olimpíadas Brasileira de Matemática. Por fim, apresentamos algumas propostas de intervenção no ensino básico, tendo uma interação direta com o aluno, propondo situações que este possam vislumbrar padrões recursivos em fenômenos clássicos da teoria que são moldados com o uso de materiais manipuláveis de baixo custo, promovendo uma interação salutar em busca do saber nesta área do conhecimento.

Palavras-chaves: Sequências, raciocínio recursivo, recorrências, equações da diferença, resolução de problemas.

ABSTRACT

The core of this work is to present, through the study of recurrence equations, having prior knowledge of basic education subjects, that we can model practical problem situations in several areas of knowledge, resulting from recursive reasoning, mathematically formulating special types of expressions, namely, recurrence equations and display possible solutions to the addressed problems. In addition to the theoretical content, we will explain examples of difference equations of two kinds, first and second order difference equations, emphasizing aspects that provide support for problem solving that develops the knowledge acquisition process, both by elaborating solutions of classic phenomena, which were support for the theory, the more objectively, arising from the various questions taken from the assessments and notebooks of the Brazilian Mathematical Olympiads. Finally, we present some proposals for intervention in basic education, having a direct interaction with the student, proposing situations in which they can glimpse recursive patterns in classic phenomena of theory that are molded with the use of low-cost manipulable materials, promoting a healthy interaction in search of knowledge in this area of knowledge.

Keywords: Sequences, recursive reasoning, recurrences, difference equations, problem solving.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO.

Uma das motivações na abordagem desse tema são as aplicações que podem ser trabalhadas no cotidiano acadêmico dos alunos da educação básica em diversos campos do conhecimento, a partir de modelagem, usando material reciclado ou de baixo custo.

Os primeiros relatos de aplicação das sequências ocorreram no Egito há 5000 anos atrás quando surgiu a necessidade de analisar a enchente do Rio Nilo, buscando padrões em sua enchente, com o objetivo de fazer plantações as suas margens no período correto e garantir a qualidade dos alimentos. Foi observado que o Rio Nilo subia logo depois que a estrela Sírius se levantava a leste, a cada 365 dias, criando-se, assim, o calendário. Aproximadamente 2000 anos antes de cristo, os babilônicos construíram tábuas de cálculos e sequências de números inteiros, como as sequências $1, 3, 9, 27, \cdots$, e $1, 4, 16, 64, \cdots$, e resultados geométricos. Já na civilização grega foi encontrado diversos exemplos de sequências numéricas, como é o caso das estudadas nas escolas pitagóricas, no século VI antes de cristo, que envolviam os números figurados e o crivo de Eratóstenes, onde se obtém a sequência dos números naturais ímpares. Nesse mesmo período, Arquimedes em seus estudos envolvendo áreas e volumes de figuras geométricas, construiu vários exemplos e tentou explicar como somas infinitas poderiam ter resultados finitos.

O estudo das sequências no período renascentista teve seu ápice quando Leonardo Fibonacci (1170-1240) descobriu uma sequência de inteiros na qual cada número é igual à soma dos dois antecessores (1,1,2,3,5,8,. . .), introduzindo-a em termos de uma modelagem de uma população reprodutiva de coelhos. Com o estudo do cálculo por Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quando esses incríveis matemáticos tiveram entendimento suficiente e notação para a derivada, teve início o estudo das equações diferenciais. O notável matemático, físico e astrônomo, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) deu andamento as equações quando descobriu o teorema binominal, a lei de reciprocidade quadrática e os mínimos quadrados. O estudo das sequências perdura até os dias atuais por diversos matemáticos que buscam em suas diversas aplicações, nos mais diversos campos de atividade, a busca da compreensão de todos os eventos que relaciona o tema abordado.

O trabalho está dividido em sete capítulos: o primeiro é destinado ao estudo das sequências e sequências numéricas, o segundo as sequências numéricas cujo padrão de formação é dado pela soma de uma constante real ou de uma sequência de elementos reais para a obtenção de um novo termo da sucessão a partir de um primeiro elemento escolhido, chamada de Progressão Aritmética, o terceiro apresentamos uma nova progressão em que o padrão é dado pelo produto de uma constante real para a obtenção de um novo termo da sucessão a partir de um primeiro elemento escolhido, chamada de Progressão Geométricas, o quarto é destinado as recorrências e as equações de recorrência de primeira e segunda ordem, o quinto é apresentado as equações clássicas de recorrência, com suas soluções e aplicações, o sexto capitulo trata da resolução de diversos problemas das Olimpíadas Brasileira de Matemática-OBMEP e da grande importância que OBMEP tem na formação da matemática básica no Brasil. Finalmente, o sétimo e último capítulo, mostramos que as aplicações do estudo das recorrências podem ser trabalhadas com alunos do ensino regular, de preferência do ensino médio.

1 SEQUÊNCIAS E SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Iniciamos o capítulo fazendo um breve histórico a respeito da origem das sequências, em seguida será abordado as definições das sequências, sequências numéricas e das sequência de números reais, denotando suas diversas formas de representações. Em uma nova subseção será identificado as sequências monótonas, diferenciando sequências limitadas de ilimitadas e paralelamente aos conteúdos abordados será resolvido alguns exemplos que exploram os conhecimentos necessários nas aplicações das sequências.

Para realização deste capítulo utilizamos os referências [3], [9], e [12].

1.1 Um pequeno histórico sobre Sequências.

As sequências e progressões foram objeto de estudo de civilizações muito antigas, por volta de 300 a.C., foi encontrado na tábua do filósofo em ciências naturais Louvre na Babilônia dois problemas interessantes, os quais um deles, segundo [3], afirma que

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^8 = 2^9 - 1,$$

que representa a soma dos 9 primeiros elementos de uma PG de razão 2 e primeiro termo $2^0 = 1$. Esse foi o primeiro registro sobre o estudo de sequências.

Já no Egito, as sequências tiveram uma grande importância na observação do Rio Nilo, a princípio, buscou-se determinar padrões nas suas enchentes, que foi objeto de observação dos egípcios, há 5000 anos, para que pudessem plantar no período correto e garantir a qualidade dos alimentos, pois necessitavam saber o padrão das inundações. Os egípcios perceberam que depois que a estrela Sírius levantava ao leste, um pouco antes do Sol, o rio subia logo depois. Ao notar que este acontecimento ocorre a cada 365 dias, criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys. Os egípcios dividiram ainda os doze meses em três estações de quatro meses cada uma, são elas: período de semear, período de crescimento e período da colheita.

Segundo [3], ao longo do tempo, os ocidentais comumente afirmavam que os babilônios eram melhores que os egípcios na álgebra, mas que tinham contribuído menos na geometria, entretanto, uma descoberta relativamente recente, feita em 1936, um grupo de tabletas matemáticas foi desenterrado na cidade de Susa, a uns trezentos quilômetros da Babilônia, contendo resultados geométricos significativos. O renomado papiro de Rhind, datado aproximadamente de 1650 a.C., é um texto matemático na forma de um manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Também é uma fonte primária sobre a matemática egípcia antiga, deixando evidências de que sabiam fazer a soma dos termos de uma progressão aritmética. Nele consta o seguinte problema:

“Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja a soma das duas menores”.

A seguir, vamos formalizar conceitos importantes a teoria.

1.2 Sequências.

Definição 1.1 Uma sequência diz respeito a um conjunto no qual seus elementos são escritos seguindo certa ordem.

Exemplo 1.1 Sequências históricas importantes (a, e, i, o, u) é a sequência das vogais do alfabeto.

Exemplo 1.2 *(janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro)* é a sequência dos meses do ano no calendário.

1.3 Sequências Numéricas.

Definição 1.2 Sequência numérica é o conjunto de elementos numéricos ordenados e definidos segundo uma lei de formação, quando essa lei limita a existência de seus elementos é dita sequência finita, caso contrário é chamada de sequência infinita.

Exemplo 1.3 A sequência numérica $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots .\right)$ seus termos são conhecidos como fração do deus Hros que forma uma sequência infinita de números.

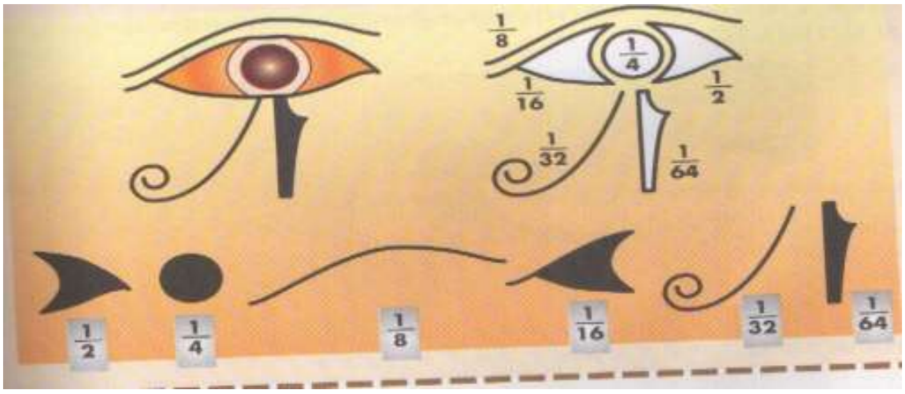

Figura 1: OLHOS DO DEUS HÓROS

Exemplo 1.4 A sequência dos algarismos decimais $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ forma uma sequência finita de números naturais.

Definição 1.3 A lei de formação de uma sequência é o conjunto de informações que determina todos os termos de uma sequência e a ordem em que eles são apresentados.

Exemplo 1.5 A lei de formação $a_n = 2n, \forall\ n \in \mathbb{N}$, representa todos os números naturais pares.

1.4 Sequência de Números Reais.

Definição 1.4. Uma sequência de números reais é uma função $a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real $a_n = a(n)$, chamado o n-essimo termo da sequência.

No estudo das sequências de números reais vamos denotar $(a_n) = (a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots), \forall\ a_n \in \mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$ ou (a_n), com $n \geq 1$, como lista ordenada infinita, e a lista ordenada finita $(a_n) = \{a_1,\ a_2,\ a_3, ..., a_n\}, \forall\ a_n \in \mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.6. $(a_n) = n^2 = (1,\ 4,\ 9, \cdots), \forall\ a_n \in \mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$ é a sequência infinita que representa todos os números quadrados perfeitos.

Exemplo 1.7. $(a_n) = 2n - 1 = (1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9), \forall\ a_n \in \mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n < 5$ é a sequência finita que representa todos os algarismos decimais ímpares.

Exemplo 1.8. Temos o conjunto das frações unitárias $X = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$ tal que $a_n = \frac{1}{n}$ é o termo geral da sequência, definida por $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{(n \in \mathbb{N})} = \left(1, \frac{1}{2}, \cdots\right)$

1.5 Formas de representar uma Sequência.

As sequencias podem ser representadas por:

(i) Uma propriedade que exprimam comumente todos os termos da sequência.

(ii) Uma fórmula posicional que represente cada termo em função de sua posição enésimal.

(iii) Por uma lei de recorrência.

A lei de recorrência é uma expressão que permite obter um termo a partir do outro.

Quando a partir de um certo termo, os próximos são dados em função do anterior ou quando a partir de um certo termo, demais são dados em função dos termos anteriores, então a sequência é dita recursiva. Esse tipo de sequência iremos estudar de uma forma completa no capítulo 4.

Exemplo 1.9. O conjunto $(1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11, \cdots)$ é a sequência dos números naturais ímpares.

Exemplo 1.10. $a_n = 3n - 1,\ \forall\ a_n \in \mathbb{R}, \texttt{com}\ n \in \mathbb{N}\ \texttt{e}\ n < 6 \cdot$

Usando a expressão acima, podemos encontrar os termos da sequência, substituindo n pelos cinco primeiros números naturais. Assim:

Para n	Termo da sequência $\mathbf{a_n}$
1	$a_1 = 3.1 - 1 = 2$
2	$a_2 = 3.2 - 1 = 5$
3	$a_3 = 3.3 - 1 = 8$
4	$a_4 = 3.4 - 1 = 1$
5	$a_5 = 3.5 - 1 = 14$

Portanto, $\{2, 5, 8, 11, 14\}$ é a sequência procurada.

Exemplo 1.11. A sequência $(1,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ pode ser definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $F_1 = F_2 = 1$ essa é a famosa sequência de Fibonacci e será vista no capítulo 4.

A próxima subseção referisse a distinguir sequências conforme a sua monotonicidade.

1.6 Sequência Monótonas.

Definição 1.5. A lista ordenada (a_n), com $n \geq 1$, de números reais, é dita monótona se ela admite algumas das seguintes propriedades:

Propriedade 1.5.1. Uma sequência (a_n) é monótona crescente se $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$a_1 < a_2 < \ \cdots < a_n < a_{n+1} < \ \cdots ;$$

Propriedade 1.5.2. Uma sequência (a_n) é monótona não decrescente se $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja

$$a_1 \leq a_2 \leq \ \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots ;$$

Propriedade 1.5.3. Uma sequência (a_n) é monótona decrescente se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \ \cdots ;$$

Propriedade 1.5.4. Uma sequência (a_n) é monótona não crescente se $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, simbolicamente

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots .$$

Exemplo 1.12. Verifique a monotonicidade da sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, (a_n) = (\alpha^n)$; para $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Resolução: Naturalmente $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Perceba que

$$a_{n+1} \ - a_n = \alpha^{n+1} - \alpha^n = \alpha^n(\alpha - 1).$$

Para $\alpha > 1$ temos $a_{n+1} > a_n$, ou seja (a_n) é monótona crescente. Caso $\alpha < 1$ vê-se que $a_{n+1} < a_n$, logo, (a_n) é decrescente.

Exemplo 1.13. Mostre que a sequência definida por $a_n = \dfrac{1}{n}, \forall\ n \in \mathbb{N}$ é monótona decrescente.

Resolução: Temos que $a_n = \dfrac{1}{n}$, assim seu termo consecutivo é $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, encontrando a diferença entre esses dois termos, temos:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{(n+1)\,n} = -\ \frac{1}{(n+1)\,n} < 0, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Logo $a_{n+1} < a_n$, a sequência (a_n) é monótona decrescente.

Exemplo 1.14. Verifique se a sequência definida por $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right), \forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ é monótona.

Resolução:

Para n	**Termo da sequência $\mathbf{a_n}$**
0	$a_0 = \cos\left(\dfrac{0.\pi}{2}\right) = \cos 0 = 1;$
1	$a_1 = \cos\left(\dfrac{1.\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$
2	$a_2 = \cos\left(\dfrac{2.\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1;$
3	$a_3 = \cos\left(\dfrac{3.\pi}{2}\right) = 0;$
4	$a_4 = \cos\left(\dfrac{4.\pi}{2}\right) = \cos(2\pi) = 1;$
5	$a_5 = \cos\left(\dfrac{5.\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{2.\pi}{2} + \dfrac{3.\pi}{2}\right) = (-1)\cdot 0 - 0 \cdot (-1) = 0\cdot$

Como os elementos da sequência, $(a_n) = (1,\ 0, -1,\ 0,\ 1,\ 0, \cdots)$, não formam uma sequência crescente nem decrescente, ela não é monótona.

Obs.: A sequência exibida no exemplo 1.14 é dita sequência alternada, seus termos alternam entre positivos e negativos.

O que será abordado na seção seguinte é sobre a limitação de uma sequência.

1.7 Sequência Limitadas.

Definição 1.6. Uma sequência (a_n) é limitada se existe um número real $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a sequência (a_n) não é limitada então ela é dita ilimitada.

Exemplo 1.15. A sequência definida por $(a_n) = \left(\sin \dfrac{n\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}$ satisfaz $-1 \leq \sin \dfrac{n\pi}{2} \leq 1$ em $\mathbb{R}$, logo, $\left|\sin \dfrac{n\pi}{2}\right| \leq 1$, isto é, $M = 1$.

Exemplo 1.16. A sequência definida por $(a_n) = n^3 = (1,\ 8,\ 27, \cdots), \forall\ a_n \in \mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$ é a sequência ilimitada que representa todos os números cubos perfeitos, como n é ilimitado a sequência é ilimitada.

2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Esse capítulo se refere as Progressão Aritmética. Inicialmente vai ser abordado o conteúdo de estudo de forma histórica, em seguida serão trabalhados seus conceitos e teoremas, com suas respectivas demonstrações. Paralelamente serão resolvidos exemplos com o objetivo de explorar os conhecimentos necessários nas aplicações das progressões aritméticas.

Este tipo especial de sequência é exibido em geral ao estudante do 1ª série do ensino médio, fazendo com que o estudante desenvolva a capacidade de padronizar leis de formação para diversos fenômenos naturais.

Este capítulo foi baseado nas referências [3], [6], [9], [11] e [12].

2.1 Um pequeno histórico sobre Progressão Aritmética.

Em 30 de abril de 1777, nasceu em Brunswick, Alemanha, Johann Friederich Carl Gauss, uma criança prodígio que aprendeu a ler, escrever e a fazer cálculos aritméticos mentais sozinho. Aos três anos corrigiu um erro de seu pai, quando ele calculava o salário dos operários da empresa onde trabalhava. Conhecido como o príncipe da Matemática, Gauss de família humilde, tendo a mãe como incentivadora, obteve brilhantismo em sua carreira.

Uma das principais histórias referida a Gauss relata que quando estudava em uma escola primária, durante uma aula de matemática, seu professor querendo manter os alunos em silêncio e ocupados, pediu aos alunos que fizessem a soma de todos os números naturais de 1 a 100. Para seu espanto em poucos minutos Gauss, com 10 anos de idade, resolveu o problema e apresentou o resultado correto.

Observando a resposta de Gauss o professor observou que ele adicionou todos os pares (1; 100), (2; 99), ..., (49; 52) e obteve em todos o resultado 101, em seguida ele multiplicou a constante (101) pelo número de termos adicionados e dividiu o resultado por dois, chegando a 5.050. Gauss sem compreender encontrou a propriedade da simetria das progressões aritméticas, iniciando a descoberta da soma dos termos de uma progressão aritmética.

2.2 Progressão Aritmética.

Definição 2.1. Toda sequência $(a_n) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{n-1}, a_n, \cdots\}$, com $n \in \mathbb{N}$, é dita uma progressão aritmética (PA) quando a diferença entre cada termo e seu termo anterior é constante e a esse resultado encontrado damos o nome de razão da PA, denotada por r, em resumo,

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = r.$$

Em outras palavras podemos dizer que uma progressão aritmética, ou abreviadamente

PA, é qualquer sequência de números reais (finita ou infinita), dada por uma recorrência do tipo:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Exemplo 2.1. Verifique se a sequência $(-3, -1, 1, 3, 5, \cdots)$ é uma progressão aritmética.

Resolução: Determinando a diferença entre cada termo e seu termo anterior, a partir do primeiro elemento da sequência, temos:

$$\begin{aligned} -1-(-3) &= -1+3 = 2 \\ 1-(-1) &= 1+1 = 2 \\ 3-1 &= 2 \\ 5-3 &= 2\cdot \end{aligned}$$

Como os valores obtidos são iguais a 2 a sequência é uma PA.

A seguir, uma caracterização de progressão aritmética.

Teorema 2.1. Uma sequência $(a_n)\,, \forall\ n \geq\ 1$, é uma PA se, e somente se,

$$a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}, \forall\ n \geq\ 1\cdot$$

Demonstração: Suponha que temos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma (PA). Somando e subtraindo a_{n+1} em $a_{n+2} + a_n$, temos que:

$$a_{n+2} + a_n = a_{n+2} - a_{n+1} + a_n + a_{n+1}.$$

Como $a_{n+2} - a_{n+1} = r$ e $a_{n+1} - a_n = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$,então $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$.

Com isso,

$$a_{n+2} + a_n = a_{n+1} - a_n + a_n + a_{n+1} = 2a_{n+1}.$$

■

Exemplo 2.2. Se $6 - x, 2x, 3 + 2x, \cdots$ é uma progressão aritmética, determine o valor de x.

Resolução: Sendo a sequência $6 - x, 2x, 3 + 2x, \cdots$ uma PA, aplicando o teorema 2.1, temos:

$$6 - x + 3 + 2x = 2.\,(2x)\,.$$

Resolvendo a equação obtemos que o valor de $x = 3$.

Teorema 2.2. Seja (a_n) uma PA e $n \geq 1$ inteiro positivo.

(i) Se n é ímpar, digamos $n = 2m-1$, então:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots = 2a_m.$$

Demonstração: Sendo (a_n) uma PA e $n \geq 1$, com n inteiro e ímpar, assim

$$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_1 = a_2 - r \text{ e } a_{2m-1} = a_{2m-2} + r.$$

Como n é ímpar, ele pode ser escrito $n = 2m-1$, com $m \in \mathbb{N}$ assim

$$a_1 + a_n = a_1 + a_{2m-1}, \tag{1}$$

substituindo $a_1 = a_2 - r$ e $a_{2m-1} = a_{2m-2} + r$ na equação (3), encontramos que $a_1 + a_n = a_2 - r + a_{2m-2} + r = a_2 + a_{2m-2} = a_2 + a_{n-1}$.

Usando o mesmo raciocínio encontramos:

$$\begin{aligned}
a_2 \ + \ a_{2m-2} &= a_3 - r \ + \ a_{2m-3} + r \ = a_3 + a_{2m-3} \\
a_3 \ + \ a_{2m-3} &= a_4 - r \ + \ a_{2m-4} + r \ = a_4 + a_{2m-4} \\
&\cdots \\
a_{m-2} \ + \ a_{m+2} &= a_{m-1} - r \ + \ a_{m+1} + r \ = a_{m-1} + a_{m+1} \\
a_{m-1} \ + \ a_{m+1} &= a_m - r \ + \ a_m + r \ = 2a_m.
\end{aligned}$$

Portanto, a soma dos termos equidistantes de uma PA, com o número de termos ímpares é o dobro do termo médio.

■

(ii) Se n é par, digamos $n = 2m$, então:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots = a_m + a_{m+1}.$$

Demonstração: Sendo (a_n), uma PA e $n \geq 1$, com n inteiro e par, assim $a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_1 = a_2 - r$ e $a_{2m} = a_{2m-1} + r$.

Como $n = 2m$, temos que:

$$a_1 \ + \ a_n = a_1 \ + \ a_{2m}, \tag{2}$$

substituindo $a_1 = a_2 - r$ e $a_{2m} = a_{2m-1} + r$ na equação (4), encontramos:

$$a_1 \ + \ a_n = a_2 - r \ + \ a_{2m-1} + r \ = a_2 + a_{2m-1}.$$

Usando o mesmo raciocínio, recursivamente

$$\begin{aligned}
a_1 + a_n = a_1 + a_{2m} = a_2 - r + a_{2m-1} + r \ &= a_2 + a_{2m-1};\\
a_2 + a_{2m-1} = a_3 - r + a_{2m-2} + r &= a_3 + a_{2m-2};\\
a_3 + a_{2m-2} = a_4 - r + a_{2m-3} + r &= a_4 + a_{2m-3};\\
\cdots = \cdots &= \cdots \ ;\\
a_{m-2} + a_{m+1} = a_{m-1} - r + a_m + r &= a_{m-1} + a_m;\\
a_{m-1} + a_m = a_m - r + a_{m+1} + r &= a_m + a_{m+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, se n é par então $a_1 + a_n = \cdots = a_m + a_{m+1}$.

■

Exemplo 2.3. Determine o termo médio da progressão aritmética $(2,\ 4, \cdots, 24, 26)$, sabendo que ela possui 13 termos.

Resolução: Sendo a sequência uma PA, aplicando o teorema $2.2.i$, temos:

$$\frac{2+26}{2} = \frac{28}{2} = 14\cdot$$

Logo, o termo médio da PA é 14.

Exemplo 2.4. Determine os termos médios da progressão aritmética $(1,\ 3, \cdots, 19)$, sabendo que ela possui 10 termos.

Resolução:

Sendo a sequência uma PA, aplicando o teorema $2.2.ii$, temos $1 + 19 = 20$, logo a soma dos termos médios da PA é 20.

Como a razão dessa PA é $r = 3-1 = 2$, os termos procurados são $\dfrac{20-2}{2} = 9$ e $9+2 = 11$.

Portando, os termos médios da progressão aritmética $(1, 3, \cdots, 19)$ são 9 e 11.

2.3 Termo Geral de uma Progressão Aritmética.

O termo geral de uma PA, é o termo que assume uma determinada posição n, com $n \in \mathbb{N}$, de uma sequência, sem a necessidade de calcular todos seus termos anteriores, usando apenas a quantidade de seus termos, sua razão e seu primeiro elemento.

Teorema 2.3. Se (a_n), $\forall\ n\ \geq\ 1$ é uma progressão aritmética, então o termo geral dessa progressão é determinado pela expressão $a_n = a_1 + r(n-1)$, com $n \in \mathbb{N}$ e a_n, $r \in \mathbb{R}$, representam o e-ssimo termo da progressão aritmética e a razão, respectivamente.

