



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



DOUGLAS WILSON DA SILVA MONTEIRO

Curvas de Cassini no plano de Minkowski

Rio Branco-AC

2023

DOUGLAS WILSON DA SILVA MONTEIRO

Curvas de Cassini no plano de Minkowski

Dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal do Acre como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - PROFMAT/UFAC.

Orientador: Prof. Dr. Clebes do Nascimento Brandão

Rio Branco-AC

2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

M775c Monteiro, Douglas Wilson da Silva, 1996 -
Curvas de Cassini no plano de Minkowski / Douglas Wilson da Silva Monteiro;
orientador: Dr. Clebes do Nascimento Brandão. – 2023.
52 f.: il.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Programa de Pós-
Graduação em Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Rio Branco,
2023.

Inclui referências bibliográficas.

1. Plano de Minkowski. 2. Curvas de Cassini no plano de Minkowski. 3.
Lemniscata de Bernoulli no plano de Minkowski. I. Brandão, Clebes do
Nascimento (orientador). II. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Nádia Batista Vieira CRB-11º/882.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Titulo da dissertação: Curvas de Cassini no plano de Minkowski

Autor: Douglas Wilson da Silva Monteiro

Orientador: Prof. Dr. Clebes do Nascimento Brandão

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Acre – PPGPROFMAT, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre.

DATA DA APROVAÇÃO: 08 de agosto de 2023.

BANCA EXAMINADORA:

Assinado Eletronicamente

Prof. Dr. Clebes do Nascimento Brandão

Orientador

Universidade Federal do Acre (UFAC)

Assinado Eletronicamente

Prof. Dr. Ricardo Lima Alves

Membro

Universidade Federal do Acre (UFAC)

Assinado Eletronicamente

Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto

Membro Externo

Universidade Federal do PIAUÍ (UFPI)



Documento assinado eletronicamente por **MANOEL VIEIRA DE MATOS NETO, Usuário Externo**, em 09/08/2023, às 15:20, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Lima Alves, Professor do Magisterio Superior**, em 13/08/2023, às 09:46, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Clebes do Nascimento Brandao, Professor do Magisterio Superior**, em 23/08/2023, às 09:18, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.ufac.br/sei/valida_documento ou click no link [Verificar Autenticidade](#) informando o código verificador **0990979** e o código CRC **A0849BD7**.

Aos meus filhos, Laís e Miguel, e aos meus sobrinhos, Cauã, Maycon e Matteo,
dedico.

AGRADECIMENTOS

A minha avó Maria do Ribeiro Socorro (*in memoriam*), falecida durante o período em que cursei meu mestrado.

Aos meus pais, Wângela e Sérgio, e minha irmã, Larissa, por serem minha base desde sempre.

Aos meus familiares que sempre acreditaram no meu sonho e sempre me ajudaram em cada momento.

A Amanda Diniz, minha companheira enquanto cursei este mestrado, por ter sido meu porto seguro nos momentos difíceis, por ter tido paciência e sempre me apoiar nesta jornada acadêmica.

Aos meus amigos de vida, de graduação e agora de mestrado, Noah Gabriel, William Maia e Joacemi Rodrigues, por terem compartilhado comigo as alegrias e dificuldades durante este processo acadêmico.

Aos meus amigos Leonnardo Yuri, Anderson e Alysson Pacífico, pelo companheirismo e sólida amizade durante esta jornada.

A todos os colegas da Escola José Ribamar Batista, em especial a gestão, que sempre deu o apoio necessário nesta jornada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Clebes Brandão, por compartilhar seus conhecimentos e me orientar neste trabalho, e por ter sido amigo e tutor também na minha jornada profissional.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Ricardo Lima Alves, Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto e Prof. Dr. Clebes Brandão pela disponibilidade e atenção dadas, além das sugestões para a melhoria desta dissertação.

A todos os envolvidos com o PROFMAT nesta instituição, em especial os professores: Sergio Brazil, Geirto de Souza, Cleber Pereira, Wenden Charles e Marcos Aurélio, que foram meus docentes no processo.

À Universidade Federal do Acre e seu Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas por possibilitar a realização deste curso.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho.

”Não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstrata, que não possa um dia ser aplicado a fenômenos do mundo real.”

(Lobachevsky)

RESUMO

MONTEIRO, Douglas W S. **Curvas de Cassini no plano de Minkowski. 2023. 52f.** Trabalho de Conclusão de Curso (PROFMAT) - Universidade Federal do Acre, Rio Branco-AC, 2023.

O presente trabalho trata das curvas ou ovais de Cassini no Plano de Minkowski. Inicialmente tratamos da geometria do Plano de Minkowski, tomando como principal referência Couto e Lymberopoulos (2018). Em seguida usamos a definição dada por Shonoda (2015) para curvas de Cassini no referido plano, que serão denominadas \mathcal{M} -curvas de Cassini, e deduzimos suas equações particulares e geral. Também estudamos alguns casos particulares sobre estas referidas curvas e, incentivados pela definição da Lemniscata de Bernoulli, definimos neste trabalho a " \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli" fazendo alguns exemplos. Para obter as representações geométricas dessas curvas utilizamos como suporte o software Geogebra.

Palavras-chave: Plano de Minkowski, Curvas de Cassini no plano de Minkowski, Lemniscata de Bernoulli no plano de Minkowski, \mathcal{M} -curvas de Cassini, \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli.

ABSTRACT

MONTEIRO, Douglas W S. **Cassini' curves in the Minkowski plan. 2023. 52f.** Undergraduate thesis (PROFMAT) - Federal University of Acre, Rio Branco-AC, 2023.

The present work deals with the Cassini curves or ovals in the Minkowski plane. After dealing with the geometry of the Minkowski plane, taking Couto e Lymberopoulos (2018) as the main reference, we use the definition given by Shonoda (2015) for the Cassini curves in the Minkowski plane, which will be called \mathcal{M} -Cassini curves, and derive their particular and general equations. We also study some particular cases on these curves and, encouraged by the definition of Bernoulli's Lemniscata, we define in this work the " \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli" and make some examples. To obtain the geometric representations of these curves, we used the Geogebra software as support.

Keywords: Minkowski plane, Cassini curves in the Minkowski plane, Bernoulli Lemniscata in the Minkowski plane, \mathcal{M} -Cassini curves, \mathcal{M} -Lemniscata of Bernoulli .

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	O Cone de Luz	20
Figura 2	\mathcal{M} -círculo centrado na origem	22
Figura 3	\mathcal{M} -curva de Cassini degenerada	25
Figura 4	\mathcal{M} -curvas de Cassini centradas na origem com reta focal no eixo OX	26
Figura 5	Assíntotas das \mathcal{M} -curvas de Cassini	26
Figura 6	Lemniscata centrada na origem com focos sobre o eixo OX	29
Figura 7	Ramos da \mathcal{M} – Lemniscata centrada na origem de focos $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$	30
Figura 8	\mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli centrada na origem de parâmetro $b = c = \sqrt{2}$	30
Figura 9	Esboços das funções que expressam a \mathcal{M} -Lemniscata	32
Figura 10	\mathcal{M} -curva de Cassini centrada na origem com parâmetros $b^2 < c^2$	34
Figura 11	\mathcal{M} -curva de Cassini centrada na origem de parâmetro $b^2 > c^2$	34
Figura 12	Curvas de Cassini centradas na origem no plano euclidiano de focos $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$	35
Figura 13	\mathcal{M} -curva de Cassini e cones de luz centrados em seus focos.	36
Figura 14	\mathcal{M} -curva de Cassini centrada na origem e seus pontos de interseção com C_L para $b \geq c$	38
Figura 15	\mathcal{M} -curva de Cassini centrada na origem e seus pontos de interseção com C_L para $c > b$	39
Figura 16	Ponto $P(x, y)$ nos planos OXY e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$	40
Figura 17	\mathcal{M} -curva de Cassini transladada com parâmetro $b = 4 < c = 5$	42
Figura 18	\mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli transladada	43
Figura 19	\mathcal{M} -curva de Cassini transladada com parâmetro $b = 3 > c = 2$	43

Figura 20	(a) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = 2$ e $F_1 = (2, 3)$ e $F_2 = (3, 2)$	45
Figura 21	(b) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = 3$ e $F_1 = (1, 4)$ e $F_2 = (-1, -4)$	46
Figura 22	(c) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = 1$ e $F_1 = (1, 1)$ e $F_2 = (3, 3)$	46
Figura 23	(d) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = \sqrt{2}$ e $F_1 = (-1, 1)$ e $F_2 = (2, 2)$	47
Figura 24	(e) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = \sqrt{2}$ e $F_1 = (-1, 1)$ e $F_2 = (2, 2)$	47
Figura 25	Setor hiperbólico	48

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	O PLANO DE MINKOWSKI	17
2.1	Hermann Minkowski	17
2.2	A Geometria do Plano de Minkowski	18
2.3	O Cone de Luz	19
2.4	A \mathcal{M} -norma, a \mathcal{M} -distância e o \mathcal{M} -círculo	20
3	CURVAS DE CASSINI NO PLANO DE MINKOWSKI	23
3.1	Giovanni Domenico Cassini	23
3.2	\mathcal{M} -Curvas de Cassini	24
3.3	Forma canônica das \mathcal{M} -curvas de Cassini	25
3.3.1	Interseção com os eixos coordenados	27
3.3.2	A \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli	28
3.3.3	Forma canônica das \mathcal{M} -Curvas de Cassini com parâmetros $b \neq c$	33
3.3.4	Interseções das \mathcal{M} -curvas de Cassini com os cones de luz centrados na origem	37
3.4	Translação dos eixos coordenados	40
3.4.1	Forma canônica da \mathcal{M} -curva de Cassini transladada	41
3.5	Equação geral das \mathcal{M} -curvas de Cassini	44
3.6	Parametrização das \mathcal{M} -curvas de Cassini via Coordenadas Hiperbólicas	48
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
	Referências	52

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação trata das curvas de Cassini no plano de Minkowski. É um trabalho, portanto, que se vale, direta ou indiretamente, de três assuntos que normalmente não são vistos no ensino básico, a saber: as curvas de Cassini, as geometrias não euclidianas e a teoria da relatividade especial. Destacamos que o fato de tais assuntos não serem vistos no ensino básico não diminui a importância dos mesmos. Pelo contrário, são assuntos atuais e bastante relevantes dentro do contexto científico e educacional. Nos próximos parágrafos discorreremos um pouco sobre cada um deles.

As curvas (ou ovais) de Cassini foram descobertas em 1680 por Giovanni Domenico Cassini (astrônomo muito conceituado em sua época), e por isso levam seu nome. Shonoda (2015) relata o seguinte:

"Em 1680, como parte do estudo dos movimentos da Terra e do Sol, ele (Giovanni Cassini) estudou um determinado tipo de curva, hoje denominada curva de Cassini. Cassini acreditava que o movimento dos planetas do sistema solar ocorre em uma dessas curvas. Existem muitas aplicações das curvas de Cassini na BioGeometria, por exemplo, setores de camadas de cebola, colônias bacterianas e formas de células. Além disso, a simulação de dispersão de luz por pequenas partículas côncavas é necessária para encontrar uma descrição matemática adequada da forma da partícula. Isso pode ser feito facilmente usando as curvas de Cassini. Por exemplo, essa abordagem é usada para ajustar a forma dos glóbulos vermelhos do sangue humano".

As curvas de Cassini são definidas de maneira muito similar às elipses. Enquanto que estas são o lugar geométrico dos pontos do plano euclidiano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos, é constante, aquelas são o lugar geométrico dos pontos do plano euclidiano cujo produto das distâncias a dois pontos fixos, também chamados de focos, é constante. A equação que descreve a oval de Cassini no plano euclidiano com centro na origem e focos sobre o eixo OX é dada por $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = b^4 - c^4$. Um caso especial ocorre quando fazemos $b = c$. Neste caso, a equação $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$ descreve uma curva chamada Lemniscata de Bernoulli. Sobre a Lemniscata de Bernoulli, Morais e Rodrigues (2018) relata o

seguinte:

A Lemniscata foi descrita pela primeira vez em 1664, pelo matemático suíço Jacob Bernoulli (1654-1705), que por sua vez não tinha o conhecimento que 14 (quatorze) anos antes esta curva havia sido estudada por Giovanni Cassini, enquanto buscava respostas sobre o curso relativo da terra em torno do sol, sendo então a Lemniscata um caso especial das ovas de Cassini.

Segundo Greenberg (2007), as geometrias não euclidianas surgiram oficialmente no século XIX, a partir do ano de 1829, após quase dois mil anos de muito trabalho por parte dos matemáticos em tentar demonstrar o quinto postulado de Euclides, que constava em sua obra "Elementos". Este postulado é conhecido como "postulado das paralelas". Os grandes nomes para a descoberta destas novas geometrias são o húngaro János Bolyai (1802-1860), o russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856) e os alemães Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Georg Friedrich Riemann (1826-1866). Um relato interessante sobre o nascimento e impacto dessas novas geometrias é feito por Andrade (2013):

"Durante séculos, a Matemática ficou presa nessa concepção (que ela era uma Ciência da Natureza) fazendo com que a maior parte das suas teorias tivesse como moldura o espaço euclidiano e fosse direcionada para o estudo de um universo euclidiano.

Com os trabalhos de Bolyai e Lobachevsky esse paradigma foi rompido e vieram as indagações naturais. E se o universo não for euclidiano? É hiperbólico? Tudo o que foi feito é válido? Para sair desse dilema, aos poucos, foi se consolidando uma nova concepção da Matemática, não mais como uma Ciência da Natureza, mas como pura criação intelectual, a Matemática pura."

Também podemos citar Coutinho (2018), que diz:

"A Geometria Euclidiana, transmitida de geração a geração por mais de dois mil anos, não era a única. As mentes criativas dos matemáticos Bolyai, Lobachevsky, Gauss e Riemann lançaram as bases de outras geometrias tão logicamente aceitas quanto a Euclidiana. Uma dessas geometrias não-euclidianas encontra aplicação na Teoria da relatividade, o que se justifica, pois sendo curvo o universo eisteniano, a Geometria Euclidiana não é adequada."

