



PROFMAT

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL
PROFMAT**

FERNANDO AUGUSTO BRANCHER

**PROPOSTA PARA UM COMPONENTE CURRICULAR ELETIVO DO NOVO
ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM COM MODELAGEM MATEMÁTICA**

**CHAPECÓ - SC
2023**

FERNANDO AUGUSTO BRANCHER

**PROPOSTA PARA UM COMPONENTE CURRICULAR ELETIVO DO NOVO
ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM COM MODELAGEM MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Vitor José Petry.

**CHAPECÓ
2023**

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Rodovia SC 484, km 02
CEP: 89801-001
Caixa Postal 181
Bairro Fronteira Sul
Chapecó – SC
Brasil

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Brancher, Fernando Augusto
PROPOSTA PARA UM COMPONENTE CURRICULAR ELETIVO DO
NOVO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM COM MODELAGEM
MATEMÁTICA / Fernando Augusto Brancher. -- 2023.
88 f.

Orientador: Dr Vitor José Petry

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da
Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional
em Matemática em Rede Nacional, Chapecó, SC, 2023.

1. Modelagem Matemática. 2. Novo Ensino Médio. 3.
Matemática Aplicada. 4. Componentes Curriculares
Eletivos. I. Petry, Vitor José, orient. II. Universidade
Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).



FERNANDO AUGUSTO BRANCHER

**PROPOSTA PARA UM COMPONENTE CURRICULAR ELETIVO DO NOVO
ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM COM MODELAGEM MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador (a): Prof. Dr. Vitor José Petry

Aprovado em: 16/08/2023

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Vitor José Petry - UFFS

Prof. Dr. Radael de Souza Parolin - UNIPAMPA

Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges – UFFS

Chapecó/SC, 16 de agosto de 2023

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero expressar minha profunda gratidão à minha família e amigos. Desde o momento em que comecei a estudar para a seleção do mestrado, durante todo o período de aulas e a elaboração desta dissertação, vocês estiveram ao meu lado, incentivando-me e fornecendo o apoio emocional necessário para seguir em frente. Sou eternamente grato por ter vocês como minha rede de apoio. Não poderia deixar de destacar ainda os novos amigos que fiz ao longo deste curso, foram muitos os momentos compartilhados, as trocas de experiências e conhecimentos que enriqueceram minha jornada acadêmica.

Agradeço também aos professores que estiveram ao meu lado ao longo dessa jornada, pela dedicação, disposição e encorajamento constante ao longo de cada etapa. Em especial ao Profº Dr. Vitor José Petry, que novamente aceitou me orientar e colaborou imensamente com este trabalho.

Não posso deixar de mencionar a Secretaria de Educação do Estado de Santa Catarina, que através do programa UNIEDU, forneceu uma bolsa de mestrado. Sou grato por essa assistência financeira, que foi fundamental para que eu pudesse me dedicar aos estudos e tornou possível a realização deste projeto acadêmico.

Por fim, agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho, mesmo que não mencionados especificamente aqui. Cada palavra de encorajamento e cada gesto de apoio foram essenciais. Sinto-me honrado e privilegiado por ter tido a oportunidade de contar com vocês em minha jornada acadêmica.

Meu profundo agradecimento a todos vocês.

RESUMO

O ano de 2022 marca uma significativa etapa para o Ensino Médio no Brasil, a implementação nacional do Novo Ensino Médio (NEM). Segundo o Ministério da Educação, essa reforma educacional visa oferecer uma educação de qualidade capaz de atender às crescentes demandas do mundo moderno, inaugurando uma nova era para o Ensino Médio. O NEM traz diversas mudanças, entre elas o aumento da carga horária anual e a introdução de uma nova estrutura curricular. Agora, o currículo é composto por dois elementos: a Formação Geral Básica, que é padronizada para todos os alunos e os Itinerários Formativos, que oferecem mais flexibilidade aos alunos. Essa dissertação está centrada na proposição de uma abordagem para um dos Componentes Curriculares Eletivos (CCE), disciplinas que fazem parte dos Itinerários Formativos. Traçando inicialmente um panorama da implantação e reestruturação do NEM no estado de Santa Catarina, neste trabalho também é apresentada uma revisão da literatura sobre modelagem matemática, e sobre a teoria sociocultural de Vygotsky. Com base nessas teorias, apresenta-se uma alternativa pedagógica para abordar e ensinar os conceitos e etapas da modelagem matemática no CCE de Matemática Aplicada. Para ilustrar a abordagem proposta e explorar algumas de suas possibilidades e potencialidades, foi desenvolvido um exercício de imaginação pedagógica, que vem acompanhado de atividades, textos, vídeos e de um exemplo de um modelo matemático que poderia ser desenvolvido com os estudantes. Nas considerações finais, são destacadas as contribuições do trabalho ao criar um roteiro pedagógico bastante detalhado, que pode servir como um recurso valioso para futuros professores do Ensino Médio que buscam incorporar modelagem matemática ao CCE de Matemática Aplicada ou outras disciplinas e ambientes educacionais.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Novo Ensino Médio, Matemática Aplicada, Componentes Curriculares Eletivos.

ABSTRACT

The year 2022 marks a significant stage for High School in Brazil, the national implementation of the New High School (Novo Ensino Médio - NEM). According to the Ministry of Education, this educational reform aims to offer quality education capable of meeting the growing demands of the modern world, inaugurating a new era for High School. NEM brings several changes, including the increase in the annual workload and the introduction of a new curriculum structure. Now, the curriculum is made up of two elements: Basic General Training, which is standardized for all students, and Training Itineraries, which offer students more flexibility. This dissertation is centered on proposing an approach to one of the Elective Curricular Components (CCE), disciplines that are part of the Formative Itineraries. Initially tracing an overview of the implementation and restructuring of the NEM in the state of Santa Catarina, this work also presents a review of the literature on mathematical modeling, and on Vygotsky's sociocultural theory. Based on these theories, a pedagogical alternative is presented to approach and teach the concepts and steps of mathematical modeling in the CCE of Applied Mathematics. To illustrate the proposed approach and explore some of its possibilities and potential, a pedagogical imagination exercise was developed, which is accompanied by activities, texts, videos and an example of a mathematical model that could be developed with the students. In the conclusion, the contributions of the work are highlighted by creating a very detailed pedagogical roadmap, which can serve as a valuable resource for future high school teachers who seek to incorporate mathematical modeling into the CCE of Applied Mathematics or other disciplines and educational environments.

Keywords: Mathematical Modeling, New High School, Applied Mathematics, Elective Curriculum Components.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Áreas do Conhecimento.....	12
Figura 2. Organização curricular do Novo Ensino Médio no Território Catarinense.....	13
Figura 3. Dinâmica da modelagem matemática.....	20
Figura 4. Esquema de uma modelagem.....	22
Figura 5. Sugestão de Mapa Mental para o texto base 1.....	50
Figura 6. Sugestão de Mapa Mental após discussões de todos textos base.....	51
Figura 7. Quadro de sugestões de ações para cada etapa.....	55
Figura 8. Massa média e desvio padrão das pesagens das mochilas.....	57
Figura 9. Gráfico da função $m = 0,10a$	59
Figura 10. Possível desenvolvimento com planilhas eletrônicas - massa aceitável.....	62
Figura 11. Possível desenvolvimento com planilhas eletrônicas - massa próximo do limite.....	62
Figura 12. Possível desenvolvimento com planilhas eletrônicas - massa acima do limite.	63
Figura 13. Fórmulas para criação de tabela em planilhas eletrônicas	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. O aluno e o professor nos casos de Modelagem.....	19
Tabela 2. Sugestão de percurso para o Componente Curricular Eletivo.....	43
Tabela 3. Massa média e desvio padrão das pesagens das mochilas (dados fictícios)	57
Tabela 4. Massa média dos materiais dos alunos.....	61

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	MARCO TEÓRICO	16
2.1	MODELAGEM MATEMÁTICA.....	16
2.1.1	A Modelagem Matemática como metodologia para o ensino.....	23
2.1.2	Modelagem Matemática como disciplina da grade curricular.....	26
2.2	A TEORIA SOCIOCULTURAL.....	28
3	METODOLOGIA.....	31
4	PROPOSTA DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O CCE DE MATEMÁTICA APLICADA.....	34
5	IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA	48
5.1	UNIDADE TEMÁTICA: MOBILIZAÇÃO (1 aula)	48
5.2	UNIDADE TEMÁTICA: INTERAÇÃO - PARTE 1 (2 aulas).....	50
5.3	UNIDADE TEMÁTICA: INTERAÇÃO - PARTE 2 (3 aulas).....	52
5.4	UNIDADE TEMÁTICA: FAMILIARIZAÇÃO(3 aulas).....	53
5.5	UNIDADE TEMÁTICA: MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO - PARTE 1.....	55
5.5.1	OBJETIVO 1: Definir a massa ideal/máximo da mochila.....	57
5.5.2	OBJETIVO 2: Selecionar quais e quantos materiais se encaixam na massa determinada pelo modelo anterior	60
5.6	UNIDADE TEMÁTICA: MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO - PARTE 2.....	65
5.7	UNIDADE TEMÁTICA: APRESENTAÇÃO (2 aulas).....	66
5.8	UNIDADE TEMÁTICA: AVALIAÇÃO (1 aula)	68
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	69
	REFERÊNCIAS.....	71
	APÊNDICE A – Texto Base 1 para Unidade Temática de Interação.....	74
	APÊNDICE B – Texto Base 2 para Unidade Temática de Interação	76
	APÊNDICE C – Texto Base 3 para Unidade Temática de Interação.....	78
	APÊNDICE D – Texto Base 4 para Unidade Temática de Interação.....	80
	APÊNDICE E – Texto Base para Unidade Temática de Familiarização	82
	APÊNDICE F – Atividade: Etapas de uma Modelagem Matemática	86

1 INTRODUÇÃO

Apesar de desde 2021 diversas escolas-piloto já iniciarem a execução do Novo Ensino Médio, o ano de 2022 marca um momento histórico no que tange o Ensino Médio em nível nacional, a implementação oficial do Novo Ensino Médio (NEM) em todas as escolas brasileiras. A Lei nº 13.415/2017 alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional estabelecendo uma mudança estrutural para o Ensino Médio. As alterações envolvem o aumento da carga horária, que passa de 800 horas para 1000 horas anuais, reestrutura a organização do currículo, antes regida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e agora com um caráter mais flexível, contemplando a Formação Geral Básica, que é coincidente para todos os alunos e os Itinerários Formativos, uma oferta de diferentes possibilidades de escolha para os estudantes. Segundo informação disponível no Portal do Ministério da Educação¹, essa reestruturação “tem como objetivos garantir a oferta de educação de qualidade à todos os jovens brasileiros e de aproximar as escolas à realidade dos estudantes de hoje, considerando as novas demandas e complexidades do mundo do trabalho e da vida em sociedade”.

Esse processo iniciou em 2017, com a aprovação da lei mencionada acima, dando o primeiro passo para uma longa jornada de atualização das diretrizes nacionais e organização de um novo Ensino Médio. Segundo o resgate histórico realizado pelo Jornal NEXO², em abril de 2018 o Ministério da Educação (MEC) entregou ao Conselho Nacional de Educação (CNE) a parte da BNCC sobre o Ensino Médio, que passou por consulta pública durante os cinco meses seguintes. Ainda em 2018, são finalizadas duas etapas importantes, a primeira consistindo nas chamadas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que regulamentam os princípios pedagógicos, a estrutura curricular, as formas de ofertas e as inovações para o NEM. A segunda foi a homologação do texto da BNCC para a etapa do Ensino Médio, finalizando assim a versão final da BNCC, iniciada em 2015.

É em 2020 que inicia a implementação-teste do NEM em escolas-piloto. Em Santa Catarina foram escolhidas 120 escolas espalhadas por todo o estado. Seguindo os regimentos criados nos anos anteriores, a Formação Geral Básica, é pautada na Base Nacional Comum

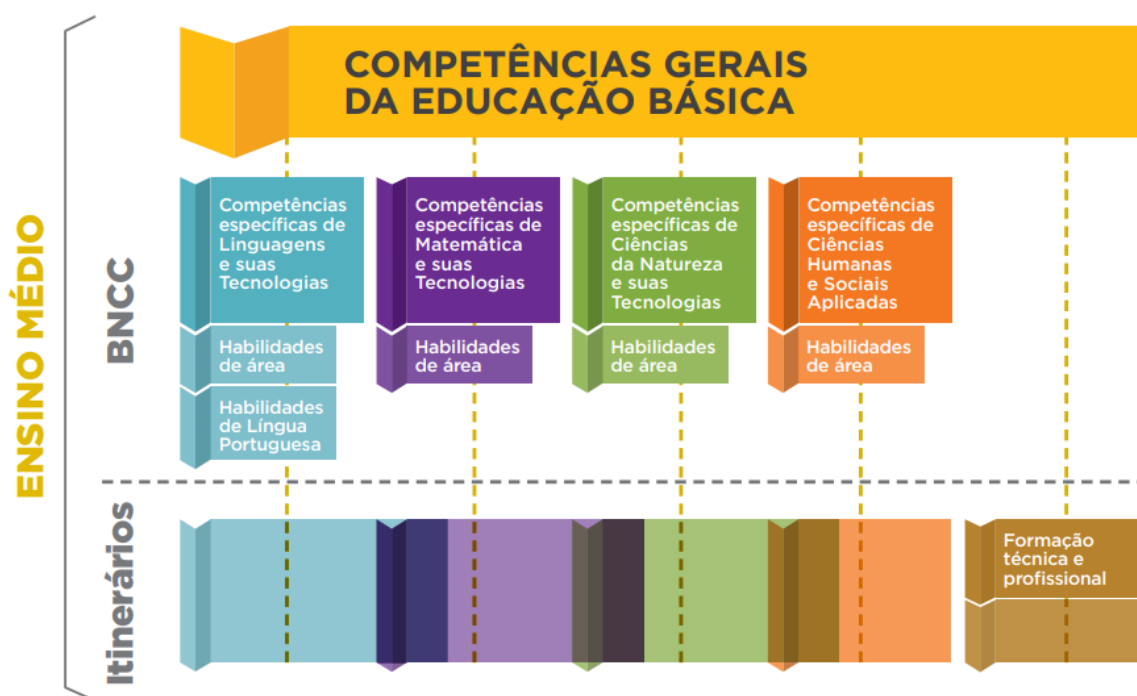
¹ <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=40361>

² <http://pp.nexojornal.com.br/linha-do-tempo/2020/A-trajetória-do-Novo-Ensino-Médio>

Curricular (BNCC), enquanto, os Itinerários Formativos, são de caráter flexível, com foco nas áreas de conhecimento e formação técnica e profissional.

No que se refere à Formação Geral Básica, a BNCC do Ensino Médio segue o proposto para as etapas anteriores do ensino básico, a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, e é baseada no desenvolvimento de competências e orientada pelo princípio da educação integral. Conforme destacado na BNCC, as competências gerais estabelecidas para a Educação Básica orientam igualmente as aprendizagens essenciais a serem garantidas no âmbito da BNCC do Ensino Médio, quanto aos itinerários formativos. O esquema apresentado na Figura 1, destaca a organização do Ensino Médio por áreas de conhecimento, conforme foi estabelecido no artigo 35-4 da LDB.

Figura 1. Áreas do Conhecimento.



Fonte: BRASIL, 2018, pg. 469.

Quanto aos Itinerários Formativos, estes foram divididos em quatro elementos: a segunda língua estrangeira, as trilhas de aprofundamento, os componentes curriculares eletivos e o projeto de vida. As áreas de conhecimento das trilhas de aprofundamento e dos componentes curriculares eletivos são definidas pelas redes e instituições de ensino, pois o objetivo é que os estudantes aprofundem e ampliem sua aprendizagem em uma ou mais áreas do conhecimento de sua escolha e interesse ou na Formação Técnica e Profissional. Na Figura 2 apresentam-se

alguns detalhes sobre cada um dos pontos dos itinerários formativos no Estado de Santa Catarina.

Figura 2. Organização curricular do Novo Ensino Médio no Território Catarinense.



Fonte: SANTA CATARINA, 2021, pg. 51.

Como mencionado anteriormente, um dos elementos dos itinerários formativos é composto pelos Componentes Curriculares Eletivos (CCE). A oferta destes CCE tem suporte nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2018) e na BNCC. No Art 4º da lei nº 13.415/2017, destaca-se que além do que propõe a BNCC o currículo será composto “por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino”. Com isso, os CCE se configuram como uma oportunidade de propor disciplinas e conhecimentos alinhados aos interesses e projeto de vida de cada estudante. No estado de Santa Catarina, a Secretaria de Educação deixa aberto aos estudantes a livre escolha de quais CCE eles pretendem cursar, de acordo com as possibilidades de oferta da instituição de ensino que frequentam.

A organização destes componentes eletivos na Rede de Educação de Santa Catarina foi realizada baseada nas seguintes áreas do conhecimento (também propostas no Art. 4º da Lei nº 13.415/2017): Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciência e Tecnologia, Componentes Integradores, Linguagens e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias. Estes componentes contribuem para a ampliação e a diversificação das aprendizagens, pois são disciplinas voltadas às diferentes áreas de conhecimento, com o objetivo de desenvolver as variadas habilidades sugeridas pela BNCC e estruturados por

diferentes focos pedagógicos, dividindo-se em: investigação científica, mediação e intervenção sociocultural, processos criativos e empreendedorismo (SANTA CATARINA, 2021).

Com isso, de acordo com o disposto no portal do Ministério da Educação, espera-se que as inovações nessa modalidade de ensino sejam capazes de formar os alunos de forma integral, ao colocá-los como centro da vida escolar, na expectativa de que eles consigam desenvolver uma aprendizagem mais significativa, incentivando seu protagonismo e autonomia, já que agora eles têm o poder de realizar escolhas sobre seu percurso já no Ensino Médio. Como mencionado na própria BNCC, a “nova estrutura valoriza o protagonismo juvenil, uma vez que prevê a oferta de variados itinerários formativos para atender à multiplicidade de interesses dos estudantes: o aprofundamento acadêmico e a formação técnica profissional” (BRASIL, 2018, p.467).

O estado de Santa Catarina iniciou em 2018, com a adesão de 120 escolas-piloto do estado, o processo de adaptação e planejamento da implementação do NEM. Porém, foi apenas em 2019 que a Rede Estadual de Educação iniciou o processo de construção dos CCE. No primeiro ano, foram formadas equipes com profissionais das 120 escolas-piloto escaladas para a implementação do NEM e das Coordenadorias Regionais de Educação, que ouviram as comunidades, famílias e estudantes sobre as demandas desses sujeitos para a escola e as necessidades educativas que esses(as) jovens e suas famílias consideravam importantes atender. Na fase inicial mais de 500 possibilidades de temas para os CCE foram apresentadas pelas escolas, que após levantamento e organização resultaram em 52 componentes. Após uma primeira implementação pelas escolas-piloto, iniciou-se um processo de aperfeiçoamento e reconstrução dos Roteiros Pedagógicos destes componentes. Na sequência, foi identificada a necessidade de uma organização dos conhecimentos e elaborações desse processo num material orientado aos professores, que fosse capaz de reunir as informações dos CCE e apoiar os profissionais em futuras aplicações.

Com a colaboração de professores e profissionais da Secretaria de Estado da Educação e do Instituto iungo³, foram desenvolvidas propostas de percursos para estes componentes. Este processo de construção coletiva foi realizado em diversas etapas e contou com 363 profissionais, resultando na criação de 25 roteiros pedagógicos, organizados e já disponíveis para as escolas num portfólio. Os roteiros foram divididos em seis áreas: Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciência e Tecnologia, Componentes Integradores, Linguagens e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias.

³ Instituto iungo: <https://iungo.org.br/>

Na área de Matemática e suas Tecnologias, são propostos quatro componentes específicos: Educação Financeira, Educação Fiscal, Jogos de Raciocínio Lógico-Matemático e Matemática Aplicada.

O presente trabalho está voltado ao CCE de Matemática Aplicada. No site dos CCE do estado de Santa Catarina, direcionado aos alunos, para que possam conhecer e futuramente escolher os componentes de seu interesse é indicado o seguinte texto para apresentar o componente de Matemática Aplicada:

O foco deste componente é na construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade em diferentes contextos e culturas. Aqui, os alunos poderão integrar essa área do conhecimento a atividades humanas simples, como a de idealizar e projetar uma casa, descobrindo que o cálculo de áreas é um problema cuja solução tem origem na antiguidade e continua sendo tema de estudo até os tempos atuais. Em Matemática Aplicada, os estudantes entenderão como os conhecimentos matemáticos foram construídos ao longo dos tempos para responder a questões que culminam na tecnologia, que trouxe muito mais rapidez e eficiência aos processos que envolvem cálculos. (SANTA CATARINA, 2020⁴.)

Atualmente, este componente conta com uma única proposta de trabalho, disponível no Portfólio dos Educadores. Nesta sugestão de trabalho, apresenta-se um roteiro de planejamento para a construção de uma residência familiar e ao longo da atividade busca-se explorar os seguintes objetos de conhecimento: Noções de desenho geométrico e de desenho técnico; cálculo de áreas por decomposição, aproximação e com o uso de tecnologia; aplicações do conceito de área na álgebra geométrica e História da Matemática em relação ao conceito de área (SANTA CATARINA, 2021).