Demonstração:

Sabemos que na PA cada termo da sequência, a partir do primeiro, é obtida pela soma de seu termo anterior com sua razão, assim:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ \cdots &= \cdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + r \\ a_n &= a_{n-1} + r. \end{aligned}$$

Somando as equações, membro a membro, temos:

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + r + a_2 + r + \cdots + a_{n-2} + r + a_{n-1} + r,$$

ou ainda,

$$(a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = (a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}) + a_1 + r\cdot(n-1)\cdot$$

Adicionando $-(a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1})$ aos membros da última equação, obtemos:

$$a_n = a_1 + r(n-1), \forall n \in \mathbb{N},$$

com $a_n \in \mathbb{R}$, conforme queríamos demonstrar.

■

Exemplo 2.5 (Cometa Halley, MAT. DISCRETA, PROFMAT, CAP. 5, EX 5) Se $\{3-x, -x, \sqrt{9-x}, \cdots\}$ é uma progressão aritmética, determine x e calcule o quinto termo.

Resolução: Sendo $3-x, -x, \sqrt{9-x}, \cdots$ uma PA, a diferença entre cada termo e seu termo anterior é constante, logo:

$$-x-(3-x) = \sqrt{9-x} - (-x) \Longleftrightarrow -x-3+x = \sqrt{9-x} + x \Longleftrightarrow -3 = \sqrt{9-x} + x.$$

Adicionando a ambos os membros da equação $-x$, obtemos:

$$-x-3 = \sqrt{9-x} \Longleftrightarrow -(x+3) = \sqrt{9-x}\cdot$$

Elevando os membros da equação a dois, temos:

$$(-(x+3))^2 = \left(\sqrt{9-x}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = |9-x|,$$

assim,

$$x^2 + 6x + 9 = |9 - x|\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= -9 + x \\ x^2 + 5x + 18 &= 0, \end{aligned}$$

onde $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= 9 - x \\ x^2 + 7x &= 0, \end{aligned}$$

de raízes -7 e 0.

Tomando $x = 0$, a sequência é $(3, 0, 3, \cdots)$ não é uma PA, pois $0 - 3 = -3 \neq 3 - 0 = 3$.

Quando $x = -7$, a sequência é $(10, 7, 4, \cdots)$ é uma PA de razão -3 e primeiro termo 10.

Aplicando a relação do termo geral da PA (teorema 2.3), na determinação do quinto termo, encontramos:

$$a_5 = 10 + (-3)\,.\,(5 - 1) = 10 - 3.4 = 10 - 12 = -2\cdot$$

Logo,

$$a_5 = -2\cdot$$

Exemplo 2.6 A sequência dos números pentagonais está ilustrada na figura abaixo:

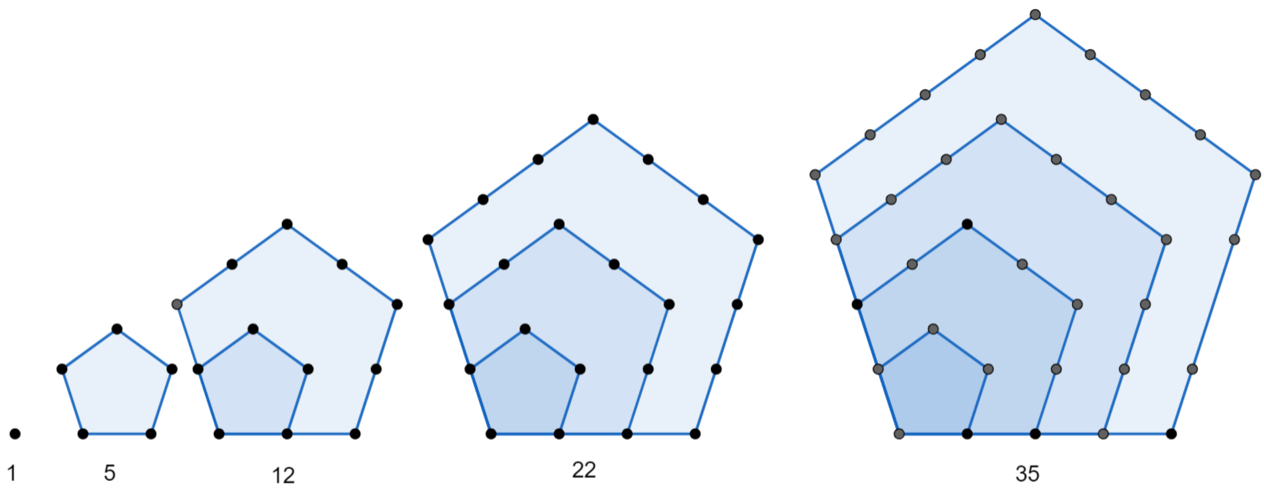

Figura 2: NÚMEROS PENTAGONAIS

Fazendo apenas a contagem de pontos em cada borda externa (perímetro) em cada pentágono chegaremos a:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 10$$
$$a_3 = 15$$
$$a_4 = 20$$

Sendo assim, qual o valor de a_{20}?

Resolução: Observamos que a contagem dos pontos pertencentes as bordas externas da figura formam a sequência

$$(a_n) = \{5, 10, 15, 20, \cdots\}, \texttt{ com } n \in \mathbb{N}\cdot$$

Como $10 - 5 = 15 - 10 = 20 - 15 = 5$, temos que (a_n) é uma PA de razão 5.

Sendo $a_n = a_1 + r(n-1)$, com $r = 5$, $a_1 = 5$ e $n = 20$ o termo a ser encontrado é o vigésimo, temos:

$$a_{20} = 5 + 5(20 - 1)$$
$$a_{20} = 5 + 95$$
$$a_{20} = 100$$

Exemplo 2.7 (Adaptado USP 2014) Na progressão aritmética$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, sabe-se que $a_2 + a_5 = 9$ e $3a_5 - a_3 \ = 16$. Então, quanto vale $\dfrac{a_5}{a_2}$?

Resolução: Pelo teorema 2.3, temos que:

$$a_2 = a_1 + r,\ a_3 \ = \ a_1 + 2r \texttt{ e } a_5 = a_1 + 4r\cdot$$

Substituindo a_2, a_3 e a_5, nas equações, $a_2 + a_5 = 9$ e $3a_5 - a_3 = 16$, encontramos o sistema:

$$\begin{cases} 2a_1 + 5r = 9 \\ 2a_1 + 10r = 16. \end{cases}$$

Multiplicando os membros da primeira equação do sistema por -1 e adicionando os membros da equação, obtemos:

$$5r = 7 \Leftrightarrow r = \frac{7}{5}.$$

Substituindo o valor de r na primeira equação do sistema, temos que:

$$2a_1 + 5\cdot\frac{7}{5} = 9 \Leftrightarrow 2a_1 + 7 = 9 \Leftrightarrow 2a_1 = 2 \Leftrightarrow a_1 = 1\cdot$$

Como

$$\frac{a_5}{a_2}=\frac{a_1+4r}{a_1+r}=\frac{1+4.\frac{7}{5}}{1+\frac{7}{5}}=\frac{\frac{33}{5}}{\frac{12}{5}}=\frac{33}{12}=\frac{11}{4}\cdot$$

Logo, $\frac{a_5}{a_2}=\frac{11}{4}$.

Teorema 2.4. A soma dos termos equidistantes de uma PA são iguais.

Demonstração: Na PA $(a_n)=\{a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_s,\cdots,a_{n-1},a_n\}$, com $n\in\mathbb{N}$, temos a_1 e a_n, a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2}, $\ldots,a_{1+s}$ e a_{n-s}, com $n,s\in\mathbb{N}$, são termos equidistantes, observe que:

$$a_1+a_n=a_1+a_1+r\,(n-1)=2a_1+r\,(n-1)\cdot$$

$$a_2\;+\;a_{n-1}=a_1+r(2-1)\;+\;a_1+r\,(n-1-1)$$

$$=a_1+r\;+\;a_1+r(n-2)=2a_1+r(1+n-2)=2a_1+r(n-1)\cdot$$

$$a_{1+s}+a_{n-s}=a_1+r\,(1+s-1)+a_1+r\,(n-s-1)$$

$$=a_1+rs+a_1+r\,(n-s-2)=2a_1+r\,(s+n-s-1)=2a_1+r\,(n-1)\cdot$$

Portanto, a soma dos termos equidistantes de uma PA são iguais.

■

2.4 Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética.

Foi apresentado no início do capítulo, que Gauss determinou a soma dos 100 primeiros números naturais, nessa seção vai ser apresentado um raciocínio lógico semelhante na determinação da fórmula da soma dos n termos de uma PA, com $n\in\mathbb{N}$.

Teorema 2.5. Se $(a_n)\;\forall\; n\;\geq\;1$ é uma progressão aritmética, então a soma de seus termos é determinada pela expressão $S_n=\frac{(a_1+a_n).n}{2}$, com $n\in\mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_{n-1}+a_n$, com $n\in\;\mathbb{N}$, a soma dos n termos de uma PA, pela propriedade comutativa da adição, temos:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n-1}+a_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_3+a_2+a_1=S_n,$$

assim podemos representar o sistema:

$$\begin{cases} S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_{n-1}+a_n\\ S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_3+a_2+a_1\end{cases}$$

Somando os membros do sistema, temos:

$$2S_n = a_1 + a_n + a_2 + a_{n-1} + a_3 + a_{n-2} + ... + a_{n-1} + a_2 + a_n + a_1 \cdot$$

Usando agora o teorema 2.4 temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

com n termos $(a_1 + a_n)$.

Usando o teorema 2.4 temos que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \cdot$$

$\blacksquare$

Exemplo 2.7. Calcule a soma dos n primeiros números ímpares.

Resolução: A sequência $(1, 3, 5, 7, 9, \cdots)$ representa os números naturais ímpares, como $3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 5 = 2$, temos uma progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo 1.

Logo, pelo teorema 2.3,

$$a_n = 1 + 2.(n - 1) = 2n - 1 \cdot$$

Substituindo $a_1 = 1$ e $a_n = 2n - 1$ em $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2}$, temos

$$S_n = \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = \frac{2n \cdot n}{2} = n^2.$$

Portanto, a soma dos n primeiros números ímpares é dada por

$$S_n = n^2, \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 2.8. (Livro MATEMÁTICA DISCRETA, PROFMAT, questão 3.3) Quanto vale o produto

$$(a)(aq)\left(aq^2\right)\left(aq^3\right)\cdots\left(aq^{n-1}\right)?$$

Resolução: Aplicando a propriedade associativa da multiplicação, temos:

$$(a)(aq)\left(aq^2\right)\left(aq^3\right)\cdots\left(aq^{n-1}\right) = (a.a.a\cdots a)\left(qq^2q^3\cdots q^{n-1}\right),$$

com n termos a e $n - 1$ termos q. Aplicando a soma de potência de mesma base em $qq^2q^3 \cdots q^{n-1}$, obtemos:

$$(a)(aq)\cdots\left(aq^{n-1}\right) = (a^n)\left(qq^2q^3\cdots q^{n-1}\right)\cdot$$
$$(a)(aq)\cdots\left(aq^{n-1}\right) = (a^n)\,q^{1+2+3+\cdots+n-1}.$$

$1+2+3+\cdots+n-1$ é a soma dos $n-1$ termos da PA $(1,2,3,\cdots,n-1)$, pela proposição 2.5,

$$1+2+3+\cdots+n-1 = \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}\cdot$$

Logo $qq^2q^3\cdots q^{n-1} = q^{\frac{n^2-n}{2}}$.

Portanto, o produto pedido é o número $a^n\cdot q^{\frac{n^2-n}{2}}$.

Exemplo 2.9. Mostramos, abaixo, as quatro primeiras linhas de uma tabela infinita, formada por números naturais, onde, para $i > 1$, a linha i começa à esquerda por um número duas unidades maior que aquele que inicia a linha $i-1$, e tem dois números a mais que a linha $i-1$. Calcule a soma dos números escritos na centésima linha.

1						
3	5	7				
5	7	9	11	13		
7	9	11	13	15	17	19

Resolução: Observamos que os números que iniciam cada linha formam uma a PA, (a_n), com $n \in \mathbb{N}$, de razão $r = 3-1 = 2$ e primeiro termo $a_1 = 1$, assim o centésimo termo dessa PA é:

$$a_{100} = 1 + 2(100-1) = 199.$$

Os números de termos das primeiras linhas formam uma PA de razão 2 e primeiro termo 1, assim a quantidade de termos (q_n) da linha 100 é:

$$q_{100} = 1 + 2(100-1) = 199\cdot$$

A centésima linha da tabela forma uma PA, que descrevemos por (b_n) , de razão 2, com 199 elementos e o primeiro termo sendo 199. Determinando o termo b_{199}, obtemos:

$$b_{199} = 199 + 2(199-1) = 595\cdot$$

Aplicando o teorema 2.5, segue que

$$S_{199} = \frac{(199+595).199}{2} = 79.003$$

Logo, a soma dos termos da linha 100 é o valor 79.003.

Exemplo 2.10. (Questão 10 – OBM 2013) O triângulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1 dispostos em linhas com ordem crescente em cada linha e pulando para a linha seguinte. A linha n possui exatamente n números. Veja as cinco primeiras linhas.

$$\begin{array}{llllll} LINHA & 01 & 1 & & & \\ LINHA & 02 & 3 & 5 & & \\ LINHA & 03 & 7 & 9 & 11 & \\ LINHA & 04 & 13 & 15 & 17 & 19 \\ LINHA & 05 & 21 & 23 & 25 & 27 \quad 29 \end{array}$$

Em qual linha aparecerá o 2013?

Resolução: Observamos que o número de termos de cada linha é igual ao número da linha e que as sequências formadas pelos elementos de cada linha são progressões aritméticas de razão 2.

Usando a proposição 2.3, determinamos a posição de 2013 em relação a PA $(1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots)$.

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 2013$$
$$2n - 1 = 2013 \Leftrightarrow 2n = 2014 \Leftrightarrow n = 1007$$

Logo, a posição de $2013^{\underline{a}}$ é o $1007^{\underline{a}}$ número natural ímpar.

Pela proposição 2.5, $\dfrac{(1+k)\cdot k}{2}$ é o primeiro termo dessa linha uma posição após a do último termo da linha $(k-1)$. Logo, a posição é dada por $\dfrac{(1+k-1)\cdot(k-1)}{2} + 1 = \dfrac{(k-1)\cdot k}{2} + 1$.

Assim a $1007^{\underline{o}}$ posição está entre $\dfrac{(k-1)\cdot k}{2} + 1$ e $\dfrac{(1+k)\cdot k}{2}$.

Temos então $\dfrac{(k-1)\,.k}{2} + 1 < 1007 < \dfrac{(1+k)\,.k}{2}$, resolvendo as inequações:

$$\frac{(k-1)\cdot k}{2} + 1 < 1007 \Leftrightarrow \frac{(k-1)\cdot k}{2} < 1006.$$

Como $\dfrac{(k-1)\cdot(k-1)}{2} < \dfrac{(k-1)\cdot k}{2} < 1006$, temos então:

$$\frac{(k-1)^2}{2} < 1006 \Leftrightarrow (k-1)^2 < 2012 \Rightarrow k < \sqrt{2012} + 1 < 46$$

$$1007 < \frac{(k+1)\cdot k}{2} \Leftrightarrow 2014 < (k+1)\cdot k$$

Sendo $2014 < (k+1)\cdot k < \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(k + \dfrac{1}{2}\right)$, logo

$$2014 < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2014} < k + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2014} - \frac{1}{2} < k \Rightarrow 44 < \sqrt{2014} - 1 < k\cdot$$

Portanto, o único número natural que satisfaz a condição é 45.

■

Posteriormente, exploraremos, sobre progressões aritméticas de ordem superior, um conteúdo a parte, do exposto no ensino médio convencional.

2.5 Progressão Aritmética de Ordem Superior.

As Progressões Aritméticas de ordem superior não fazem parte do currículo do ensino médio e suas questões são vistas como desafios.

Definição 2.2. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Define-se para sequências o operador Δ, chamado de operador de diferença, por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.3. Chama-se primeira diferença da sequência de primeira ordem (a_n) a sequência (Δa_n) dada por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.

Exemplo 2.11. Mostre que $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$, conhecido como Teorema Fundamental da Somação.

Resolução: Sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \cdots + \Delta a_{n-1} + \Delta a_n,$$

pela definição 2.2, temos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + (a_n - a_{n-1}),$$

logo,

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = -\,a_1 + a_n = a_n - a_1.$$

Pelas definições 2.2 e 2.3, temos então que uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, a sequência $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$ é uma constante.

Definição 2.4. Chama-se segunda diferença da sequência (a_n) a sequência $\left(\Delta^2 a_n\right)$ que é a primeira diferença da sequência de primeira diferença (Δa_n), ou seja,

$$\begin{aligned}\Delta^2 a_n &= \Delta \cdot (\Delta a_n)\\ &= \Delta a_{n+1} - \Delta a_n\\ &= a_{n+2} - a_{n+1} - (a_{n+1} - a_n)\\ &= a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.\end{aligned}$$

Definição 2.5. Uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem se a sequência (Δa_n) dada por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ for uma sequência estacionária.

Proposição 2.1. Sendo $(a_k)_{k\geq 1}$, uma PA de segunda ordem, assim seu termo geral é dado por

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1)(n-1) \ + \frac{(n-1)\,(n-2)\,r}{2},$$

onde $r = a_1 - 2a_2 + a_3$ é a razão da PA não constante formada pelas diferenças entre termos consecutivos da sequência $(a_k)_{k\geq 1}$.

Demonstração: Denote $b_k = a_{k+1} - a_k$, para todo $k \geq 1$, de modo que $(b_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r.

Veja que,

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= b_1 \\ a_3 - a_2 &= b_2 \\ a_4 - a_3 &= b_3 \\ \cdots &= \cdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= b_{n-2} \\ a_n - a_{n-1} &= b_{n-1} \end{aligned}$$

Somando membro a membro as igualdades e efetuando os cancelamentos quando possível, obtemos:

$$a_n - a_1 = \ b_1 \ + \ b_2 \ + \cdots + b_{n-1}$$

Agora, como $(b_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, podemos utilizar sucessivamente as fórmulas para a soma dos termos e para o termo geral de PAS para obter que:

$$\begin{aligned} b_1 \ + \ b_2 \ + \cdots + b_{n-1} &= \frac{(b_1 + b_{n-1})\,(n-1)}{2} \\ &= \frac{(b_1 + b_1 + (n-2)\,r)\,(n-1)}{2} \\ &= \frac{2b_1.\,(n-1) + (n-2)\,(n-1)\,r}{2} \\ &= b_1 \cdot (n-1) + \frac{(n-2)\,(n-1)\,r}{2}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$a_n - a_1 = b_1 \cdot (n-1) + \frac{(n-2)\,(n-1)\,r}{2}. \tag{3}$$

Como $b_1 = a_2 - a_1$, substituindo na equação (5) encontramos:

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) \cdot (n-1) + \frac{(n-2)\,(n-1)\,r}{2}.$$

Por fim, temos que $r = b_2 - b_1 = a_3 - a_2 - (a_2 - a_1) = a_1 - 2a_2 + a_3$.

$\blacksquare$

Definição 2.6. A diferença de ordem $K, \forall\ K \in \mathbb{N}$, da sequência (a_n) é dada pela sequência $\left(\Delta^k a_n\right)$ que é a primeira diferença da sequência $\Delta^{k-1} a_n$ de ordem $k-1$, ou seja,

$$\Delta^k a_n = \Delta \cdot \left(\Delta^{k-1} a_n\right) = \Delta^{k-1} a_{n+1} - \Delta^{k-1} a_n, \texttt{com } n = k, k+1, \cdots$$

Exemplo 2.12. A sequência $(a_n) = (1, 3, 6, 10, \cdots)$, também conhecida como sequência dos números triangulares, é uma progressão aritmética?

Resolução: Encontrando a sequência $(\Delta a_n) = (12, 3, 4, \cdots)$, sendo a sequência (Δa_n), não estacionaria, determinando $\left(\Delta^2 a_n\right) = (1, 1, 1, 1, \cdots)$, como os elementos de $\Delta^2 a_n$ são constantes (a_n) é uma progressão de segunda ordem.

Exemplo 2.13. Seja $(a_k)_{k \geq 1}$ a sequência definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + 3n - 1$ para todo inteiro positivo n. Calcule, em função de n, o enésimo termo dessa sequência.

Resolução: Sendo $(a_k)_{k \geq 1}$ uma PA de segunda ordem, pois $a_{n+1} - a_n = 3n - 1$ e a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3n - 1)$ é de primeira ordem.

Para determinar a_n em função de n, substituímos os valores de n, com n natural, assim:

$$a_2 - a_1 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 5$$

$$a_4 - a_3 = 8$$

$$a_5 - a_4 = 11$$

$$\cdots$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = 3\,(n-2)\ - 1$$

$$a_n - a_{n-1} = 3\,(n-1) - 1$$

Somamos as igualdades acima membro a membro e efetuamos os possíveis cancelamentos, obtemos:

$$a_n - a_1 = 2 + 5 + 8 + \cdots + [3\,(n-1) - 1]$$

$$a_n - a_1 = \frac{(2 + 3n - 4)\,(n-1)}{2}$$

$$a_n - a_1 = \frac{(3n-2)\,(n-1)}{2} \tag{4}$$

Substituindo $a_1 = 1$, na equação (6) chegamos a

$$a_n = \frac{1}{2}\left(3n^2 - 5n\ + 4\right).$$

Logo, o enésimo termo da sequência é $a_n = \dfrac{1}{2}\left(3n^2 - 5n + 4\right)$.

3 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Nesse capítulo de sequências numéricas discutiremos o estudo de padrões de formação que são relacionados ao produto de uma constante real para a obtenção de um novo termo da sucessão a partir de um primeiro elemento escolhido, a essas sequências denotamos como Progressões Geométricas. Inicialmente será abordado a parte de estudo histórico. Em seguida, exibiremos conceitos, teoremas com suas respectivas demonstrações e com as resoluções de exemplos dos conteúdos apresentados explorando os conhecimentos necessários nas aplicações das progressões geométricas.

As referências [6], [9], [11], [12] e [13] foram usadas para elaborar esse capítulo.

3.1 Um pequeno histórico sobre Progressão Geométrica.

No século IX, Al-Adlí[1], escreveu ”O livro do xadrez”onde se narra pela primeira vez, a célebre lenda dos grãos de trigo, que atribuem a invenção do xadrez a alguém chamado Sessa. A história relata que:

O rei hindu Iadava, isolado nas paredes de seu castelo, pelo motivo da perda de seu filho, em uma grande batalha, recebeu a informação que um moco brâmane, pobre e modesto, pleiteava uma audiência com ele há alguns dias, estando em um dia de boa disposição e ânimo, o rei resolveu receber o jovem. Lahur Sessa, se apresentou ao monarca e falou que ficou sabendo que o bondoso rei arrastava os dias em meio de profunda tristeza e que inventou um jogo que vai distraí-lo e abrir em seu coração as portas de novas alegrias.

Como todos os grandes reis são curiosos, Iadava ordenou que Seesa mostrasse o que ele inventou. Imediatamente o jovem Sessa mostrou e explicou pacientemente ao rei, aos vizires e cortesões que rodeavam o monarca em que consistia o jogo, ensinando-lhes as regras essenciais. O rei, interessado pelas regras do jogo, não se cansava de interrogar o inventor, dentro de poucas horas o monarca, que aprendera com rapidez todas as regras do jogo, estava vencendo seus cortesões. Maravilhado com a invenção o rei hindu queria saber como poderia recompensar Sessa.

O inventor, indagou que a recompensa era a satisfação de ter proposto ao rei um passatempo agradável, o monarca insistiu em recompensar o jovem, esse. com medo de represaria, falou: não quero ouro nem terras e sim um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, pela segunda casa dois grãos de trigo, pela terceira casa quatro grãos, pela quarta casa oito grãos de trigo, pela quinta casa dezesseis graus e assim fosse dobrado a quantidade de grãos de trigo até a sexagésima quarta casa do tabuleiro.

O pedido de Sessa foi motivo de riso por todos aqueles que lá estavam, mesmo assim o imperador mandou que os matemáticos do reino fizessem a conta, horas depois o maior matemático do reino, interrompendo uma partida de xadrez do rei, disse que a quantidade de graus de trigo que deve ser dada a Lahur Sessa equivale a uma montanha que seria cem

[1]Al-Adli (800-870) foi um forte jogador de Xatranje, um dos antecessores do xadrez, do século IX, ele escreveu um livro sobre o Xatranje (Kitab ash-shatranj) e um sobre o gamão (Kitab an-nard).

vezes mais alta do que o Himalaia! A Índia inteira, semeados todos os seus campos, taladas todas as suas cidades, não produziria em dois mil séculos a quantidade de trigo que, pela vossa promessa, cabe, em pleno direito, ao jovem Sessa!

