

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

**INTRODUÇÃO À CONSTRUÇÃO DA SÉRIE LIMITES
CIRCULARES DE ESCHER ATRAVÉS DA ANÁLISE DA
ILUSTRAÇÃO DE COXETER**

AURÉLIO FRED MACENA DOS SANTOS

VITÓRIA DA CONQUISTA –BA

AGOSTO, 2013

AURÉLIO FRED MACENA DOS SANTOS

**INTRODUÇÃO À CONSTRUÇÃO DA SÉRIE LIMITES
CIRCULARES DE ESCHER ATRAVÉS DA ANÁLISE DA
ILUSTRAÇÃO DE COXETER**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

VITÓRIA DA CONQUISTA –BA

AGOSTO, 2013

AURÉLIO FRED MACENA DOS SANTOS

**INTRODUÇÃO À CONSTRUÇÃO DA SÉRIE LIMITES
CIRCULARES DE ESCHER ATRAVÉS DA ANÁLISE DA
ILUSTRAÇÃO DE COXETER**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

(Orientador)

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Prof. Dr. Sérgio da Silva Aguiar

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Prof. Dr. Paulo Espinheira Menezes de Melo

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - IFBA.

VITÓRIA DA CONQUISTA –BA

AGOSTO, 2013

DEDICATÓRIA

Agradeço,

- Ao meu avô Cecílio e familiares, pela educação herdada e pelas orações;
- Aos meus pais pelo esforço na realização dos meus sonhos;
- A minha esposa, pela paciência, dedicação e companheirismo;
- Ao pessoal da Pastoral da Juventude que sempre são base de minha fé e espiritualidade;
- Aos meus colegas do PROFMAT pelas discussões que tanto ajudaram nesta caminhada;
- Ao professor Márcio Antônio de Andrade Bortoloti pela orientação nessa dissertação, além do grande apoio que me passou durante nossas conversas.

RESUMO

Nesta pesquisa analisamos o método usado pelo artista plástico Maurits Cornelis Escher na construção da série limite circular a partir da imagem Ilustração de Coxeter. Em um primeiro momento, será apresentado o surgimento das Geometrias não Euclidianas através das discussões sobre o quinto postulado de Euclides. Na etapa seguinte será introduzido alguns conceitos dessa nova geometria, como o uso de modelos e suas características, de forma especial, os elementos do Modelo de Poincaré.

Palavras Chaves: Escher, Coxeter, Geometrias não Euclidianas, Modelo de Poincaré.

ABSTRACT

In this research we analyze the method used by the artist Maurits Cornelis Escher in the construction of the series circular boundary from the image Illustration of Coxeter. At first, you will see the emergence of non-Euclidean geometries through discussions on the fifth postulate of Euclid. In the next step will be introduced some concepts of this new geometry, such as the use of models and their features, in a special way, the elements of the Poincaré model.

Key Words: Escher, Coxeter, non Euclidean geometries, Poincaré model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Quinto Postulado de Euclides	14
Figura 2 - $\alpha + \beta = 180^\circ$	16
Figura 3 - m e m' paralelas a r	19
Figura 4 - Quadrilátero de Saccheri	21
Figura 5 - Paralelas de Gauss.....	24
Figura 6 - Retas paralelas segundo Lobachewsky.....	27
Figura 7-Retas paralelas segundo Lobachewsky.....	29
Figura 8- Triângulo retângulo	30
Figura 9- Triângulo retângulo no qual $med(AE) = med(EC)$	30
Figura 10- Triângulo retângulo no qual $DE \perp BC$	30
Figura 11- Triângulo retângulo no qual $AF \perp FD$	31
Figura 12- D o pé da altura do triângulo relativo ao vértice A.....	31
Figura 13- O segmento BC (sem as extremidades) é uma corda do disco.....	34
Figura 14- As retas BC, CD e EF são paralelas.....	35
Figura 15- Plano de Klein.....	36
Figura 16- Disco de Poincaré	37
Figura 17 – construção do inverso de um ponto	38
Figura 18– construção do inverso de um ponto	38
Figura 19- construção do inverso de um ponto.....	39
Figura 20- construção do inverso de um ponto.....	39
Figura 21- construção do inverso de um ponto.....	40
Figura 22- P fora da circunferência	40
Figura 23- circunferências ortogonais.....	41
Figura 24- Potência de um ponto.....	42
Figura 25- Potência de um ponto.....	42
Figura 26- Potência de um ponto.....	43
Figura 27- círculo de Poincaré	44
Figura 28- Ângulo α entre as h-retas CR e CS	45
Figura 29- Ângulo α entre as h-retas (casos especiais)	46
Figura 30- distância entre pontos na h-reta	47
Figura 31- Imagem da linha reta que passa pelo centro do Disco de Poincaré.....	48
Figura 32- Imagem inversa de uma linha r que não passa através do centro	49
Figura 33- A imagem de qualquer P na linha é o vértice de um ângulo reto inscrito num círculo com diâmetro OH'.	49
Figura 34- A imagem inversa de uma círculo γ	50
Figura 35- A inversão preserva os ângulos	50
Figura 36- Propriedade dos círculos ortogonais	51
Figura 37- Litografia Monza.....	53
Figura 38- fases nas produções de Escher	57
Figura 39- As figuras a, b e c são exemplos dos três tipos de trabalhos de Escher, ciclos, preenchimento de superfícies e limites, respectivamente.....	58
Figura 40- Cada vez menor	60

Figura 41- Figura presente no artigo de Coxeter (chamada de ilustração de Coxeter)	61
Figura 42- Ilustração Limite Circular I	62
Figura 43- Ilustração Limite Circular II	63
Figura 44- Ilustração Limite Circular III	64
Figura 45- Serpentes	64
Figura 46- rotação em torno do ponto A por um ângulo $2\pi/6$	65
Figura 47- Traçado da circunferência γ de centro B, que passa por A e $p(A)$	66
Figura 48- Disco de Poincaré com centro O, passando por C.	66
Figura 49- A reta r é ortogonal a circunferência.....	67
Figura 50- Parte 01 da construção	68
Figura 51- Parte 02 da construção	69
Figura 52- Parte 03 da construção	69
Figura 53- Parte 04 da construção	70
Figura 54- Parte 05 da construção	71
Figura 55- Parte 05 da construção	71
Figura 56- Parte 06 da construção	72
Figura 57- Parte 07 da construção.....	72

Sumário

INTRODUÇÃO	10
CAPÍTULO 01 - HISTÓRIA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	12
1.1. Os Elementos de Euclides	12
1.2. O postulado das paralelas	15
1.3. Relação entre o axioma cinco e a proposição 28	16
1.4. O substituto	17
1.5. Passos para verificar se uma proposição P é um substituto para o quinto postulado:	18
1.6. Girolamo Saccheri (1667 - 1733)	19
1.7. Johann Lambert (1728-1777)	23
1.8. Simultaneidade de descobertas	23
1.8.1. Carl Fridrich Gauss (1777-1855)	23
1.8.2. János Bolyai (1802- 1860).....	25
1.8.3. Nicolai Ivanovich Lobachewsky (1793 - 1856)	26
CAPÍTULO 02 – Modelos Hiperbólicos	33
2.1. Introdução	33
2.2. Modelo de Felix Klein	34
2.3. Modelo de Poincaré	36
2.4. Construção do inverso de um ponto P em relação a circunferência γ:	38
2.5. Construção de circunferências ortogonais:	41
2.6. Ângulos entre duas retas hiperbólicas:	45
2.7. Menor distância entre dois pontos distintos no disco de Poincaré:	46
CAPÍTULO 03 – Construção da Ilustração de Coxeter	52
3.1. História de Escher	52
3.2. Série Limites Circulares	61
3.2.1. Limite circular I (LCI).....	61
3.2.2. Limite circular II (LCII).....	62
3.2.3. Limite circular III (LCIII)	63
3.3 Como Escher construiu a figura presente no artigo de Coxeter usando régua e compasso	65
CONCLUSÃO	73
BIBLIOGRAFIA	74

INTRODUÇÃO

Em comparação com a Geometria Euclidiana, os estudos referentes a Geometria Hiperbólica são recentes, principalmente quando se trata de uma abordagem interdisciplinar. No caso dessa dissertação, será sondada uma aplicação dessa geometria na arte, observando como se deu o raciocínio matemático do artista plástico Maurits Cornelis Escher, na análise da ilustração publicada em um artigo do matemático canadense Harold Scott MacDonald Coxeter. Foi essa imagem que serviu de inspiração para Escher construir a série Limites Circulares, usando apenas régua e compasso.

O que ajudou na escolha do tema para esse trabalho foi a leitura do artigo, *Capturing Infinity: The Circle Limit Series of M.C. Escher*¹. Esse texto explica o método usado por Escher para construir a ilustração de Coxeter, figura 41, presente no desenvolvimento desse trabalho (ver índice de ilustrações). Mas o autor não esclarece toda construção da imagem, deixando como exercício as etapas finais do desenho da imagem, como pode ser visto na página 07 do artigo. Ou seja, a ideia final da construção não está bem clara, assim este trabalho busca elaborar um tutorial completo para traçar a imagem de Coxeter.

No primeiro capítulo deste trabalho é apresentado uma abordagem inicial dos Elementos de Euclides, relatando principalmente os cinco primeiros postulados, os quais, durante mais de dois milênios, foram base da geometria plana, sendo considerado pelos estudiosos da época como uma afirmação indiscutivelmente verdadeira.

Na virada do século XVIII, a adesão da crença na verdade incontestável do quinto postulado começou a enfraquecer. Já que, alguns teóricos já defendiam que o quinto postulado não era uma proposição e sim um teorema,

¹ WIETING, Thomas. *Capturing Infinity: The Circle Limit Series of M.C. Escher*. Reed Magazine, março. 2010.

alguns matemáticos tentaram até prová-lo, usando, principalmente, o método de redução ao absurdo, mas logo falharam.

A busca por uma suposta contradição deixa um legado, surgem elementos provocadores de uma nova geometria. Rapidamente, a nova geometria adquiriu discípulos, em particular, os matemáticos N. Lobachevsky, J. Bolyai e K. Gauss. Eles e muitos outros provaram proposições surpreendentes em desacordo com as proposições familiares da geometria euclidiana. Esses matemáticos visualizaram a possibilidade de por um dado ponto externo a uma reta passar mais de uma reta paralela a ela.

O capítulo dois apresenta modelos matemáticos para a geometria não-Euclidiana. Visto que, o cientista francês H. Poincaré sugeriu uma nova interpretação dos pontos e das linhas retas da nova geometria, usando os elementos do plano euclidiano. Ele declarou que os pontos da nova geometria serão interpretados como os pontos de um disco aberto H . E que as linhas retas da nova geometria devem ser interpretadas como os arcos de círculos que intersectam o limite de H em ângulos retos.

O terceiro capítulo, além de mostrar um resumo histórico da trajetória de Escher, narra como o artista encontrou uma nova lógica visual para "capturar o infinito". Ele explorou, sem conhecimento matemático prévio, tanto o plano euclidiano, quanto o plano hiperbólico. No entanto, os seus conhecimentos adquiridos renderam várias obras interessantes do ponto de vista matemático e artístico. Vale ressaltar que, a Geometria Não- Euclidiana, pelo menos implicitamente, serviu de inspiração para seus últimos trabalhos.

Escher escreveu muito sobre os projetos para suas divisões regulares do plano euclidiano, mas nada sobre os princípios subjacentes a série Limites Circulares. Ele deixou apenas traços em papéis que mais pareciam enigmas. Assim, esse trabalho dissertativo apresenta um proposta de caminho, que pode ter sido o usado por Escher, na construção de desenhos não Euclidianos.

CAPÍTULO 01 - HISTÓRIA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

1.1. Os Elementos de Euclides

Por volta de 300 a.C. o matemático grego Euclides lança em Alexandria uma das mais conhecidas obras matemática de todos os tempos, denominada *Os Elementos*. O exemplar é formado de 13 livros (ou capítulos), sendo que os quatro primeiros descrevem a Geometria Plana da época, enquanto os outros abordam a teoria dos números, dos incomensuráveis e da geometria espacial. Em sua elaboração o autor faz uma sistematização de vários textos matemáticos publicados até então, fato que o tornou muito popular entre os matemáticos, desde os gregos até os atuais.

Pelo tempo de Euclides, o que hoje chamamos de Geometria Euclidiana estava totalmente desenvolvido. De fato, o trabalho de Euclides foi aquele de um compilador que reuniu os teoremas conhecidos, já demonstrados por seus predecessores, e os colocou em um único texto com uma apresentação unificada. BARBOSA (1995, p. 01)

Em Os Elementos, a geometria é explorada na forma axiomática, ou seja, são expostos os postulados, hipóteses próprias da geometria, e axiomas, afirmações aceitas por todas as ciências, também chamadas de noções comuns. A partir desses são deduzidas as proposições, chamadas de teoremas.

Euclides inicia o capítulo I, definindo os objetos geométricos (ponto, reta, círculo, retas paralelas, triângulo, etc), constituindo ao todo 23 definições. O próximo passo foi enunciar cinco noções comuns e cinco postulados. Vale ressaltar que nesta dissertação não será diferenciado axioma de postulado.

Na obra de Euclides, o raciocínio é dedutivo, seguindo uma disposição lógica dos fatos admitidos como verdade. Tem-se um sistema axiomático, ou seja, para provar algo como válido, é preciso mostrar que essa afirmativa segue de outra afirmação que pode ser ou não um axioma. Porém, esse processo é limitado, conforme descrito no trecho abaixo:

O método axiomático, instrumento na criação do qual a análise dos postulados das paralelas desempenhou um papel importante, é hoje indispensável na Matemática. Ele mostrou que existe certa liberdade na criação de entes matemáticos. Esta liberdade, entretanto, não é ilimitada; caso contrário, a Matemática se esfacelaria em milhares de pedaços disjuntos e incompreensíveis. CARMO (1987, p.34).

De acordo com BRAITT & WHITLEY (2011, p. 46), existem dois requisitos que devem ser cumpridos para que uma prova esteja correta:

Requisito 1: *Aceitar como verdadeiras certas afirmações chamadas “axiomas” ou “postulados”, sem a necessidade de prova;*

Requisito 2: *Saber como e quando uma afirmação segue logicamente de outra.*

Voltando ao raciocínio do parágrafo 02 da p. 08, segue abaixo as cinco noções comuns e os cinco primeiros postulados de Euclides, de acordo com BARBOSA (1995, p. 02)

Noções comuns:

- I- Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais;
- II- Se iguais são adicionados a iguais, os totais obtidos são iguais;
- III- Se iguais são subtraídos de iguais, os totais obtidos são iguais;
- IV- Coisas que coincidem uma com a outra são iguais;
- V- O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Postulados

- I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos;
- II. Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta;
- III. Pode se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio;
- IV. Todos os ângulos retos são iguais;
- V. Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r : Se a soma dos ângulos formados (ver figura 01) é menor do que 180 graus, então m e n não são paralelas. Além disso, elas se intersectam do lado dos ângulos cuja soma é menor do que 180 graus.

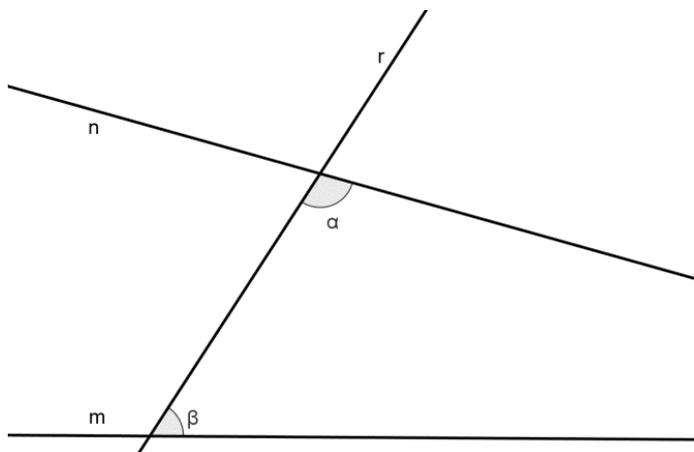


Figura 1 - Quinto Postulado de Euclides

Estes cinco postulados (ou premissas) são de grande importância para o desenvolvimento matemático até os dias atuais, pois, através deles, Euclides deduziu 465 proposições. Observa-se nas premissas a grande diferença no que diz respeito à simplicidade e evidência entre os quatro primeiros postulados e o último, conhecido como postulado das paralelas.

1.2. O postulado das paralelas

Muitas foram as tentativas em demonstrá-lo, visto que, para diversos matemáticos² ele parecia mais com um teorema. Para se ter uma ideia dos inúmeros esforços, em apenas um livro, intitulado *Saggio di una bibliografia Euclidea*, Parte IV, publicado em Bolonha em 1890, encontra-se 24 páginas de títulos de textos, publicados entre 1607 e 1890, tentando provar o quinto postulado.

Mesmo cobiçada durante séculos, tal demonstração sólida nunca foi elaborada. Talvez essa demora fosse uma das principais responsáveis pela popularização do postulado cinco. Acredita-se que até Euclides não tenha achado o postulado das paralelas tão óbvio ou intuitivo. Segundo CARMO (1987, p.02) isso é confirmado pelo fato de que ele retardou o quanto possível o uso deste postulado (...), pois o postulado cinco é usado pela primeira vez na 27^a proposição³ do Livro I dos Elementos. Assim, é de se admirar o feito de Euclides, pois enquanto a maioria dos indivíduos ficaram presos ao fato do quinto postulado não ser tão incontestável, Euclides publica seu livro e acaba deixando um obra prima na literatura matemática.

