Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Rede Nacional - PROFMAT

Carlos Eduardo Francisco Sampaio

Aplicação de Sistemas de Equações Lineares ao Funcionamento do GPS

São Cristóvão - SE
2023

Carlos Eduardo Francisco Sampaio

Aplicação de Sistemas de Equações Lineares ao Funcionamento do GPS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Naldisson dos Santos

São Cristóvão - SE
2023

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Sampaio, Carlos Eduardo Francisco
S192a Aplicação de sistemas de equações lineares ao funcionamento do GPS / Carlos Eduardo Francisco Sampaio ; orientador Naldisson dos Santos. - São Cristóvão, 2023.
66 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2023.

1. Matrizes. 2. Equações. 3. Superfícies (Matemática). 4. Sistema de Posicionamento Global I. Santos, Naldisson dos orient. II. Título.

CDU 519.61

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aplicação de Sistemas de Equações Lineares ao Funcionamento do GPS

por

Carlos Eduardo Francisco Sampaio

Aprovada pela Banca Examinadora:

Naldisson dos Santos

Prof. Dr. Naldisson dos Santos - UFS
Orientador

Marcos Aurélio Guimarães Monteiro

Prof. Dr. Marcos Aurélio Guimarães Monteiro - UFS
Primeiro Examinador

Filipe Dantas dos Santos

Prof. Dr. Filipe Dantas dos Santos - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 31 de Agosto de 2023.

Cidade Univ. Prof. José Aloísio de Campos, Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Bairro Rosa Elze, CEP 49107-230 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – Tel. (00 55 79) 3194-6887
E-mail:profmat@academico.ufs.br

Agradecimentos

Neste momento especial, em que concluo uma etapa importante da minha jornada acadêmica, é com profunda gratidão que expresso meus agradecimentos a todas as pessoas que permaneceram ao meu lado, incentivando, apoiando e tornando possível a realização deste trabalho.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, fonte inesgotável de sabedoria e inspiração. Sua presença constante em minha vida me deu força para superar os desafios e iluminar meu caminho durante todo o percurso dessa jornada acadêmica.

À minha amada esposa Joelma e ao meu filho Eduardo, agradeço por serem minha base sólida, meu porto seguro e minha motivação diária. Seu amor, compreensão e incentivo foram fundamentais para que eu pudesse me dedicar aos estudos e realização deste trabalho com dedicação e empenho.

Aos meus queridos pais, Carlos Ernesto e Enauva Francisca, agradeço por serem meu exemplo de resistência, sabedoria e amor incondicional. Seu apoio inabalável e encorajamento ao longo de toda a minha trajetória acadêmica foram essenciais para que eu pudesse alcançar este momento.

Aos meus irmãos, Carla e Elisio que sempre estiveram presentes em minha vida, agradeço por compartilharmos juntos as alegrias e os desafios desta caminhada.

Aos professores do curso, Dr. Evilson Vieira, Dr. Allyson Oliveira, Dr. José Anderson, Dr. Disson Soares, Dr. André Dória e a Drª. Débora Lopes. que dedicaram seu tempo e conhecimento para nos ensinar e guiar, meu profundo agradecimento. Suas aulas inspiradas e compromisso com a educação foram fundamentais para o meu aprendizado e desenvolvimento como estudante.

Aos meus colegas de turma, Renato, Robson, Erivaldo, Wallisson, Bruno, Cloves, Antônio, Rômulo, Michel, Jhonatan e Márcia que se tornaram verdadeiros amigos ao longo desses anos, agradeço por compartilharmos juntos tantas experiências enriquecedoras. Suas contribuições e colaboração completaram essa jornada acadêmica ainda mais significativa e prazerosa.

Aos professores membros da banca, Prof. Dr. Marcos Aurélio e Prof. Dr. Filipe Dantas.

E, por fim, um agradecimento especial ao professor orientador Dr. Naldisson dos Santos, que, com sua orientação, sabedoria e paciência, guiou-me ao longo deste trabalho. Suas sugestões e conselhos foram fundamentais para o aprimoramento deste estudo, e sou imensamente grato pela oportunidade de aprender com um profissional tão dedicado e inspirador.

Cada uma dessas pessoas teve um papel fundamental na minha trajetória acadêmica e na realização deste trabalho. Seu apoio e carinho foram imprescindíveis para que eu pudesse alcançar esse momento de vitória.

Meu sincero agradecimento a todos por fazerem parte desta conquista.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"

Resumo

Nesse trabalho serão apresentados conceitos matemáticos essenciais presentes no funcionamento do Sistema de Posicionamento Global, popularmente conhecido como GPS, enfatizaremos os sistemas equações lineares, o qual foi escolhido como objeto de estudo desse trabalho, com o intuito de estimular o interesse dos estudantes pela matemática, ao demonstrar como conceitos teóricos aprendidos em sala de aula tem aplicações práticas em nosso cotidiano. Apresentaremos a teoria das matrizes e sistemas lineares, através da sua representação matricial e técnicas de resolução, como a eliminação de Gauss e a regra de Cramer, para fornecer a base matemática necessária para a compreensão do tema. Além disso vamos conhecer a história e o funcionamento do GPS, desde sua criação no período da guerra fria, com o projeto NAVSTAR conduzido pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos, até sua onipresença na atualidade, permeando nossas vidas de diversas formas.

Palavras-chave: Matrizes; Sistemas de Equações Lineares; Superfícies esféricas ; Sistema de Posicionamento Global (GPS).

Abstract

In this work, essential mathematical concepts present in the functioning of the Global Positioning System (GPS), popularly known as GPS, will be presented. We will emphasize linear equation systems, which have been chosen as the object of study for this research, with the aim of stimulating students' interest in mathematics by demonstrating how theoretical concepts learned in the classroom have practical applications in our daily lives. We will present the theory of matrices and linear systems, using their matrix representation and solution techniques, such as Gaussian elimination and Cramer's rule, to provide the necessary mathematical foundation for understanding the subject. Additionally, we will explore the history and operation of GPS, from its creation during the Cold War period, with the NAVSTAR project led by the United States Department of Defense, to its omnipresence in our lives today, permeating our lives in various ways.

Keywords: Matrices; Linear Equation Systems; Spherical Surfaces; Global Positioning System (GPS).

Lista de Figuras

Sumário

CAPÍTULO 1

Matrizes e Sistema de Equações Lineares

O objetivo deste capítulo é apresentar de forma clara e concisa os conceitos de Matrizes e de Sistemas de Equações Lineares, começando com suas definições e formas de representá-los. Serão pensados os diferentes tipos de matrizes e suas operações aritméticas, além de como representar sistemas de equações lineares através de matrizes. Também serão apresentados os métodos de resolução dos sistemas de equações lineares.

Compreender os conceitos de Matrizes e de Sistemas de Equações Lineares é fundamental para a resolução de problemas matemáticos práticos, além de ser amplamente utilizado em diversas áreas, como engenharia, física, ciência da computação e muito mais. Portanto, este capítulo é essencial para o sucesso em muitas áreas da ciência e tecnologia moderna.

A construção desse capítulo tem como base as referências [15] e [13].

1.1 Matrizes

1.1.1 Algumas definições

Ao longo de seção vamos enunciar algumas definições sobre matrizes, considerando um corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e chamaremos seus elementos de escalares.

Definição 1.1.1. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chamamos* ***matriz*** *$m \times n$, sobre $\mathbb{K}$, a qualquer quadro que se obtenha dispondo mn elementos de $\mathbb{K}$ segundo m linhas e n colunas, isto é, a qualquer quadro* *da forma*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

com $a_{ij} \in \mathbb{K}, i = 1, ..., m$ *e* $j = 1, ..., n$. *Chamamos de* ***elementos*** *ou* ***entradas*** *da matriz* A*, ao os escalares* a_{ij} *com* $i \in \{1, ..., m\}$ *e* $j \in \{1, ..., n\}$. *Chamamos de* ***linha*** i *de* A*, com* $i \in \{1, ..., m\}$ *ao elemento* $(a_{i1}, ..., a_{in})$ *e chamamos de* ***coluna*** j *de A, com* $j \in \{1, ..., n\}$ *ao elemento* $(a_{1j}, ..., a_{mj})$.

Observação 1.1.1. O conjunto das matrizes $m \times n$, sobre $\mathbb{K}$, é representado por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Exemplo 1.1.1. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i-1 & -1 \\ -3 & 0 & 1+3i \end{bmatrix},$$

onde $A \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$. Neste caso, o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definição 1.1.2. *Dizemos que* $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *são* ***iguais****, e escrevemos* $A = B$*, se* $a_{ij} = b_{ij}$*, para todo* $i = 1, ..., m$*, e* $j = 1, ..., n$*. Caso contrário, escrevemos* $A \neq B$*.*

Exemplo 1.1.2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a \\ 1 & -1 & 1+3i \\ \frac{2}{3} & 5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1+3i \\ b & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Observe que $A, B \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$. Além disso, $A = B$ se, e somente se, $a = -2$ e $b = \frac{2}{3}$.

Definição 1.1.3. *Considere* $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*, temos que:*

$i)$ *A é uma* ***matriz linha*** *se* $m = 1$.

$ii)$ *A é uma* ***matriz coluna*** *se* $n = 1$.

Exemplo 1.1.3. As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3i \\ -3 \end{bmatrix}_{3\times 1} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -i & -3 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

são matrizes coluna e linha, respectivamente.

Definição 1.1.4. *Seja $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é uma* ***matriz quadrada*** *se $m = n$. e a representamos por*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Denominamos por $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ou simplesmente matriz de orden n. Além disso, chamamos de ***Diagonal Principal de A*** *ao elemento $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ e de* ***Diagonal secundária de A*** *ao elemento $(a_{1n}, a_{2,n-1,}, ..., a_{n1})$.*

Exemplo 1.1.4. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ 5 & 3 & 8 & -6 \\ \sqrt{2} & 0 & -10 & -2 \\ 15 & 6 & i-1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz quadrada de ordem 4, onde a diagonal principal é $(2, 3, -10, 0)$ e a diagonal secundária é $(\frac{1}{3}, 8, 0, 15)$.

Definição 1.1.5. *Seja A uma matriz de ordem n. Dizemos que:*

$i)$ *A é uma matriz* ***triangular superior*** *se $i > j$ então $a_{ij} = 0$. Neste caso, representamos A da seguite forma*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$ii)$ *B é uma matriz* ***triangular inferior*** *se $i < j$ então $a_{ij} = 0$. Neste caso, representamos B da seguinte forma*

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$iii)$ *Chamamos **A de matriz triangular** se **A** é uma matriz triangular superior ou triangular inferior.*

Definição 1.1.6. *Dizemos que uma matriz **A** de ordem n é uma **matriz diagonal**, se para $i \neq j$ então os escalares $a_{ij} = 0$, e podemos representa-la da seguinte forma.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definição 1.1.7. *Uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal são todos iguais, é denominada **matriz escalar**. Além disso, chamamos uma matriz escalar de ordem n, cujos os elementos da diagonal são todos iguais a 1, de **matriz identidade** de ordem n, e sua notação é I_n. Neste caso, representamos I_n da seguinte forma*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.1.8. *Dizemos que A é uma **matriz nula**, se todos os escalares $a_{ij} = 0$, ou seja, toda as entradas de A são nulas, e representamos por $0_{m\times n}$.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.1.9. *Dada $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, dizemos que $(-A) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, é a **matriz oposta** de A, se $(-A)_{ij} = -a_{ij}$, para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$.. Ou seja, os elementos da matriz $(-A)$ são os elementos opostos aos elementos da matriz A.*

Exemplo 1.1.5. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 5 & -1 & 3 \\ \frac{2}{3} & 5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad -A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 7 \\ -5 & 1 & -3 \\ -\frac{2}{3} & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Note que os elementos da matriz $(-A)$ são elementos opostos aos elementos da matriz A, ou seja, $(-A)$ é a matriz oposta de A.

1.1.2 Operações com Matrizes

Nessa seção apresentaremos as definições e propriedades das operações com as matrizes, começando pela **operação de adição de matrizes**, que para cada par de matrizes de $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ determina uma nova matriz $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ que definimos a seguir.

Definição 1.1.10. *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, dizemos que $(A+B) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, é a **matriz soma** de A e B, tal que $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$. Ou seja, os elementos da matriz $A+B$ é a soma dos elementos correspondentes das matriz A e B. Além disso, chamamos de diferença $(A+(-B)) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, que é a soma da matriz A com a matriz oposta de B, e indicamos $A - B$.*

Exemplo 1.1.6. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -7 \\ 1 & -1 & 4 \\ -8 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Observe que $A, B \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, então temos que:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2+5 & 0+(-2) & 5+(-7) \\ 1+(-1) & -1+(-1) & 1+(-4) \\ -3+(-8) & 2+5 & -6+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -11 & 7 & 3 \end{bmatrix}; \\ A + 0_{3\times 3} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A; \\ A + (-A) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = 0_{3\times 3}. \end{aligned}$$

O conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ munido com a operação de adição possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.1.1. *Sejam $A, B, C \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, então valem as seguintes propriedades da adição de matrizes:*

$i)$ $A + B = B + A$, *(Comutatividade da adição);*

$ii)$ $(A + B) + C = A + (B + C)$, *(Associatividade da adição);*

$iii)$ $A + 0_{m\times n} = A$, *(Existência do elemento neutro da adição);*

$iv)$ $A + (-A) = 0_{m\times n}$, *(Existência do elemento oposto da adição).*

Demonstração.