Como as aplicações da matemática na vida dos estudantes são vastas, existem diversos conceitos matemáticos que podem ser aplicados em situações que os estudantes vivenciam ao longo de sua jornada. Buscando relacionar a matemática com o cotidiano dos alunos e desenvolver os objetivos do Novo Ensino Médio, a modelagem matemática se mostra como uma importante metodologia a ser aplicada, pois é capaz de relacionar e resolver alguns problemas da realidade através dos conceitos matemáticos, propostos pela BNCC. Conforme Bassanezi (2009) usar modelagem no ensino de matemática facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações. Além disso, o autor também destaca que trabalhos dessa natureza podem auxiliar os alunos em suas decisões futuras, pois permite que se vislumbre sobre suas aptidões ou até mesmo os direcione para uma formação acadêmica.

⁴ <https://sites.google.com/sed.sc.gov.br/nem-sedsc/calculador-projetar-construir>

Assim, em linhas gerais, o objetivo deste trabalho é propor um percurso alternativo para o CCE de Matemática Aplicada, utilizando a modelagem matemática como estratégia para desenvolver habilidades relevantes para a aprendizagem dos alunos e sua formação integral enquanto cidadão.

Com isto, nesta dissertação é apresentado uma nova sugestão para o CCE de Matemática Aplicada, buscando trabalhar conceitos diferentes dos já apresentados no portfólio da Rede. Este percurso seguiu a estrutura da proposta contida no Portfólio dos Educadores, onde além de apresentar os objetivos de aprendizagem, habilidades e competências a serem desenvolvidas, conforme a BNCC, e um cronograma das aulas, são propostas atividades para aplicação, respeitando a carga horária de 40 aulas e o período semestral em que os CCE são aplicados. Acompanhado do percurso, seguem orientações aos professores, a fim de que consigam implementar o percurso de forma satisfatória e explorar ao máximo os conceitos matemáticos e o desenvolvimento das habilidades.

Após a elaboração da proposta de trabalho para o CCE de Matemática Aplicada foi desenvolvido também um exercício de imaginação pedagógica, com o objetivo explorar as ambições das atividades propostas e exemplificar algumas possibilidades para uma futura aplicação em sala de aula.

O trabalho está organizado em 6 capítulos. No primeiro capítulo apresenta-se esta breve introdução do trabalho, abordando a implementação e reestruturação do Novo Ensino Médio, enquanto no segundo capítulo é realizada uma revisão bibliográfica e fundamentação teórica dos temas relevantes a esta dissertação. Neste segundo capítulo é abordado o processo da modelagem matemática e suas contribuições enquanto metodologia de ensino, pautados principalmente nos trabalhos de Biembengut e Hein (2019), Bassanezi (2009), Barbosa (2004) e Burak (1992). Explora-se também, de forma sucinta, conceitos e definições da teoria de aprendizagem de Vygotsky.

No terceiro capítulo são descritos os procedimentos metodológicos para a elaboração da proposta e da imaginação pedagógica, na perspectiva de Skovsmose (2015), utilizada posteriormente como ferramenta para explorar as possibilidades da proposta deste trabalho. No quarto capítulo é exposta a estrutura da proposta e um detalhamento do percurso alternativo desenvolvido enquanto os resultados do exercício de imaginação pedagógica estão descritos no capítulo cinco. Finaliza-se com o sexto capítulo, onde são apresentadas as considerações finais do trabalho.

2 MARCO TEÓRICO

Neste capítulo são delineados fundamentos teóricos essenciais para a compreensão da modelagem matemática, destacando sua relevância como metodologia de ensino. Neste contexto, são discutidos trabalhos relevantes que abordam temas correlatos, são apresentadas algumas definições de diferentes autores da área, estratégias, etapas e como o uso de modelagem matemática no ensino pode contribuir para aprendizagem dos alunos. Além disso, é apresentada uma seção dedicada à teoria de aprendizagem sociocultural, estabelecendo conexões entre a aprendizagem por meio da modelagem matemática e a teoria de Vygotsky, destacando como a interação do indivíduo com seu ambiente e com outros indivíduos, que acontece em experiências de modelagem matemática, pode promover a aprendizagem dos alunos.

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Há registros desde antes do Renascimento sobre a utilização da matemática para resolver problemas da humanidade, mais especificamente, utilizou-se conceitos da matemática aplicada e da própria modelagem matemática para resolvê-los. Parte dos conceitos e resultados que se têm hoje nessa área, foram elaborados ao buscar solucionar situações que os povos enfrentavam.

Atualmente, a modelagem matemática já se consolidou como uma metodologia de pesquisa científica. Conforme destaca Biembengut e Hein (2019, p.17), ela é usada em toda ciência e tem contribuído significativamente para a evolução do conhecimento, mas, é importante salientar que a modelagem não é um processo próprio dos cientistas. Ela pode ser encontrada em empresas, situações mais técnicas e até mesmo em conhecimentos cotidianos, como o de uma costureira, um pedreiro ou um agricultor.

Além de metodologia de pesquisa, a modelagem matemática vem sendo utilizada como uma metodologia de ensino, tanto para níveis de ensino básico como para o Ensino Superior. No cenário nacional, trabalhos e estudos sobre modelagem matemática voltados à área de ensino começaram a surgir e ter mais evidência na década 90. Hoje, o tema já é bastante difundido, além de ser linha de pesquisa de diversos programas de pós-graduação no país e ser tema de inúmeros trabalhos em grandes eventos nacionais como o CNMAC (Congresso

Nacional de Matemática Aplicada e Computacional) e ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), desde 1999 um evento específico para trabalhos de modelagem matemática foi criado, o CNMEM - Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. Em 2019 aconteceu a 11ª edição do evento na Universidade Federal de Minas Gerais, onde foram apresentados mais de 90 trabalhos.

Por ser cada vez mais presente, para diferentes autores a modelagem matemática tem diferentes definições, tanto a sua concepção quanto ao seu processo de elaboração e suas etapas. Abaixo apresenta-se algumas destas concepções de pesquisadores relevantes na área.

Para Barbosa (2001) “Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade”. Ao apresentar diferentes casos de como essa abordagem pode ser feita, o autor destaca que o tema da pesquisa pode ser proposto pelo professor ou determinado junto aos alunos. Em qualquer uma das formas, a temática deve ser voltada a uma situação do cotidiano, dando preferência a situações reais do que fictícias, apesar de ambas terem potencialidades.

Biembengut e Hein (2019, p.12) definem que “Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo”, de forma que esse modelo seja capaz de fazer interagir uma situação real com a matemática. Os autores destacam ainda que na elaboração do modelo, além de expressões numéricas ou fórmulas, podem ser utilizados diagramas, gráficos, representações geométricas, tabelas, ferramentas computacionais etc.

Em relação ao que Bassanezi (2009) traz, a modelagem é uma arte que tem a capacidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos, a fim de então resolvê-los e interpretá-los na linguagem inicial em qual o problema foi modelado. Para o autor, essa alteração de linguagem, do cotidiano para a matemática, é um dos papéis da matemática:

O objetivo fundamental do “uso” de Matemática é de fato extrair a parte essencial da situação – problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia da linguagem. Desta forma, a Matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar idéias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância (BASSANEZI, 2009, p.24).

Assim como os autores mencionados anteriormente, Bassanezi (2009) relaciona o processo de modelagem matemática com a elaboração de modelos. O autor acrescenta que além da obtenção a modelagem busca validar os modelos desenvolvidos, tornando assim um processo dinâmico. Nesse mesmo sentido, para Burak (1992, p. 62) a modelagem matemática

"constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões."

A partir das concepções de modelagem matemática dos autores acima, podemos considerar como modelagem matemática o processo de solução de um problema que esteja relacionado com o mundo real, onde a solução envolve interpretar o problema e transportá-lo para a linguagem matemática elaborando um modelo, que pode envolver diferentes elementos da matemática, como equações e expressões, tabelas, gráficos etc.

O processo de elaborar um modelo matemático pode tomar diferentes caminhos, porém o professor é indispensável em todos eles, sendo um coparticipante do processo que os alunos vão desenvolver ao longo do andamento da atividade de modelagem (BARBOSA, 2001). A partir de trabalhos nacionais e internacionais, o autor classificou os trabalhos de modelagem em três casos, de acordo com o papel do professor e dos alunos ao longo desse processo, conforme mostra a Tabela 1.

Tabela 1. O aluno e o professor nos casos de Modelagem.

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>
<i>Elaboração da situação-problema</i>	professor	professor	professor/aluno
<i>Simplificação</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Dados qualitativos e quantitativos</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Resolução</i>	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Fonte: BARBOSA, 2001, p.9.

Nos casos 1 e 2, o professor é quem propõe a situação-problema, ou seja, a temática da atividade de modelagem que será desenvolvida. A diferença entre os casos está nas etapas de simplificação e coleta dados, enquanto no caso 1, essas etapas são realizadas pelo professor e apenas expostas aos alunos, no caso 2 os alunos são sujeitos ativos dessas partes do processo, fazendo sugestões de como simplificar o problema e indo em busca dos dados necessários para solucioná-lo. Em ambos os casos, os alunos, sob orientação do professor, resolvem o problema. O caso 3 se difere do caso 2 apenas na proposição do tema do trabalho, nesse, os alunos determinam sobre qual situação a modelagem será desenvolvida e, segundo o autor, estas proposições são de temas não-matemáticos.

No que se refere a elaboração da situação-problema, o mais habitual ainda é que o professor traga algum tema já definido aos alunos, isso fica evidente no trabalho desenvolvido por Ramon, Souza e Klüber (2022). Os autores realizaram uma revisão bibliográfica dos relatos de experiência, quarenta e dois, no total, apresentados no XI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM). Do total de trabalhos analisados, apenas vinte e sete estavam relacionados à componentes curriculares de matrizes curriculares, os demais eram produtos de projetos de ensino, pesquisa ou extensão. Após organizar os trabalhos que tinham conexão com alguma matriz curricular, de acordo com o nível de ensino, os autores situam cada um dos relatos quanto ao responsável pela escolha do tema. Destaca-se na sequência a análise de dezenove trabalhos. Nos sete trabalhos realizados nos Anos Finais do Ensino Fundamental, três deles o professor foi o responsável e nos demais quatro os alunos participaram. Já nos relatos de modelagem realizados com alunos do Ensino Médio, nos oito trabalhos da categoria foi o professor quem determinou o tema, sem a participação dos alunos. Ainda, nos quatro trabalhos que aconteceram com alunos de graduação, em apenas dois os alunos participaram dessa etapa. Os autores classificaram ainda estes mesmos relatos quanto aos três casos propostos por Barbosa (2001) e o caso 3 foi o menos presente.

Ao classificar os trabalhos de modelagem conforme a Tabela 1, o autor destaca algumas etapas do processo de modelagem, mas não explora como elas devem acontecer. Trabalho mais detalhados sobre as etapas de uma modelagem, desde a definição da temática, elaboração do modelo à validação dos resultados, são propostos por Biembengut e Hein (2019) e Bassanezi (2009). A seguir será abordado como os autores organizaram essas etapas.

Biembengut e Hein (2019) organizam os procedimentos de representar uma situação real em um modelo matemático, a partir de três etapas que são subdivididas em outras seis. Um resumo desses elementos pode ser conferido na Figura 3.

Figura 3. Dinâmica da modelagem matemática.



Fonte: Biembengut e Hein, 2019, p. 15.

A primeira etapa é chamada de *Interação* e compreende o período de reconhecimento da situação-problema e a familiarização com essa situação que será modelada, é nessa etapa que se realiza a fundamentação teórica que dará base para resolver o problema. Os autores destacam ainda que é ao longo de todas as etapas, ao interagir com problema e os dados, que a situação ficará mais clara, ou seja, apesar de fundamental, não se conhecerá tudo sobre o tema na etapa de interação.

A mais complexa e desafiante, é assim que Biembengut e Hein (2019) definem a segunda etapa, denominada *Matematização*. É provável que seja a mais longa delas também, pois é nesta que se realiza a formulação do problema, as hipóteses e se resolve a situação em termos de um modelo. Os autores destacam que é na matematização que acontece a tradução do problema que vem de uma situação real para a linguagem matemática, assim como destacou também Bassanezi (2009). O produto final desta tradução, é o que chamamos de modelo matemático. Com isto determinado, passa-se para a resolução do problema, usando do que os autores definem como “ferramental matemático”, que podem ser expressões aritméticas ou fórmulas, gráficos, tabelas entre outros, e podem envolver, ou não, um auxílio computacional.

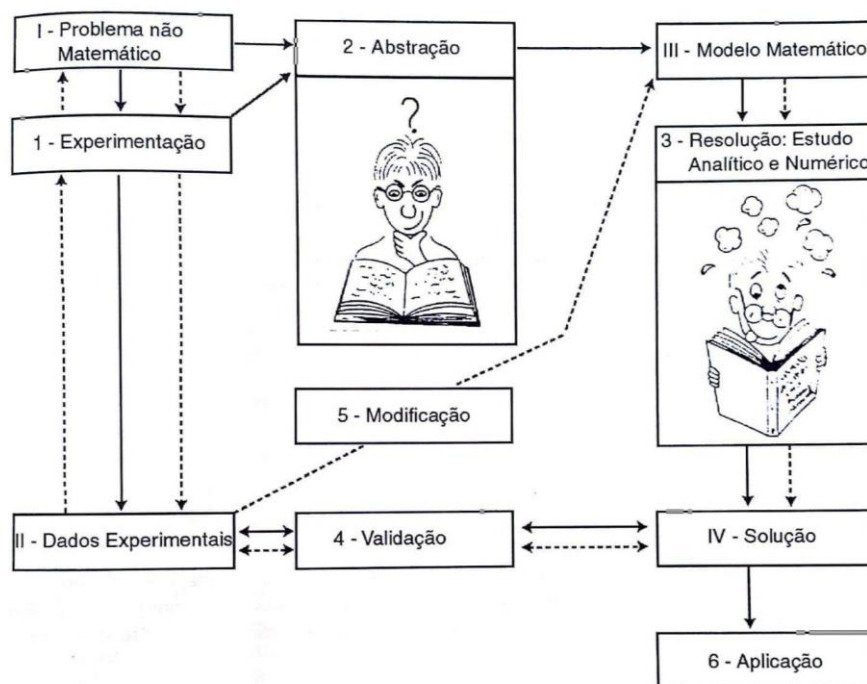
Por fim, se conclui com a etapa chamada de *Modelo matemático*. Após a resolução encontrada na fase anterior, “torna-se necessária uma avaliação para verificar *em que nível* ele se aproxima da situação-problema representada e, a partir daí, verificar o grau de confiabilidade na sua utilização” (BIEMBENGUT, HEIN, 2019, p.15, grifo nosso). O nível de aproximação que se espera varia do ambiente e objetivo da pesquisa. Por exemplo, enquanto no meio acadêmico, em pesquisas científicas, o nível de aproximação deve ser alto para um modelo ter relevância, no meio educacional o objetivo está mais voltado a aprendizagem dos alunos, então o nível de aproximação pode ser mais relaxado, tendo em vista também que alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio muitas vezes não dispõem de ferramentas e conhecimentos matemáticos avançados a ponto de desenvolver um modelo que gere um alto nível de confiabilidade.

Se, após a análise da solução, os pesquisadores concluírem que não estão em um nível adequado de aproximação e confiabilidade do modelo, é necessário voltar à etapa da matematização para realizar ajustes que atuem no modelo de forma que ao resolvê-lo se constate que a solução é satisfatória. Com isso, fica claro que o processo de modelagem muitas vezes não é de forma linear, acontecem várias idas e voltas ao longo de sua realização. Essa alternância nos caminhos e etapas fica evidente também no quadro da dinâmica da modelagem matemática desenvolvido por Biembengut e Hein (2019) e apresentado na Figura 3, as flechas

que relacionam as etapas e subetapas apontam para mais de um sentido, indicando que às vezes se torna necessário voltar alguns passos para ir refinando o modelo.

Ao definir as etapas de uma modelagem matemática e organizá-las num esquema (Figura 4), Bassanezi (2009) também deixa evidente que para ele este não é um processo linear, basta notar as diferentes direções e caminhos que das flechas do esquema. É possível verificar também, a partir da Figura 4, que as etapas de uma modelagem, elencadas pelo autor, são ligeiramente distintas das etapas sugeridas por Biembengut e Hein (2019).

Figura 4. Esquema de uma modelagem.



Fonte: BASSANEZI, 2009, p. 27.

Para Bassanezi (2009), a primeira fase de uma modelagem é a *Experimentação*, que segundo o autor “é uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados” (BASSANEZI, 2009, p.26). É destacado ainda, que nessa etapa devem ser adotados técnicas e métodos estatísticos, a fim de quando finalizar a modelagem, a solução ter um grau de confiabilidade maior. A segunda fase, chamada *Abstração*, é o ponto da pesquisa em que são formulados os modelos matemáticos. Esta etapa é subdividida em outros quatro pontos, são eles: a seleção de variáveis, a problematização ou formulação aos problemas técnicos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando, a formulação das hipóteses e, por fim, a simplificação. Na sequência, acontece a *Resolução*, o ponto em que se resolve os modelos

propostos, em sua descrição, a resolução é realizada pelos matemáticos e pode ser desvinculada da realidade na qual foi modelada.

As últimas fases são a *Validação* e a *Modificação*, onde acontece a análise da solução obtida e é verificado se o modelo será aceito ou não. Para isso, a solução encontrada deve ser testada e pelo menos estar de acordo com os dados iniciais usados em sua elaboração. Mas um modelo relevante é “aquele que tem capacidade de previsão de novos fatos ou relações insuspeitas” (BASSANEZI, 2009, p.30). Se determinado que o modelo não é satisfatório, a última fase, modificação, sugere que seja retornado a fase de elaboração do modelo matemático, com a finalidade de: revisar as hipóteses e os dados experimentais, verificar se as variáveis foram bem definidas, se foram utilizadas as estruturas matemáticas adequadas para o problema e de forma correta. Na sequência, se repete as fases seguintes até chegar novamente na fase de validação. O processo pode ser repetido até atingir um modelo matemático satisfatório.

Todavia, quando se refere a modelagem matemática como estratégia de ensino-aprendizagem, o autor destaca que

A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural. (BASSANEZI, 2009, p.38)

Com isso, as fases de uma modelagem podem sofrer alterações e ser adaptadas, levando em consideração que o objetivo agora é outro, assim “a validação de um modelo pode não ser uma etapa prioritária. Mais importante que os modelos obtidos é o processo utilizado, a análise-crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural” (BASSANEZI, 2009, p.38).

Essa ideia é reforçada também por outros autores. Biembengut e Hein (2019) corroboram quando dizem que ao utilizar modelagem matemática no ensino

(...) devem ser feitas algumas adaptações que tornem possível a utilização da modelagem matemática como metodologia de ensino-aprendizagem sem, contudo perder a linha mestra que é o favorecimento à pesquisa e posterior criação de modelos pelos alunos, sem desobedecer as regras educacionais vigentes. É o que chamamos de modelação matemática (BIEMBENGUT, 2019, p. 28).

2.1.1 A Modelagem Matemática como metodologia para o ensino

Na seção anterior, buscou-se apresentar algumas concepções do que se entende por modelagem matemática e como ela pode ser aplicada à ciência como um todo. Próximo de finalizar a seção destacamos outro aspecto da modelagem, um mais voltado a área da educação. Já ressaltaram Biembengut e Hein (2019, p. 11), quanto à versatilidade dessa metodologia, ao apontar que o “objetivo de um modelo matemático pode ser explicativo, pedagógico, heurístico, diretivo, de previsão, dentre outros.”

Conforme mencionado por alguns autores, a elaboração do modelo matemático é de extrema importância num processo de modelagem. Quando se trata do uso da modelagem como metodologia de ensino, Almeida (2022, p. 122) chama atenção para importância de ter claro se o que está sendo buscado é ter como objeto a própria modelagem e os modelos a serem desenvolvidos, ou se pretende essencialmente contribuir na aprendizagem de conceitos matemáticos pelos alunos, tornando, dessa forma, a modelagem uma ferramenta para alcançar esse objetivo. Assim, quando se trata de modelagem na área educacional, seus procedimentos necessitam de algumas alterações e/ou adaptações, pois seu propósito neste cenário se direciona ao processo de ensino, onde o foco é a aprendizagem dos alunos e não exclusivamente um modelo matemático para descrever a situação-problema.

A utilização da modelagem na educação tem se tornado recorrente, como destacamos no trabalho de revisão bibliográfica de Ramon, Souza e Klüber (2022). Na comunicação científica desenvolvida por Seki, Silva e Pereira (2016), também se evidencia o frequente uso da modelagem como metodologia de ensino. Os autores analisaram os trabalhos presentes nos anais do IX CNMEM, XI ENEM, XII EPREM e do VI EPMEM, onde foram encontrados 197 trabalhos nessa temática. Destes, 69 são voltados a níveis de educação básica, 67 voltados ao Ensino Superior e os demais estão relacionados a diferentes níveis de escolaridade, formação continuada ou são de cunho teórico e bibliográfico. Ambos trabalhos de revisão bibliográfica comprovam que a modelagem matemática é bastante utilizada em salas de aula.