Já a proposição 28 dos Elementos equivale à recíproca do postulado 05, conforme analisado abaixo:

² Segundo BARBOSA (1995) Ptolomeu, Proclus, Nasiredin, Wallis, Saccheri e Lambert foram alguns dos matemáticos que tentaram, sem êxito, demonstrar o quinto postulado.

³ Proposição 27: Se uma reta, cortando outras duas retas, fizer com elas os ângulos alternos iguais, as mesmas duas retas serão paralelas.

Proposição 28: Uma reta r corta duas outras retas m e n formando ângulos designados como na figura 02. Se $\alpha + \beta$ é igual à soma de dois ângulos retos, então, as duas retas são paralelas.

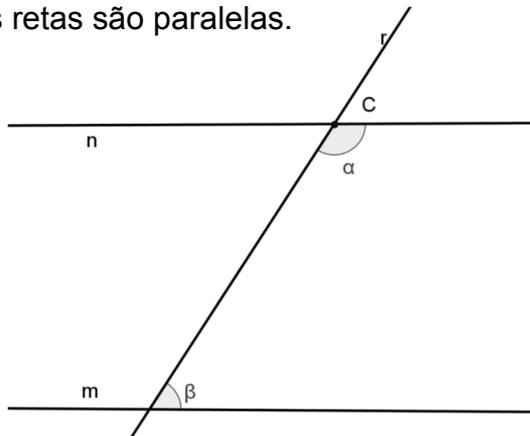


Figura 2 - $\alpha + \beta = 180^\circ$

Mas será que a recíproca da afirmação anterior é verdadeira? Ou seja, pode-se afirmar que $m \cap n = \emptyset \rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$? Uma das formas de responder essa pergunta é elaborar um estudo da relação entre o axioma cinco e a proposição 28.

1.3. Relação entre o axioma cinco e a proposição 28.

Podemos reescrever a proposição 05, da seguinte maneira:

Uma reta corta duas outras retas m e n formando ângulos colaterais internos α e β . Se $\alpha + \beta$ é menor que a soma de dois ângulos retos, então, as duas retas se interceptam, ou seja, $m \cap n \neq \emptyset$.

Mas a implicação anterior ($\alpha + \beta < 180^\circ \rightarrow m \cap n \neq \emptyset$) é equivalente a supor que m não intersecta n se $\alpha + \beta$ é maior ou igual a soma de dois ângulos retos ($m \cap n = \emptyset \rightarrow \alpha + \beta \geq 180^\circ$). É possível concluir então que se $m \cap n = \emptyset$ então $\alpha + \beta = 180^\circ$, pois $\alpha + \beta > 180^\circ$ implica que a soma dos suplementares de α e β seria menor que 180° e $m \cap n \neq \emptyset$ pelo postulado cinco, chegando a uma contradição!

Então conclui-se que o postulado cinco equivale a $m \cap n = \emptyset \rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$, que é a recíproca da proposição 28.

1.4. O substituto

Como as tentativas em demonstrar o axioma das paralelas usando apenas os quatro primeiros postulados continuaram durante anos, afirmações equivalentes ao axioma das paralelas foram lançadas e chamadas de substitutos.

Para BARBOSA (1995, p.09), afirmar que uma determinada proposição **P** é um substituto do quinto postulado é dizer que a teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados e mais a proposição **P** coincide com a Geometria de Euclides.

No capítulo 02 do livro BARBOSA (1995) é apresentado sete desses substitutos, como transcrito abaixo:

Substituto 01: *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.*

Substituto 02: *A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.*

Substituto 03: *Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.*

Substituto 04: *Existe um par de retas equidistantes.*

Substituto 05: *Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.*

Substituto 06: *Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último também é reto.*

Substituto 07: *Por qualquer ponto dentro de um ângulo menor do que dois terços de um ângulo reto pode-se traçar uma reta que corta os dois lados do ângulo.*

Além disso, BARBOSA sugere uma regra para saber se uma proposição é um substituto do quinto postulado:

1.5. Passos para verificar se uma proposição P é um substituto para o quinto postulado:

1º PASSO: *É preciso saber se P é uma proposição da Geometria Euclidiana;*

2º PASSO: *Demonstrar que, na teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados e mais P , pode-se provar o quinto postulado de Euclides como uma proposição.*

O mais conhecido dos substitutos do postulado cinco foi lançado no final do século XVIII por Playfair (em 1795 publicou uma edição dos Elementos de Euclides), conforme segue:

Axioma de Playfair: *Para cada reta r e cada ponto P que não pertence a r , existe uma única reta m que passa por P e é paralela a r .*

Para averiguar se a afirmação de Playfair é um substituto para o axioma de Euclides, faz-se uso do passo a passo dado anteriormente.

1º passo: *Verificar se o axioma de Playfair P é uma proposição da Geometria Euclidiana:*

Para afirmar que o axioma de Playfair é uma proposição, é preciso verificar a unicidade da reta m . Suponha que exista outra reta m' , diferente de m , com $m' \parallel r$ passando por P (conforme figura 03), observe que m' tem ângulo agudo com n , logo pela proposição cinco $m' \cap n \neq \emptyset$ e isso é uma contradição.

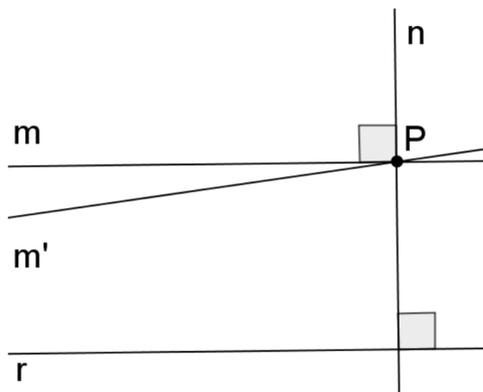


Figura 3 - m e m' paralelas a r

Resta mostrar que com os *quatro primeiros postulados e mais a ideia de Playfair, pode-se provar o quinto postulado de Euclides como uma proposição*. O que é feito por BARBOSA (1995, p.10).

1.6. Girolamo Saccheri (1667 - 1733)

Conforme citado anteriormente, desde o lançamento da obra de Euclides até o século XIX, muitos matemáticos tentaram, sem êxito, demonstrar o axioma das paralelas a partir dos quatro primeiros axiomas ou usando redução ao absurdo. Houve geômetras que tentaram até encontrar outra definição de paralelismo entre retas.

Além de não encontrar contradições, com as várias tentativas em provar o quinto postulado por redução ao absurdo, os estudiosos perceberam que existiam outras geometrias, dissemelhantes das de Euclides, mas com estruturas consistentes, abrindo espaço para o desenvolvimento de geometrias não euclidianas.

O padre jesuíta italiano Girolamo Saccheri mostrou, por contradição, outro modo de negar a prova do quinto postulado. Essa busca por novas geometrias representava, também, um grande risco para Saccheri, pois tais esforços eram contrários tanto a forma euclidiana de pensar o universo (centralizada nas ideias filosóficas da época), quanto a supremacia da razão para aceitar o conhecimento verdadeiro. Talvez isso explique o fato dos resultados de Saccheri terem ficado de lado durante anos.

O racionalismo dominava a forma de gerir o pensar na época de Saccheri e uma de suas características era a organização do pensamento, no qual qualquer resultado verdadeiro deveria estar fundamentado nas afirmativas anteriores a ele. Além do mais, os racionalistas acreditavam na evidente existência de Deus e em um universo impecavelmente ordenado.

Saccheri se encantou pela redução ao absurdo ao ler *Os Elementos* e tentou negar o famoso postulado, objetivando encontrar uma contradição no desenvolvimento de uma geometria sem o axioma das paralelas. Algo totalmente inovador frente a filosofia racionalista. Ele publicou seus resultados no livro *Euclides ab omni naevo vindications* (Euclides com toda falha retirada) publicada em 1773. Segundo EVES (1995, p.540), essa foi a primeira investigação científica do postulado das paralelas.

Partindo das 28 proposições iniciais dos Elementos de Euclides, Saccheri estudou o quadrilátero birretangular isósceles ABCD, na qual os lados AB e CD são congruentes e perpendiculares ao lado BC, agora chamado “quadrilátero de Saccheri” e descrito na figura 06. Observe que na imagem, o lado AD foi desenhado curvo, para evitar a ilusão de que ABCD seja retângulo.

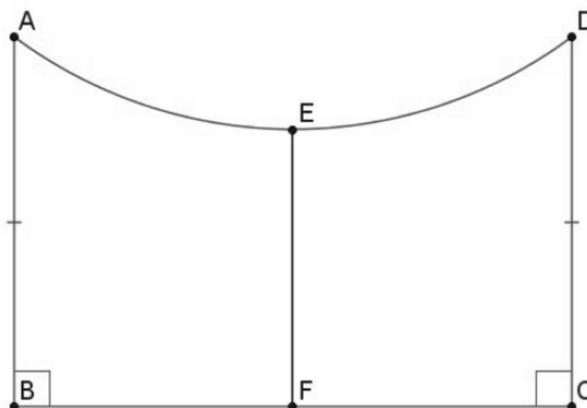


Figura 4 - Quadrilátero de Saccheri

A representação do Quadrilátero de Saccheri da figura 04, era algo totalmente inexistente e sem noção para os matemáticos da época de Saccheri, conforme cita (MONTAIGNE, 2011, p. 09) abaixo:

“Tudo aquilo que não fosse organizado, harmônico e imutável era produto das falsas sensações geradas pelos sentidos humanos e, portanto, deveria ser descartado. Deus havia criado todas as coisas e, portanto, o homem não podia contrapor-se a Ele e inventar novos espaços. As propriedades dedutivas e organizadas da Geometria Euclidiana tinham no racionalismo um trunfo que as defendia e legitimava.”

Mas nada impediu Saccheri de continuar a estudar o postulado cinco. Usando os quatro postulados anteriores de Euclides, ele mostrou que os ângulos do “topo” A e D, na figura 04, são congruentes.

Logo existem três possibilidades para estes ângulos:

- **Possibilidade 01:** os ângulos são agudos;
- **Possibilidade 02:** os ângulos são retos;
- **Possibilidade 03:** os ângulos são obtusos.

Os teoremas seguintes são usados para provar qual das possibilidades é satisfeita para o “ângulo do topo” do quadrilátero de Saccheri.

Teorema 01: O segmento que une os pontos médios da base e do topo do quadrilátero de Saccheri é perpendicular a ambos. (ver figura 04)

DEMONSTRAÇÃO: Considere o quadrilátero de Saccheri $ABCD$ da figura 04. Seja E e F os pontos médios dos lados AD e BC , respectivamente. Ao ligar os pontos A e D a F forma-se os triângulos congruentes ABF e FCD . Com isto AF é congruente a DF e como E é ponto médio de AD , segue-se que EF é a mediatriz do segmento AD e, portanto perpendicular a este segmento. Da congruência dos pares de triângulos ABF , AFE , EDF e DFC conclui-se que os ângulos adjacentes de vértice em F , são congruentes, provando que FE é perpendicular à base BC .

Parece até sem razão considerar os dois ângulos A e D na figura 04 como agudo ou obtuso, talvez Saccheri fez isso, querendo chegar uma contradição e assim provar o postulado das paralelas usando demonstrações por absurdo. Todavia, só obteve resultados para a possibilidade 03 (conforme teorema abaixo), pois teve muitas dificuldades para chegar a uma contradição.

Teorema 02: Os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são congruentes e agudos.

Segundo o BIANCONI (2011, p. 33) “Estudiosos da obra de Saccheri acham que no final de sua obra ele “provou” o quinto postulado (numa gritante falha de argumentação, completamente fora da fineza dos argumentos anteriores), devido ao medo da censura da Igreja”. Mesmo sem conseguir uma contradição para a possibilidade 01, ele obteve vários resultados. Embora, não o reconhecessem, Saccheri foi um dos principais precursores da Geometria Não-Euclidiana.

1.7. Johann Lambert (1728-1777)

Como Saccheri, Lambert tentou demonstrar o quinto postulado por um caminho não muito utilizado até então pelos matemáticos. Ele observou que dado um quadrilátero com três ângulos retos, agora chamado quadrilátero de Lambert, o outro ângulo seria agudo.

1.8. Simultaneidade de descobertas

O nosso próximo passo é analisar as contribuições do Alemão Gauss (1777-1855), do Russo Lobachewsky (1793-1856) e do Húngaro Bolyai (1802-1860) no surgimento, quase de forma simultânea, da geometria não Euclidiana.

1.8.1. Carl Fridrich Gauss (1777-1855)

Carl Fridrich Gauss (1777-1855), nascido na cidade Brunswick, foi considerado o mais famoso matemático no início do século XIX e um dos maiores de todos os tempos, foi primeiro a esclarecer, sem publicar nada, qual o papel do quinto postulado e as riquezas que escondiam.

O primeiro contato de Gauss com as questões envolvendo o postulado cinco foi com o professor e amigo Martin Bartels. Mas o interesse de Gauss pelo quinto postulado veio amadurecer quando era discente da Universidade de Göttingen e tinha como professor Abraham Kastner, um matemático que tinha profundo interesse no postulado das paralelas. Vale ressaltar que, Kastner também foi professor de Martin Bartels, além disso, estava matriculado no curso de Kastner, Farkas Bolyai, pai de János Bolyai, segundo O'SHEA (p. 63) (...) Após as aulas, Farkas e Gauss discutiam os axiomas de Euclides e a possível independência do postulado das paralelas.

Gauss, apresenta a seguinte definição de retas paralelas, retirada do BONOLA, (1911, p.68):

Definição 01: Sejam AM e BN duas retas coplanares. Diremos que AM é paralelo a BN se:

- AM e BN não se encontram;
- Qualquer reta que passa por A, localizado entre AM e AB, encontra a BN.

De acordo com a definição de paralelas dada em *Os Elementos*⁴, a condição (a) indica que AM e BN são paralelas. Essa condição deixa aberta a possibilidade de passar por A várias retas que não encontrem BN, mas a condição (b) mostra que AM é a única paralela a BN que passa por A no mesmo sentido em que se tenha desenhado as retas BN e AM. Ele supõe uma linha reta passando por A, para começar a partir da posição AB, e, em seguida, para girar continuamente no lado para o qual BN é desenhado, até que se atinja a posição AC, conforme figura 05

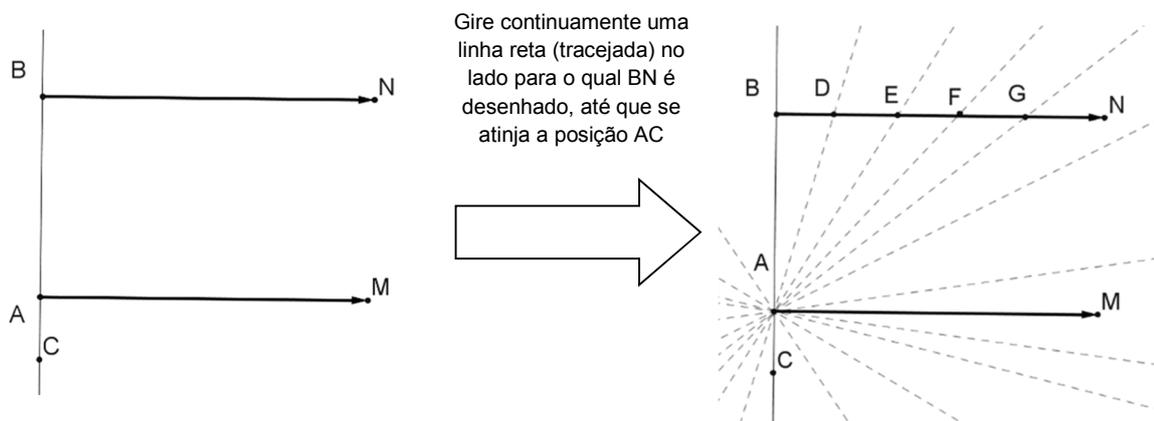


Figura 5 - Paralelas de Gauss

Esta linha começa por intersectar a semirreta BN e haverá uma, e apenas uma posição, separando as linhas que cruzam BN daquelas que não corte BN,

⁴ Em *Os Elementos*, retas paralelas são definidas como retas que estão no mesmo plano e, se prolongadas indefinidamente em ambas direções, não se encontram em nenhuma delas. Adaptando para linguagem corrente, pode-se considerar que a definição diz que retas paralelas são retas definidas no mesmo plano que não se intersectam.

e portanto, da nossa definição, AM é paralelo a BN, uma vez que não pode, evidentemente, haver última linha do conjunto de linhas que intersectam BN.

Tendo por base essa definição e a figura 05, é possível chegar a outros resultados sobre paralelismo:

- O paralelismo da linha AM para a linha BN, independe dos pontos A e B, desde que o sentido em que as linhas estão a ser produzidas indefinidamente não se altere;
- É possível verificar uma comutatividade e transitividade de linhas paralelas.

Segundo Gauss, foi uma perda de tempo no decurso de milênios as tentativas em demonstrar o axioma das paralelas. Para ele, era preciso abrir as portas para uma nova geometria.