Diante da impossibilidade de cumprir a palavra dada, o rei não sabia o que fazer. Lahur Sessa, como bom súdito, não quis deixar aflito o seu soberano e declarou publicamente que abriria mão do pedido que fizera então o rei Iadava agradeceu o seu cervo e o nomeou como cargo mais poderoso e ilustre do reinado.

Como o tabuleiro de xadrez possui 64 casas e a primeira casa possui um grão de trigo, a quantidade de trigo pedida por Sessa é o valor da sexagésimo quarto termo da sequência de primeiro termo 1 e razão 2, assim:

$$(a_n) = (1,\ 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 2 \cdot 2, 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, \cdots) = \left(2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ...\right),$$

vemos que a quantidade de grãos por casa é uma potência de base 2 e que o expoente é o antecessor do número que representa a posição de cada casa do tabuleiro, assim 2^{63} era a quantia a ser destinado à Sessa, pela $64^{\underline{a}}$ casa do tabuleiro.

Sendo cada elemento da sequência o dobro do anterior temos aí o que conhecemos por uma progressão geométrica (P.G.) de razão 2 e primeiro termo 1.

Agora vamos aos conceitos e resultados da teoria.

3.2 Progressão Geométrica.

Definição 3.1. Toda sequência $(a_n) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{n-1}, a_n\}$, com $n \in \mathbb{N}$, é dita uma progressão geométrica, cuja abreviação é PG, quando o quociente entre cada um dos termos, pertencentes a essa sequência, e seu termo anterior são iguais, o resultado encontrado é denotado por q, com $q \in \mathbb{R}$, ao qual damos o nome de razão da PG.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Observação:

Em outras palavras, podemos dizer que uma progressão geométrica, ou abreviadamente PG, é qualquer sequência de números reais (finita ou infinita), do tipo:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = q \cdot a_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Teorema 3.1. Uma sequência $(a_n), \forall\ n\ \geq 1$, é uma PG se, e somente se,

$$a_{n+2} \cdot a_n = \left(a_{n+1}\right)^2, \forall n\ \geq\ 1.$$

Demonstração: Suponha que, a sequência $(a_n), \forall\ n \in \mathbb{N}$ é uma progressão geométrica. Por definição, $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q$ e $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, assim:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{5}$$

Multiplicando os membros da equação (7) por $a_{n+1} \cdot a_n$, temos:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot a_{n+1} \cdot a_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_{n+1} \cdot a_n,$$

consequentemente

$$a_{n+2} \cdot a_n = {a_{n+1}}^2.$$

$\forall n \geq 1$

Se ${a_{n+1}}^2 = a_{n+2} \cdot a_n, \forall n \geq 1$ então, para $a_n,\ a_{n+1} \neq 0\ \forall\ n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Logo, podemos então dizer que se uma sequência em que a cada três termos consecutivos, o quadrado do termo do meio é o produto do seu antecedente e do seu consequente, ela é uma PG.

■

Exemplo 3.1 O artigo "Uma estrada, muitas florestas" relata parte do trabalho de reflorestamento necessário após a construção do trecho sul do Rodoanel da cidade de São Paulo. O engenheiro agrônomo Maycon de Oliveira mostra uma das árvores, um fumo-bravo, que ele e sua equipe plantaram em novembro de 2009. Nesse tempo, a árvore cresceu – está com quase 2,5 metros –, floresceu, frutificou e lançou sementes que germinaram e formaram descendentes [...] perto da árvore principal. O fumo-bravo [...] é uma espécie de árvore pioneira, que cresce rapidamente, fazendo sombra para as espécies de árvores de crescimento mais lento, mas de vida mais longa.

(Pesquisa FAPESP, janeiro de 2012. Adaptado.)

Figura 3: ESPÉCIE DA ÁRVORE FUMO BRAVO (w3.ufsm.br/herbarioflorestal).

Considerando que a referida árvore foi plantada em 1º de novembro de 2009 com uma altura de 1 dm e que em 31 de outubro de 2011 sua altura era de 2,5 m e admitindo ainda que suas alturas, ao final de cada ano de plantio, nesta fase de crescimento, formem uma progressão geométrica, a razão deste crescimento, no período de dois anos, foi de

a) $0,5$

b) $5 \cdot 10^{-\frac{1}{2}}$

c) 5

d) $5 \cdot 10^{\frac{1}{2}}$

e) 50.

Resolução: Sendo as unidades do comprimento da altura da arvore diferentes, primeiro, temos que transformar para a mesma unidade de medida. Assim, $1\ dm = 0,1\ m$.

Como o valor das alturas formam uma progressão geométrica, podemos escrever que $a_1 = 0,1$, $a_2 = 0,1.q$ e $a_3 = 0,1.q^2$. Sabemos que no final do período a altura da árvore era de $2,5\ m$, substituindo esse valor encontramos $0,1 \cdot q^2 = 2,5$, logo $q = \pm 5$

Visto que a progressão crescente, então q = 5. Alternativa correta é a c.

3.3 Termo Geral de uma Progressão Geométrica.

Nessa seção vamos aprender a calcular um termo de uma PG, que assume uma determinada posição em uma sequência, sem a necessidade de calcular todos seus termos anteriores, necessitando basicamente da quantidade de termos da PG e sua razão e seu primeiro termo.

Teorema 3.2. Se (a_n), $\forall\, n \in \mathbb{N}$ é uma progressão geométrica, então o termo geral dessa progressão é determinado pela expressão $a_n = a_1.q^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$, representa o enésimo termo da progressão geométrica.

Demonstração: Sabemos que na PG cada termo da sequência, a partir do primeiro, é determinada pelo produto de seu termo anterior com sua razão, temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q;$$

$$a_3 = a_2 \cdot q;$$

$$\ldots$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q;$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Multiplicando as igualdades acima membro a membro, obtemos:

$$a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot q \cdot a_2 \cdot q \cdots a_{n-2} \cdot q \cdot a_{n-1} \cdot q,$$

ordenando

$$(a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1}) \cdot a_n = a_1 (a_2 \cdot \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1}) \cdot q \cdot q \cdot q \cdots q,$$

percebemos $n-1$ fatores q.

Dividindo os membros da equação por $(a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1})$, encontramos:

$$\frac{(a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}) \cdot a_n}{(a_2 \cdot a_3 \cdots \ a_{n-1})} = \frac{a_1(a_2 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1}) \cdot q^{n-1}}{(a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots a_{n-1})},$$

ou seja,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot .$$

Logo, a fórmula do termo geral de uma PG é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

■

Exemplo 3.2. (Enem/provas/inep-2020) O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.

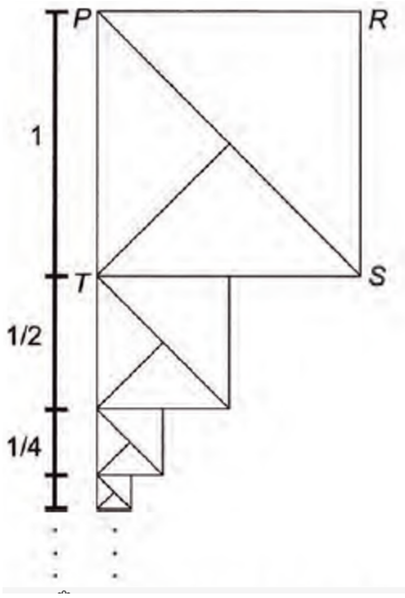

Figura 4: REPETIÇÃO INFINITA DAS IMAGENS.

O quadrado PRST, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente.

Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

Resolução: Observando a figura vemos que os comprimentos dos lados dos quadrados formam uma a sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots\right)$ que é uma PG de razão $q = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$ e primeiro termo 1.

Como o problema quer determinar a medida do lado centésimo quadrado, aplicando o teorema 3.2, obtemos:

$$a_{100} = 1. \left(\frac{1}{2}\right)^{100-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{99}.$$

Logo, o comprimento do centésimo quadrado é $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$.

Exemplo 3.3.(Enem/provas/inep-2016) O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos EUA e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A0, cujas dimensões são 84,1 cm x 118,9 cm. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, obtendo os demais formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura:

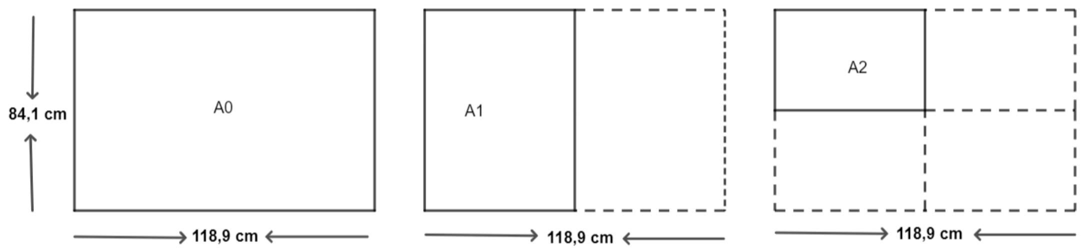

Figura 5: TAMANHO DO PAPEL.

A1 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.

Quantas folhas de tamanho A8 são obtidas a partir de uma folha A0?

Resolução: A priori, observando a ilustração, percebemos que para sair do formato do papel A_0 para o formato A_1, uma folha A_0 se transforma em duas folhas A_1, uma folha A_1 se transforma em duas folhas A_2, consequentemente duas folhas A1 se transformam em 4 folhas A_2, dessa forma construímos a sequência $a_n = (1, 2, 4, 8, \cdots)$, com n natural, que é uma PG de razão 2 e primeiro termo 1.

Como o problema pede a quantidade de folhas no formato A8, temos que encontrar o nono termo da PG, observado que o primeiro termo da PG é uma folha do formato A0, aplicando o teorema 3.2, encontramos.

$$a_9 = 1. (2)^{9-1} = (2)^8 = 256$$

Logo, são obtidas 256 folhas de papel formato A8 a partir de uma folha de formato A0.

Posteriormente, faremos o estudo da soma dos termos de uma progressão geométrica finita.

3.4 Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Finita.

Teorema 3.3. Se (a_n), $\forall\ n \in \mathbb{N}$, é uma progressão geométrica, então a soma de seus termos é determinada pela expressão $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{(1-q)}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, com $n \in \mathbb{N}$. Multiplicando a equação por q, temos,

$$q.S_n = a_1.q + a_2.q + a_3.q + \ldots + a_{n-1}.q + a_n.q,$$

ou ainda,

$$q.S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n.q.$$

Deste modo, podemos representar o sistema,

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ q.S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n.q \end{cases}.$$

Subtraindo os membros das equações do sistema e reagrupando os termos, obtemos

$$S_n \cdot (1-q) = a_1 + (a_2 - a_2) + (a_3 - a_3) + ... + (a_{n-1} - a_{n-1}) + (a_n - a_n) - a_n.q,$$

isto é,

$$S_n \cdot (1-q) = a_1 - a_n \cdot q.$$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, substituindo na equação acima, encontramos que:

$$S_n \cdot (1-q) = a_1 - a_1.q^{n-1}.q$$

$$S_n \cdot (1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)}.$$

Portanto, a soma dos enésimos termos de uma PG é dada por

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)},$$

conforme queríamos demonstrar.

■

Exemplo 3.4. Uma fábrica de chocolates inaugurada em 2010 produziu 1000 ovos de páscoa nesse mesmo ano. Considerando que sua produção aumentou em 50% a cada ano, em 2015, o dono da fábrica poderá dizer que em toda a história da fábrica foram produzidos quantos ovos?

Resolução: Como a produção inicial da fábrica, no ano de 2010, é 1000 ovos e ela aumenta 50% por ano, sua produção em

$$2011 \text{ é } 1000 \times \frac{150}{100} = 1500 \text{ ovos}$$

$$2012 \text{ é } 1500 \times \frac{150}{100} = 2250 \text{ ovos}$$

$$2013 \text{ é } 2250 \times \frac{150}{100} = 3375 \text{ ovos.}$$

Assim vemos que a produção da fábrica é uma PG de razão 1,5 e primeiro termo 1000, como o problema quer determinar a produção de ovos, no período de 2010 até 2015, 6 anos, usando o teorema 3.3, obtemos:

$$S_6 = \frac{1000(1-1,5^6)}{(1-1,5)}$$

$$S_6 = \frac{1000(-10,390625)}{(-0,5)}$$

$$S_6 = \frac{-10390,625}{-0,5}$$

$$S_6 = 20.781,25.$$

Logo, a empresa terá produzido aproximadamente 20.781 ovos de Páscoa.

Exemplo 3.5.(PM PE – IAUPE). Uma fábrica inaugurou sua produção com 4 itens. Sabendo-se que a quantidade de itens produzidos pela fábrica em cada ano consecutivo obedece a uma progressão geométrica e que, no quinto ano, foram produzidos 324 itens, então qual a soma total de itens fabricados nesses cinco primeiros anos?

Resolução: Como a produção de itens, da fábrica, obedece a uma progressão geométrica e que a produção no primeiro ano e no quinto ano foram, respectivamente 4 itens e 324 itens, aplicando o teorema 3.2, encontramos a razão de crescimento da produção de itens.

$$324 = 4.q^{5-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{324}{4} = q^4 \Leftrightarrow$$

$$q = \sqrt[4]{81} = 3\cdot$$

Usando agora o teorema 3.3, determinaremos a produção total de itens, nos 5 anos, da fábrica:

$$S_5 = \frac{4(1-3^5)}{(1-3)}$$

$$S_5 = \frac{4(-242)}{(-2)}$$

$$S_5 = 484\cdot$$

3.5 Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Infinita de razão $|q| < 1$

.

Teorema 3.4. Se (a_n), $\forall\ n \geq 1$, é uma progressão geométrica infinita de razão $|q| < 1$, então a soma de seus termos é determinada pela expressão $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: A soma dos n termos de uma PG quando $n \to \infty$, assim:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1(1-q^{\infty})}{(1-q)}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, para $|q| < \mathbf{1}$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1(1-0)}{(1-q)}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1.1}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Portanto, a soma dos termos de uma PG infinita é dada por

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

■

Exemplo 3.6.(EsPCEx - 2019). A partir de um cubo de aresta 1, inscreve-se uma esfera; nessa esfera inscreve-se um novo cubo e neste, uma nova esfera. Repetindo essa operação indefinidamente, a soma das áreas totais desses cubos é igual a:

[A] 7. [B] 8. [C] 9. [D] 10. [E] 11.

Resolução: Sabendo que a soma das arestas de um cubo é o sêxtuplo da área de uma face, sendo a aresta do cubo de 1, a soma da área de suas arestas é $6 \times 1^2 = 6$.

Inscrevendo um círculo dentro desse cubo, figura 6, temos que o diâmetro do circulo é o lado do cubo de lado 1, inscrevendo agora um novo cubo dentro desse círculo, figura 7, temos que o diâmetro do círculo é igual a diagonal do novo cubo, aplicando o teorema de Pitágoras para determinar o lado do cubo, temos que a $d^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$, onde d e a são, respectivamente, a diagonal e o apótema do novo quadrado, e $d = 1$, assim:

$$3a^2 = d^2$$

$$a^2 = \frac{1^2}{3} = \frac{1}{3}$$

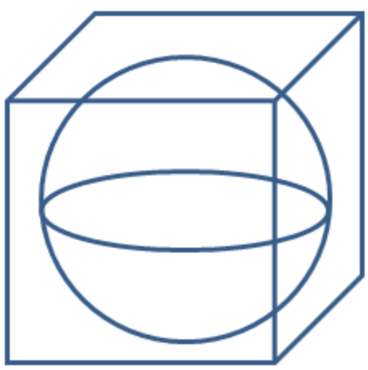

Figura 6: ESFERA INSCRITA EM UM CUBO DE ARESTA 1.

Determinando a área total do novo cubo, temos $6a^2 = 6 \times \dfrac{1}{3} = 2$. Logo, a PG $(1, 2, \cdots)$ possui razão $q = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

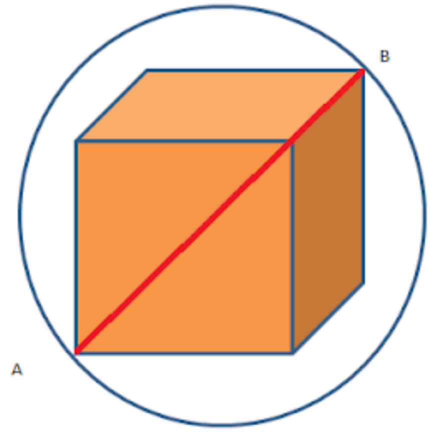

Figura 7: ESFERA DE DIÂMETRO 1 CIRCUNSCRITA EM UM CUBO.

Usando o teorema 3.4, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{6}{1 - \dfrac{1}{3}} = \frac{6 \times 3}{2} = 9$$

Portanto, a alternativa correta é a letra c.

4 RECORRÊNCIA E EQUAÇÕES A DIFERENÇA DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM.

Nessa seção será abordado as sequências recursivas. Inicialmente o conteúdo de estudo vai ser introduzido historicamente, seguidamente será presentado seus conceitos e teoremas com suas respectivas demonstrações e paralelamente vai serão resolvidos exemplos dos conteúdos apresentados explorando os conhecimentos necessários nas aplicações das recorrências.

Para realização deste capítulo utilizamos os referências [3], [4], [6], [8], [9], [10], [11] e [12].

4.1 Um pequeno histórico sobre Recorrência.

Nascido na Itália, na cidade de Pisa, Leonardo Fibonacci (1170-1240), também conhecido como Leonardo Pisano, de acordo com [3], foi o matemático mais original e capaz do mundo cristão medieval. Seu pai foi um importante mercador de Pisa e em suas viagens, Leonardo percorreu todo o Mediterrâneo, conhecendo nestes lugares diversas culturas e familiarizando-se com a Matemática árabe.

A Matemática árabe nesse período era a mais desenvolvida do que a Matemática da Europa. Leonardo impressionado com os algarismos indo-arábicos, e considerava mais vantajoso utilizá-los em comparação aos sistemas numéricos usados na Europa, para registrar os números e operar com eles. Em 1202 publicou seu livro Liber e Abaci, que apresentou um tratado da Aritmética e da Álgebra Elementar. Entre os problemas deste livro está o dos coelhos: "Um homem pôs um par (casal) de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro de todos os lados. Quantos pares (casais) de coelhos podem ser gerados a partir desse par em 12 períodos, se em todo período cada par gera um novo par (casal) de filhotes que se tornam adultos e férteis a partir do segundo período de vida?" Tal problema será tratado com maior ênfase no capítulo 7.

4.2 Recorrência.

Definição 4.1. Uma sequência é dita recorrente, ou simplesmente recorrência, quando a partir de um certo termo, todos os termos são dados em função do(s) termo(s) anterior(es).

4.2.1 Representação das Recorrências.

As recorrências podem ser apresentadas das seguintes formas:

(i) Através de uma equação de recorrência que, a partir de um certo termo, determina cada termo posterior em função dos anteriores.

Exemplo 4.1. A sequência cujo primeiro termo é $x_1 = 1$ e cada termo a partir do segundo é dado por: $x_n = 2x_{n-1} + 2$ é $(x_n) = (1, 4, 10, 22, 46, \cdots)$.

(ii) Através de uma expressão, que associa o termo x_n a cada número natural n.

Exemplo 4.2. A sequência $(x_n) = (5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17, \cdots)$ é representada pela expressão $x_n = 3n + 2$.

Observamos que uma mesma relação de recorrência pode gerar infinitas sequências distintas, basta informado o valor do primeiro termo. Portanto, para que uma sequência seja descrita numericamente, a partir de uma relação de recorrência, é necessário que sejam informados os primeiros termos da recorrência.

4.2.2 Classificação das Equações de Diferenças.

As equações de recorrências podem ser classificadas de acordo com a sua ordem, com a homogeneidade e linearidade.

Definição 4.2. A ordem n de uma recorrência é dada pela diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos de sua equação.

Exemplo 4.3. A equação $a_n = \dfrac{a_{n-3}}{a_{n-4}}$, com $n \geq 5$ representa uma recorrência de 4ª ordem, haja visto que a diferença $n - (n - 4) = 4$.

Definição 4.3. Uma recorrência é dita homogênea quando cada termo depende exclusivamente dos anteriores. Caso a recorrência, além de dependa dos termos anteriores, ela depende de um termo independente é dita não-homogênea.

Exemplo 4.4. A equação $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ representa uma recorrência homogênea, cada termo depende exclusivamente dos anteriores.

Exemplo 4.5. A equação $a_{n+1} = 3a_n + 1$ representa uma recorrência não-homogênea, ela tem o termo independente 1.

Definição 4.4. Uma equação de recorrência de ordem k é linear se estiver escrita na forma

$$a_{n+k} = f_1(n)a_{n+k-1} + f_2(n)a_{n+k-2} + \cdots + f_k(n)a_n + f_{k+1}(n), \tag{6}$$

onde $f_i(n)$ é uma função em n com $i \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq k + 1$, e ainda$f_k \neq 0$, caso contrário é não linear.

Definição 4.5. Se na equação (8), $f_{k+1}(n) = 0$, a equação é chamada homogênea, caso contrário, a equação é não homogênea ou completa.

Exemplo 4.6. $a_n = 5 \cdot a_{n-1}$ é uma equação linear homogênea de 1ª ordem;

Exemplo 4.7. $a_n = \cdot a_{n-1} - 10$ é uma equação linear não homogênea de 1ª ordem;

Exemplo 4.8. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ é uma equação homogênea não linear, de 2ª ordem;

Exemplo 4.9. $a_n = a_{n-3}$ é uma equação linear homogênea de 3ª ordem;

Exemplo 4.10. $a_n = 2 \cdot a_{n-1}^2 + 2$ é uma equação não linear não homogênea de 1ª ordem;

Definição 4.6. Resolver uma equação de recorrência é determinar uma expressão que permita encontrar cada termo a_n em função apenas de n. Essa expressão é a solução da recorrência.

A resolução das recorrências de 1ª e 2ª ordem serão tratadas nas seções posteriores.

4.3 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM.

Neste capítulo será feito o estudo das equações de diferenças lineares de primeira ordem, suas definições, seus teoremas com suas respectivas demonstrações, vai ser trabalhado a construção da solução geral das recorrências homogêneas e não homogêneas, a determinação de uma solução particular de uma recorrência não homogênea e paralelamente aos conteúdos abordados será resolvido alguns exemplos.

4.3.1 Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem.

Definição 4.7. Chamamos de Equações de Diferenças Lineares de primeira ordem a toda relação

$$a_{n+1} + u_n . a_n = R_n, \texttt{com } u_n, R_n \in \mathbb{R}, u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \cdot$$

Exemplo 4.11. A recorrência $a_{n+1} = 2a_n + 1$ é uma equação de diferença de 1ª ordem e linear.

Exemplo 4.12. A recorrência $a_{n+1} = 2{a_n}^2 + 1$ é uma equação de diferença de 1ª ordem e não é linear.

4.3.2 Equações de Diferenças Lineares Homogênea de Primeira Ordem.

Definição 4.8. A recorrência linear de primeira ordem

$$a_{n+1} + u_n . a_n = R_n, \ \texttt{com } u_n, R_n \in \mathbb{R}, \ u_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

é dita homogênea se o termo independente R_n=0. Assim sua forma é dada por

$$a_{n+1} + u_n . a_n = 0, \ \texttt{com } u_n \in \mathbb{R}, \ u_n \neq 0, n \in \mathbb{N} \cdot$$

Exemplo 4.13. Determine o termo geral da recorrência $a_{n+1} = 2a_n$, com $a_n, n \in \mathbb{N}$.

Resolução: Usando a relação $a_{n+1} = 2a_n$, *com* $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, variando os valores de n, temos

$$a_2 = 2 \cdot a_1;$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2;$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3;$$

$$\cdots$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1}.$$

Multiplicando as igualdades acima membro a membro, obtemos

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_n = (2.a_1) \cdot (2.a_2) \cdot (2.a_3) \cdot \cdots \cdot (2 \cdot a_1),$$

reorganizando a equação,

$$(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n-1}) \cdot a_n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n-1}), \texttt{com } n-1 \texttt{ termos } 2 \cdot$$

Dividindo os membros da equação por $(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n-1}) \neq 0$, segue que

$$a_n = 2^{n-1} \cdot a_1 \cdot$$

Como $a_1 \in \mathbb{R}$, podemos representar esse número por uma constante real C. Portanto, o termo geral da recorrência é

$$a_n = C \cdot 2^{n-1}, \ \texttt{com } C \texttt{ constante real}.$$

4.3.3 Equações de Diferenças Lineares Não-Homogênea de Primeira Ordem.

Definição 4.9. A recorrência linear de primeira ordem

$$a_{n+1} + u_n.a_n = R_n, \ \texttt{com } u_n, R_n \in \mathbb{R}, u_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

é dita não homogênea se o termo independente $R_n \neq 0$.