$i)$ Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Observe que, $(A + B)$ e $(B + A) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Da definição de adição de matrizes, temos que

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = (B + A)_{ij}.$$

Como $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$ e a operação de adição é comutatita em $\mathbb{K}$, então concluímos que os elementos homólogos de $(A + B)_{ij}$ e $(B + A)_{ij}$ são iguais, para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$. Logo,

$$A + B = B + A.$$

$ii)$ Sejam $A, B, C \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Observe que, $((A+B)+C)$ e $(A+(B+C)) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Da definição de adição de matrizes, temos que

$$((A + B) + C)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (A + (B + C))_{ij}\,.$$

Como $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{K}$ e a operação de adição é associativa em $\mathbb{K}$, então concluímos que os elementos homólogos de $((A + B) + C)_{ij}$ e $(A + (B + C))_{ij}$ são iguais, para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$. Logo,

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

$iii)$ Sejam $A, O \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ onde $o_{ij} = 0$. Observe que, $(A+O) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Da definição de adição de matrizes, temos que

$$(A + O)_{ij} = a_{ij} + o_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij} = A_{ij}.$$

Como $a_{ij}, 0 \in \mathbb{K}$ e a operação de adição possui elemento neutro em $\mathbb{K}$, então concluímos que, $(A+O)_{ij} = A_{ij}$ para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$. Logo, $A + O = A$.

Observe que O é o elemento neutro para a adição em $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Além disso, esse elemento é único, e podemos verificar a sua unicidade da seguinte forma. Suponha que existe $Z \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, com $Z \neq O$, tal que $A + Z = A$, para qualquer $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$. Assim,

$$(A+Z)_{ij} = a_{ij} + z_{ij} = a_{ij},$$

para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} a_{ij} + z_{ij} &= a_{ij} \\ z_{ij} &= -a_{ij} + a_{ij} \\ z_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

Como $z_{ij} = 0$, concluímos que $Z = O$, o que é um absurdo. Logo, a matriz nula de $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é única.

$iv)$ Sejam $A, (-A) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Observe que, $(A + (-A)) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Da definição de adição de matrizes, temos que

$$(A + (-A))_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0 = O_{ij}.$$

Como $a_{ij}, (-a_{ij}) \in \mathbb{K}$ e a operação de adição possui elemento oposto em $\mathbb{K}$, então concluímos que, $(A + (-A))_{ij} = O_{ij}$ para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$. Logo, $A + (-A) = O$.

Observe que $-A$ é o elemento oposto para a adição em $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Note que esse elemento é único, e podemos verificar a sua unicidade da seguinte forma.

Vamos mostra por absurdo, supondo que existe $W \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, com $W \neq (-A)$, tal que $A + W = A$ para qualquer $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$, então $(A + W)_{ij} = a_{ij} + w_{ij} = 0$ para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$, temos que

$$\begin{aligned} a_{ij} + w_{ij} &= 0 \\ w_{ij} &= -a_{ij} \end{aligned}$$

Como $w_{ij} = -a_{ij}$, concluímos que $W = (-A)$, o que é um absurdo. Logo, a matriz oposta de $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é única.

$\square$

Agora veremos a **operação de multiplicação de um escalar por uma matriz**, que para cada par constituído por um escalar e por uma matriz de $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ determina uma nova matriz $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ que definimos a seguir.

Definição 1.1.11. *Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, dizemos que $(\alpha A) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, é a **matriz produto do escalar** α **pela matriz** A de tal forma que $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$, para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$. Ou seja, os elementos da matriz αA é o produto do escalar α pelos os elementos correspondentes da matriz A.*

O conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ com as operação de adição e multiplicação por um escalar definidas anteriormente, possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.1.2. *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ então valem as seguintes propriedades:*

$i)$ $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$. *(Associatividade);*

$ii)$ $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$. *(Distributividade);*

$iii)$ $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$. *(Distributividade).*

Demonstração.

$i)$ Sejam $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Observe que, $(\alpha\beta)A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Da definição de multiplicação de um escalar por uma matrizes, temos que

$$((\alpha\beta)A)_{ij} = (\alpha\beta)a_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha(\beta A))_{ij}$$

Como $a_{ij}, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e a operação de multiplicação é associativa em $\mathbb{K}$, então concluímos que $((\alpha\beta)A)_{ij} = (\alpha(\beta A))_{ij}$ para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$. Logo,

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$$

$ii)$ Sejam $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Observe que, $(\alpha+\beta)A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Da definição de multiplicação de um escalar por uma matrizes, temos que

$$((\alpha+\beta)A)_{ij} = (\alpha+\beta)a_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta a_{ij} = (\alpha A + \beta A)_{ij}$$

Como $a_{ij}, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e a operação de multiplicação é distributiva em relação à adição em $\mathbb{K}$, então concluímos que $((\alpha+\beta)A)_{ij} = (\alpha A + \beta A)_{ij}$ para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$. Logo, $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

$iii)$ Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Observe que, $\alpha(A+B) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Da definição de multiplicação de um escalar por uma matrizes, temos que

$$(\alpha(A+B))_{ij} = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = (\alpha A + \alpha B)_{ij}$$

Como $a_{ij}, b_{ij}, \alpha \in \mathbb{K}$ e a operação de multiplicação é distributiva em relação à adição em $\mathbb{K}$, então concluímos que $(\alpha(A+B))_{ij} = (\alpha A + \alpha B)_{ij}$ para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$. Logo, $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

$\square$

Exemplo 1.1.7. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

Observe que $A, B, C \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, então temos que:

$$3A + 2(B+C) = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot(3+6) & 2\cdot(-2+4) \\ 2\cdot(0+3) & 2\cdot(-1-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 1 \\ 9 & -16 \end{bmatrix}.$$

Vejamos agora a **operação de multiplicação de matrizes**, que para cada par constituído por duas matrizes A e B, com $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ determina uma nova matriz $\mathbb{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ que definimos a seguir.

Definição 1.1.12. *Sejam $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, dizemos que $AB \in \mathbb{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$, é a*

matriz produto *de tal forma que*

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

*para todo $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., p$. Ou seja, os elementos $(AB)_{ij}$ são obtidos a partir dos elementos da linha i de A e dos elementos da coluna j de B, comforme indicado. Além disso, a **matriz produto** AB somente está definida quando o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Ainda podemos afirmar que seu número de linhas é igual ao de A e seu número de colunas é igual ao de B.*

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = AB_{m\times p}$$

Exemplo 1.1.8. Vamos considerar o caso de uma indústria que fabrica e comercializa quatro produtos. Na tabela abaixo, podemos ver o número de unidades vendidas de cada produto nos meses de janeiro, fevereiro e março do ano atual:

	Produto 1	Produto 2	Produto 3	Produto 4
Janeiro	5	10	15	4
Fevereiro	10	18	6	14
Março	15	12	7	20

Na tabela a seguir, podemos ver o preço de venda e o lucro de cada produto em reais:

	Preço de venda	Lucro
Produto 1	250	25
Produto 2	1000	100
Produto 3	300	30
Produto 4	50	10

Podemos representar cada uma das tabelas por uma matriz. A matriz A representa o número de unidades vendidas de cada produto, enquanto a matriz B representa o preço de venda e o lucro de cada produto:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 & 4 \\ 10 & 18 & 6 & 14 \\ 15 & 12 & 7 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 250 & 25 \\ 1000 & 100 \\ 300 & 30 \\ 50 & 10 \end{bmatrix}$$

Se multiplicarmos as matrizes A e B, podemos obter informações valiosas sobre o desempenho da empresa. A primeira coluna do produto AB representa o valor mensal de vendas de todos os produtos, enquanto a segunda coluna de AB representa o valor mensal do lucro obtido pelas vendas de todos os produtos da empresa:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 5\cdot 250+10\cdot 1000+15\cdot 300+4\cdot 50 & 5\cdot 25+10\cdot 100+15\cdot 30+4\cdot 10 \\ 10\cdot 250+18\cdot 1000+6\cdot 300+14\cdot 50 & 10\cdot 25+18\cdot 100+6\cdot 30+14\cdot 10 \\ 15\cdot 250+12\cdot 1000+7\cdot 300+20\cdot 50 & 15\cdot 25+12\cdot 100+7\cdot 30+20\cdot 10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 15950 & 1615 \\ 21750 & 2370 \\ 18850 & 1985 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Podemos resumir esses dados na tabela abaixo:

	Total de venda	Lucro obtido
Janeiro	15950	1615
Fevereiro	21750	2370
Março	18850	1985
Valor Total	56550	5970

O conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ com as operação definidas anteriormente possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.1.3. *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ então valem as seguintes propriedades:*

$i)$ $(AB)C = A(BC)$. *(Associatividade da multiplicação);*

$ii)$ $A(B+C) = AB + AC$. *(Distributividade, à esquerda, da multiplicação em relação à adição);*

$(B+C)A = BA + CA$. *(Distributividade, à direita, da multiplicação em relação à adição);*

$iii)$ $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

$iv)$ $AI_n = I_m A = A$. *(Existência do elemento neutro da multiplicação).*

A demonstração dessas propriedades tem por base as definições enunciadas anteriormente, podendo ser encontrada em [15].

1.1.3 Forma escada e característica de uma matriz

A eliminação gaussiana, também conhecida como escalonamento, é um método para resolver sistemas lineares. Este método consiste em aplicar operações elementares sucessivas num sistema linear, transformando a matriz estendida do sistema em uma matriz triangular (chamada de matriz escalonada do sistema). Esta abordagem será discutida com mais detalhes na Seção 1.2.

Definição 1.1.13. *Seja $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$. Chamamos* ***transformação elementar sobre as linhas de*** *A a uma transformação de um dos seguintes tipos:*

I *- Troca de posição, na matriz A, da linha i com a j, com $i \neq j$.*

II *- Multiplicação de uma linha de A por um escalar $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

III *- Substituição da linha i de A pela sua soma com a linha j de A multiplicada por um escalar $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.*

Observação 1.1.2. Substituindo na definição anterior “linha” por “coluna”, obtemos as correspondentes definições de **transformação elementares sobre as colunas** de A.

Notação 1.1.1. Ao longo desse trabalho, adotaremos as seguintes notações para as transformações elementares entre linhas:

- $l_i \leftrightarrow l_j$, representa a troca das linhas i e j, com $i \neq j$.
- αl_i, diz que a linha i foi multiplicada por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
- $l_j \leftrightarrow l_j + \beta l_i$, representa a troca da linha j pela linha j mais β vezes a linha i, com $i \neq j$.

Definição 1.1.14. *Dizemos que $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$ é* ***equivalente por linhas*** *a uma matriz $B \in \mathbb{M}_{m\times n}$ se B pode ser obtida a partir de A efetuando uma sequência finita de transformações elementares. Tal relação será denorada por*

$$A \xrightarrow[\text{(linha)}]{} B.$$

Exemplo 1.1.9. Considere a matriz $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2+(-3)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(-1/2)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz A é equivalente por linha a matriz B dada por

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora introduzir o conceito de matrizes em forma de escada. Tal conceito será bastante importante na resolução de sistemas lineares. Inicialmente vamos definir o que o pivô de uma matriz.

Definição 1.1.15. *Chamamos de* ***pivô*** *de uma linha não nula de matriz ao elemento não nulo à esquerda dessa linha.*

Definição 1.1.16. *Seja $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$. Dizemos que A está na* ***forma de escada*** *se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *Se a linha i de A é nula, então as linhas $i+1, \ldots, m$, de A, se existirem, também são nulas.*

2. *Se $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, a linha i de A é não nula e a_{ij} é o pivô da linha i, então $a_{i+1,t} = 0$, para qualquer $t \in \{1, \ldots, j\}$.*

Exemplo 1.1.10. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 10 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

estão na forma de escada.

Proposição 1.1.4. *Toda matriz $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$ é equivalente por linhas a uma matriz em forma escada.*

A demonstração dessa proposição é feita usando indução sobre os números de colunas da matriz A. Omitiremos a demonstração desse resultado, mas para mais detalhes, ver em [15].

Processo para redução de uma matriz $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$ à forma de escada.

Passo 1: Se $A = 0_{m\times n}$ ou A é uma matriz linha, então A está na forma de escada e o processo termina.

Passo 2: Por troca de linha, isto é, efetuando apenas uma transformação do tipo **I**, se necessário, obtém-se uma matriz B cuja linha 1 tem, entre todas as linhas não nulas da matriz A, um pivô com índice de coluna mínimo. Seja tal elemento B_{1t}. Então

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & B_{1t} & B_{1,t+1} & \dots & B_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & B_{2t} & B_{2,t+1} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & B_{mt} & B_{m,t+1} & \dots & B_{mn} \end{bmatrix},$$

sendo $B_{1t} \neq 0$.

Passo 3: Para cada linha i de B, com $i = 2, \dots, m$, substitua a linha i pela sua soma com o produto de $-\frac{B_{it}}{B_{1t}}$ pela linha 1. Assim, obtemos uma matriz da froma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & B_{1t} & B_{1,t+1} & \dots & B_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & C_{2,t+1} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & C_{m,t+1} & \dots & C_{mn} \end{bmatrix},$$

onde $B_{1t} \neq 0$.