Mas as primeiras ideias sobre Geometrias não- Euclidianas elaboradas por Gauss foram logo reprimidas devido a filosofia racionalista preponderante entre os matemáticos e a pressão da igreja a qualquer pensamento que se opunha a Geometria Euclidiana. Segundo FERREIRA (2011), quando esses matemáticos souberam da invenção das novas geometrias, opuseram-se a elas. Gauss acabou não divulgando as descobertas restantes, talvez por prudência, como escreveu a Wilhelm Bessel (1784-1846), em 27 de janeiro de 1829, afirmando que: - *Provavelmente nunca publicaria seus achados sobre esse assunto porque temia o ridículo (ou, em suas próprias palavras), temia o clamor dos beócios (os crentes da natureza sagrada do espaço tridimensional), uma referência figurativa a uma tribo grega de atoleimados (retardados mentais).*

1.8.2. János Bolyai (1802- 1860)

Outro que também aventurou-se no estudo do axioma das paralelas, como uma nova geometria, foi János Bolyai. Segundo textos históricos, o pai de Bolyai, o matemático e amigo de Gauss, Farkas Bolyai, ficou muito preocupado

com a ousadia do filho, chegando até escrever uma carta para ele, pedindo para que interrompesse seus estudos.

Pelo amor de Deus, imploro a você, desista. Receie isto tanto quanto as paixões sensuais porque isso, também, pode tomar todo o seu tempo e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida. BOYER (2012, p.360)

Mesmo com o pedido do seu pai, János não desistiu, criando o que ele mesmo chamou de "*Ciência Absoluta do Espaço*". Segundo BOYER (1995, p. 361) Bolyai mandou suas reflexões ao pai, que as publicou sob a forma de apêndice em um tratado, com um longo título em latim começando com Tentamen, um livro de dois volumes, com imprimatur datado de 1829, mas só apareceu em 1832. Farkas apresenta o trabalho do filho sobre Geometria não euclidiana a Gauss⁵, mas este não deu muita importância ao que foi apresentado por Farkas, pois segundo ele, já tinha chegado aos mesmos resultados anteriormente.

1.8.3. Nicolai Ivanovich Lobachewsky (1793 - 1856)

Considerado um dos maiores matemáticos do seu tempo, o russo Nicolai Ivanovich Lobachewsky (1793 - 1856) afirmava que a geometria não era como se pensava: uma ciência exata com verdades absolutas.

Partindo da análise de vários estudos do postulado das paralelas e da ideia de Saccheri, Lobachewsky inaugura uma nova geometria, independente da hipótese de Euclides. Ele afirma que por um ponto B fora de uma reta r podem ser traçadas mais de uma reta no plano que não encontram r (ver figura 06), essa afirmativa também é chamada de postulado Lobachewsky, publicando seu

⁵ Cujas contribuições para o desenvolvimento da Geometria Euclidiana serão também expostas neste trabalho.

feito no Kazan Messenger (espécie de jornal) de 1829, através do artigo “Sobre os Princípios da Geometria”.

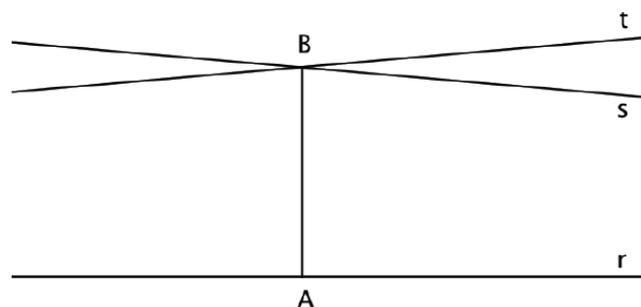


Figura 6 - Retas paralelas segundo Lobachewsky.

A divulgação do conteúdo do artigo foi dificultada, pois o texto foi elaborado em russo, além de ter sido publicado em um jornal com pouca circulação. Algum tempo depois, Gauss leu o artigo e ficou tão admirado que propôs a admissão do matemático na Sociedade Real de Ciência de Göttingen, sendo o pedido de Gauss aceito em 1842.

Talvez até o próprio Lobachewsky ficou impressionado com seu achado.

[...] Com esse novo postulado Lobachewsky deduzia uma estrutura harmoniosa sem contradições lógicas inerentes. Esta era em todos os sentidos uma geometria válida, mas parecia tão contrária ao senso comum, mesmo a Lobachewsky, que ele a chamou de “geometria imaginária”. BOYER (2010, p.360)

Para facilitar o conhecimento dos seus estudos sobre o postulado das paralelas, Lobachewsky lança em 1840, em alemão, o livro *Investigação Geométricas sobre a Teoria das Paralelas*.

Em 1855, alguns anos antes de sua morte, já cego, Lobachewsky escreveu *Pangeometria*, em francês, que é uma versão melhor elaborada do livro anterior. Inicialmente Lobachewsky chama a nova geometria de imaginária,

entretanto, mais tarde deu-lhe o nome de *Pangeometria* ou *Geometria Imaginária*.

O fato de Gauss não divulgar seus pensamentos fez com que os merecimentos da descoberta da Geometria não-euclidiana ficassem com Lobachewsky e Bolyai, conforme texto abaixo:

Aparentemente, o primeiro a perceber, com algumas hesitações, a natureza real do problema foi Gauss. Em uma carta a Olbers em 1817, Gauss menciona estar convencido que a necessidade da Geometria (euclidiana) jamais poderia ser demonstrada e que, em contraste com a Aritmética (que era para Gauss uma concepção *a priori*), a Geometria deveria ser classificada junto com a Mecânica (uma ciência experimental). Isto era na época uma concepção filosoficamente audaciosa, pois contradizia frontalmente as ideias de Kant. CARMO (1987, p.30).

Muitos estudiosos acreditam que não existe nenhuma relação entre as descobertas simultâneas de Lobachewsky, Bolyai e Gauss, mas FERREIRA (2011) faz uma reflexão muito importante. Segundo ele, mesmo em períodos diferentes, os três matemáticos tiveram o mesmo professor, Abraham Kaestner, um apreciador da história da demonstrabilidade do quinto postulado.

Na figura 07, é possível observar que as retas t e s passam por um ponto B (B não pertencente a reta r) e não interceptam a reta r . Onde t e s dividem o plano hiperbólico em quatro regiões 01, 02, 03 e 04. Observe que as retas que passam por B e regiões 02 e 04 são retas que não interceptam a reta r . Isso pode levar a duas perguntas: Há um número infinito de retas que passam por P e não interceptam n ? Se sim, é possível justificar matematicamente tal situação?

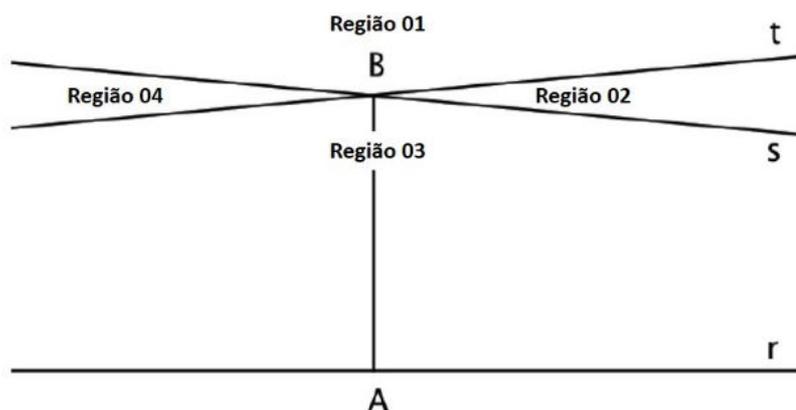


Figura 7-Retas paralelas segundo Lobachewsky.

Quem responde essa e outras perguntas pós as descobertas de Gauss, Lobatschewsky e Bolyai é a geometria hiperbólica. Essa, como visto anteriormente, aceita os postulados de Euclides, com exceção do postulado cinco que é substituído pelo postulado de Lobachewsky.

Postulado de Lobachewsky: *Por um ponto B fora de uma reta r podem ser traçadas mais de uma reta no plano que não encontram r*

Um das consequências dessa nova Geometria, na qual se considera o postulado enunciado acima, conforme Gauss já tinha previsto, os *triângulos semelhantes não existem*, logo, na Geometria Hiperbólica, se dois triângulos têm os ângulos iguais, então eles são congruentes e outro resultado, é que *a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180°*. Esse último será detalhado abaixo:

Teorema 03: A soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é menor que 180°.

Demonstração:

Seja **ABC** um triângulo um triângulo retângulo, com ângulo reto em **B**.
(figura 08)

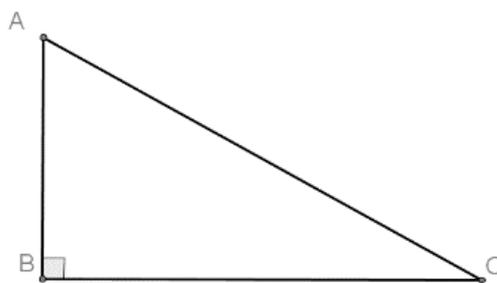


Figura 8- Triângulo retângulo

Marque sobre o lado **AC** do triângulo o ponto **E**, ponto médio da hipotenusa do triângulo **ABC**. (figura 09)

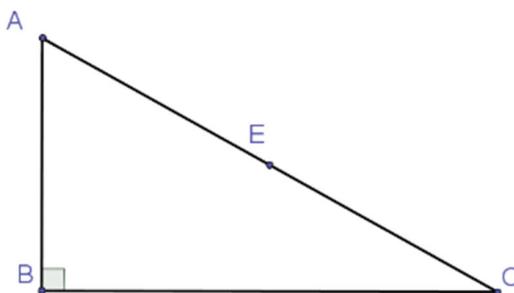


Figura 9- Triângulo retângulo no qual $\text{med}(AE) = \text{med}(EC)$

Construa a reta perpendicular ao lado **BC** e que passa pelo ponto **E**, chame o ponto que essa perpendicular intercepta **BC** de **D**. (figura 10)

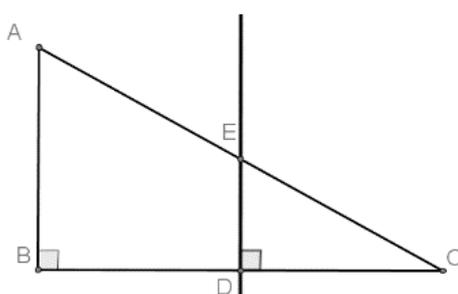


Figura 10- Triângulo retângulo no qual $DE \perp BC$

Trace **AF** tal que $\hat{CAF} = \hat{ACB}$. Logo os triângulos **AEF** e **CED** serão congruentes pelo caso *ALA* ($\hat{CAF} = \hat{ACB}$, **AE=EC** e $\hat{AEF} = \hat{DEC}$ são OPV), assim \hat{AFD} é reto. (figura 11)

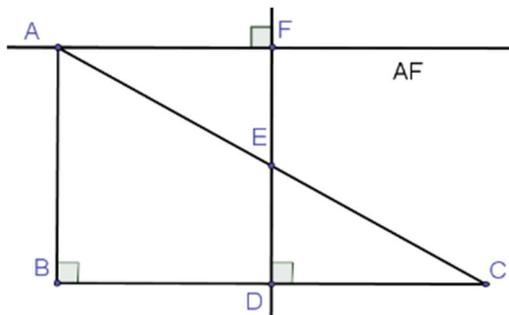


Figura 11- Triângulo retângulo no qual $AF \perp FD$

Observe também que **ABDF** é um quadrilátero de LAMBERT, assim $\hat{BAC} + \hat{CAF} \angle 90^\circ \Rightarrow \hat{BAC} + \hat{ACB} \angle 90^\circ$, visto que $\hat{CAF} = \hat{ACB}$. Logo $\hat{ABC} + \hat{BAC} + \hat{ACB} \angle 180^\circ$, como queríamos demonstrar.

Teorema 04: A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é menor que 180° .

Demonstração:

Seja **ABC** um triângulo qualquer e **D** o pé da altura do triângulo relativo ao vértice A, conforme figura 12.

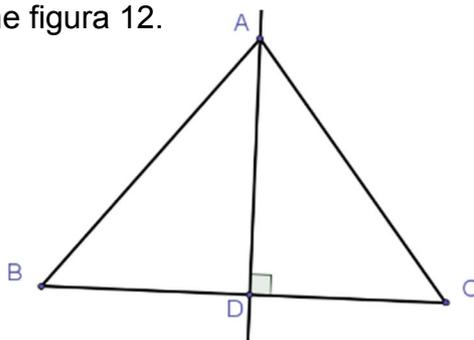


Figura 12- D o pé da altura do triângulo relativo ao vértice A

Observe que os dois triângulos **ABD** e **ADC** são retângulos, assim pelo teorema anterior,

$$\hat{B} + \hat{BAD} + \hat{BDA} \angle 180^\circ \text{ e } \hat{ADC} + \hat{DAC} + \hat{C} \angle 180^\circ (*)$$

Além do mais,

$$\hat{BAD} + \hat{DAC} = \hat{A} \text{ e } \hat{BDA} + \hat{ADC} = 180^\circ (**)$$

Portanto, comparando (*) e (**), obtém-se:

$$\hat{B} + \hat{BAD} + \hat{BDA} + \hat{ADC} + \hat{DAC} + \hat{C} \angle 360^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{A} + 180^\circ + \hat{C} \angle 360^\circ$$

$\hat{B} + \hat{A} + \hat{C} \angle 180^\circ$, como queríamos demonstrar. Esse triângulo será chamado de triângulo hiperbólico.

CAPÍTULO 02 – Modelos Hiperbólicos

2.1. Introdução

No capítulo anterior observa-se que o que caracterizou o início das Geometrias não-Euclidianas, no começo do século XIX, foi quando Gauss, Lobatschewsky e Bolyai tentaram demonstrar o 5º Axioma de Euclides usando a negação da tese. Essa maneira de idealizar informações científicas, através da negação de conhecimentos científicos estabelecidos⁶, fez “abrir as portas” para novas teorias matemáticas. Sendo tal acontecimento, um dos responsáveis pelo grande avanço dos estudos matemáticos dos anos posteriores.

As demonstrações feitas por Gauss, Lobatschewsky e Bolyai não eram acompanhadas de imagens. Depois de décadas, surge a necessidade de desenvolver um modelo⁷ para as Geometrias não-Euclidianas. Os mais conhecidos modelos são o de Felix Klein (1849-1925) e o de Henri Poincaré

⁶ No começo do século XIX a Igreja Romana, incorporada com a filosofia racionalista, “ainda” influenciava diretamente nos estudos científicos. Essa igreja acreditava na verdade absoluta, temos como exemplo de conhecimento instituído a Geometria Euclidiana.

⁷ Para FERREIRA (texto 18) uma coisa que influenciou na demora em representar, através de imagens, as ideias de Geometria não-Euclidiana, foi a comunidade científica aceitar ilustrações com “retas curvas”, “triângulos cuja soma dos ângulos internos não fosse igual a dois retos” ou “inexistência de figuras semelhantes”.

(1854-1912). Eles construíram modelos baseados na Geometria Euclidiana. Assim, uma contradição na geometria hiperbólica implicaria uma incoerência na geometria euclidiana, conforme texto abaixo:

Mesmo após todo o estudo feito, pode ainda restar a suspeita de que, com algum esforço a mais, poderemos chegar a uma contradição. Como estar certo de que tudo o que deduzimos não é apenas uma miragem, algo que parece real mas que não existe? A maneira mais simples de nos livrarmos de uma vez por todas desta dúvida é exibindo um modelo da Geometria hiperbólica, construído usando a Geometria Euclidiana. (BARBOSA, p.23)

2.2. Modelo de Felix Klein

Felix Klein apresenta um modelo no qual o plano é o interior de um disco aberto D de centro A (ver figura 13) e raio r , qualquer ponto no interior⁸ do disco é um ponto hiperbólico, os pontos da circunferência representam o infinito e as retas, sem extremidades, são **cordas do disco**⁹, ou seja, as retas têm tamanho infinito, em um espaço ilimitado. Ou seja:

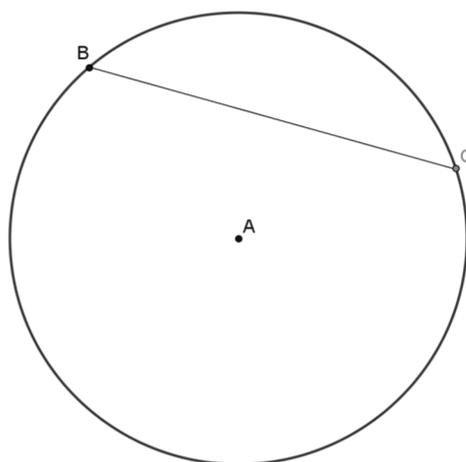


Figura 13- O segmento BC (sem as extremidades) é uma corda do disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$$

⁸ Também chamado de *plano de Lobachewsky*.

⁹ Cordas do disco: (segundo o IEZZI, 7, p. 148) é todo segmento cujas extremidades pertencem à circunferência.

É importante refletir sobre o termo infinito presente na frase do parágrafo anterior: *as retas têm tamanho infinito, em um espaço ilimitado*. Ou seja, vale ressaltar qual o significado da palavra infinito nessa obra dissertativa para não gerar algum erro de interpretação, pois ao dizer que a reta tem uma extensão infinita dentro de um espaço limitado, objetiva-se relatar que o tamanho da imagem diminui na proporção que se aproxima da fronteira do plano (circunferência do círculo). Assim, a extensão de uma reta (no modelo, uma corda) torna-se infinita, pois se um indivíduo continuar medindo essa reta, não conseguirá atingir a extremidade da corda.