Esse uso se justifica pelas competências que se pretende desenvolver nos alunos, como as contribuições que essa metodologia promove quando desenvolvida em sala de aula. Ao analisar a Base Nacional Comum Curricular e as competências específicas propostas a área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, encontra-se como um dos objetivos a seguinte competência,

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p.523).

Dessa forma, além de ser relevante quanto à aprendizagem dos alunos, a modelagem também faz parte do currículo nacional. Sua proposta é que ao longo de atividades relacionadas à área da matemática, seja possível desenvolver nos estudantes a habilidade de criar um modelo matemático e resolvê-lo. Esse é também um dos motivos pelos quais o Componente Curricular Eletivo de Matemática Aplicada foi proposto pela Secretaria de Educação de Santa Catarina.

Em seu trabalho, Barbosa (2004) elenca cinco pontos que também contribuem na aplicação da modelagem em sala de aula, são eles: a motivação dos alunos, uma facilitação na aprendizagem, preparação para usar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da matemática. O autor ainda salienta que a modelagem “pode potencializar a intervenção das pessoas nos debates e nas tomadas de decisões sociais que envolvem aplicações da matemática, o que me parece ser uma contribuição para alargar as possibilidades de construção e consolidação de sociedades democráticas.” (BARBOSA, 2004, p.2).

A partir disso, é possível afirmar que, não só como estratégia de ensino serve a modelagem, mas como um processo que pode auxiliar na formação dos alunos enquanto cidadãos que tomam decisões quanto a seu futuro. Nesta direção caminham também as ponderações de Biembengut e Hein (2019), que destacam que atividades de modelagem são uma forma prazerosa de aprender e explorar os campos da matemática e promovem um conhecimento significativo em seu processo, tanto no que se refere aos conceitos matemáticos quanto no tema determinado para a pesquisa. Para estes autores o processo de usar modelagem como método de ensino é denominado de modelação matemática e pode ser utilizado em qualquer nível escolar. Alguns objetivos da modelação são: aproximar a outras áreas do conhecimento à matemática, enfatizar a importância de aprendê-la, despertar o interesse por essa área, melhorar a apreensão dos conceitos técnicos da matemática e desenvolver habilidades criativas e de resolução de problemas.

Além de promover a aprendizagem, a modelação também é capaz de promover o trabalho em equipe, já que estes trabalhos, em geral, são desenvolvidos em grupos ou até mesmo

com turmas inteiras, promovendo a integração de todos. Da mesma forma, a depender da abordagem, (principalmente nos casos 2 e 3 propostos por Barbosa (2004), vide Tabela 1), atividades desse gênero oportunizam aos alunos experiências de pesquisas, gerando muitas vezes mais interesse e desenvolvendo novas habilidades nos alunos.

Em sua obra, Bassanezi (2009) aponta que “a inclusão de aspectos de aplicação e mais recentemente, resolução de problemas e modelagem, têm sido defendida por várias pessoas envolvidas com o ensino de matemática” (BASSANEZI, 2009, p.36). A defesa dessa inserção se dá devido aos benefícios que ela pode promover no processo de aprendizagem. O autor apresenta seis argumentos que justificam essa inclusão, são eles de caráter: formativo, de competência crítica, de utilidade, intrínseco, de aprendizagem e de alternativa epistemológica. Destacam-se abaixo três deles:

2. Argumento de competência crítica - focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos.

3. Argumento de utilidade - enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas.

5. Argumento de aprendizagem - garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valorizar a própria matemática. (BASSANEZI, 2009, p.36-37.)

Os argumentos evidenciados reforçam a importância e o ganho que pode ser obtido ao utilizar a modelagem nas escolas. O argumento 2 destaca o caráter de formação crítica que a modelagem tem e promove o desenvolvimento de competências e habilidades propostos pela BNCC. O argumento 3 resolve os questionamentos recorrentes dos alunos em sala de aula, que frequentemente questionam, “Professor, por que eu preciso aprender isso?” ou ainda “Professor, isso serve para alguma coisa?”. E o quinto argumento, justifica o uso desse método como estratégia de ensino, pois apresenta possibilidades de ensino e compreensão dos conceitos matemáticos exigidos nos currículos das escolas.

Reforçando o destacado pelos autores mencionados anteriormente, acredita-se que a utilização de modelagem matemática como metodologia de ensino é extremamente valiosa para os estudantes, pois permite que eles desenvolvam habilidades críticas de pensamento e também habilidades interdisciplinares, pois diversas vezes os problemas que são trabalhados envolvem

conhecimentos de outras disciplinas. Utilizar a modelagem como metodologia vem também da prerrogativa de tornar a matemática mais relevante e interessante para os estudantes, pois ao longo de seu desenvolvimento é possível notar sua aplicação no mundo e em problemas reais.

2.1.2 Modelagem Matemática como disciplina da grade curricular

Não é difícil encontrar na literatura trabalhos de modelagem matemática aplicados nos diferentes níveis de ensino. Já há relatos de trabalhos com modelagem desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior, conforme apontam os trabalhos de Ramon, Souza e Klüber (2022) e Seki, Silva e Pereira (2016). Entretanto, ao analisar as propostas do uso da modelagem matemática destacadas nestes trabalhos, nos que estão situados num contexto da educação básica (Ensino Fundamental e Ensino Médio), estas, em geral, ocorrem durante as aulas da disciplina de Matemática, como uma estratégia ou metodologia diferenciada para ensinar um conteúdo ou exemplificar aplicações da matemática em diferentes áreas e situações.

Já nos relatos de experiência do uso da modelagem matemática no Ensino Superior, é comum perceber que, além de seu uso como metodologia de ensino em diferentes disciplinas, há relatos de experiências que ocorreram em disciplinas próprias de modelagem matemática. Apesar de haver uma crescente no uso da modelagem matemática, como destacam os trabalhos pesquisados, muitos cursos de Licenciatura ainda não mostram tanta abertura. Em uma pesquisa realizada no Estado do Paraná por Santos Júnior e Soares (2014), dos 28 de cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática localizados no estado, apenas 12 ofertavam uma disciplina de modelagem matemática, destes, apenas em 9 cursos a disciplina era obrigatória.

Apesar de até o momento não ter registros da oferta de uma disciplina específica de modelagem matemática no ensino básico, sua aplicação já é mais difundida. Na sequência são apresentados trabalhos da prática de modelagem matemática em diferentes níveis de ensino.

No relato de experiência de Rocha e Rocha (2008), destacam-se as atividades envolvendo o valor da cesta básica do Rio Grande do Sul com alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública. O problema da pesquisa, que partiu dos próprios alunos da turma após discussões sobre a cesta básica, era tentar estimar o ano em que o valor da cesta básica seria de R\$ 500,00 naquele estado. Sob a orientação da professora, os alunos coletaram dados sobre o valor da cesta básica dos 10 anos anteriores à pesquisa, ou seja, de 1997 a 2007. Depois

de construir uma representação gráfica dos dados obtidos, os alunos concluíram que estes sugeriam uma linha de tendência exponencial. Com isso, resolveram o problema criando um modelo a partir do método de ajuste linear do modelo exponencial, concluindo que, considerando uma economia controlada pela inflação, o preço da cesta básica atingiria o valor de R\$ 500,00 no ano de 2034.

A pesquisa descritiva realizada por Sousa, Silva e Silva (2018) teve como objetivo investigar a aplicação da modelagem matemática no Ensino Fundamental em uma escola de Água Branca - PI. A atividade proposta foi desenvolvida em uma turma de 4º ano, abordando o tema "Quanto 'pesa' a mochila escolar?" e teve como objetivo explorar o conteúdo matemático de Frações. A pesquisa destacou a modelagem matemática como uma alternativa no processo de ensino e aprendizagem, apresentando uma atividade interdisciplinar entre Ciências e Matemática. Durante a modelagem, foi medida a massa corporal dos alunos e de suas respectivas mochilas e, com as frações, os alunos realizaram os cálculos da fração de uma quantidade, relacionando a massa da mochila com a massa corporal e determinando os índices percentuais. A abordagem buscou atribuir significado real aos conteúdos, destacando a melhoria da prática do professor, o processo dinâmico de aprendizagem dos alunos e como atividades diferenciadas contribuem na motivação dos alunos e também do professor.

Ainda, em seu trabalho de dissertação, Flavio Fernandes (2016) aborda a aplicação de uma proposta pedagógica de modelagem matemática, direcionada a uma turma do Ensino Médio Integrado em Administração do Instituto Federal de Santa Catarina no campus Caçador. Através da implementação da modelagem matemática, com foco na criação de empresas fictícias, os alunos tiveram a oportunidade de adquirir conhecimentos relacionados ao currículo de sua formação técnica, integrando teoria e prática. O estudo mostrou que a abordagem da modelagem matemática para o ensino de matemática revela fatores: interdisciplinares, ao desenvolver projetos voltados à área de Administração; motivacionais, já que as situações modeladas foram propostas pelos próprios alunos e os mesmos mostraram interesse ao longo das aulas; e interpessoais, devido a organização em grupos que o trabalho foi realizado, promovendo também o desenvolvimento de habilidades sociais. Fernandes (2016) destaca também a exploração e aprendizagem de conceitos curriculares por meio da investigação e de pesquisas de situações reais, um pilar da modelagem matemática.

2.2 A TEORIA SOCIOCULTURAL

Nesta seção apresentam-se alguns aspectos da teoria sociocultural, desenvolvida pelo psicólogo Lev Vygotsky (1866-1934). Vygotsky trouxe a ideia de que as crianças não nascem com habilidades cognitivas prontas, mas sim, adquirem-nas através das interações com adultos e outras crianças em seu ambiente. Ele ainda sugere que a educação e as experiências sociais são essenciais para o desenvolvimento cognitivo.

Na área educacional, a teoria sociocultural tem ampla aceitação, já que as experiências vivenciadas pelos alunos nas escolas e durante as aulas, envolvem muitas interações sociais, tanto com o professor quanto com os colegas. Apesar do pensamento humano ser um processo complexo, é importante que os professores compreendam como as interações influenciam na formação dos alunos e no desenvolvimento de suas habilidades e conhecimentos.

Um dos principais pontos da teoria de Vygotsky é a "zona de desenvolvimento proximal". Ele argumenta que existe uma distância entre o que uma criança é capaz de fazer sozinha, denominado nível de desenvolvimento real, e o que é capaz de fazer com ajuda, denominado nível de desenvolvimento potencial. A partir destes níveis, o autor define a zona de desenvolvimento proximal como

[...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros capazes. (VYGOTSKY, 1991. p. 97)

No que se refere ao processo de aprendizagem, é no processo da zona de desenvolvimento proximal, ao partir do nível de desenvolvimento real e chegar no potencial, que o aluno aprende. Segundo Vygotsky, os adultos, professores e outras crianças mais avançadas desempenham um papel importante na ajuda aos indivíduos a superar sua zona de desenvolvimento proximal, e é através desse apoio que as habilidades cognitivas são adquiridas.

Nessas vivências em sociedade, pode-se constatar que o ser humano tem diversas capacidades, como de pensar experiências anteriores, imaginar eventos que ainda serão vivenciados, planejar ações e buscar soluções para problemas reais e até fictícios. A esses tipos de atividades psicológicas, Vygotsky (1991) denominou "superiores". Podem ser citados dentre essas atividades os desenvolvimentos da percepção, da memória e da atenção.

Ao desenvolver sua teoria, Vygotsky enfatiza que por viver em uma sociedade, as interações e trocas com os demais, é marcante para o desenvolvimento sociocultural. De acordo

com Rego, "segundo ele, a complexidade da estrutura humana deriva do processo de desenvolvimento profundamente enraizado nas relações entre história individual e social" (REGO, 2011, p. 26).

Ao analisar a relação entre indivíduo e sociedade, baseado em Vygotsky, Rego destaca que

Vygotsky afirma que as características tipicamente humanas não estão presentes desde o nascimento do indivíduo, nem são mero resultado das pressões do meio externo. Elas resultam da interação dialética do homem e seu meio sociocultural. Ao mesmo tempo em que o ser humano transforma o seu meio para atender suas necessidades, transforma a si mesmo. (REGO, 2011, p. 41)

Ainda que o Vygotsky defenda esta posição, ele não descarta as definições biológicas dos humanos, entende que ao longo das diversas fases de um indivíduo, as questões biológicas vão evoluindo e contribuindo para o desenvolvimento humano. Porém, ele acredita que o desenvolvimento pleno do ser humano depende do que ele vivencia e aprende num grupo social e isso acontece através da interação com os demais.

Uma concepção importante que o autor desta teoria destaca é a mediação no pensamento psicológico. Para o autor, a mediação é uma interação que ocorre através de uma intervenção de um elemento intermediário, a partir desse momento, a interação deixa de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento. Vygotsky distinguiu dois tipos de elementos mediadores: os instrumentos e os signos. Para Vygotsky "[...] o instrumento é um elemento interposto entre o trabalhador e o objeto de seu trabalho, ampliando as possibilidades de transformação da natureza" (OLIVEIRA, 2005, p. 29). Ele descreve esses elementos como "ferramentas para a mente", que ajudam a ampliar as capacidades cognitivas das pessoas. Já o segundo elemento mediador, o signo, é exclusivamente humano. Segundo Vygotsky, os signos são instrumentos psicológicos, pois podem ser utilizados como um dispositivo que permite resolver problemas de nível mental, em ações como lembrar, comparar, decidir, etc.

De maneira geral, a teoria sociocultural de Vygotsky tem uma abordagem muito mais social do que biológica do desenvolvimento humano, e tem um papel importante na compreensão do ensino e aprendizado. A teoria destaca tanto o papel dos professores quanto a interação dos alunos com o meio em que vivem, pois oferece uma visão mais ampla do ambiente em que as crianças estão aprendendo.

No contexto da modelagem matemática, a teoria sociocultural de Vygotsky oferece uma lente valiosa para analisar como a aprendizagem ocorre nesse domínio específico. Ao adotar

uma abordagem socialmente mediada, esta teoria ressalta a relevância das interações entre os estudantes e professores, bem como entre os próprios alunos, no processo de construção do conhecimento matemático. Em projetos de modelagem matemática, os estudantes frequentemente trabalham em grupos colaborativos para resolver problemas, empregando conceitos matemáticos para modelar e solucionar situações complexas. Nesse contexto, a teoria de Vygotsky destaca como as interações sociais podem facilitar a internalização de conceitos matemáticos e promover o desenvolvimento de habilidades cognitivas superiores.

Além disso, a teoria sociocultural enfatiza a importância do ambiente em que ocorre a aprendizagem. Em projetos de modelagem matemática, o ambiente de aprendizagem é frequentemente enriquecido com recursos, como ferramentas tecnológicas, materiais didáticos, e conhecimentos empíricos do dia a dia. É em momentos de interação e aprendizagem entre alunos e através das orientações do professor que aparece a zona de desenvolvimento proximal e permite o avanço na aprendizagem dos estudantes. A perspectiva de Vygotsky ressalta como a concepção e a estrutura desse ambiente podem influenciar profundamente o processo de aprendizagem matemática, criando oportunidades para uma apropriação do conhecimento e o desenvolvimento de competências matemáticas avançadas.

3 METODOLOGIA

O presente trabalho se enquadra na modalidade de estudo propositivo, pois conforme Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 69), neste estudo, o pesquisador “não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica”. O caráter propositivo vem do objetivo principal de propor um roteiro alternativo para a disciplina de Matemática Aplicada dos CCE. Ainda, seu desenvolvimento segue uma abordagem qualitativa, em concordância com a perspectiva de Marconi e Lakatos (2017), pois um dos objetivos deste trabalho é a riqueza de dados descritivos, levando em consideração a complexidade da realidade e a contextualização da mesma.

Após a apresentação da proposta deste trabalho, foi desenvolvido um exercício de imaginação pedagógica, seguindo a perspectiva de seu idealizador, o educador e pesquisador dinamarquês, Ole Skovsmose. Segundo sua concepção, esse exercício é baseado na criatividade e capacidade de desenvolver e experimentar novas ideias e abordagens pedagógicas. Para o autor, essa capacidade é essencial na melhoria da educação e na criação de novos métodos de ensino.

A idealização de imaginação pedagógica surgiu da noção de *imaginação sociológica* desenvolvida por Wright Mills (apud SKOVSMOSE, 2015, p. 75), que propõe a concepção de alternativas para uma situação que está ocorrendo. Ao realizar uma imaginação sociológica voltada para a realidade escolar e à educação, Skovsmose (2015) usa a denominação de *imaginação pedagógica* que, de forma breve, é a elaboração de situações e práticas educativas alternativas para a realidade que se pretende pesquisar e/ou analisar.

A ideia de trabalhar com situações imaginadas e não com situações que já ocorreram, surgiu durante um seminário⁵ de doutorandos do qual Ole Skovsmose participou na África do Sul. Em discussões com colegas, dadas as situações do momento, se debateu sobre a ideia de pesquisar o que não existia, mas poderia vir a existir num breve espaço de tempo. Ao imaginar situações alternativas, também denominadas *situações imaginadas*, Skovsmose (2015) ressalta que é preciso deixar claro que estas podem ser vagas, flexíveis e parciais, e estar distantes da realidade em que estão inseridas, por incluir esperanças e aspirações educacionais. Apesar

⁵ O seminário foi um projeto colaborativo entre a Dinamarca e a África do Sul, realizado na cidade de Durban, em março de 1996. O encontro tinha como objetivo elaborar estudos numa realidade de pós-*apartheid* na África do Sul.

disso, esse exercício pode promover algo mais específico do que apenas especulações, o próprio autor enfatiza, que é importante imaginar alternativas específicas, gerais e ilusórias, e além destas qualidades do exercício de imaginação, essa forma de abordagem oferece algo distinto das pesquisas positivistas e empíricas, ela pode confrontar o que é dado (SKOVSMOSE, 2011, p.23).

Os trabalhos de Ole que expõem a imaginação pedagógica tem como foco o tema da educação matemática crítica. Entretanto, o próprio autor destaca que “uma exploração de possibilidades não precisa estar relacionada apenas a mudanças sócio-políticas: pode-se considerar possibilidades em situações cotidianas, possibilidades na vida pessoal dos alunos, possibilidades na sala de aula, *etc*” (Skovsmose, 2011, p. 22, *tradução nossa*).

Assim, a imaginação pedagógica se expande além do ambiente da educação matemática crítica, e tem potencial de ser aplicada em outras áreas de pesquisa da educação matemática. Os exercícios de possibilidades de um cenário são uma ferramenta útil para se analisar uma situação ou realidade que ainda não ocorreu, mas pode vir a acontecer. Como reforça o autor,

A discussão de cenários de investigação tem como propósito inspirar a imaginação pedagógica dentro de um contexto específico. Pode ser possível abrir um exercício específico para explorar posteriormente; considerar como um teorema matemático pode ser ilustrado por meio de diferentes exemplos; explorar estratégias matemáticas para determinados jogos; explorar quais exercícios podem surgir da leitura de um jornal; e explorar como o trabalho de projetos pode estar relacionado a problemas da vida real. Muitos professores e alunos contribuem para uma imaginação pedagógica ao ilustrar como as práticas de sala de aula podem ser diferentes. (Skovsmose, 2011, p. 22, *tradução nossa*)

Dessa forma, as possibilidades de aplicação dessa ferramenta são inúmeras, pode-se realizar exercícios de imaginação para diversas situações, ou até mesmo para uma mesma situação que se enquadre em diferentes realidades ou marcos temporais, dependendo do contexto e tipo de investigação que se pretende realizar. Contudo, para que a imaginação pedagógica aconteça e explore seus potenciais, o autor destaca que ela necessita tanto de combustível como de recursos para acontecer.

Recentemente diversos trabalhos têm sido desenvolvidos com a perspectiva da imaginação pedagógica. Kleemann e Petry (2020) desenvolveram um trabalho que buscou estabelecer relações interdisciplinares no processo de ensino-aprendizagem, integrando conceitos de Matemática e Física por meio de uma situação-problema. Eles propuseram uma

metodologia de ensino interdisciplinar e realizaram um exercício de imaginação pedagógica com professores de ambas as disciplinas no Ensino Médio. Nesse estudo, foram desenvolvidos objetos virtuais de aprendizagem (OVA) interativos usando o software GeoGebra, permitindo a visualização geométrica e algébrica de propriedades relacionadas à situação-problema. Os resultados deste trabalho evidenciaram características favoráveis na integração de OVA com situações-problema e o exercício de imaginação pedagógica realizado com os professores contribuiu para o aperfeiçoamento dos OVA e para aprimorar sua interação com os recursos tecnológicos disponíveis, visando a sua utilização em sala de aula.