Passo 4: "Despreze" a linha 1 de C e aplique o processo à matriz resultante.

Exemplo 1.1.11. Considere a matriz $C \in \mathbb{M}_{4\times 4}$ dada por

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vamos aplicar as transformações do tipo **I, II** e **III** e o procedimento anterior, para obtermos uma matriz equivalente por linhas a C em forma de escada. Note que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4-2l_1]{l_2+\frac{1}{2}l_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-\frac{1}{4}l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{15}{8} \\ 0 & 0 & -12 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4+16l_3]{}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{15}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz C é equivalente por linha a matriz C', na forma de escada, dada por

$$C' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{15}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{bmatrix}.$$

Para qualquer matriz não nula, existem várias matrizes em forma de escada que são equivalentes por linhas. A próxima propisição nos garante que todas essas matrizes tem o mesmo número de linhas não nulas.

Proposição 1.1.5. *Seja $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$. Qualquer matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada têm o mesmo número de linhas não nulas.*

Demonstração. Se A é a matriz nula, então a única matriz equivalente por linhas a A é A, e o resultado é trivial. Suponha que $A \neq 0$. Sejam A'_1 e A'_2 tais que

$$A \longrightarrow A'_1 \quad \text{e} \quad A \longrightarrow A'_2\,.$$

Temos que

$$A'_1 \longrightarrow A \longrightarrow A'_2\,.$$

Sejam s_1 o número de linhas não nulas de A'_1 e s_2 o número de linhas não nulas de A'_2. Vamos mostrar que se $s_1 \neq s_2$, então temos uma contradição.

Sem perda de generalidade, suponha que $s_1 < s_2$ e considere

$$\mathcal{C}_1 = \{i_1, \ldots, i_{s_1}\}$$

o conjunto dos índices de coluna dos pivôs de A'_1 e

$$\mathcal{C}_2 = \{i_1, \ldots, i_{s_1}\}$$

o conjunto dos índices de coluna dos pivôs de A'_2. Como $s_1 < s_2$, então existe um k tal que $k \in \mathcal{C}_2$ e $k \notin \mathcal{C}_1$. Então, existe um pivô na coluna k de A'_2 e numa linha l, e na coluna k de A'_1 não há pivôs.

A coluna k de A'_1 não pode ser nula, pois nesse caso, efetuando quaisquer trasnsformações elementares nas linhas de A'_1 não se poderia obter a linha l de A'_2. Assim, seja t o maior índice na coluna k de A'_1 onde se encontra um elemento não nulo. Como a coluna k de A'_1 não tem pivôs, os índices de coluna dos pivôs de A'_1, correspondentes às linhas $1, \ldots, t$ são todos inferiores a k. Dessa forma, concluímos que a linha l de A'_2 não poderia ser obtida efetuando transformações elementares nas linhas de A'_1. Portanto, $s_1 = s_2$. $\square$

Definição 1.1.17. *Seja $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$. O número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada, equivalente por linhas a A, é chamado de* ***característica*** *de A e denotamos por $r(A)$.*

Segue direto da difinição anterior e da Proposição 1.1.6 o sequinte resultado:

Proposição 1.1.6. *As transformações elementares sobre linhas não alteram a característica, isto é, se $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$ e*

$$A \longrightarrow B,$$

então

$$r(A) = r(B).$$

Demonstração. Note que B é equivalente por linhas a uma matriz C em forma de escada, ou seja,

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C\ .$$

Se l é o número de linhas não nulas de C, então

$$r(A) = l \quad \text{e} \quad r(B) = l.$$

Logo,

$$r(A) = r(B).$$

$\square$

Definição 1.1.18. *Dizemos que uma matriz está em* ***forma de escada reduzida*** *se está em forma de escada e os pivôs, se existirem, são iguais* 1 *e todos os elementos das colunas dos pivôs são são nulos.*

1.1.4 Matriz Inversa

Definição 1.1.19. *Seja* $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Dizemos que* A *é* ***invertível****, ou que* A *tem inversa, se existe uma matriz* $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *tal que*

$$AB = I_n = BA \tag{1.1.1}$$

Observação 1.1.3. Se $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, então a existência de uma matriz $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ que satisfaz (1.1.1) é única. De fato, digamos que exista $B, C \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$AB = I_n = BA \quad \text{e} \quad AC = I_n = CA$$

Logo,

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C,$$

ou seja, $B = C$.

Definição 1.1.20. *Seja* $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *A única matriz* B *tal que* $AB = I_n = BA$ *é chamada de* ***inversa*** *de* A *e a denotaremos por* A^{-1}.

Exemplo 1.1.12. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é invertível e sua inversa é a matriz

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

pois

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & -2+2 \\ 1-1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O próximo resultado garante que, se $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, então para mostrarmos que B é sua inversa, basta verificar apenas um dos produtos AB ou BA é I_n.

Teorema 1.1.1. *Seja $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível.*

1. *Se $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $AB = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $BA = I_n$.*

2. *Se $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $BA = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $AB = I_n$.*

Demonstração. 1. Como A é invertível, então A^{-1} existe. Assim, desde que $AB = I_n$, multiplicando ambos os membros à esquerda por A^{-1}, temos

$$A^{-1}(AB) = I_n A^{-1},$$

ou seja,

$$B = I_n B = A^{-1}.$$

Agora, pela definição de inversa,

$$A^{-1}A = BA = I_n.$$

A demonstração do item 2 é análoga. □

O próximo resultado permite decidir se uma matriz quadrada é ou não é invertível através de sua característica.

Proposição 1.1.7. *Seja $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. As afirmações a seguir são equivalentes:*

$i)$ *A é invertível.*

$ii)$ $r(A) = n$.

$iii)$ *I_n é a forma de escada reduzida de A.*

$iv)$ *A é igual a um produto de matrizes elementares.*

A demonstração dessas proposição pode ser encontrada com detalhes em [15].

Exemplo 1.1.13. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Note que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + 2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + (-1)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $r(A) = 2 \neq 3 =$ ordem de A. Pela proposição anterior, segue que A não é invertível.

Para a matriz B, temos que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Logo, $r(B) = 3 =$ ordem de B e, portanto, usando a proposição anterior mais uma vez, concluímos que B é invertível.

1.2 Sistemas de Equações Lineares

Sistemas de equações lineares aparecem, em geral, em problemas, onde certas quantidades precisam ser determinadas indiretamente. Tal estudo encontram-se em diversos ramos da matemática aplicada e ciências naturais, como por exemplos na física, na economia, na engenharia, na biologia, na geografia, na astronomia, dentre outros.

Nesta seção, apresentaremos uma breve introdução ao estudo de sistema de equações lineares, contendo definições, exemplos e métodos de resolução.

Definição 1.2.1. *Uma* ***equação linear*** *nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$, é uma equação da forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1.2.1}$$

onde $a_1, a_2 \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$.

Observação 1.2.1. É usual chamarmos $a_1, a_2 \dots, a_n$ de **coeficientes** da equação e a b de **termo independente** .

Definição 1.2.2. *Dizemos que $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma solução de uma equação* (1.2.1) *se substituindo x_i por β_i, com $i = 1, \dots, n$, obtém-se uma igualdade verdadeira, isto é, $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ é uma solução de* (1.2.1) *se*

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_n\beta_n = b.$$

Definição 1.2.3. *Um* ***sistema de equações lineares*** *com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações da forma:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. , \tag{S}$$

com $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, e $j = i, \dots, n$.

Definição 1.2.4. *Uma solução do sistema linear* (S) *é uma $n-$upla $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$, que satisfaz cada uma das m equações, isto é,*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j = b_i,$$

com $i = 1, \dots, m$.

Observação 1.2.2. Se

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$

dizemos que o sistema de equações lineares (S) é um sistema homogêneo. Note que a $n-$upla $(0, \dots, 0)$ é sempre uma solução do sistema (S).

Definição 1.2.5. *O sistema de equações* (S) *diz-se:*

$i)$ ***impossível*** *se não existe nenhuma solução de* (S)*, ou equivalentemente, se o conjunto solução do sistema* (S) *é vazio;*

$ii)$ ***possível*** *se o sistema de equações* (S) *possui pelo menos uma solução e* ***determinado*** *quando* (S) *admite uma e somente uma solução;*

$iii)$ ***indeterminado*** *se existir mais que uma solução.*

Notação 1.2.1. Denotaremos o conjunto solução de um sistema de equações lineares por $\mathcal{C}$.

Exemplo 1.2.1. Considere o sistema de equações homogêneas

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 0, \\ -2x_1 & - & 4x_2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Note que $(0,0)$ e $(-2,1)$ são soluções do sistema acima. Neste caso, o conjunto solução é dado por

$$\mathcal{C} = \{(\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{R}^2 :\ \beta_1 = -2\beta_2\} = \{(-2\beta_2,\beta_2) :\ \beta_2\in\mathbb{R}\}.$$

Neste caso, temos que o sistema é indeterminado.

Exemplo 1.2.2. Considere o sistema de equações homogêneas

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2, \\ -3x & - & y & = & 3. \end{array}\right.$$

Note que $\left(-\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$ é a única solução do sistema acima. Neste caso, o conjunto solução é dado por

$$\mathcal{C} = \left\{\left(-\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)\right\}.$$

Assim, temos que o sistema é determinado.

Definição 1.2.6. *Chamaremos de* ***forma matricial*** *do sistema* (S) *à igualdade de matrizes*

$$AX = B, \tag{S'}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Observação 1.2.3. De agora em diante chamaremos o sistema (S') de (S).

Definição 1.2.7. *Chamamos de **matriz ampliada** do sistema* (S) *à matriz de* $\mathbb{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$ *cuja coluna* i*,* $i = 1, \dots, n$*, é igual a coluna* i *de* A *e cuja coluna* $n+1$ *é igual a coluna única de* B*. Tal matriz será denotada por*

$$[A \,|\, B]\,.$$

Exemplo 1.2.3. O seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x - z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

pode ser representado matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Além disso, sua matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Definição 1.2.8. *Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes se eles possuem o mesmo conjunto solução.*

O próximo resultado garante uma caracterização para determinarmos (e/ou obtermos) as soluções de sistemas lineares.

Proposição 1.2.1. *Sejam* $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. *Se* $P \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ *é invertível, então os sistemas*

$$AX = B \tag{1.2.2}$$

e

$$(PA)X = PB \tag{1.2.3}$$

são equivalentes.

Demonstração. Suponha que $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ é uma solução de (1.2.2). Então

$$A\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix} = B.$$

Multiplicando a igualdade acima pela esquerda, obtemos que

$$P\left(A\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}\right) = PB,$$

ou seja,

$$(PA)\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix} = PB,$$

isto é, $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ é solução (1.2.3). Reciprocamente, suponha que $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ é uma solução de (1.2.3). Então

$$(PA)\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix} = PB.$$

Desde que P é invertível, multiplicando a igualdade acima por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}(PA)\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix} = P^{-1}PB,$$

ou seja

$$A\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{bmatrix} = B.$$

Logo, segue que $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ é solução de (1.2.2). $\square$

A proposição anterior também pode ser enunciada da segunte forma:

Proposição 1.2.2. *Seja*

$$AX = B$$

um sistema de equações lineares. Se $[A \,|\, B]$ e $[A' \,|\, B']$ são equivalentes por linha, então

$$AX = B \quad \textit{and} \quad A'X = B'$$

são equivalentes.

A demonstração da proposição anterior segue da definição de matrizes equivalentes, ver mais detalhes em [15]. Além disso, essa proposição será útil para discussão e resolução de sistemas de equações lineares.

Proposição 1.2.3. *Sejam $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Tem-se*

$$r([A \,|\, B]) = r(A) \quad \textit{ou} \quad r([A \,|\, B]) = r(A) + 1.$$

Em particular, tem-se que

$$r(A) \le r([A \,|\, B]).$$

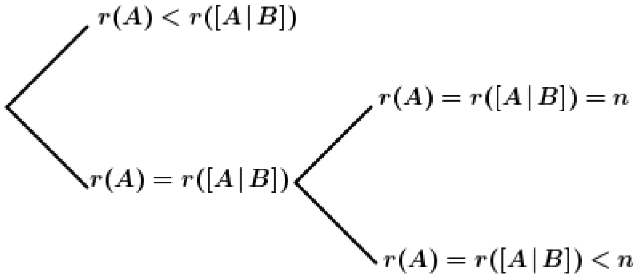
Agora, considere o sistema de equações lineares na forma matricial

$$AX = B,$$

com $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Sabemos que

$$r(A) \le r([A \,|\, B]) \quad \text{e} \quad r(A) \le n.$$

Assim, temos um, e apenas um, dos seguintes casos



O próximo resultado afirma que a discussão de um sistema linear fica resolvido se determinarmos qual dos casos anteriores ocorre.