A teoria da relatividade especial de Einstein é considerada por muitos cientistas uma das mais belas criações humanas. Mas não foi assim em seu nascimento. De fato, Santos (2009) relata que o primeiro artigo publicado por Einstein, em 1905, despertou, de início, pouco interesse por parte dos físicos. A Relatividade só começou a ser conhecida num âmbito mais vasto em 1908, quando Hermann Minkowski proferiu a sua famosa palestra "Espaço e Tempo". Segue o relato:

"Albert Einstein (1879–1955) publicou o seu primeiro artigo sobre Relatividade em 1905. Inicialmente, o artigo despertou pouca atenção entre os físicos. Só vários meses após a sua publicação é que Einstein teve a primeira reacção, sob a forma de uma carta de Max Planck (1858–1947), que já era então um físico reputado. As ideias de Einstein começaram a ser divulgadas sobretudo graças aos esforços de Planck, que as expôs num colóquio de Física que teve lugar no primeiro semestre do ano lectivo 1905–06 e orientou a primeira tese de doutoramento naquela área, publicada em 1907 (...). No entanto, a Relatividade só começou a tornar-se conhecida por outros cientistas que não físicos quando Hermann Minkowski (1864–1909), que fora professor de Einstein no Instituto Politécnico de Zurique, proferiu a sua famosa palestra "Espaço e Tempo" a 21 de Setembro de 1908 numa conferência de cientistas alemães de diversas áreas. Minkowski era professor de Matemática na Universidade de Göttingen desde 1902 e não foi o único matemático daquela universidade a dedicar-se à Teoria da Relatividade, pois Felix Klein (1849–1925), David Hilbert (1862–1943), Emmy Noether (1885–1935) e Hermann Weyl (1885–1955) também o fizeram."

Para concluir os relatos acerca da contribuição de Minkowski à Teoria da Relatividade Especial de Einstein, destacamos o que consta em Biezuner (2017):

"Vale a pena ressaltar que foi Minkowski quem traduziu a Teoria da Relatividade Especial para a linguagem do espaço-tempo (em 1907), isto é, foi ele quem reconheceu que a consequência principal da teoria foi a unificação do espaço e do tempo em uma só unidade. Em suas palavras: "De agora em diante, espaço por si só e tempo por si estão condenados a desaparecer em meras sombras, e somente uma união dos dois preservaria uma realidade independente."

É bom citar que, segundo Biezuner (2017), inicialmente, Einstein não aceitou bem a ideia de Minkowski. Em sua opinião, estender o espaço para a quarta dimensão mais mistificava do que esclarecia a teoria. Pouco tempo depois, no entanto, Einstein mudou radicalmente de opinião e reconheceu a importância do conceito de espaço-tempo, que foi fundamental para a elaboração da Teoria da Relatividade Geral.

O espaço-tempo de Minkowski é uma geometria não euclidiana constituída do seguinte: é o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido de um produto escalar especial, conhecido como métrica de Lorentz.

Nesta dissertação, nossa "moldura" será o plano de Minkowski ou, fisicamente falando, o espaço-tempo bidimensional. A importância de se trabalhar neste plano vem do fato de que o mesmo serve como protótipo para dimensões maiores. Ademais, acreditamos que antes de se introduzir os conceitos de relatividade especial no ensino básico, é importante que os alunos já tenham tido uma experiência exatamente com o que chamamos de "protótipo" do espaço-tempo, que é o plano de Minkowski. A fim de divulgar este plano, escolhemos trabalhar nele a teoria das curvas de Cassini e, neste sentido, tomamos como principal referência um artigo devido a Shonoda (2015).

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

No Capítulo 2 tomamos como referência principal Couto e Lymberopoulos (2018). Nele consta um breve e objetivo resumo dos dois primeiros capítulos desta referência, por vezes particularizando a teoria para o caso em que a dimensão do ambiente é igual a 2, já que lá se trabalha em alguns momentos com dimensão n qualquer. Iniciamos o capítulo com um breve relato da vida de Hermann Minkowski e, em seguida, definimos e destacamos alguns pontos que julgamos importantes para o desenvolvimento do trabalho dentro da teoria da Geometria no Plano de Minkowski.

No Capítulo 3, após fazermos um breve relato da vida de Giovanni Domenico Cassini, utilizamos as definições das curvas de Cassini no plano de Minkowski dadas por Shonoda (2015) e destacamos alguns casos particulares e especiais.

Ainda sobre o Capítulo 3, ressaltamos que nossa abordagem das referidas curvas difere inicialmente daquela dada por Shonoda (2015). De fato, em seu trabalho, após dar a definição das curvas de Cassini no plano de Minkowski, o autor descreve algebricamente esta definição e, em seguida, altera os parâmetros da mesma usando funções hiperbólicas. Após isso, ele estuda os casos particulares em que os focos das curvas encontram-se ambos nos eixos OX , OY , nas retas $y = x$ e $y = -x$ e em retas paralelas a estas citadas. Aqui nós desenvolvemos algebricamente a definição dada pelo autor e deduzimos suas equações algébricas também para os casos particulares acima citados, os quais denominamos de "formas canônicas" e forma geral dessas curvas.

Em meio a nossa abordagem, definimos uma \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli que, assim como as Lemniscatas de Bernoulli no plano euclidiano (que são um caso particular de curvas de Cassini), estas também nascem de um caso particular das curvas de Cassini no plano de Minkowski. Por fim, também exploramos um pouco a abordagem feita por Shonoda usando as funções hiperbólicas e fazendo alguns exemplos.

2 O PLANO DE MINKOWSKI

Neste capítulo, iniciamos com um breve relato sobre a vida de Hermann Minkowski e, em seguida, definimos a geometria do plano que leva seu nome, bem como destacamos algumas propriedades e características interessantes que julgamos importantes para o trabalho. As principais referências para o desenvolvimento deste capítulo foram: O'Connor e Robertson (2015), Couto e Lymberopoulos (2018) e Shonoda (2015).

2.1 Hermann Minkowski

Segundo O'Connor e Robertson (2015), Hermann Minkowski (1864-1909) foi um matemático e físico, conhecido por suas contribuições fundamentais para a teoria da relatividade especial e pelo desenvolvimento da geometria do espaço-tempo.

Minkowski nasceu em 22 de junho de 1864 em Alexotas, na Lituânia, que na época era território russo e mudou-se ainda criança com sua família para a Alemanha. Estudou Matemática na Universidade de Königsberg, onde foi aluno de grandes matemáticos da época, como Adolf Hurwitz e Ferdinand von Lindemann, obtendo seu doutorado em 1885 e em seguida começou a trabalhar como assistente de Hurwitz.

Em 1896, Minkowski foi nomeado professor na Universidade de Königsberg e, posteriormente, na Universidade de Zurique. Durante esse período, ele se interessou pela teoria da relatividade de Albert Einstein, que estava em desenvolvimento na época. Minkowski e Einstein tiveram uma colaboração estreita, discutindo e desenvolvendo conceitos importantes.

A contribuição mais conhecida de Minkowski foi sua formulação geométrica do espaço-tempo em quatro dimensões. Em uma palestra proferida em 1908, intitulada "Espaço e Tempo", ele apresentou a ideia de combinar as três dimensões espaciais com

o tempo em uma única entidade, o espaço-tempo quadridimensional.

Minkowski introduziu a métrica de espaço-tempo utilizando a métrica de Lorentz, que descreve a geometria do espaço-tempo na relatividade especial. Essa métrica permitiu uma compreensão matemática mais clara dos conceitos relativísticos, como a dilatação do tempo, a contração do comprimento e a invariância da velocidade da luz.

Sua interpretação geométrica do espaço-tempo proporcionou uma base sólida para a Teoria da Relatividade Especial e influenciou o desenvolvimento posterior da Teoria da Relatividade Geral de Einstein.

Infelizmente, Minkowski faleceu prematuramente em 12 de janeiro de 1909, aos 44 anos, devido a uma apendicite aguda.

2.2 A Geometria do Plano de Minkowski

Definição 1. *O plano espaço-tempo de Lorentz-Minkowski, ou simplesmente plano de Minkowski, é o par $\mathcal{M}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}})$, formado pelo espaço vetorial real \mathbb{R}^2 e pelo seguinte produto escalar: dados $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = x_1x_2 - y_1y_2, \quad (2.1)$$

conhecido na literatura como produto escalar de Lorentz.

O produto escalar de Lorentz $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$ nos permite dar a seguinte definição.

Definição 2. *Dois vetores u e v em \mathcal{M}^2 são chamados Minkowski-ortogonais (ou \mathcal{M} -ortogonais) se $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 0$.*

Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, que formam uma base ortonormal para o espaço \mathbb{R}^2 , são vetores \mathcal{M} -ortogonais. Observamos também que através da escolha de um sistema de eixos ortogonais OXY é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de \mathbb{R}^2 e os pontos de um plano π . Portanto, como a diferença na definição do plano de Minkowski para o euclidiano está apenas na maneira de medir, também usaremos sistemas de eixos ortogonais para identificar elementos de \mathcal{M}^2 com o plano.

Voltando à Definição 1, o produto escalar de Lorentz satisfaz às seguintes propriedades: para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todos $u, v, w \in \mathcal{M}^2$, tem-se

(P_1) Bilinearidade: $\langle ku + v, w \rangle_{\mathcal{M}} = k\langle u, w \rangle_{\mathcal{M}} + \langle v, w \rangle_{\mathcal{M}}$

(P_2) Comutatividade: $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = \langle v, u \rangle_{\mathcal{M}}$

(P_3) Não-degenerescência: Para cada vetor não nulo $u \in \mathcal{M}^2$ existe $v \in \mathcal{M}^2$ tal que $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} \neq 0$.

Além das propriedades (P_1), (P_2) e (P_3) descritas acima, destacamos que, conforme consta em Couto e Lymberopoulos (2018), diferentemente da geometria euclidiana, na geometria de Minkowski, o produto escalar não é positivo-definido. Isto é, se $u \in \mathcal{M}^2$ é um vetor não nulo, então $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}}$ pode ser um número positivo, negativo ou zero. Um produto escalar positivo-definido é chamado de produto interno. Em geral, um produto escalar que não é positivo definido satisfazendo as propriedades de (P_1) a (P_3) é denominado de produto escalar pseudo-euclidiano. Espaços vetoriais munidos com um produto escalar pseudo-euclidiano são denominados espaços pseudo-euclidianos.

O fato de o produto escalar em \mathcal{M}^2 não ser positivo-definido nos permite classificar seus vetores em três tipos, os quais veremos a seguir.

(a) $u \in \mathcal{M}^2$ é dito ser *tipo-espaço* quando $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} > 0$ ou $u = O$.

(b) $u \in \mathcal{M}^2$ é dito ser *tipo-tempo* quando $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} < 0$.

(c) $u \in \mathcal{M}^2$ é dito ser *tipo-luz* quando $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = 0$, com $u \neq O$.

Todos os vetores $u = (x, y) \in \mathcal{M}^2$ tais que $|x| > |y|$ são tipo-espaço; todos os vetores $u = (x, y) \in \mathcal{M}^2$ tais que $|y| > |x|$ são tipo-tempo e todos os vetores das retas $y = x$ e $y = -x$ são de tipo-luz. Mais ainda, a partir da tricotomia da relação de ordem em \mathbb{R} , cada vetor em \mathcal{M}^2 possui um e somente um dos três tipos apresentados acima e isto nos permite escrever o plano de Minkowski como uma determinada união disjunta, à qual veremos na Seção abaixo.

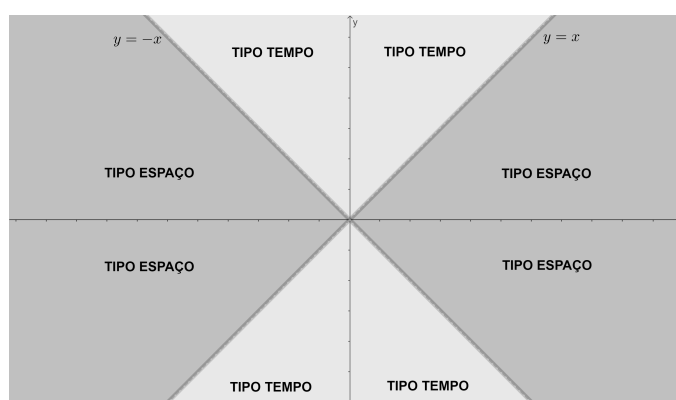
2.3 O Cone de Luz

A definição a seguir pode ser encontrada em sua versão mais geral em Couto e Lymberopoulos (2018).

Definição 3. O conjunto de todos os vetores tipo-luz do plano de Minkowski, denotado por C , é chamado cone de luz (centrado em $(0,0)$).

Observe que o cone de luz em \mathcal{M}^2 é exatamente a união das retas $y = x$ e $y = -x$. Observe ainda, como mostra a Figura 1, que o cone de luz separa o plano de Minkowski em exatamente duas partes: A parte interna do cone de luz é formada apenas por vetores tipo-tempo e a parte externa do cone de luz é formada apenas por vetores tipo-espaço.

Figura 1: O Cone de Luz



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

A partir da Definição 3, Couto e Lymberopoulos (2018) também sugerem a seguinte definição.

Definição 4. O cone de luz centrado em $P \in \mathcal{M}^2$ é o conjunto

$$C_L(P) = \{Q \in \mathcal{M}^2; Q - P \text{ é do tipo-luz}\}.$$

2.4 A \mathcal{M} -norma, a \mathcal{M} -distância e o \mathcal{M} -círculo

As definições a seguir são encontradas em Couto e Lymberopoulos (2018).

Definição 5. A \mathcal{M} -norma em \mathcal{M}^2 , a qual denotamos por $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, é definida por:

$$\|u\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{|\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}}|}, \quad \forall u \in \mathcal{M}^2. \quad (2.2)$$

Um vetor $u \in \mathcal{M}^2$ é \mathcal{M} -unitário se $\|u\|_{\mathcal{M}} = 1$.

Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são ambos \mathcal{M} -unitários. Um par de vetores \mathcal{M} -unitários que são \mathcal{M} -ortogonais são denominados *vetores \mathcal{M} -ortonormais*.