Para Klein retas paralelas continuam sendo retas que não possuem ponto em comum, na figura 14 as retas BC, CD e EF são paralelas.

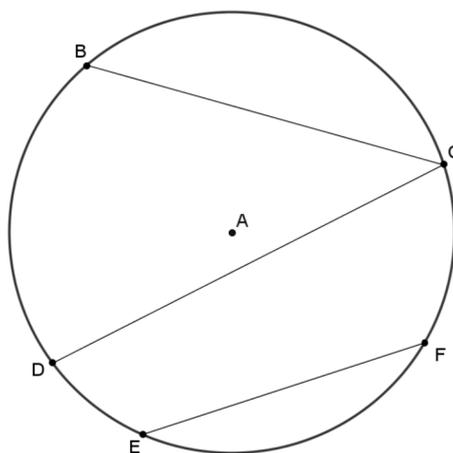


Figura 14- As retas BC, CD e EF são paralelas.

No modelo de Klein, a distância entre quaisquer dois pontos hiperbólicos, por exemplo D e E na figura 15, é dada pela fórmula $d(DE) = \left| \ln \left(\frac{DB}{DC} \frac{EB}{EC} \right) \right|$.

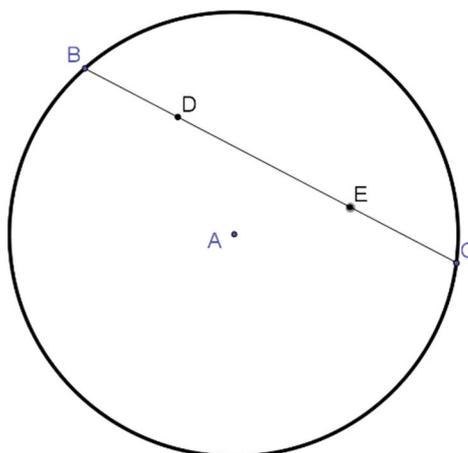


Figura 15- Plano de Klein

Tal que:

- B e C são pontos extremos da corda BC;
- DB, DC, EB e EC são distâncias euclidianas.

Uma abordagem mais aprofundada sobre distâncias hiperbólica encontra-se no material de PETRUNIN (2013).

2.3. Modelo de Poincaré

Neste modelo os pontos euclidianos pertencentes ao interior de uma circunferência formam um plano chamado hiperbólico, como exposto na figura 16. Nessa ilustração, a circunferência possui centro O e raio OR, além disso, qualquer ponto P pertence ao plano, se $OP < OR$. A união da circunferência com o plano hiperbólico é chamada de Disco de Poincaré, nomeado em homenagem ao matemático francês Henri Poincaré (1854-1912), pois, foi ele o primeiro a usá-lo.

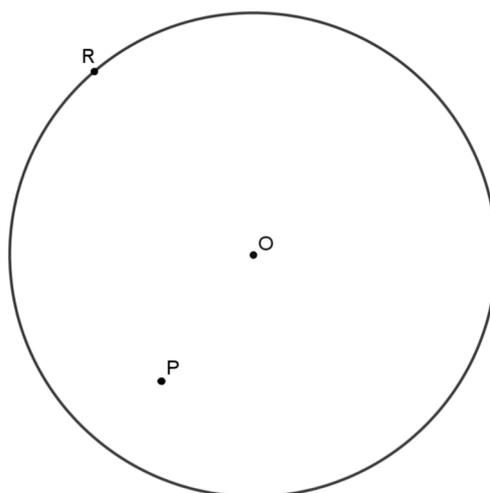


Figura 16- Disco de Poincaré

Os pontos da circunferência, ou seja, pertencentes a “borda” do Disco de Poincaré, são usados para fazer construções, mas não fazem parte do plano hiperbólico, tais pontos são chamados de **pontos ideais**, para FERREIRA, (2011, p. 49) esse nome é dado porque os pontos são idealizados no “infinito”. Também, pode-se referir a essa circunferência, ou local dos pontos ideais, como **horizonte**.

Antes de continuar com o estudo sobre o Disco de Poincaré, é importante rever algumas definições e proposições:

Definição 02 - Corda aberta

Também chamada de diâmetro aberto, é o seguimento de reta que liga dois pontos de uma circunferência e que passa pelo centro. No caso do Disco de Poincaré as extremidades da corda não pertencem ao plano hiperbólico

Definição 03 - Inverso de um ponto em relação a uma circunferência qualquer.

Seja P ($P \neq O$) um ponto euclidiano qualquer e considere uma circunferência γ de raio r e centro O . O **inverso** de P em relação a γ é um único ponto P' que pertence a semirreta OP tal que $(OP).(OP')=r^2$.

2.4. Construção do inverso de um ponto P em relação a circunferência γ :

1º caso: P pertence a circunferência γ

Nesse caso temos que $P=P'$, pois $OP=r$ e $OP'=r$, assim $(OP).(OP')=r^2$, conforme ilustrado na figura 17.

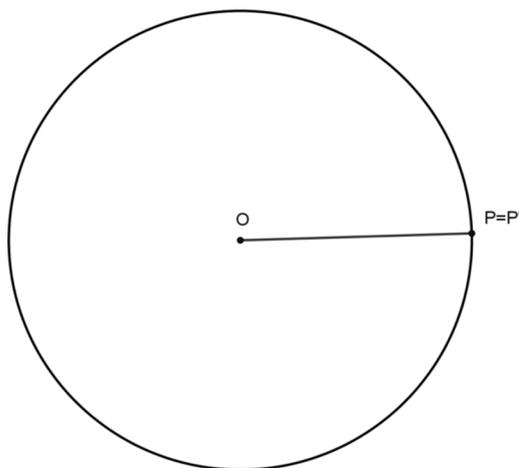


Figura 17 – construção do inverso de um ponto

2º caso: Se P está no interior de γ então P' está no exterior e vice-versa.

A construção seguinte é para o caso de P pertencente ao interior de γ .

Passo 01: Construa a circunferência γ de raio r , centro O e marque um ponto P no seu interior (ver figura 18).

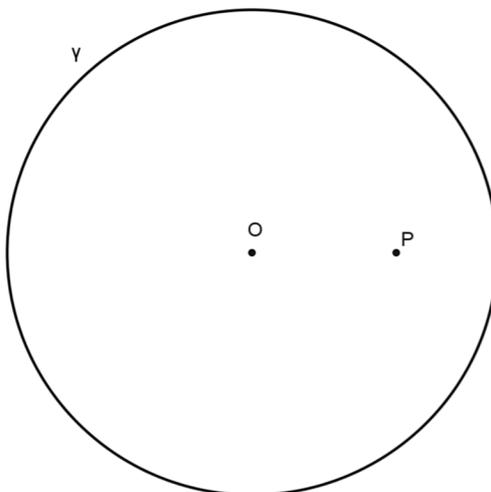


Figura 18– construção do inverso de um ponto

Passo 02: Trace a semirreta OP e marque o ponto A de intersecção de OP e γ (ver figura 19).

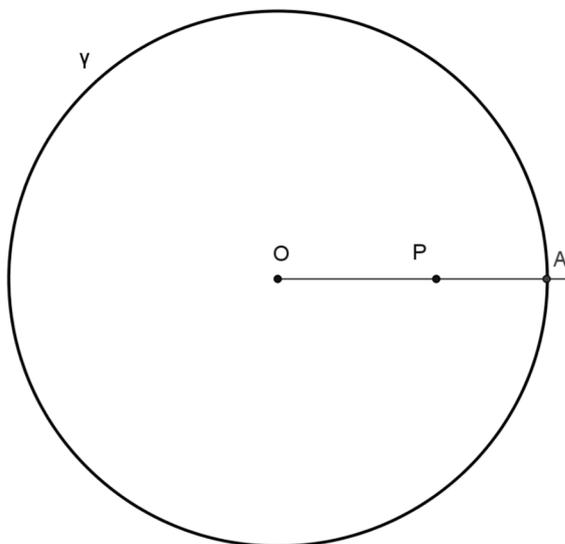


Figura 19- construção do inverso de um ponto

Passo 03: Construa uma reta perpendicular a semirreta OP passando pelo ponto P e marque os pontos B e C de intersecção dessa perpendicular com γ (ver figura 20).

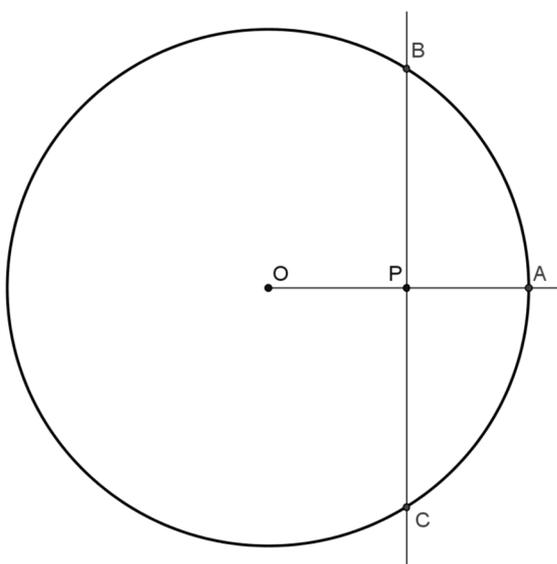


Figura 20- construção do inverso de um ponto

Passo 04: Construa o segmento OB (ou OC) e trace a reta perpendicular que passa pelo ponto B (ou C) e marque o ponto P' de intersecção dessa

perpendicular com a semirreta OP . O ponto P' é o inverso de P em relação a γ , ou círculo de inversão, ver figura 21.

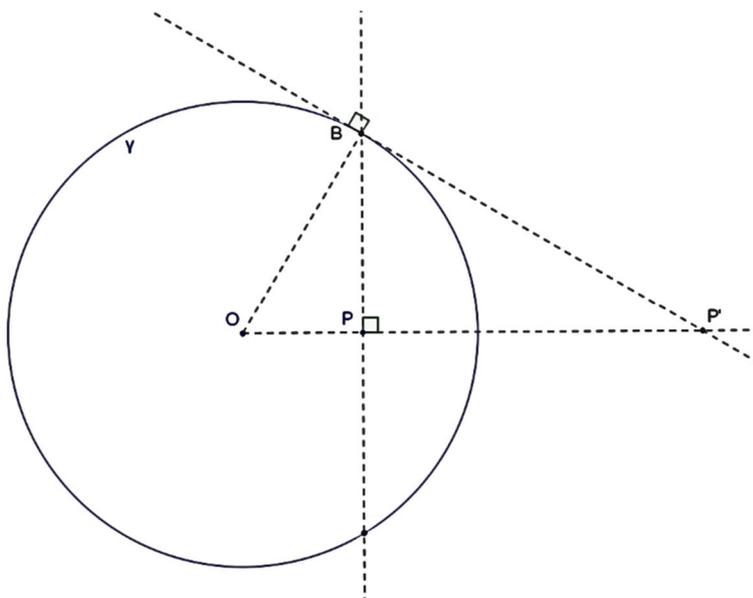


Figura 21- construção do inverso de um ponto

Com a figura anterior mostra-se, geometricamente, a igualdade $(OP).(OP')=r^2$, pois, os triângulos OBP e OBP' são semelhantes pelo caso AA(ângulos internos côneugros). Portanto:

$$\frac{OP}{OB} = \frac{OB}{OP'} \therefore OP \cdot OP' = OB^2 \therefore OP \cdot OP' = r^2$$

3º caso: Se P está fora da circunferência, conforme observado na figura 22, o inverso é um ponto do plano hiperbólico.

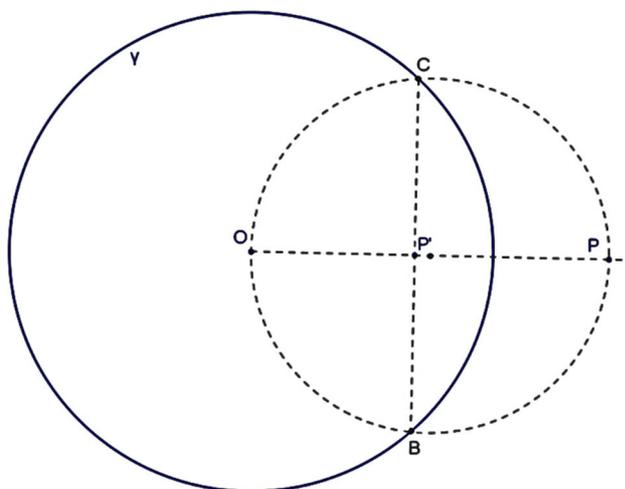


Figura 22- P fora da circunferência

4º caso: Caso P é o centro do círculo de inversão O , o inverso é o próprio centro O .

Observa-se também nas figuras 20 e 21 que a medida que P se afasta do centro da circunferência de inversão o seu inverso tende a se aproximar de O .

Definição 04 - Circunferências ortogonais:

Sejam as circunferências γ e δ , elas são ortogonais se seus raios são perpendiculares nos pontos de interseção de γ e δ .

2.5. Construção de circunferências ortogonais:

Passo 01: Seja a circunferência γ , um ponto P no interior de γ e o seu inverso P' (como construído anteriormente). Para traçar uma circunferência δ ortogonal a γ , basta construir um círculo com centro em P' e raio de medida $P'B$ (ver figura 23).

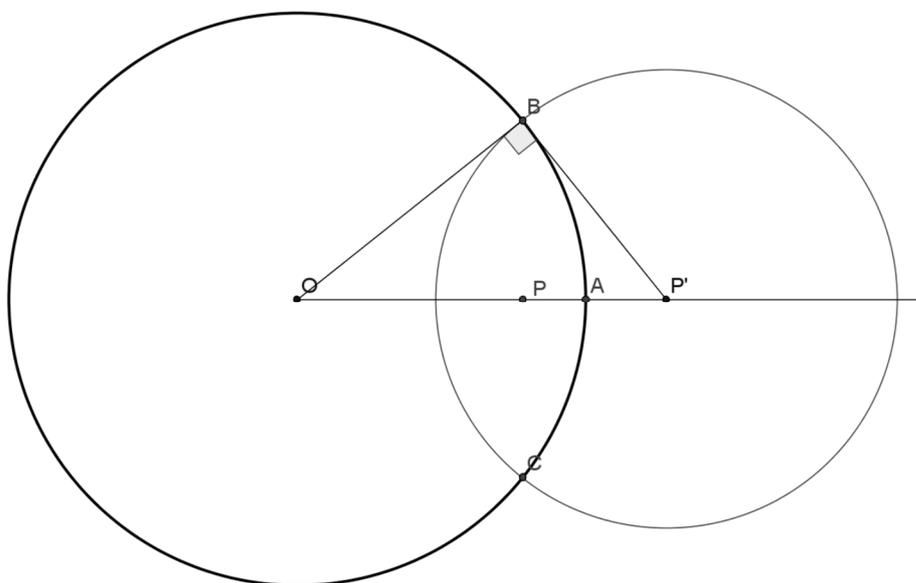


Figura 23- circunferências ortogonais

Proposição 02 - Potência de um ponto: Seja um ponto P, exterior ou interior a uma circunferência δ , se duas retas por P intersectam δ em pares de pontos (A, B) e (C, D), respectivamente, então:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Observação: Pelo enunciado da proposição, P pode ser interior ou exterior a circunferência γ , conforme podemos verificar na figura 24 (a e b)

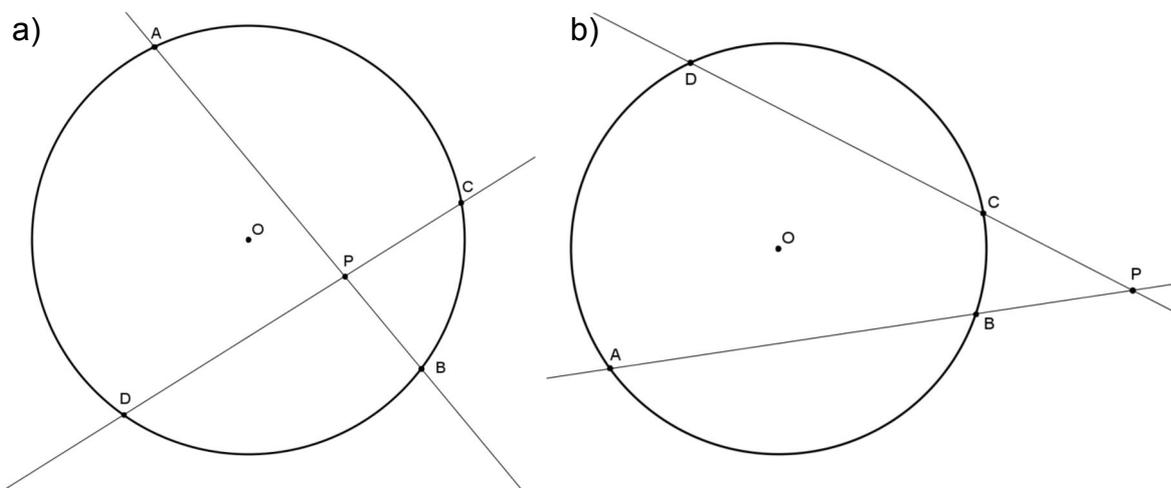


Figura 24- Potência de um ponto

Prova da proposição 02: é possível demonstrar a igualdade $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ para o caso da figura 24 (a). Na figura 25, os ângulos DAP e DCB são iguais, pois subtendem o mesmo arco. Além disso, os ângulos APD e CPB são OPV, logo os triângulos APD e PBC são semelhantes. Dessa maneira, pode-se afirmar que $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \therefore OP \cdot OP' = OB^2$

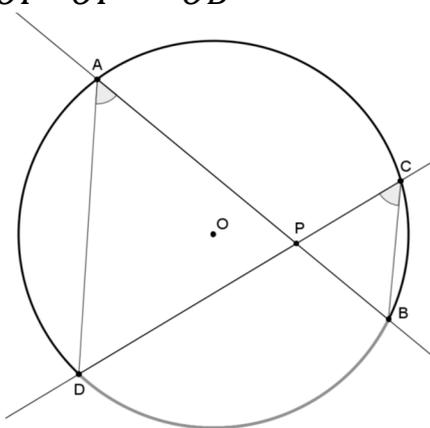


Figura 25- Potência de um ponto

Prova-se que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ para o caso da figura 24 (b), usando raciocínio da demonstração anterior.