Já em sua tese de doutorado, Lima (2022) teve como objetivo investigar o processo de imaginação pedagógica realizado por licenciandos em Matemática, no contexto da Educação Inclusiva. Os participantes foram convidados a imaginar aulas de matemática inclusivas, e os resultados mostraram que esse processo permitiu a criação de aulas acessíveis a todos os estudantes, promovendo colaboração, diálogo e investigação. A imaginação pedagógica também contribuiu para a formação de professores, estimulando reflexões sobre desigualdade, exclusão e preconceito, e proporcionando uma abordagem centrada no aluno, respeitando suas especificidades e condições. Dessa forma, a imaginação pedagógica se revelou uma ferramenta valiosa na formação de professores, possibilitando a criação de alternativas para aulas inclusivas e promovendo a justiça social no ambiente escolar.

A imaginação pedagógica, portanto, é entendida como uma capacidade dinâmica e criativa que permite aos professores e educadores desenvolver novas abordagens pedagógicas, levando em conta as necessidades e perspectivas dos estudantes e o contexto em que eles estudam. Essa capacidade é crucial para garantir que as práticas educacionais sejam eficazes e relevantes, e para contribuir para o desenvolvimento de novos conhecimentos e práticas educacionais.

4 PROPOSTA DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O CCE DE MATEMÁTICA APLICADA

A partir do marco teórico e de experiências prévias na Educação Básica, neste capítulo é apresentada uma proposta alternativa, utilizando a modelagem matemática, para o CCE de Matemática Aplicada. São utilizados ao longo da proposta os casos 2 e 3 da Tabela 1 de Barbosa (2001) e ao desenvolver projetos de modelagem matemática, optou-se em seguir as etapas sugeridas em Biembengut e Hein (2019).

A seguir são apresentados os tópicos e estrutura da proposta, que estão organizados como o modelo dos demais roteiros dos CCE criados pela Secretaria de Educação de Santa Catarina e disponíveis no Caderno 4 - Novo Ensino Médio: Componentes Curriculares Eletivos: Construindo e Ampliando Saberes (SANTA CATARINA, 2021). As 40 aulas previstas para o CCE foram divididas em Unidades Temáticas que, com exceção da primeira, intitulada “Mobilização”, foram nomeadas e idealizadas de acordo com as etapas de uma modelagem matemática sugeridas por Biembengut e Hein (2019).

TÍTULO DA PROPOSTA: RESOLVENDO PROBLEMAS COM MODELAGEM MATEMÁTICA

CARGA HORÁRIA: 40 horas/aula por semestre

ÁREAS DO CONHECIMENTO

- () Linguagens e suas Tecnologias
- (x) Matemática e suas Tecnologias
- () Ciências da Natureza e suas Tecnologias
- () Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
- () Ciência e Tecnologia
- () Componentes integradores

RESUMO

Usando a modelagem matemática, ao longo do semestre, os alunos serão desafiados a resolver problemas e situações do mundo real, aplicando conceitos matemáticos para entender e analisar as mais diversas situações. A modelagem é um assunto que pode ser muito significativo no Ensino Médio porque, além de ilustrar as aplicações da matemática, ajuda os alunos a desenvolver habilidades essenciais para o sucesso acadêmico e profissional, incluindo resolução de problemas, pensamento crítico, criatividade, trabalho em equipe e comunicação. Os alunos aprendem a aplicar a matemática para resolver problemas do mundo real e a entender melhor o papel dessa disciplina nas diversas áreas do conhecimento por meio de projetos práticos e interdisciplinares.

Assim, a metodologia de modelagem matemática, visa integrar a matemática com outras áreas do conhecimento e responder questionamentos comuns no dia a dia escolar de um professor de matemática, como “Onde eu vou usar a matemática, professor?” “A matemática está em tudo mesmo?” “Esse conteúdo serve pra alguma coisa?”

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Traduzir problemas do mundo real para uma linguagem matemática.
- Utilizar e solidificar conhecimentos matemáticos no desenvolvimento de modelos que representem uma determinada situação.
- Resolver modelos matemáticos aplicados em diferentes áreas.
- Compreender o conceito de modelagem matemática e como aplicá-la em problemas reais.
- Determinar ações e abordagens para criar um modelo matemático.
- Desenvolver habilidade de resolução de problemas e estimular a criatividade.
- Aprender a trabalhar em equipes.

JUSTIFICATIVA

Ao integrar a matemática com outras disciplinas e áreas do conhecimento, a modelagem ajuda os estudantes a compreender melhor o papel dessa disciplina na resolução de problemas

e na compreensão do mundo. Durante o desenvolvimento desse CCE os alunos poderão ver e viver na prática a aplicação da matemática em diferentes contextos, se aprofundar em conhecimentos matemáticos e de outras disciplinas, além de desenvolver habilidades pessoais e profissionais, realizando pesquisas e projetos interdisciplinares em parceria com seus colegas. Ao estudar modelagem matemática, os estudantes aprendem a criar modelos matemáticos que descrevem fenômenos do mundo real, a partir de dados, observações e teorias científicas. Tais experiências, tendem a colaborar com a introdução desses estudantes em rotinas que poderão vivenciar futuramente em contextos acadêmicos e/ou profissionais, bem como em sua vida pessoal e da comunidade, pois com habilidades de resolução de problemas desenvolvidas, esses estudantes terão capacidade de ser agentes transformadores em diferentes contextos, impactando em diversas frentes.

SOBRE OS(AS) ESTUDANTES

- Têm interesse em conhecer aplicações da matemática e buscam aprofundamento em conhecimentos dessa área.
- Demonstram curiosidade e disposição para pesquisa em diferentes áreas do conhecimento.
- São criativos e têm perfil orientado à solução.
- Abertos a desafios e trabalho em equipe.

COMPROMETIMENTO DOS(AS) PROFESSORES(AS)

- Interesse na área da Matemática Aplicada, preferencialmente com experiência em projetos interdisciplinares.
- Disposição para desafios e interação com diferentes conceitos e áreas do conhecimento.
- Utilizar ferramentas tecnológicas que abrangem métodos matemáticos de resolução e análise de dados (ex: planilhas eletrônicas).
- Mediar o trabalho em equipe, orientar trabalhos de pesquisa e promover um ambiente de empatia e cooperação entre os estudantes.

COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define 10 Competências Gerais da Educação Básica que devem ser desenvolvidas ao longo de toda a escolaridade básica. Abaixo foram selecionadas quatro competências focais, que se pretende desenvolver nos alunos durante este CCE. São elas:

2. Pensamento científico, crítico e criativo - Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

7. Argumentação - Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

9. Empatia e cooperação - Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Responsabilidade e cidadania - Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DAS ÁREAS DE CONHECIMENTO

A BNCC estabelece também competências e habilidades específicas para cada uma das áreas do conhecimento, bem como habilidades voltadas aos eixos estruturantes dos itinerários formativos. Abaixo são descritas as selecionadas para desenvolver ao longo deste CCE.

Competências específicas da área da Matemática e suas Tecnologias

Competência específica 1 - Utilizar estratégias para interpretar: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das ciências da natureza e humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência específica 2 - Propor ações para tomar decisões: Propor ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, ou delas participar, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, a implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da matemática.

Competência específica 3 - Utilizar estratégias para construir modelos: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Habilidades da área da Matemática e suas Tecnologias de acordo com a BNCC

(EM13MAT101) - Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às ciências da natureza que envolvam variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT301) - Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvam equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT302) - Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT314) - Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica, etc.).

(EM13MAT106) - Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro, etc.).

HABILIDADES ESPECÍFICAS DOS ITINERÁRIOS FORMATIVOS ASSOCIADAS AOS EIXOS ESTRUTURANTES

Investigação Científica

(*EMIFMAT01*) - Investigar e analisar situações problema identificando e selecionando conhecimentos matemáticos relevantes para uma dada situação, elaborando modelos para sua representação.

(*EMIFMAT02*) - Levantar e testar hipóteses sobre variáveis que interferem na explicação ou resolução de uma situação-problema, elaborando modelos com a linguagem matemática para analisá-la e avaliar sua adequação em termos de possíveis limitações, eficiência e possibilidades de generalização.

Processos Criativos

(*EMIFMAT05*) - Selecionar e mobilizar intencionalmente recursos criativos relacionados à Matemática para resolver problemas de natureza diversa, incluindo aqueles que permitam a produção de novos conhecimentos matemáticos, comunicando com precisão suas ações e reflexões relacionadas a constatações, interpretações e argumentos, bem como adequando-os a situações originais.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

1. Razão e proporção.
2. Porcentagem
3. Função polinomial do 1º grau.
4. Desvio Padrão.
5. Relação de peso e massa.

Observação: Os objetos do conhecimento citados se referem ao exemplo sugerido ao longo do cronograma a seguir, tais objetos podem ser alterados, caso o professor opte em trabalhar com diferentes exemplos e também ampliados, considerando que os alunos irão

desenvolver seus próprios modelos matemáticos. O mesmo ocorre em relação às competências e habilidades propostas.

ADAPTAÇÕES A CONTEXTOS LOCAIS

A proposta sugerida para o professor trabalhar com os alunos na etapa de interação e prática, pode ser alterada, ou até mesmo adaptada, de acordo com o contexto da escola e comunidade em seu entorno.

Quanto aos projetos que serão desenvolvidos pelos próprios alunos, sugere-se que os temas de cada um dos grupos tenha relação com a realidade e interesse dos mesmos, podendo ser relacionados a: problemas da escola, de suas famílias e/ou comunidade em que vivem; análises exploratórias relacionadas às áreas de conhecimento e profissões que os alunos almejam ou até mesmo relacionados às profissões de seus pais/responsáveis; pesquisas e solução de problemas voltadas às áreas de trabalho dos alunos, caso seja esta a realidade (ex.: plantio e agropecuária no caso de escolas do campo).

SUGESTÕES DE ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS

Este componente busca trabalhar com projetos de modelagem matemática, onde os estudantes são desafiados a investigar uma questão ou problema do mundo real e a identificar possíveis soluções que possam resolver ou mitigar esse problema. Ao longo da disciplina, para que as aulas ocorram de maneira eficiente e significativa aos alunos, é importante utilizar estratégias que estimulem a participação ativa dos estudantes e incentivem a aplicação prática dos conceitos matemáticos. Com isso, num momento inicial da disciplina, podem ser explorados alguns estudos de caso de modelos matemáticos, onde os alunos, sob coordenação do professor, acompanham o desenvolvimento completo e a solução de um modelo matemático.

Posteriormente, com o objetivo de envolver os alunos, praticar e aprender as etapas e procedimentos da criação de um modelo, a disciplina traz um foco na aprendizagem por projetos interdisciplinares. Essa abordagem estimula o desenvolvimento de habilidades e competências importantes, como a criatividade, a resolução de problemas, o gerenciamento de tempo e projetos, a comunicação, o trabalho em equipe, a autonomia, o pensamento crítico e a análise de dados e resultados.

RECURSOS, ESPAÇOS E MATERIAIS DIDÁTICOS

- Smartphones e/ou computadores com acesso à internet.
- Materiais de papelaria e/ou marcenaria para criação de protótipos.
- Sala de aula e outros espaços da escola.
- Livros didáticos e/ou técnicos de diferentes áreas do conhecimento.
- Livros de modelagem (artigos, material em geral...)
- Régua, calculadora, compasso e demais materiais que possam ser necessários.

Observação: Demais recursos podem ser mobilizados conforme ideação e planejamento dos grupos de trabalho.

AVALIAÇÃO

A avaliação é parte essencial do ambiente educacional e um aliado importante no processo de ensino-aprendizagem dos alunos, pois permite avaliar o progresso dos estudantes, identificar pontos de crescimento e as habilidades que estão sendo desenvolvidas efetivamente. É importante que além de claro e objetivo, o processo de avaliação seja formativo e aconteça ao longo de todo o componente curricular, que forneça observações e feedbacks aos alunos, viabilizando assim oportunidades de aprendizagem e desenvolvimento dos alunos.

Para este componente curricular, podem ser aplicados diferentes instrumentos avaliativos, como:

- avaliação diagnóstica dos conceitos e perspectivas sobre importância e aplicações da matemática, realizada no início e fim do componente curricular;
- participação nos momentos de interação, discussões em grupo e rodas de conversa;
- registros escritos do desenvolvimento dos modelos e aplicação dos conceitos matemáticos nos mesmos;
- apresentações orais em grupo, comentando o processo de modelagem elaborado;
- relatórios individuais sobre a experiência e análise das habilidades desenvolvidas;
- capacidade da elaboração de análises críticas dos resultados obtidos nos modelos;

- auto avaliação crítica dos alunos, pautada em elementos definidos pelo professor e espaço aberto para demais considerações dos alunos.

Ao longo de todo o componente curricular, inclusive durante os momentos específicos de avaliação, o professor ocupa o papel de mediador, auxiliando os alunos na compreensão e reconhecimento das habilidades desenvolvidas e pontos de atenção com potencial de aprimoramento, baseando-se nos objetivos de aprendizagem definidos para o CCE. Nessa perspectiva, o processo avaliativo deve ser integral e contínuo, onde além da avaliação realizada no final do CCE, o professor pode manter registros individuais de diferentes situações presenciadas ao longo de todo o componente.

Por fim, vale destacar que as devolutivas do CCE devem ser realizadas através de um parecer descritivo, em sintonia com as orientações elaboradas pela SED e enviadas para as escolas, englobando os apontamentos feitos pelo professor e pelos próprios alunos.

FONTES DE INFORMAÇÃO E PESQUISA

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? Veritati, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2019.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. Modelagem Matemática no ensino. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2019.

FURQUIM, Darcy. 7 Dicas para um Planejamento Escolar Eficiente. Disponível em: <<https://escolasdisruptivas.com.br/tecnologia-educacional/planejamento-escolar-eficiente/>>. Acesso em: 17 mar. 2023

LUCKESI, Cipriano C. Avaliação da Aprendizagem Escolar. 16 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

NAOMI, Aline. Aprendizagem Baseada em Projetos: entenda o que é e como funciona na prática. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/20407/aprendizagem-baseada-em-projetos-entenda-o-que-e-e-como-funciona-na-pratica?gclid=Cj0KCQjwn9CgBhDjARIsAD15h0CglUsv9sEj2ZNA8qPjQPS4FbXO8Ywq0LH3NWD0iLrGnhh_ipUWdCAaAnn4EALw_wcB>. Acesso em: 18 mar. 2023>.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado de Educação. Novo ensino médio: componentes curriculares eletivos: construindo e ampliando saberes: caderno 4 - portfólio dos(as) educadores(as). 2. ed. Florianópolis: Gráfica Coan, 2021.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado de Educação. Currículo base do ensino médio do território catarinense: caderno 2 – formação geral básica. 2. ed. Florianópolis: Gráfica Coan, 2021.

Tabela 2. Sugestão de percurso para o Componente Curricular Eletivo

UNIDADE TEMÁTICA	CARGA HORÁRIA	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES E TEMAS
Mobilização	1 aula	<p><u>Objetivo:</u> Debater com os alunos a importância da matemática e evidenciar a presença dela em nosso dia a dia.</p> <p><u>Resumo:</u> Para iniciar, o professor pode apresentar um vídeo ou imagem de algo cotidiano e conversar com os alunos, sobre onde eles veem a presença da matemática no vídeo/imagem. Debater com os alunos, qual seria o impacto de viver numa sociedade sem conceitos matemáticos, como isso afetaria o dia a dia dos alunos e suas famílias. Em grupos, os alunos podem buscar encontrar situações ou problemas que vivem (ou já viveram) que a matemática poderia contribuir na solução ou melhoria.</p> <p>Sugestão de Vídeo: Matemática para quê? Julia Jaccoud TEDxSaoPauloSalon (https://youtu.be/RwIEHyPqjfM)</p> <p>No fim, o professor distribui alguns textos base sobre modelagem matemática (sugestões para estes textos estão disponíveis nos apêndices deste trabalho).</p>

<p style="text-align: center;">Interação - Parte 1</p>	<p style="text-align: center;">2 aulas</p>	<p><u>Objetivo:</u> Conhecer o que é modelagem matemática e debater sobre sua importância.</p> <p><u>Resumo:</u> Com apoio dos textos base entregues no primeiro encontro, o professor pode separar a turma em grupos e distribuir os textos, para que nesta aula os mesmos já tenham realizado uma leitura prévia. Ao iniciar a aula, os alunos que leram os mesmos textos se reúnem e discutem sobre o que entenderam do assunto, podem pontuar os trechos mais importantes, bem como passagens que talvez não compreenderam. Por fim, cada grupo deve elaborar um mapa mental com o que consideram ser as principais informações de seu texto base. Um ou mais aluno(s) pode(m) ser eleito(s) para compartilhar com a turma sobre o que foi conversado em seu grupo e o mapa mental elaborado. O professor, enquanto mediador, pode fomentar perguntas ao longo das explicações dos alunos e criar no quadro um mapa mental da turma, reunindo as contribuições dos alunos. Fica de tarefa uma pesquisa de campo sobre o uso de matemática nas diferentes áreas e profissões.</p>
<p style="text-align: center;">Interação - Parte 2</p>	<p style="text-align: center;">3 aulas</p>	<p><u>Objetivo:</u> Reconhecer aplicações da matemática e da modelagem nas diferentes áreas do conhecimento.</p> <p><u>Resumo:</u> Após uma breve retomada dos conceitos adquiridos na aula anterior, os alunos apresentam as profissões e profissionais que consultaram em suas pesquisas, destacando a relação da matemática com as respectivas áreas. Pode ser realizada ainda uma pesquisa prévia sobre notícias, documentários e trabalhos científicos em que a matemática foi aplicada e essencial para ajudar a resolver problemas do mundo real. Criar uma conversa e/ou debate, sobre situações em que a matemática é importante: no dia-a-dia, área da saúde, áreas financeira/economia, pesquisa científicas, descrição e previsão de fenômenos, a matemática no desenvolvimento e evolução da tecnologia, entre outros.</p>

<p style="text-align: center;">Familiarização</p>	<p style="text-align: center;">3 aulas</p>	<p><u>Objetivo:</u> Esclarecer e explorar as diferentes etapas de um processo de modelagem.</p> <p><u>Resumo:</u> A partir do texto base, os alunos podem realizar uma leitura em pequenos grupos e inicialmente conversar sobre como é possível transformar um problema real em um problema matemático, debatendo sobre abstrações que são necessárias para formular um problema. Na sequência, o professor entrega as fichas de uma atividade, onde em cada ficha há uma ação e os alunos devem classificar cada uma destas ações de acordo com a etapa correta de uma modelagem matemática. Como forma de praticar os conhecimentos adquiridos, o professor sugere um tema e ao adentrar nas diferentes etapas e subetapas de um processo de modelagem para este tema, os alunos podem propor ideias de ações e atividades que consideram necessárias e úteis a serem realizadas em cada etapa, anotando as informações no quadro da sala de aula, num cartaz ou arquivo digital.</p>
<p style="text-align: center;">Familiarização & Matemática e Resolução - Parte I</p>	<p style="text-align: center;">12 aulas</p>	<p><u>Objetivo:</u> Praticar os conceitos aprendidos até o momento no desenvolvimento de um projeto de modelagem.</p> <p><u>Resumo:</u> A partir de uma temática definida pelo professor (que pode receber sugestões dos alunos), realizar um projeto de modelagem matemática. Nessa etapa, o professor orienta cada etapa e as ações que precisam ser realizadas em cada uma delas e traz os dados que serão analisados para desenvolver o modelo. Neste primeiro projeto, o objetivo é que os alunos acompanhem o professor na realização da modelagem, participando em todas as etapas, com ações específicas de como podem colaborar, mas é o professor que define o caminho e as decisões com a anuência dos alunos. Com isso, os alunos têm a oportunidade de vivenciar o desenvolvimento de um modelo sob coordenação de um professor,</p>

		criando habilidade e experiências necessárias, para posteriormente, em grupos, realizar seu próprio projeto.
Familiarização & Matemática e Resolução - Parte 2	16 aulas	<p><u>Objetivo:</u> Elaborar e resolver um modelo matemático, realizando todas as etapas de uma modelagem matemática.</p> <p><u>Resumo:</u> Os alunos se agrupam em equipes para executar todas as etapas de uma modelagem matemática. Nesta unidade, os membros de cada grupo são responsáveis por cada etapa, desde a definição do tema e captação de dados, até a elaboração e solução de um modelo. O professor acompanhará todos os grupos e terá o papel de orientador, auxiliando os alunos em suas dificuldades e colaborando para que ocorra a execução completa e satisfatória de todas as etapas.</p>
Apresentação	2 aulas	<p><u>Objetivo:</u> Compartilhar com a turma o projeto realizado e os resultados obtidos.</p> <p><u>Resumo:</u> Os grupos apresentam todo o projeto realizado, desde a escolha do tema aos resultados obtidos. A forma de apresentação pode ficar aberta aos alunos, mas é interessante fomentar a apresentação de registros das diferentes etapas, para que se destaque a evolução do problema e solução ao longo de seu desenvolvimento.</p>
Avaliação	1 aula	<p><u>Objetivo:</u> Partilhar as experiências vivenciadas e como ela colaborou em sua formação.</p> <p><u>Resumo:</u> Nesta aula de finalização da disciplina, pode ser realizada uma roda de conversa sobre como foi a experiência das atividades, como os alunos veem a matemática após a realização do projeto e o</p>

		<p>que aprenderam, de conteúdos matemáticos e habilidades sociais, ao realizar o trabalho em grupo. Podem entrar tópicos como: a proatividade e autonomia, o trabalho em equipe, o aprofundamento em tópicos de interesse, o planejamento, a habilidade de se adaptar. Por fim, após as conversas, fica de sugestão ao professor solicitar uma auto avaliação dos alunos, levando em conta os tópicos que surgiram ao longo da roda de conversa.</p>
--	--	--

5 IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA

Neste capítulo é apresentado o resultado de um exercício de imaginação pedagógica, seguindo os conceitos e sugestões da teoria de Ole Skovsmose, já mencionados no capítulo 3. A imaginação pedagógica foi dividida em Unidades Temáticas, seguindo a estrutura da proposta exposta no capítulo anterior e o roteiro de CCE sugerido pela SED - SC.