Exemplo 4.14. Determine o termo geral da recorrência $a_{n+1} = a_n + n$, com $a_n, n \in \mathbb{N}$

Resolução: Usando a relação $a_{n+1} = a_n + n$, com $a_n, n \in \mathbb{N}$, variando os valores de n, temos:

$$a_2 = a_1 + 1;$$

$$a_3 = a_2 + 2;$$

$$a_4 = a_3 + 3;$$

$$\cdots$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + n - 2;$$

$$a_n = a_{n-1} + n - 1.$$

Somando as igualdades acima membro a membro, e fazendo o cancelamento, quando possível, obtemos

$$a_n = a_1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 \cdot$$

A soma $1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1$ é a soma dos $n - 1$ números naturais, logo

$$a_n = a_1 + \frac{(1 + n - 1)(n - 1)}{2},$$

ou melhor,

$$a_n = a_1 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Como $a_1 \in \mathbb{R}$, podemos representar esse número por uma constante real C. Portanto,

$$a_n = C + \frac{n\,(n-1)}{2},$$

é o termo geral da recorrência.

Exemplo 4.15. Resolver a equação de diferença de 1ª ordem não homogênea $x_{n+1} = x_n + 2n$ e $x_1 = 1$.

Resolução: Usando a relação $x_{n+1} = x_n + 2n, x_1 = 1$, variando os valores de n, temos que,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 2 \cdot 1; \\ x_3 &= x_2 + 2 \cdot 2; \\ x_4 &= x_3 + 2 \cdot 3; \\ &\cdots \\ x_n &= x_{n-1} + 2\,(n-1) \end{aligned}$$

Somando as igualdades acima membro a membro, e fazendo o cancelamento, quando possível, obtemos

$$x_n = x_1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot (n-1)$$

Substituindo o valor de $x_1 = 1$, temos a equação

$$x_n = 1 + 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))$$

A soma $1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1$ é a soma dos primeiros $n-1$ números naturais, logo

$$x_n = 1 + 2\left(\frac{(1+n-1)\,(n-1)}{2}\right),$$

isto é,

$$x_n = n^2 - n + 1.$$

Portanto, $x_n = n^2 - n + 1$, com n natural, é a solução da equação a diferença dada.

4.3.4 Transformação da recorrência $\mathbf{x_{n+1} = g\,(n)\,x_n + h\,(n)}$ em $\mathbf{y_{n+1} = y_n + h\,(n)\,[g\,(n)\,a_n]^{-1}}$

O teorema a seguir mostra que podemos transformar qualquer recorrência linear de 1ª ordem não homogênea em uma recorrência da forma $y_{n+1} = y_n + f(n)$.

Teorema 4.1. Seja a_n uma solução não-nula da recorrência e $x_{n+1} = g(n)x_n$, com $g(n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em

$$y_{n+1} = y_n + h(n)\,[g(n) \cdot a_n]^{-1}.$$

Demonstração: Substituindo $x_n = a_n y_n$ em $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$, obtemos $a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n)$, como a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$, assim $a_{n+1} = g(n)a_n$. Daí a equação se transforma em $g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n)$, dividindo a equação por $g(n)a_n$, encontramos

$$y_{n+1} = y_n + h(n)\,[g(n) \cdot a_n]^{-1}.$$

$\blacksquare$

Exemplo 4.16. Resolver a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com $x_1 = 2$.

Resolução: Uma solução não-nula de $x_{n+1} = 2x_n$ é $a_n = 2^{n-1}$. Substituindo $x_n = 2^{n-1} \cdot y_n$, obtemos,

$$2^{n+1-1} \cdot y_{n+1} = 2 \cdot 2^{n-1} \cdot y_n + 1,$$

ou seja,

$$2^n \cdot y_{n+1} = 2^n \cdot y_n + 1.$$

Dividindo a equação por 2^n, segue que,

$$y_{n+1} = y_n + 2^{-n},$$

variando os valores de n, temos,

$$y_2 = y_1 + 2^{-1};$$
$$y_3 = y_2 + 2^{-2};$$
$$y_4 = y_3 + 2^{-3};$$
$$\cdots$$
$$y_n = y_{n-1} + 2^{-(n-1)}.$$

Somando as igualdades acima membro a membro, e fazendo o cancelamento, quando possível, obtemos,

$$y_n = y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-1)}$$

Como $x_n = 2^{n-1} \cdot y_n$ e $x_1 = 2$, perceba que,

$$x_1 = 2^{1-1} \cdot y_1,$$

$$x_1 = y_1 = 2.$$

Portanto,

$$y_n = 2 + 2^{-1} \cdot \frac{1 - \left(2^{-1}\right)^{(n-1)}}{1 - 2^{-1}} = 2 - 2^{1-n} + 1 = 3 - 2^{1-n}$$

Substituindo $y_n = 3 - 2^{1-n}$ em $x_n = 2^{n-1} \cdot y_n$ encontramos

$$x_n = 2^{n-1} \cdot \left(3 - 2^{1-n}\right) = 3 \cdot 2^{n-1} - 1.$$

Logo, a solução da recorrência é $x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$.

Exemplo 4.17. Determine a solução da recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$, onde $x_1 = 2$.

Resolução: Uma solução não-nula de $x_{n+1} = 3x_n$ é $a_n = 3^{n-1}$. Substituindo $x_n = 3^{n-1} \cdot y_n$, obtemos,

$$3^{n+1-1} \cdot y_{n+1} = 3 \cdot 3^{n-1} \cdot y_n + 3^n \Rightarrow 3^n \cdot y_{n+1} = 3^n \cdot y_n + 3^n \cdot$$

Dividindo a equação por 3^n, segue que,

$$y_{n+1} = y_n + 1\cdot$$

Para os valores de n, segue que,

$$y_2 = y_1 + 1;$$
$$y_3 = y_2 + 1;$$
$$y_4 = y_3 + 1;$$
$$\cdots$$
$$y_n = y_{n-1} + 1\cdot$$

Somando as igualdades acima membro a membro, e fazendo o cancelamento, quando possível, obtemos

$$y_n = y_1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1,$$

com $n - 1$ termos 1.

Como $x_n = 3^{n-1} \cdot y_n$ e $x_1 = 2$, temos que,

$$x_1 = y_1 = 2\cdot$$

Portanto, $y_n = 2 + (n - 1) = n + 1\cdot$

Substituindo $y_n = n + 1$ em $x_n = 3^{n-1} \cdot y_n$ encontramos a solução da equação da diferença

$$x_n = (n + 1) \cdot 3^{n-1}\cdot$$

Agora vamos explanar sobre equações da diferença com coeficientes constantes.

4.3.5 Recorrências Lineares de 1ª Ordem com Coeficientes Constantes

Teorema 4.2. Se a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n), \forall\ n \in \mathbb{N}$ admite $g(n) = 1$ e $h(n) = b \neq 0$ a sequência é uma PA de razão b, seu termo geral é dado por $x_n = x_1 + (n - 1) \cdot b,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Perceba que como $g(n) = 1$ e $h(n) = b \neq 0$, a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$, com $g(n)$, $h(n) \in \mathbb{R}$ é da forma $x_{n+1} = x_n + b, \forall\ n \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, assim

$$x_2 = x_1 + b;$$
$$x_3 = x_2 + b;$$
$$x_4 = x_3 + b;$$
$$\cdots$$
$$x_n = x_{n-1} + b\cdot$$

Somando as igualdades acima, membro a membro, e fazendo o cancelamento, quando possível, obtemos,

$$x_n = x_1 + b + b + b + \cdots + b + b,$$

com $n - 1$ termos $b \in \mathbb{R}$. Deste modo,

$$x_n = x_1 + (n - 1) \cdot b.$$

$\blacksquare$

Obs.: Se a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n), \forall n \in \mathbb{N}$ admite $g(n) = 1$ e $h(n) = 0$ a sequência é uma PA constante, seu termo geral é dado por $x_n = x_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Com efeito como $g(n) = 1$ e $h(n) = 0$ a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ é da forma $x_{n+1} = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, assim:

$$x_2 = x_1$$
$$x_3 = x_2$$
$$x_4 = x_3$$
$$\cdots$$
$$x_n = x_{n-1}\cdot$$

Somando as igualdades acima membro a membro, e fazendo o cancelamento, quando possível, obtemos

$$x_n = x_1\cdot$$

$\blacksquare$

Teorema 4.3. Se a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n), \forall n \in \mathbb{N}$ admite $g(n) = a \neq 1$ e $h(n) = 0$ a sequência é uma PG de razão a e seu termo geral é dado por $x_n = x_1^{\cdot a_{n-1}}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}\cdot$

Demonstração: Como $g(n) = q \neq 1$ e $h(n) = 0$ a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ é da forma $x_{n+1} = qx_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Variando os valores de n, temos:

$$x_2 = qx_1$$
$$x_3 = qx_2$$
$$x_4 = qx_3$$
$$\cdots$$
$$x_n = qx_{n-1}\cdot$$

Multiplicando as igualdades acima membro a membro, e fazendo o cancelamento, quando possível, obtemos

$$x_n = x_1 \cdot q\cdot q\cdot q \cdots q, \text{ com } n-1 \text{ termos } q\cdot$$

Portanto,

$$x_n = x_1\cdot q^{n-1}\cdot$$

$\blacksquare$

Exemplo 4.18. Resolva a recorrência $X_{n+1} = \frac{1}{2}.X_n\ \forall n\ \in \mathbb{N}$, com $X_1 = 1$.

Resolução Observamos que a equação de diferença de primeira ordem é a sequência numérica $(X_n) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right\}$, os elementos são as frações do Deus Horós, a sequência é uma PG, logo seu termo geral é dado por $X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4.4 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM.

Agora será feito o estudo das equações de diferenças lineares de segunda ordem, suas definições, seus teoremas com suas respectivas demonstrações, será construída a solução geral das recorrências homogêneas e não homogêneas, como obter a equação característica, e como determinar uma solução particular de uma recorrência não homogênea por tentativa e paralelamente vai ser resolvido exemplos dos conteúdos apresentados.

4.4.1 Equações de Diferenças Lineares de Segunda Ordem.

Definição 4.10. Uma recorrência linear é dita de segunda ordem quando cada termo definido pela equação de recorrência depende dos dois termos imediatamente anteriores a ele.

Uma recorrência linear de segunda ordem é dada por:

$$a_{n+2} + g(n).a_{n+1} + p(n).a_n = h(n),\ \text{com } g(n), p(n) \text{ e } h(n) \in \mathbb{R},\ p(n) \neq 0, \forall\ n \in \mathbb{N}\cdot$$

Caso $h(n) = 0$, então a recorrência é homogênea, e se $h(n) \neq 0$ então ela é dita não-homogênea.

Exemplo 4.19. A recorrência $a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0$ é de segunda ordem, linear e homogênea.

Exemplo 4.20. A recorrência $a_{n+2} + 2a_{n+1} + {a_n}^2 = 2^n$ é de segunda ordem, não linear e não homogênea.

Exemplo 4.21. $a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = 0$ é uma equação de diferença de segunda ordem homogênea.

Exemplo 4.22. $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = n + 3^n$ é uma equação de diferença de segunda ordem não homogênea.

4.4.2 Equações de Diferenças Lineares Homogênea de segunda Ordem.

Definição 4.11. Se a recorrência $a_{n+2} + g(n) \cdot a_{n+1} + p(n) \cdot a_n = 0$, com $g(n), p(n) \in \mathbb{R},\ p(n) \neq 0, n \in \mathbb{N}$, tiver as funções $g(n)$ e $p(n)$ constantes reais, respectivamente, p e q, ela terá a forma:

$$a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n = 0,\ \text{com } p, q \in \mathbb{R},\ q \neq 0, n \in \mathbb{N}\cdot$$

A cada equação dessa forma associa uma equação do 2º grau, denominada de equação característica. $r^2 + p.r + q = 0$, com $p, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.4. Se as raízes de $r^2 + p \cdot r + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes.

Demonstração: Considere u_1 e u_2 soluções da equação $r^2 + p \cdot r + q = 0$, no qual $-p = r_1 + r_2$ e $q = r_1 \cdot r_2$, deste modo,

$$r^2 - (r_1 + r_2) \cdot r + r_1 \cdot r_2 = 0\cdot$$

Como $r_1 \neq r_2$, podemos então dizer que essa é a equação característica da recorrência,

$$a_{n+2} - (r_1 + r_2) \cdot a_{n+1} + r_1 \cdot r_2 \cdot a_n = 0,$$

o que equivale a,

$$a_{n+2} - r_1 \cdot a_{n+1} = r_2 \cdot (a_{n+1} - r_1 \cdot a_n) \cdot$$

Definindo $y_{n+1} = a_{n+1} - r_1 \cdot a_n$, teremos:

$$a_{n+2} - r_1 \cdot a_{n+1} = r_2 \cdot (a_{n+1} - r_1 \cdot a_n)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = r_2 \cdot y_n.$$

Resolvendo a recorrência $y_{n+1} = r_2 \cdot y_n$, temos a solução

$$y_{n+1} = {r_2}^n \cdot y_1,$$

assim,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= {r_2}^n \cdot y_1 \\ \Rightarrow a_n - r_1 \cdot a_0 &= {r_2}^{n-1} . (a_1 - r_1 \cdot a_0) . \end{aligned}$$

De modo análogo temos que

$$a_n - r_2 \cdot a_0 = {r_1}^{n-1} \cdot (a_1 - r_2 \cdot a_0) .$$

Assim obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a_n - r_1 . a_0 = {r_2}^{n-1} \cdot (a_1 - r_1 \cdot a_0) \\ a_n - r_2 \cdot a_0 = {r_1}^{n-1} \cdot (a_1 - r_2 \cdot a_0) \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por r_2 e a segunda por r_1, subtraindo a segunda equação da primeira e fazendo os cancelamentos quando possível, temos:

$$\begin{cases} r_2 \cdot a_n - r_2 \cdot r_1 \cdot a_0 = {r_2}^n \cdot (a_1 - r_1 \cdot a_0) \\ r_1 \cdot a_n - r_1 \cdot r_2 \cdot a_0 = {r_1}^n \cdot (a_1 - r_2 \cdot a_0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (r_1 - r_2) \cdot a_n &= {r_1}^n . (a_1 - r_2 \cdot a_0) - {r_2}^n \cdot (a_1 - r_1 \cdot a_0) \Leftrightarrow \\ a_n &= {r_1}^n . \frac{(a_1 - r_2 \cdot a_0)}{(r_1 - r_2)} - {r_2}^n \cdot \frac{(a_1 - r_1 \cdot a_0)}{(r_1 - r_2)} \Leftrightarrow \\ a_n &= {r_1}^n \cdot \frac{(a_1 - r_2 \cdot a_0)}{(r_1 - r_2)} + {r_2}^n \cdot \frac{(a_1 - r_1 \cdot a_0)}{(r_2 - r_1)} . \end{aligned}$$

Tomando $C_1 = \dfrac{(a_1 - r_2 \cdot a_0)}{(r_1 - r_2)}$ e $C_2 = \dfrac{(a_1 - r_1 . a_0)}{(r_2 - r_1)}$, constantes reais, obtemos $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes reais.

Portanto, se as raízes da equação característica da recorrência homogênea $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$ são $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes.

$\blacksquare$

Exemplo 4.23. Havia uma bancada com 10 lâmpadas. Cada uma delas podendo estar ligada ou desligada. De quantas maneiras podem estar as lâmpadas, sendo que não pode haver lâmpadas adjacentes ligadas?

Resolução: Inicialmente generalizamos a situação para uma bancada com n lâmpadas. Chamamos de x_n a solução do problema, com n natural.

Dividimos o problema em dois casos. No primeiro, consideramos que a primeira lâmpada está ligada. Como não pode haver duas lâmpadas adjacentes ligadas então a segunda não pode estar ligada, não existindo restrição quanto a terceira lâmpada, assim x_{n-2} possibilidades. Já no segundo caso consideramos que a primeira lâmpada está desligada, assim, a segunda não possui restrição, tendo então x_{n-1}.

Dessa forma, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Não encontramos um fórmula fechada que dê a solução do problema, encontramos uma equação de recorrência linear homogênea de segunda ordem.

Com esta ideia descrevemos o problema em termos de resolver uma equação de recorrência.

Note que é necessário conhecer os dois termos antecessores da sequência e, portanto, a relação só será válida para $n \geq 3$. Faz-se necessário o estudo de caso para $n = 1$ e $n = 2$, independentes.

No caso $n = 1$, temos duas possibilidades. São elas,

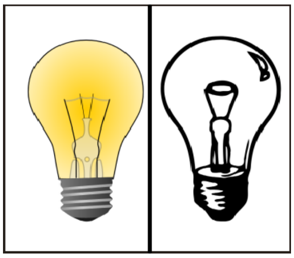

Figura 8: UMA LÂMPADA

com isso, $x_1 = 2$.

No caso $n = 2$, temos três possibilidades. São elas,

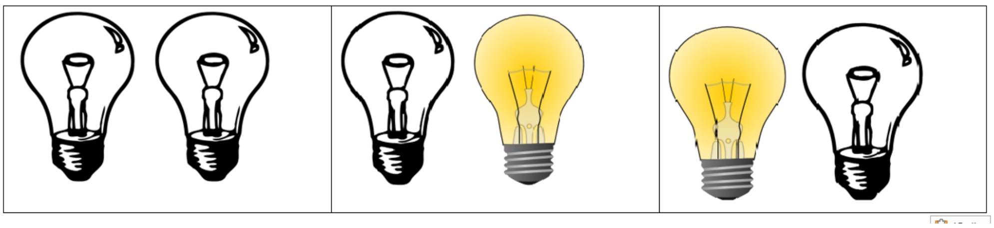

Figura 9: DUAS LÂMPADAS

E naturalmente $x_2 = 3$.

Visto que o problema quer saber de quantas maneiras podem estar as lâmpadas em uma bancada de 10 lâmpadas, não há necessidade de resolver a recorrência linear homogênea de segunda ordem, basta adicionar dois termos anteriores na determinação de um novo termos da sequência numérica, aplicando esse raciocínio temos que $x_{10} = 144$.

Note que, aumentando a quantidade de lâmpadas, o problema se torna mais complexo, dessa forma é melhor resolver a equação de diferença linear homogênea, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, de condições iniciais $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

Exemplo 4.24. Verifique se $x_n = 3^{n-1} \cdot (3-n)$ é solução da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0,\ n \in \mathbb{Z}_+$.

Resolução: A priori, substitua, $x_n = 3^{n-1} \cdot (3-n)$ na recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$ e fazendo simplificações necessárias, obtemos:

$$\begin{aligned} 3^{n+2-1} \cdot [3-(n+2)] - 6 \cdot \left\{3^{n+1-1} \cdot [3-(n+1)]\right\} + 9 \cdot \left[3^{n-1} \cdot (3-n)\right] \\ = 3^{n+1} \cdot (1-n) - 6 \cdot [3^n \cdot (2-n)] + 9 \cdot \left[3^{n-1} \cdot (3-n)\right] \\ = 3^n \cdot [3 \cdot (1-n) - 6 \cdot (2-n) + 3 \cdot (3-n)] \\ = 3^n \cdot [3 - 3n - 12 + 6n + 9 - 3n] = 0. \end{aligned}$$

Logo, $x_n = 3^{n-1} \cdot (3-n)$ é solução da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0, n \in \mathbb{Z}_+^*$.

Exemplo 4.25. Determine a solução da recorrência $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$

Resolução: Note que, a equação característica da recorrência homogênea $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$ é $r^2 + 3r - 4 = 0$, determinando as raízes da equação obtemos que $r_1 = -4$ e $r_2 = 1$, como $r_1 \neq r_2$, temos que $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes.

Substituindo as raízes $r_1 = -4$ e $r_2 = 1$ em x_n obtemos

$$x_n = C_1 (-4)^n + C_2 1^n.$$

Portanto, a solução geral da recorrência é $x_n = C_1 (-4)^n + C_2$, com C_1 e C_2 constantes reais.

Exemplo 4.26. Determine a solução da recorrência $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$, sabendo que $x_0 = 3$ e $x_1 = -6$.

Resolução: A equação característica da recorrência homogênea $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$ é $r^2 + 5r + 6 = 0$, determinando as raízes da equação obtemos que $r_1 = -3$ e $r_2 = -2$. Como $r_1 \neq r_2$, temos que, $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes reais.

Substituindo as raízes $r_1 = -3$ e $r_2 = -2$ em x_n obtemos

$$x_n = C_1 (-3)^n + C_2 (-2)^n, \text{ com } C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes reais.}$$

Como $x_0 = 3$ e $x_1 = -6$, temos o sistema:

$$\begin{cases} C_1 (-3)^0 + C_2 (-2)^0 = 3 \\ C_1 (-3)^1 + C_2 (-2)^1 = -6 \end{cases},$$

Cuja a solução do sistema resulta em $C_1 = 0$ e $C_2 = 3$.

Substituindo $C_1 = 0$ e $C_2 = 3$ em x_n, temos

$$x_n = 0 \cdot (-3)^n + 3\,(-2)^n = 3\,(-2)^n\,.$$

Portanto, a solução geral da recorrência é $x_n = 3\,(-2)^n$, com n natural.

Teorema 4.5. Se as raízes da equação característica, $r^2 + p \cdot r + q = 0$ são números complexos r_1 e r_2, então todas as soluções da recorrência $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$ são da forma $x_n = \rho^n \cdot [C_1' \cos(n\theta) + C_2' \operatorname{sen}(n\theta)]$, com C_1 e C_2 constantes.

Demonstração: Sejam r_1 e r_2 raízes complexas da equação característica. Elas são números complexos conjugados. Sendo assim, $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$. De acordo com [4], escrevendo essas raízes na forma trigonométrica, teremos:

$$r_1 = \rho(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)\mathrm{e} r_2 = \rho(\cos\theta - i\mathrm{sen}\theta), \mathrm{onde}\rho = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}\cdot$$

Na forma trigonométrica ρ é o módulo do número complexo e θ é o argumento tal que $\cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ e $\mathrm{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho}$.

Por [4], perante a potência de um número complexo, pela fórmula de Moivre, assume a forma:

$${r_1}^n = \rho^n\,(\cos(n\theta) + i\ \mathrm{sen}\,(n\theta))$$

e

$${r_2}^n = \rho^n\,(\cos(n\theta) - i\ \mathrm{sen}\,(n\theta))\cdot$$

Sendo $r_1 \neq r_2$ temos que $x_n = C_1{r_1}^n + C_2{r_2}^n = \rho^n \cdot [(C_1 + C_2)\cos(n\theta) + i(C_1 - C_2)\ \mathrm{sen}(n\theta)]$, com $n \in \mathbb{N}$.

Fazendo $(C_1 + C_2)$ e $i(C_1 - C_2)$ as novas constantes arbitrárias, ${C_1}'$ e ${C_2}'$ respectivamente, a solução pode ser escrita da forma:

$$x_n = \rho^n \cdot [C_1' \cos(n\theta) + C_2'\ \mathrm{sen}(n\theta)] n \in \mathbb{N}\cdot$$

$\blacksquare$

Exemplo 4.27. Encontrar a solução da recorrência $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, quando $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, com $n \in \mathbb{N}$.

Resolução: A equação característica da recorrência homogênea $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$ é $x^2 - 2x + 2 = 0$, determinando as raízes da equação obtemos que $r_1 = 1\ +\ i$ e $r_2 = 1\ -\ i$, como r_1 e r_2, são números complexos de módulo $\rho = \sqrt{2}$ e argumento principal $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Logo, a solução da recorrência é da forma $x_n = \rho^{\ n} \cdot [C_1 \cos(n\theta) + C_2\mathrm{sen}(n\theta)]$, com C_1 e C_2 constantes reais.

Portanto, a solução é a equação

$$x_n = \sqrt{2}^n \cdot \left(C_1 \cos\frac{n\pi}{4} + C_2\mathrm{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\cdot$$

Como $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$, temos o sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot \left(C_1 \cos \frac{\pi}{4} + C_2 \text{sen} \frac{\pi}{4} \right) = 1 \\ 2 \cdot \left(C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \text{sen} \frac{\pi}{2} \right) = 2 \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2 \cdot C_2 = 2 \end{cases}$$

Conclui-se, $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$, e $x_n = \sqrt{2}^n \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$ é a solução procurada.

Teorema 4.6. Se as raízes de $r^2 + p \cdot r + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 = r_2$, então todas as soluções da recorrência $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + nC_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes.