Proposição 03: Sejam P um ponto do plano euclidiano e φ uma circunferência de centro O e raio r , tal que, P não pertença a φ e $P \neq O$. A circunferência ε corta φ ortogonalmente em T e U se, e somente se, ε passa por Q , que é o inverso de P em relação a φ .

Demonstração

Prova-se primeiramente a ida, ou seja, se uma circunferência δ passando por P corta φ ortogonalmente, então δ passa por Q .

Considere que na figura 26 a circunferência ε é ortogonal a circunferência φ . Além disso, ε corta φ nos pontos T e U . Como a semirreta OP corta ε nos pontos P e Q , pela definição 01 da (p.23), $OP \cdot OQ = OT^2 = r^2$, mas pela definição 03 da (p.26) Q é o inverso de P em relação a φ .

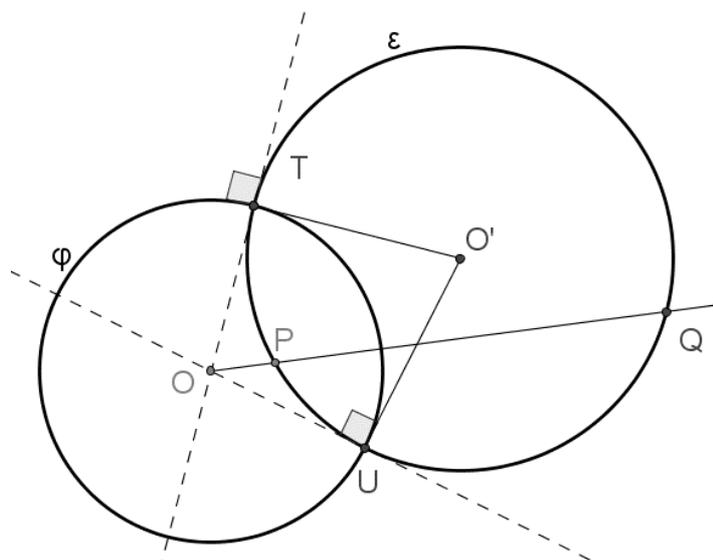


Figura 26- Potência de um ponto

A prova da volta dar-se-á da seguinte forma:

Como o ponto Q e P são inversos em relação a circunferência φ , logo pertencem a mesma circunferência ε e o centro O' desta circunferência pertence

à mediatriz m de PQ . Além disso, como ponto O é externo a ε , $P \neq O$, existe $U \in \varepsilon$ ponto de tangência da reta que passa por O à circunferência ε . Assim, por *Potência de um ponto*:

$$OU^2 = OP \cdot OQ = r^2 \rightarrow U \in \varphi$$

Logo, a circunferência ε corta φ ortogonalmente em P .

Observação: essa circunferência é única.

Proposição 04: Sejam P e Q pontos internos à uma circunferência $\varphi(o,r)$, tal que $P \neq Q \neq O$. Se os pontos P' e Q' são inversos de P e Q respectivamente, em relação a φ , então os pontos P, Q, P' e Q' pertencem a uma mesma circunferência.

Na ilustração 27 alguns elementos do modelo de Poincaré são apresentados. O segmento AB é a corda aberta e ED o arco de circunferência aberto ortogonal ao horizonte.

Observação: AB e ED também são chamadas de retas hiperbólicas ou h -retas

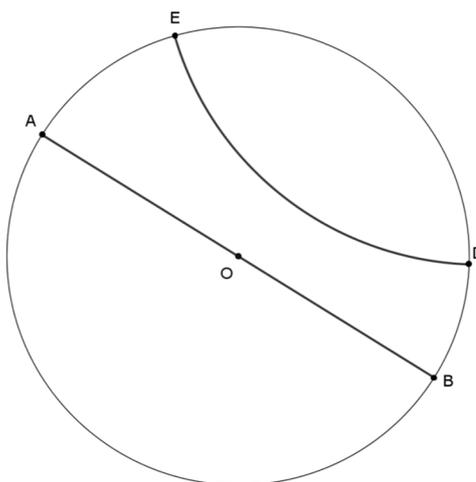


Figura 27- círculo de Poincaré

Teorema 05: *Sejam C uma circunferência e A um ponto qualquer do plano que contém C . Uma circunferência C' que passa por A é ortogonal a C se, e somente se, o centro de C' está localizado na mediatriz de A e o seu inverso A' em relação a C .*

Esse teorema é usado para construir h-retas que passam por um ponto do plano hiperbólico. Segundo LOVIS (2012, p. 112), essa afirmativa garante que a mediatriz de um ponto A e o seu inverso A' em relação a uma circunferência C , é o **Lugar Geométrico** dos centros das circunferências ortogonais a C que passam pelo ponto A .

2.6. Ângulos entre duas retas hiperbólicas:

No plano de Poincaré, a congruência de ângulos tem o significado euclidiano usual. Ou seja, CR e CS são duas retas hiperbólicas que se interceptam no ponto, o ângulo α determinado por elas é o ângulo euclidiano formado pelas semirretas, também euclidianas, que são tangentes aos arcos (retas hiperbólicas) no ponto C em que estas se interceptam, conforme figura 28. Assim, para calcular a medida do ângulo entre duas h-retas, realiza-se o seguintes procedimento:

- 1º) *Encontre as retas euclidianas tangentes aos arcos no ponto C ;*
- 2º) *Calcule a medida do ângulo formado por essa duas retas.*

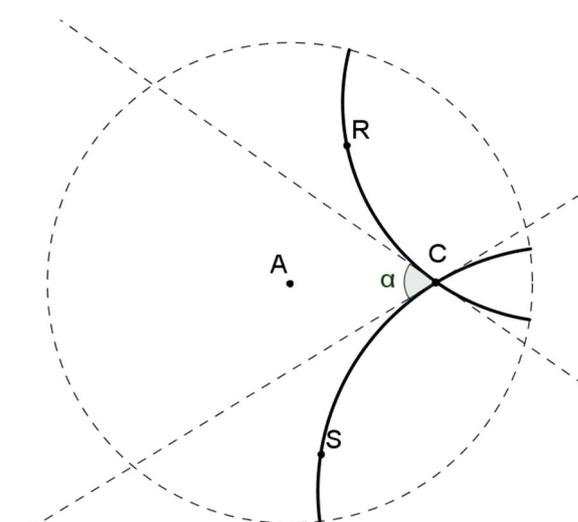


Figura 28- Ângulo α entre as h-retas CR e CS

Na figura 29 (a) o ângulo formado entre as h-retas CR e CS é dado da mesma maneira que é definido na Geometria Euclidiana, ou seja, o ângulo mensurado entre duas retas CR e CS.

Na figura 29 (b) o ângulo formado entre as h-retas é definido como o ângulo euclidiano formado pela a corda aberta AC e a reta tangente ao **arco de circunferência aberto ortogonal ao horizonte CR**.

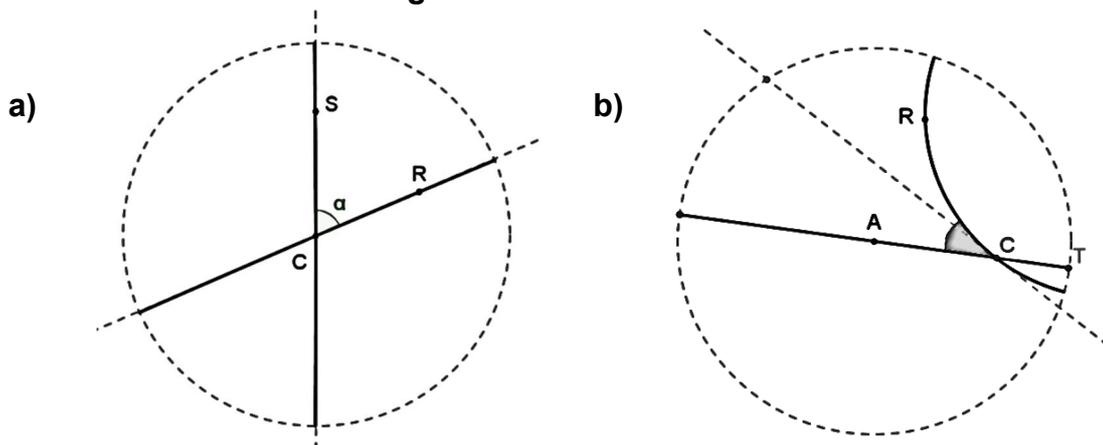


Figura 29- Ângulo α entre as h-retas (casos especiais)

2.7. Menor distância entre dois pontos distintos no disco de Poincaré:

A menor distância entre dois pontos no plano hiperbólico é dada pela seguinte equação:

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{\overline{AU} \cdot \overline{BV}}{\overline{AV} \cdot \overline{BU}} \right| (*)$$

No qual,

- U e V são **pontos ideais** da h-reta AB;
- $\overline{AU}, \overline{BV}, \overline{AV}$ e \overline{BU} são segmentos de medidas euclidianas. (ver figura 30)

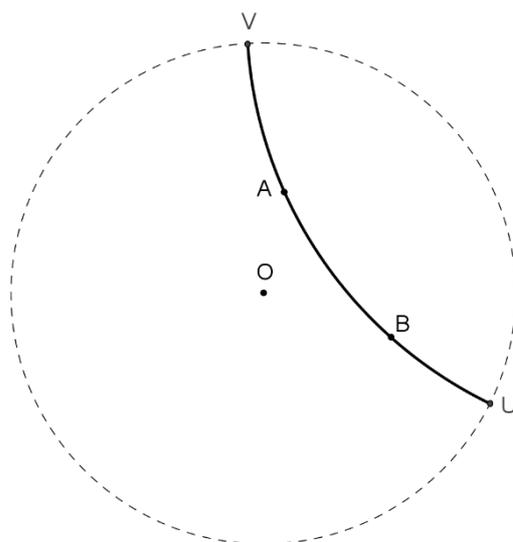


Figura 30- distância entre pontos na h-reta

LOVIS & FRANCO (2012, p.114) descreveram da seguinte maneira as distância entre A, B, O e U, usando a equação (*)

Poincaré usou esta métrica para construir um espaço ilimitado (plano hiperbólico), em um espaço limitado com a métrica euclidiana (circunferência euclidiana). A métrica desenvolvida por Poincaré permite que quando os pontos A e B se aproximam dos pontos ideais o valor das medidas AV e BU diminuem, conseqüentemente o logaritmando aumenta e, assim, depois da aplicação da função logarítmica a função distância tende ao infinito. Ao aproximar os pontos A e B o valor das medidas AU e BV diminuem, o que ocasiona, depois da aplicação da função logarítmica uma distância que tende a zero.

A linha de uma superfície no disco de Poincaré que é determinada pela menor distância entre dois pontos é chamada de geodésia¹⁰. No plano euclidiano essa linha recebe o nome de segmento. Também, foi visto anteriormente que

¹⁰DORIA define uma geodésica como sendo a curva que minimiza a distância entre dois pontos.

no plano de Poincaré, duas retas paralelas podem ou não se encontrar, caso se encontrem, o ponto em comum é chamado de ponto ideal.

O conceito de ponto ideal é abordado de maneiras diferentes tanto na geometria euclidiana, quanto na hiperbólica. Pois, enquanto na primeira a ideia de ponto no infinito é de algo que não se pode ver, na segunda é algo visível, como destaca o texto abaixo:

Enquanto, na representação da Geometria Euclidiana é impossível “ver” pontos no infinito, na representação do disco de Poincaré existem elementos visíveis que representam o inatingível, o infinito. Os pontos ideais, assim como o horizonte – a circunferência – não pertencem ao plano hiperbólico, mas podemos “vê-los”. Ao desenhar uma h-reta, é possível encontrar os pontos de interseção da reta com o plano hiperbólico – os pontos ideais – e esses pontos são necessários para que possamos medir a distância entre dois pontos, por exemplo. LOVIS & FRANCO (2011, p.05)

Algumas propriedades de inversão importantes para os estudos do próximo capítulo são relacionadas abaixo:

Propriedade 01: A imagem de uma linha reta, sob inversão, que passa pelo centro do Disco de Poincaré é a própria reta. Conforme descrito na figura 31.

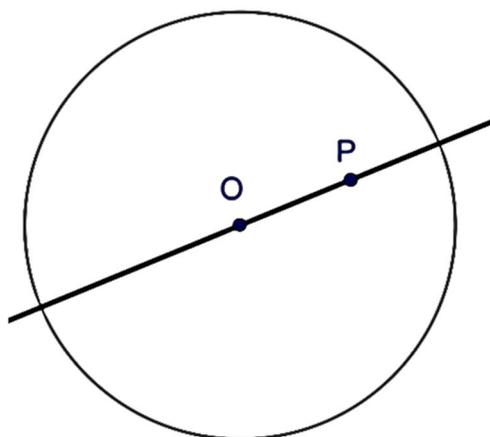


Figura 31- Imagem da linha reta que passa pelo centro do Disco de Poincaré

Propriedade 02: A imagem inversa de uma linha r que não passa através do centro O do Disco de Poincaré é um círculo γ passando através de O . Observe a figura 32.

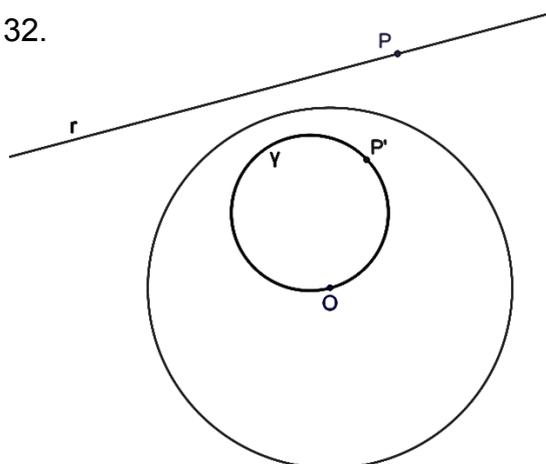


Figura 32- Imagem inversa de uma linha r que não passa através do centro

Demonstração. Seja H o pé da perpendicular relativo a O para a reta r . Seja P qualquer outro ponto pertencente a r . Considere P' e H' os respectivos pontos inversos de P e H . Pela definição de pontos de inversos, dada anteriormente, $OP \cdot OP' = OH \cdot OH'$. Usando a igualdade anterior mostra-se que os triângulos OPH e $OQ'H'$ são semelhantes. Assim, a imagem de qualquer P na linha é o vértice de um ângulo reto inscrito num círculo com diâmetro OH' . (ver figura 33)

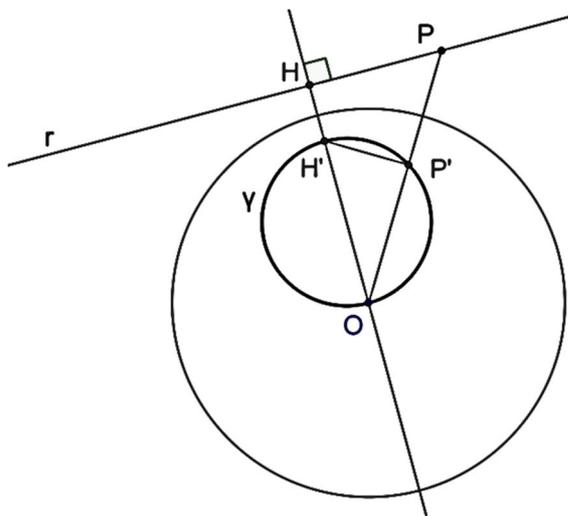


Figura 33- A imagem de qualquer P na linha é o vértice de um ângulo reto inscrito num círculo com diâmetro OH' .

Observação: O processo para mostrar que a imagem inversa de um círculo passando por O é uma reta não passando por O é análogo.

Propriedade 03: A imagem inversa de uma círculo γ que não passa através do centro O do Disco de Poincaré é um círculo ε que não intersecta O . Visualize a figura 34.