5.1 UNIDADE TEMÁTICA: MOBILIZAÇÃO (1 aula)

Para iniciar a aula, o professor pode fazer uma pergunta como: “*Por que estudar matemática?*”, que pode gerar as mais diversas respostas, tanto positivas: “porque precisamos ela no dia a dia”, “para fazer compras”, “para saber contar e quantificar produtos”, “porque em muitas profissões precisa ter esse conhecimento”, “para cuidar e saber usar nosso dinheiro”, “para resolver problemas”, “serve para calcular lucro ou prejuízo”. Como respostas negativas: “a maioria dos conteúdos que vemos em matemática nem é útil”, “eu não quero aprender matemática”, “o que aprendemos não tem aplicação no dia a dia”, entre outras.

As respostas imaginadas para a pergunta acima podem ou não acontecer na aplicação dessa proposta. Conforme destacado, em Skovsmose (2015), as situações imaginadas, neste caso, as respostas, podem ser vagas, flexíveis e parciais, ou seja, podem aparecer variações do que foi mencionado, considerando o recorte social e geográfico da turma.

A partir das respostas é possível conhecer a relação dos alunos com a matemática, que costuma variar entre algo intrigante, interessante e desafiador para uma parcela de alunos e chato, desnecessário e desestimulante para outros. É importante que nesse momento, o professor destaque algumas aplicações essenciais da matemática no cotidiano da sociedade e busque conectar a modelagem matemática e este CCE como uma nova visão para a matemática, e como uma possibilidade de ressignificar muitos dos conteúdos aprendidos ao longo destes anos que os alunos passaram na escola.

Após essa conversa inicial, o professor pode reproduzir um vídeo para os alunos, fomentando uma reflexão acerca da importância da matemática. Uma sugestão de vídeo é uma palestra das conferências independentes conhecidas como TED Talks, que aconteceu em São Paulo e foi ministrada por Julia Jaccoud, formada em Licenciatura em Matemática (IME-USP). Com cerca de 12 minutos, Julia busca responder uma pergunta que ouviu com frequência “Por

quê matemática?”. Ao responder essa pergunta ela passa por momentos da história da matemática, números primos, aplicações da matemática e destaca pontos de porquê estudar matemática é importante para todos. O vídeo é de livre acesso pela plataforma online YouTube, e pode ser encontrado no link: <https://www.youtube.com/watch?v=RwIEHyPqjfM>

Após finalizar a exibição do vídeo, o professor pode conversar com os alunos sobre o que acabaram de assistir e buscar debater sobre os tópicos abordados. Os debates podem girar em torno da principal pergunta do vídeo: “Por que matemática?”, mas, tanto o professor como alunos podem debater sobre perguntas como: “Por que aprender matemática se nem tudo que aprendemos usamos no nosso dia a dia?”, “Será que no futuro não será necessário usar conhecimentos e habilidades aprendidas nesse momento escolar?”, “Que habilidades cognitivas e sociais aprendemos, ou podemos aprender, ao estudar matemática?”, “Se até esse momento ninguém tivesse descoberto os números primos, seria possível criptografar as senhas? Seria de uma forma tão eficiente quanto a atual?”

Na sequência o professor pode lançar uma nova pergunta aos alunos, “Onde está a matemática?”, que podemos imaginar que tenha como respostas locais como o supermercado, a escola, os bancos, as construções, o computador e celular, entre outras situações, que podem surgir dos alunos ou do próprio professor. A partir destas possíveis sugestões dos alunos, o professor pode anotá-las no quadro (deixando um espaço ao lado ou abaixo de cada uma delas). Por exemplo, no caso do supermercado, pode ser anotado próximo a ele: preços, quantidades, combinações, formas geométricas, volume, unidades de medidas. Já no caso dos bancos, aparecem as moedas, conversão de unidades e diferentes tópicos de matemática financeira.

Quando as sugestões forem encerradas, ou o professor julgar suficiente, o grupo pode debater sobre como a matemática pode ser encontrada em cada um dos ambientes registrados no quadro. Essa atividade tem como objetivo destacar a presença da matemática em nosso cotidiano, seja em lugares óbvios e que estamos acostumados a vê-la, ou em ambientes e situações que não estamos habituados a conectar com essa área.

Próximo de finalizar a aula, o professor distribui os textos base, disponíveis na seção de apêndices (Apêndices A, B, C e D), para a próxima aula aos alunos. Os textos aqui sugeridos, foram baseados nas obras de Biembengut e Hein (2019); Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014) e Rigonatto (2023), com pequenas adaptações textuais. É opcional que já sejam formados grupos nesse momento ou que os textos sejam distribuídos de forma aleatória. Fica de tarefa para os alunos a leitura destes textos, para que possam ser discutidos na aula seguinte. Por fim, o professor pode comentar sobre como será a avaliação da disciplina e sob quais critérios os

alunos serão avaliados. Uma sugestão de tópicos e critérios de avaliação são destacados posteriormente na Unidade Temática de Apresentação, neste mesmo capítulo.

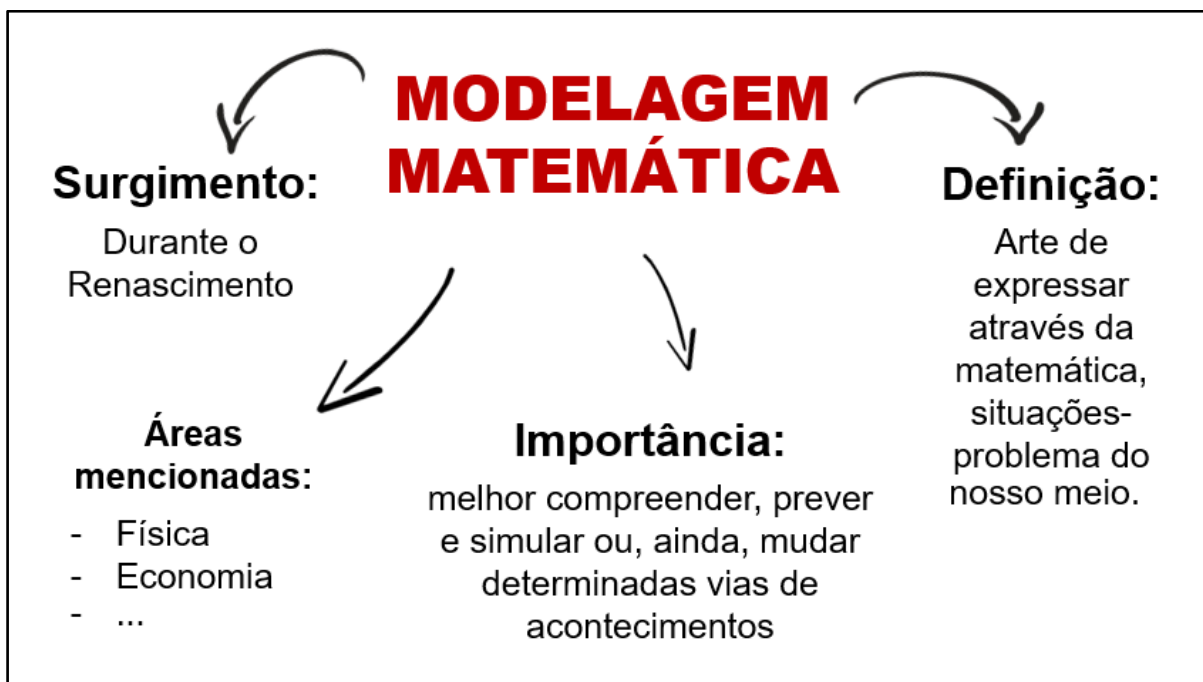
5.2 UNIDADE TEMÁTICA: INTERAÇÃO - PARTE 1 (2 aulas)

O professor inicia a aula agrupando as pessoas que leram os mesmos textos como tarefa de casa. Esses grupos irão trabalhar em conjunto ao longo dessa etapa.

Num primeiro momento os alunos podem organizar as anotações que fizeram sobre o texto, os trechos que destacaram, trechos que não compreenderam (podem discutir com os colegas para verificar se alguém consegue explicar). Caso necessário, o professor pode reservar um tempo para que os alunos releiam o texto.

Após cerca de 15 minutos, o professor pode distribuir cartolinas para que os alunos elaborem um mapa mental sobre modelagem matemática a partir das informações dos textos aos quais eles foram designados. Podem ser deixados no quadro, como sugestão, alguns tópicos para o mapa mental. Seguem exemplos: o que é modelagem, surgimento da modelagem, áreas que a modelagem pode estar inserida, exemplos de modelagem, entre outros.

Figura 5 - Sugestão de Mapa Mental para o texto base 1.



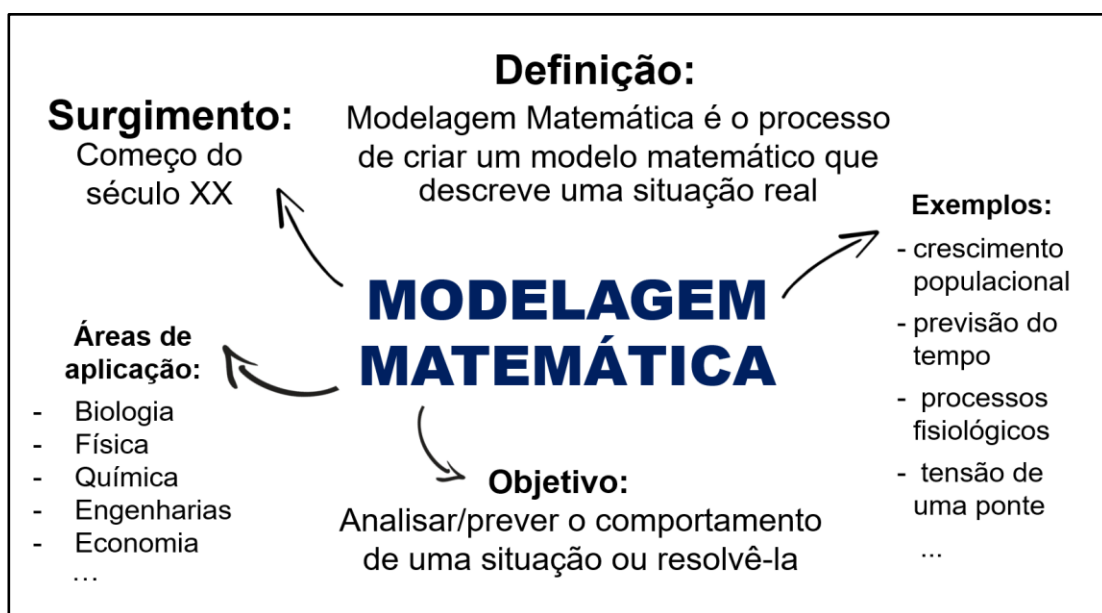
Fonte: Elaborado pelo autor.

Após finalizar o tempo estabelecido, os alunos se reúnem em uma roda e os grupos apresentam os mapas mentais criados. Ao longo de cada apresentação o professor pode criar um mapa mental no quadro com as principais contribuições de cada grupo. Ao longo dessa atividade é importante que o professor fomente a conversa entre os grupos e os diferentes pontos de vistas que estes podem ter construído a partir de seus textos de referência, além de promover debates que colaborem na construção dos conceitos e conhecimentos dos alunos acerca do tema.

Sugestões de questões para debate: Quando surgiu a matemática aplicada/modelagem matemática? Onde se usa modelagem matemática (áreas do conhecimento)? Há exemplos de modelos matemáticos no texto? Para que é importante a matemática? Dá pra aprender através da modelagem matemática? O que podemos aprender? O que seria um modelo matemático? Onde/como a matemática entra em modelagem? Como a modelagem contribui com outras áreas do conhecimento? Que áreas?

Após concluir as conversas sobre os textos base, o quadro da sala de aula pode ter um mapa mental com informações semelhantes às destacadas na imagem apresentada na Figura 6.

Figura 6 - Sugestão de Mapa Mental após discussões de todos textos base.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As respostas e exemplos dos tópicos acima foram baseadas nos textos base, lidos pelos alunos, porém, outras podem emergir nas discussões.

Antes de finalizar a aula, o professor pode deixar de tarefa uma pesquisa de campo sobre o uso de matemática nas diferentes áreas e profissões. Os alunos, de forma individual ou em duplas, devem conversar e/ou entrevistar profissionais sobre como a matemática está inserida

em seu trabalho cotidiano. Esses profissionais podem inclusive ser amigos ou familiares, como o pai, a mãe, irmãos, tios, etc.

5.3 UNIDADE TEMÁTICA: INTERAÇÃO - PARTE 2 (3 aulas)

Ao iniciar a aula, o professor retoma alguns conceitos da aula anterior. Caso o mapa mental tenha sido registrado de alguma forma, este pode ser exibido novamente para que os alunos lembrem o que já foi discutido. O professor pode então convidar os alunos a apresentarem as informações coletadas em suas conversas com profissionais de diferentes áreas. Na participação dos alunos, é de se imaginar que devam surgir informações e sugestões de aplicações da matemática acerca de várias atividades profissionais. Caso o professor tenha outras sugestões, não exploradas pelos alunos em suas apresentações, é importante que estas sejam destacadas, a fim de que os alunos ampliem seus conhecimentos e habilidades em visualizar e explorar a Matemática Aplicada.

Na sequência, os alunos se reúnem nos mesmos grupos da aula anterior e recebem então o desafio de pontuar situações que já experienciaram em sua vida (ou que costumam viver) em que não conseguem ver a presença da matemática, ou pelo menos não de forma tão clara e situações em que a matemática poderia ter contribuído com uma solução melhor. O objetivo é que os alunos possam pensar sobre situações em que a matemática aplicada, ou a modelagem matemática, possa estar inserida de alguma forma. Após um tempo de trabalho, os alunos compartilham com a turma seus pensamentos e experiências e debatem sobre a presença da matemática em suas vidas.

Após essa atividade, o professor pode apresentar alguns exemplos de modelagem matemática que apareceram na mídia ou em outros meios de comunicação, como forma de validar a matemática também como ferramenta para pesquisas científicas e colaboradora em questões sociais. Seguem abaixo algumas sugestões:

- **Equação de vida: como a matemática modela a pandemia?**, escrito por Raquel Vieira e publicado no Jornal da USP. Disponível em: <https://jornal.usp.br/universidade/equacao-de-vida-como-a-matematica-modela-a-pandemia/>. Acesso em: 9 abr. 2023.

- **Matemática a serviço do combate ao coronavírus**, publicado na seção de notícia da UFJF. Disponível em: <<https://www2.ufjf.br/noticias/2020/04/17/matematica-a-servico-do-combate-ao-coronavirus/>>. Acesso em: 9 abr. 2023.
- **Modelos Estatísticos na Previsão de Demanda**, por Caio Kurohane em 3 de novembro de 2022. Disponível em: <<https://blog.imam.com.br/modelos-estatisticos-na-previsao-de-demanda/>>. Acesso em: 11 jun. 2023.
- **Modelos matemáticos ajudam a prever propagação de doenças**, por Carla Monte Rey em 3 de dezembro de 2015. Disponível em: <<https://www5.usp.br/noticias/sociedade/modelos-matematicos-ajudam-a-prever-propagacao-de-doencas/>>. Acesso em: 11 jun. 2023.
- **A Modelagem Matemática para Previsão de Risco de Turnover⁶ em Empresas**, dissertação de Kainan Cremm Ramos, UNICAMP - Campinas, 2020. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~mac/db/2020-1S-177439.pdf>>. Acesso em: 16 jun. 2023.
- **Modelagem matemática: da evolução das espécies à agrometeorologia**, entrevista sobre modelagem matemática do projeto “Matemática no Ar”, com Priscila Coltri (CEPAGRI/Unicamp) e Flávia Marquitti (IFGW/Unicamp). Disponível em: <<https://www.oxigenio.comciencia.br/modelagem-matematica-da-evolucao-das-especies-a-agrometeorologia/>>. Acesso em: 16 jun. 2023.

5.4 UNIDADE TEMÁTICA: FAMILIARIZAÇÃO (3 aulas)

No início dessa aula, o professor divide novamente a turma em grupos, preferencialmente grupos distintos dos formados nas aulas anteriores, a fim de que os alunos trabalhem com outros colegas e conheçam novos perfis. Cada grupo recebe então uma cópia do texto base da etapa 3 (Apêndice E) e as fichas da atividade “Etapas de uma modelagem matemática” (Apêndice F).

Reunidos (sugere-se que seja em espaços diferentes, ex.: sala de aula, área de convivência, biblioteca ...) os alunos leem o texto base em grupo e na sequência analisam cada uma das fichas do jogo, seu objetivo é identificar em quais das etapas ([1] Interação, [2] Matematização e [3] Modelo Matemático) cada uma das ações se encaixa. Após o tempo

⁶ Índice relacionado à saída de funcionários de uma empresa (rotatividade).

estipulado, os alunos retornam para a sala de aula e todos, mediados pelo professor, discutem sobre cada uma das fichas e em que etapa elas foram alocadas. O professor, com o quadro separado em 3 partes, uma para cada etapa, anota as ações de cada etapa e confere as respostas dos alunos, realocando-as quando necessário e debatendo sobre eventuais dúvidas que possam aparecer.

Para praticar o raciocínio lógico de um processo de modelagem e para que os alunos fixem as etapas e ações, o professor propõe, que em conjunto, a partir de um tema pré-estabelecido, os alunos criem um cronograma de uma modelagem, elencando as ações que podem ser realizadas em cada uma das etapas.

Sugestão de tema: Nutrição Diária: o que e quanto comemos.

Novamente, o professor divide o quadro em 3 partes ([1] Interação, [2] Matemática e [3] Modelo Matemático), abaixo de cada uma das etapas, os alunos sugerem ações que podem ser tomadas para desenvolver um modelo matemático voltado ao tema sugerido. O professor anota as sugestões em cada etapa correspondente.

Vale ressaltar, que baseado nos princípios da imaginação pedagógica, as sugestões a seguir vem de uma situação imaginada, onde explora-se não como seria exatamente essa situação, caso fosse aplicada, mas, como ela poderia ser.

O professor pede inicialmente o objetivo da modelagem aos alunos. Algumas possíveis sugestões que podem aparecer são:

- criar um “cardápio” saudável para o dia a dia;
- definir o que e quanto comer durante um dia;

Com os objetivos definidos, estão descritas nos tópicos a seguir possíveis respostas e desdobramentos do que os alunos podem sugerir como ações:

- verificar se todas as pessoas comem a mesma quantidade de comida;
- pesquisar sobre as calorias dos alimentos, o que elas representam;
- encontrar a quantidade de caloria por alimento consumido;
- conhecer as composições dos alimentos, pois são formados de carboidratos, proteínas;
- definir o que comer durante um dia e as porções;
- calcular quantas calorias consumimos num dia “normal”;
- separar a quantidade de calorias por refeições;
- entre outras sugestões, que podem partir tanto dos alunos como do próprio professor.

Acima, descreve-se um recorte de tópicos que podem ocorrer ao questionar os alunos sobre ações possíveis. Ao longo de todas as sugestões realizadas, estas devem ser registradas no quadro branco, preferencialmente já separadas entre as três etapas de modelagem. Segue abaixo, uma possibilidade de como pode ficar o quadro, considerando a situação imaginada no exercício anterior:

Figura 7 - Quadro de sugestões de ações para cada etapa.

1. Interação	2. Matematização	3. Modelo Matemático
<ul style="list-style-type: none"> - pesquisar a quantidade de calorias para cada pessoa por dia - conhecer os grupos alimentares e a proporção necessária de cada um - associar alimentos do nosso dia a dia aos grupos alimentares - definir o que é uma alimentação saudável - entender a relação de calorias com energia para um corpo - compreender a distribuição de calorias pelas refeições diárias - agendar conversas/palestras com nutricionistas e profissionais da área - interpretar rótulos de alimentos que se pretende consumir - anotar o que se come num dia e posteriormente analisar se está dentro do sugerido 	<ul style="list-style-type: none"> - formular hipóteses sobre as quantidades diárias de cada grupo alimentar - determinar uma forma de calcular quantas calorias ingerir por refeição - relacionar a quantidade de calorias ingeridas com sexo, idade e peso - criar uma tabela de alimentos com as calorias correspondentes - automatizar o cálculo de calorias diárias com planilhas eletrônicas - criar planos alimentares de acordo com diferentes perfis e objetivos - aprender a usar planilhas eletrônicas - rever conceitos matemáticos necessários, como transformação de unidades, média, porcentagem - criar e/ou identificar padrões 	<ul style="list-style-type: none"> - submeter planos alimentares construídos a profissionais que podem validar e sugerir aperfeiçoamentos - testar seguir os planos alimentares e ver se os mesmos se adaptam a rotina - identificar limitações do modelo criado - mapear hábitos que podem ser considerados saudáveis - criar cartazes com recomendações para sugerir a alunos de outras turmas - divulgar o trabalho e conhecimentos adquiridos nas mídias sociais da escola

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, o professor pode, através de conversas em grupo, perguntar aos alunos eventuais dúvidas sobre as etapas de modelagem, dificuldades que sentiram, se perceberam pontos positivos e/ou negativos de fazer a atividade em grupo, entre outras considerações que podem aparecer.