Teorema 1.2.1. *Seja* $AX = B$ *um sistema de equações lineares, com* $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. *Tem-se:*

1. *Se* $r(A) < r([A\,|\,B])$, *então o sistema é impossível;*

2. *Se* $r(A) = r([A\,|\,B])$, *então o sistema é possível.*

Tem-se ainda que

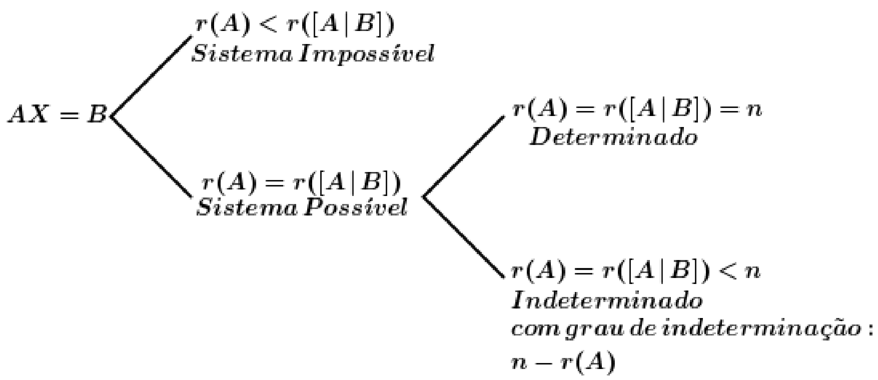
2.1. *Se* $r(A) = r([A\,|\,B]) = n$, *então o sistema é possível e determinado;*

2.2. *Se* $r(A) = r([A\,|\,B]) < n$, *então o sistema é possível e indeterminado.*

A demonstração desse teorema podem ser encontrada com detalhes em [15].

Definição 1.2.9. *Seja* $AX = B$ *um sistema de equações lineares possível indeterminado, com* $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *O* ***grau de indeterminação*** *do sistema é dado por* $n - r(A)$.

Resumo da discussão do sistema $AX = B$**, com** $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$**:**



Um método bastante consistente na resolução de sistemas lineares da forma $AX = B$, é o famoso *Método de eliminação de Gauss*, conhecido também como método de escalonamento. Em termos de matrizes, o método consiste em obter uma matriz $[A' \mid B']$ em forma de escada que é equivalente a matriz $[A \mid B]$. Consequentemente, através da matriz $[A' \mid B']$, podemos determinar o conjunto solução do sistema equivalente $A'X = B'$, que também são soluções do sistema inicial.

Em resumo, para fazermos a discussão de um sistema $AX = B$, precisamos conhecer apenas $r(A)$ e $r([A \mid B])$ e, assim, obtermos a partir da matriz $[A \mid B]$, uma matriz equivalente por linhas e em forma de escada. A seguir, veremos alguns exemplos que resumem toda nossa discussão até aqui.

Exemplo 1.2.4. Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + z - 3w = -5, \\ 2x + 4y + 4z - 4w = -6, \\ -x - 2y - 3z - w = 3. \end{cases}$$

Vamos fazer a discussão do sistema acima. Reescrevendo o sistema na forma matricial estendida, temos que

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & 4 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(1)l_1]{l_2+(-2)l_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 + (1)l_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] = [A' \mid B'] .$$

Como

$$r(A) = 3 = r([A \mid B]) < 4 = \text{número de incógnitas},$$

concluímos que o sistema acima é um sistema possível indeterminado, com grau de indeterminação igual a $1 = 4 - 3$.

Vamos agora determinar o conjunto solução do sistema de equações acima. Para isso, note que

$$[A' \mid B'] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{l_3}{2}]{\frac{l_2}{2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1+(3)l_3]{l_2+(-1)l_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Neste caso, a incógnita livre é y e o sistema fica

$$x = -11 - 2y, \quad z = 3 \quad \text{e} \quad w = -1.$$

Logo, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ é uma solução do sistema se, e somente se,

$$\beta_1 = -11 - 2\beta_2, \quad \beta_3 = 3 \quad \text{e} \quad \beta_4 = -1.$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \left\{(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbb{R}^4 : \ \beta_1 = -11 - 2\beta_2, \ \beta_3 = 3, \beta_4 = -1\right\} \\ &= \left\{(-11 - 2\beta_2, \beta_2, 3, -1) : \ \beta_2 \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Definição 1.2.10. *Dizemos que um sistema de equações lineares $AX = B$ é um **sistema de Cramer** se A é uma matriz quadrada invertível.*

Note que pelo Teorema 1.2.1, qualquer sistema de Cramer $AX = B$ é possível determinado. Além disso, se $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é solução do sistema se, e somente se,

$$A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = B,$$

o que é equivalente a

$$A\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=B.$$

Agora, multiplicando a igualdade acima por A^{-1}, obtemos que

$$A^{-1}\left(A\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}\right)=A^{-1}B,$$

o que é equivalente a

$$A^{-1}B=\left(A^{-1}A\right)\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=I_n\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}.$$

Assim, em um sistema de Cramer $AX = B$, através da matriz A^{-1} podemos determinar, por esse processo, a solução do sistema.

Exemplo 1.2.5. Considere o seguinte sisetma

$$\begin{cases}\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & & & = & 1,\\ & & y & + & z & = & 2,\\ x & + & y & + & z & = & 0.\end{array}\end{cases}$$

Em forma matricial, temos que o sistema é dado por

$$AX=B,$$

onde

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\quad \text{e}\quad B=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

Observe que I_n é a forma de escada reduzida de A, consequentemente, pela Proposição 1.1.7, A é invertível. Além disso, pelo que vimos anteriormente, a solução do sistema pode ser calculada da forma

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução do sistema é $(-2, 3, -1)$.

1.3 Determinantes

Finalizaremos esse capítulo fazendo uma pequena abordagem sobre determinantes. Tal intuito aqui é darmos uma condição para garantirmos a existência e unicidade de solução para sistemas lineares.

Definição 1.3.1. *Uma permutação σ é uma aplicação biunívoca do conjunto $\mathcal{S}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ sobre si mesmo.*

Notação 1.3.1. Denotamos a permutação σ por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.3.1. Se $n = 3$, existem $3!$ permutações de $\mathcal{S}_3$, a saber

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.3.2. *Considere $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_n$ uma permutação. Seja r o número de pares ordenados (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ tais que $\sigma(i) > \sigma(j)$. Chama-se sinal da permutação σ o número inteiro representado por sgn(σ), que é:*

- *sgn$(\sigma) = 1$, se r é par;*
- *sgn$(\sigma) = -1$, se r é ímpar.*

Diz que uma permutação σ é par se sgn$(\sigma) = 1$ e ímpar se sgn$(\sigma) = -1$.

Exemplo 1.3.2. Considere

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Os pares ordenados (i, j) com $1 \leq i < j \leq 3$ tais que $\sigma(i) > \sigma(j)$ são $(1, 2)$ e $(1, 3)$. Assim, $r = 2$ e sng$(\sigma) = 1$.

Passaremos agora a definir o que é o determinante de uma matriz de ordem n.

Definição 1.3.3. *Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. O determinante da matriz A é o número real*

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \textit{sng}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Exemplo 1.3.3. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. As permutações de $\mathcal{S}_2$ são $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Logo, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Observação 1.3.1. Assim o $\det(A)$, com $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é resultado da diferença entre o produto dos coeficientes da diagonal da esquerda para a direita pelo produto dos coeficientes da diagona da direita para a esquerda.

$$\begin{tikzcd} a_{11} \arrow[dr] & a_{12} \arrow[dl] \\ a_{21} & a_{22} \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.3.4. Se $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, então $\det(A) = (5 \cdot 3) - ((-2) \cdot 7) = 29$

Observação 1.3.2. Seja $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Assim o $\det(A)$, pode ser calculado da seguinte forma, repita a primeira e segunda coluna, o resultado da diferença entre a soma dos produtos dos coeficientes das diagonais da esquerda para a direita pela soma dos produtos dos coeficientes das diagonais da direita para a esquerda é o valor do determinante.

$$\begin{tikzcd} a_{11} \arrow[dr] & a_{12} \arrow[dr] & a_{13} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{11} \arrow[dl] & a_{12} \arrow[dl] \\ a_{21} & a_{22} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{23} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{21} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{tikzcd}$$

Logo, $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$.

Exemplo 1.3.5. Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, então

$\det(A) = (4 \cdot 3 \cdot 3) + (2 \cdot 5 \cdot 3) + ((-1) \cdot (-2) \cdot (-2)) - ((-1) \cdot 3 \cdot 3) + (4 \cdot 5 \cdot (-2)) + (2 \cdot (-2) \cdot 3)) = 123.$

Encerraremos esta seção apresentando um importante teorema que oferece uma fórmula para resolver sistemas n equações e n incógnitas. Essa fórmula é conhecida como "Regra de Cramer".

Considere o sistema com n equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases},$$

ou, na sua forma matricial

$$AX = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Sejam A_i a matriz obtida de A substituindo-se a i-ésima coluna de A, pelo vetor coluna B, $D = \det(A)$ e $N_i = \det(A_i)$, para $i = 1, 2, ..., n$.

Teorema 1.3.1. *O sistema acima tem solução única se, e somente se $D \neq 0$ onde a solução única é dada por*

$$x_1 = \frac{N_1}{D}, x_2 = \frac{N_2}{D}, ..., x_n = \frac{N_n}{D}.$$

A demonstração do teorema pode ser encontrada com detalhes em [8].

Exemplo 1.3.6. Vamos resolver o seguinte sistema utilizando a Regra de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z &= 18 \\ 3x + 2y + 5z &= 23 \\ 5x + 4y + 2z &= 27 \end{cases}$$

Colocando o sistema na sua forma matricial

$$AX = B,$$

Temos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 18 \\ 23 \\ 27 \end{bmatrix}.$$

Calculando o $\det(A) = D$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 31.$$

Logo, $D \neq 0$, então o sistema possui uma única solução.

Agora vamos Calcular N_x, N_y e N_z que são respectivamente os determinantes de A_x, A_y e A_z.

Calculando o $\det(A_x) = N_x$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 18 & 3 & 3 \\ 23 & 2 & 5 \\ 27 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 93.$$

Calculando o $\det(A_y) = N_y$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 3 \\ 3 & 23 & 5 \\ 5 & 27 & 2 \end{vmatrix} = 62.$$

Calculando o $\det(A_z) = N_z$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 18 \\ 3 & 2 & 23 \\ 5 & 4 & 27 \end{vmatrix} = 62.$$

Assim temos a única solução do sistema

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{93}{31} = 3, y = \frac{N_y}{D} = \frac{62}{31} = 2, e z = \frac{N_z}{D} = \frac{62}{31} = 2.$$

CAPÍTULO 2

Funcionamento do GPS

O GPS (Global Positioning System) é um dos marcos tecnológicos mais conhecidos do século XX e XXI. Desde sua criação, o GPS revolucionou a forma como no localizamos, navegamos e nos deslocamos pelo mundo. O GPS é uma rede de satélites em órbita ao redor da Terra, transmitindo informações precisas de localização, velocidade e tempo para receptores em todo o planeta. No entanto, por trás desse sistema aparentemente mágico, existe uma poderosa aplicação de Matemática, em particular, dos sistemas lineares. Neste capítulo, exploraremos a fascinante história do GPS, desde seus primeiros desenvolvimentos até sua ampla utilização global. Além disso, mergulharemos no mundo da matemática que sustenta esse sistema, concentrando-nos nos sistemas lineares e sua aplicação essencial para o GPS.

2.1 Um pouco da história do GPS

A história do GPS (Global Positioning System) remonta à era da Guerra Fria, quando os Estados Unidos buscavam uma tecnologia que permitisse rastrear e localizar suas forças militares em qualquer lugar do mundo. O desenvolvimento do GPS começou na década de 1960, com o projeto NAVSTAR (Navigation System with Timing and Ranging), liderado pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos.

O objetivo era criar um sistema de posicionamento global que permitisse às forças militares determinar com precisão a localização de seus navios, aeronaves e tropas terrestres em qualquer parte do mundo.

A primeira fase do desenvolvimento do GPS envolveu o lançamento de satélites experimentais para provar a viabilidade do conceito. Em 1978, o satélite NAVSTAR-1 foi lançado como o primeiro protótipo funcional. Ele foi seguido por outros satélites experimentais que testaram os princípios básicos do sistema.

No início dos anos 1980, a constelação de satélites do GPS começou a ser implantada. Os satélites NAVSTAR-2 e NAVSTAR-3 foram lançados em 1980 e 1981, respectivamente, demonstrando melhorias na precisão e na cobertura global.

Inicialmente, o GPS era restrito ao uso militar, mas em 1983 o presidente dos Estados Unidos, Ronald Reagan, ordenou que o sistema fosse disponibilizado também para uso civil. Essa decisão abriu caminho para uma ampla gama de aplicações comerciais e pessoais do GPS. No entanto, o GPS civil ainda enfrentou algumas limitações. A precisão era deliberadamente limitada para não prejudicar a vantagem militar dos EUA.

Na década de 1990, ocorreram avanços na precisão do GPS civil, graças à técnica de correção diferencial. Essa técnica envolve o uso de receptores GPS adicionais em pontos de referência conhecidos para corrigir os erros causados por atrasos do sinal devido à atmosfera terrestre. A correção diferencial melhorou a precisão do GPS para níveis que tornaram possível sua aplicação em áreas como navegação veicular e agrícola de precisão.