Observe, a partir da Definição 5, que a \mathcal{M} -norma de um vetor u pode ser igual a zero, mesmo que u não seja o vetor nulo. Outra observação interessante a cerca da \mathcal{M} -norma é que em geral as desigualdades de Cauchy não são verdadeiras. Por este motivo a \mathcal{M} -norma não é uma norma no sentido estrito da palavra, sendo, portanto, uma pseudo-norma.

Definição 6. A \mathcal{M} -distância entre dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ em \mathcal{M}^2 é denotada e definida por

$$d_{\mathcal{M}}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|_{\mathcal{M}} \quad (2.3)$$

em que $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Veja que, por depender diretamente da \mathcal{M} -norma, a função \mathcal{M} -distância não é uma função distância no contexto de espaços métricos. Por exemplo, a \mathcal{M} -distância de um ponto A para um ponto B em \mathcal{M}^2 pode ser nula sem que tenhamos $A = B$.

Usando a definição de \mathcal{M} -distância podemos revisitar a Definição 3 e redefinir o cone de luz centrado em um ponto $P \in \mathcal{M}^2$ da seguinte maneira:

Definição 7. O cone de luz centrado em $P \in \mathcal{M}^2$, denotado por $C_L(P)$, é o conjunto de todos os pontos $Q \in \mathcal{M}^2$, tais que $d_{\mathcal{M}}(P, Q) = 0$.

Com o cálculo da \mathcal{M} -distância em coordenadas podemos obter uma caracterização algébrica do \mathcal{M} -círculo do plano de Minkowski. De acordo com Shonoda (2015),

Definição 8. O círculo no plano de Minkowski (ou simplesmente \mathcal{M} -círculo) de centro em $P \in \mathcal{M}^2$ e raio $k > 0$, denotado por $S_{\mathcal{M}}(P, k)$, é o subconjunto dos pontos de \mathcal{M}^2 situados à \mathcal{M} -distância k do ponto P . Algebricamente, escrevemos

$$S_{\mathcal{M}}(P, k) := \{Q \in \mathcal{M}^2; d_{\mathcal{M}}(P, Q) = k\}.$$

Se (x_0, y_0) são as coordenadas do centro P num sistema de eixos ortogonais OXY de \mathcal{M}^2 , então

$$\begin{aligned} Q = (x, y) \in S_{\mathcal{M}}(P, k) &\iff d_{\mathcal{M}}(P, Q) = k \\ &\iff d_{\mathcal{M}}(P, Q)^2 = k^2 \\ &\iff |(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2| = k^2 \\ &\iff (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = \pm k^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

3 CURVAS DE CASSINI NO PLANO DE MINKOWSKI

Iniciamos este capítulo com uma breve biografia sobre Giovanni Cassini e, em seguida, definimos e mostramos parte da teoria que envolve as curvas que levam seu nome sob a perspectiva da Geometria de Minkowski.

3.1 Giovanni Domenico Cassini

Segundo O'Connor e Robertson (2003), Giovanni Domenico Cassini foi um astrônomo e matemático italiano nascido em 8 de junho de 1625, em Perinaldo, na República de Gênova. Ele é conhecido por suas contribuições para a astronomia e a cartografia celeste.

Cassini ingressou no seminário em Gênova e recebeu uma educação sólida em matemática e astronomia. Mais tarde, se mudou para a França, onde adotou o nome francês Jean-Dominique Cassini, sendo esta uma adaptação para facilitar sua integração na sociedade francesa, não uma mudança oficial de nome. Em seguida se tornou diretor do Observatório de Paris em 1669 onde foi o seu primeiro diretor e desempenhou um papel fundamental em seu estabelecimento como um importante centro de pesquisa astronômica.

Durante sua carreira, Cassini fez várias descobertas e contribuições importantes para a astronomia. Ele foi pioneiro na medição de longitudes geográficas e celestes com maior precisão, estabelecendo uma nova rede de triangulação na França. Ele também realizou observações dos planetas, incluindo Júpiter e Saturno.

Um dos grandes feitos de Cassini foi ter descoberto as quatro luas principais de Saturno: Jápeto, Reia, Dione e Tétis. Cassini verificou que sistema de anéis de Saturno

possui falhas em toda a sua extensão, que foram nomeadas como divisão de Cassini. Além de suas descobertas, Cassini é conhecido por sua contribuição para a Matemática. Ele estudou as propriedades das elipses e descreveu a curva que ficou conhecida como "curva de Cassini", o que motivou este trabalho.

Giovanni Domenico Cassini faleceu em 14 de setembro de 1712, em Paris, França. Seu trabalho e suas contribuições deixaram um legado duradouro na astronomia e na ciência em geral. Devido às suas contribuições para a astronomia, o nome Cassini foi posteriormente associado a várias outras descobertas e marcos relacionados a Saturno e suas luas.

3.2 \mathcal{M} -Curvas de Cassini

Shonoda (2015) define as \mathcal{M} -Curvas de Cassini da seguinte maneira:

Definição 9. *Uma \mathcal{M} -Curva de Cassini de focos $F_1 = (z_1, z_2)$ e $F_2 = (w_1, w_2)$, que denotamos por $C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$, é o lugar geométrico dos pontos P do plano de Minkowski cujo produto das \mathcal{M} -distâncias a F_1 e a F_2 é uma constante b^2 .*

Algebricamente, escrevemos:

$$C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2) = \{P \in \mathcal{M}^2; d_{\mathcal{M}}(P, F_1) \cdot d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = b^2\}. \quad (3.1)$$

Em coordenadas, um ponto $P(x, y)$ pertence a $C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ se, e somente se,

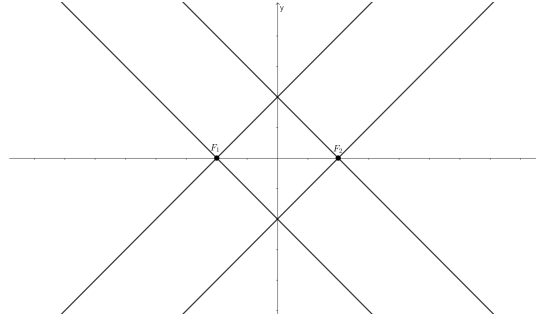
$$|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| \cdot |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2| = b^4. \quad (3.2)$$

A reta que contém os focos de uma \mathcal{M} -curva de Cassini é denominada **reta focal**; os pontos de interseção das \mathcal{M} -curvas de Cassini com a reta focal são denominados **vértices**. Geometricamente, as formas das \mathcal{M} -curvas de Cassini dependem da posição dos focos e da constante b , como veremos adiante.

É oportuno observar que ao considerar a definição das curvas de Cassini no plano euclidiano, é natural exigir que se tenha $b \neq 0$, pois para $b = 0$ essas curvas se degeneram em um único ponto. No Plano de Minkowski, ao considerarmos $b = 0$ estas curvas se degeneram nos cones de luz centrados nos focos. De fato, veja em (3.1) que $d_{\mathcal{M}}(P, F_1) \cdot d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = 0$ se, e somente se $d_{\mathcal{M}}(P, F_1) = 0$ ou $d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = 0$. Mas isto ocorre se, e somente se, P pertence ao cone de luz centrado em F_1 ou ao cone de luz

centrado em F_2 . A Figura 3 mostra o traço de uma \mathcal{M} -curva de Cassini degenerada, com centro na origem e com os focos sobre o eixo OX .

Figura 3: \mathcal{M} -curva de Cassini degenerada



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Visto isto, para o que se segue também consideraremos apenas os casos em que $b^2 > 0$.

3.3 Forma canônica das \mathcal{M} -curvas de Cassini

A partir da Definição 9 obteremos a equação das \mathcal{M} -curvas de Cassini em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY para os casos especiais em que o centro dessas \mathcal{M} -curvas é a origem e os focos estão sobre os eixos coordenados.

Consideremos inicialmente as \mathcal{M} -curvas de Cassini com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX . Então os focos de $C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 P(x, y) \in C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2) &\iff d_{\mathcal{M}}(P, F_1) \cdot d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = b^2 \\
 &\iff \sqrt{|(x - (-c))^2 - y^2|} \cdot \sqrt{|(x - c)^2 - y^2|} = b^2 \\
 &\iff |(x + c)^2 - y^2| \cdot |(x - c)^2 - y^2| = b^4 \\
 &\iff (x^2 + 2xc + c^2 - y^2) \cdot (x^2 - 2xc + c^2 - y^2) = \pm b^4 \\
 &\iff x^4 - 2x^3c + x^2c^2 - x^2y^2 + 2x^3c - 4x^2c^2 + 2xc^3 - 2x^2y^2 + \\
 &\quad x^2c^2 - 2xc^3 + c^4 - c^2y^2 - y^2x^2 + 2x^2y^2 - y^2c^2 + y^4 = \pm b^4 \\
 &\iff x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2c^2x^2 - 2c^2y^2 + c^4 = \pm b^4 \\
 &\iff (x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) = \pm b^4 - c^4, \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

que é a **forma canônica das \mathcal{M} -curvas de Cassini com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX** . De maneira análoga encontramos a **forma canônica das**

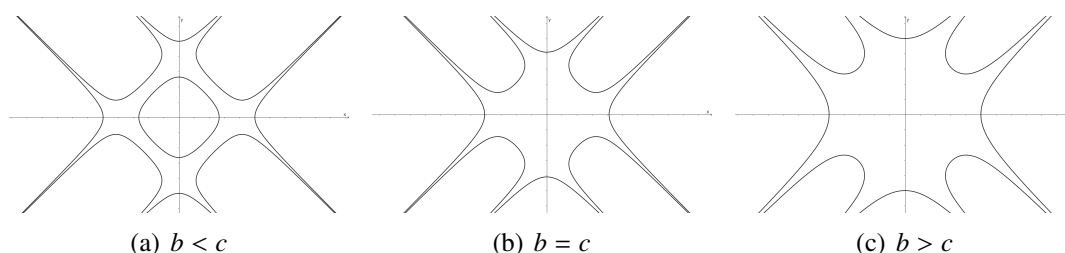
\mathcal{M} -curvas de Cassini com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY , que é dada por

$$(y^2 - x^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) = \pm b^4 - c^4. \quad (3.4)$$

Observe que as Equações (3.3) e (3.4) são iguais, uma vez que os termos $(x^2 - y^2)$ e $(y^2 - x^2)$ estão ambos elevados ao quadrado nas respectivas equações. Isto significa que o traço das \mathcal{M} -curvas de Cassini com centro na origem e focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ coincide com o traço das \mathcal{M} -curvas de Cassini com centro na origem e focos $F'_1 = (0, -c)$ e $F'_2 = (0, c)$. Portanto, nesta seção estudaremos apenas a Equação (3.3), já que os resultados para a Equação (3.4) serão análogos.

Usando o software Geogebra é possível esboçar o traço das curvas descritas pela Equação (3.3). Na Figura 4 por exemplo construímos os traços de três \mathcal{M} -curvas de Cassini de Equação (3.3), para os casos $b < c$, $b = c$ e $b > c$.

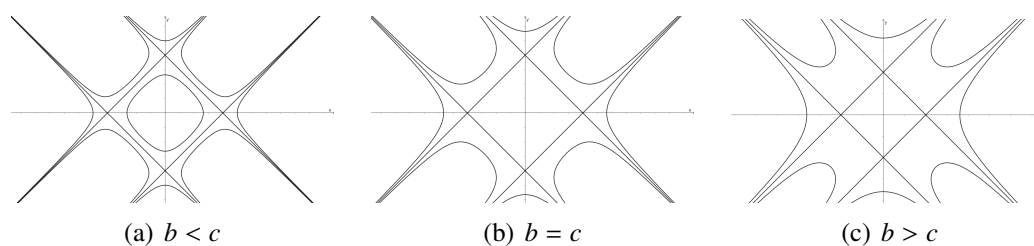
Figura 4: \mathcal{M} -curvas de Cassini centradas na origem com reta focal no eixo OX



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Observe na Figura 4 que em todos os casos as \mathcal{M} -curvas de Cassini intersectam os eixos coordenados. Na próxima subseção encontraremos as expressões que nos dão as coordenadas destes pontos de interseção. Ademais, todas estas \mathcal{M} -curvas tem como assíntotas exatamente os cones de luz centrados em seus respectivos focos, como mostra a Figura 5 .

Figura 5: Assíntotas das \mathcal{M} -curvas de Cassini



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

3.3.1 Interseção com os eixos coordenados

No estudo das \mathcal{M} -curvas de Cassini, usando a Equação (3.3), encontraremos as expressões das coordenadas de seus pontos de interseção com os eixos coordenados. Para tanto, se $P(x, y)$ é um ponto que pertence à \mathcal{M} -curva de Cassini com centro na origem e de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ e também pertence ao eixo OX , então P tem segunda coordenada nula $y = 0$, e a Equação (3.3) se reduz a:

$$x^4 - 2c^2x^2 = \pm b^4 - c^4.$$

Isto é, $P(x, 0)$ satisfaz

$$(i) \quad x^4 - 2c^2x^2 = b^4 - c^4$$

ou

$$(ii) \quad x^4 - 2c^2x^2 = -b^4 - c^4$$

Fazendo $m = x^2$ em ambos os casos (i) e (ii), encontramos que $P(x, 0)$ satisfaz

$$(i) \quad m^2 - 2c^2m - b^4 + c^4 = 0$$

ou

$$(ii) \quad m^2 - 2c^2m + b^4 - c^4 = 0$$

Para encontrar a coordenada x do ponto P , se existir, devemos encontrar primeiramente as raízes m_1 e m_2 das equações acima e depois substituir na expressão $m = x^2$, como segue:

(i) De $m^2 - 2c^2m - b^4 + c^4 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{2c^2 + \sqrt{4c^4 - 4(-b^4 + c^4)}}{2} & m_2 &= \frac{2c^2 - \sqrt{4c^4 - 4(-b^4 + c^4)}}{2} \\ &= \frac{2c^2 + \sqrt{4b^4}}{2} & & e & &= \frac{2c^2 - \sqrt{4b^4}}{2} \\ &= c^2 + b^2 & & & &= c^2 - b^2. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão $m = x^2$, obtemos $x_1 = \pm \sqrt{m_1} = \pm \sqrt{c^2 + b^2}$ e $x_2 = \pm \sqrt{m_2} = \pm \sqrt{c^2 - b^2}$. Perceba que x_2 só terá solução se $c^2 \geq b^2$.