5.5 UNIDADE TEMÁTICA: MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO - PARTE 1 (12 aulas)

Nesta Unidade Temática é explorado o processo completo de modelagem matemática, desde a definição do tema e análise dos dados até a elaboração e resolução do modelo. Foi seguindo o Caso II da Tabela 1, ou seja, o professor é responsável pela proposta do tema e, com os alunos, toma as principais decisões para obter o resultado. O tema sugerido, determinação da massa de uma mochila, já foi explorado em diferentes trabalhos, como destacada anteriormente em Sousa, Silva e Silva (2018) e no trabalho de Scapticci (2015). Entretanto,

nos trabalhos pesquisados, foram realizadas aplicações com alunos do Ensino Fundamental e os modelos elaborados eram distintos do que se propõe nesta unidade temática, provavelmente devido a etapas de ensino distintas.

Assim, podemos imaginar que ao iniciar a aula, o professor convida os alunos a participarem da jornada de construção de um modelo matemático onde, orientados majoritariamente por ele, os alunos irão realizar todas as etapas e ações para produzir um modelo. O objetivo dessa atividade é que esta primeira experiência orientada e supervisionada pelo professor, dê uma base de conhecimentos para que, posteriormente, os alunos desenvolvam seus próprios modelos.

O tema de sugestão para essas aulas, como mencionado acima, é: *Determinar a massa (em kg) ideal/máxima de uma mochila*. Esse tema é proposto por se tratar de algo cotidiano dos alunos e ser possível realizar ações práticas e validações posteriores, além de os resultados apresentarem potencial de causar um impacto no dia a dia dos alunos e em seu bem estar. Entretanto, é facultado ao professor escolher outro tema para o desenvolvimento de um modelo junto com os alunos.

É importante lembrar os alunos da diferença entre os termos massa e peso, trazendo estes conceitos sob a ótica da Física. Apesar de cotidianamente ser utilizado apenas o termo peso, cientificamente estamos nos referindo a massa. Enquanto massa é a medida que representa a quantidade de matéria que contém um objeto ou pessoa, o peso é uma força (e portanto, um vetor), cujo módulo é obtido pelo produto da massa pela aceleração da gravidade, de acordo com a segunda lei de Newton. Assim, se um aluno tem 65 kg, então essa é sua massa. Como na Terra, a aceleração da gravidade é de aproximadamente $9,82 \text{ m/s}^2$, o peso desse mesmo aluno seria:

$$P = \textit{massa} \cdot \textit{gravidade} = 65 \cdot 9,82 = 638,3 \text{ N (Newtons)}$$

Assim pode-se explorar questões interdisciplinares do modelo, principalmente relacionadas à Física, ao compreender o peso como uma grandeza vetorial, pois resulta da força de interação gravitacional entre os corpos, relacionando esse fato com o porquê de o peso variar de acordo com a massa e gravidade. A segunda lei de Newton também pode ser abordada, já que a mesma se refere à força como resultado do produto da massa pela aceleração de um corpo.

Seguindo com o tema, junto aos alunos, o professor define o(s) objetivo(s) do modelo a ser construído, que podem ser:

- elaborar uma forma de determinar a massa ideal (ou máxima) de uma mochila para os alunos (que pode ser individualizado, de acordo com a massa de cada aluno)
- selecionar quais e quantos materiais se encaixam na massa determinada.

5.5.1 OBJETIVO 1: Definir a massa ideal/máximo da mochila

Para que os alunos façam parte desse processo, o professor pode pedir sugestões de como iniciar. Baseado no que foi visto em aulas anteriores, pode-se imaginar que as respostas dos alunos devem indicar ações voltadas à etapa de Interação, como coletar informações e dados sobre o tema. Nesse sentido, é possível que seja recomendado pesar as mochilas e os alunos com uma balança, para obter suas respectivas massas em quilos.

Caso não seja sugerido pelos alunos, é importante que o professor busque incentivá-los que as pesagens sejam separadas em grupos: os alunos que acham que a mochila está leve, com massa aceitável ou pesada demais. Como a partir das pesagens terão disponíveis várias informações, que devem apresentar uma certa variação, é possível que os alunos calculem a média dos dados de cada grupo e que avaliem seu desvio padrão. Os resultados podem ser organizados numa tabela como a apresentada abaixo:

Tabela 3. Massa média e desvio padrão das pesagens das mochilas (dados fictícios).

GRUPO	MASSA MÉDIA DA MOCHILA (em kg)	DESVIO PADRÃO MASSA MOCHILA (em kg)
Mochila com peso considerado leve	3,9	0,3
Mochila com peso considerado aceitável	6,1	0,35
Mochila com peso considerado exagerado	6,7	0,5

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com as informações da tabela 3, os alunos podem criar intervalos médios de classificação para a massa das mochilas de sua turma, usando aproximações e arredondamentos, ao considerar também o desvio padrão:

Figura 8 - Massa média e desvio padrão das pesagens das mochilas.

<i>Mochila com peso leve:</i>	até 4,2 kg
<i>Mochila com peso aceitável:</i>	de 4,2 kg a 6,2 kg
<i>Mochila com peso exagerado:</i>	acima de 6,2 kg

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 8, utilizou-se os desvios padrões da mochila com peso leve e da mochila com peso exagerado para construir os intervalos destacados. Para o intervalo de mochila com peso leve sugere-se o peso, adicionado do desvio padrão, enquanto para o peso exagerado, utilize-se o peso subtraído do desvio padrão dessa categoria. A estratégia utilizada para esse quadro pode trata-se de uma sugestão e o professor, junto aos alunos, podem optar por outras formas de construí-la.

Vale ressaltar, que existe a possibilidade de os alunos terem conhecimento apenas sobre a média de dados numéricos, mas não do desvio padrão. Neste caso, o professor separa um espaço na aula, para explicar o conceito de desvio padrão e como ele pode ser calculado. Como exemplo de aplicação e atividade para os alunos, pode ser utilizado a própria massa das mochilas da turma. (Sugere-se que o professor calcule o desvio padrão para dados fictícios, separe os alunos nos grupos para o cálculo do desvio padrão dos dados obtidos).

A partir dessa informação, é possível tentar encontrar uma relação entre a massa da mochila e a massa dos alunos, por exemplo. Assim como foi calculada a massa média de todas mochilas, os alunos podem fornecer sua massa, em quilos, e calcular a massa média da turma. Com essas informações, o professor pode perguntar aos alunos: “Como podemos relacionar esses valores? Que medida matemática costumamos usar?” É provável que algum aluno sugira o uso de porcentagem, já que é uma medida bastante presente nas aulas de matemática. Com isso, é possível calcular a relação percentual entre a massa média das mochilas e dos alunos. No exemplo abaixo, estão sendo considerados apenas aqueles que classificaram a massa da mochila como aceitável:

$$P = \frac{p_m}{p_a} \cdot 100$$

onde P é a porcentagem média do peso da mochila em relação ao peso dos alunos, p_m é o peso médio das mochilas e p_a é o peso médio dos alunos.

$$\frac{p_m}{p_a} \cdot 100 = \frac{6,1}{64} \cdot 100 = 0,0953 \cdot 100 = 9,53 \%$$

Caso ao longo desse processo não seja sugerido a pesquisa de normativas sobre a massa ideal de uma mochila, o professor pode sugerir aos alunos que realizem pesquisas de matérias e notícias que mencionam o tema. Para essa atividade, se for a realidade dos alunos, estes podem usar o próprio celular para encontrar as informações. Caso tenha disponível na escola, o professor também pode reservar tablets para a pesquisa ou até mesmo o laboratório de informática. Algumas matérias disponíveis:

- **O peso das mochilas.** Portal SNS 24. Disponível em: <https://www.sns24.gov.pt/guia/o-peso-das-mochilas/>. Acesso em: 12 mai. 2023.

- **Como carregar mochilas e qual peso ideal?** - Clínica CEOOT Disponível em: <https://www.clinicaceoot.com.br/como-carregar-mochilas-e-qual-peso-ideal/>. Acesso em: 12 mai. 2023.

- **Qual o peso máximo e a forma correta de usar as mochilas escolares?** - Portal G1. Disponível em: <https://g1.globo.com/pr/parana/especial-publicitario/hospital-pequeno-principe/pequeno-principe-um-hospital-completo/noticia/2022/02/11/qual-o-peso-maximo-e-a-forma-correta-de-usar-as-mochilas-escolares.ghtml>. Acesso em: 12 mai. 2023.

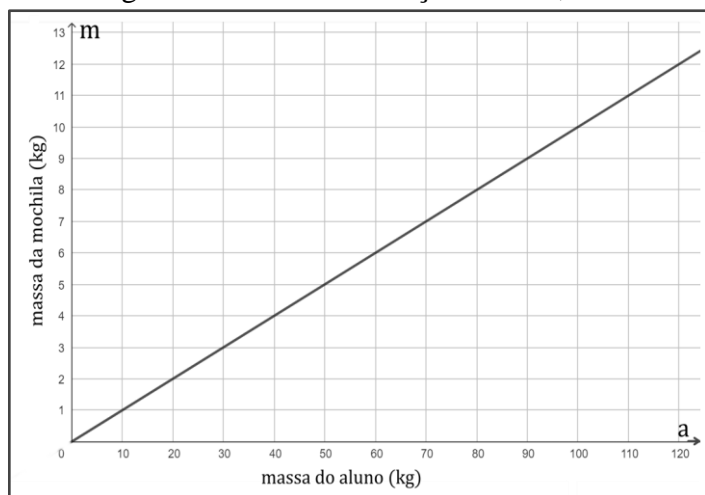
- **Perigos da mochila pesada** - Brasil Escola - UOL. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/saude-na-escola/perigos-mochila-pesada.htm>. Acesso em: 12 mai. 2023.

A partir de notícias, será possível identificar, que segundo recomendações da Sociedade Brasileira de Ortopedia e Traumatologia e da própria Organização Mundial da Saúde, a massa da mochila não deve ser maior que 10% da massa do aluno. Tal informação pode se aproximar dos dados coletados durante as atividades práticas com os alunos. No caso sugerido acima, teve uma variação de aproximadamente 0,5 %.

Novamente, caso não seja sugerido por nenhum aluno, o professor pode instigá-los a pensar com que conteúdo matemático pode ser relacionado a relação entre as variáveis massa da mochila e massa dos alunos. Imagina-se, que com a provocação do professor, algum aluno lembre de função afim e a relação proporcional entre variáveis, concluindo que este pode ser um exemplo de função linear. Com isso, a turma pode criar a função: $m = 0,09 \cdot a$ (com os dados coletados pela turma) ou $m = 0,1 \cdot a$ (dados coletados das notícias e recomendações), onde m representa a massa da mochila e a representa a massa do aluno. Assim, tem-se um modelo matemático bem descrito, capaz de calcular a massa máxima de uma mochila de acordo

com a massa de um determinado aluno. Para explicitar melhor a relação de proporcionalidade, o professor pode junto aos alunos construir o gráfico dessa função no quadro.

Figura 9 - Gráfico da função $m = 0,10a$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, para validar os resultados encontrados, pode ser sugerido que os alunos testem a função, calculando a massa ideal/máxima que cada um deveria carregar, considerando a sua massa individual. Para garantir que a massa da mochila esteja de acordo com as recomendações, quem não tiver balança em casa pode conferir com alguma da escola, a mesma utilizada para as atividades desenvolvidas previamente.

Após alguns dias de teste, os alunos podem compartilhar suas impressões e opinar se estão de acordo com os resultados encontrados. Caso nessa turma tenha alunos que haviam classificado suas mochilas como pesadas demais, podem compartilhar se agora, com uma massa adequada, é aceitável carregá-las. Entretanto, se houver divergências nas opiniões e grande parte dos alunos refutar os resultados obtidos, é preciso retomar algumas etapas anteriores, mudando ou ajustando algumas hipóteses, coeficientes etc.

5.5.2 OBJETIVO 2: Selecionar quais e quantos materiais se encaixam na massa determinada pelo modelo anterior

Para aprofundar mais o tema e criar um modelo mais sofisticado, de como podem ser definidos os materiais que se encaixam na massa ideal para a mochila, os alunos podem criar uma lista com os materiais que costumam trazer para a escola e sua massa média. Nesse momento, podem surgir algumas discussões entre os alunos, motivadas ou não, pela sugestão

do professor, como o fato de nem todos os materiais apresentarem a mesma massa e poderem apresentar um desvio padrão grande, se for considerado caderno de uma matéria com cadernos de mais matérias, cadernos que tem ou não tem capa dura, entre outras variações. Nesse ponto, é importante que seja lembrado o texto base sobre as etapas de modelagem, e como em alguns momentos é necessário realizar uma simplificação das variáveis.

Em acordo com os alunos, é de se imaginar que a turma chegue em conclusões como: separar os cadernos de diferentes quantias de matérias, mas dentro dessa separação manter cadernos com diferentes tipos de capas e demais componentes, pois estes influenciariam menos numa variação de massa média.

Acima é destacado apenas um exemplo de debate que pode surgir. Outros, ou até mesmo novos, desdobramentos podem surgir a partir dos comentários dos alunos e sugestões do professor. Enquanto responsável nesse projeto, o professor pode orientar os alunos para que cheguem a ideia de tabelar as massas médias dos materiais que carregam em suas mochilas, como a tabela 4:

Tabela 4. Massa média dos materiais dos alunos.

MATERIAL	MASSA MÉDIA (g)
Mochila Vazia	1300
Livro Didático	682
Livro de Literatura	387
Caderno (1 matéria)	375
Caderno (10 matérias)	884
Estojo*	510
Pasta de Trabalhos	490
Lanche/Lancheira	752

Fonte: Elaborado pelo autor.

*O estojo compreende: lápis, canetas, borrachas, apontadores ... Nesse caso foi reunido numa única variável a fim de reduzir a quantidade de variáveis e facilitar o processo.

Com a massa média de cada um dos materiais, os alunos podem escolher diferentes caminhos e ambientes para automatizar o cálculo de quantos e quais materiais poderiam ser carregados numa mochila, de acordo com a massa de cada aluno.

Por exemplo, um aluno com massa de 65kg, deveria ir à escola com uma mochila, de até 6,5kg. Este poderia, portanto, levar além da mochila (1300 gramas), os seguintes materiais: 2 cadernos de uma matéria (750 gramas), 1 caderno de dez matérias (884 gramas), 1 estojo (510 gramas), 2 livros didático (1364 gramas), sobrando ainda uma margem para outros materiais que pode receber na escola. É importante reforçar a importância de unificarem as unidades de medidas para fazerem as devidas comparações.

Para facilitar o processo de determinar os materiais e testar o que seria possível, os alunos podem automatizar esses processos através de planilhas eletrônicas (outra sugestão é o desenvolvimento de aplicativos, como o MIT App Inventor).

Criando um modelo simples de automatização em planilhas eletrônicas (exemplo: Excel, Calc, Google Planilhas...), os alunos podem criar tabelas como as do exemplo abaixo:

Figura 10 - Possível desenvolvimento com planilhas eletrônicas - massa aceitável.

DETERMINAÇÃO DA MASSA DE UMA MOCHILA			
Massa do aluno:	65,23 kg		
Materiais:	Quantidade	Massa Média (em g)	Total por material (em g)
Mochila:	1	1300	1300
Caderno (1 matéria):	5	375	1875
Caderno (10 matérias):	0	884	0
Estojo:	1	510	510
Livro Didático:	1	682	682
Livro Literatura:	1	387	387
Pasta de Trabalhos:	1	490	490
Lancheira:	0	750	0
MASSA TOTAL DOS MATERIAIS:			5244
CLASSIFICAÇÃO MASSA DA MOCHILA:			Massa aceitável

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11 - Possível desenvolvimento com planilhas eletrônicas - massa próximo do limite.

DETERMINAÇÃO DA MASSA DE UMA MOCHILA			
Massa do aluno:	65,23 kg		
Materiais:	Quantidade	Massa Média (em g)	Total por material (em g)
Mochila:	1	1300	1300
Caderno (1 matéria):	2	375	750
Caderno (10 matérias):	1	884	884
Estojo:	1	510	510
Livro Didático:	2	682	1364
Livro Literatura:	1	387	387
Pasta de Trabalhos:	1	490	490
Lancheira:	1	750	750
MASSA TOTAL DOS MATERIAIS:			6435
CLASSIFICAÇÃO MASSA DA MOCHILA:			Cuidado, massa próxima do limite.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 - Possível desenvolvimento com planilhas eletrônicas - massa acima do limite.

DETERMINAÇÃO DA MASSA DE UMA MOCHILA			
Massa do aluno:	65,23 kg		
Materiais:	Quantidade	Massa Média (em g)	Total por material (em g)
Mochila:	1	1300	1300
Caderno (1 matéria):	0	375	0
Caderno (10 matérias):	2	884	1768
Estojo:	1	510	510
Livro Didático:	2	682	1364
Livro Literatura:	1	387	387
Pasta de Trabalhos:	1	490	490
Lancheira:	1	750	750
MASSA TOTAL DOS MATERIAIS:			6569
CLASSIFICAÇÃO MASSA DA MOCHILA:			Massa acima do ideal

Fonte: Elaborado pelo autor.

Abaixo, segue imagem com as fórmulas e automatizações utilizadas nos exemplos acima, como imaginação do que pode ser desenvolvido pelo professor com os alunos. Neste

caso, a tabela e regras para criação das células foi construída no Google Planilhas, ferramenta gratuita e de uso aberto.

Figura 13 - Fórmulas para criação de tabela em planilhas eletrônicas.

	A	B	C	D
1	DETERMINAÇÃO DA MASSA DE UMA MOCHILA			
2				
3	Massa do aluno:	65,23 kg		
4				
5	Materiais:	Quantidade	Massa Média (em g)	Total por material (em g)
6	Mochila:	1	1300	=B6*C6
7	Caderno (1 matéria):	0	375	=B7*C7
8	Caderno (10 matérias):	2	884	=B8*C8
9	Estojo:	1	510	=B9*C9
10	Livro Didático:	2	682	=B10*C10
11	Livro Literatura:	1	387	=B11*C11
12	Pasta de Trabalhos:	1	490	=B12*C12
13	Lancheira:	1	750	=B13*C13
14				
15	MASSA TOTAL DOS MATERIAIS:			=SUM(D6:D13)
16				
17	CLASSIFICAÇÃO MASSA DA MOCHILA:			=IFS(D15<9%*(B3*1000); "Massa aceitável"; D15<10%*(B3*1000); "Cuidado, massa próxima do limite."; D15>=10%*(B3*1000); "Massa acima do ideal")

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim como no primeiro modelo, como forma de validar este, os alunos podem testar por alguns dias, selecionar os materiais a partir da tabela apresentada na Figura 13 e anotar a satisfação relacionada à massa total da mochila que carregaram. Outra forma de validação é selecionar os materiais que irão compor a mochila e comparar a massa sugerida pelo modelo com a massa real. É indispensável destacar que os valores não serão totalmente iguais, pois foram realizadas aproximações através da massa média dos materiais. Identificar as limitações do modelo faz parte do processo e se enquadra nas ações sugeridas para a etapa 3 (Modelo Matemático).

Como forma de divulgar os resultados encontrados, imagina-se que os alunos podem criar cartazes sobre o tema para expor nos corredores e áreas de convivência da escola. Pode-se destacar a massa máxima que se deve carregar na mochila, através de tabelas criadas a partir da função, com exemplos do tipo: Se a massa do aluno for de 65 kg então a massa máxima da mochila deverá ser de 6,5kg.

Outro cartaz pode sugerir os materiais, e as respectivas quantidades, que costumam se adequar ao peso das mochilas dos alunos. Explanar através de exemplos podem deixar o conteúdo mais acessível e de fácil compreensão para os alunos que não participaram do CCE.

Analisando os conteúdos que podem ser trabalhados, discutidos, ou usados para a solução do modelo imaginado, pode-se mencionar: média aritmética, desvio padrão, razão e proporção, porcentagem, função afim e função de várias sentenças. Destaca-se ainda as discussões referentes aos tópicos de Física e o uso de planilhas eletrônicas. É importante o professor ficar atento às possibilidades de interdisciplinaridade do modelo e buscar conduzir os grupos para que as explorem ao máximo, pois a modelagem matemática traz esse fator intrínseco a sua prática. Em momentos de relação dos conteúdos matemáticos com as demais áreas, e também com experiências prévias que os alunos possam ter, como evidencia a teoria sociocultural de Vygotsky, eles são capazes de gerar mais significado e potencializar seu processo de aprendizagem.