Ao longo dos anos, a constelação de satélites do GPS foi continuamente aprimorada. Novas gerações de satélites, como o Bloco IIF e o Bloco III, foram lançadas com melhorias na precisão, na resistência a interferências e na capacidade de rastrear sinais GPS em ambientes desafiadores, como áreas urbanas densas. Além disso, outros países também desenvolveram seus próprios sistemas de navegação por satélite. O GLONASS, sistema russo de posicionamento global, foi lançado em 1995 e, posteriormente, foi aberto para uso civil. A União Europeia desenvolveu o sistema Galileo em 2016. A China lançou o sistema BeiDou, que se tornou totalmente operacional em 2020. Esses sistemas, em conjunto com o GPS, fornecem uma cobertura global mais abrangente.

Atualmente, o GPS é amplamente utilizado em diversas aplicações, incluindo navegação veicular, sistemas de transporte e logística, aviação, agricultura, monitoramento de frota, atividades ao ar livre, georreferenciamento e pesquisa científica. Sua precisão e confiabilidade tornaram-se essenciais em muitos aspectos da nossa vida cotidiana.

A história do GPS representa uma notável conquista tecnológica e científica, sua criação revolucionou a forma como nos movemos e nos orientamos pelo mundo.

Figura 2.1: Satélites GPS Bloco III.

Fonte: www.gps.gov.

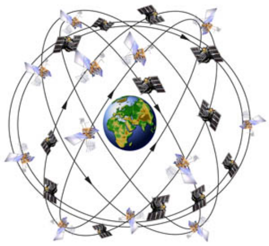
2.2 Como funciona o GPS

O funcionamento do GPS é baseado em princípios matemáticos e de sincronização precisa, permitindo que os receptores GPS determinem sua posição com alta precisão. Nessa sessão, exploraremos como o GPS determina a posição de um receptor e como os satélites trabalham juntos para fornecer os dados necessários.

O sistema GPS consiste em três componentes principais: os satélites em órbita, as estações terrestres de controle e os receptores GPS usados pelos usuários.

1. Satélites em órbita: O GPS é composto por uma constelação de aproximadamente 24 a 32 satélites operacionais, conhecidos como satélites NAVSTAR. Esses satélites estão distribuídos em várias orbitais ao redor da Terra, a uma altitude de cerca de 20.200 km. Eles são posicionados de forma a garantir que pelo menos quatro satélites estejam visíveis a qualquer momento em qualquer local da Terra.

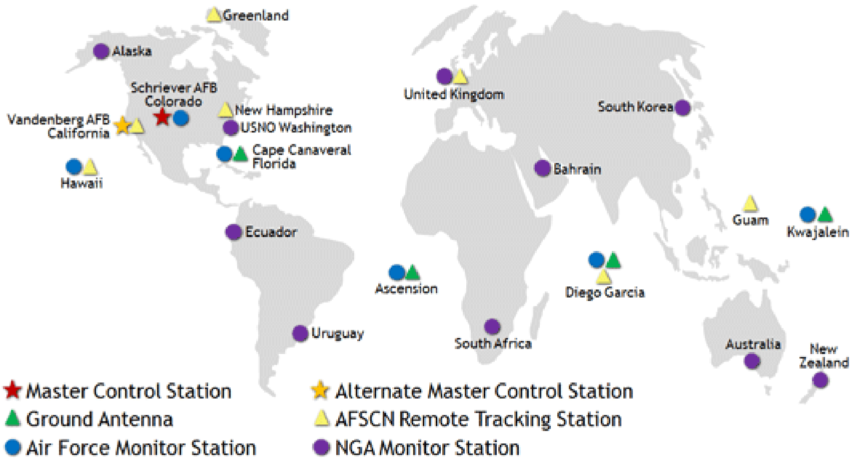
Figura 2.2: Satélites em órbita.



Fonte: www.gps.gov.

2. Estações terrestres de controle: Existem várias estações terrestres de controle espalhadas pelo mundo que monitoram e controlam os satélites GPS. Essas estações são responsáveis pelo rastreamento dos satélites, pela correção de suas órbitas e pelo envio de atualizações de dados para os satélites.

Figura 2.3: Mapa de orientação dos segmentos de controle.



Fonte: www.gps.gov.

3. Receptores GPS: Os receptores GPS são dispositivos eletrônicos que captam os sinais transmitidos pelos satélites GPS. Cada satélite transmite sinais que contêm informações sobre sua identificação, posição orbital e tempo preciso em que o sinal foi transmitido. Os receptores GPS usam essas informações para calcular sua própria posição.

Figura 2.4: Aparelho receptor GPS

Fonte: www.pt.dreamstime.com/.

O primeiro passo para determinar a posição de um receptor GPS é a sincronização precisa de tempo. Cada satélite GPS possui um relógio atômico extremamente preciso a bordo, que é sincronizado com outros satélites e com os relógios do segmento de controle em terra. Essa sincronização é essencial para garantir medições precisas de tempo nos sinais enviados por satélites.

Quando um receptor GPS capta os sinais emitidos pelos satélites, ele calcula o tempo que os sinais levam para percorrer a distância entre os satélites e o próprio receptor. Esses intervalos temporais são então utilizados para estimar com precisão a distância entre o receptor e cada um dos satélites, tomando como base a velocidade constante da luz.

As distâncias resultantes podem ser imaginadas como raios que se estendem a partir dos satélites, formando esferas no espaço. A localização do receptor é determinada pelo ponto onde essas esferas se intersectam. Para realizar esse cálculo, um sistema linear de equações é resolvido, empregando as equações que descrevem essas esferas imaginarias. Para que o cálculo da posição seja preciso, o receptor necessita receber sinais de, no mínimo, quatro satélites GPS simultaneamente.

Além disso, o GPS leva em consideração outros fatores para melhorar a precisão, como a correção diferencial. Uma correção diferencial envolve o uso de receptores GPS adicionais com códigos conhecidos para fornecer correções precisas nos dados de posicionamento do receptor em movimento. Essa técnica é especialmente útil para aplicações que exigem alta precisão, como navegação aérea e mapeamento topográfico.

É importante destacar que o funcionamento do GPS é possível graças ao trabalho contínuo do segmento de controle em terra. Esse segmento monitora os satélites, calcula suas órbitas, sincroniza seus relógios e envia correções de tempo e órbita para os satélites, garantindo a precisão e a confiabilidade do sistema.

2.3 A Matemática do GPS

O Sistema de Posicionamento Global (GPS) baseia-se em uma variedade de conceitos matemáticos para determinar a localização geográfica precisa de um dispositivo em qualquer lugar do mundo. Operando com base na triangulação e trilateração, métodos matemáticos usados para calcular a posição de um objeto com base em distâncias conhecidas de pontos de referência. Nesse caso os pontos de referência são os satélites que orbitam a Terra.

2.3.1 Sistema de coordenadas cartesianas.

Definição 2.3.1. *Chamamos de* ***Sistema Ortogonal de Coordenadas Cartesianas*** *ao sistema composto por três retas mutuamente perpendiculares que se cruzam em um único ponto denominado origem O. Além disso, temos as seguintes características:*

$i)$ *Essas retas são chamadas de eixos ordenados* Ox, Oy *e* Oz;

$ii)$ *Os planos formados por dois eixos são chamados de planos ordenados, sendo eles: plano* xy, *plano* xz *e plano* yz;

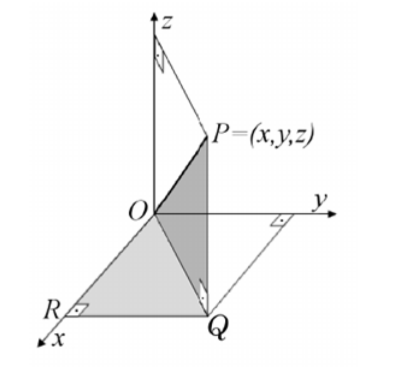
$iii)$ *Cada ponto* P *no espaço corresponde, de forma biunívoca, a um terno ordenado de números reais* (x, y, z)*, em que a coordenada* x *representa a distância de* P *até o plano* yz*, a coordenada* y *representa a distância de* P *até o plano* xz *e a coordenada* z *representa a distância de* P *até o plano* xy;

$iv)$ *A origem é representada pelo terno ordenado* $(0, 0, 0)$.

Na Figura 2.5, consideramos os pontos $P = (x, y, z)$ e Q, sendo Q a projeção de P no plano xy, em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem em O. Aplicando o Teorema de Pitágoras duas vezes, primeiro no triângulo ΔQOR e depois no triângulo ΔOPQ, podemos determinar a expressão para a distância entre O e P. Dessa forma, a distância entre O e P é expressa por

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Figura 2.5: Sistema Ortogonal de Coordenadas Cartesianas.



Fonte: Lima, Davi Dantas. Desvendando a Mátematica do GPS

De uma maneira mais geral, a distância entre os pontos $P = (x, y, z)$ e $C = (u, v, w)$ é dada por,

$$d(P, C) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2}. \tag{2.3.1}$$

Exemplo 2.3.1. Suponha que temos dois pontos,A e B, com as seguintes coordenadas: $A = (2, 3, 4)$ e $B = (6, 1, 8)$, para determinar a distância, vamos substituir essas coordenadas na equação (2.3.1).

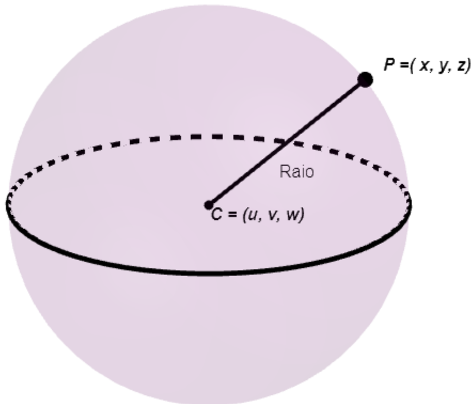
$$d(A,B) = \sqrt{(6-2)^2 + (1-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Portanto, a distância entre os pontos A e B, é igual a 6 unidades.

2.3.2 A superfície esférica em coordenadas cartesianas.

Definição 2.3.2. ***Superfície esférica*** *é o lugar geométrico dos pontos no espaço que são equidistantes de um ponto dado, onde essa distância é chamada de raio da esfera e o ponto é chamado de centro da esfera.*

Figura 2.6: Superfície esférica.



Fonte: Produzido pelo autor

Observando a Figura 2.6 dado um número r real positivo e $C = (u, v, w)$ um ponto fixado, podemos representar uma superfície esférica S de centro $C = (u, v, w)$ e raio r pelo conjunto.

$$S = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / d(P, C) = r\}$$

Então:

$$P \in S \Leftrightarrow d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2} = r$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última identidade, obtemos a **equação reduzida** da superfície esférica.

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = r^2 \qquad (2.3.2)$$

Desenvolvendo os quadrados em (2.3.2) obtemos a **equação geral** da superfície esférica.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xu - 2yv - 2zw + u^2 + v^2 + w^2 - r^2 = 0 \qquad (2.3.3)$$

Sendo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a = -2u, b = -2v, c = -2w$ e $d = u^2 + v^2 + w^2 - r^2$, podemos escrever a equação (2.3.3) da seguinte forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \tag{2.3.4}$$

Exemplo 2.3.2. Vamos encontra a equação de uma superfície esférica, conhecendo um ponto da superfície e seu centro. Para isso, consideremos os seguintes dados:

$1-$ Centro da esfera $C = (2, 3, 1)$

$2-$ Ponto na superfície $P = (5, 7, 2)$.

Observe que o raio da superfície esférica é igual a distância do centro a qualquer ponto na superfície, dessa forma usando a equação (2.3.1) podemos encontra a distância entre os pontos C e P, a qual será o raio da esfera.

$$d(C, P) = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}.$$

Portanto, o raio da esfera é igual a $\sqrt{26}$ unidades. Substituindo os valores das coordenadas do centro e do raio na equação (2.3.2), obtemos a equação reduzida de superfície esférica.

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 26.$$

Desenvolvendo os quadrados, obtemos a **equação geral** da superfície esférica.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z - 12 = 0$$

A demonstração do Lema 2.3.1 é baseada em [9]

Lema 2.3.1. *Os pontos A, B, C e D em $\mathbb{R}^3$ são coplanares se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = 0,$$

onde cada linha é dada pelas entradas dos vetores $\overrightarrow{AB} = B - A, \overrightarrow{AC} = C - A, \overrightarrow{AD} = D - A$.

Demonstração. Inicialmente, suponha que os quatro pontos distintos A, B, C e D em $\mathbb{R}^3$ são coplanares. Então os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$, também são coplanares. Logo podemos escrever um deles como combinação linear dos outros dois. Suponhamos que $\overrightarrow{AB}$ seja combinação linear de $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ assim, existem α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que.

$$B - A = \alpha(C - A) + \beta(D - A).$$

Então, usando a propriedades dos determinantes, temos;

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha(C-A)+\beta(D-A) \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha(C-A) \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta(D-A) \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} \\
&= \alpha \cdot \begin{vmatrix} (C-A) \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} + \beta \cdot \begin{vmatrix} (D-A) \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} \\
&= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que

$$\begin{vmatrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} = 0.$$

Então, pelas propriedades dos determinantes temos somente duas possibilidades:

$i)$ Uma das linhas do determinante é nula.