Demonstração: Analogamente ao que fizemos anteriormente, a equação característica $r^2 + p \cdot r + q = 0, -p = r_1 + r_2$ e $q = r_1 \cdot r_2$, toma a forma:

$$r^2 - (r_1 + r_2) \cdot r + r_1 \cdot r_2 = 0.$$

Como $r_1 = r_2$, $r^2 - 2r_1 \cdot r + {r_1}^2 = 0$, podemos então dizer que essa é a equação característica da recorrência

$$a_{n+2} - 2r_1 \cdot a_{n+1} + {r_1}^2 \cdot a_n = 0,$$

ou

$$a_{n+2} - r_1 \cdot a_{n+1} = r_1 \cdot (a_{n+1} - r_1 \cdot a_n).$$

Definindo $y_{n+1} = a_{n+1} - r_1 \cdot a_n$, teremos,

$$y_{n+1} = r_1 \cdot y_n.$$

Resolvendo a recorrência $y_{n+1} = r_1 \cdot y_n$, temos a solução

$$y_n = {r_1}^n \cdot y_1 \Rightarrow a_n - r_1 \cdot a_{n-1} = (a_1 - r_1 \cdot a_0) \cdot {r_1}^{n-1}.$$

Definindo outra sequência (z_n) de modo que $a_n = r_1^n z_n$, obtemos da última equação:

$$r_1^n z_n - r_1^n z_{n-1} = (r_1 \cdot z_1 - r_1 \cdot z_0) \cdot r_1^{n-1} \Rightarrow z_n - z_{n-1} = z_1 - z_0$$

Como, $z_n - z_{n-1} = z_1 - z_0$ caracteriza uma PA de razão $z_1 - z_0$. Daí, $z_n = z_0 + n\,(z_1 - z_0)$. E portanto,

$$z_n = z_0 + n\,(z_1 - z_0) \Rightarrow \frac{a_n}{r_1^n} = a_0 + n. \left(\frac{a_1}{r_1} - a_0 \right) \Rightarrow a_n = a_0 \cdot r_1^n + n \cdot \left(\frac{a_1}{r_1} - a_0 \right) \cdot r_1^n$$

Tomando $a_0 = C_1$ e $\frac{a_1}{r_1} - a_0 = C_2$, temos $a_n = C_1 r_1^n + nC_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes.

Portanto, se as raízes da equação característica da recorrência homogênea $a_{n+2}+p.a_{n+1}+q.a_n = 0$ são $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, com $r_1 = r_2$, então todas as soluções são da forma $a_n = C_1 r_1^n + nC_2 r_1^n$, com C_1 e C_2 constantes.

■

4.4.3 Equações de Diferenças Lineares Não-Homogênea de Segunda Ordem.

Definição 4.12. Se a recorrência $a_{n+2} + g(n) \cdot a_{n+1} + p(n) \cdot a_n = f(n)$, com $g(n), p(n) \in \mathbb{R}, p(n) \neq 0, n \in \mathbb{N}$ com$f(n)$ uma função não nula, tiver as funções $g(n)$ e $p(n)$ constantes reais, respectivamente, p e q, ela terá a forma:

$$a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = f(n), \text{com } p, q \in \mathbb{R}, q \neq 0, n \in \mathbb{N} \text{ e } f(n) \neq 0\cdot$$

Na determinação da solução dessa recorrência enunciaremos um teorema encontrado em [6] e [9] que mostra um processo para resolver equações dessa forma.

Teorema 2.5. Se x_n é uma solução da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$, então fazendo a substituição $a_n = x_n + h_n$, onde h_n é a solução da equação homogênea de a_n , teremos a recorrência homogênea $h_{n+2} + ph_{n+1} + qh_n = 0$.

Demonstração: Inicialmente, substituindo a_n por $x_n + h_n$ na recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$, obtemos,

$$x_{n+2} + h_{n+2} + p\,(x_{n+1} + h_{n+1}) + q\,(x_n + h_n) = f(n)$$
$$x_{n+2} + h_{n+2} + px_{n+1} + ph_{n+1} + qx_n + qh_n = f(n)$$
$$(x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n) + (h_{n+2} + ph_{n+1} + qh_n) = f(n)\cdot$$

Como x_n é uma solução de $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$, isso implica que

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)\cdot$$

Dessa forma, a equação $f(n) + h_{n+2} + ph_{n+1} + qh_n = f(n)$, isto é, $h_{n+2} + ph_{n+1} + qh_n = 0$.

Portanto, essa solução dada no enunciado do teorema como x_n é então $x_n = a_n - h_n$, h_n é a solução da homogênea e a_n da não homogênea.

■

Exemplo 4.28. Resolver a equação de recorrência: $a_{n+2} - 5a_{n+1} - 6a_n = n + 3^n$.

Resolução: Sendo a recorrência não homogênea, sua solução é da forma $a_n = x_n + h_n$, onde a_n é a solução da parte homogênea da recorrência e h_n é uma solução particular.

Na determinação da solução da recorrência homogênea x_n temos que a equação característica da parte homogênea é $x^2 - 5x - 6 = 0$ resolvendo essa equação temos que $r_1 = -1$ e $r_2 = 6$. Como $r_1 \neq r_2$, a solução da parte homogênea da recorrência é

$$x_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 6^n, \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Determinaremos uma solução particular h_n dá recorrência por coeficientes a determinar. Supondo que $h_n = Cn + D + E \cdot 3^n$, substituímos h_n em $x_{n+2} - 5x_{n+1} - 6x_n = n + 3^n$, obtemos:

$$C(n+2) + D + E \cdot 3^{n+2} - 5 \cdot (C(n+1) + D + E \cdot 3^{n+1}) - 6 \cdot (Cn + D + E \cdot 3^n) = n + 3^n,$$

isto é,

$$-10Cn - 3C - 10D - 12E \cdot 3^n = n + 3^n \cdot$$

Com isso, temos $C = -\dfrac{1}{10}$, naturalmente $D = \dfrac{3}{100}$ e $E = -\dfrac{1}{12}$.

Conclui-se que, $h_n = -\dfrac{n}{10} + \dfrac{3}{100} - \dfrac{3^n}{12}$, como desejávamos.

Portanto, a solução da recorrência dada é $x_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 6n - \dfrac{n}{10} + \dfrac{3}{100} - \dfrac{3^n}{12}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.29 Apresentar uma equação para o termo geral da sequência definida por $x_{n+2} = 2x_n + 5$, onde $x_0 = 3$ e $x_1 = 7$.

Resolução: Mais uma vez, sendo a recorrência não homogênea, sua solução admite a forma $x_n = a_n + h_n$, onde a_n é a solução da parte homogênea da recorrência e h_n é uma solução particular.

Na determinação de a_n, temos que a equação característica da parte homogênea é $x^2 - 2 = 0$ resolvendo essa equação temos que $r_1 = \sqrt{2}$ e $r_2 = -\sqrt{2}$. Como $r_1 \neq r_2$, a solução da parte homogênea da recorrência é

$$a_n = c_1 \cdot \sqrt{2}^n + c_2 \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^n, \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \cdot$$

Determinando a solução particular h_n dá recorrência, por coeficiente a determinar, suponha que $h_n = C$, substitua h_n em $x_{n+2} - 2x_n = 5$, que resulta em $C - 2C = 5$, ou seja, $C = -5$, logo $h_n = -5, \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Assim, a solução da recorrência dada é

$$x_n = c_1 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^n - 5, \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \cdot$$

Sendo $x_0 = 3$ e $x_1 = 7$, substituindo em $x_n = c_1 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^n - 5$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, encontramos o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 8 \\ c_1 \cdot \sqrt{2} - c_2 \cdot \sqrt{2} = 12 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $\sqrt{2}$, somando as equações e simplificando quando possível, temos $c_1 = 4 + 3\sqrt{2}$ e $c_2 = 4 - 3\sqrt{2}$.

Portanto, a solução da recorrência dada é

$$x_n = \left(4 + 3\sqrt{2}\right) \cdot (\sqrt{2})^n + \left(4 - 3\sqrt{2}\right) \cdot (-1)^n \cdot (\sqrt{2})^n - 5, \ \texttt{com}\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \cdot$$

5 QUESTÕES CLÁSSICAS DE RECORRÊNCIA.

As questões clássicas de recorrência são de suma importância histórica. Esses problemas auxiliam na resolução de outros fenômenos das ciências naturais em suas soluções fechadas são instrumentos de aplicações na sociedade.

Esse capítulo foi baseado nas referências [1], [2], [3], [7], [8], [10] e [14].

5.1 A Sequência de Fibonacci

Como visto no início do capítulo 4, quando se trata de sequências recursivas, o exemplo mais famoso é o problema do casal de coelhos proposto por Fibonacci em seu livro Liber Abaci escrito em 1202.

O enunciado do fenômeno, descreve o seguinte:

“Um homem pôs um par (casal) de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro de todos os lados. Quantos pares (casais) de coelhos podem ser gerados a partir desse par em 12 períodos, se em todo período cada par gera um novo par (casal) de filhotes que se tornam adultos e férteis a partir do segundo período de vida?”

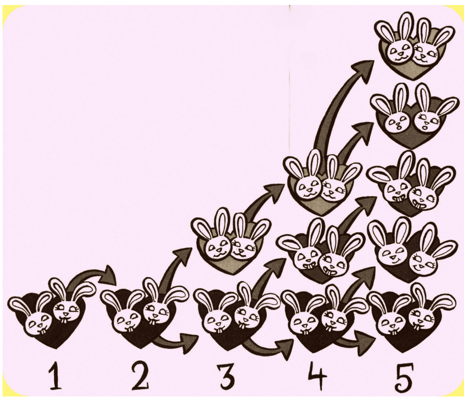

Figura 10: COELHOS DE FIBONACCI

Resolução: Inicialmente iremos considerar que os coelhos não morrem, assim tomando n o número de meses, com $n \in \mathbb{N}$ e F_n o número de casais, sabendo também que cada casal se torna produtivo depois de dois meses do nascimento,

Logo, serão produzidos 144 pares de coelhos em um ano.

Observemos a tabela (1) vemos que, à partir do terceiro mês, o número de casais é a soma do número de casais dos dois meses anteriores, formando assim a sequência

$$(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots),$$

chamada de sequência de Fibonacci.

Ao longo dos séculos verificou-se que essa sequência possui propriedades belas e significativas. Conforme [3], esta notável sequência se aplica também a questões de lotaxia e crescimento orgânico.

Número de meses (n)	**Casais com um mês**	**Casais com dois meses**	**Casais com mais** de dois meses	**Números de casais ($\mathbf{F_n}$)**
01	1	0	0	1
02	0	1	0	1
03	1	0	1	2
04	1	1	1	3
05	2	1	2	5
06	3	2	3	8
07	5	3	5	13
08	8	5	8	21
09	13	8	13	34
10	21	13	21	55
11	34	21	34	89
12	55	34	55	144

Tabela 1: A Sequência de Fibonacci.

Assim é possível expressar F_n em função de seus termos anteriores, observamos que na relação de recorrência de (F_n) um elemento, a partir do terceiro elemento, é dado pela soma dos dois números anteriores. Logo, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ que é uma equação da diferença linear homogênea de segunda ordem .

Tomando $n \in \mathbb{N}$, escrevemos a recorrência acima como $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com condição inicial $F_1 = F_2 = 1$

Reescrevendo a sequência de Fibonacci $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, vemos que ela é uma recorrência homogênea, assim sua equação característica é $r^2 - r - 1 = 0$, determinando as raízes da equação obtemos que $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, como $r_1 \neq r_2$, temos que $F_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes reais, a solução geral.

Substituindo as raízes $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ em F_n obtemos

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \text{com } C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes reais}\cdot$$

Como $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, temos o sistema:

$$\begin{cases} C_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \\ C_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases},$$

ou ainda

$$\begin{cases} C_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ C_1 \left(\dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{2}\right) + C_2 \left(\dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema segue que $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Substituindo $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ em F_n, temos, a solução geral da recorrência dada por

$$F_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1\ +\ \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1\ -\ \sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ \text{com}\ n\ \in\ \mathbb{N}$$

Segundo [8] somente em 1843, ou seja, mais de seiscentos anos depois da divulgação do problema Jacques Binet [2] alcançou tal feito, concluindo que o enésimo número de Fibonacci é dado por $F_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, com n natural, essa fórmula é conhecida como fórmula de Binet.

O que torna a sequência de Fibonacci importante são suas aplicações e os locais improváveis que ela possa está, encontramos a sequência na natureza, com a espiral de Fibonacci, na razão áurea, no triângulo de Pascal, na geometria temos o triangulo áureo, o retângulo de ouro e em aplicações na análise de mercados financeiros, na ciência da computação e na teoria dos jogos, aparecendo também em configurações biológicas, como na disposição dos galhos das árvores ou das folhas em uma haste, no arranjo do cone do abacaxi ou no desenrolar da samambaia, como mostra [14].

5.2 A Torre de Hanói

De acordo com [10] a Torre de Hanói é um jogo inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1882. O jogo consiste em três eixos verticais e discos de diâmetros diferentes, onde em um dos eixos está alocado uma torre formada por alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo.

O objetivo do jogo é mover a pilha de discos do eixo inicial para outro, usando para isso o menor número de movimentos possível, a partir das seguintes regras:

(i) Mover apenas um disco por vez.

(ii) Um disco com diâmetro maior nunca pode ficar sobre um disco com diâmetro menor.

Èdouard [3] elaborou para seu invento a seguinte lenda curiosa:

"No começo dos tempos, Deus criou a Torre de Brahma, que contém três hastes de diamante, e colocou na primeira haste 64 discos de ouro maciço. Deus chamou seus sacerdotes e ordenou-lhes que transferissem todos os discos para a terceira haste, seguindo as regras acima descritas. Os sacerdotes, então, obedeceram e começaram o trabalho de remoção dos discos, dia e noite.

[2]Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) foi um matemático , físico e astrônomo francês. Ele fez contribuições significativas para a teoria dos números e os fundamentos matemáticos da álgebra de matrizes que mais tarde levariam a importantes contribuições de Cayley e outros.

[3]François Édouard Anatole Lucas (Amiens, 4 de abril de 1842 — Paris, 3 de outubro de 1891) foi um matemático francês. Foi o criador do jogo matemático Torre de Hanoi. A sequência de Lucas e os números de Lucas são denominados em sua memória. É também o autor do teorema de Lucas.

Segundo Deus, quando eles terminarem o trabalho, a Torre de Brahma irá ruir e o mundo acabará…"

Resolução: Enumerando os eixos, da direita para a esquerda como I, II e III, conforme a figura 11, e que no jogo se mova a pilha de discos de I para III. Supondo n o número de discos e D_n o número de movimentos, com $n \in \mathbb{N}$, observemos que:

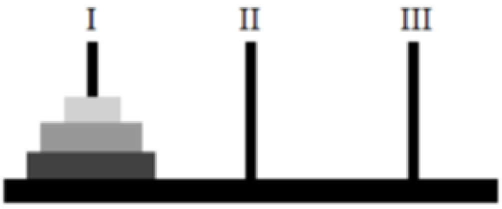

Figura 11: TORRE DE HANÓI

Para $n = 1$ o número de movimentos é $D_1 = 1$. Ou seja, para mover um disco do eixo I para o eixo III basta apenas um único movimento.

Para $n = 2$, o número de movimentos é $D_2 = 3$. Ou seja, para mover dois discos do eixo I para o eixo III temos que mover o disco menor para o eixo II, mover o disco maior para o eixo III e novamente mover o disco menor para sobre o disco maior, totalizando três movimentos.

Para $n = 3$, o número de movimentos é $D_3 = 7$. Ou seja, para mover três discos do eixo I para o eixo III temos que mover o disco menor para o eixo III, mover o disco intermediário para o eixo II, novamente mover o disco menor para sobre o disco intermediário, mover agora o disco maior para o eixo III, mover o disco menor para o eixo I, mover o disco intermediário para sobre o disco maior e mover agora o disco menor sobre o disco intermediário, totalizando 7 movimentos.

Assim é possível expressar D_n em função de D_{n-1}, observamos que se temos n discos no eixo I, sabemos que precisamos mover $n-1$ discos para o eixo central usando D_{n-1} movimentos.

Depois, movemos o disco maior para o eixo III e logo após, procedemos a movimentação dos $n-1$ discos do eixo II para o eixo III, usando novamente os D_{n-1}. Logo, movemos os n discos usando $D_{n-1} + D_{n-1} + 1$ movimentos.

Portanto, $D_n = 2 \cdot D_{n-1} + 1$, onde D_n é o número de movimentos necessários para mover os n discos da Torre de Hanói.

Como $D_n = 2 \cdot D_{n-1} + 1$ é uma recorrência linear de 1ª ordem não homogênea, resolvendo temos:

Uma solução não-nula de $D_n = 2 \cdot D_{n-1}$ é $a_n = 2^{n-1}$. Substituição $D_n = 2^{n-1} \cdot y_n$, obtemos

$$\begin{aligned} 2^{n-1} \cdot y_n &= 2 \cdot 2^{n-2} \cdot y_{n-1} + 1 \\ 2^{n-1} \cdot y_n &= 2^{n-1} \cdot y_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

Dividindo a equação por 2^{n-1}, segue que

$$y_n = y_{n-1} + 2^{1-n},$$

variando os valores de n, temos:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + 2^0;\\
y_2 &= y_1 + 2^{-1};\\
y_3 &= y_2 + 2^{-2};\\
y_4 &= y_3 + 2^{-3};\\
&\dots\\
y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)}.
\end{aligned}
$$

Somando as igualdades acima membro a membro, e fazendo o cancelamento, quando possível, obtemos:

$$y_n = y_0 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-1)}$$

Como $D_n = 2^{n-1} \cdot y_n$ e $D_0 = 0$, encontramos que

$$D_0 = y_0 = 0$$

Portanto, $y_n = 0 + 2^0 + 2^{-1} \cdot \dfrac{1 - \left(2^{-1}\right)^{(n-1)}}{1 - 2^{-1}} = 1 - 2^{1-n} + 1 = 2 - 2^{1-n}$.

Substituindo $y_n \;=\; 2 - 2^{1-n}$ em $D_n = 2^{n-1}.y_n$ encontramos que a solução geral da recorrência é dada por

$$D_n = 2^{n-1} \cdot \left(2 - 2^{1-n}\right) = 2^n - 1.$$

Portanto, para mover n discos da Torre de Hanói de um eixo para outro são necessários $2^n - 1$ movimentos.

A Torre de Hanói é um excelente recurso para desenvolver as competências e defasagens cognitivas do educando, ela quebra os paradigmas existente na educação básica, e leva ao aluno a real forma de aplicar a matemática mostrando que ela não é um simples instrumento para fazer contas e sim um aliado na construção de padrões a partir de situações do cotidiano.

5.3 Os Números Figurados.

Os números figurados, são exemplos de progressões aritméticas de várias ordens, esses números se originaram através dos membros da escola pitagórica em aproximadamente 600 a. C..

De acordo com [7], o celebre Pitágoras pede a alguém que conte. Quando a pessoa conta “1, 2, 3, 4”, Pitágoras o interrompe e diz: “Você entende? O que toma por 4 é 10, um triângulo perfeito é nosso juramento.”

Pitágoras em sua fala diz que 4 é o 10 que é quarto número triangular, exemplos de números figurados os números poligonais, definidos a seguir.

Definição 5.1 Chama-se número poligonal, a quantidade de pontos usadas para construir uma figura formada pela sobreposição sucessiva de polígonos regulares de mesmo número de lados e com quantidades de pontos em cada lado, aumentada de uma unidade em razão do polígono imediatamente anterior e de modo que cada polígono sobreposto tenha dois lados coincidentes com todos os antecessores e os pontos sobre estes lados também coincidam.

Cada sequência de números poligonais é denominada de acordo com o polígono da qual se origina. Assim, se o polígono é um triângulo, a sequência é dita números triangulares; se o polígono é um quadrado, dá-se origem aos números quadrados, e assim sucessivamente.

As figuras a seguir nos ajudam a visualizar como as sequências dos números poligonais se formam.

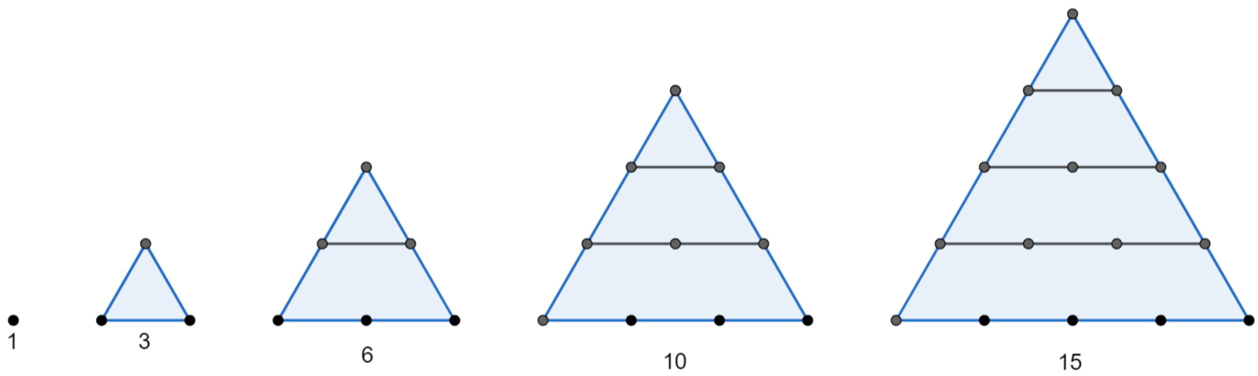

Figura 12: NÚMEROS TRIANGULARES

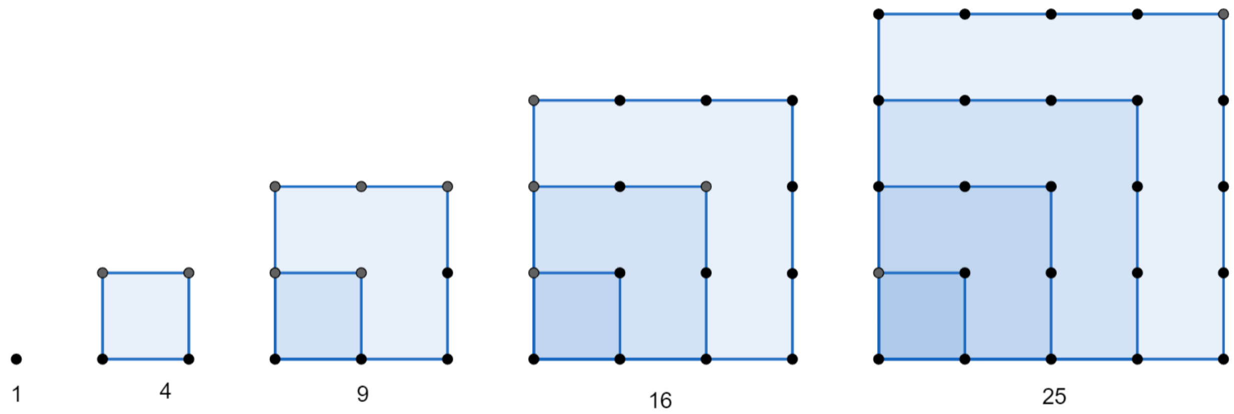

Figura 13: NÚMEROS QUADRADOS

Observando as figuras 2, 12, 13 e obedecendo a definição 5.1 podemos descrever numericamente as primeiras recorrências de números poligonais.

Primeiramente denotaremos a sequência dos triangulares por (T_n), os quadrados por (Q_n) e os pentagonais por (P_n). Descrevendo numericamente as sequências vemos que:

$$(T_n) = (1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15, \cdots),$$

$$(Q_n) = (1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \cdots),$$

$$(P_n = (1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\cdots)$$

Encontrando a primeira diferença das sequências, em:

$$(T_n)\colon (\Delta T_n) = (2,3,4,5,\cdots),\ \texttt{cuja razão é } 1,$$

$$(Q_n)\colon (\Delta Qn) = (3,5,7,9,\cdots),\ \texttt{cuja razão é } 2,$$

$$(P_n)\colon (\Delta Pn) = (4,7,10,13,\cdots),\ \texttt{cuja razão é } 3\cdot$$

Podemos notar intuitivamente que essas sequências são progressões aritméticas de segunda ordem, já que as diferenças $(\Delta^2 T_n), (\Delta^2 Q_n)$ e $(\Delta^2 P_n)$ formam progressões aritméticas de razão constante não-nula.

Teorema 5.1. Seja $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$, o número de vértices do polígono que origina a sequência de números poligonais. Se (x_n) é a sequência do número de pontos que formam o polígono de k vértices, então (x_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Demonstração: Primeiramente observemos que para formarmos uma nova figura em cada sequência temos que acrescentar $(k-2)$ lados, haja visto que dois dos lados do polígono anterior coincidem com dois dos lados da nova figura. Ao construirmos a enésima figura acrescentaremos $(k-2)\cdot n$ pontos. Mas, é necessário subtrair desse número os vértices dos lados acrescentados, para que não se contêm duas vezes. Devem ser subtraídos $(k-3)$ vértices.

Assim, o número de pontos da próxima figura é o número de pontos da figura anterior acrescentados de $(k-2)\cdot n - (k-3)$. Então temos a equação de recorrência:

$$x_n = x_{n-1} + (k-2)\cdot n - (k-3)$$

Somando a ambos os membros da recorrência $-x_{n-1}$, temos que $x_n - x_{n-1} = (k-2)\cdot n - k - 3$.