(ii) De $m^2 - 2c^2m + b^4 + c^4 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{2c^2 + \sqrt{4c^4 - 4(b^4 + c^4)}}{2} & m_2 &= \frac{2c^2 - \sqrt{4c^4 - 4(b^4 + c^4)}}{2} \\ &= \frac{2c^2 + \sqrt{-4b^4}}{2} & & e & &= \frac{2c^2 - \sqrt{-4b^4}}{2} \\ &= c^2 + \sqrt{-b^4} & & & &= c^2 - \sqrt{-b^4}. \end{aligned}$$

Portanto, para o caso (ii) não há interseção da curva com os eixos coordenados.

Analogamente, se $P(x, y)$ é um ponto que pertence à \mathcal{M} -curva de Cassini com centro na origem e focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ e também ao eixo OY , então P tem primeira coordenada $x = 0$, e a Equação (3.3) se reduz a:

$$y^4 - 2c^2y^2 = \pm b^4 - c^4.$$

Procedendo como no caso anterior, encontramos as raízes reais $y = \pm \sqrt{c^2 \pm b^2}$.

Portanto, os pontos de interseção das \mathcal{M} -curvas de Cassini de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ com os eixos coordenados são os seguintes: para $b^2 \geq c^2$ obtemos

$$\begin{aligned} P_1 &= (\sqrt{c^2 + b^2}, 0), & P_2 &= (-\sqrt{c^2 + b^2}, 0), \\ P_3 &= (0, \sqrt{c^2 + b^2}), & P_4 &= (0, -\sqrt{c^2 + b^2}), \end{aligned}$$

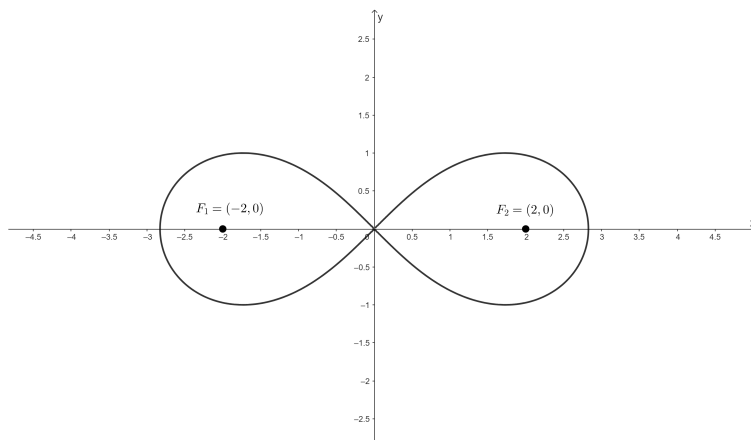
E, para $c^2 > b^2$, obtemos

$$\begin{aligned} P_5 &= (\sqrt{c^2 - b^2}, 0), & P_6 &= (-\sqrt{c^2 - b^2}, 0), \\ P_7 &= (0, \sqrt{c^2 - b^2}), & P_8 &= (0, -\sqrt{c^2 - b^2}). \end{aligned}$$

Antes de fazermos exemplos do que foi visto até o aqui, gostaríamos de tratar do caso específico em que $b = c$, dada sua importância no contexto do plano euclidiano.

3.3.2 A \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli

De acordo com Moraes e Rodrigues (2018), a Lemniscata foi descrita pela primeira vez em 1964, pelo matemático suíço Jacob Bernoulli (1654-1705), que por sua vez não tinha o conhecimento que 14 (quatorze) anos antes esta curva havia sido estudada por Giovanni Cassini. Na Figura ?? temos o traço de uma Lemniscata de Bernoulli centrada na origem do plano euclidiano com os focos sobre o eixo OX , cuja equação é dada por $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$.

Figura 6: Lemniscata centrada na origem com focos sobre o eixo OX 

$$(a) (x^2 + y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) = 0$$

Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Inspirados pela definição de Lemniscata de Bernoulli, nós definimos a **\mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli**, centrada na origem do plano de Minkowski, como sendo o conjunto dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem a Equação (3.3) para o caso especial $b = c$. Portanto, um ponto $P(x, y)$ pertence à \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli se, e somente se, satisfaz à equação

$$(x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) = 0 \quad (3.5)$$

ou à equação

$$(x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) = -2c^4. \quad (3.6)$$

Exemplo 1: Determine as equações e os pontos de interseção com os eixos coordenados, da \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli de focos $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$. Fazer um esboço da curva utilizando o software Geogebra.

Solução. Como se trata de uma \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli, temos $b = c = \sqrt{2}$, onde c é a \mathcal{M} -distância dos focos ao centro da \mathcal{M} -Lemniscata. As Equações (3.5) e (3.6) se tornam

$$(x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = 0$$

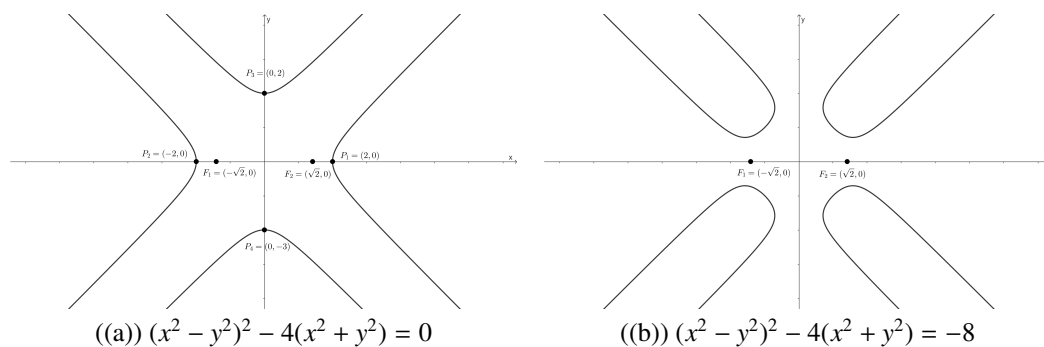
e

$$(x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = -8.$$

Ademais, como visto na Subseção 3.3.1, a \mathcal{M} -Lemniscata pertence ao caso em que $b^2 \geq c^2$. Ela tem, portanto, quatro pontos de interseção com os eixos coordenados, cujas coordenadas não nulas são as soluções de $\pm\sqrt{b^2 + c^2}$. Fazendo $b = c = \sqrt{2}$, obtemos $P_1 = (2, 0)$, $P_2 = (-2, 0)$, $P_3 = (0, 2)$ e $P_4 = (0, -2)$. Usando o software

Geogebra, obtemos na Figura 7 os traços das curvas das duas equações dadas acima.

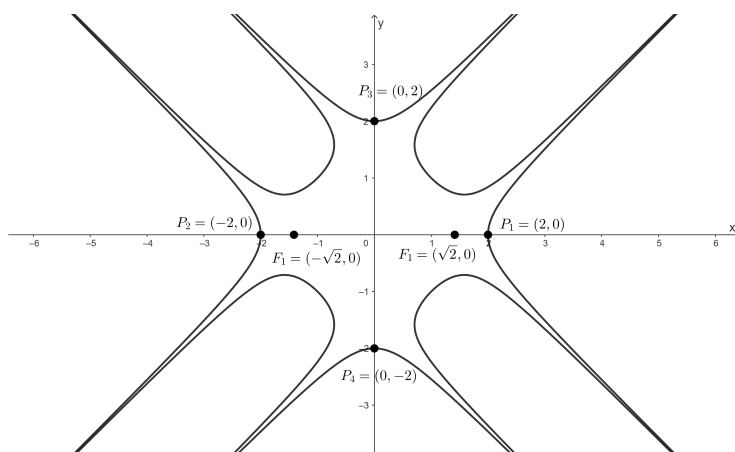
Figura 7: Ramos da \mathcal{M} – Lemniscata centrada na origem de focos $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Por fim, unindo ambos os traços, obtemos na Figura 8 o esboço da \mathcal{M} -Lemniscata. Em adição, destacamos seus pontos de interseção com os eixos coordenados.

Figura 8: \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli centrada na origem de parâmetro $b = c = \sqrt{2}$



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Para finalizar esta subseção, encontraremos as equações que descrevem cada folha (ou pedaço) da \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli, de modo que cada uma delas seja gráfico de uma determinada função. Para isso, basta desenvolver as expressões (3.5) e (3.6), como faremos a seguir:

Desenvolvendo (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) &= 0 \\ \iff x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2c^2x^2 - 2c^2y^2 &= 0 \\ \iff -2x^2y^2 + y^4 - 2c^2y^2 &= 2c^2x^2 - x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow y^4 - 2y^2(x^2 + c^2) = 2c^2x^2 - x^4 \\
&\Leftrightarrow y^4 - 2y^2(x^2 + c^2) + (x^2 + c^2)^2 = 2c^2x^2 - x^4 + (x^2 + c^2)^2 \\
&\Leftrightarrow (y^2 - x^2 - c^2)^2 = 2c^2x^2 - x^4 + x^4 + 2x^2c^2 + c^4 \\
&\Leftrightarrow (y^2 - x^2 - c^2)^2 = 4c^2x^2 + c^4 \\
&\Leftrightarrow y^2 - x^2 - c^2 = \pm \sqrt{4c^2x^2 + c^4} \\
&\Leftrightarrow y^2 = x^2 + c^2 \pm c \sqrt{4x^2 + c^2} \\
&\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{x^2 + c^2 \pm c \sqrt{4x^2 + c^2}}.
\end{aligned}$$

Encontramos, portanto, as funções:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \sqrt{x^2 + c^2 + c \sqrt{4x^2 + c^2}}, & f_2(x) &= \sqrt{x^2 + c^2 - c \sqrt{4x^2 + c^2}}, \\
f_3(x) &= -\sqrt{x^2 + c^2 + c \sqrt{4x^2 + c^2}}, & f_4(x) &= -\sqrt{x^2 + c^2 - c \sqrt{4x^2 + c^2}}.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo (3.6), obtemos:

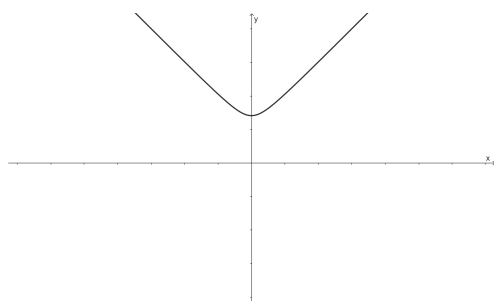
$$\begin{aligned}
&(x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) = -2c^4 \\
&\Leftrightarrow x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2c^2x^2 - 2c^2y^2 = -2c^4 \\
&\Leftrightarrow -2x^2y^2 + y^4 - 2c^2y^2 = -2c^4 + 2c^2x^2 - x^4 \\
&\Leftrightarrow y^4 - 2y^2(x^2 + c^2) = -2c^4 + 2c^2x^2 - x^4 \\
&\Leftrightarrow y^4 - 2y^2(x^2 + c^2) + (x^2 + c^2)^2 = -2c^4 + 2c^2x^2 - x^4 + (x^2 + c^2)^2 \\
&\Leftrightarrow (y^2 - x^2 - c^2)^2 = -2c^4 + 2c^2x^2 - x^4 + x^4 + 2x^2c^2 + c^4 \\
&\Leftrightarrow (y^2 - x^2 - c^2)^2 = 4c^2x^2 - c^4 \\
&\Leftrightarrow y^2 - x^2 - c^2 = \pm c \sqrt{4x^2 - c^2} \\
&\Leftrightarrow y^2 = x^2 + c^2 \pm c \sqrt{4x^2 - c^2} \\
&\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{x^2 + c^2 \pm c \sqrt{4x^2 - c^2}},
\end{aligned}$$

e encontramos, portanto, as funções:

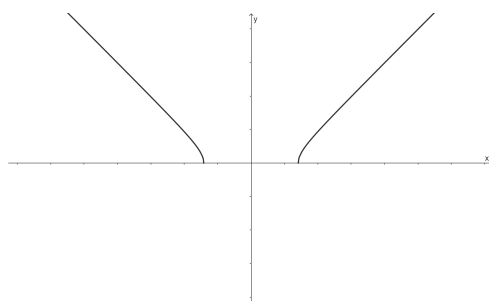
$$\begin{aligned}
f_5(x) &= \sqrt{x^2 + c^2 + c \sqrt{4x^2 - c^2}}, & f_6(x) &= \sqrt{x^2 + c^2 - c \sqrt{4x^2 - c^2}}, \\
f_7(x) &= -\sqrt{x^2 + c^2 + c \sqrt{4x^2 - c^2}}, & f_8(x) &= -\sqrt{x^2 + c^2 - c \sqrt{4x^2 - c^2}}.
\end{aligned}$$

Na Figura 9 temos um esboço do gráfico de cada uma destas funções.