Supondo que $B - A = 0$, então $A = B$, que é um absurdo, pois pontos são distintos.

$ii)$ Duas linhas do determinante são iguais.

Para isso um dos vetrores linhas é combinação linear dos outros dois. Suponhamos que

$\overrightarrow{AB}$ seja combinação linear de $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ assim, existem α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que.

$$B - A = \alpha(C - A) + \beta(D - A).$$

então, $\overrightarrow{AB} = B - A, \overrightarrow{AC} = C - A$ e $\overrightarrow{AD} = D - A$. são coplamares. Logo os pontos A, B, C e D em $\mathbb{R}^3$ são coplanares.

$\square$

Exemplo 2.3.3. Verifique se os pontos A, B, C e D em $\mathbb{R}^3$, com as seguintes coordenadas $A = (1, 2, 3), B = (2, 4, 6), C = (3, 6, 9)$ e $D = (4, 8, 12)$, são coplanares?

Vamos calcular o deteminante onde as linhas são as entradas dos vetores $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3), \overrightarrow{AC} = (2, 4, 6)$ e $\overrightarrow{AD} = (3, 6, 9)$.

$$\begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo os pontos A, B, C e D, são coplanares.

O funcionamento correto do GPS depende do teorema 2.3.1 que utiliza a geometria das superfícies esféricas para determinar a posição de um receptor na superfície terrestre. Esse processo é realizado através da solução de um sistema linear de equações. Ao receber os sinais de pelo menos quatro satélites, o receptor GPS utiliza o tempo de chegada desses sinais para calcular as distâncias entre o receptor e cada satélite. Essas distâncias podem ser interpretadas como raios de esferas com centros nos satélites. Assim, esse teorema fornece uma matemática sólida para a aplicação prática do GPS, permitindo a localização precisa de um receptor na superfície terrestre.

A demonstração do teorema a seguir 2.3.1 foi baseada em [7]

Teorema 2.3.1. *Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares então essa intersecção consiste de um único ponto.*

Demonstração. Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas de centro $C_1 = (x_1, y_1, z_1), C_2 = (x_2, y_2, z_2), C_3 = (x_3, y_3, z_3)$ e $C_4 = (x_4, y_4, z_4)$ e raios r_1, r_2, r_3 e r_4 respectivamente. Devemos mostra que se a intersecção de S_1, S_2, S_3 e S_4 é um conjunto não vazio, e seus centros são não coplanares então sua intersecção será um único ponto. De fato, no sistema GPS, os satélites se movem em órbitas não coplanares e o ponto de intersecção não é vazio pela própria existência do usuário.

Sendo P = (x, y, z) o ponto de intersecção de S_1, S_2, S_3 e S_4, considerando as equações reduzidas das superfícies esféricas (2.3.2) , temos o seguinte sistemas de equações.

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 & + & (y-y_1)^2 & + & (z-z_1)^2 & = & {r_1}^2 \\ (x-x_2)^2 & + & (y-y_2)^2 & + & (z-z_2)^2 & = & {r_2}^2 \\ (x-x_3)^2 & + & (y-y_3)^2 & + & (z-z_3)^2 & = & {r_3}^2 \\ (x-x_4)^2 & + & (y-y_4)^2 & + & (z-z_4)^2 & = & {r_4}^2 \end{cases}$$

Observando a equação geral das superfícies esféricas (2.3.3) o sistema de equações pode ser reescrito como,

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2xx_1-2yy_1-2zz_1 & = & {r_1}^2-{x_1}^2-{y_1}^2-{z_1}^2 \\ x^2+y^2+z^2-2xx_2-2yy_2-2zz_2 & = & {r_2}^2-{x_2}^2-{y_2}^2-{z_2}^2 \\ x^2+y^2+z^2-2xx_3-2yy_3-2zz_3 & = & {r_3}^2-{x_3}^2-{y_3}^2-{z_3}^2 \\ x^2+y^2+z^2-2xx_4-2yy_4-2zz_4 & = & {r_4}^2-{x_4}^2-{y_4}^2-{z_4}^2 \end{cases}$$

Ao subtrairmos as demais equações da primeira equação, obtemos um sistema equivalente de equações lineares em x, y e z, uma vez que os termos x^2, y^2 e z^2 são eliminados,

$$\begin{cases} 2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+2(z_2-z_1)z & = & {x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2-{x_1}^2-{y_1}^2+{z_1}^2+{r_1}^2-{r_2}^2 \\ 2(x_3-x_1)x+2(y_3-y_1)y+2(z_3-z_1)z & = & {x_3}^2+{y_3}^2+{z_3}^2-{x_1}^2-{y_1}^2+{z_1}^2+{r_1}^2-{r_3}^2 \\ 2(x_4-x_1)x+2(y_4-y_1)y+2(z_4-z_1)z & = & {x_4}^2+{y_4}^2+{z_4}^2-{x_1}^2-{y_1}^2+{z_1}^2+{r_1}^2-{r_4}^2 \end{cases}$$

Para organizar melhor o sistema , ainda podemos multplicar todas as equações por $\frac{1}{2}$,

$$\begin{cases} (x_2-x_1)x+(y_2-y_1)y+(z_2-z_1)z & = & \frac{1}{2}({x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2-{x_1}^2-{y_1}^2+{z_1}^2+{r_1}^2-{r_2}^2) \\ (x_3-x_1)x+(y_3-y_1)y+(z_3-z_1)z & = & \frac{1}{2}({x_3}^2+{y_3}^2+{z_3}^2-{x_1}^2-{y_1}^2+{z_1}^2+{r_1}^2-{r_3}^2) \\ (x_4-x_1)x+(y_4-y_1)y+(z_4-z_1)z & = & \frac{1}{2}({x_4}^2+{y_4}^2+{z_4}^2-{x_1}^2-{y_1}^2+{z_1}^2+{r_1}^2-{r_4}^2) \end{cases}$$

Agora precisamos mostra que o sistema acima tem uma única solução, e isso só acontece quando o determinante da matriz dos coeficientes é não nulo,

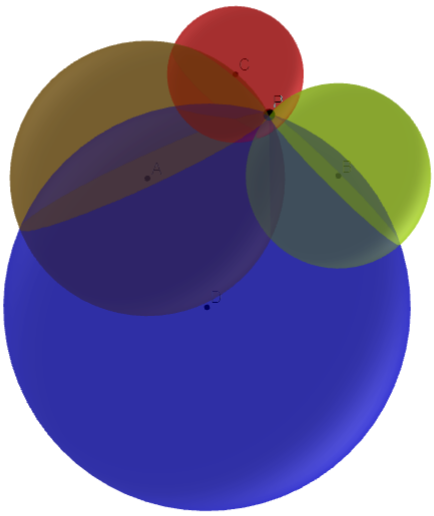
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Observe que, cada linha é dada pelas entradas dos vetores $\overrightarrow{C_1C_2} = C_2 - C_1, \overrightarrow{C_1C_3} = C_3 - C_1$, e $\overrightarrow{C_1C_4} = C_4 - C_1$,

$$\begin{vmatrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Por hipótese C_1, C_2, C_3 e C_4, são pontos não coplanares, logo pelo Lema 2.3.1 o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero, portanto o sistema possui uma única solução. □

Figura 2.7: Intersecção de 4 superfícies esféricas com centros não coplanares.



Fonte: Produzido pelo autor.

Exemplo 2.3.4. Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas de centros $C_1 = (1, 2, 3), C_2 = (4, 5, 6), C_3 = (-2, 0, 1)$ e $C_4 = (0, 3, -1)$, e raios $r_1 = \sqrt{27}, r_2 = \sqrt{72}, r_3 = \sqrt{34}$ e $r_4 = \sqrt{65}$, respectivamente. Note que, os centros das superfícies esféricas, C_1, C_2, C_3, e C_4,, são pontos não coplanares, pois de acordo com o lema 2.3.1 o determinante onde cada linha é dada pelas entradas dos vetores $\overrightarrow{C_1C_2} = (3, 3, 3), \overrightarrow{C_1C_3} = (-3, -2, -2)$ e $\overrightarrow{C_1C_4} = (-1, 1, -4)$ é diferente de zero.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 24 + 6 - 9 - 6 + 6 - 36 = -15.$$

Pelo teorema 2.3.1, vamos verificar se existir um único ponto $P = (x, y, z) \in S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$.

$$\begin{cases} (x-1)^2 & + & (y-2)^2 & + & (z-3)^2 & = & 27 \\ (x-4)^2 & + & (y-5)^2 & + & (z-6)^2 & = & 72 \\ (x+2)^2 & + & y^2 & + & (z-1)^2 & = & 34 \\ x^2 & + & (y-3)^2 & + & (z+1)^2 & = & 65 \end{cases}$$

Desenvolvendo os quadrados temos:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & - & 2x & - & 4y & - & 6z & = & 13 \\ x^2+y^2+z^2 & - & 8x & - & 10y & - & 12z & = & -5 \\ x^2+y^2+z^2 & + & 4x & & & - & 2z & = & 29 \\ x^2+y^2+z^2 & & & - & 6y & + & 2z & = & 55 \end{cases}$$

Ao subtrairmos as demais equações da primeira equação, obtemos o seguinte sistema equivalente de equações lineares.

$$\begin{cases} 6x + 6y + 6z & = & 18 \\ -6x - 4y - 4z & = & -16 \\ -2x + 2y - 8z & = & -42 \end{cases}$$

Organizar melhor o sistema , ainda podemos multplicar a todas as equações por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z & = & 9 \\ -3x - 2y - 2z & = & -8 \\ -x + y - 4z & = & -21 \end{cases}$$

Para que o sistema acima tenha uma única solução, o determinante da matriz dos coeficientes tem que ser diferente de zero. Note que, as linhas da matriz dos coeficientes são as entradas dos vetores $\overrightarrow{C_1C_2} = (3, 3, 3), \overrightarrow{C_1C_3} = (-3, -2, -2)$ e $\overrightarrow{C_1C_4} = (-1, 1, -4)$, como já vimos, esse determinante é diferente de zero. Logo, o sistema possui uma única solução.

Para a resolução do sistema linear, vamos reescrever o sistema na sua forma matricial estendida, então temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 9 \\ -3 & -2 & -2 & -8 \\ -1 & 1 & -4 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+l_2]{\frac{l_1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow{l_1+l_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -18 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)l_1+(-1)l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{l_3}{5}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+(-1)l_3]{l_1+(-1)l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Assim a única solução do sistema é $x = 2, y = -3$ e $z = 4$. Logo.

$$P = (2, -3, 4) = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4.$$

2.3.3 Coordenadas Geográficas.

A construção dessa seção foi baseada em [9]

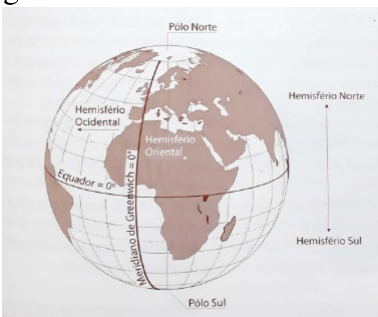
A localização no globo terrestre envolve conceitos importantes, como latitude, longitude, meridianos e paralelos. Para compreender o funcionamento do GPS, é essencial relembrar esses conceitos básicos.

Vamos imaginar a Terra como uma esfera. O eixo polar é uma reta que passa pelo centro da Terra e em torno da qual ela realiza o movimento de rotação. Os pontos de interseção entre o eixo polar e a superfície da Terra são chamados de polo Norte e polo Sul, representados por N e S, respectivamente.

O plano do Equador é perpendicular ao eixo polar e passa pelo centro da Terra. Ele divide a Terra em duas partes, conhecido como Hemisfério Norte e Hemisfério Sul, cada um contendo seu respectivo polo. A linha do Equador é a circunferência formada pela interseção do plano do Equador com a superfície da Terra.

Os meridianos são semicircunferências que têm seus pontos de origem nos polos. O meridiano de Greenwich é um meridiano especial, onde uma longitude é definida como $0°$. Ele recebe esse nome por passar pelo famoso Observatório Real em Greenwich, localizado a sudeste de Londres. O plano que contém o meridiano de Greenwich divide a Terra em Hemisfério Oeste e Hemisfério Leste. Além disso, temos a latitude e a longitude como conceitos importantes.

Figura 2.8: Hemisférios da Terra.

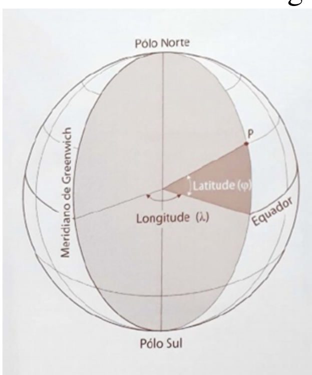


Fonte: Souza, Joel Cordeiro de. GPS: a Matemática por trás e algumas reflexões.