Sendo $\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = (k-2)\cdot n - (k-3)$ e como k é um valor constante em cada sequência, as diferenças entre os termos consecutivos formam uma progressão aritmética de razão $(k-2)\cdot n - (k-3)$.

■

Teorema 5.2. $1^m + 2^m + 3^m + \ldots\ + n^m = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^m$ é um polinômio de grau $(m+1)$ em n.

Demonstração: Provaremos por indução em m.

Para o caso base da indução $m = 1$ a proposição é válida. De fato, como já mostramos no segundo capítulo (Teorema 2.5) a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ para todo n natural. E a expressão $\dfrac{n(n+1)}{2}$ é um polinômio de grau 2 em n.

Supondo agora que o termo geral da soma $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$ seja um polinômio de grau $(m+1)$ em n, para todo $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq m \leq\ p$. Mostraremos agora que essa afirmação é válida para $m = p+1$, ou seja, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{p+1}$ é um polinômio de grau $(p+2)$ em n.

Observemos que $(k+1)^{p+2} = k^{p+2} + (p+2)k^{p+1} + Q(k)$, onde $Q(k)$ é um polinômio de grau p em k. Segue que:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+2} = \sum_{k=1}^{n} \left(k^{p+2} + \ (p \ + \ 2)k^{p+1} + \ Q(k)\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+2} \ = \ \sum_{k=1}^{n} k^{p+2} \ + \ (p \ + \ 2)\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} \ + \sum_{k=1}^{n} Q(k),$$

Tomando $\sum_{k=1}^{n} Q(k) = F(n)$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+2} \ = \ \sum_{k=1}^{n} k^{p+2} \ + \ (p \ + \ 2)\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} \ + \ F(n),$$

onde, pela hipótese de indução, $F(n)$ é um polinômio de grau $(p+1)$ em k.

Simplificando adequadamente a expressão eliminado os termos comuns das duas primeiras somas, obtemos:

$$(n+1)^{p+2} = 1 + (p+2)\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + F(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} = \frac{(n \ + \ 1)^{p+2} - 1 - F(n)}{p+2}$$

que é um polinômio de grau $(p+2)$ em n.

Portanto, como $P(m)$ implica $P(m+1)$ podemos afirmar que a expressão geral da soma $1^m + 2^m + 3^m + \ldots \ + n^m$ forma um polinômio de grau $(m+1)$ em n.

$\blacksquare$

Corolário 5.1. Se F é um polinômio de grau m, então $\sum_{k=1}^{n} F(k)$ é um polinômio de grau $(m+1)$ em n.

De posse dessas informações podemos escrever agora a solução do termo geral de (x_n) para uma sequência de números k-gonais, onde k é o número de vértices do polígono.

Sabemos, que a expressão do termo geral de uma progressão aritmética de segunda ordem é um polinômio de segundo grau. Assim, $x_n = An^2 + Bn + C$, onde A, B e C são constantes arbitrárias e temos que o primeiro termo de cada sequência é 1, o segundo termo é k e o terceiro termo é $3k-3$. Substituindo esses três termos em x_n temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 4A + 2B + C = K \\ 9A + 3B + C = 3K - 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema chegamos às constantes: $A = \dfrac{k-2}{2}, B = \dfrac{4-k}{2}$ e $C = 0$. Portanto, a expressão do termo geral dos números k-gonais é dada por:

$$x_n = \left(\frac{k-2}{2}\right)n^2 + \left(\frac{4-k}{2}\right)n$$

Agrupando os termos de forma conveniente podemos escrever:

$$x_n = \frac{n[(k-2)n - (k-4)]}{2}$$

Substituindo os números de lados desses polígonos, temos os termos iniciais das primeiras sequências de números poligonais.

Se $k = 3$, temos que:

$$x_n = \frac{n[(3-2)n - (3-4)]}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Se $k = 4$, temos que:

$$x_n = \frac{n[(4-2)n - (4-4)]}{2} = n^2$$

Se $k = 5$, temos que

$$x_n = \frac{n[(5-2)n - (5-4)]}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Para a determinação os termos gerais dos demais números poligonais usamos o mesmo raciocínio.

5.4 Os Números Piramidais.

Os números piramidais são aqueles gerados em representação espacial. Podem ser representados por esferas ou cubos sobrepostos de modo a formarem pirâmides no espaço, formando camadas sucessivas, cuja quantidade em cada camada correspondem aos números poligonais. Os arranjos obtidos pela sobreposição serão classificados de acordo com o polígono que dá origem à sequência piramidal. Desta forma, temos os números piramidais de base triangular, quadrada, pentagonal, hexagonal e assim sucessivamente.

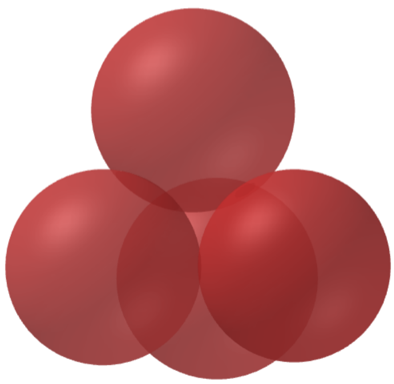

Figura 14: NÚMERO TRIANGULAR PIRAMIDAL

Definição 5.2. Números piramidais de base triangular, quadrada, pentagonal e assim sucessivamente são números obtidos pela soma dos n primeiros números poligonais, respectivamente triangulares, quadrados, pentagonais, e assim sucessivamente.

Sendo a sequência dos números piramidais uma progressão aritmética de terceira ordem, pelo teorema 5.2, a expressão do termo geral é um polinômio do terceiro grau, da forma:

$$x_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D, \texttt{onde } A, B, C \texttt{ e } D \texttt{ constantes reais e } A \neq 0\cdot$$

Pela definição 5.2 as sequências dos números piramidais se desenvolverão de acordo com o polígono da base com k lados. Segue que os quatro primeiros números piramidais são $1, k+1, 4k-2$ e $10k-10$. Substituindo esses três termos em x_n temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} A+B+C+D=1 \\ 8A+4B+2C+D=K+1 \\ 27A+9B+3C+D=4K-2 \\ 64A+16B+4C+D=10K-10 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos: $A = \dfrac{k-2}{6}, B = \dfrac{1}{2}, C = \dfrac{5-k}{6}$ e $D = 0$. Assim, a solução do termo geral dos números piramidais é dada por:

$$x_n = \frac{k-2}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{5\ -\ k}{6}n\cdot$$

Ou ainda:

$$x_n = \frac{n}{6} \cdot [(k-2)n^2 + 3n + 5 - k]\cdot$$

A próxima tabela apresenta os termos iniciais das primeiras sequências piramidais de acordo com o polígono da base da pirâmide.

Substituindo os números de lados desses polígonos, temos os termos iniciais das primeiras sequências de números poligonais.

Se $k = 3$, temos que:

$$x_n = \frac{n}{6} \cdot [(3-2)n^2 + 3n + 5 - 3] = \frac{n}{6} \cdot [n^2 + 3n + 2] = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}\cdot$$

Se $k = 4$, temos que:

$$x_n = \frac{n}{6} \cdot [(4-2)n^2 + 3n + 4 - 3] = \frac{n}{6} \cdot [2n^2 + 3n + 1] = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\cdot$$

Se $k = 5$, temos que:

$$x_n = \frac{n}{6} \cdot [(5-2)n^2 + 3n + 5 - 5] = \frac{n}{6} \cdot [n^2 + 3n] = \frac{n^2\,(n+3)}{6}\cdot$$

Para a determinação dos termos gerais dos demais números piramidais usamos o mesmo raciocínio.

Os números poligonais têm uma grande importância ao relacionar a geometria e a aritmética.

5.5 A Pizza de Steiner.

Em1826, o grande geômetra alemão Jacob Steiner (1796-1863) propôs e resolveu o seguinte problema:

"Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos?"

Resolução: Uma reta corta o plano e o divide em duas partes (Figura 15). Assim para $n = 1$ temos $x_1 = 2$.

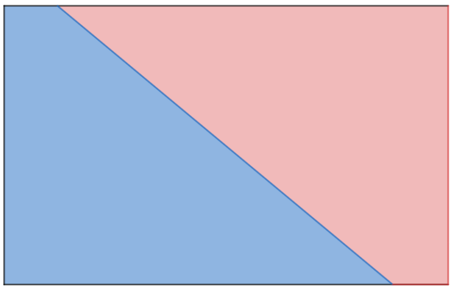

Figura 15: PLANO COM UM CORTE.

Para cortar o plano usando duas retas, temos duas possibilidades, a primeira quando as retas são paralelas o plano é dividido em 3 partes e a segunda as retas são concorrentes, o plano é dividido em 4 partes (Figura 16). Como o problema pede a maior quantidade de partes, as retas não podem ser paralelas e sim concorrentes. Assim para $n = 2$ temos $x_2 = 4$.

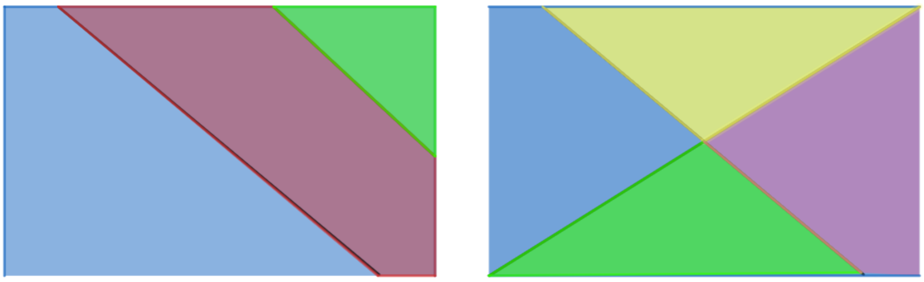

Figura 16: PLANO COM DOIS CORTES.

Para cortar o plano usando três retas, temos quatro possibilidades, a primeira, se as três retas são paralelas, o plano é dividido em 4 partes, a segunda se duas retas são paralelas e uma concorrente o plano é dividido em 5 partes, (Figura 17), a terceira se as retas são concorrentes a um único ponto o plano é dividido em 6 partes e a última, se os pontos de concorrência são distintos, o plano é dividido em 7 partes (Figura 18). Como o problema pede a maior quantidade de partes as retas devem ser concorrentes e os pontos de concorrência distintos. Assim para $n = 3$ temos $x_3 = 7$.

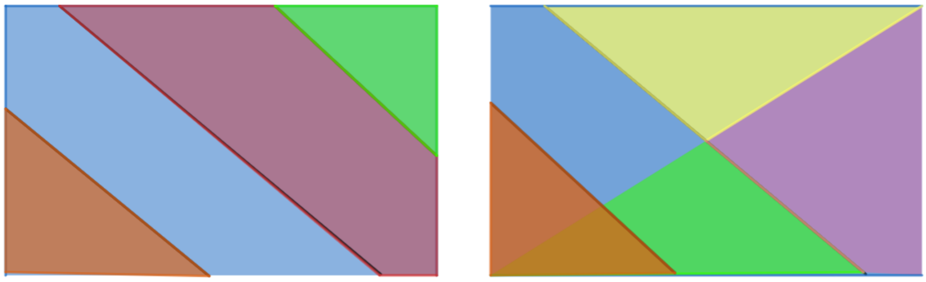

Figura 17: PLANO COM TRÊS CORTES, EXISTÊNCIA DE CORTES PARALELOS.

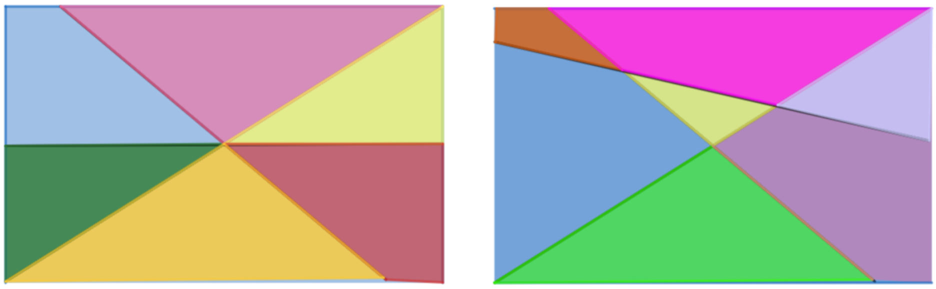

Figura 18: PLANO COM TRÊS CORTES CONCORRENTES.

A partir da análise, para atender as condições requeridas e obtermos o maior número de novas regiões possíveis, cada reta acrescentada deve intersectar todas as retas já existentes.

Seja x_n o número de partes em que o plano é dividido por n retas concorrentes quando os pontos de concorrência são distintos e suponhamos que $n-1$ retas concorrentes entre si estão presentes no plano, dividindo-o em x_{n-1} partes. Acrescentando uma reta t que intersecte todas as $n-1$ já existentes, os $n-1$ pontos de intersecção determinarão n intervalos na reta. Cada intervalo corresponde a exatamente uma região que ela atravessa dentre as x_{n-1} já existentes. Assim, a reta t elimina n regiões e gera mais $2n$ regiões. Logo, a equação de recorrência é $x_n = x_{n-1} - n + 2n$, que equivale a equação $x_n = x_{n-1} + n$.

Resolvendo a equação $x_n = x_{n-1} + n$, com $x_1 = 2$ e $x_0 = 1$:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + 2$$
$$x_3 = x_2 + 3$$
$$\cdots$$
$$x_n = x_{n-1} + n \cdot$$

Somamos as igualdades acima membro a membro e efetuamos os possíveis cancelamentos, obtemos:

$$x_n = 2 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n \cdot$$

Como $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ é a soma dos n primeiros números naturais, encontramos que:

$$x_n = 1 + \frac{(n+1) \times n}{2} \cdot$$

Portanto, n retas podem dividir o plano em no máximo $x_n = 1 + \dfrac{(n+1)\times n}{2}$ regiões.

A Pizza de Steiner é uma das diversas aplicações de recorrência dentro da geometria e ela serve de padrão para resolver outros problemas da geometria.

5.6 Permutações Simples.

Denominaremos o termo permutação simples como o arranjo de n elementos distintos em n posições. Assim, formulamos a questão:

De quantos modos n elementos distintos podem ocupar n posições?

Resolução: Podemos representar por x_n o número de permutações com n elementos distintos e por x_{n-1} o número de permutações de $n-1$ elementos distintos. Fazendo todas as permutações de $n-1$ elementos distintos, podemos posicionar um novo elemento em n lugares diferentes.

Assim, o número de permutações de n elementos distintos pode ser expresso pela equação de recorrência $x_n = n\cdot x_{n-1}$. Resolvendo a equação:

$$x_2 = 2x_1$$
$$x_3 = 3x_2$$
$$x_4 = 4x_3$$
$$\cdots$$
$$x_n = n\cdot x_{n-1}\cdot$$

Multiplicando telescopicamente as equações e fazendo as devidas adequações, temos a solução:

$$x_n = 2\cdot 3\cdot 4\cdots n \Rightarrow x_n = n!\cdot$$

Portanto, n elementos distintos podem ocupar n posições de $n!$ modos diferentes.

5.7 Regime de capitalização composta.

Com a expansão tecnológica os alunos da educação básica se depararam com a necessidade de compreender as relações econômicas e financeiras, desse modo é de fundamental importância que o professor de matemática da educação básica difunda os significados dos conceitos da área da matemática financeira.

Segundo [1], "a matemática financeira é um ramo da matemática aplicada. Mais precisamente é aquele ramo da matemática que estuda o comportamento do dinheiro no tempo".

Razão, proporção, porcentagem, regra de três, juros simples e compostos são considerados como conteúdos básicos da matemática financeira. Nos juros compostos a fórmula para o cálculo do montante pode ser representada por uma sentença, com base em [2] "para encontrar o montante M de uma operação comercial ou financeira, vamos considerar um valor presente C, uma taxa i

e calcularemos o valor futuro M, obtido a juros compostos, após n período de tempo por $M = C(1+i)^{n}$".

Denotando M_n o valor futuro obtido a juros compostos, após n período de tempo taxa i, desde que M_{n+1} denota o valor do montante no fim de $n+1$ período de tempo e iM_n os juros durante o próximo período, segue que:

$$M_{n+1} = M_n + iM_n = M_n\left(1+i\right), \forall n \in \mathbb{N} \cdot \cdot$$

Logo, a equação que determina o montante no fim de $n+1$ período de tempo é $M_{n+1} = M_n\left(1+i\right), \forall n \in \mathbb{N}$. Resolvendo a recorrência:

$$M_1 = C$$

$$M_2 = M_1\left(1+i\right)$$

$$M_3 = M_2\left(1+i\right)$$

$$\cdots$$

$$M_n = M_{n-1}\left(1+i\right) \cdot$$

Multiplicando telescopicamente as equações e fazendo as devidas adequações, temos a solução:

$$M_n = C\left(1+i\right)^n \cdot$$

Portanto, o valor do montante no fim do enésimo período é $M_n = C\left(1+i\right)^n$, com $n \ \in \mathbb{N}$.

O Regime de capitalização composta é muito utilizado nas relações financeiras no mundo, ele é o mais utilizado em operações tradicionais tais como cheque especial, crédito direto ao consumidor, desconto de títulos e outras.

6 RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA OBMEP.

As questões da OBMEP são questões desafiadoras, que necessitam que os estudantes tenham uma boa base de conceitos matemáticos, gostem da leitura e seu raciocínio lógico seja trabalhado, os problemas que serão tratados nesse capítulo foram escolhidos por terem o caráter recursivo e poderem ser trabalhadas em sala com o uso de material concreto na sua modelagem.

6.1 Um pequeno histórico sobre a OBMEP.

Idealizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação - MEC e do Ministério de Ciência, Tecnologia e Inovação - MCTI. Em 2005, foi criado a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.

O projeto teve os seguintes objetivos:

• Estimular e promover o estudo da Matemática;

• Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica;

• Possibilitar que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;

• Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;

• Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;

• Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;

• Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

A aplicação da primeira prova da OBMEP foi no dia 16 de agosto de 2005, que teve participação apenas dos alunos da rede pública, do 6º ano do ensino fundamental ao terceiro ano do ensino médio, vendo a necessidade de expandir o projeto, no ano de 2017 foram introduzidos ao projeto os alunos das escolas particulares, em 2018 foi introduzido a avaliação nível A, que absorve os alunos do 4ºano e 5º ano do ensino fundamental e no dia 19 de abril de 2022, foi criado a OBMEP Mirim, que engloba as turmas do ensino fundamental inicial, a partir desta data é extinta a OBMEP nível A.

Segundo afirmou à Agência Brasil o coordenador-geral da OBMEP, Claudio Landim, diretor adjunto do IMPA, a ideia de criar a OBMEP Mirim "é atacar os anos iniciais que são hoje onde tem um grande gargalo do ensino da matemática no Brasil, porque essas turmas recebem aulas de pedagogos que não aprendem muita matemática, muitos deles não gostam de matemática".

6.2 Resolução de questões da OBMEP.

6.2.1 (Questão 02 – 2012 – caderno nível 3).

Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos tem um lado desse triângulo?

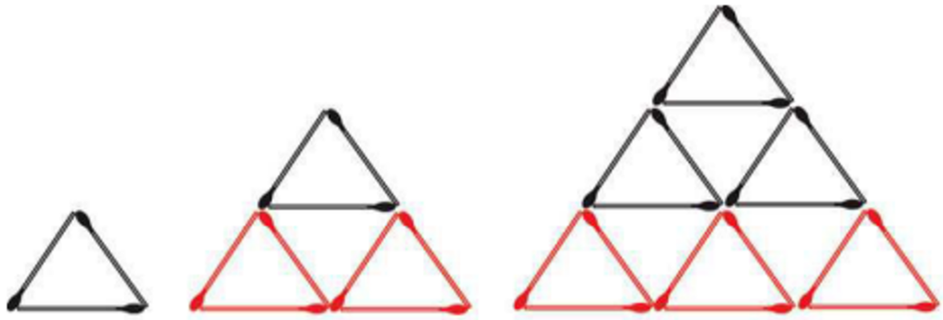

Figura 19: SEQUÊNCIA DE TRIÂNGULOS.

Resolução: Observando a figura, notamos que para passar da primeira para a segunda figura foram adicionados dois triângulos, como necessitamos de três palitos para a confecção de cada triangulo, temos então o uso de 6 palitos, para passar da segunda para a terceira figura foram adicionados três triângulos, consequentemente usado 9 palitos.

Tomando a_n como o número de palitos usado para confeccionar a figura cujo comprimento do lado é n palitos. Assim, podemos ver que a figura com a_n é formada pela figura anterior, com a_{n-1} palitos acrescidos de uma base de comprimento n palitos, sendo a base da figura formada por triângulos de lados 1palito, temos $a_n = a_{n-1} + 3n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Segue que o número de palitos (a_n) usado para confeccionar a figura, cujo comprimento do lado é n palitos, pode ser expresso pela equação de recorrência: $a_n = a_{n-1} + 3n$, com $n \in \mathbb{N}$. Resolvendo a equação:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= a_1 + 3 \times 2 \\ a_3 &= a_2 + 3 \times 3 \\ &\cdots \\ a_n &= a_{n-1} + 3n\cdot \end{aligned}$$

Somamos as igualdades acima membro a membro e efetuamos os possíveis cancelamentos, obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + \cdots + 3n \\ &= 3\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n)\cdot \end{aligned}$$

Como $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ é a soma dos n primeiros números naturais, encontramos que:

$$a_n = 3 \times \frac{(n+1) \times n}{2} = \frac{3 \times n\,(n+1)}{2}\cdot$$

Sendo, a figura formada por 135 palitos, assim

$$a_n = 135 = \frac{3 \times n\,(n+1)}{2}\cdot$$

Resolvendo a equação $135 = \dfrac{3 \times n\,(n+1)}{2}$, obtemos as raízes $n = 9$ e $n = -10$, desconsiderando a raiz $n = -10$, o número não é natural. Logo, o lado do triângulo tem 9 palitos.

6.2.2 (Questão 219 – Banco de questões OBMEP, 2010 pág. 33).

Construa uma figura com seis triângulos equiláteros adjacentes, o primeiro com lado de comprimento 1 cm e os triângulos seguintes com lado igual à metade do lado do triangulo anterior, como indicado na figura. Qual é o perímetro dessa figura?

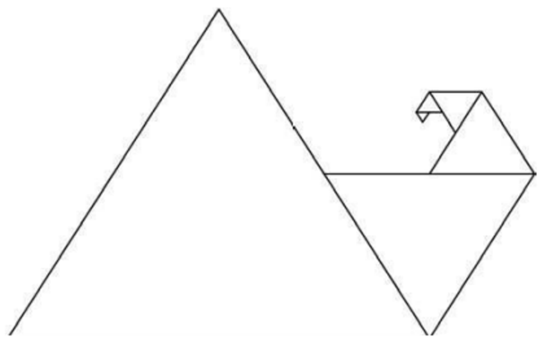

Figura 20: TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS ADJASCENTES.

Resolução: Observamos que, quando a figura possui apenas um triangulo seu perímetro é 3cm, o primeiro triangulo tem 1cm de lado e os triângulos seguintes com lado igual à metade do lado do triangulo anterior. Após colocar o segundo triângulo, o perímetro da figura aumenta em $\frac{1}{2}$ cm. Com a inclusão do terceiro triângulo a medida do contorno da figura aumenta em $\frac{1}{4}$ cm, e assim por diante.

Segue que o perímetro formado pela figura composta por n triângulos (P_n), pode ser expresso pela equação de recorrência:

$$P_n = P_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}, \ \texttt{com}\ n \in \mathbb{N}\cdot$$

Resolvendo a equação:

$$P_1 = 3$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}$$

$$P_3 = P_2 + \frac{1}{2^2}$$

$$\cdots$$

$$P_n = P_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}\cdot$$

Somamos as igualdades acima membro a membro e efetuamos os possíveis cancelamentos, obtemos:

$$P_n = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ é a soma dos n − 1 termos de uma PG de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo $\frac{1}{2}$, encontramos que:

$$P_n = 3 + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Sendo, a figura é formada por 6 triângulos seu perímetro é $P_6 = 4 - \frac{1}{2^{6-1}} = \frac{127}{32}$cm.

Portanto, a figura formada por 6 triângulos possui perímetro $\frac{127}{32}$cm.

6.2.3 (Questão 02 – 2022 – caderno nível 1).

Marcelo usa palitos para fazer quadriculado como na figura. Para fazer um quadriculado 1x1, ele usa 4 palitos; para fazer um quadriculado 2x2 ele usa 12 palitos, e assim por diante. Quantos palitos ele precisará para fazer um quadrado 5x5?

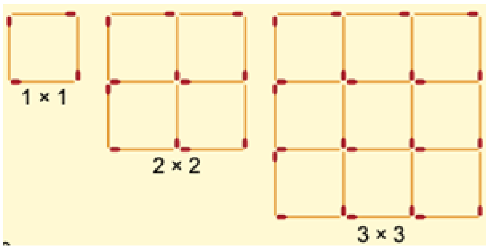

Figura 21: QUADRICULADOS.