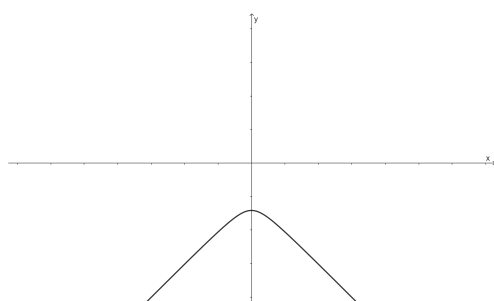
Figura 9: Esboços das funções que expressam a \mathcal{M} -Lemniscata



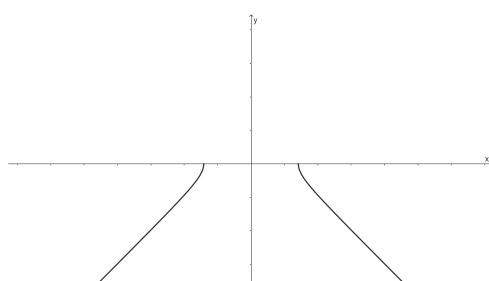
(a) Gráfico da função f_1



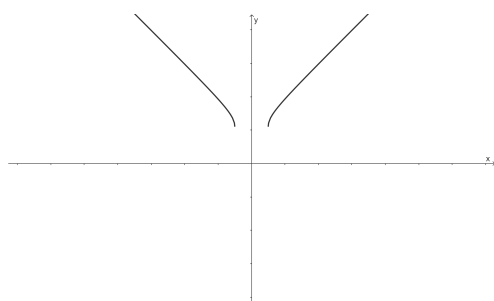
(b) Gráfico da função f_2



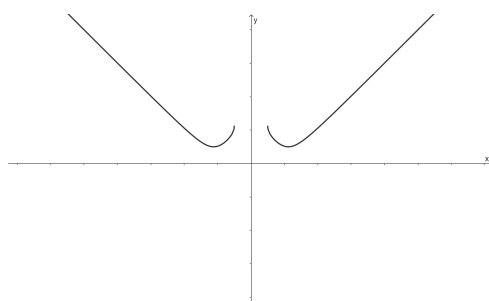
(c) Gráfico da função f_3



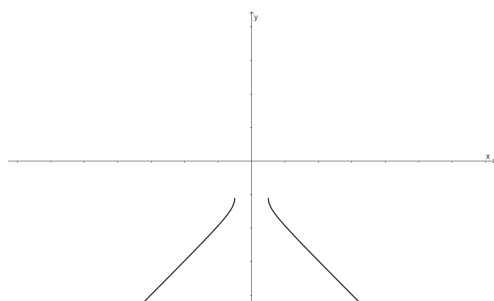
(d) Gráfico da função f_4



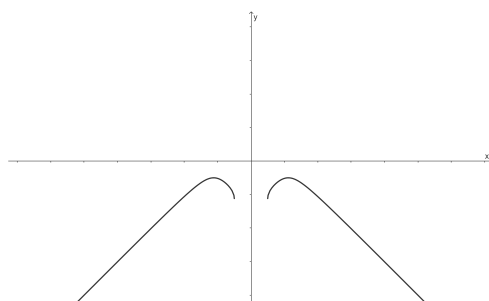
(e) Gráfico da função f_5



(f) Gráfico da função f_6



(g) Gráfico da função f_7



(h) Gráfico da função f_8

Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Ao unirmos os gráficos das funções f_1 a f_8 , teremos o esboço de uma \mathcal{M} -Lemniscata, como na Figura 8.

3.3.3 Forma canônica das \mathcal{M} -Curvas de Cassini com parâmetros $b \neq c$

Iniciamos esta subseção com exemplos que tratam da Equação (3.3) para os casos em que $b < c$ e $b > c$.

Exemplo 2: Determine as equações e os pontos de interseção com os eixos coordenados, da \mathcal{M} -curva de Cassini de focos $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$ e parâmetros.

(a) $b = 1$

(b) $b = 2$

Em seguida, fazer um esboço utilizando o software Geogebra.

Solução (a): Observe inicialmente que a \mathcal{M} -distância dos focos F_1 e F_2 ao centro da \mathcal{M} -curva de Cassini é $c = \sqrt{2}$. Portanto, de acordo com a Equação (3.3), obtemos:

$$(x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = -3$$

e

$$(x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = -5$$

Como visto na Subseção 3.3.1, esta \mathcal{M} -curva de Cassini pertence ao caso em que $b^2 < c^2$. Portanto possui 8 pontos de interseção com os eixos coordenados, que são:

$$\begin{array}{ll} P_1 = (\sqrt{3}, 0), & P_2 = (-\sqrt{3}, 0), \\ P_3 = (0, \sqrt{3}), & P_4 = (0, -\sqrt{3}), \\ P_5 = (1, 0), & P_6 = (-1, 0), \\ P_7 = (0, 1), & P_8 = (0, -1). \end{array}$$

Seu traço pode ser visto na Figura 10.

Solução (b): Observe que a \mathcal{M} -distância dos focos F_1 e F_2 ao centro da \mathcal{M} -curva de Cassini é $c = \sqrt{2}$. Portanto, de acordo com a Equação (3.3), obtemos as equações:

$$(x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = 12$$

e

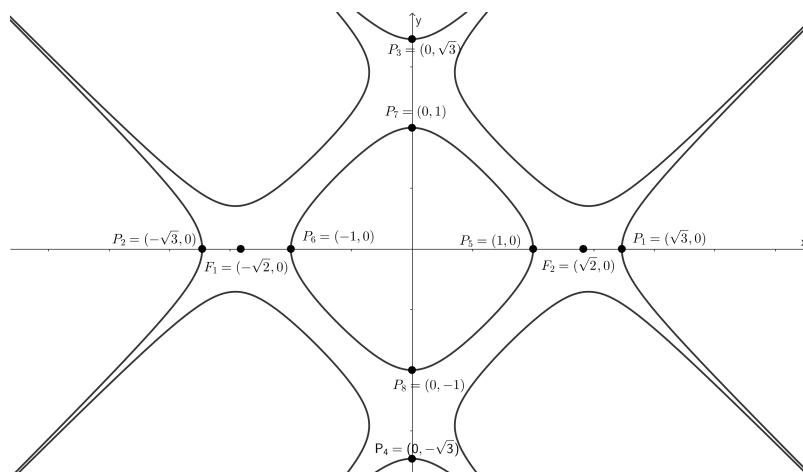
$$(x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = -20$$

De forma análoga ao item (a), utilizando como referência a Subseção 3.3.1, verificamos que esta \mathcal{M} -curva de Cassini pertence ao caso em que $b^2 > c^2$. Portanto possui 4 pontos de interseção com os eixos coordenados, que são:

$$\begin{aligned} P_1 &= (\sqrt{6}, 0), & P_2 &= (-\sqrt{6}, 0), \\ P_3 &= (0, \sqrt{6}), & P_4 &= (0, -\sqrt{6}). \end{aligned}$$

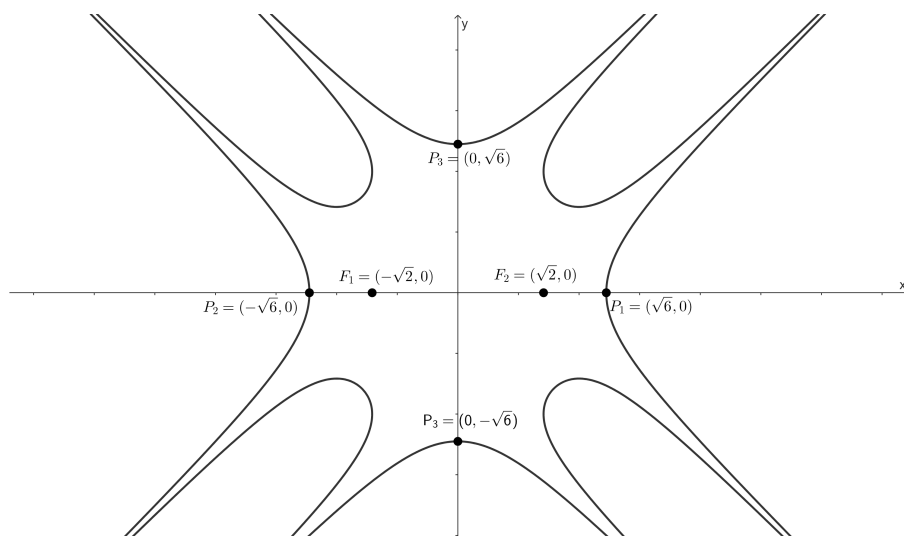
Seu traço pode ser visto na Figura 11.

Figura 10: \mathcal{M} -curva de Cassini centrada na origem com parâmetros $b^2 < c^2$



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Figura 11: \mathcal{M} -curva de Cassini centrada na origem de parâmetro $b^2 > c^2$



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

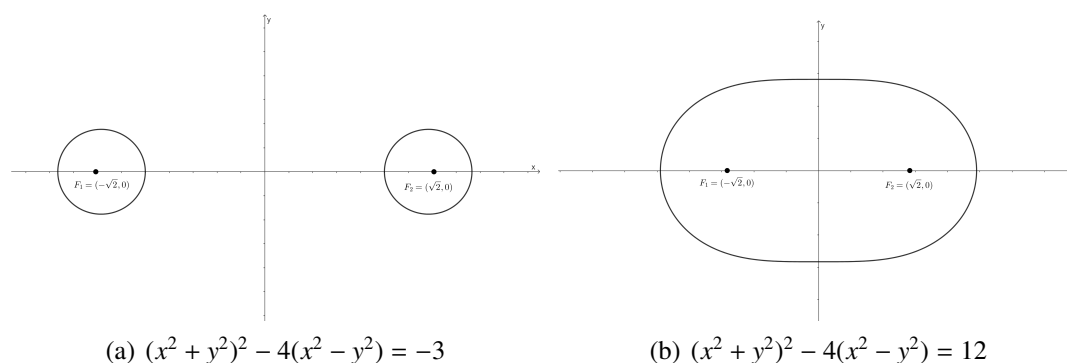
Para efeitos de comparação entre as curvas de Cassini na sua forma canônica no plano euclidiano e no plano de Minkowski, o link a seguir mostrará as diferenças entre ambas de acordo com a variação dos parâmetros b e c : <<https://www.geogebra.org/m/k7a6cwvk>>. Para as \mathcal{M} -curvas de Cassini vistas no exemplo anterior temos as seguintes equações das suas correspondentes no plano euclidiano:

$$(a) (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 - y^2) = -3$$

$$(b) (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 - y^2) = 12$$

Utilizando o software Geogebra, encontramos os seguintes esboços de seus traços:

Figura 12: Curvas de Cassini centradas na origem no plano euclidiano de focos $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

A seguir veremos um exemplo sobre as assíntotas formadas pelos cones de luz centrados nos focos das \mathcal{M} -curvas de Cassini.

Exemplo 3: Utilizando o software Geogebra, esboce a \mathcal{M} -curva de Cassini centrada na origem de parâmetros $b = 2$ e $c = 3$ e cones de luz centrados em seus focos.

Solução: Como a curva está centrada na origem, têm seus focos do tipo $F_1 = (-c, 0) = (-3, 0)$ e $F_2 = (c, 0) = (3, 0)$. Para F_1 e F_2 encontramos os respectivos cones de luz:

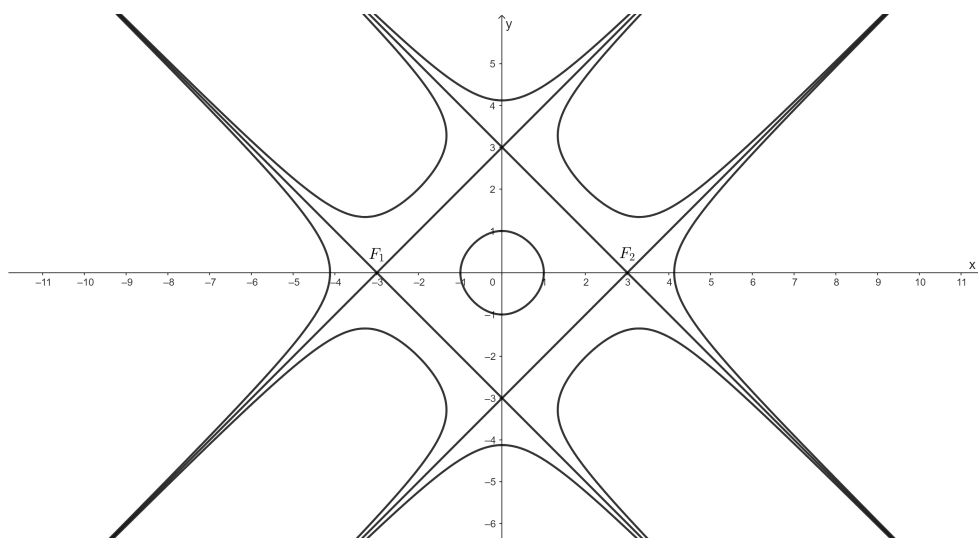
$$C_{L_{F_1}} \begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x - 3 \end{cases}$$

$$C_{L_{F_2}} \begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

A curva terá equações:

$$(x^2 - y^2)^2 - 18(x^2 + y^2) = \pm 64 - 81$$

Figura 13: \mathcal{M} -curva de Cassini e cones de luz centrados em seus focos.



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Assim como desenvolvemos as funções que descrevem cada folha da \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli, podemos desenvolver a Equação (3.3) para encontrar as funções cujos traços coincidem com o das \mathcal{M} -curvas de Cassini de modo geral. Desenvolvendo a Equação (3.3), obtemos:

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) &= \pm b^4 - c^4 \\ \Leftrightarrow x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2c^2x^2 - 2c^2y^2 &= \pm b^4 - c^4 \\ \Leftrightarrow -2x^2y^2 + y^4 - 2c^2y^2 &= \pm b^4 - c^4 + 2c^2x^2 - x^4 \\ \Leftrightarrow y^4 - 2y^2(x^2 + c^2) + (x^2 + c^2)^2 &= \pm b^4 - c^4 + 2c^2x^2 - x^4 + (x^2 + c^2)^2 \\ \Leftrightarrow (y^2 - x^2 - c^2)^2 &= \pm b^4 - c^4 + 2c^2x^2 - x^4 + x^4 + 2x^2c^2 + c^4 \\ \Leftrightarrow (y^2 - x^2 - c^2)^2 &= \pm b^4 + 4c^2x^2 \\ \Leftrightarrow y^2 - x^2 - c^2 &= \pm \sqrt{\pm b^4 + 4c^2x^2} \\ \Leftrightarrow y^2 &= x^2 + c^2 \pm \sqrt{\pm b^4 + 4c^2x^2} \\ \Leftrightarrow y &= \pm \sqrt{x^2 + c^2 \pm \sqrt{\pm b^4 + 4c^2x^2}}, \end{aligned}$$

e, a partir daí, encontramos as funções:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \sqrt{x^2 + c^2 + \sqrt{b^4 + 4c^2x^2}}, & f_2(x) &= \sqrt{x^2 + c^2 + \sqrt{-b^4 + 4c^2x^2}}, \\
f_3(x) &= \sqrt{x^2 + c^2 - \sqrt{b^4 + 4c^2x^2}}, & f_4(x) &= \sqrt{x^2 + c^2 - \sqrt{-b^4 + 4c^2x^2}}, \\
f_5(x) &= -\sqrt{x^2 + c^2 + \sqrt{b^4 + 4c^2x^2}}, & f_6(x) &= -\sqrt{x^2 + c^2 + \sqrt{-b^4 + 4c^2x^2}}, \\
f_7(x) &= -\sqrt{x^2 + c^2 - \sqrt{b^4 + 4c^2x^2}}, & f_8(x) &= -\sqrt{x^2 + c^2 - \sqrt{-b^4 + 4c^2x^2}},
\end{aligned}$$

3.3.4 Interseções das \mathcal{M} -curvas de Cassini com os cones de luz centrados na origem

Encontraremos nesta subseção os pontos de interseção das \mathcal{M} -curvas de Cassini com os cones de luz centrado na origem do sistema OXY . Como visto na Seção 2.3, as retas que determinam os cones de luz centrados na origem são $y = x$ e $y = -x$. Consequentemente, caso exista interseção, os pontos das \mathcal{M} -curvas de Cassini de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX que também pertencem aos cones de luz devem ter segunda coordenada $y = \pm x$.