Definição 2.3.3. *Dado um ponto P na superfície terrestre, a* ***Latitude*** *de P é a medida (em graus, minutos e segundos) do arco que vai de P até o Equador e que está contido em um meridiano. A latitude se mede de $0°$ a $90°$ e, dependendo do hemisfério onde P está, é classificado em N (North - Norte, em inglês) ou S (South - Sul,em inglês).*

Definição 2.3.4. *Dado um ponto P na superfície terrestre,a* ***Longitude*** *de P é a medida (em graus, minutos e segundos) do arco que vai de P até o meridiano de Greenwich e que está contido em um paralelo. A longitude mede de $0°$ a $180°$ e, dependendodo hemisfério onde P está, é classificado em E (East - leste, em inglês) ou W (West - oeste, em inglês).*

Figura 2.9: Latitude e Longitude



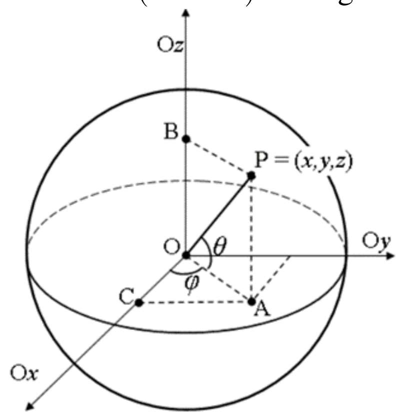
Fonte: Souza, Joel Cordeiro de. GPS: a Matemática por trás e algumas reflexões.

2.3.4 Coordenadas Geográficas X Coordenadas Cartesianas.

As coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas são sistemas de coordenadas distintos, porém, podemos estabelecer uma relação entre eles, e utiliza-los em conjunto para determinar a posição de um usuário do GPS.

Para estabelecer essa relação, vamos fixar um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas da seguinte maneira: a origem O do sistema coincidirá com o centro da Terra, o eixo Oz positivo será orientado na direção do polo Norte, o plano xy será o plano Equador, e o eixo Ox positivo irá atravessar o meridiano de Greenwich (longitude $0°$), enquanto o eixo Oy positivo irá atravessar o meridiano de longitude $90°E.$ como podemos ver na Figura 2.10.

Figura 2.10: Latitude $\theta = m(\angle AOP)$ e Longitude $\varphi = m(\angle COA)$.



Fonte: Lima, Davi Dantas, Desvendando a Mátematica do GPS

Vejamos agora como as coordenadas cartesianas de um ponto P sobre a superfície da terra, estão relacionadas com as suas coordenadas geográficas.

De acordo com a Figura 2.10 o ponto $P = (x, y, z)$ está sobre a superfície da terra, e suas coordenadas geográficas de latitude e longitude estão representadas respectivamente pelos valores de θ e φ. Note que, no triângulo retângulo ΔOPB, usando as razões trigonométricas no triângulo retângulo, podemos calcular o cosseno do ângulo $\angle BOP$, Observe também que o ângulo $\angle AOB$, é reto, então o ângulo $\angle BOP$ é complementar de $\angle AOP$. assim temos

$$\cos(90 - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Note que, $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$, pois os ângulos $(90° - \theta)$ e θ são complementares.

$$\sin\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{2.3.5}$$

Essa equação atribui um único valor entre $-90°$ e $90°$ para o ângulo θ, e dependendo do valor da coordenada z temos:

$i)$ Se $z > 0$, temos $\theta > 0°$, ou seja, P tem latitude θ N(Norte);

$ii)$ Se $z < 0$, temos $\theta < 0°$, ou seja, P tem latitude θ S (Sul);

$iii)$ Se $z = 0$, temos $\theta = 0°$, ou seja, P tem latitude $0°$ (está sobre a linha do equador).

Além disso, no triângulo retângulo ΔOAC, aplicando as razões trigonométrica, podemos calcular o cosseno e o seno do ângulo φ, assim temos

$$\sin\varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{2.3.6}$$

$$\cos\varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{2.3.7}$$

Essas equações definem um único valor entre $-180°$ e $180°$ para o ângulo φ, e dependendo do valor da coordenada y temos:

$i)$ Se $y > 0$, temos $\varphi > 0°$, ou seja, P tem longitude φ E(Leste);

$ii)$ Se $y < 0$, temos $\varphi < 0°$, ou seja, P tem longitude φ W (Oeste);

$iii)$ $y = 0$ e $x > 0$, temos $\varphi = 0°$, ou seja, P tem longitude $0°$ (está sobre o meridiano de Greenwich).

$iv)$ $y = 0$ e $x < 0$, temos $\varphi = 180°$, ou seja, P tem longitude $180°$

Além disso, chamamos de h a **altitude** do ponto P, que é dado por:

$$h = d(OP) - r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} - r. \tag{2.3.8}$$

Onde r é o raio da terra, que para fins didáticos vamos considerar o valor aproximado de $r = 6,4 \cdot 10^6 km$.

Exemplo 2.3.5. Vamos determinar as coordenadas geográficas de um ponto P, cuja as coordenadas cartesianas são:

$$P = (4,4\sqrt{3}\cdot 10^6, -4,4\cdot 10^6, 8,8\sqrt{3}\cdot 10^6).$$

Primeiro vamos calcular a altitude, usando a equação (2.3.8) e o raio da terra $r = 6,4 \cdot 10^6$.

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} - r \\ &= \sqrt{\left(4,4\sqrt{3}\cdot 10^6\right)^2 + \left(-4,4\cdot 10^6\right)^2 + \left(8,8\sqrt{3}\cdot 10^6\right)^2} - 6,4\cdot 10^6 \\ &= \sqrt{309,66\cdot 10^{12}} - 6,4\cdot 10^6 \\ &= 17,60\cdot 10^6 - 6,4\cdot 10^6 \\ &= 11,20\cdot 10^6. \end{aligned}$$

Podemos concluir aproximadamente que

$$Altitude = 11,2\cdot 10^6 m.$$

Já a latitude pode ser calculada através da equação (2.3.5).

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= \frac{8,8\sqrt{3}\cdot 10^6}{17,60\cdot 10^6}. \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Daí temos

$$\theta = 60°.$$

Ou seja

$$Latitude = 60° N.$$

Além disso, podemos calcular a longitude através das equações (2.3.6) e (2.3.7).

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{-4,4\cdot 10^6}{\sqrt{\left(4,4\sqrt{3}\cdot 10^6\right)^2 + \left(-4,4\cdot 10^6\right)^2}}. \\ &= \frac{-4,4\cdot 10^6}{8,8\cdot 10^6} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
&= \frac{4,4\sqrt{3}\cdot 10^6}{\sqrt{\left(4,4\sqrt{3}\cdot 10^6\right)^2+(-4,4\cdot 10^6)^2}}.\\
&= \frac{4,4\sqrt{3}\cdot 10^6}{8,8\cdot 10^6}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Daí temos

$$\sin\varphi = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ou seja

$$\varphi = -30^\circ.$$

Logo.

$$Longitude = 30^\circ W.$$

Assim as coordenadas geográfica d pontp P são:

$$Latitude = 60^\circ N, Longitude = 30^\circ W \quad \text{e} \quad Altitude = 11,2\cdot 10^6 m$$

2.3.5 Determinando a Localização com GPS: Um Caso Real.

Nesta seção, vamos relatar um caso real no qual um usuário do GPS será capaz de calcular sua própria posição com base nas informações das posições de quatro satélites e nos tempos de transmissão e recepção dos sinais.

É importante destacar que as informações transmitidas pelo sistema GPS são representadas com alta precisão, envolvendo geralmente dez ou mais dígitos. Se este exemplo for utilizado em uma atividade em sala de aula, torna-se a presença do uso de calculadoras ou softwares com a capacidade de resolver sistemas lineares contendo os coeficientes dessa ordem. Essa abordagem garante uma manipulação exata dos dados e resultados.

No entanto, é válido considerar uma alternativa, onde se abre mão de parte dessa precisão, trabalhando com um número menor de dígitos e utilizando a notação científica. Ao adotar essa abordagem, é possível simplificar os cálculos e tornar o processo mais acessível, sem comprometer significativamente a qualidade dos resultados obtidos. Isso pode ser particularmente útil em atividades didáticas, permitindo que os alunos compreendam os conceitos essenciais do GPS sem serem sobrecarregados com complexidades numéricas.

A escolha entre a precisão máxima e a notação científica dependerá do contexto e dos objetivos da atividade, mas ambas as abordagens são valiosas para fornecer uma compreensão sólida sobre o funcionamento do GPS e suas aplicações no mundo real.

Na tabela abaixo estão as coordenadas cartesianas das posições dos satélites, bem como os tempos registrados entre a transmissão e a recepção do sinal de um usuáro do GPS.

	coordenadas	tempos
Satelite 1	$(2,5 \cdot 10^7, -4,2 \cdot 10^6, 9,1 \cdot 10^6)$	0,0750369603
Satelite 2	$(3,9 \cdot 10^6, 7,3 \cdot 10^6, 2,5 \cdot 10^7)$	0,0950138875
Satelite 3	$(1,9 \cdot 10^6, -1,1 \cdot 10^7, 2,4 \cdot 10^7)$	0,0880862658
Satelite 4	$(1,1 \cdot 10^7, -1,3 \cdot 10^7, 2,0 \cdot 10^7)$	0,0796838422

Com base nesses dados e levando em consideração que o sinal recebido viaja à velocidade da luz (299.792.458 m/s), podemos determinar a distância entre o usuário do GPS e os satélites. Para isso, basta multiplicar cada tempo de transmissão e recepção do sinal pela velocidade da luz. Assim temos que a distância aos satélites é dada por

$$d = v \cdot t$$

Calculando as distâncias a cada satelite temos

$$\begin{array}{rcccl} d_1 & = & 299792458 \cdot 0,0750369603 & = & 22495514{,}770 \\ d_2 & = & 299792458 \cdot 0,0950138875 & = & 28484446{,}906 \\ d_3 & = & 299792458 \cdot 0,0880862658 & = & 26407598{,}145 \\ d_4 & = & 299792458 \cdot 0,0796838422 & = & 23888614{,}928. \end{array}$$

Isso permite escrever as equações reduzidas das superfícies esféricas imaginarias centradas nas posições de cada satélite onde os raios serão iguais às distâncias calculadas.

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} (x - 2,5 \cdot 10^7)^2 & + & (y + 4,2 \cdot 10^6)^2 & + & (z - 9,1 \cdot 10^6)^2 & = & 22495514,770^2 \\ (x - 3,9 \cdot 10^6)^2 & + & (y - 7,3 \cdot 10^6)^2 & + & (z - 2,5 \cdot 10^7)^2 & = & 28484446,960^2 \\ (x - 1,9 \cdot 10^6)^2 & + & (y + 1,1 \cdot 10^7)^2 & + & (z - 2,4 \cdot 10^7)^2 & = & 26407598,145^2 \\ (x - 1,1 \cdot 10^7)^2 & + & (y + 1,3 \cdot 10^7)^2 & + & (z - 2,0 \cdot 10^7)^2 & = & 23888614,948^2 \end{array} \right.$$

Desenvolvendo os quadrados temos:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-5,0\cdot 10^7x+8,4\cdot 10^6y-18,2\cdot 10^6z &=& -2,1940181520\cdot 10^{14} \\ x^2+y^2+z^2-7,8\cdot 10^6x-14,6\cdot 10^6y-5,0\cdot 10^7z &=& 1,1786671559\cdot 10^{14} \\ x^2+y^2+z^2-3,8\cdot 10^6x+2,2\cdot 10^7y-4,8\cdot 10^7z &=& -3,2487602073\cdot 10^{12} \\ x^2+y^2+z^2-2,2\cdot 10^7x+2,6\cdot 10^7y+4,0\cdot 10^7z &=& -1,1933407680\cdot 10^{14} \end{cases}$$

Ao subtrairmos as demais equações da primeira equação, obtemos um sistema equivalente de equações lineares em x, y e z, uma vez que os termos x^2, y^2 e z^2 são eliminados.

$$\begin{cases} -4,22\cdot 10^7x+2,3\cdot 10^7y+3,18\cdot 10^7z &=& -3,372655308\cdot 10^{14} \\ -4,62\cdot 10^7x-1,36\cdot 10^7y+2,98\cdot 10^7z &=& -2,161530550\cdot 10^{14} \\ -2,8\cdot 10^7x-1,76\cdot 10^7y+2,18\cdot 10^7z &=& -1,000677384\cdot 10^{14} \end{cases}$$

Para organizar melhor o sistema , ainda podemos dividir todas as equações por -10^7.

$$\begin{cases} 4,22x-2,3y-3,18z &=& 33726553,08 \\ 4,62x+1,36y-2,98z &=& 21615305,50 \\ 2,8x+1,76y-2,18z &=& 10006773,84 \end{cases} \tag{2.3.9}$$

Vamos calcular o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear acima

$$\begin{vmatrix} 4,22 & -2,3 & -3,18 \\ 4,62 & 1,36 & -2,98 \\ 2,8 & 1,76 & -2,18 \end{vmatrix} = -8,0996.$$

Logo, desde que o determinante é diferente de zero, o Teorema 1.3.1 garante a existência de uma única solução.