Resolução 01: Tomando P_n como o número de palitos usado para confeccionar um quadrado cujo comprimento do lado é n palitos. Assim, podemos ver que a figura com P_n é formada por $n + 1$ fileiras de palitos horizontais e n+1 fileiras de palitos verticais e cada uma dessas fileiras tem n palitos. portanto o número total de palitos em um quadrado $n \times n$ é dado por $P_n = n \times (n+1) + n \times (n+1) = 2 \times n \times (n+1)$.

Logo, um quadrado 5×5 possui $P_5 = 2 \times 5 \times 6 = 60$ palitos.

Observando a figura, notamos que para passar da primeira para a segunda figura foram adicionados três quadrados, como necessitamos de quatro palitos para a confecção de cada quadrado e retirando os palitos que são lados comuns dos quadrados, temos então o uso de mais 12–4.1 = 8 palitos, para passar da segunda para a terceira figura foram adicionados mais cinco quadrados, consequentemente usado mais 20–8 = 20–4.2 = 12 palitos.

Resolução 02: Tomando P_n como o número de palitos usado para confeccionar a figura cujo comprimento do lado é n palitos. Assim, podemos ver que a figura com P_n é formada pela figura anterior, com P_{n-1} palitos acrescidos de $4 \times n$ palitos, assim a quantidade de palitos P_n usado para formar um quadrado de lado n palitos é $P_n = P_{n-1} + 4n$, com $n \in \mathbb{N}$. Resolvendo a equação:

$$P_1 = 4$$

$$P_2 = P_1 + 4 \times 2$$
$$P_3 = P_2 + 4 \times 3$$
$$\cdots$$
$$P_n = P_{n-1} + 4n \cdot$$

Somamos as igualdades acima membro a membro e efetuamos os possíveis cancelamentos, obtemos:

$$P_n = 4 \times 1 + 4 \times 2 + 4 \times 3 + \cdots + 4 \times n = 4\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \cdot$$

Como $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ é a soma dos n primeiros números naturais, encontramos que:

$$P_n = 4 \times \frac{(n+1) \times n}{2} = 2n\,(n+1) \cdot$$

Sendo, a figura formada ter o comprimento do lado 5 palitos, assim $P_5 = 2 \times 5 \times (5+1) = 60$. Logo, são necessários 60 palitos para fazer um quadrado 5x5.

6.2.4 (Questão 108 – Banco de questões OBMEP, 2010 pág. 86).

A árvore de Emília cresce de acordo com a seguinte regra: após duas semanas do aparecimento de um galho, esse galho produz um novo galho a cada semana e o galho original continua crescendo. Depois de cinco semanas, a árvore tem 5 galhos, como mostra a figura. Quantos galhos, incluindo o galho principal, a árvore terá no final de oito semanas?

Figura 22: ARVORE DE EMÍLIA.

Resolução: Pelo enunciado a cada semana o galho original continua assim tomando n o número de semanas, com $n \in \mathbb{N}$ e G_n o número de galhos em n semanas, sabendo também que após duas semanas do aparecimento de um galho, esse galho produz um novo galho a cada semana.

Tomando C_1 um galho na primeira semana, C_2 um galho na segunda semana e C_+ um galho com mais de duas semanas, temos a tabela:

Observando a tabela (2) é possível expressar G_n em função de seus termos anteriores, observamos que na relação de recorrência de (G_n) um elemento, a partir do terceiro elemento, é dado pela soma dos dois números anteriores. Logo, $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$.

Número de semanas (n)	**Galhos com** uma semana	**Galhos com** duas semana	**Galhos com mais** de duas semana	**Números de galhos ($\mathbf{G_n}$)**
01	C_1	0	0	1
02	0	C_2	0	1
03	C_1	0	C_+	2
04	C_1	C_2	C_+	3
05	C_1C_1	C_2	C_+C_+	5

Tabela 2: Arvore de Emília.

Tomando $n \in \mathbb{N}$, escrevemos a recorrência acima como $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$, com $G_1 = G_2 = 1$. Reescrevendo a recorrência, temos $G_{n+2} - G_{n+1} - G_n = 0$, vemos que ela é uma recorrência homogênea, assim sua equação característica é $r^2 - r - 1 = 0$, determinando as raizes da equação obtemos que $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, como $r_1 \neq r_2$, temos que $G_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes reais.

Substituindo as raízes $r_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ em G_n obtemos que

$$G_n = C_1\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n, \texttt{ com } C_1 \texttt{ e } C_2 \texttt{ constantes}\cdot$$

Como $G_1 = G_2 = 1$, temos o sistema:

$$\begin{cases} C_1\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \\ C_1\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ C_1\left(\dfrac{1 + 2\sqrt{5}+5}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1 - 2\sqrt{5}+5}{2}\right) = 1 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema temos que $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Substituindo $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ em G_n, temos $G_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Logo, a solução geral da recorrência é

$$G_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \texttt{com } n \texttt{ natural}\cdot$$

Como o problema pede o número de galhos no oitavo mês, temos que:

$$G_8 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^8 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^8\right]$$

$$= \left(\frac{1}{256\sqrt{5}}\right)\left[\left(1 + \sqrt{5}\right)^8 - \left(1 - \sqrt{5}\right)^8\right]$$

$$= \left(\frac{1}{256\sqrt{5}}\right)\left[\sum_{j=0}^{8}\binom{8}{j}\left(\sqrt{5}\right)^j - \sum_{j=0}^{8}\binom{8}{j}\left(-\sqrt{5}\right)^j\right]$$

$$= \left(\frac{1}{256\sqrt{5}}\right)\left[\sum_{k=0}^{3}\binom{8}{2k+1}\left(\sqrt{5}\right)^{2k+1} - \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{2k+1}\left(-\sqrt{5}\right)^{2k+1}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{256\sqrt{5}}\right)\left[\sum_{k=0}^{3}\binom{8}{2k+1}\left(\sqrt{5}\right)^{2k+1} + \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{2k+1}\left(\sqrt{5}\right)^{2k+1}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{256\sqrt{5}}\right)\left[2\sqrt{5}\sum_{k=0}^{3}\binom{8}{2k+1}\left(\sqrt{5}\right)^{2k}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{128}\right)\left[\binom{8}{1}\left(\sqrt{5}\right)^0 + \binom{8}{3}\left(\sqrt{5}\right)^2 + \binom{8}{5}\left(\sqrt{5}\right)^4 + \binom{8}{7}\left(\sqrt{5}\right)^6\right]$$

$$= \left(\frac{1}{128}\right)[8 + 280 + 1400 + 1000] = \frac{2688}{128} = 21.$$

Portanto, incluindo o galho principal, a árvore terá no final de oito semanas 21 galhos.

6.2.5 (Questão 11 – 2018 – caderno nível 1).

Janaína faz torres com cartões, seguindo o padrão da figura. A primeira torre foi feita com 2 cartões, a segunda com 7, a terceira com 15 e assim por diante. Quantos cartões ela deve acrescentar à décima torre para obter a décima primeira?

Figura 23: TORRE COM CARTAS.

Resolução: Considerando c_n a quantidade de cartas necessárias para montar n andares, temos:

$$c_1 = 2;$$

$$c_2 = 7 = 2 + 5;$$

$$c_3 = 15 = 7 + 8\cdot$$

Tomando agora o número p_n de pares de cartas em pé acrescentadas a cada novo andar (n) vemos que ele é uma unidade maior que o do anterior, isto é, $(p_n) = (1, 2, 3, \cdots)$ é uma progressão aritmética de primeira ordem com $p_1 = 1$ e razão 1, enquanto o número de cartas horizontais acrescidas a cada novo andar é igual a $p_n - 1$.

Logo, para construir uma figura com c_n cartas, temos que adicionar $2 \cdot p_n + p_n - 1$ cartas a figura anterior.

Portanto, a quantidade de cartas c_n é dada pela recorrência: $c_n = c_{n-1} + 3 \cdot p_n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como o termo geral de (p_n) é $p_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$, substituindo $p_n = n$, em c_n encontramos a equação de recorrência

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n-1} + 3n - 1 \\ \Rightarrow c_{n+1} &= c_n + 3n + 2 \cdot \end{aligned}$$

Fazendo $n = 10$, temos que:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n + 3n + 2 \\ c_{10+1} &= c_{10} + 3 \times 10 + 2 \\ c_{11} - c_{10} &= 3 \times 10 + 2 = 32 \cdot \end{aligned}$$

Logo, Janaina deve acrescentar à décima torre 32 cartas para obter a décima primeira figura.

6.2.6 (Questão 16 – 2009 – caderno nível 3)

Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Qual é a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos?

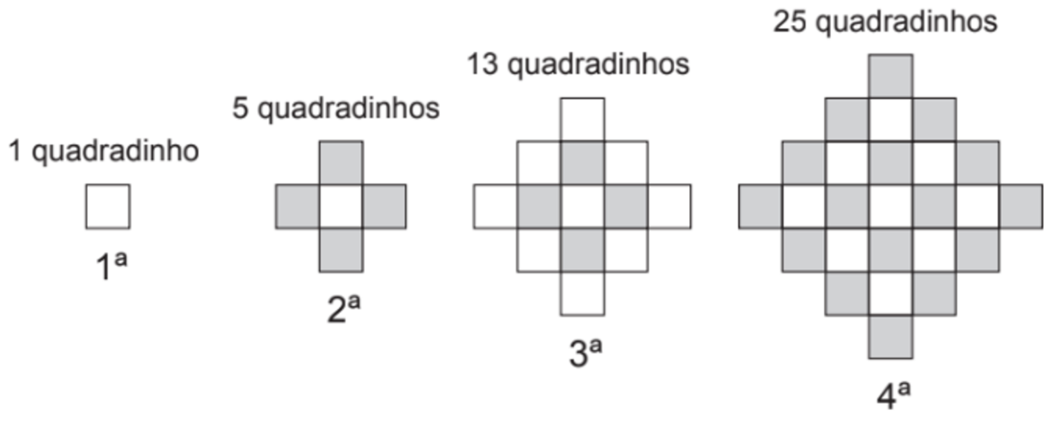

Figura 24: SEQUÊNCIA DE QUADRINHOS.

Resolução: Tomando (q_n) o número de quadradinhos unitários da enésima figura. Assim, podemos ver que o número de quadradinhos unitários de uma figura é obtido pela figura anterior mais um acréscimo de quadradinhos aos lados fazendo com que a dimensão da nova lateral seja uma unidade maior que a anterior, o acréscimo de quadradinhos unitários nas laterais da enésima figura mostra que temos n quadradinhos em cada lateral, tomando cuidado de não contar duas vezes os quadradinhos dos cantos, tal acréscimo pode ser expresso como $4n - 4$, assim temos:

$$q_n = q_{n-1} + 4n - 4$$

$$\Rightarrow q_{n+1} = q_n + 4\,(n+1) - 4$$

$$\Rightarrow q_{n+1} \;=\; q_n \;+ 4n,\ \texttt{com}\ n \in \mathbb{N}\cdot$$

Resolvendo a recorrência:

$$q_1 = 1$$

$$q_2 = q_1 + 4 \times 1$$

$$q_3 = q_2 + 4 \times 2$$

$$\cdots$$

$$q_n = q_{n-1} + 4\,(n-1)$$

Somamos as igualdades acima membro a membro e efetuamos os possíveis cancelamentos, obtemos:

$$\begin{aligned} q_n &= 1 + 4 \times 1 + 4 \times 2 + 4 \times 3 + \cdots + 4 \times (n-1) \\ &= 1 + 4\,(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))\,\cdot \end{aligned}$$

Como $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ é a soma dos n primeiros números naturais, encontramos que:

$$q_n = 1 + 4 \times \frac{((n-1)+1) \times (n-1)}{2}$$

$$= 1 + 2n\,(n-1)\,\cdot$$

Dessa forma, com a fórmula $q_n \;=\; 2n(n-1) \;+1$, sendo $q_n > 2009$ temos a inequação

$$2n(n-1) \;+1 > 2009$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 2n \;+1 > 2009$$

$$\Rightarrow n^2 + n^2 - 2n + 1 > 2009$$

$$\Rightarrow n^2 + (n-1)^2 > 2009\cdot$$

Sendo $n^2 > (n-1)^2$, temos que $2n^2 > n^2 + (n-1)^2 > 2009$, logo

$$2n^2 > 2009$$

$$\Rightarrow 2n^2 = 2048 > 2009$$

$$\Rightarrow n = 32$$

Portanto, 32ª figura é a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos.

7 APLICAÇÕES DE RECORRÊNCIAS NO ENSINO MÉDIO.

Neste capítulo será apresentado a experiência da aplicação de quatro situações problemas, em sala de aula, que envolvem equações de diferença, numerada pelo nível de dificuldade e conhecimentos prévio dos assuntos a serem trabalhados na construção da sequência recursiva e na determinação de sua solução, situações essas trabalhadas com o uso de objetos do cotidiano, onde o público-alvo foram os alunos do Centro de Excelência Professora Maria Ivanda de Carvalho, escola pública do estado de Sergipe.

A primeira situação foi aplicada com o objetivo de ver se os alunos conseguem encontrar um padrão na determinação da solução do problema. As demais situações foram trabalhadas em quatro etapas, a primeira foi a modelagem da situação problema, a segunda a determinação da quantificação de elementos, objetos ou movimentos, pedidos por meio de tabelas, a terceira parte foi a construção da recorrência que representava cada situação e a quarta a determinação da lei de formação da recorrência.

7.1 Metodologia das Aplicações em Sala de Aula.

O trabalho foi realizado com alunos do 2º ano do ensino médio da educação básica de uma escola estadual do estado de Sergipe. A turma tinha 40 alunos, ressaltando que a média de presença dos alunos na aula foi de mais 90% e que a faixa etárias desses participantes é dos 14 aos 16 anos.

O projeto em questão foi aplicado durante as aulas de um componente curricular denominado Laboratório de Matemática, específico da grade curricular das escolas integrais. Esse componente possibilita ao professor aplicar toda a contextualização vista em sala de aula, com o uso de metodologias diversificadas, de forma prazerosa sem a real preocupação do aluno de fazer uma avaliação tradicional, sendo a avaliação fundamentada na observação, participação e aplicação do conteúdo estudado nas atividades do projeto. A aplicação das atividades foi desafiadora, para todos os participantes do projeto, elas foram realizadas ao longo de dois meses, ocorrendo nas quintas feiras, em duas aulas, de 50 min cada, as atividades foram aplicadas em grupos de 5 alunos.

7.2 Estudo realizado.

Inicialmente foi feita as considerações iniciais do trabalho, em cada exercício um dos alunos, de forma espontânea fez uma leitura previa de um texto introduzindo a origem de cada problema, o professor orientador apresentou a situação problema, o material usado, as tabelas de construção e foi estabelecido as regras do jogo. As atividades foram:

ATIVIDADE I : Desafio das lâmpadas;

ATIVIDADE II : Desafio com palitos;

ATIVIDADE III : Os Números Figurados;

ATIVIDADE IV : Torre de Hanói.

7.2.1 ATIVIDADE I

Na primeira atividade foi apresento o seguinte problema:

Havia uma bancada com 5 lâmpadas. Cada uma delas poderia estar ligada ou desligada. De quantas maneiras podem estar dispostas as lâmpadas, sendo que não podem haver lâmpadas adjacentes simultaneamente ligadas?

A sala foi dividida em grupos e apresentado um material concreto, figura 25, para facilitar o entendimento da situação. Em seguida foi entregue a tabela 3 para ser preenchida, durante a análise um dos grupos se destacou pela forma de manipular o material e a integração dos membros da equipe, figura 26, na busca de solucionar o problema, a interação e o empenho era visível que pedi para gravar um pouco dessa vivência. Ao término do trabalho foi visto que muitos dos grupos encontraram a resposta, pelo fato de contarem as possibilidades, porém foi visto em outros grupos que foi encontrado um padrão dentro de cada linha com cinco lâmpadas, representada na cartolina.

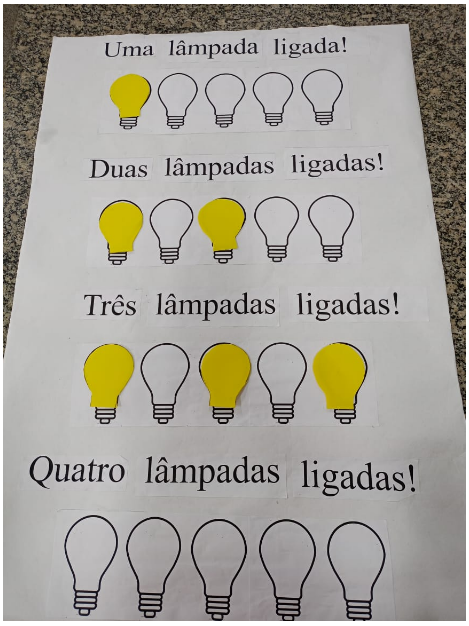

Figura 25: MATERIAL CONCRETO

Figura 26: DESAFIO DAS LÂMPADAS.

Número de lâmpadas acesas	Número de possibilidades	Cálculo ou argumentação usados.
1		
2		
3		
4		
5		

Tabela 3: DESAFIO DAS LÂMPADAS.

Antes do término da aula a solução da atividade foi apresentada da seguinte forma:

Iniciamos definindo uma representação para a lâmpada na situação de ligada e desligada. Ela está representada pelas imagens abaixo, correspondendo respectivamente as situações de ligada e desligado.

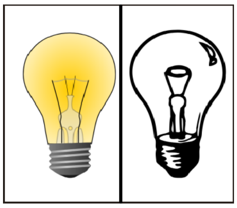

Figura 27: LÂMPADA NAS SITUAÇÕES DE LIGADA E DESLIGADA.

Em seguida, organizamos as cinco lâmpadas em fileiras. Iniciamos com uma fila em que todas as lâmpadas estão desligadas.

Situação 1: Nenhuma lâmpada ligada.

Nesta configuração, todas as cinco lâmpadas estão desligadas, assim, temos uma única possibilidade.

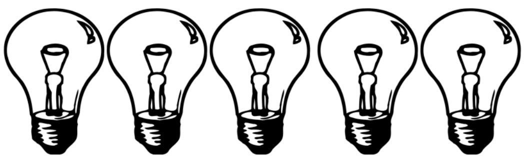

Figura 28: TODAS AS LÂMPADAS DESLIGADAS.

Situação 2: Apenas uma lâmpada ligada.

Nesta configuração, uma lâmpada está ligada e quatro lâmpadas desligadas, neste caso temos cinco possibilidades:

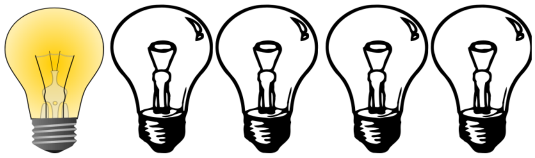

Figura 29: UMA LÂMPADA LIGADA.

Situação 3: Duas lâmpadas ligadas.

Nesta representação, duas lâmpadas estão ligadas e três desligadas. Lembrando que a restrição de não poder haver lâmpadas adjacentes ligadas deve ser considerada em todos os casos a partir deste. Assim sendo, temos seis possibilidades, ilustradas abaixo.

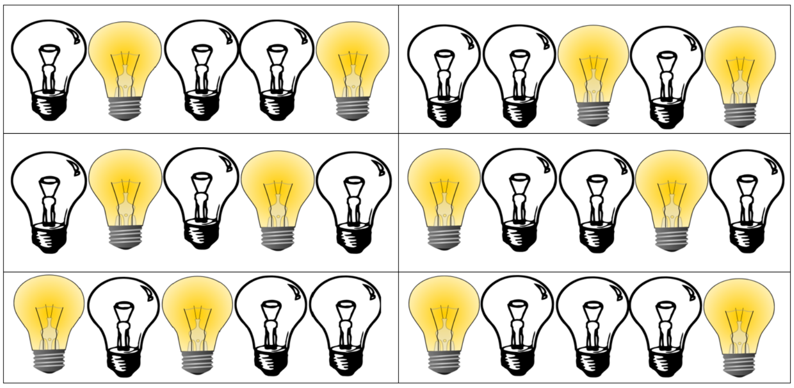

Figura 30: DUAS LÂMPADAS LIGADAS.

Situação 4: Três lâmpadas ligadas.

Para esta conjuntura, três lâmpadas estão ligadas e duas desligadas.

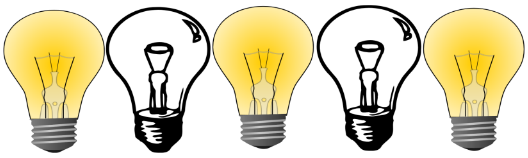

Figura 31: TRÊS LÂMPADAS LIGADAS.

Não é possível ter a configuração de quatro ou cinco lâmpadas ligadas sem que duas adjacentes estejam ligadas. Uma vez que já sabemos a quantidade de possibilidades em cada caso, para resolvermos basta somar todas as possibilidades encontradas:

$$1 + 5 + 6 + 1 = 13.$$

Alguns alunos falaram que resolveram da mesma forma, induzir os alunos a resolver pelo estudo de casos foi proposital, esse direcionamento foi dado pelo uso das material concreto na busca de uma melhor forma de modelar a atividade.

7.2.2 ATIVIDADE II

Na aplicação da segunda atividade, inicialmente foi perguntado aos alunos, o que se pode fazer com os palitos de caixas de fosforo, além de acender um fogo?

Uma das respostas mais próximas do objetivo, foi a explanada por uma aluna, ela disse que pode ser construído um quadro usando os palitos. O monitor da turma, as escolas sergipanas trabalham com um projeto de monitores remunerados, alunos da própria escola que são escolhidos pela análise de seu desempenho em todas as áreas do conhecimento, fez a leitura do texto Geometria Sagrada e Filosofia, fornecido pelo professor (texto 1, anexo).

Após a leitura foram feitas diversas perguntas a respeito do texto, as mais frequentes foram, "quem era Hipátia?" e "qual a relação entre a matemática e a natureza?", foi feito um breve relato sobre a biografia de Hipátia de Alexandria e a importância que ela traz na inclusão das mulheres na matemática e em outros campos do conhecimento científico.

Foi apresentado a situação problema:

Utilizando três palitos de fósforo idênticos podemos formar um triângulo equilátero, usando cada palito como lado. Qual a quantidade máxima de triângulos equiláteros, com o lado medindo 1 palito, que pode formar num plano, utilizando os palitos de fosforo contidos em duas caixas idênticas, represente o padrão recursivo dessa situação e determine o termo geral da recorrência?

Os grupos tiveram 30 min para modelar o enunciado com o uso do material apresentado, foram apresentadas formas diversificadas, tiveram muitas discussões, até que dois dos grupos conseguiram fazer a modelagem correta, apresentada pela imagem (32), foi avaliado e discutido cada figura formada. Conhecendo a forma correta, a tabela (4) foi entregue e solicitado seu preenchimento até o final da aula, 35 min restava até o término.

Número de triângulos (n)	**Número de palitos usados P(n)**	**Cálculo ou argumentação.**
	81	
41		
42		
n		
	315	

Tabela 4: Desafio com palitos.

Figura 32: MODELANDO USANDO PALITOS

Na quinta, da semana seguinte, nas duas aulas do projeto, foi pedido para que cada turma explicasse como completaram a tabela. Um grupo disse que foi fazendo os riscos, supondo ser os palitos, outros disseram que retiraram alguns palitos e foram ampliando a figura, infelizmente nenhum grupo fez uma análise recorrente. Foram dirigidas algumas perguntas aos grupos para que cheguem a terceira parte da primeira atividade:

1ª pergunta – Quantos palitos são usados para construir um triângulo?

2ª pergunta – Para construir mais um triângulo, a partir do primeiro, necessita de quantos palitos?

3ª pergunta – Se for adicionado um terceiro triângulo na construção, foi usado quantos palitos?

4ª pergunta – O que vocês farão para construir um novo triângulo a partir da figura construída por vocês?

As três primeiras perguntas foram respondidas brevemente, a quarta demorou um pouco a chegar a resposta, uma aluna falou que “para construir um novo triangulo precisa colocar mais dois palitos”. Após essa afirmação foi apresentado a terceira parte do problema 1.

Tomando $P(n)$ o número de palitos usados para construir uma enésima figura, quantos palitos tem a figura $n + 1$?

Imediatamente responderam que adiciona dois palitos, porém não afirmaram a quem. Os alunos foram induzidos até um deles afirmar que a nova figura possui dois palitos a mais que a antiga. Como não conseguiram representar a forma recorrente, o professor a construiu no quadro, $P(n+1) = P(n) + 2$, com $n \in \mathbb{N}$, e auxiliou na resolução da recorrência até determinar seu termo geral.