Portanto:

$$\begin{aligned}
P(x, \pm x) \in C_{\mathcal{M}} &\iff (x^2 - (\pm x)^2)^2 - 2c^2(x^2 + (\pm x)^2) = \pm b^4 - c^4 \\
&\iff (x^2 - x^2)^2 - 2c^2(x^2 + x^2) = \pm b^4 - c^4 \\
&\iff -2c^2(2x^2) = \pm b^4 - c^4 \\
&\iff 4c^2x^2 = \pm b^4 - c^4 \\
&\iff x^2 = \frac{\pm b^4 - c^4}{4c^2} \\
&\iff x = \pm \sqrt{\frac{\pm b^4 - c^4}{4c^2}} = \frac{\pm \sqrt{\pm b^4 - c^4}}{2c}. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Verifiquemos as duas situações seguintes:

Situação I: Quando $b \geq c$, podemos determinar quatro pontos:

$$\begin{aligned}
P_9 &= \left(\frac{\sqrt{b^4 + c^4}}{2c}, \frac{\sqrt{b^4 + c^4}}{2c} \right), & P_{10} &= \left(-\frac{\sqrt{b^4 + c^4}}{2c}, -\frac{\sqrt{b^4 + c^4}}{2c} \right), \\
P_{11} &= \left(\frac{\sqrt{b^4 + c^4}}{2c}, -\frac{\sqrt{b^4 + c^4}}{2c} \right), & P_{12} &= \left(-\frac{\sqrt{b^4 + c^4}}{2c}, \frac{\sqrt{b^4 + c^4}}{2c} \right).
\end{aligned}$$

Situação II: Quando $b < c$, temos $-b^4 + c^4 > 0$ e conseguimos determinar outros quatro pontos, além dos quatro determinados anteriormente. São eles:

$$P_{13} = \left(\frac{\sqrt{-b^4 + c^4}}{2c}, \frac{\sqrt{-b^4 + c^4}}{2c} \right), \quad P_{14} = \left(-\frac{\sqrt{-b^4 + c^4}}{2c}, -\frac{\sqrt{-b^4 + c^4}}{2c} \right),$$

$$P_{15} = \left(\frac{\sqrt{-b^4 + c^4}}{2c}, -\frac{\sqrt{-b^4 + c^4}}{2c} \right), \quad P_{16} = \left(-\frac{\sqrt{-b^4 + c^4}}{2c}, \frac{\sqrt{-b^4 + c^4}}{2c} \right).$$

Exemplo 4: Determinar os pontos de interseção com o cone de luz C_L , da \mathcal{M} -curva de Cassini com equação dada abaixo e esboçar o gráfico com o software Geogebra :

$$(x^2 - y^2)^2 - 8(x^2 + y^2) = \pm 81 - 16$$

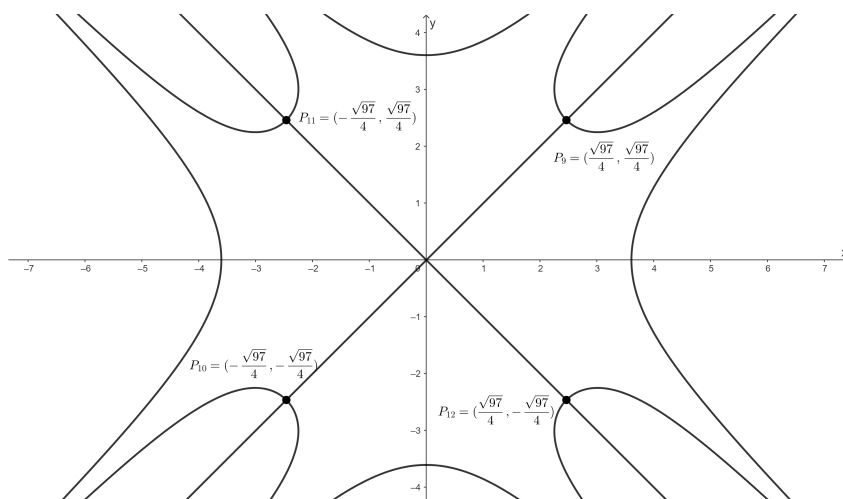
Solução. A \mathcal{M} -curva de Cassini se encaixa na primeira situação, pois temos $b = 3 > c = 2$. Assim, podemos determinar quatro pontos:

$$P_9 = \left(\frac{\sqrt{97}}{4}, \frac{\sqrt{97}}{4} \right), \quad P_{10} = \left(-\frac{\sqrt{97}}{4}, -\frac{\sqrt{97}}{4} \right),$$

$$P_{11} = \left(\frac{\sqrt{97}}{4}, -\frac{\sqrt{97}}{4} \right), \quad P_{12} = \left(-\frac{\sqrt{97}}{4}, \frac{\sqrt{97}}{4} \right).$$

O esboço da curva e dos pontos de interseção é feito a seguir.

Figura 14: \mathcal{M} -curva de Cassini centrada na origem e seus pontos de interseção com C_L para $b \geq c$.



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Exemplo 5: Determinar os pontos de interseção com o cone de luz C_L , da \mathcal{M} -curva de Cassini de equação $(x^2 - y^2)^2 - 18(x^2 + y^2) = \pm 16 - 81$ e esboçar seu gráfico no Geogebra.

Solução. Como $b = 2 < c = 3$ temos oito pontos de interseção com os cones de luz, sendo quatro deles:

$$P_9 = \left(\frac{\sqrt{97}}{6}, \frac{\sqrt{97}}{6}\right), \quad P_{10} = \left(-\frac{\sqrt{97}}{6}, -\frac{\sqrt{97}}{6}\right),$$

$$P_{11} = \left(-\frac{\sqrt{97}}{6}, \frac{\sqrt{97}}{6}\right), \quad P_{12} = \left(\frac{\sqrt{97}}{6}, -\frac{\sqrt{97}}{6}\right);$$

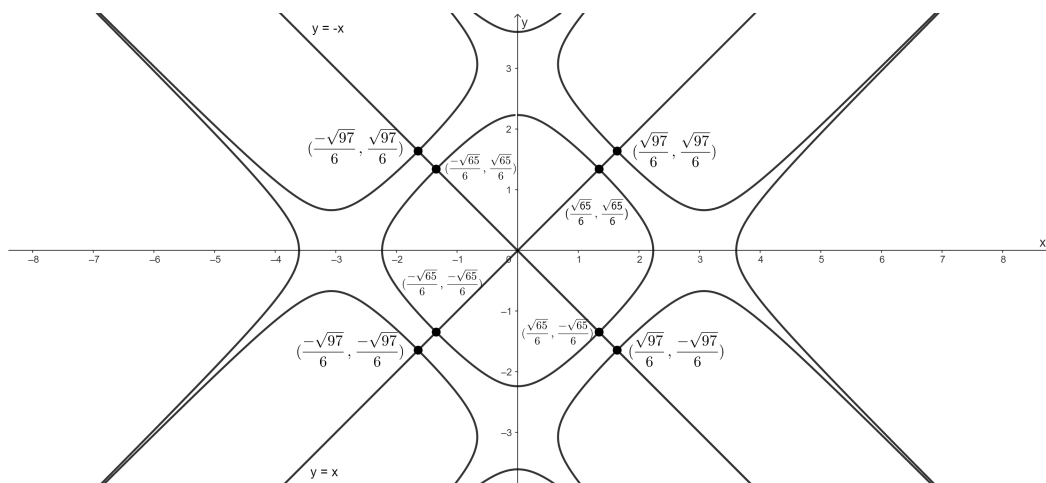
e os outros quatro:

$$P_{13} = \left(\frac{\sqrt{65}}{6}, \frac{\sqrt{65}}{6}\right), \quad P_{14} = \left(-\frac{\sqrt{65}}{6}, -\frac{\sqrt{65}}{6}\right),$$

$$P_{15} = \left(-\frac{\sqrt{65}}{6}, \frac{\sqrt{65}}{6}\right), \quad P_{16} = \left(\frac{\sqrt{65}}{6}, -\frac{\sqrt{65}}{6}\right).$$

O esboço da curva e dos pontos de interseção é feito a seguir.

Figura 15: M -curva de Cassini centrada na origem e seus pontos de interseção com C_L para $c > b$.



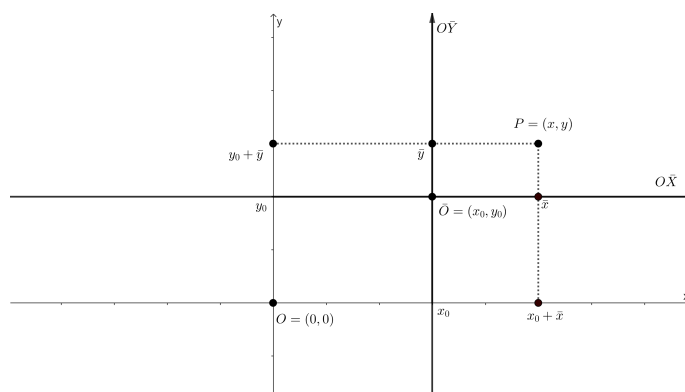
Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

3.4 Translação dos eixos coordenados

O estudo da translação no plano é fundamental, pois busca compreender comportamentos não triviais dos entes geométricos. Tomando como referência Couto e Lymberopoulos (2018), percebemos que a translação na Geometria Lorentziana, ou seja, no Plano de Minkowski, é feita da mesma maneira que na Geometria de euclidiana.

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais, $\bar{O} = (x_0, y_0)$ um ponto do plano e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ o sistema cujos eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm o mesmo sentido desses eixos, respectivamente. Designamos por (\bar{x}, \bar{y}) as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ e por (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY .

Figura 16: Ponto $P(x, y)$ nos planos OXY e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Se $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$ são os vetores unitários na mesma direção e no mesmo sentido, respectivamente, dos eixos OX e OY (portanto dos eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$), então:

$$\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2,$$

$$\vec{O}\bar{P} = \bar{x}\vec{e}_1 + \bar{y}\vec{e}_2,$$

$$\vec{O}\bar{O} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2.$$

Como

$$\vec{O}\bar{P} = \vec{O}\bar{O} + \vec{O}P,$$

obtemos que:

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 &= (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2) + (\bar{x}\vec{e}_1 + \bar{y}\vec{e}_2) \\ &= (x_0 + \bar{x})\vec{e}_1 + (y_0 + \bar{y})\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ são relacionadas pelas fórmulas (veja a Figura 16):

$$\begin{cases} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0. \end{cases}$$

3.4.1 Forma canônica da \mathcal{M} -curva de Cassini transladada

Por uma translação dos eixos coordenados, vamos obter a equação das \mathcal{M} -curvas de Cassini $C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ cuja reta focal é paralela aos eixos coordenados.

Seja $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido trasladando o sistema OXY para a nova origem $\bar{O} = (x_0, y_0)$. Como \bar{O} é o centro, $\uparrow : y = y_0$ é a reta focal e $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ são os focos da \mathcal{M} -curva, um ponto $P(x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertence à \mathcal{M} -curva de Cassini se, e somente se,

$$d_{\mathcal{M}}(P, F_1) \cdot d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = b^2$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\iff \left| (\bar{x} + c)^2 - \bar{y}^2 \right| \cdot \left| (\bar{x} - c)^2 - \bar{y}^2 \right| = b^4 \\ &\iff (\bar{x}^2 + 2c\bar{x} + c^2 - \bar{y}^2) \cdot (\bar{x}^2 - 2c\bar{x} + c^2 - \bar{y}^2) = \pm b^4 \\ &\iff (\bar{x}^2 - \bar{y}^2) \cdot (\bar{x}^2 - 2c\bar{x} + c^2 - \bar{y}^2) + (2c\bar{x} + c^2) \cdot (\bar{x}^2 - 2c\bar{x} + c^2 - \bar{y}^2) = \pm b^4 \\ &\iff (\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^2 + (\bar{x}^2 - \bar{y}^2) \cdot (-2c\bar{x} + c^2) + (2c\bar{x} + c^2) \cdot (\bar{x}^2 - \bar{y}^2) + (c^4 - 4c^2\bar{x}^2) = \pm b^4 \\ &\iff (\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^2 + 2c^2(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) - 4c^2\bar{x}^2 = \pm b^4 - c^4 \\ &\iff (\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^2 - 2c^2(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \pm b^4 - c^4 \\ &\iff ((x - x_0)^2 - (y - y_0)^2)^2 - 2c^2((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) = \pm b^4 - c^4. \end{aligned}$$

Portanto, a forma canônica da \mathcal{M} -curva de Cassini $C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX é:

$$C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2) :$$

$$((x - x_0)^2 - (y - y_0)^2)^2 - 2c^2((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) = \pm b^4 - c^4. \quad (3.8)$$

Encontramos a equação da \mathcal{M} -curva de Cassini transladada com reta focal paralela ao eixo OY de maneira análoga:

$$C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2) :$$

$$\left((y - y_0)^2 - (x - x_0)^2 \right)^2 - 2c^2 \left((y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 \right) = \pm b^4 - c^4. \quad (3.9)$$

Veja que, assim como as equações das \mathcal{M} -curvas de Cassini centradas na origem do sistema OXY com reta focal sobre os eixos coordenados, as Equações (3.8) e (3.9) são iguais. Portanto, o traço das \mathcal{M} -curvas de Cassini de centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e focos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ que tem $\uparrow : y = y_0$ e das \mathcal{M} -curvas de Cassini com mesmo centro, com reta focal $\uparrow : x = x_0$ e focos $F'_1 = (x_0, y_0 - c)$ e $F'_2 = (x_0, y_0 + c)$ coincidem. Portanto seguiremos com exemplos utilizando a Equação (3.8).