5.6 UNIDADE TEMÁTICA: MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO - PARTE 2 (16 aulas)

Nesta unidade temática os alunos irão desenvolver seus próprios modelos matemáticos, vivenciando todas as etapas de uma modelagem matemática, mas agora como responsáveis por cada decisão. Aqui o objetivo é que seja uma prática do Caso III da Tabela 1, onde todas as etapas sejam imaginadas e definidas pelos próprios alunos, mas seguindo com apoio e orientação do professor.

Para formar os grupos o professor pode separar a turma ou os próprios alunos podem se agrupar. O importante é que tenha conexão entre os membros de cada grupo, seja por interesse no mesmo tema ou por afinidade pessoal.

Em grupos os alunos definem o tema e as ações para cada etapa, realizando-as em sala. Uma sugestão inicial é de que os alunos busquem realizar modelos com temas voltados à pesquisa que fizeram no início da disciplina, na qual conversaram/entrevistaram profissionais para buscar entender como a matemática está presente em suas profissões. Pode-se imaginar, entretanto, que um ou mais grupos, não tenham interesse em se manter no tema das profissões que pesquisaram ou apresentem dificuldade na escolha do tema, o professor pode então sugerir alguns aos alunos, como:

- eficiência energética: em quanto tempo se paga um investimento em energia solar;

- modelagem financeira: simular um pequeno negócio onde os alunos devem fazer levantamento dos custos, da margem de lucro e determinar por quanto deveriam vender o produto;
- otimização de espaço: medir o comprimento e largura de uma área de gramado e calcular a quantidade de sementes necessárias para cobrir a área;
- reaproveitamento de água da chuva: utilizando as previsões pluviométricas e o uso de cisternas para captar uma quantidade determinada;
- previsão de custos: a partir de um projeto simples, buscar prever qual o custo médio para a construção de uma casa.

Para que o trabalho se concretize e os alunos concluam seu desenvolvimento com um modelo matemático, o professor pode sugerir a elaboração de um cronograma, com as ações previstas e suas respectivas datas de realização. Desta forma, os alunos estruturam seu plano de trabalho e definem um roteiro, deixando o processo claro e organizado, até mesmo para acompanhamento e orientação do professor. Nesse cronograma é importante que esteja bem definida a data de conclusão. Neste momento, se julgar necessário, o professor pode também retomar o método avaliativo da disciplina, para que fique claro aos alunos sob que critérios os alunos serão avaliados, tanto em grupo quanto individualmente.

5.7 UNIDADE TEMÁTICA: APRESENTAÇÃO (2 aulas)

Após concluir os projetos de modelagem, os alunos se reúnem para apresentar o modelo desenvolvido, os resultados obtidos e comentar a experiência. Sugere-se que a apresentação dos alunos, orientada previamente pelo professor, siga uma narrativa que destaque a jornada vivenciada pelos alunos. Alguns tópicos que podem ser sugeridos são:

- Porque o grupo escolheu esse tema?
- Qual a familiaridade com o tema antes de iniciar o projeto?
- Quais ações foram realizadas na etapa de Interação?
- Quais foram os principais meios de buscas para ampliar o conhecimento do grupo acerca do tema?
- Ao formular o problema, quais conceitos/conteúdos matemáticos foram abordados?

- Já tinham o conhecimento matemático para formular e resolver o modelo ou tiveram que buscar?
- Após a resolução do modelo, ampliaram os conhecimentos matemáticos e como utilizá-los ou se manteve o mesmo?
- Quais ferramentas foram necessárias (desenhos técnicos, calculadora, computador, celular, trena métrica, balança ...)
- Qual a interpretação da solução obtida do modelo? Para quem e como ela pode ser útil?
- Tiveram que adaptar o modelo após uma primeira solução ou logo deu certo?
- Fizeram uma validação? De que forma?
- Quais ações realizadas nas etapas de Matematização e Modelo Matemático?
- Quais as principais dificuldades encontradas? E os principais aprendizados?

A avaliação realizada pelo professor, além de processual, deve ser formativa. Assim, apesar de nesta aula ser a culminância da realização dos projetos, o professor pode dar feedbacks aos alunos e grupos ao longo de todo o processo. Os registros realizados durante o processo também auxiliarão o professor nesse momento final.

É importante ressaltar que as sugestões a seguir são flexíveis e adaptáveis de acordo com a realidade da sala de aula e as normas de cada escola. Para elaborar o parecer descritivo o professor pode ajustar os critérios de avaliação conforme necessário, de modo a contemplar diferentes níveis de desempenho, tais como regular, satisfatório e ótimo, ou até mesmo convertê-los em pontos ou avaliações numéricas, caso seja apropriado.

Os pontos que podem ser considerados na avaliação final dos alunos estão divididos em duas partes distintas. A primeira parte concentra-se principalmente nos conhecimentos e habilidades científicas desenvolvidos pelos alunos, enquanto a segunda parte visa avaliar as habilidades sociais e o processo de trabalho em equipe, proporcionando uma visão abrangente e adaptável da avaliação.

PARTE 1: Conhecimento Matemático

- aplicação correta dos conhecimentos matemáticos;
- exploração de conhecimentos extraclasse;
- raciocínio lógico do modelo e solução;
- registros e organização da construção do modelo e resolução do mesmo;
- interpretação da solução do modelo;

- análise crítica dos resultados obtidos.
- comunicação clara dos resultados encontrados;
- aplicabilidade do modelo;
- contribuição individual no processo.

PARTE 2: Trabalho em Grupo

- cooperação da equipe de trabalho;
- comunicação assertiva e respeitosa entre os alunos;
- organização das etapas entre o grupo;
- liderança e responsabilidade durante as etapas;
- envolvimento nas atividades realizadas;
- habilidades de empatia e colaboração;
- autonomia do grupo na busca informações;
- cumprimento dos prazos estabelecidos.

5.8 UNIDADE TEMÁTICA: AVALIAÇÃO (1 aula)

Ao finalizar a disciplina, na última aula os alunos podem se reunir em uma roda de conversa e compartilhar como foram suas experiências. O professor pode iniciar sugerindo algumas perguntas:

- O que vocês imaginavam que era modelagem matemática antes da disciplina e agora, após finalizar, tem alguma relação?
- Quais eram as expectativas de vocês com a disciplina? Elas foram atendidas?
- Se tornou mais fácil ver e “acreditar” nas aplicações da matemática?
- O que foi possível aprender com a apresentação dos colegas durante a aula anterior?
- Como foi a experiência de fazer uma pesquisa matemática?
- E de trabalhar em grupo nesse projeto?

Esse momento também pode ser oportuno para o professor repassar feedbacks aos alunos. Onde pode ser abordado: o comportamento dos alunos (e do grupo) durante as aulas e principalmente durante a realização do trabalho de modelagem, das apresentações, da postura dos alunos, dos pontos que mostraram autonomia e maturidade, dos pontos que podem melhorar num futuro projeto, entre outras observações que o professor tenha registrado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta deste trabalho foi apresentar uma nova possibilidade para o CCE de Matemática Aplicada, presente nos Itinerários Formativos do Novo Ensino Médio. Enquanto a proposta já existente para esse componente aborda o conteúdo de áreas e planejamento de uma planta baixa, buscou-se nessa nova abordagem, explorar os conceitos da modelagem matemática. O objetivo do roteiro elaborado foi de estudar com os alunos essa metodologia, desde conceitos mais teóricos à sua prática, com a finalidade de que fosse possível mostrar diferentes aplicações aos alunos, trazer mais significância da matemática em suas vidas e colaborar com habilidades de resolução de problemas.

Nas primeiras unidades temáticas da proposta foi possível planejar atividades que exploram o conceito e definição de modelagem matemática, sua presença nas diferentes áreas, mesmo que nem sempre com esse rótulo, e as etapas de um processo de modelagem. Com ações voltadas a estes objetivos e as atividades de pesquisa de campo sugeridas, é possível evidenciar a relação da matemática com temas cotidianos e com o futuro dos alunos.

A unidade de matematização e resolução foi segmentada em duas partes. Apesar de em ambas serem construídos modelos matemáticos, na primeira o professor conduz todo o processo, levando em conta as contribuições e sugestões dos alunos. Nessa fase, o intuito foi de que os alunos vivenciem todo o processo de modelagem, mas como esta pode ser uma de suas primeiras experiências com a metodologia, o professor realiza a prática e colabora no processo lógico de elaboração de um modelo, dando suporte para que na segunda parte, de forma mais independente, os alunos construam seus próprios modelos. No exercício de imaginação pedagógica explorou-se a relação da massa de uma mochila com o peso do aluno. O tema foi escolhido pois permite trabalhar com os alunos, conceitos que eles já devem conhecer, como razão e proporção, porcentagem e funções polinomiais do 1º grau e ampliar conhecimentos de estatística, como o desvio padrão. Ainda, tal tema deixa evidente que a matemática está em ações cotidianas de suas vidas, como determinar se o material escolhido para levar a escola não ultrapassa uma massa que pode prejudicar a sua postura e coluna. Ressalta-se, porém, tratar-se apenas de uma sugestão, sendo que o professor tem a autonomia de desenvolver um outro modelo com os estudantes.

É na segunda parte que, em grupos, os estudantes desenvolvem todas as etapas de um processo de modelagem, seguindo o tema definido por eles mesmos. Ao realizar os trabalhos em grupos, se potencializa novos aprendizados, pois conforme a teoria sociocultural de

Vygotsky propõe, é em espaços que favorecem a interação entre os indivíduos que se constrói o primordial do processo: os esforços colaborativos que promovem a construção conjunta do conhecimento. Assim, no desenvolvimento de seus projetos, em colaboração, os alunos aplicam diversos conceitos matemáticos, abrindo espaço para ampliar o que já conhecem e expandir para novos conhecimentos, além de novas compreensões acerca do tema escolhido. É importante destacar, conforme mencionado por Biembengut e Hein (2019) e Bassanezi (2009), que a modelagem matemática também favorece o amadurecimento em habilidades pessoais e sociais, como a resolução de problemas, análise crítica, autonomia, colaboração, argumentação, entre outras.

O exercício de imaginação pedagógica contribuiu com a proposta apresentada, ao deixar organizadas e detalhadas as atividades sugeridas e explorar as possibilidades de aplicação do percurso recomendado. Assim, um professor com a intenção de trabalhar modelagem matemática no CCE de Matemática Aplicada, ao encontrar este trabalho, além do percurso e ações sugeridas, irá ter a sua disposição: textos base sobre modelagem matemática, organizados e adaptados numa linguagem voltada a alunos do Ensino Médio; sugestões de temas para modelos matemáticos; o desenvolvimento de todo um processo de modelagem, desde a captação de dados, análise, modelação e verificação; como também a sugestão de tópicos para uma apresentação final dos modelos dos alunos e critérios de avaliação. Essa sistematização do CCE é de grande valor aos profissionais, principalmente aos que ainda não têm muita experiência na prática de atividades de modelagem matemática em sala de aula e após a suspensão das cinco aulas de planejamento coletivo oferecidas às escolas-piloto durante o início da implementação do Novo Ensino Médio, que hoje não são mais ofertadas.

Diante dos pontos sublinhados acerca das contribuições deste trabalho, é importante reconhecer suas limitações. Embora tenha sido criada uma proposta para o CCE e realizada uma imaginação pedagógica, sobre “o que não é, mas poderia ser” (SKOVSMOSE, 2015), é fundamental ressaltar que este trabalho não foi aplicado a nenhuma turma, portanto, é necessário considerar que a efetividade e os resultados práticos podem variar. No entanto, esta dissertação abre caminho para futuras pesquisas e aplicação da proposta em trabalhos subsequentes. A aplicação real com estudantes proporcionará uma oportunidade de avaliar sua viabilidade, identificar desafios e aprimorar a abordagem. Dessa forma, espera-se que este estudo sirva como um ponto de partida para explorar a implementação de uma disciplina de modelagem matemática para alunos do Ensino Médio e estimular o aprofundamento dessa temática em pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L.M.W. **Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática.** VIDYA, v. 42, n. 2, p. 121-145, jul./dez., 2022 - Santa Maria, 2022. ISSN 2176-4603

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2001.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? Veritati,** n. 4, p. 73- 80, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BERTONE, Ana Maria Amarillo; BASSANEZI, Rodney Carlos; JAFELICE, Rosana Sueli da Motta. **Modelagem Matemática.** Uberlândia - MG: UFU, 2014. 187 p.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino.** 5. ed. São Paulo: Contexto, 2019.

BRASIL, Lei nº 13.145, de 16 de fevereiro de 2017. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Portal da Legislação, Brasília, 16 fev. 2017. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/113415.htm>. Acesso em: 16 out. 2022.

BRASIL. Resolução Nº 3, de 21 de Novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB. 2018. Disponível em: <<http://novoensinomedio.mec.gov.br/resources/downloads/pdf/dcnem.pdf>>. Acesso em: 16 out. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

BURAK, Dionísio. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino e aprendizagem.** Tese (doutorado). Faculdade de Educação. Universidade de Campinas – Unicamp. Campinas, 1992.

FERNANDES, Flavio. **A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PRÁTICA PEDAGÓGICA NO ENSINO MÉDIO INTEGRADO EM ADMINISTRAÇÃO DO IFSC – CAÇADOR**. 2016. 141 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2016.

FIorentini, D.; Lorenzato, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2012.

KLEEMANN, Robson.; PETRY, Vitor. José. DESENVOLVIMENTO DE UM EXERCÍCIO DE IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA A PARTIR DE UMA PROPOSTA METODOLÓGICA INTERDISCIPLINAR. **Investigações em Ensino de Ciências**, [S. l.], v. 25, n. 3, p. 232–251, 2020. DOI: 10.22600/1518-8795.ienci2020v25n3p232. Disponível em: <https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/1897>. Acesso em: 14 abr. 2023.

LIMA, Priscila Coelho. **Imaginação Pedagógica e Educação Inclusiva: Possibilidades para a Formação de Professores de Matemática**. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, 2022.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Vygotsky, aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio histórico**. São Paulo: Scipione, 2005.

RAMON, Rosangela; FERREIRA DE SOUZA, Nagmar; KLÜBER, Tiago Emanuel. CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: ASPECTOS EVIDENCIADOS NOS RELATOS DE EXPERIÊNCIA. **Revista Dynamis**, [S.l.], v. 28, n. 1, p. 46-70, mar. 2022. ISSN 1982-4866. Disponível em: <<https://bu.furb.br/ojs/index.php/dynamis/article/view/9788>>. Acesso em: 13 fev. 2023. doi: <http://dx.doi.org/10.7867/1982-4866.2022v28n1p46-70>.

REGO, Teresa Cristina. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação**. Petrópolis: Vozes, 2011.

RIGONATTO, Marcelo. **Modelagem matemática no processo de ensino e aprendizagem**. Equipe Brasil Escola. Disponível em: <<https://educador.brasilescuela.uol.com.br/estrategias-ensino/modelagem-matematica-no-processo-ensino-aprendizagem.htm>> Acesso em: 21 abr. 2023.

ROCHA, Kátia Luciane Souza da; ROCHA, Jefferson Marçal da. A ANÁLISE DA EVOLUÇÃO DO CUSTO DA CESTA BÁSICA NO RIO GRANDE DO SUL ATRAVÉS

DA MODELAGEM MATEMÁTICA. **Experiências em Ensino de Ciências**, Cuiabá, v. 3, n. 3, p. 71-79, ago. 2008.

SANTA CATARINA. **Novo ensino médio**: Componentes Curriculares Eletivos: Construindo e Ampliando Saberes: caderno 4 – portfólio dos(as) educadores(as). Florianópolis : Gráfica Coan, 2021b.

SANTOS JUNIOR, Guataçara dos; SOARES, Maria Rosana. A MODELAGEM MATEMÁTICA NOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO ESTADO DO PARANÁ. **Revista Dynamis**, [S.l.], v. 20, n. 2, p. 29-46, nov. 2015. ISSN 1982-4866. Disponível em: <<https://proxy.furb.br/ojs/index.php/dynamis/article/view/4201>>. Acesso em: 22 mar. 2023. doi: <http://dx.doi.org/10.7867/1982-4866.2014v20n2p29-46>.

SCAPATICCI, Laísa Maria. MODELAGEM MATEMÁTICA: “O PESO DA MOCHILA E SUAS CONSEQUÊNCIAS. In: XXVII SEMANA DA MATEMÁTICA, 17., 2015, São José do Rio Preto - Sp. **Anais** São José do Rio Preto: Unesp, 2015. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/PESO_MOCHILA.pdf. Acesso em: 02 jun. 2023.

SEKI, Jeferson Takeo Padoan; SILVA, Ariel Cardoso da; PEREIRA, Rudolph dos Santos Gomes. FORMAÇÃO CONTINUADA E MODELAGEM MATEMÁTICA: um estudo dos anais de eventos da educação matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais....** São Paulo: Sbem, 2016.

SKOVSMOSE, Ole. Critique, generativity and imagination. **For the Learning of Mathematics**. New Brunswick, Canada, v. 31, n. 3, p. 19-23, nov. 2011.

SKOVSMOSE, Ole. Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In: D’AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (Orgs.). **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015, p. 63–90.

SOUSA, Karen Suely; SILVA, Genilson Soares da; SILVA, Ana Carolina Oliveira. UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL: QUANTO “PESA” A MOCHILA ESCOLAR? In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 5., 2018, Olinda - PE. **Anais** Olinda: Realize, 2018. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHO_EV117_MD1_SA13_ID73_17092018232210.pdf. Acesso em: 02 jun. 2023.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Editora Martins Fontes, 1991.

A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO E OS DESAFIOS DA ATUAIS DA SOCIEDADE

A modelagem matemática, arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações-problema de nosso meio, tem estado presente desde os tempos mais primitivos. Isto é, a modelagem é tão antiga quanto a própria matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos.

A expressão, em seu conceito moderno, surge durante o Renascimento, quando se constroem as primeiras ideias da Física, apresentadas segundo linguagem e tratamentos matemáticos. Hoje, a modelagem matemática constitui um ramo próprio da matemática que tenta traduzir situações reais para uma linguagem matemática, para que por meio dela se possa melhor compreender, prever e simular ou, ainda, mudar determinadas vias de acontecimentos, com estratégias de ação, nas mais variadas áreas de conhecimento.

Muito se falou e se fala de um futuro que está por chegar. Pois bem, chegamos ao novo milênio, no qual aponta-se para novos desafios e estes, para novas formas de encarar a realidade social. A educação também vem recebendo seus desafios - talvez os mais difíceis - entre eles o de antever e propor à sociedade um "novo" cidadão, que comandará a economia, a produção, o lazer e outras atividades que ainda surgirão nas próximas décadas.

Com isso vem a modelagem matemática na educação, que é bem mais recente. Nas últimas três décadas, a modelagem vem ganhando "espaço" em diversos países, nas discussões sobre ensino e aprendizagem, com posicionamentos a favor e contra sua utilização como estratégia de ensino de matemática.

Desafios como o mencionado acima têm tornado crescente o movimento em prol da educação matemática, em especial, nas últimas décadas. Têm gerado reestruturações no currículo e nos métodos de ensino que forneçam elementos que desenvolvam potencialidades, propiciando ao aluno a capacidade de pensar crítica e independentemente.

Não é difícil perceber que o futuro da civilização e da própria sobrevivência dependem da qualidade de imaginação criadora dos homens e das mulheres do nosso tempo e das futuras gerações. Mas como fazer emergir essa imaginação criadora em nós mesmos? Como proceder daqui em diante em nossa prática de ensino com vistas ao futuro?

A matemática, alicerce de quase todas as áreas do conhecimento e dotada de uma arquitetura que permite desenvolver os níveis cognitivo e criativo, tem sua utilização defendida, nos mais diversos graus de escolaridade, como meio para fazer emergir essa habilidade em criar, resolver problemas e modelar. Devemos encontrar meios para desenvolver a capacidade de ler e interpretar o domínio da matemática. Porque "o divórcio entre o pensamento e a experiência direta priva o primeiro de qualquer conteúdo real e transforma-o numa concha vazia de símbolos sem significados" (Adler, 1970).

Embora haja consenso quanto à importância da matemática na formação de jovens e a necessidade de encontrar meios eficientes para que o ensino e aprendizagem no âmbito escolar atinja esse objetivo, emergem de nossos educadores muitas questões: O que é modelagem? Como implementar a modelagem matemática no ensino de matemática?

O texto acima é uma adaptação derivada da Parte 1 do livro intitulado "Modelagem Matemática no Ensino", escrito por Maria Salett Biembengut e Nelson Hein. As modificações efetuadas visam proporcionar um formato informativo adequado aos estudantes do Ensino Médio, sendo o organizador do texto responsável pelas alterações. Contudo, é importante ressaltar que as informações e contribuições teóricas contidas são mérito dos autores da obra original e devem ser creditadas a eles.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2019.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A ideia de modelagem suscita a imagem de um escultor trabalhando com argila, produzindo um objeto. Esse objeto é um modelo. O escultor munido de material - argila, técnica, intuição e criatividade - faz seu modelo, que na certa representa alguma coisa, seja real ou imaginária. Segundo o Dicionário da língua portuguesa, o termo modelo designa "uma representação de alguma coisa (uma maquete, por exemplo), um padrão ou ideal a ser alcançado (uma pessoa), ou um tipo particular dentro de uma série (um modelo de carro)".