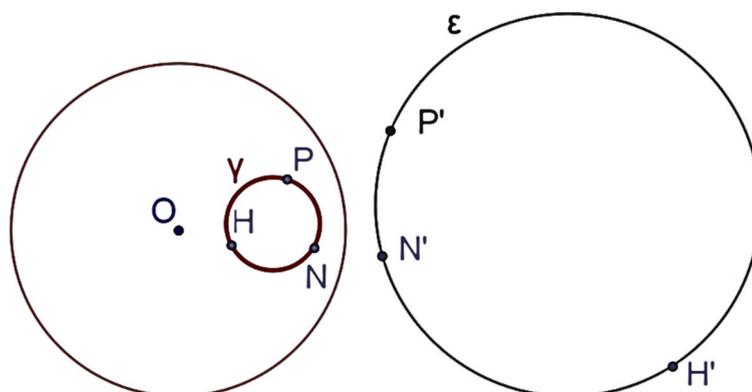


Figura 34- A imagem inversa de uma círculo γ

Propriedade 04: A inversão preserva os ângulos. Isto quer dizer que, se duas curvas intersectam-se num ângulo qualquer, as suas imagens sob inversão intersectam no mesmo ângulo. Assim na figura 35 os ângulos LPO e $QP'M$ são congruentes.

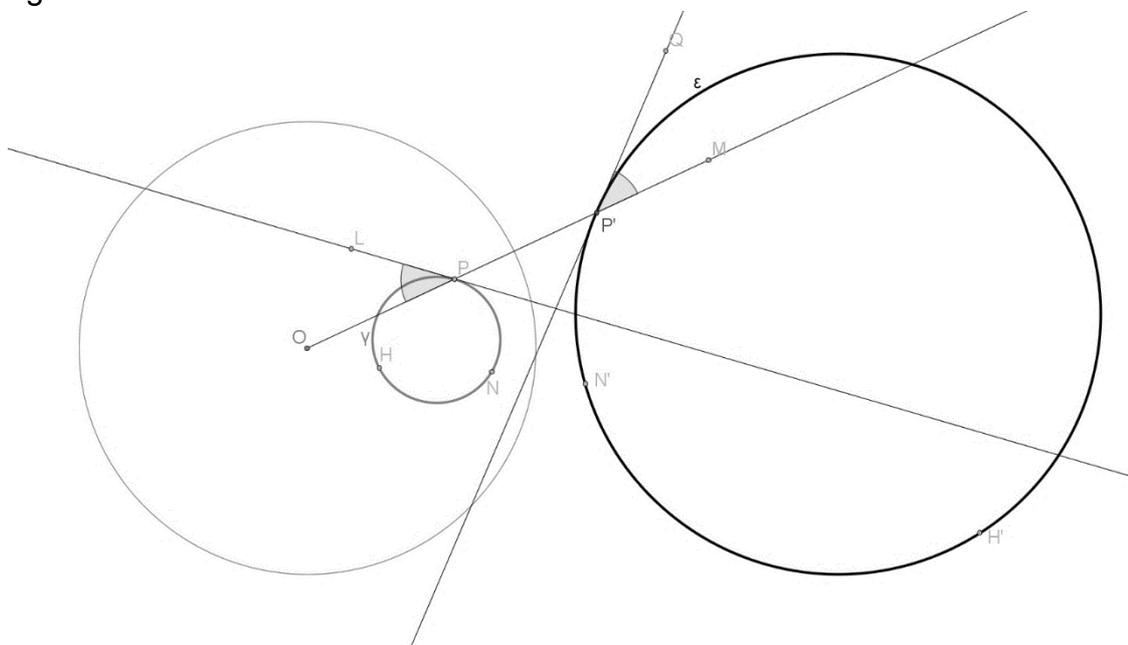


Figura 35- A inversão preserva os ângulos

Propriedade 05: Sejam C e C' são dois círculos ortogonais, se uma reta passando pelo centro O de C intersecta C' em A e B então esse pontos são inversos. Ver figura 36.

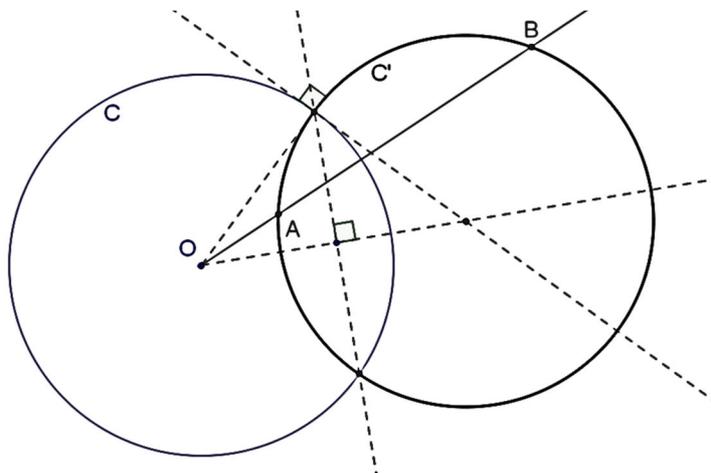


Figura 36- Propriedade dos círculos ortogonais

No próximo capítulo será visto como Escher, através de algumas das suas principais imagens, consegue expor muitos conceitos aqui trabalhados.

CAPÍTULO 03 – Construção da Ilustração de Coxeter

3.1. História de Escher

Filho de Sarah Gleichman e de George Arnold Escher, Maurits Cornelis Escher nasceu em 1898 na cidade de Leeuwarden, Holanda. Na escola secundária, o jovem Escher já se interessava principalmente pelas aulas de desenho.

Em 1919, influenciado pelo pai, engenheiro civil, ingressou na Escola Haarlem para Arquitetura e Artes Decorativas. Lá contou com o incentivo do professor e diretor da escola Samuel Jessurun de Mesquita, famoso arquiteto da época. Como não se interessou por arquitetura, apoiado por Mesquita, Escher migrou para a área de Artes Decorativas.

Ao terminar seus estudos na Escola de Haarlem em 1922, Escher viajou por mais de um ano por toda a Itália e Espanha, onde fez vários desenhos de paisagens, detalhes de prédios, bem como ilustrações minuciosas de plantas e pequenas criaturas na natureza. Durante essa odisseia, ele visitou o Alhambra, em Granada, Espanha, e lá ficou maravilhado pela complexidade e riqueza dos traços geométricos presentes nas decorações em azulejos coloridos.

Escher se casou em 1924, passando a morar com sua esposa em Roma, onde seus dois filhos nasceram. Até 1935 ele continuou a fazer viagens para

esboçar novas figuras, a maioria no sul da Itália, retornando ao seu estúdio em Roma para compor seus esboços para xilogravuras e litografias.

Com o passar do tempo, o ilustrador foi se tornando cada vez mais reconhecido, não apenas na Europa, mas também nas Américas. Em 1934, em uma exposição em Chicago, foi premiado com a litografia Monza. Ver figura 37:



Figura 37- Litografia Monza.

No ano seguinte, 1935, a Itália passava por sérios problemas políticos, devido ao avanço do fascismo no país. O próprio Escher foi preso e liberado imediatamente, depois de ser confundido com uma pessoa que realizou um atentado contra o rei. Segundo BERRO (2008, p.26), outro fato marcante que o desgostou profundamente, foi quando seu filho chegou da escola usando o uniforme da juventude fascista, isso fez com que ele e sua família deixassem a Itália, mudando-se para Suíça, onde residiram por pouco tempo.

Em 1937 mudou-se com a família para a Ukkel na Bélgica, o país encontrava-se em racionamento de alimento devido à 2ª Guerra Mundial. Por isso, em janeiro de 1941 retornou à Holanda. A fuga da Itália e da Bélgica muda completamente o foco artístico de Escher, passando a trabalhar com figuras abstratas (figuras mentais) ou desenhos inspirados em arabescos mouros que ele visualizou em viagens anteriores a Espanha.

O artista ficou impressionado com a arquitetura do palácio mourisco de Alhambra, em Granada, edificado pelos árabes no século XIII, durante a ocupação da Espanha. Como é observado na citação seguinte:

Copiando obsessivamente os ornamentos decorativos das paredes do palácio, o holandês descobriu os segredos da divisão regular do plano. Escher podia não saber nada de Matemática, mas os árabes, sim. Um conhecimento, aliás, milenar. Usando polígonos regulares e congruentes, como triângulos, quadrados e hexágonos, eles criaram mosaicos de rara beleza, preenchendo as superfícies sempre sem sobreposição e sem deixar espaços ou lacunas entre as figuras. (BERRO, 2008, p.26).

Escher apresenta uma justificativa em mudar completamente seu estilo artístico após 1937 no trecho abaixo:

A razão porque, a partir de 1938, me concentrei cada vez mais intensamente com a transmissão de ideias pessoais, foi o resultado, em primeira linha, da minha partida da Itália. Na Suíça, na Bélgica e na Holanda, onde sucessivamente me detive, o aspecto exterior da paisagem e da arquitetura sensibilizaram-me menos do que havia sido o caso, sobretudo no sul de Itália. Forçado pelas circunstâncias, tive de me afastar duma reprodução mais ou menos direta e exata do ambiente à minha volta. Esta circunstância estimulou, sem dúvida, em grande medida, a criação de imagens interiores. (ESCHER, 1994 [1959], p. 6, *apud*, SAMPAIO, 2012, p.57).

Em 1946, influenciado por familiares que estudavam a cristalografia, Escher passou a inserir em suas produções perspectiva e desenhos de sólidos geométricos simples. Nesse mesmo período conheceu as faixas de Moebius, despertando nele um interesse por temas topológicos e aproximações do infinito. Verifica-se que nos últimos anos de vida, suas principais obras abordam o infinito.

A partir de 1956, o artista que até então era mestre em lidar com a Geometria Euclidiana em suas obras, apresenta uma nova linguagem estética, que relaciona matemática e arte.

Com seus padrões hiperbólicos feitos a mão, Escher consegue, usando conteúdos matemáticos, representar o infinito em um espaço limitado. “Escher utilizava a matemática como ferramenta que lhe ampliava a percepção e a exploração” afirma FAINGUELERNT (2006, p.26).

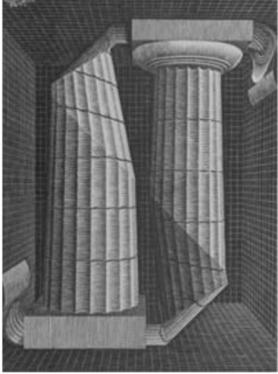
O interessante é que Escher só passou a relacionar temas matemáticos com suas obras após contato com Bruno Ernest e outros matemáticos da época. Foi Ernest que lançou um dos principais livros sobre o trabalho do artista – “O Espelho Mágico de M. C. Escher”. Mas um dos grandes estudiosos que fizeram intensificar o interesse do gravurista em incluir matemática acadêmica em sua arte foi Harold Coxeter.

Escher e Coxeter se conheceram durante a International Conference on Mathematics (**ICM**) em 1954, evento no qual Escher expôs alguns trabalhos. Impressionado com as obras, assim que retornou ao Canadá, Coxeter escreveu uma carta a Escher descrevendo sua apreciação pelo trabalho.

Três anos depois, o matemático entrou novamente em contato com Escher, pedindo sua permissão para utilizar dois de seus desenhos para ilustrar um artigo sobre simetria. O artista permitiu a utilização das gravuras. E quando Escher mais tarde recebeu uma reedição do artigo, ficou impressionado com uma ilustração que apresentava triângulos hiperbólicos diminuindo de tamanho, tal figura será estudada posteriormente nesse trabalho.

A partir desse momento Escher “mergulha” no mundo das geometrias não euclidianas, como se pode observar na série de xilogravura “limite circular”, no qual o holandês desenha usando propriedades de geometria hiperbólica.

No livro “O Espelho Mágico de M. C. Escher” (BERRO, 2008, p.32-34) verifica-se quatro fases nas produções de Escher, conforme exposto na figura 38 abaixo:

Fase	Período	Características	Exemplo
I	1922-1937	Criação de Gravuras de paisagens e pequenas cidades do sul da Itália.	 <p data-bbox="1118 871 1404 936">Natureza Morta com Espelho (1934)</p>
II	1937-1945	Desenhos de metamorfoses, nas quais se observam ciclos e a passagem de figuras bidimensionais em tridimensionais, nas quais a simetria e o encaixe perfeito de formas são marcas do seu trabalho.	 <p data-bbox="1094 1319 1426 1350">Colunas Dóricas (1944)</p>
III	1946-1956	Escher trabalha com gravuras subordinadas à perspectiva, nas quais Escher utilizava pontos de vista inesperados, ou vários pontos de vista, pontos de fugas e perspectivas. É nesta fase que ele também mostra interesse	 <p data-bbox="1174 1570 1310 1581"><small>226. Luz de Moebius II, litogravura, 1955</small></p>

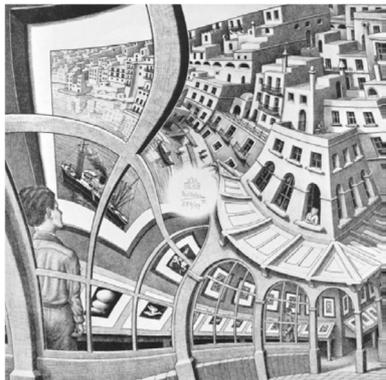
		em sólidos geométricos, devido aos estudos que ele começa a fazer em mineralogia e cristalografia. As gravuras de Moebius também pertencem a este grupo.	Laços de Moebius II (1963)
IV	1956-1970	Período da aproximação do infinito, na qual ele faz várias gravuras que têm como tema central o infinito, mas ainda há a produção das figuras impossíveis.	 <p>Galeria de Arte (1956)</p>

Figura 38- fases nas produções de Escher

Analisar a obra de Escher é um trabalho que exige um raciocínio matemático sofisticado e uma visão artística aprimorada, pois a linguagem escheriana resulta de uma obra planejada matematicamente e artisticamente em todos os seus detalhes, objetivando atingir um efeito visual desejado. Conforme a seguinte afirmação:

O trabalho de interpretar imagens ganha em Escher contornos bem mais complexos do que em outros artistas plásticos. Ele afirma que cada uma das gravuras de Escher não é apenas algo a ser visto, mas sim um problema a resolver, um convite ao exercício do raciocínio, da inteligência e, nesse sentido, a beleza do desenho só se manifesta após o enfrentamento raciocinado de algo que provoca no observador um estranhamento inicial. A beleza não flui imediatamente de um simples ato de

contemplação passiva, mas é construída ativamente através do esforço de uma participação analítica do observador. (MIGUEL, 2005, *apud*, BERRO, 2008, p.43).

Neste trabalho é detalhado o estudo feito pelo artista sobre os limites em planos não euclidianos, usando o modelo de Poincaré, lembrando que o último período da obra de Escher é caracterizado pela “aproximação do infinito”. De acordo com (MAOR, 1991 [1987], p. 166, SAMPAIO, 2012, p. 54), o trabalho realizado por Escher sobre o infinito pode ser caracterizado em três tipos: ciclos, preenchimento de superfícies e limites. Ver figura 39.



Figura 39- As figuras a, b e c são exemplos dos três tipos de trabalhos de Escher, ciclos, preenchimento de superfícies e limites, respectivamente.

Escher é considerado uma das principais referências quando o tema é padrões geométricos de pavimentações ou ladrilhamentos do plano¹¹. Sua fonte de inspiração para trabalhar com pavimentações foi suas viagens à Espanha. Ele ficou fascinado pela arquitetura das construções, inclusive dos palácios antigos, a maioria edificada na época da invasão moura no século VIII.

Como a religião muçumana não permitia a representação de pessoas, essas construções eram repletas de mosaicos onde as peças geométricas se encaixam perfeitamente devido ao ajuste perfeito dos lados e dos ângulos das peças. Os retângulos, quadrados, hexágonos regulares e triângulos equiláteros

¹¹ A pavimentação do plano fundamenta-se em preencher esse mesmo plano com figuras geométricas, de modo a não existirem espaços nem sobreposições entre elas.

aparecem com frequência nos mosaicos, visto que, seus ângulos são divisores de 360°.

A divisão regular de uma superfície é, segundo Escher “A fonte mais rica de inspiração, de onde eu alguma vez bebi e ela não está ainda seca. Os desenhos simétricos aqui representados mostram como uma superfície pode ser dividida regularmente em figuras iguais, respetivamente, preenchida com elas. As figuras devem confinar umas com as outras sem que resultem áreas livres.” (ESCHER, 1994 [1959], *apud*, SAMPAIO, 2012, p. 51).

Não será tratada neste estudo a isometria, ou seja, as transformações do plano através dos movimentos de translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento.

Após o estudo das pavimentações nas construções espanholas, Escher passou a estudar de forma cada vez mais sofisticada a divisão de superfície, isso é observado em seus trabalhos datados de 1937, nos quais, basicamente, apresentam figuras congruentes. Em 1955 há o uso de figuras se aproximando do infinito. Nessa época alguns grupos distintos de figuras foram utilizados por Escher, mas este trabalho se dedicará as gravuras de Coxeter.

Nas imagens de Coxeter, o gravurista faz uma divisão do plano até o infinito em figuras geométricas similares, contíguas, sem deixar qualquer espaço livre. É claro que só se pode representar um pequeno “fragmento do infinito”, o resto é apenas imaginado.

O mesmo formato em todas as componentes não permite mais do que a reprodução dum fragmento numa divisão regular da superfície. Quem quiser representar um número infinito, tem de reduzir gradualmente o tamanho das figuras até ao alcance, pelo menos teoricamente, o limite do infinitamente pequeno. (ESCHER, 1994 [1959], p. 9, *apud*, SAMPAIO, 2012, p. 55).