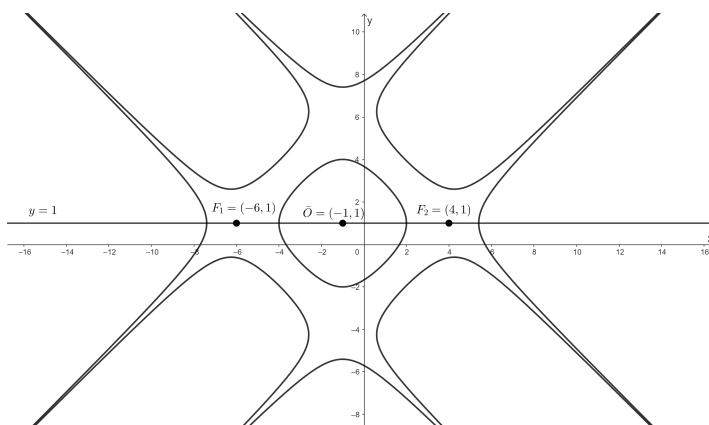
Exemplo 6: Determinar os focos, as equações e esboçar o traço utilizando o software Geogebra das \mathcal{M} -curvas de Cassini transladadas:

- (a) \mathcal{M} -curva de Cassini com parâmetros $b = 4$ e $c = 5$ e com reta focal paralela a OX , com centro $\bar{O} = (-1, 1)$

Solução. Teremos como focos: $F_1 = (-6, 1)$ e $F_2 = (4, 1)$ e equação:

$$\left((x + 1)^2 - (y - 1)^2 \right)^2 - 50 \left((x + 1)^2 + (y - 1)^2 \right) = \pm 256 - 625$$

Figura 17: \mathcal{M} -curva de Cassini transladada com parâmetro $b = 4 < c = 5$



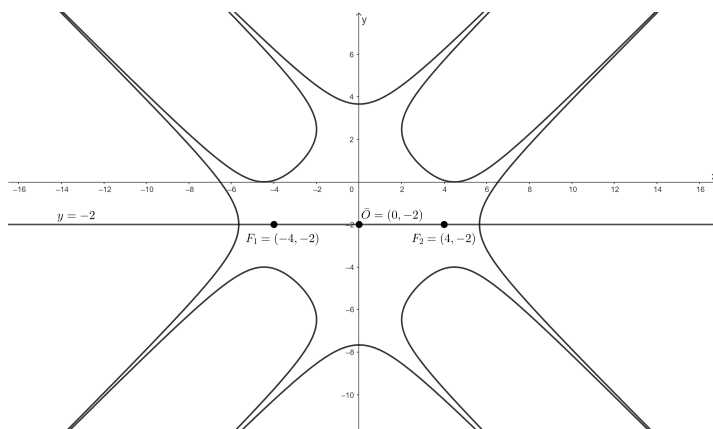
Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

- (b) \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli com parâmetros $b = c = 4$, reta focal paralela a OX e com centro $\bar{O} = (0, -2)$.

Solução. Teremos como focos: $F_1 = (-4, -2)$ e $F_2 = (4, -2)$ e equação:

$$(x^2 - (y + 2)^2)^2 - 32(x^2 + (y + 2)^2) = \pm 256 - 256$$

Figura 18: \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli transladada



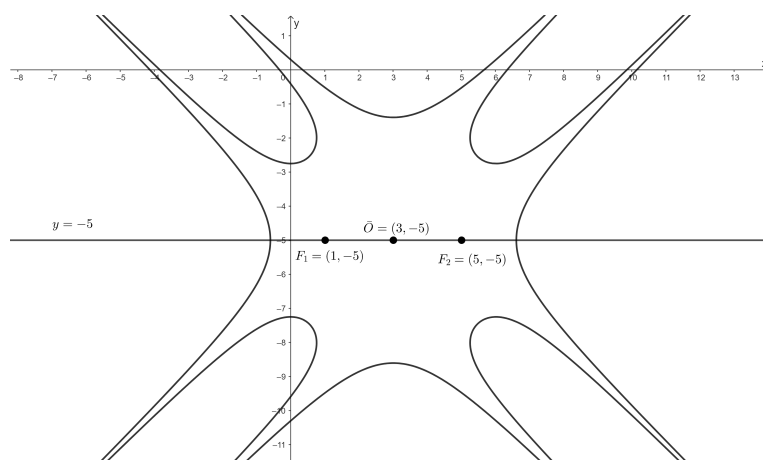
Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

(c) \mathcal{M} -curva de Cassini com parâmetros $b = 3$ e $c = 2$, reta focal paralela a OX e com centro $\bar{O} = (3, -5)$.

Solução. Teremos como focos: $F_1 = (1, -5)$ e $F_2 = (5, -5)$ e equação:

$$((x - 3)^2 - (y + 5)^2)^2 - 8((x - 3)^2 + (y + 5)^2) = \pm 81 - 16$$

Figura 19: \mathcal{M} -curva de Cassini transladada com parâmetro $b = 3 > c = 2$



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

3.5 Equação geral das \mathcal{M} -curvas de Cassini

Nesta seção, partindo da definição algébrica, (ver 3.2), determinaremos a equação geral das \mathcal{M} -curvas de Cassini, onde os focos $F_1 = (z_1, z_2)$ e $F_2 = (w_1, w_2)$ serão pontos arbitrários do Plano de Minkowski. Seja $P = (x, y)$, temos que $P \in C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ se, e somente se:

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{M}}(P, F_1).d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = b^2 &\iff \sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} \sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = b^2 \\
&\iff |(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2| = b^4 \\
&\iff (x^2 - 2xz_1 + z_1^2 - y^2 + 2yz_2 - z_2^2) \\
&\quad (x^2 - 2xw_1 + w_1^2 - y^2 + 2yw_2 - w_2^2) = \pm b^4 \\
&\iff x^4 - 2x^3w_1 + x^2w_1^2 - x^2y^2 + 2x^2yw_2 - x^2w_2^2 \\
&\quad - 2x^3z_1 + 4x^2z_1w_1 - 2xz_1w_1^2 + 2xy^2z_1 - 4xy^2z_1w_2 \\
&\quad + 2xz_1w_2^2 + x^2z_1^2 - 2xz_1^2w_1 + z_1^2w_1^2 - z_1^2y^2 + 2yz_1^2w_2 \\
&\quad - z_1^2w_2^2 - x^2y^2 + 2xy^2w_1 - y^2w_1^2 + y^4 - 2y^3w_2 \\
&\quad + y^2w_2^2 + 2x^2yz_2 - 4xyz_2w_1 + 2yz_2w_1^2 - 2y^3z_2 \\
&\quad + 4y^2z_2w_2 - 2yz_2w_2^2 - x^2z_2^2 + 2xz_2^2w_1 - z_2^2w_1^2 \\
&\quad + y^2z_2^2 - 2yz_2^2w_2 + z_2^2w_2^2 = \pm b^4 \\
&\iff (x^2 - y^2)^2 - 2x^3(z_1 + w_1) - 2y^3(z_2 + w_2) \\
&\quad + x^2(z_1^2 - z_2^2 + w_1^2 - w_2^2 + 4z_1w_1) \\
&\quad - y^2(z_1^2 - z_2^2 + w_1^2 - w_2^2 - 4z_2w_2) \\
&\quad - 2x(z_1(w_1^2 - w_2^2) + w_1(z_1^2 - z_2^2)) \\
&\quad + 2y(z_2(w_1^2 - w_2^2) + w_2(z_1^2 - z_2^2)) \\
&\quad + 2x^2y(z_2 + w_2) + 2xy^2(z_1 + w_1) \\
&\quad - 4xy(z_1w_2 + z_2w_1) + (z_1^2 - z_2^2)(w_1^2 - w_2^2) = \pm b^4
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Para as \mathcal{M} -curvas de Cassini com focos arbitrários no Plano de Minkowski, o centro pode ser determinado pelo ponto médio do segmento de reta com extremidade nos focos. Tomando o ponto $C = (x_c, y_c)$ centro da \mathcal{M} -curva e $F_1 = (z_1, z_2)$ e $F_2 = (w_1, w_2)$ seus focos, temos:

$$C = \left(\frac{z_1 + w_1}{2}, \frac{z_2 + w_2}{2} \right)$$

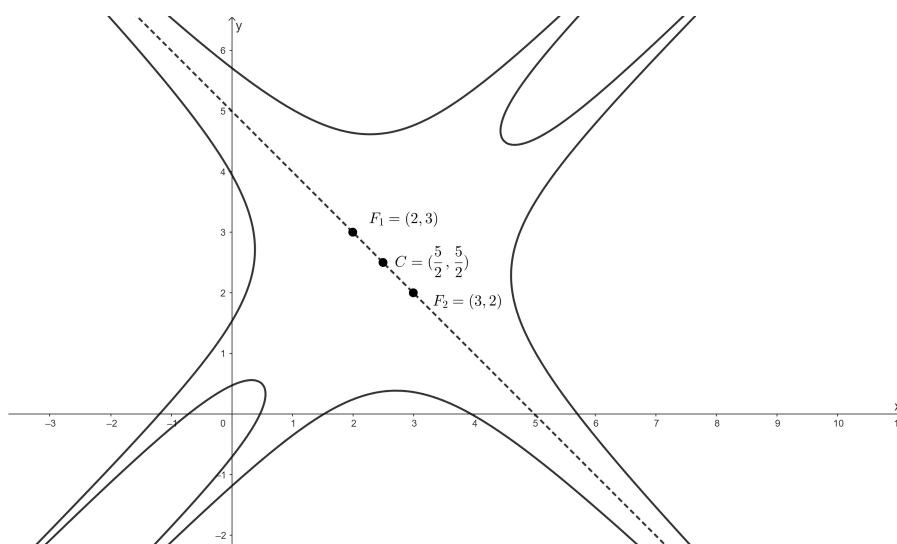
Exemplo 7: Determinar o centro, a equação geral e esboçar o traço das \mathcal{M} -curvas de Cassini:

(a) Com focos $F_1 = (2, 3)$ e $F_2 = (3, 2)$ e parâmetro $b = 2$;

Solução. Se os focos são $F_1 = (2, 3)$ e $F_2 = (3, 2)$, temos como centro da \mathcal{M} -curva de Cassini o ponto $C = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$, e equação geral:

$$(x^2 - y^2)^2 - 10x^3 - 10y^3 + 24x^2 + 24y^2 + 10x + 10y + 10x^2y + 10xy^2 - 52xy - 25 = \pm 16$$

Figura 20: (a) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = 2$ e $F_1 = (2, 3)$ e $F_2 = (3, 2)$



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

(b) Com focos $F_1 = (-1, -4)$ e $F_2 = (1, 4)$ e parâmetro $b = 3$;

Solução. Se os focos são $F_1 = (-1, -4)$ e $F_2 = (1, 4)$, temos a origem como centro da \mathcal{M} -curva de Cassini e equação geral:

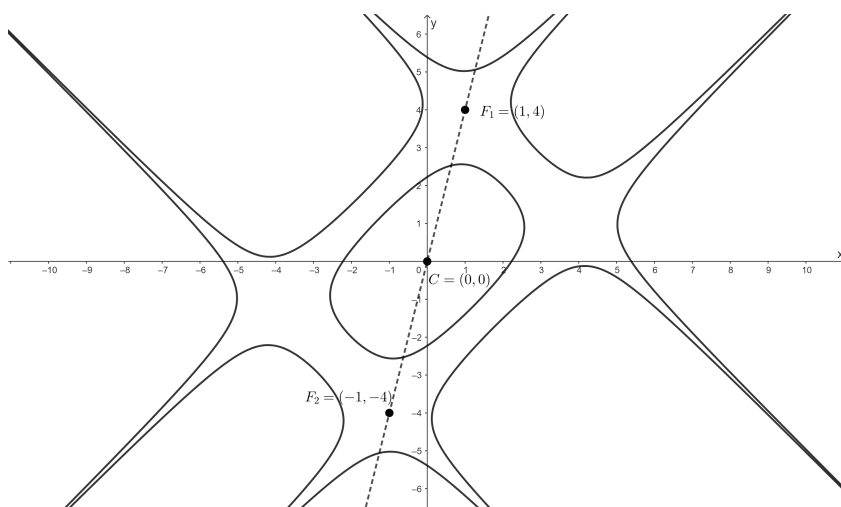
$$(x^2 - y^2)^2 - 34x^2 - 34y^2 + 32xy + 225 = \pm 81$$

(c) Com focos $F_1 = (1, 1)$ e $F_2 = (3, 3)$ e parâmetro $b = 1$;

Solução. Se os focos são $F_1 = (1, 1)$ e $F_2 = (3, 3)$, temos como centro da \mathcal{M} -curva de Cassini o ponto $C = (2, 2)$ e equação geral:

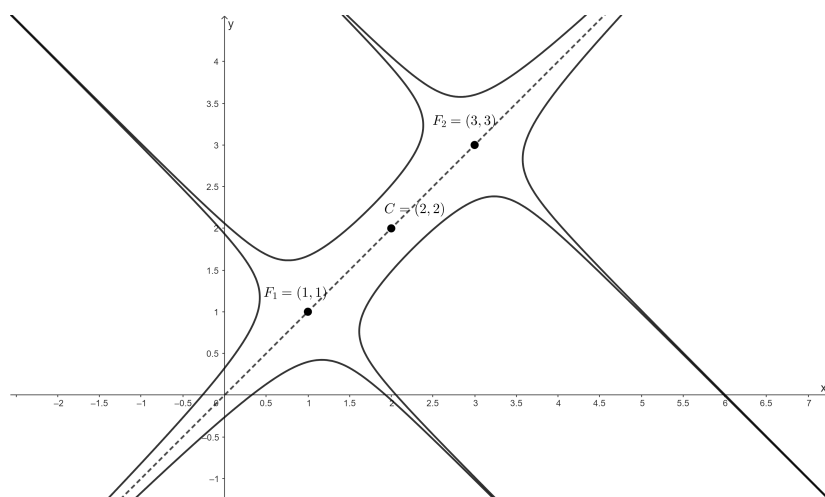
$$(x^2 - y^2)^2 - 8x^3 - 8y^3 + 12x^2 + 12y^2 + 8x^2y + 8xy^2 - 24xy = \pm 1$$

Figura 21: (b) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = 3$ e $F_1 = (1, 4)$ e $F_2 = (-1, -4)$



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Figura 22: (c) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = 1$ e $F_1 = (1, 1)$ e $F_2 = (3, 3)$



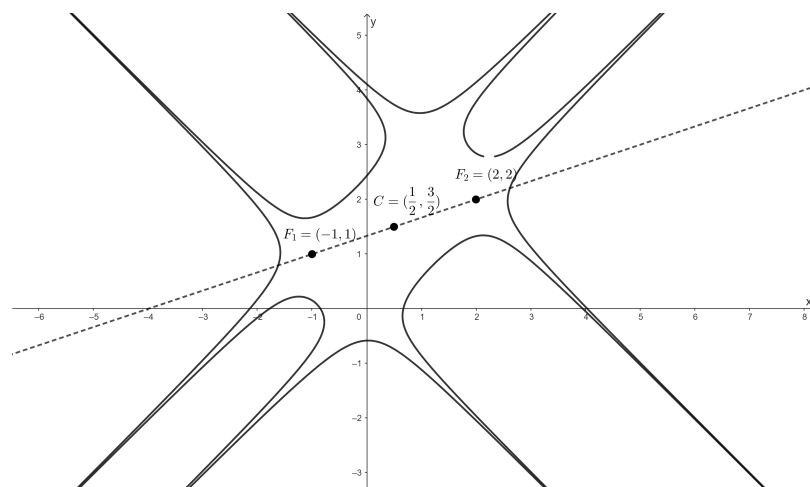
Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

(d) Com focos $F_1 = (-1, 1)$ e $F_2 = (2, 2)$ e parâmetro $b = \sqrt{2}$;

Solução. Se os focos são $F_1 = (-1, 1)$ e $F_2 = (2, 2)$, temos como centro da \mathcal{M} -curva de Cassini o ponto $C = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ e equação geral:

$$(x^2 - y^2)^2 - 2x^3 - 6y^3 - 8x^2 + 8y^2 + 6x^2y + 2xy^2 = \pm 4$$

Figura 23: (d) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = \sqrt{2}$ e $F_1 = (-1, 1)$ e $F_2 = (2, 2)$



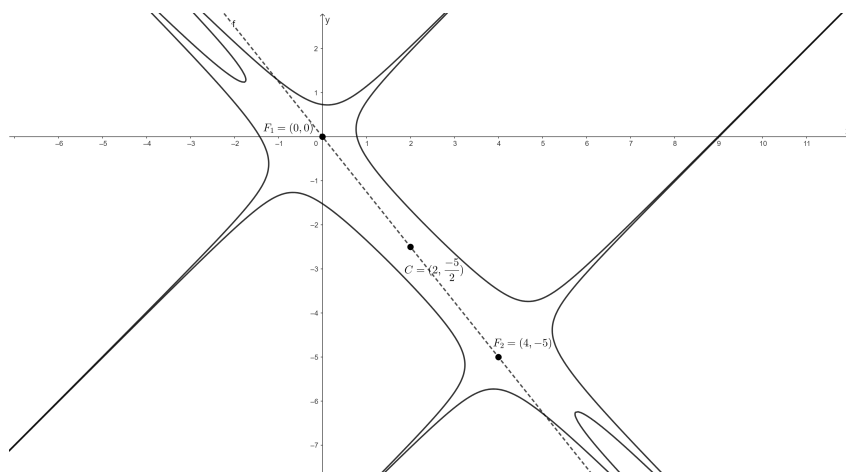
Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

(e) Com focos $F_1 = (0, 0)$ e $F_2 = (4, -5)$ e parâmetro $b = \sqrt{3}$.

Solução. Se os focos são $F_1 = (0, 0)$ e $F_2 = (4, -5)$, temos como centro da \mathcal{M} -curva de Cassini o ponto $C = (2, -\frac{5}{2})$ e equação geral:

$$(x^2 - y^2)^2 - 8x^3 + 10y^3 - 9x^2 + 9y^2 - 10x^2y + 8xy^2 = \pm 9$$

Figura 24: (e) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = \sqrt{2}$ e $F_1 = (-1, 1)$ e $F_2 = (2, 2)$



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Para uma melhor visualização do que ocorre com a mudança dos focos de maneira arbitrária, segue o link: <<https://www.geogebra.org/m/btparsj4>>.

3.6 Parametrização das \mathcal{M} -curvas de Cassini via Coordenadas Hiperbólicas

Dedicamos esta seção para fazer uma abordagem das \mathcal{M} -curvas de Cassini usando funções hiperbólicas. Para isso, é necessário conhecer um pouco trigonometria hiperbólica. Tomando como referência Santana e Arias (2008), temos que:

$$\operatorname{senh}\alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$$

$$\operatorname{cosh}\alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$$

A partir das definições de $\operatorname{senh}\alpha$ e $\operatorname{cosh}\alpha$, obtemos as seguintes identidades:

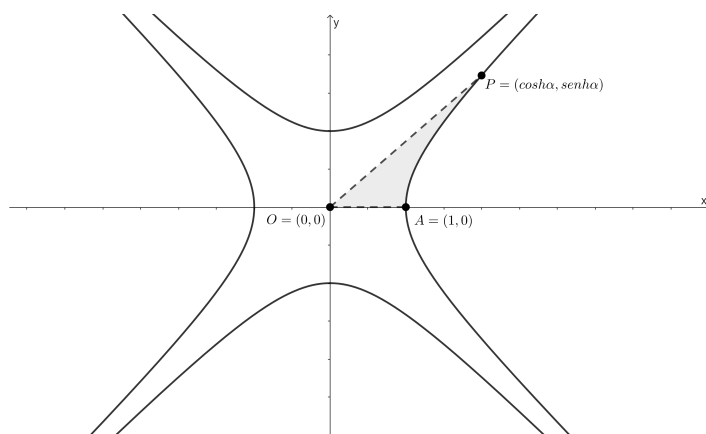
$$\operatorname{cosh}^2\alpha - \operatorname{senh}^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{senh}(\alpha + \beta) = \operatorname{senh}\alpha \operatorname{cosh}\beta + \operatorname{cosh}\alpha \operatorname{senh}\beta$$

$$\operatorname{cosh}(\alpha + \beta) = \operatorname{cosh}\alpha \operatorname{cosh}\beta + \operatorname{senh}\alpha \operatorname{senh}\beta$$

Como o \mathcal{M} -Círculo é precisamente um par de hipérboles, é natural utilizarmos o conceito de trigonometria hiperbólica no Plano de Minkowski. Note que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, o ponto $P = (\operatorname{cosh}\alpha, \operatorname{senh}\alpha)$ está sobre a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$. E segundo Santana e Arias (2008), de maneira análoga ao que ocorre com um setor circular na geometria euclidiana, onde o ângulo θ é o dobro da área do setor circular, α é o dobro da área do que é denominado setor hiperbólico (ver Figura 25).

Figura 25: Setor hiperbólico



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

Revisitando a Equação (3.10), e procedendo de maneira análoga a Shonoda (2015) temos o seguinte: alterando os parâmetros Equação (3.10), usando as funções hiperbólicas $(x, y) \rightarrow (r, \alpha)$, onde $x = \pm r \cosh \alpha$, $y = \pm r \sinh \alpha$ e $r^2 = x^2 - y^2$, temos que (3.10) se torna:

$$\begin{aligned}
&\iff r^4 - 2r^3 \cosh^3 \alpha (z_1 + w_1) - 2r^3 \sinh^3 \alpha (z_2 + w_2) \\
&\quad + r^2 \cosh^2 \alpha (z_1^2 - z_2^2 + w_1^2 - w_2^2 + 4z_1 w_1) \\
&\quad - r^2 \sinh^2 \alpha (z_1^2 - z_2^2 + w_1^2 - w_2^2 - 4z_2 w_2) \\
&\quad - 2r \cosh \alpha (z_1(w_1^2 - w_2^2) + w_1(z_1^2 - z_2^2)) \\
&\quad + 2r \sinh \alpha (z_2(w_1^2 - w_2^2) + w_2(z_1^2 - z_2^2)) \\
&\quad + 2r^3 \cosh^2 \alpha \sinh^2 \alpha (z_2 + w_2) + 2r^3 \cosh \alpha \sinh^2 \alpha (z_1 + w_1) \\
&\quad - 4r^2 \cosh \alpha \sinh \alpha (z_1 w_2 + z_2 w_1) + (z_1^2 - z_2^2)(w_1^2 - w_2^2) = \pm b^4 \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Para o caso particular em que a \mathcal{M} -curva de Cassini está centrada na origem do sistema de eixos ortogonais OXY , com reta focal coincidindo com o eixo OX e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, a Equação (3.11) se torna em:

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cosh^2 \alpha - 2c^2 r^2 \sinh^2 \alpha + c^4 = \pm b^4$$

Simplificando essa expressão, obtemos:

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cosh 2\alpha = \pm b^4 - c^4 \quad (3.12)$$

Para encontrarmos o valor de r em função de α , precisamos resolver a Equação biquadrada (3.12).

Tomando $r^2 = m$, temos:

$$m^2 - 2c^2 m \cosh 2\alpha \pm b^4 - c^4 = 0$$

Que têm como soluções:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{2c^2 \cosh 2\alpha \pm \sqrt{4c^4 \cosh^2 2\alpha - 4(\pm b^4 + c^4)}}{2} \\
&= c^2 \left(\cosh 2\alpha \pm \sqrt{\sinh^2 2\alpha \pm \left(\frac{b}{c}\right)^4} \right)
\end{aligned}$$

Daí, temos que:

$$r = \pm c \sqrt{\cosh 2\alpha \pm \sqrt{\sinh^2 2\alpha \pm \left(\frac{b}{c}\right)^4}}. \quad (3.13)$$

Consequentemente,

$$x = \pm c \sqrt{\cosh 2\alpha \pm \sqrt{\sinh^2 2\alpha \pm \left(\frac{b}{c}\right)^4}} \cosh \alpha \quad (3.14)$$

e

$$y = \pm c \sqrt{\cosh 2\alpha \pm \sqrt{\sinh^2 2\alpha \pm \left(\frac{b}{c}\right)^4}} \sinh \alpha. \quad (3.15)$$

Que são as parametrizações das \mathcal{M} -curvas de Cassini centradas na origem via coordenadas hiperbólicas.

Para o caso em que $b = c$, onde temos uma \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli, vale as seguintes parametrizações:

$$x = \pm c \sqrt{\cosh 2\alpha \pm \sqrt{\sinh^2 2\alpha \pm 1}} \cosh \alpha \quad (3.16)$$

e

$$y = \pm c \sqrt{\cosh 2\alpha \pm \sqrt{\sinh^2 2\alpha \pm 1}} \sinh \alpha. \quad (3.17)$$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer deste trabalho, buscamos uma compreensão do comportamento das curvas de Cassini no plano de Minkowski, denominadas \mathcal{M} -curvas de Cassini. Com base nos fundamentos do plano espaço-tempo de Minkowski, apresentamos definições essenciais que permitiram encontrar suas equações e visualizá-las por meio do software Geogebra. Além de deduzirmos as equações algébricas destas \mathcal{M} -curvas, também deixamos uma singela contribuição definindo a \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli.

Ao final deste estudo, abordamos brevemente a trigonometria hiperbólica, já que o \mathcal{M} -círculo assume o papel da circunferência no Plano de Minkowski. Introduzimos uma parametrização da \mathcal{M} -curva de Cassini em relação ao ângulo hiperbólico, fornecendo uma base para futuras investigações que possam requerer essa abordagem.

Deixamos a sugestão para estudos futuros envolvendo outras \mathcal{M} -curvas, na esperança de que este trabalho sirva como base e inspiração. Também incentivamos às queles que se interessarem, que façam trabalhos que contribuam no sentido de procurar estratégias de inserção no ensino básico dos assuntos aqui abordados.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, P. **Introdução à Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- BIEZUNER, R. J. **Relatividade Especial, Geral e Geometria Lorentziana**. 2017.
- COUTINHO, L. **Convite às Geometrias Não Euclidianas - 3ª edição**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2018.
- COUTO, I. T.; LYMBEROPOULOS, A. **Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.
- GREENBERG, M. J. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History 4th edition**. US: W. H. Freeman, 2007.
- MORAIS, T. S. F.; RODRIGUES, D. S. **A LEMNISCATA DE BERNOULLI UMA CURVA PLANA DIFERENCIÁVEL E A DEDUÇÃO DA FÓRMULA PARA O CÁLCULO DE SUA ÁREA**. 2018. Disponível em: <<http://www.fepeg2018.unimontes.br/anais/download/09063d0b-91e7-4e49-8b1e-f9983c35e3ff>>. Acesso em: 1 de maio de 2023.
- O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. F. **Giovanni Domenico Cassini**. 2003. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cassini/>>. Acesso em: 1 de maio de 2023.
- O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. F. **Hermann Minkowski**. 2015. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Minkowski/>>. Acesso em: 8 de maio de 2023.
- SANTANA, J. I. M.; ARIAS, C. J. L. **La Geometría de Minkowski a partir del grupo de Lorentz**. 2008.
- SANTOS, J. C. **Minkowski, Geometria e Relatividade**. 2009.
- SHONODA, E. N. **Classification of conics and Cassini curves in Minkowski space-time plane**. 2015.