A criação de modelos para interpretar os fenômenos naturais e sociais é inerente ao ser humano. No entender de Granger (1969), o modelo é uma imagem que se forma na mente, no momento em que o espírito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procurando relacioná-la com algo já conhecido, efetuando deduções. Tanto que a noção de modelo está presente em quase todas as áreas: Arte, Moda, Arquitetura, História, Economia, Literatura, Matemática. Aliás, a história da ciência é testemunha disso! O objetivo de um modelo pode ser explicativo, pedagógico, heurístico, diretivo, de previsão, dentre outros.

Na verdade, o ser humano sempre recorreu aos modelos, tanto para comunicar-se com seus semelhantes como para preparar uma ação. Nesse sentido, a modelagem, arte de modelar, é um processo que emerge da própria razão e participa da nossa vida como forma de constituição e de expressão do conhecimento.

Muitas situações do mundo real podem apresentar problemas que requeiram soluções e decisões. Alguns desses problemas contêm fatos matemáticos relativamente simples, envolvendo uma matemática elementar, como:

- o tempo necessário para percorrer uma distância de quarenta quilômetros, mantendo-se a velocidade do veículo a uma média de oitenta quilômetros por hora;
- o juro cobrado por uma instituição financeira a um determinado empréstimo;
- a área de um terreno de forma retangular.

Outros, "camuflados" em uma determinada área do conhecimento, necessitam de uma análise mais acurada das variáveis envolvidas, como:

- a melhor forma para reduzir o "retrabalho" em uma fábrica;

- a quantidade permitida e o período apropriado para a caça de um animal predador sem que isso interfira no ecossistema.

Seja qual for o caso, a resolução de um problema, em geral quando quantificado, requer uma formulação matemática detalhada. Nessa perspectiva, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se "modelo matemático"

Na ciência, a noção de modelo é fundamental em especial a matemática, com sua arquitetura, permite a elaboração de modelos matemáticos, possibilitando uma melhor compreensão, simulação e previsão do fenômeno estudado.

Um modelo pode ser formulado em termos familiares, utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais etc. Por outro lado, quando se propõe um modelo, ele é proveniente de aproximações nem sempre realizadas para se poder entender melhor um fenômeno, e tais aproximações nem sempre condizem com a realidade. Seja como for, um modelo matemático retrata, ainda que em uma visão simplificada, aspectos da situação pesquisada (Biembengut, 1999).

O texto acima é uma adaptação derivada da Parte 1 - Seção 1.1, do livro intitulado "Modelagem Matemática no Ensino", escrito por Maria Salett Biembengut e Nelson Hein. As modificações efetuadas visam proporcionar um formato informativo adequado aos estudantes do Ensino Médio, sendo o organizador do texto responsável pelas alterações. Contudo, é importante ressaltar que as informações e contribuições teóricas contidas são mérito dos autores da obra original e devem ser creditadas a eles.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2019.

CONSIDERAÇÕES SOBRE A MODELAGEM MATEMÁTICA

A importância da matemática está no fato dela poder ser tanto agradável quanto interessante, porém é preciso vivenciar experiências significativas e positivas para conseguir vê-la dessa forma. Dentro desse mundo de transformar a matemática em algo instigante e proveitoso, está a modelagem matemática, que consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

O objetivo fundamental do “uso” e aplicações da modelagem matemática é de extrair a parte essencial de uma situação-problema e reescrevê-la em um contexto mais abstrato, organizado e de fácil manuseio e compreensão, onde o pensamento possa ser absorvido com uma economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento capaz de sintetizar ideias que surgiram em situações práticas que estão quase sempre camufladas numa grande quantidade de variáveis, que nem sempre são de grande relevância.

A aplicação correta da matemática nas mais diversas ciências deve aliar de maneira equilibrada a abstração e a formalização, não perdendo de vista a fonte que originou tal processo. Este procedimento construtivo faz parte do que se convencionou chamar de Matemática Aplicada, e teve seu início declarado no começo do século XX.

O método científico, que consiste em utilizar conhecimentos existentes e consolidados para fazer pesquisas, passou a exigir comprovações práticas dos resultados e as teorias obtidas passaram a criar um sistema de afirmações e resultados com os quais se pode descobrir e criar outras afirmações, quase sempre com ajuda da matemática ou da lógica.

No que se refere a modelagem de problemas usando a matemática, as vantagens em termos de pesquisa podem ser constatadas nos avanços obtidos em vários campos como a Física, a Química, a Biologia e a Astrofísica, entre outros. Uma das características mais importantes da modelagem é que pressupõe multidisciplinaridade, ou seja, os conhecimentos e teorias da matemática são utilizadas em diferentes áreas do conhecimento. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa.

Com esse movimento, a própria matemática teve uma evolução substancial, em decorrência da demanda de outras áreas de pesquisa por novas teorias matemáticas. Pode-se dizer que as ciências naturais, como Física, Astrofísica e Química, já estejam hoje amplamente matematizadas em seus aspectos teóricos.

Já nas ciências biológicas, a matemática tem servido de base para modelar, por exemplo, os mecanismos que controlam a dinâmica de populações, a epidemiologia, a ecologia, a neurologia, a genética e os processos fisiológicos.

O texto acima é uma adaptação derivada do Módulo 1 - Seção 1: Introdução, do livro intitulado "Modelagem Matemática", escrito por Ana Maria Amarillo Bertone, Rodney Carlos Bassanezi e Rosana Sueli da Motta Jafelice. As modificações efetuadas visam proporcionar um formato informativo adequado aos estudantes do Ensino Médio, sendo o organizador do texto responsável pelas alterações. Contudo, é importante ressaltar que as informações e contribuições teóricas contidas são mérito dos autores da obra original e devem ser creditadas a eles.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BERTONE, Ana Maria Amarillo; BASSANEZI, Rodney Carlos; JAFELICE, Rosana Sueli da Motta. **Modelagem Matemática**. Uberlândia - MG: UFU, 2014. 187 p.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática, de uma forma simples, resume-se à criação de um modelo matemático (um padrão ou fórmula matemática) para explicação ou compreensão de um fenômeno natural. Esse fenômeno pode ser de qualquer área do conhecimento. Atualmente, podemos perceber o uso da modelagem matemática na criação de bovinos, produção de materiais para construção civil, movimentação de animais, teoria da decisão, crescimento de cidades, controle biológico de pragas e outros.

O atual papel da educação matemática é formar cidadãos aptos para o convívio em sociedade, respeitando as diferenças, agindo de forma crítica e reflexiva diante das situações cotidianas. Através do uso da modelagem matemática na sala de aula podemos trabalhar a interdisciplinaridade, a transversalidade, mostrando ao aluno como a matemática pode ser útil em sua vida fora do ambiente escolar e como ela interage com as demais áreas do conhecimento. Os jovens passam a perceber a importância da matemática para a compreensão de fenômenos naturais, como é possível “prever” alguns acontecimentos utilizando fórmulas e modelos e isso acaba despertando interesse pela ciência e pesquisa.

A modelagem matemática começa com a identificação de um problema do mundo real que pode ser resolvido usando matemática. Por exemplo, um engenheiro pode querer modelar o comportamento de uma ponte em condições climáticas extremas, ou um economista pode querer modelar o crescimento econômico de um país.

O trabalho com modelagem matemática também pode ser feito através da resolução de problemas relacionados a nossa realidade, uma vez que a matemática faz mais sentido quando se torna significativa e prazerosa. Vale ressaltar que os modelos matemáticos apresentam uma série de aspectos úteis do ponto de vista científico. Além de apresentar naturalmente uma linguagem concisa, que pode vir a facilitar sua manipulação, um modelo matemático traz também aspectos como a possibilidade de confirmar ou rejeitar determinadas hipóteses relacionadas a complexos sistemas, revelar contradições em dados obtidos e/ou hipóteses formuladas, prever o comportamento de um sistema sob condições não testadas ou ainda não “testáveis”, dentre outros. Por exemplo, a modelagem matemática é usada na engenharia para projetar pontes, edifícios e outras estruturas. Ela também é usada na ciência para entender o

comportamento dos átomos e moléculas e prever o comportamento de sistemas biológicos complexos, entre outras situações.

As diversas situações-problemas, experienciadas durante o processo de modelagem, fazem com que a nossa capacidade de interpretação melhore, desenvolvemos uma posição crítica ao tentar resolver problemas e podemos verificar que pode haver mais de uma solução e caminhos para chegar às soluções. Essas habilidades são essenciais para a solução de situações que são vividas por todos nós diariamente. Precisamos de cidadãos matematicamente alfabetizados que, ao se depararem com seus problemas econômicos, no comércio, na medicina e em outras situações diárias, consigam resolvê-los de forma rápida e precisa.

O texto acima é uma adaptação derivada dos textos “Modelagem matemática no processo de ensino e aprendizagem”, escrito por Marcelo Rigonatto, disponível no Canal do Educador, conforme link abaixo e da página “Modelagem Matemática” do site Wikipédia, também referenciado abaixo. As modificações e adaptações textuais efetuadas visam proporcionar um formato informativo adequado aos estudantes do Ensino Médio, sendo o organizador do texto responsável pelas alterações. Contudo, é importante ressaltar que as informações e contribuições teóricas contidas são mérito dos autores das obras referenciadas abaixo e devem ser creditadas a eles.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

RIGONATTO, Marcelo. **Modelagem matemática no processo de ensino e aprendizagem.** Equipe Brasil Escola. Disponível em: <<https://educador.brasilecola.uol.com.br/estrategias-ensino/modelagem-matematica-no-processo-ensino-aprendizagem.htm>> Acesso em: 21 abr. 2023.

MODELAGEM MATEMÁTICA. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2023. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Modelagem_matem%C3%A1tica&oldid=64447820>. Acesso em: 22 abr. 2023.

ETAPAS MODELAGEM MATEMÁTICA

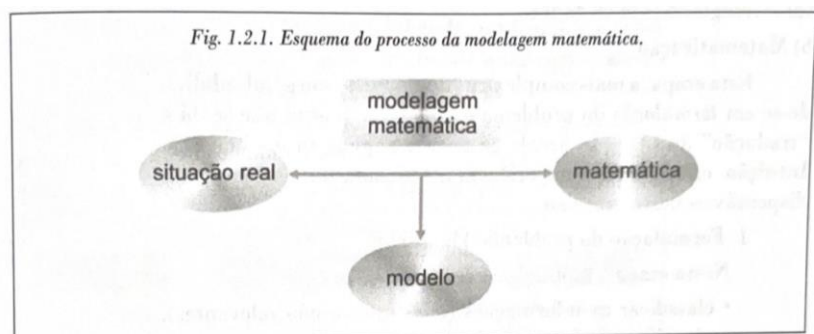
A modelagem matemática é uma ferramenta valiosa para analisar e compreender fenômenos do mundo real. Existem diferentes caminhos e abordagens sugeridos por diferentes autores para se criar modelos matemáticos, cada uma com suas próprias vantagens e limitações, que devem ser escolhidos de acordo com as necessidades e objetivos de cada trabalho. Neste texto, é adotado o percurso e as etapas de um processo de modelagem sugerido por Maria Salett Biembengut e Nelson Hein, em seu livro “Modelagem Matemática para o Ensino”.

A modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Se o conhecimento matemático restringe-se a uma matemática elementar, como aritmética e/ou medidas, o modelo pode ficar delimitado a esses conceitos. Quanto maior o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma matemática mais sofisticada. Porém o valor do modelo não está restrito à sofisticação matemática.

A modelagem matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias.

Geralmente, pode-se dizer que matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir.



Fonte: Biembengut e Hein, 2009.

Essa interação, que permite representar uma situação "real" com "ferramental" matemático (modelo matemático), envolve uma série de procedimentos. Esses procedimentos podem ser agrupados em três etapas, subdivididas em seis subetapas, a saber:

a) Interação

- reconhecimento da situação-problema;
- familiarização com o assunto a ser modelado->referencial teórico.

b) Matematização

- formulação do problema-> hipótese;
- resolução do problema em termos do modelo.

c) Modelo matemático

- interpretação da solução;
- validação do modelo ->avaliação.

Detalhando as etapas:

a) Interação

Uma vez delineada a situação que se pretende estudar, deve ser feito um estudo sobre o assunto de modo indireto (por meio de livros e revistas especializadas, entre outros) ou direto, in loco (por meio da experiência em campo, de dados experimentais obtidos com especialistas da área).

Embora esta etapa esteja subdividida em duas - reconhecimento da situação-problema e familiarização - não obedece a uma ordem rígida tampouco se finda ao passar para a etapa seguinte. A situação-problema torna-se cada vez mais clara, à medida que se vai interagindo com os dados.

b) Matematização

Esta etapa, a mais complexa e "desafiante", em geral subdivide-se em formulação do problema e resolução. É aqui que se dá a "tradução" da situação-problema para a linguagem matemática. Intuição, criatividade e experiência acumulada são elementos indispensáveis neste processo.

1. Formulação do problema -> hipóteses

Nesta etapa é especialmente importante:

- classificar as informações (relevantes e não relevantes), identificando fatos envolvidos;
- decidir quais os fatores a serem perseguidos, levantando hipóteses;
- selecionar variáveis relevantes e constantes envolvidas;
- selecionar símbolos apropriados para essas variáveis; e
- descrever essas relações em termos matemáticos.

O objetivo principal deste momento do processo de modelar é chegar a um conjunto de expressões aritméticas ou fórmulas, ou equações algébricas, ou gráfico, ou representações, ou programa computacional, que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução.

2. Resolução do problema em termos do modelo

Uma vez formulada a situação-problema, passa-se à resolução ou análise com o "ferramental" matemático de que se dispõe. Isto requer aguçado conhecimento sobre as entidades matemáticas usadas na formulação. O computador pode ser um instrumento imprescindível: especialmente em situação-problema em que não foi possível resolvê-la por processos contínuos, obtêm-se resultados aproximados por processos discretos.

Cabe aqui salientar que muitos modelos matemáticos não resolvidos no século passado levaram ao desenvolvimento de outros ramos da matemática.

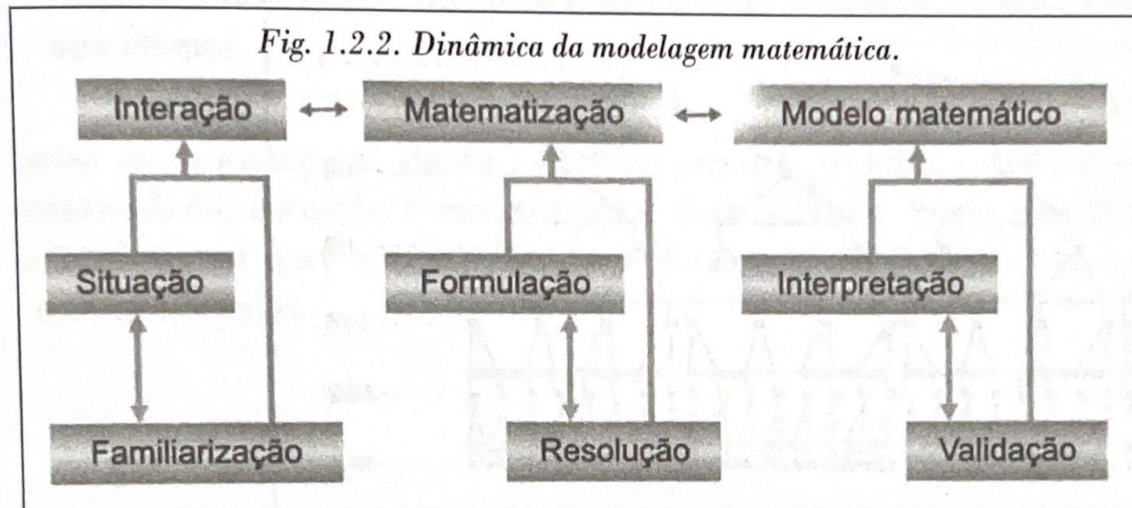
c) Modelo matemático

Para concluir o modelo, torna-se necessária uma avaliação para verificar em que nível ele se aproxima da situação-problema representada e, a partir daí, verificar também o grau de confiabilidade na sua utilização.

Dessa forma, faz-se:

1. a interpretação do modelo, analisando as implicações da solução derivada daquele que está sendo investigado; e
2. a verificação de sua adequabilidade, retornando à situação-problema investigada e avaliando quão significativa e relevante é a solução - validação.

Se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa - matematização mudando-se ou ajustando hipóteses, variáveis etc.



Fonte: Biembengut e Hein, 2009

É importante, ao concluir o modelo, a elaboração de um relatório que registre todas as facetas do desenvolvimento, a fim de propiciar seu uso de forma adequada (Biembengut, 1999).

O texto acima é uma adaptação derivada da Parte 1 - Seção 1.2, do livro intitulado "Modelagem Matemática no Ensino", escrito por Maria Salett Biembengut e Nelson Hein. As modificações efetuadas visam proporcionar um formato informativo adequado aos estudantes do Ensino Médio, sendo o organizador do texto responsável pelas alterações. Contudo, é importante ressaltar que as informações e contribuições teóricas contidas são mérito dos autores da obra original e devem ser creditadas a eles.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2019.

ATIVIDADE: ETAPAS DE UMA MODELAGEM

Orientação e objetivo: Os alunos recebem as fichas que contêm ações que podem ser realizadas durante um processo de modelagem matemática. Em grupo, os alunos devem decidir em qual das seguintes etapas cada uma das ações se encaixa.

As etapas seguem a estrutura sugerida por Biembengut e Hein (2009) e já devem ser conhecidas previamente pelo aluno.

Etapas:

1. **Interação (Familiarização)** (10 fichas)
2. **Matematização** (11 fichas)
3. **Modelo Matemático** (9 fichas)

Exemplo: A ficha abaixo se enquadra na Etapa 1 - *Interação*, portanto espera-se que os alunos preencham o espaço em branco com o número 1.

Selecionar referencial teórico sobre o tema	1
--	----------

Segue abaixo o gabarito das respostas para o professor.

ETAPA 1. INTERAÇÃO

- Definir um tema/área de pesquisa
- Escolher a situação-problema a ser pesquisada
- Pesquisar informações sobre o tema de pesquisa
- Realizar experiências acerca do conteúdo a ser modelado (quando necessário)
- Conversar com especialistas da área
- Realizar entrevistas para coleta de dados
- Pesquisar dados já existentes sobre o tema
- Selecionar referencial teórico sobre o tema
- Ler textos, artigos e revistas sobre o tema
- Definir o objetivo que busca ao realizar a modelagem

ETAPA 2. MATEMATIZAÇÃO

- Selecionar as variáveis
- Definir ordem de importância das variáveis e informações coletadas
- Definir conceitos matemáticos a serem utilizados
- Descrever a situação na linguagem matemática
- Formular hipóteses
- Criar fórmulas e/ou equações que representem a situação-problema
- Encontrar a solução do modelo desenvolvido
- Aprender/revisar conceitos matemáticos necessários para resolver o modelo
- Utilizar recursos digitais para resolver o modelo
- Simular situações da situação-problema
- Criar um modelo matemático

ETAPA 3.

- Criar gráficos para análises
- Interpretar a solução encontrada
- Analisar a confiabilidade de uma solução
- Comparar os dados gerados pelo modelo com dados reais
- Comunicar resultados para a sociedade através de artigos e matérias de jornais/sites
- Analisar impacto da solução
- Criar ações a partir da solução do modelo
- Identificar limitações do modelo e da solução
- Identificar possíveis falhas do modelo

Na sequência segue arquivo com as fichas em página já organizada para impressão e recorte, ordenadas de forma aleatória.

Realizar entrevistas para coleta de dados	
Encontrar a solução do modelo desenvolvido	
Comparar os dados gerados pelo modelo com dados reais	
Interpretar a solução encontrada	
Selecionar referencial teórico sobre o tema	
Analisar impacto da solução	
Formular hipóteses	
Comunicar resultados para a sociedade através de artigos e matérias de jornais/sites	
Definir o objetivo que busca ao realizar a modelagem	
Ler textos, artigos e revistas sobre o tema	
Selecionar as variáveis	
Definir ordem de importância das variáveis e informações coletadas	
Escolher a situação-problema a ser pesquisada	
Identificar limitações do modelo e da solução	
Simular situações da situação-problema	

Definir conceitos matemáticos a serem utilizados	
Definir um tema/área de pesquisa	
Pesquisar informações sobre o tema de pesquisa	
Descrever a situação na linguagem matemática	
Conversar com especialistas da área	
Analisar a confiabilidade de uma solução	
Criar gráficos para análises	
Pesquisar dados já existentes sobre o tema	
Aprender/revisar conceitos matemáticos necessários para resolver o modelo	
Criar ações a partir da solução do modelo	
Realizar experiências acerca do conteúdo a ser modelado (se necessário)	
Criar fórmulas e/ou equações que representem a situação-problema	
Utilizar recursos digitais para resolver o modelo	
Identificar possíveis falhas do modelo	
Criar um modelo matemático	