Foi pedido para que os alunos usassem os cadernos para fazer as contas, usando $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$, substituindo esses valores na recorrência, imagem (33), foi encontrado a sequência $(P(n)) = \{3, 5, 7, 11, \cdots, n\}$, um aluno quando viu a sequência obtida afirmou que ela é uma PA, foi questionado porque essa afirmação, ele disse que a razão é 2, foi pedido para ele escrever a solução no quadro, imagem (34). Assim concluiu que a sequência é uma PA de primeira ordem e primeiro termo 3, onde seu termo geral $P(n) = 2n + 1$, com n natural.

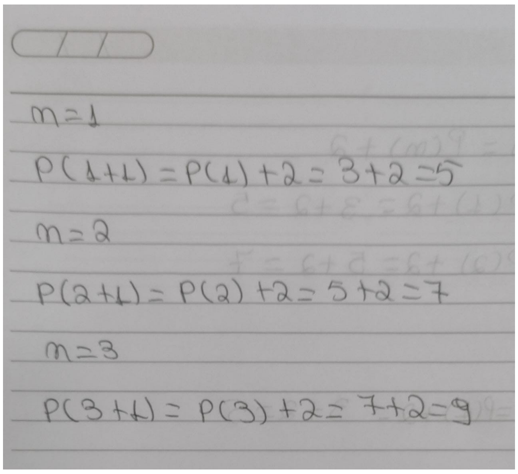

Figura 33: ANOTAÇÕES DO CADERNO DE UM ALUNO.

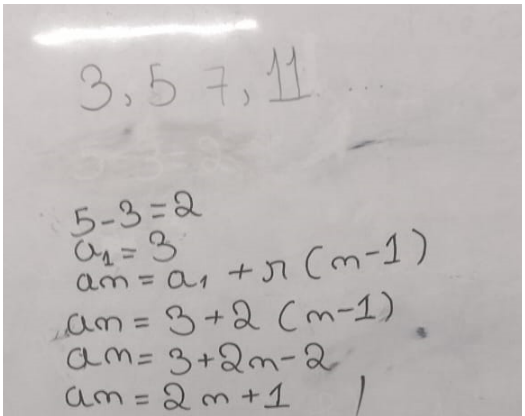

Figura 34: DETERMINAÇÃO DO TERMO DA SEQUÊNCIA $P(n) = 2n + 1$.

Nos minutos finais da aula foi questionado se a sequência parecia com algum conjunto de números que eles conheciam, o monitor respondeu que se tivesse o número 1 o conjunto é dos números ímpares, após essa indagação foi pedido para que substituíssem zero no lugar de n da função, $P(n) = 2n + 1$ e fizesse os cálculos, descobriu então que a resposta é 1, assim foi encerrada a aula.

7.2.3 ATIVIDADE III

Na terceira semana, ao entrar na sala, quando viram o saco de bolinhas de gude, perguntaram se iam jogar bola de gude, foi distribuído um novo texto, um aluno, diferente do que fez a primeira leitura, fez a leitura do texto Pitágoras: "O princípio de tudo é o número", (texto 2, anexo) o assombro dos alunos foi saber se Pitágoras realmente viveu 200 anos no inferno e se a coxa dele era de ouro. O novo desafio foi lançado:

Com o uso de 10 bolinha de gude, construir os três primeiros números triangulares, representado pela figura (19), completar a tabela (5), representar o padrado recursivo desses números e determinar o termo geral da recorrência.

Olhando a figura (19), exposta no quadro, os alunos não demoraram mais de 15 min para construir as figuras, imagem (35). Foi apresentado a tabela (5) e solicitado seu preenchimento, um dos alunos perguntou se é para tentar achar um padrão matemático no problema, recebeu como resposta que sim, porém esse é o terceiro passo da atividade e observe como vai surgir cada nova figura, somente um grupo mudou a forma de pensamento, escreveu literalmente o que acontecia na formação da nova figura, os demais fizeram da mesma forma que na segunda atividade, completaram usando desenhos nas novas figuras, outro desmontou os números anteriores para construir o quarto número.

Figura 35: MODELAGEM USANDO BOLAS DE GUDE.

Teve mudança na dinâmica do novo auxílio a turma, na determinação da equação de recorrência, foi apresentado a equação $b(n+1) = b(n)+n+1$, com n natural e $b(n)$ os números de bolas usadas para fazer o número triangular n, foi deixado para a quarta quinta feira que cada grupo explique por que essa é a equação de recorrência da situação problema.

Na quarta semana, todos os grupos apresentaram a resolução e foi selecionado 1 aluno de cada grupo, para explicar por qual motivo o grupo escreveu sua argumentação. Dois alunos disseram que na construção da nova figura acrescentava uma quantidade de bolinha na base igual ao número da figura tentaram escrever o termo geral e não conseguiram, encontraram a resolução na internet

Número triangulares (n)	**Número de bolinhas usadas B(n)**	**Cálculo ou argumentação.**
primiro		
segundo		
terceiro		
quarto		
quinto		
décimo		
	465	
enésimo		

Tabela 5: Os Números Figurados.

más não entenderam.

Um dos alunos que pesquisaram foi ao quadro resolver a recorrência, imagem (36), com auxílio do professor, foi pedido as relações, $b(2)$ em função de $b(1)$, $b(3)$ em função de $b(2)$, até $b(n)$ em função de $b(n-1)$, depois pediu para que posicionasse as equações de forma paralela,

$$b(2) = b(1) + 2$$

$$b(3) = b(2) + 3$$

$$\cdots$$

$$b(n) = b(n-1) + n,$$

agora some as equações membro a membro e depois recorde o que faz para cancelar as somas $b\,(2) + b\,(2) + \cdots + b\,(n-1)$, existente nos dois membros da equação, ele encontrou $b\,(n) = b\,(1) + 2 + 3 + \cdots + n$, substituiu $b\,(1) = 1$, na função $b\,(n) = b\,(1) + 2 + 3 + \cdots + n$.

Portanto, $b\,(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, imagem 36.

O monitor indagou que $1+2+3+\cdots+n$ é a soma dos n primeiros números naturais e a soma é $S = \dfrac{(n+1)\times n}{2}$, logo foi aplicado a formula e encontrado que

$$b\,(n) = \frac{(n+1)\times n}{2}$$

é usado para calcular a soma dos n primeiros termos da PA, assim acabou a aula.

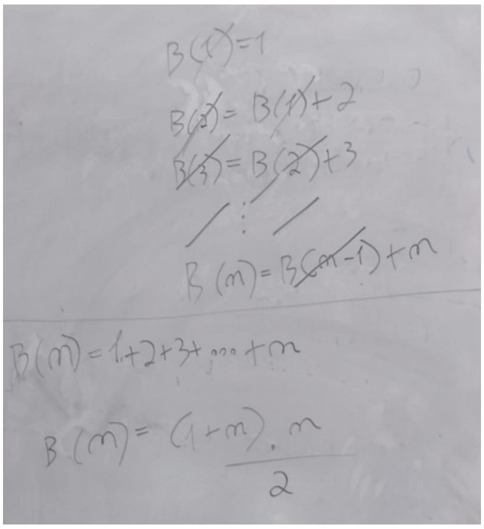

Figura 36: DETERMINANDO O TERMO GERAL DA RECORRÊNCIA $b(n+1) = b(n) + n + 1$.

7.2.4 ATIVIDADE IV

Durante a semana foi perguntado a um aluno, cujo pai é carpinteiro, se ele falava com o pai para fazer 5 pares de quadrados com tamanho diferentes, no outro dia o aluno entregou os pares de quadrados e perguntou se é a atividade de quinta, foi confirmado a dúvida, na quinta antes da apresentação do material para o trabalho, foi entregue o texto a origem da Torre de Hanói (texto 3, anexo), assim iniciou o ultimo problema, a leitura foi feita pelo professor e prontamente retirado uma fita crepe verde e dois conjuntos de cinco peças na forma de quadrados com tamanhos diferentes, confeccionado pelo pai do aluno e assim foi apresentado o ultimo problema:

Transportar a pirâmide, formada por cinco quadrados de lados diferentes, feitos com pedaços de MDF, e posicionado na forma decrescente de cima para baixo, do primeiro retângulo para o terceiro retângulo, limitados por lados feito de fita crepe colorida, representar o padrado recursivo dessa situação e determinar o termo geral da recorrência. Usando as regras:

1ª regra: Movimentar um só quadrado de cada vez;

2ª regra: Uma peça maior não pode ficar em cima de uma peça menor;

3ª regra: Não é permitido movimentar uma peça que esteja abaixo de outra.

Foi dado a aula para analisar o jogo, imagem (37), e completar a tabela (6). Cinco dos 8 grupos completaram a tabela e três dos 8 fizeram toda correta, antes do encerramento da aula foi pedido para que os alunos pesquisassem qual a forma recursiva da sequência em relação aos movimentos.

Na última quinta das atividades, ao chegar na sala, alguns alunos informaram que encontraram aplicativos interessantes acerca da Torre de Hanói e usaram ele para entender como chegava na solução. Foi pedido a todos que sentassem e acompanhassem os movimentos das peças, projetada pelo data show, que apresentava o aplicativo do Clube de Matemática da OBMEP, Torr.e de Hanói.

Foi mostrado os movimentos usando um disco, depois dois e assim sucessivamente, até chegar no quinto disco, veio a pergunta, quem consegui fazer a atividade direcionada para casa, 23 alunos

Número de discos (n)	**Quantidade de movimentos t(n)**	**Cálculo ou argumentação.**
01		
02		
03		
04		
05		
n		

Tabela 6: Torre de Hanói.

fizeram. Um dos alunos, usando a torre de MDF, foi fazendo o movimento e explicando o que escreveu na folha que entregou, logo após copiou no quadro a recorrência $t_{n+1} = 2t_n + 1$, onde t_n é o número de movimentos dados por n discos, temos:

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 2t_1 + 1$$
$$t_3 = 2t_2 + 1$$
$$t_4 = 2t_3 + 1$$
$$\ldots$$
$$t_n = 2t_{n-1} + 1$$

Figura 37: ALUNOS USANDO A TORRE PARA PREENCHER A TABELA 6

Nesse momento o aluno parou e não conseguiu resolver, o professor explicou a turma como determinar o termo geral dessa recorrência, a resolução vista no capítulo 5, na seção 5.2, A Torre de Hanói, como bons matemáticos a atividade foi encerrada com um bom café fornecido pela escola.

7.3 Conclusão.

No período de aplicação da atividade, foi visto o entusiasmo dos alunos em transformar situações qualitativas em quantitativas, o poder que o questionamento tem na construção do pensamento e a forma prazerosa de fazer matemática com o uso de material concreto e aplicativos encontrados facilmente, foram as ações desenvolvidas em sala que transformaram a obrigação em diversão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Esse trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta de estudo das recorrências, apesar de não fazer parte do programa do ensino médio, as recorrências são de grande importância para se trabalhar o pensamento cognitivo do aluno. Foi explorado as sequências até chegar nas sequências recursivas, iniciando as progressões aritméticas de primeira ordem e de ordem superior, as progressões geométricas, passando a trabalhar com as recorrências de primeira e segunda ordem, correlacionando a história, a geometria e a álgebra. Foram comentados resultados que deram suporte na resolução de outros problemas relacionados as recorrências.

Os exemplos clássicos de recorrências foram trabalhados e resolvidos. Foi feita uma breve apresentação da OBMEP, mostrado a importância que ela tem na educação matemática e na construção do pensamento científico, na formação do cognitivo do aluno e resolvido suas questões que necessitam de recorrência nas suas soluções. Foi apresentado situações problema que podem ser trabalhadas em sala de aula, com material de baixo ou nenhum custo, e que puderam ser trabalhados de forma educativa e prazerosa.

Achamos que será de grande importância as ideias disponibilizadas nesse trabalho de pesquisa para estudo de professores da Educação Básica, para temas de cursos de formação docente, para alunos de graduação e pós-graduação, que desejem expandir seu conhecimento. Finalizamos ressaltando a importância que a recorrência tem em modelar situações do cotidiano, em uma linguagem algébrica, dando sentido ao aprender matemática. E, por conseguinte, melhorarmos os rumos da educação matemática no Brasil.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[1] ARAÚJO, C. R. V. Matemática financeira: uso das minicalculadoras P12C e HP19BII. São Paulo: Atlas, 1992.

[2] BRANCO, A. C. C. Matemática financeira aplicada: método algébrico, HP-12C, Microsoft Excel. São Paulo: Thomson Pioneira, 2002.

[3] BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide. 2a ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[4] DANTE, Luiz R. Matemática: Contexto e Aplicações: Volume 3. São Paulo: Ática, 2011.

[5] G. Iezzi, Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 4, São Paulo, 1998.

[6] LIMA, Elon L.; et al. A Matemática do Ensino Médio: Volume 2. 6a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[7] LIVIO, Mário. Deus é matemático? Editora Record, 2015.

[8] LUÍS, R. D. G. Equações de diferenças e aplicações. Dissertação Mestrado. Funchal: Universidade da Madeira, 2006.

[9] MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, Paulo C. P. Matemática Discreta: Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[10] OLIVEIRA, Krerley I. M.; FERNÁNDEZ, Adán J. C. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. 2a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[11] OBMEP. Portal do Saber: Caderno de exercícios. Disponível em 2022. Acesso em: 11 nov. 2022.

[12] OBMEP. Portal do Saber: Apresentação. Disponível em 2022. Acesso em: 11 nov. 2022.

[13] TAHAN, Malba. O homem que calculava. Editora Record, 2004.

[14] LEOPOLDINO, Karlo Sérgio Medeiros; Sequências de Fibonacci e a razão Áurea. UFRN-PROFMAT, Natal, Rio Grande do Norte, 2016.

ANEXOS.

Texto 01

Geometria Sagrada e Filosofia.

Com Plutarco também aprendeu a dar uma forma «grega», ou seja, demonstrativa e racional, aos conhecimentos de Matemática e Geometria sagrada, além de utilizar exemplos claros, determinantes e que todos puderam entender como evidência ao ensinar estas matérias.

Um dia Plutarco perguntou-lhe, quase com violência: Dá-me um exemplo rápido, que uma criança possa entender, de como na Geometria encontramos os elementos invariáveis, permanentes no meio da corrente da vida. Como Hipátia demorava alguns segundos, o próprio Plutarco deu a resposta:

Olha, os ângulos que os orifícios na cara humana formam são funcionalmente três triângulos isósceles. Os olhos e a boca, os ouvidos e a boca e os orifícios do nariz e a boca. Ligam o 7, ou seja, a Natureza ao 9, o Tempo, ou melhor, a Ação Consciente Nele. Também sabes que cada um destes orifícios está vinculado às influências estelares de um Planeta, mas tudo isto são doutrinas esotéricas.

Vamos ao evidente. Mesmo que alguém levasse uma máscara, não são estes triângulos os mesmos, maiores ou mais pequenos, mas os mesmos? Não é certo que teríamos dificuldade em reconhecer alguém que vimos em adolescente ou jovem, trinta ou quarenta anos depois? E, no entanto, se sentimos a vida de cada triângulo, ou ao menos somos capazes de «vê-los», por mais que a pessoa envelheça, engorde, adelgace ou fique sem cabelo, estes triângulos estão ali, fixos e invariáveis, anunciando quem é a pessoa, como um selo perpétuo desde o berço à tumba.

Há que aprender a «ler», continuou, a geometria e a aritmética na vida para despertar assim, nos discípulos, um sentido de eternidade, quando ainda não têm asas para voar e viver, por si próprios, a vida destas Divinas Formas. É deste modo que a alma começa a recordar. Mas, um grande erro é querer encaixar à pressão a dinâmica da vida nas formas geométricas.

Encontramos, por exemplo, uma grande quantidade de flores com forma pentagonal ou de estrela de cinco pontas, mas se medíssemos, comprovaremos que nunca é um pentágono exacto. O próprio desenvolvimento das flores segue uma espiral logarítmica áurea, de acordo com a sagrada sucessão de números que tu conheces e esta série, geometricamente, aproxima-se cada vez mais dessa espiral, mas nunca chega a sê-lo perfeitamente.

Os números são mentais, dão o padrão mental de referência, a ideia oculta que está por trás da forma, mas não são distâncias. Permitem medir, mas não são medidas. Entre a dimensão mental pura e perfeita dos números e o fluxo sempre dinâmico da vida há um composto que é quem tece a natureza e as formas da vida. Platão tinha-o explicado muito bem no Timeu: o Mundo está feito de Um e do Outro.

Hipátia interrogava-se, «quem sabe se existirá um modo para que a matemática explique a versatilidade quase caótica da natureza, as formas das nuvens, as correntes de água ou de lava, o crescimento dos ramos das árvores ou a forma das veias por onde o sangue circula, as ondas do mar ou a forma das escarpas? Seria um modo de trabalhar com a mente na qual os números, os pontos, as linhas e os volumes, em séries interativas infinitas, estabeleceriam assim uma ponte entre a Mente (Número) e a Vida (Infinita, incapaz, portanto de ser medida na sua pureza absoluta).

Hipátia recordou, graças à explicação dos triângulos que Plutarco fez, aquilo que tinha aprendido no Egipto. Uma das formas de representar as Potências Divinas ou Neter eram os triângulos equiláteros, começando pelo Divino cujos lados são 3, 4 e 5, simbolizando, respectivamente, Ísis, Osíris e Hórus. O próprio Platão disse no Timeu que toda a geometria nasce dos triângulos rectangulares, de dois tipos:

O 3, 4 e 5, que repetido seis vezes origina o equilátero, e com este podemos construir os sólidos platónicos que representam o Fogo, o Ar e a Água.

“Entre a dimensão mental pura e perfeita dos números e o fluxo sempre dinâmico da vida há um composto que é quem tece a natureza e as formas da vida”.

O de lados com valores 1,1 e raiz de 2, que é a metade de um quadrado, e que origina, portanto, o Hexaedro ou Cubo, símbolo da Terra.

Junto a Plutarco aprofundou também os seus estudos de astronomia e astrologia caldeia, aprendendo a divisão do Éter em 365 entidades ou potências, uma para cada dia do ano, e na Geografia Sagrada. Nesta disciplina aprendeu que as localizações dos santuários devem reunir condições telúricas, astronómicas e matemáticas muito estritas.

Os templos são como as estrelas no firmamento, mas na terra. Neles convergem correntes energéticas em forma de serpente que vêm do céu (estelares) e outras das profundidades (telúricas), além disso devem receber os raios do sol e da lua e de certas estrelas fixas em ângulos exactos em dias específicos, o que obriga a uma grande precisão em relação à latitude, no restante, as distâncias entre os santuários formam triângulos sagrados e outras figuras, e devem encontrar-se numa harmonia matemática e musical, de modo que as forças que irradiem sejam potenciadas e não anuladas.

Cada um no seu lugar atrai, em conjunto, determinadas influências estelares graças ao poder das formas geométricas, que funcionam como «sintonizadores», harmonizando assim o céu com a terra, a acção dos homens e a natureza com a dos Deuses.

Excerto de “Viagem Iniciática de Hipátia”, de José Carlos Fernández Director Nacional da Nova Acrópole

Texto 02

Pitágoras: "O princípio de tudo é o número".

Ele criou um teorema para calcular as medidas de triângulos. Mas sua influência vai muito além disso quando Pitágoras descobriu que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, seus discípulos consideraram a descoberta uma revelação divina. Ele próprio acreditava que sua conclusão não havia surgido do pensamento lógico, mas de uma iluminação. Filósofo e matemático, Pitágoras também era considerado um líder espiritual. Talvez sua beleza tenha ajudado na fama. Pitágoras, conta-se, era lindo de morrer. Seus discípulos desconfiavam que ele era, na verdade o deus Apolo. Certo dia, segundo reza a lenda, alguns que o viram nu disseram que sua coxa era feita de ouro.

Aos 40 anos, o filósofo-matemático da cidade natal na ilha de Samoa e foi para Crotona, na Itália, onde fundou uma seita. Os alunos da escola pitagórica, cerca de 300, viviam em comunidade e passavam os dias estudando as teorias do filósofo. A imposição de rituais estranhos, como a que proibia morder um pão inteiro ou alisar a marca do corpo deixada no lençol ao levantar da cama, leva a crer que Pitágoras teria traços de um obsessivo compulsivo.

Ele se achava. Dizia que ficara 200 anos no inferno antes de chegar aos homens, em uma longa preparação para chegar ao reino dos mortais. Suas teses tinham valores de dogmas – poucos tinham permissão para questioná-lo. Sua principal teoria era baseada nos números. Enquanto os filósofos de Mileto acreditavam que a causa de tudo é um elemento físico ou o infinito de Anaximandro, o pensador defendia que os números eram o motivo e o princípio de tudo. Até o cosmo poderia ser quantificado de acordo com a teoria de pitagórica. Mas os números de Pitágoras eram diferentes dos nossos algarismos. Não eram abstratos e ocupavam uma dimensão espacial, em formas de quadrados e triângulos. Outra ideia badalada do pensador foi a da "música cósmica". Para Pitágoras, os astros tocavam uma melodia perfeita e divina durante seu movimento. Mortais não seriam capazes de ouvir a tal canção porque os sons contínuos passam despercebidos pelos nossos sentidos.

A seita pitagórica não teve um final feliz. Cidadãos de Crotona se revoltaram contra a comunidade, considerando uma panelinha aristocráticas. Os revoltosos mataram seguidores de Pitágoras, que fugiu da cidade e se refugiou em Metaponto, onde morreu pouco tempo depois. Após sua morte, os discípulos criaram novos centros para difundir a seita e as teorias. O mestre não deixou nada escrito. Tudo o que se sabe de suas doutrinas só ganhou visibilidade com os livros do pitagórico Filolau, os quais Platão comprou sob encomenda.

https://super.abril.com.br/ideias/o-principio-de-tudo-e-o-numero-pitagoras/

Texto 03

A origem da Torre de Hanói.

Também conhecida por torre do bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo, a Torre de Hanói foi publicada em 1883 pelo matemático francês Edouard Lucas, com o pseudônimo Prof. N. Claus (de Siam), um anagrama de seu nome.

A publicação dizia que o jogo vinha do Vietnã, sendo popular também na China e no Japão, e acompanhava a caixa do quebra-cabeças.

A publicação também oferecia mais de um milhão de Francos para quem resolvesse o problema da Torre de Hanoi com 64 níveis, seguindo as regras do jogo, indicando que o número de movimentos seria 2 elevado a 64 menos 1 = 18.446.744.073.709.551.615 o que daria cerca de 585 bilhões de anos, se cada movimento fosse feito em 1 segundo.

Edouard Lucas foi inspirado por uma lenda Hindu que falava de um templo em Bernares, cidade santa da Índia, onde existia uma torre sagrada do bramanismo, cuja função era melhorar a disciplina mental dos monges jovens. A lenda dizia que, no início dos tempos, foi dado aos monges de um templo uma pilha de 64 discos de ouro, dispostos em uma haste, de forma que cada disco de cima fosse menor que o de baixo. A atribuição que os monges receberam foi transferir a torre, formada pelos discos, de uma haste para outra, usando a terceira como auxiliar com as restrições de movimentar um disco por vez e de nunca colocar um disco maior sobre um menor. Os monges deveriam trabalhar com eficiência noite e dia e, quando terminassem o trabalho, o templo seria transformado em pó e o mundo acabaria.

Em 1884, outro matemático frances, chamado De Parville, desenvolveu a seguinte história, que também costuma ser associada à Torre de Hanoi.

No grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há uma placa de bronze sobre a qual estão fixadas três hastes de diamante, cada uma com a altura do osso cúbito do braço e tão fina como o corpo de uma abelha. Em uma dessas agulhas, Deus, quando criou o mundo, colocou 64 discos de ouro puro, de forma que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo. Isto se constituiu na torre do bramanismo. Dia e noite, os monges transferiam incessantemente os discos de uma haste para outra, de acordo com as leis fixas e imutáveis do bramanismo, que exigiam que os monges nunca movessem mais de um disco por vez e nunca deixassem um disco maior ficar sobre um menor. Quando os 64 discos fossem transferidos para outra haste, a torre, o templo e as pessoas seriam transformadas em pó e, com um estrondo, o mundo desapareceria.

O sol está em atividade há cerca de 5 ou 6 bilhões de anos e deverá continuar por igual período, quando entrará em colapso. Nessa fase, a camada de hélio no interior do sol terá crescido bastante e as camadas exteriores expandidas o suficiente para englobar a Terra, destruindo-a. Será o fim do mundo. Depois disso, os gases serão expelidos e o sistema solar será transformado numa estrela anã.

Como a Terra tem cerca de 5 bilhões de anos, devendo durar igual período e a Torre de Hanoi demoraria 585 bilhões de anos para ser resolvida, o mundo realmente acabará, mesmo antes do término do quebra-cabeças. Até lá a humanidade já terá sido extinta ou terá tecnologia suficiente para mudar-se de planeta.

Desde 1883, surgiram muitas edições do quebra-cabeças “Torre de Hanoi”. Várias delas, incluindo a edição inicial, podem ser vistas no PuzzleMuseum