Agora, vamos usar o método de eliminação de Gauss para determinarmos a solução do sistema acima. Vamos reescrever o sistema na sua forma matricial estendida, então temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4,22 & -2,3 & -3,18 & 33726553,08 \\ 4,62 & 1,36 & -2,98 & 21615305,50 \\ 2,8 & 1,76 & -2,18 & 10006773,84 \end{array}\right].$$

Agora, vamos finalizar o argumento em alguns passos:

Passo 1. Fazer $l_2 \to l_2 - \left(\frac{231}{211}\right) l_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4,22 & -2,3 & -3,18 & 33726553,08 \\ 0 & 3,88 & 0,5 & -15308077,25 \\ 2,8 & 1,76 & -2,18 & 10006773,84 \end{array}\right].$$

Passo 2: Fazer $l_3 \to l_3 - \left(\frac{140}{211}\right) l_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4,22 & -2,3 & -3,18 & 33726553,08 \\ 0 & 3,88 & 0,5 & -15308077,25 \\ 0 & 3,29 & -0,07 & -12371033,89 \end{array}\right].$$

Passo 3: Fazer $l_3 \to l_3 - \left(\frac{329}{388}\right) l_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4,22 & -2,3 & -3,18 & 33726553,08 \\ 0 & 3,88 & 0,5 & -15308077,25 \\ 0 & 0 & -0,49 & 609268,72 \end{array}\right].$$

Assim, temos o seguinte sistema reduzido

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4,22x & - & 2,3y & - & 3,18z & = & 33726553,08 \\ & & 3,88y & + & 0,5z & = & -15308077,25 \\ & & & & -0,49z & = & 609268,72. \end{array}\right.$$

Portanto, temos que a única solução para o sistema é:

$$x = 5011993; y = -37905553; z = -1213104,$$

que são as coordenadas cartesianas do ponto P que pertence simultaneamente as quatro esferas imaginarias. Além disso, são as coordenadas cartesianas da localização do usuário do GPS do nosso problema.

Partindo do ponto $P = (5011993, -37905553, -1213104)$ podemos encontra suas coordenadas geograficas.

Primeiro vamos calcular a latitude, usando a equação (2.3.5)

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ &= \frac{-1213104}{\sqrt{(5011993)^2+(-3790553)^2+(-1213104)^2}}\\ &= -0,1895475.\end{aligned}$$

Daí temos

$$\theta = -10,92654^\circ = -10^\circ 55\text{''}35.688.$$

Ou seja

$$Latitude = 10^\circ 55\text{''}35.688 S.$$

Além disso, podemos calcular a longitude através das equações (2.3.6) e (2.3.7).

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-3790553}{\sqrt{5011993^2+(-3790553)^2}} = -0,6032070.$$

e,

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{5011993}{\sqrt{5011993^2+(-3790553)^2}} = 0,7975800.$$

Daí temos

$$\sin\varphi = -0,06032070 \quad \text{e} \quad \cos\varphi = 0,7975800.$$

Ou seja

$$\varphi = -37,100081^\circ = -37^\circ 06\text{''}0,2808.$$

Logo.

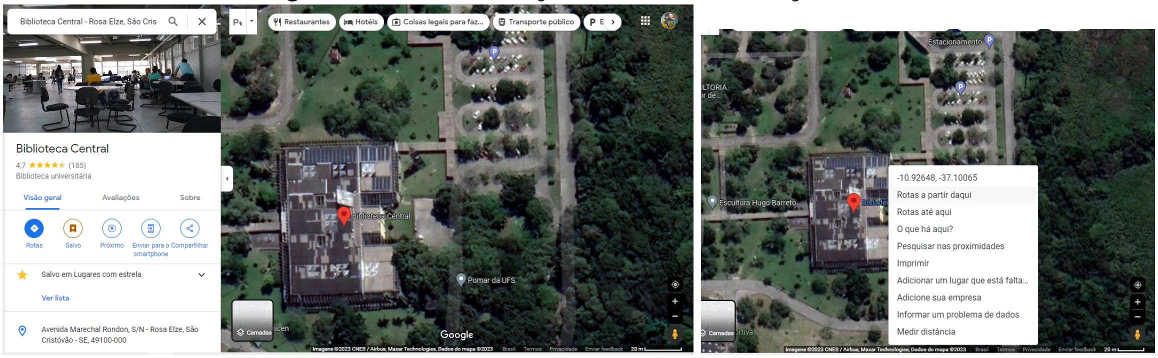
$$Longitude = 37^\circ 06\text{''}0,2808.^\circ W.$$

Assim as coordenadas geográfica do ponto P são:

$$Latitude = 10^\circ 55\text{''}35.688 S \quad \text{e} \quad Longitude = 37^\circ 06\text{''}0,2808.^\circ W.$$

Após a pesquisa realizada no Google Maps, determinamos a localização do usuário como a Biblioteca Central da Universidade Federal de Sergipe, localizada na cidade de São Cristóvão - SE. As informações recebidas estão representadas nas figuras 2.11 abaixo.

Figura 2.11: Localização do usuário situação real.



Fonte: www.google.com/maps

Solução do sistema (2.3.9) **via uso do Matrix Calculator**

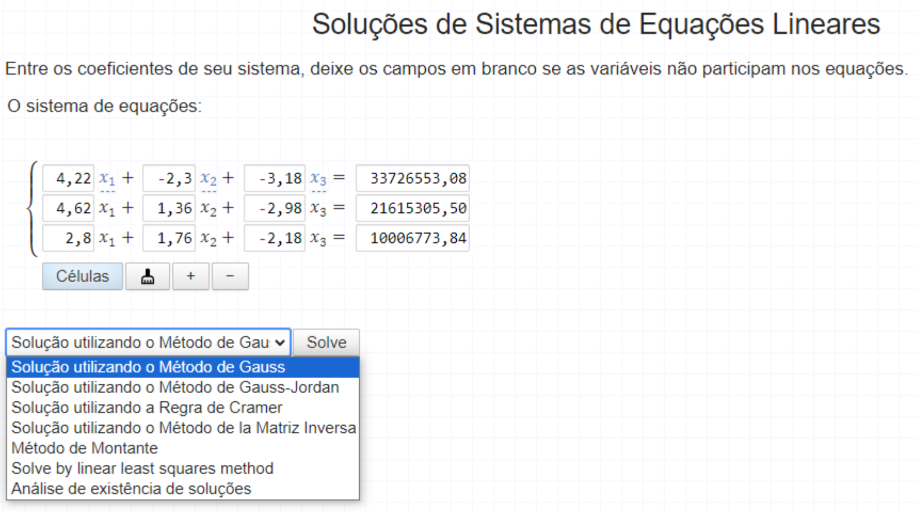
Além disso, podemos contar com o auxílio de ferramentas como calculadoras ou softwares especializados para obtermos resultados mais precisos. Vamos agora verificar a solução do sistema anterior utilizando o **"Matrix Calculator"**, uma ferramenta gratuita disponível no site https://matrixcalc.org/pt / . A seguir, apresentaremos o passo a passo para utilizar a Calculadora Matrix Calculator. Todas as imagens foram retiradas do site: https://matrixcalc.org/pt/.

Na figura 2.12 encontramos a página inicial.

Figura 2.12: Matrix Calculator - Pagina inicial.

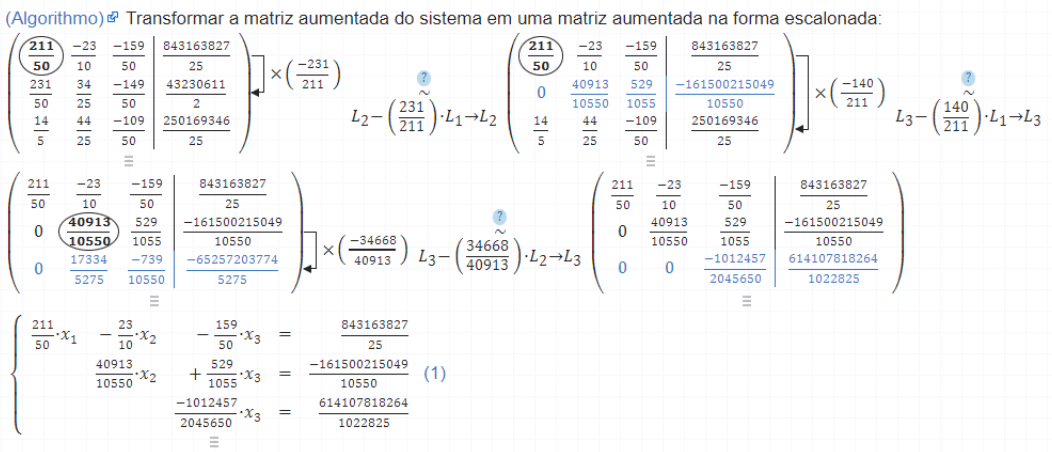
Agora na figura 2.13 inserimos os valores e escolhemos o método para a resolução.

Figura 2.13: Matrix Calculator - Inserção dos dados



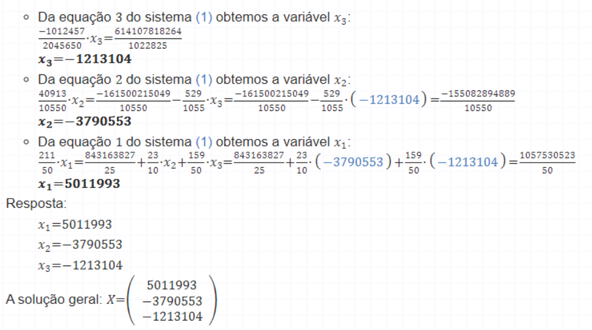
Na figura 2.14 estão o passo a passo da resolução pelo método de Gauus.

Figura 2.14: Matrix Calculator - Resolução primeira parte



Por fim, na figura 2.15 temos a resolução do sistema

Figura 2.15: Matrix Calculator - Resolução segunda parte



O uso de recursos como esse é extremamente valioso, pois facilita e agiliza nossos cálculos, garantindo maior precisão em nossos resultados.

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, exploramos a aplicação de sistemas de equações lineares ao funcionamento do GPS, com uma abordagem matemática sólida que incluiu os conceitos de matrizes, sistemas lineares, e a relação entre coordenadas cartesianas e geográficas.

O primeiro capítulo tratou de maneira detalhada os fundamentos de matrizes e sistemas lineares. Foi possível compreender a representação matricial de sistemas de equações lineares, sua interpretação geométrica e as técnicas de resolução, como eliminação de Gauss e a regra de Cramer.

Já no segundo capítulo, mergulhamos na história e no funcionamento do GPS. Iniciamos com uma contextualização histórica, destacando o desenvolvimento do GPS desde sua concepção até se tornar uma ferramenta indispensável em diversos setores da sociedade moderna. Exploramos a arquitetura do sistema GPS, composta por uma constelação de satélites em órbita, a estação de controle e os receptores nos dispositivos que utilizam o GPS.

Além disso, compreendemos como a matemática tem um papel central no funcionamento do GPS. Os conceitos de geometria analítica e sistemas de equações lineares são fundamentais para determinar a posição de um receptor.

Dessa forma, concluímos que a aplicação dos sistemas de equações lineares ao funcionamento do GPS é um tema de grande relevância e complexidade, cujo estudo contínuo e aprofundado são fundamentais para o avanço dessa tecnologia tão presente em nosso cotidiano.

Referências

[1] ALVES, Sérgio. A Matemática do GPS. Revista do professor de matemática , v. 59, n. 1, 2006.

[2] DE SOUZA, Joel Cordeiro. GPS: a Matemática por trás e algumas reflexões. (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2021.

[3] FERNANDEZ, Cecília S.; HEFEZ, Abramo. Introdução a Álgebra Linear. Rio de Janeiro: SBM.(Coleçao PROFMAT), 2022.

[4] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria Analítica. Rio de Janeiro: SBM.(Coleçao PROFMAT), 2017.

[5] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. Atual, 2004.

[6] MORAES, Marcelo Cardozo de. O funcionamento do GPS e a Matemática do ensino médio . (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

[7] WILBERSTAEDT, Giorgio et al. Aplicações de sistemas de equações lineares em três diferentes contextos. (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal de Santa Catárina, Florianópolis, 2022.

[8] LEVORATO, Gabriela Baptistela Peres. Matrizes, determinantes e sistemas lineares: aplicações na Engenharia e Economia. 2017.

[9] LIMA, Davi Dantas et al. Desvendando a Matemática do GPS. (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2013.

[10] KOZAKEVICH, Daniel; BEAN, Sonia Elena Palomino Castro. Álgebra Linear I. Florianópolis: UFSC. 2011.

[11] STEINBRUCH, Alfredo; PAULO, Winterle. Álgebra linear. 1987.

[12] DE JESUS DUARTE, Alessandra; COELHO, Lucinda Maria de Fátima Rodrigues. SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL (GPS): uma aplicação da geometria analítica. Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática, v. 1, n. 1, 2020..

[13] LEON, Steven J. Álgebra Linear com Aplicações . Grupo Gen-LTC, 2000.

[14] CALLIOLI, Carlos Alberto; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. Álgebra Linear e Aplicações. 4a. edição. São Paulo, Atual, 1983.

[15] CABRAL, Isabel, Perdigão, Cecília, e Saiago, Carlos.. Álgebra linear: teoria, exercícios resolvidos e exercícios propostos com soluções. Escolar editora, 2009.

[16] https://www.gps.gov/

[17] https://matrixcalc.org/pt/.

[18] www.google.com/maps.