A figura abaixo entalhada em madeira, chamada de *Cada vez menor* (1956), é a primeira obra de Escher que tenta reproduzir o infinito. Na obra, as figuras são reduzidas de “fora para dentro”, mas o artista não ficou tão satisfeito com o resultado da ilustração, conforme o trecho abaixo, retirado de uma carta de Escher.

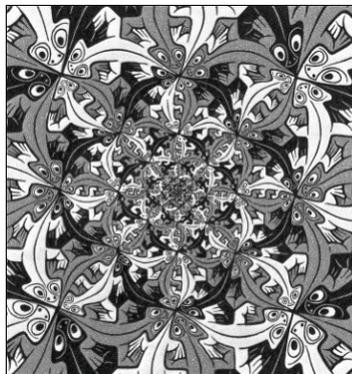


Figura 40- Cada vez menor

O Professor **Coxeter** chamou-me a atenção para o método da ‘redução de dentro para fora’, o qual anos em vão, tinha procurado. Pois uma redução de fora para dentro (como em *Cada vez menor*) não traz nenhuma satisfação filosófica porque assim não resulta nenhuma composição logicamente acabada e perfeita (Ernst ,1991 [1978], p. 104-105, *apud*, SAMPAIO, 2012, p. 56)

3.2. Série Limites Circulares

Em 1958, ao ver a ilustração (ver figura 41) do artigo de Harold Coxeter, Escher inverte a ordem das pavimentações do plano hiperbólico, ou seja, agora elas seriam de “dentro para fora”, resultando na série Limites Circulares, composta de quatro obras, criadas em um período de três anos. Nessas séries, as distâncias funcionam de tal forma que, todas as figuras são congruentes, mas elas parecem ficar menores na borda do disco. Além disso, os triângulos hiperbólicos se vão repetindo infinitamente dentro dos limites de um círculo. Exatamente o que o gravurista estava procurando, a fim de capturar o infinito em um espaço finito.



Figura 41- Figura presente no artigo de Coxeter (chamada de ilustração de Coxeter)

A ilustração do artigo de Coxeter aguçou a curiosidade de Escher de tal maneira, que o gravurista passou a trabalhar sobre a figura utilizando régua e compasso com o intuito de descobrir como arte foi construída. Com o esforço, o artista conseguiu compreender o suficiente da geometria para construir sua própria imagem, denominada Limite Círculo I.

3.2.1. Limite circular I (LCI)

A ilustração LCI (ver figura 42) foi finalizada em 1958, entretanto, o resultado da xilogravura não agradou muito o próprio artista. Segundo Escher, a gravura possuía muitos erros, conforme pode-se perceber no texto:

No presente caso (...) a ordem das componentes ainda deixa a desejar. Todas as fileiras, por sua vez acentuadas pelos eixos do corpo, consistem em dois peixes brancos que viram a cabeça um para o outro, e dois pretos, cujas caudas se tocam. Assim, não há nenhuma continuidade, nem direção de movimento ou cor homogênea em cada fileira. (Escher, 1994 [1959], p. 10, *apud*, SAMPAIO, 2012, p. 56).

O artista enviou uma carta para Coxeter com sua gravura, mostrando que tinha descoberto a localização dos centros de alguns círculos e, gentilmente, solicitou que o matemático lhe explicasse, de maneira simplificada, como desenhar os outros círculos, os quais os centros se aproximavam da borda do disco, até que alcance o limite.



Figura 42- Ilustração Limite Circular I

3.2.2. Limite circular II (LCII)

Sem entender a carta com as explicações de Coxeter, o que também motivou sua insatisfação com a série limite circular I, durante os meses seguintes, de alguma forma, o artista aprendeu sozinho, usando régua e o compasso, a construir não apenas a figura de Coxeter, mas pelo menos uma variação da mesma. Em março de 1959, ele completou a segunda xilogravura da sua série Limite Circular II (ver figura 43).



Figura 43- Ilustração Limite Circular II

O design simplista do trabalho sugere que pode ter servido como um treino para os seus sucessores. Em qualquer caso, Escher falou disso em termos humorísticos:

Realmente, esta versão deve ser pintada sobre a superfície interna de uma meia esfera. Eu ofereci ao Papa Paulo, para que ele pudesse decorar o interior da cúpula de São Pedro com ele. Basta imaginar um número infinito de cruces que paira sobre sua cabeça! Mas Paulo não quer. WIETING (2010)

3.2.3. Limite circular III (LCIII)

Em dezembro de 1959, Escher completou a terceira ilustração da série, o intrigante *CLIII* (ver figura 44), intitulado *O Calado Milagroso de Peixes*. É considerada pelo o artista a melhor figura da série, pois não possui os problemas presentes nas séries anteriores.

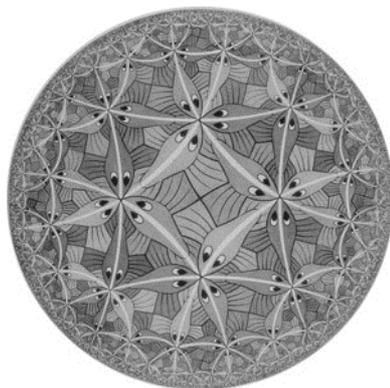


Figura 44- Ilustração Limite Circular III

Escher não teve muitas interrupções em sua carreira, exceto no período de 1962 a 1970 quando foi submetido a alguns procedimentos cirúrgicos, mesmo assim, continuava a compor alguns trabalhos, um dos mais importantes é a obra Serpentes. Ver figura 45.



Figura 45- Serpentes

Já debilitado, ainda assistiu à publicação do livro -*The World of M. C. Escher*, falecendo em março de 1972 no hospital de Hilversum.

3.3 Como Escher construiu a figura presente no artigo de Coxeter usando régua e compasso

A construção encontrada por Escher no trabalho de Coxeter, pode ser feita usando régua e compasso, para isso, é preciso entender e ser capaz de fazer algumas construções euclidianas básicas. Além do mais, na imagem de Coxeter, o Disco de Poincaré é pavimentado apenas com triângulos hiperbólicos que possuem ângulos internos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Antes de começar a construção da figura 44 é necessário construir o Disco de Poincaré. Tal processo é iniciado de dentro para fora, pois antes de montar o disco, faz-se um triângulo hiperbólico, ou seja, primeiro são escolhidos os pontos A e O do plano euclidiano, e, usando a ferramenta “*Rotação em Torno de um Ponto por um Ângulo*” do geogebra, é possível realizar uma rotação em torno do ponto A por um ângulo $\frac{2\pi}{6}$. Denotando tal rotação por ρ . Essa rotação de $\frac{2\pi}{6}$ é em função da figura que está no centro da ilustração de Coxeter na figura 44 ser um hexágono regular. Ver figura 46:

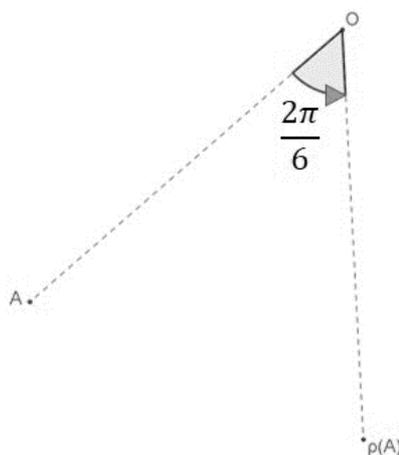


Figura 46- rotação em torno do ponto A por um ângulo $2\pi/6$.

Em seguida o ponto médio B do segmento $A\rho(A)$ é determinado e depois é traçada a circunferência γ de centro B, que passa por A e $\rho(A)$. Ver figura 47:

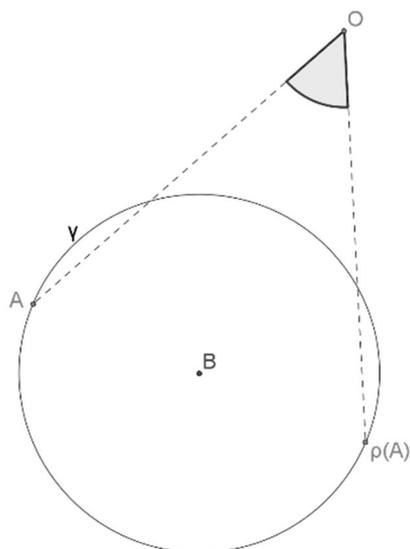


Figura 47- Traçado da circunferência γ de centro B , que passa por A e $\rho(A)$.

O próximo passo é construir o Disco de Poincaré, que neste trabalho será chamado de D . Para isso, um círculo centrado no ponto médio do segmento BO é traçado e o ponto onde este último círculo intersecta γ é denominado C . A etapa final é traçar o Disco de Poincaré com centro O , passando por C . Ver figura 48:

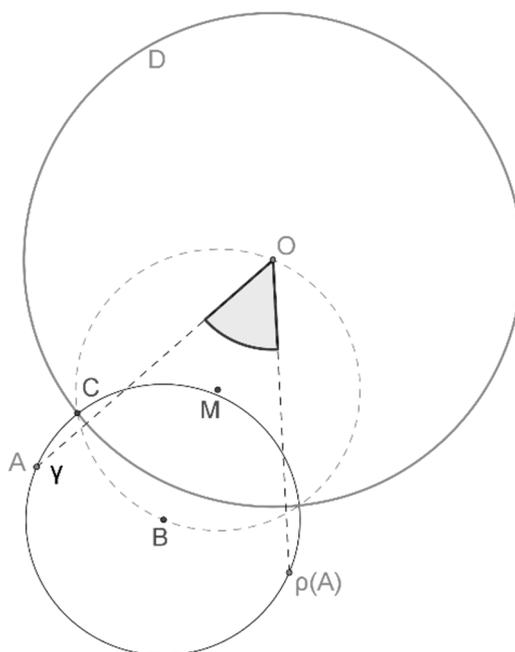


Figura 48- Disco de Poincaré com centro O , passando por C .

Observe na figura anterior que:

(i) D e γ são ortogonais;

Justificativa: O triângulo BCO está inscrito em uma circunferência e B e O são extremos do diâmetro, logo o ângulo C será reto.

(ii) γ é ortogonal à linha BO;

Justificativa: Quando uma reta r secante à uma circunferência passa pelo seu centro, r é ortogonal a essa circunferência, assim como a tangente t_1 no ponto P ou Q. Ver figura 52.

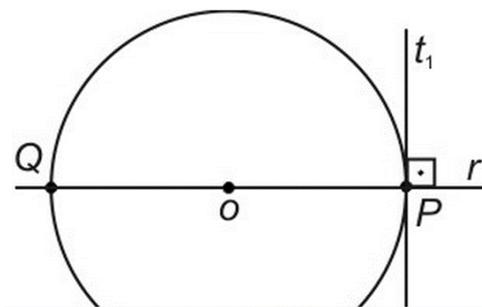


Figura 49- A reta r é ortogonal a circunferência

(iii) γ encontra a linha "AO" a um ângulo de $\frac{\pi}{6}$;

Justificativa: Para provar basta usar as seguintes afirmativas:

- O triângulo ABP é isósceles ($AB=BP$);
- AOB e BPQ são triângulos retângulos, com ângulos retos B e P respectivamente.

Ainda analisando a figura 48, sejam P e Q os respectivos pontos de interseção de γ com AO e BO, observe que o triângulo hiperbólico OPQ tem ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Perceba que o ponto A pertence ao lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais que passam pelo ponto Q. Logo, é possível construir uma geodésia β passando por Q, com centro em A. ver figura 50:

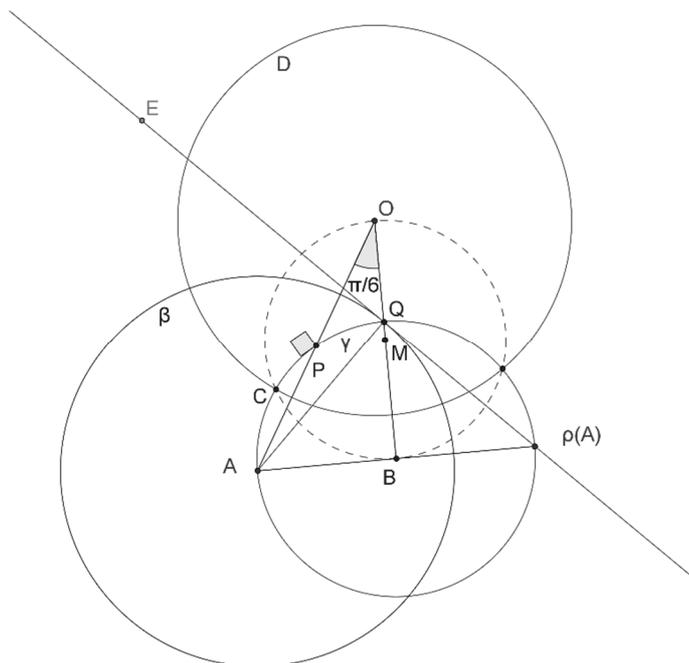


Figura 50- Parte 01 da construção

Na figura anterior o triângulo ABQ é isósceles com $AB=BQ$, assim a medida do ângulo $Q\hat{A}B = A\hat{Q}B = \frac{\pi}{4}$, pois $A\hat{B}Q = \frac{\pi}{2}$. Observe que o ângulo $A\hat{Q}E$ é reto. Logo, a medida do ângulo $E\hat{Q}O$ é $\frac{\pi}{4}$, ou seja, na linguagem hiperbólica β encontra OB em um ângulo de $\frac{\pi}{4}$. Como a reta \overleftrightarrow{AO} passa pelo centro de β então \overleftrightarrow{AO} é ortogonal a β .

O ponto de interseção de \overleftrightarrow{AO} e β no interior do Disco D é denotado por R e os triângulos hiperbólicos ORQ e PQR têm ângulos interiores $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$. Ver figura 51.

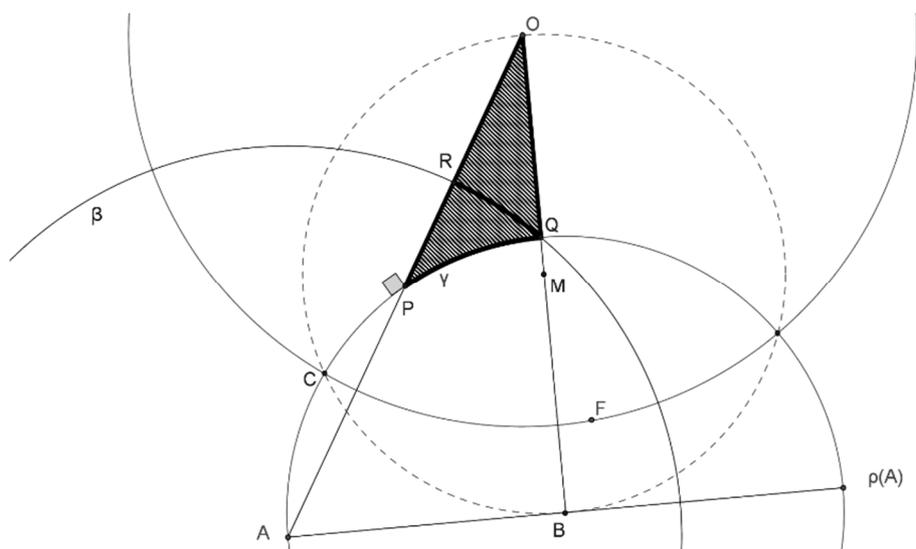


Figura 51- Parte 02 da construção

A próxima etapa é preencher (telhar) o disco de Poincaré por meio de imagens congruentes dos triângulos hiperbólicos ORQ e PQR, usando inversões dos pontos O, P, Q, R e dos círculos β e γ ortogonais a D, ver figura 52:

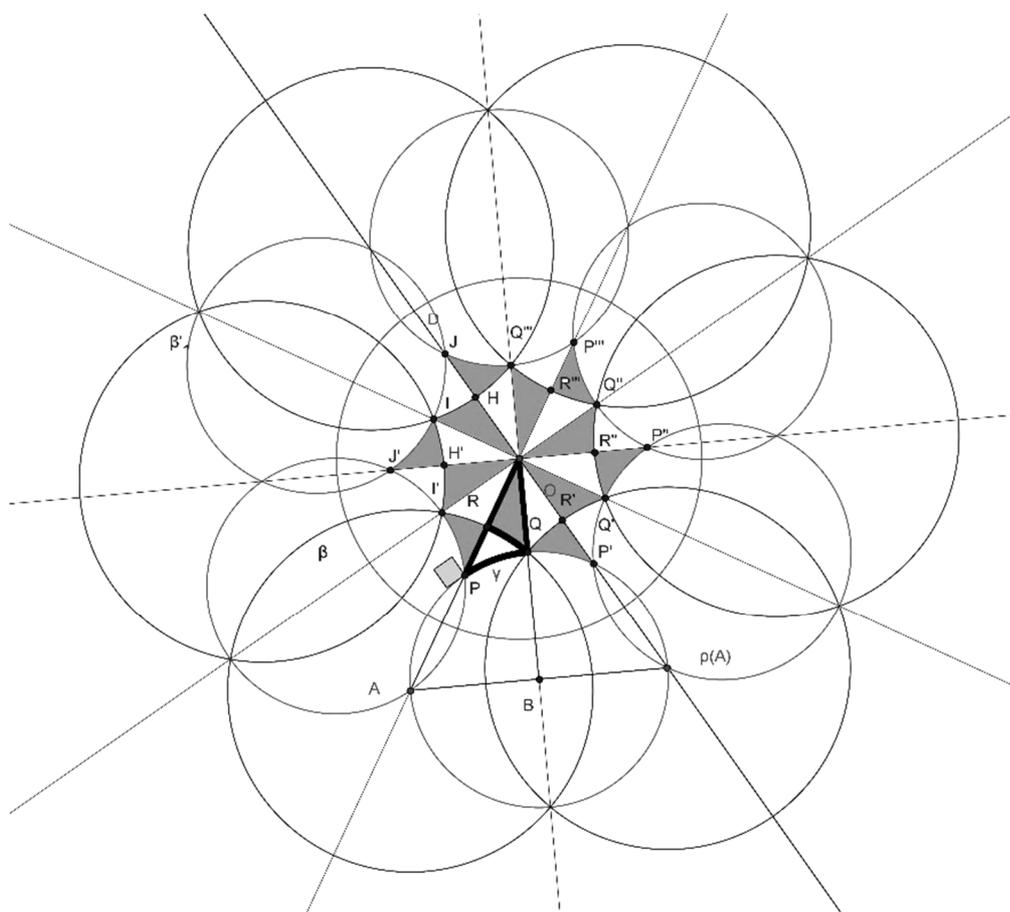


Figura 52- Parte 03 da construção

Dada a geodésica γ , um ponto $A \in \gamma$ e um ângulo euclidiano $\frac{\pi}{6}$, ver figura 53(a). É possível construir um conjunto de geodésica passando por A, obtidas através da rotação por um ângulo $\frac{k\pi}{6}$, de P (centro de γ) sobre A. Observe que na figura 53(a) o segmento AP é chamado de m e fazendo esse segmento girar $\frac{\pi}{6}$, tem-se o segmento m' . Esse último corta o lugar geométrico A^+ dos centro dos círculos ortogonais que passam pelo ponto A em P'. De maneira semelhante é obtido os pontos P'' e P'''. O próximo passo é construir circunferências ortogonais a D com centro em P', P'' e P''' e que passam por A, como representado na figura 53 (b)

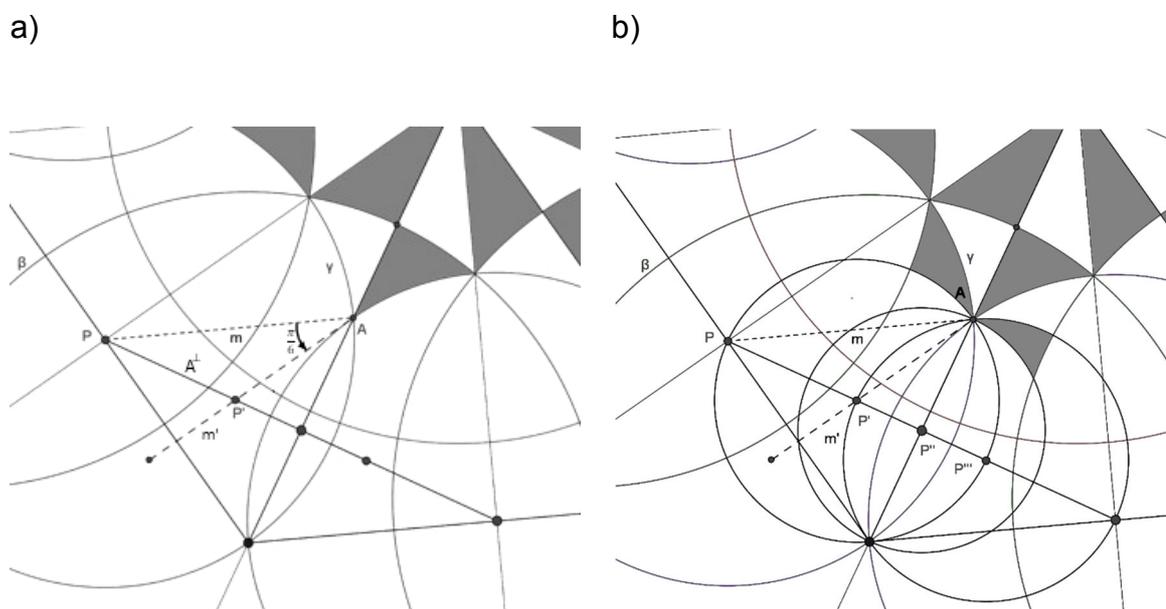


Figura 53- Parte 04 da construção

Aplicando rotações das três circunferências é criada a figura 54, representada da seguinte maneira:

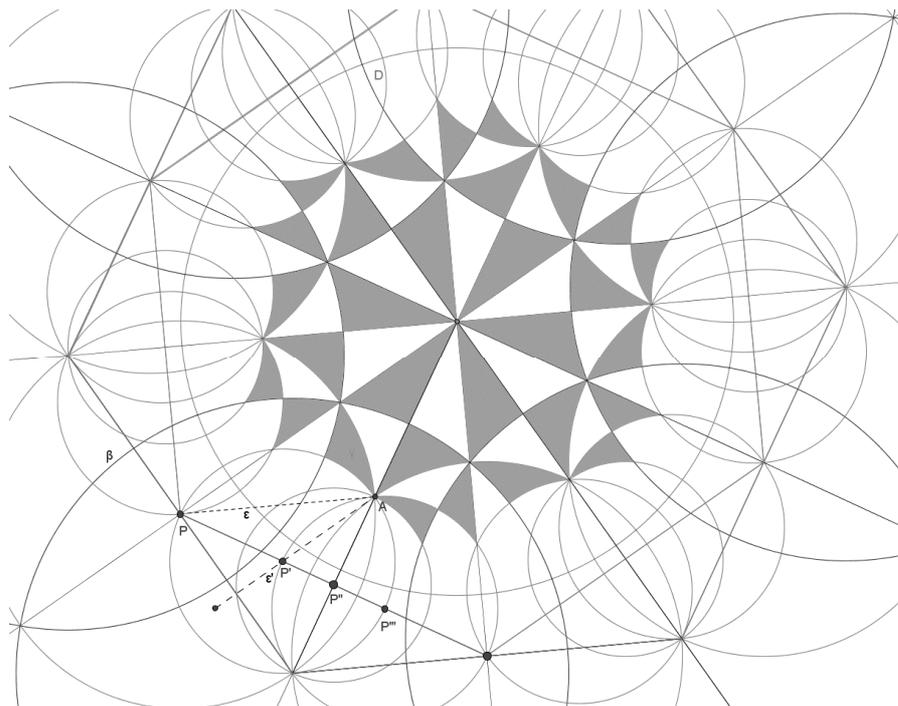


Figura 54- Parte 05 da construção

Na figura anterior ao fazer a rotação por um ângulo $\frac{k\pi}{6}$, de P''' , em relação a B, obtém-se a figura 55, abaixo:

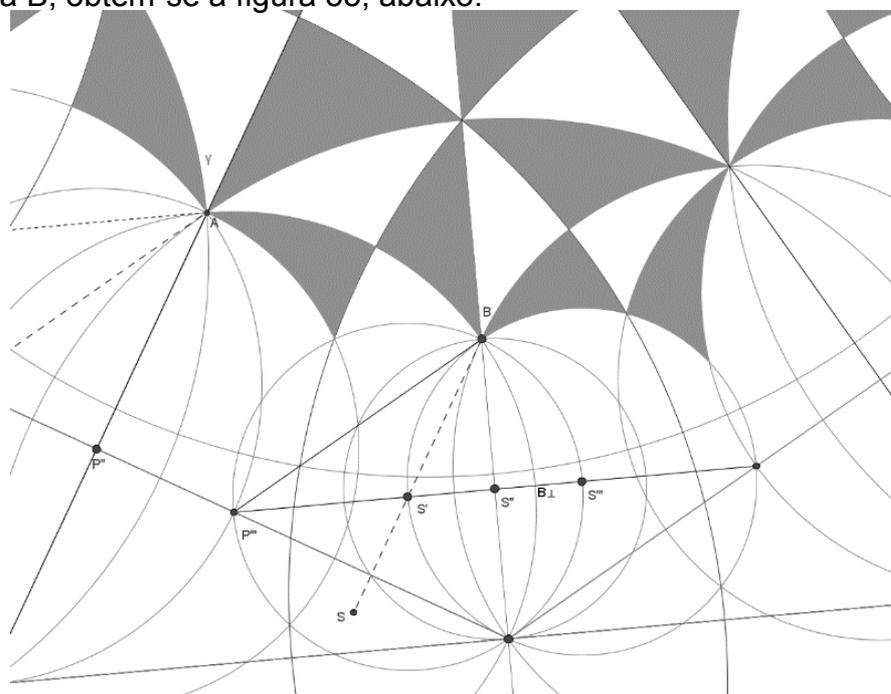


Figura 55- Parte 05 da construção

Aplicando rotações na circunferência anterior, obtêm-se a figura 56

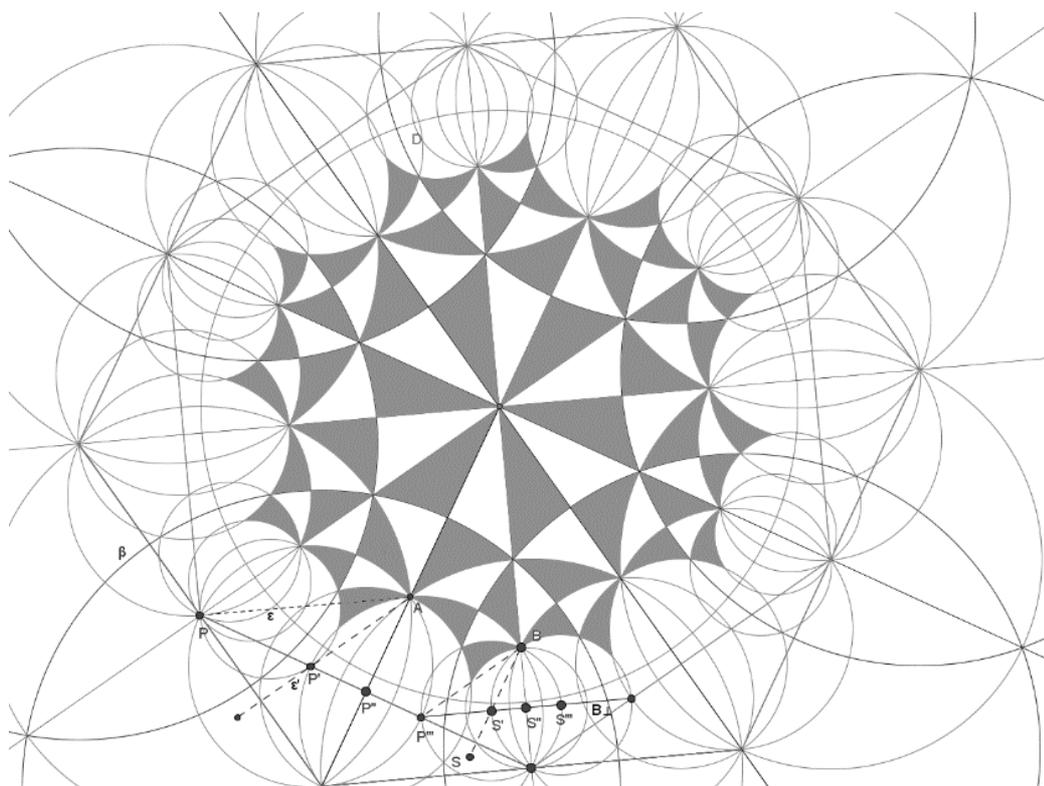


Figura 56- Parte 06 da construção

Baseando-se no pouco que compreendeu da carta de Coxeter, Escher percebeu que pelo ponto M , passam as circunferências com centros em P''' , S' e P_1 . Logo, qualquer circunferência que passa por M passa pela reta $\overleftrightarrow{S'P_1}$. Ver figura 57.

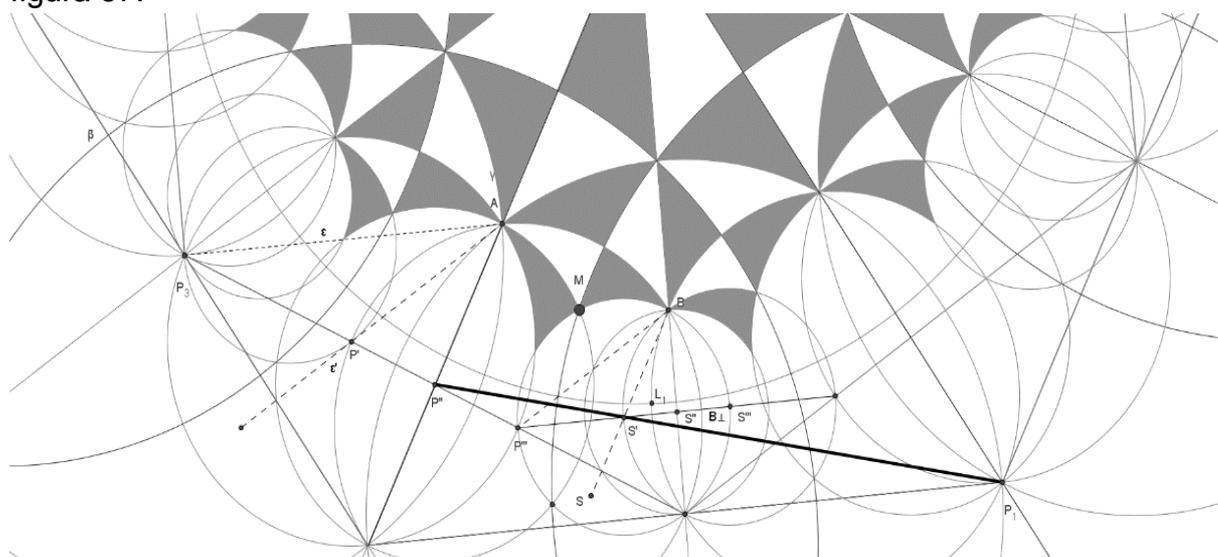


Figura 57- Parte 07 da construção

CONCLUSÃO

Conforme tudo que foi apresentado, essa dissertação mostra um possível método usado por Escher na construção da ilustração de Coxeter, pois como o artista não deixou especificado em suas anotações o procedimento utilizado na elaboração da imagem, é difícil afirmar qual metodologia foi usada na sua construção artística, que se deu de forma intuitiva.

Uma das principais dificuldades encontradas na elaboração do trabalho foi imaginar o método usado por Coxeter na construção da imagem, mas isso gerou uma rica experiência, pois, possivelmente, esse foi o mesmo problema que Escher encontrou no início de sua análise. Isso pode ser comprovado nas cartas do artista solicitando do matemático algumas explicações. Um dos principais pontos positivos é que enquanto Escher tinha em mãos apenas régua e compasso, hoje é possível trabalhar com o software de geometria dinâmica GEOGEBRA. Esse agilizou a construção das ilustrações e possibilitou uma maior exploração da figura, mesmo em tamanhos menores.

Não foi mencionado, diretamente, uma aplicação dos resultados aqui encontrados com o ensino de geometria não euclidiana, mas essa dissertação pode ser um rico material paradidático para qualquer interessado em introduzir o estudo dessa nova geometria, usando como ferramenta a análise e construção proposta por Escher.

Uma próxima etapa desse trabalho é estudar a arte de Escher e as Geometrias Não Euclidianas Elípticas, observando e analisando a fase em que o artista passou a construir imagens espaciais.

BIBLIOGRAFIA

BARBOSA, J. L. M., **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM - Coleção do Professor de Matemática, 1995.

Berro, R.T. (2008). **Relações entre arte e matemática: um estudo da obra de Maurits Cornelis Escher**. Dissertação de Mestrado. Universidade São Francisco, Itatiba.

BIANCONI, Ricardo. **Geometria e Desenho Geométrico I**, 2º semestre de 2011. Notas de Aula.

BONOLA, R. **Non-euclidean geometry**. New York, Dover Publications, 1955.

BRAITT, M.S., WHITLEY, W.G.: **Geometria III**, UFSC/EAD/CED/CFM, 2007.

CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria não-euclidianas**. IN: Matemática Universitária. Rio de Janeiro: SBM, 1987.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**, Unicamp, Campinas, 1997.

Fainguelernt, E. K.; Nunes K.R.A. **Fazendo Arte com a Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

FERREIRA, Luciano. (2011). **Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica: “construção do Plano de Poincaré” com o uso do software Geogebra**. (Dissertação Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática). Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**, Geometria analítica. Vol. 7. 5 ed. São Paulo: Editara Atual, 2005

MONTOITO, R. **Por Que Tardaram a Aparecer as Geometrias Não-Euclidianas?**. Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática. SBHMat: Aracaju (SE), 2011.

O'SHEA, Donal. **La congettura di Poincaré**, traduzione di Daniele Didero, Rizzoli, 2008.

PETRUNIN, A. **Euclidean and Hyperbolic Planes: A minimalistic introduction with metric approach**. 2013. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1302.1630.pdf>>. Acesso em: 19 jul. 2013.

RICCARDI, P. **Saggio di una bibliografia euclidea**. (1887-1890) Bolonia, Gamberini e Parmeggiani.

SAMPAIO, Patrícia. **A Matemática através da Arte de M. C. Escher**. (2012) Millenium, 42 (janeiro/junho). Pp. 49-58.

WIETING, Thomas. **Capturing Infinity: The Circle Limit Series of M.C. Escher**. Reed Magazine, março. 2010.