UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Sobre o Teorema do Valor Intermediário

Fábio Maia de Morais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa

São José do Rio Preto - SP

Agosto - 2013

Morais, Fabio Maia de.
Sobre o teorema do valor intermediário / Fabio Maia de Morais. -- São José do Rio Preto, 2013
51 f. : il.

Orientador: João Carlos Ferreira Costa
Dissertação (mestrado) ï Universidade Estadual Paulista ñJúlio de Mesquita Filhoò, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Cálculo diferencial. 3. Funções contínuas. 4. Teoria dos conjuntos. 5. Matemática (Ensino médio) ï Estudo e ensino. I. Costa, João Carlos Ferreira. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU ï 517.2

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

A minha amada esposa Luciana Maia, que esteve sempre ao meu lado que ao longo deste trabalho aguardava paciente o passar das horas, que nos consumiam os raros momentos do qual dispúnhamos.

Agradecimentos

À Deus.

A todos professores dos quais tive o fortúnio de partilhar dos ensinamentos e que ao longo de minha vida contribuíram com a busca pelo desconhecido, pela dedicação e paciência que sempre me foram dispensados ao longo destes não poucos anos. Em especial ao meu orientador Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa pelo apoio e dedicação em me conduzir a maiores reflexões de forma magistral.

A este Instituto que já faz parte da minha vida que sempre me acolheu e em grande parte fez de mim o que sou.

Aos inumeráveis amigos que ofereceram seus saberes e conhecimentos técnicos em especial João E. de Brito e Leonardo Tambellini.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"Na Matemática, para saborear com prazer o fruto é preciso conhecer bem as suas raízes."

Malba Tahan

Resumo

Neste trabalho estudamos o Teorema do Valor Intermediário e apresentamos várias aplicações.

Embora seja um teorema visto em cursos universitários, o teorema é de fácil entendimento e pode ser utilizado para resolver alguns problemas vistos no Ensino Médio como, por exemplo, garantir a existência de solução para certas equações.

Palavras-chave: Teorema do Valor Intermediário, Teorema de Bolzano.

Abstract

In this work we study the Intermediate Value Theorem and we present some applications.

This kind of theorem is typical from Calculus in graduation courses. But it is easy to understand and it can be used to solve problems related to topics from high school, for example, to guarantee the existence of solutions for certain equations.

Keywords: Intermediate Value Theorem, Bolzano's Theorem.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O Cálculo Diferencial e seus teoremas...

Neste trabalho estudamos de forma detalhada um dos belos teoremas do Cálculo: o Teorema do Valor Intermediário. Normalmente, alunos de cursos da área de Exatas são apresentados a este teorema quando estão cursando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Por entendermos que o resultado admite uma série de aplicações interessantes resolvemos estudá-lo de modo a tentar estender suas aplicações para uma linguagem que possa ser entendida - mesmo que de forma mais superficial - por alunos do Ensino Médio.

O Teorema do Valor Intermediário garante que dada uma função contínua definida em um intervalo $[a, b]$ e se d é um número compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá um elemento $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$. Em particular, temos o Teorema de Bolzano, que garante que se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, então f tem uma raiz em $[a, b]$.

Nossa proposta é detalhar a demonstração destes teoremas, bem como algumas de suas aplicações. Para isso, no Capítulo 1 é feito um estudo acerca dos requisitos necessários para o desenvolvimento dos teoremas. Tais requisitos tratam de números reais, funções de uma variável real, sequências de números reais e funções contínuas.

No Capítulo 2 apresentamos as demonstrações dos dois teoremas explorados aqui. O Capítulo 3 é dedicado às aplicações. Para finalizar, o Capítulo 4 é o relato de nossa experiência didática em sala de aula a respeito do trabalho desenvolvido nos capítulos anteriores.

Capítulo 1

Preliminares

Como o foco de nosso trabalho é o Teorema do Valor Intermediário e suas aplicações, apresentaremos neste capítulo todos os requisitos necessários para a leitura deste texto. Iniciaremos nosso estudo com uma apresentação do conjunto dos números reais, uma vez que o teorema a ser estudado diz respeito a funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$. A partir daí, passaremos ao conceito de funções, seguido do conceito de continuidade.

1.1 Conjuntos Numéricos

Nesta seção faremos uma abordagem sobre a evolução histórica e algébrica dos conjuntos numéricos para justificar a necessidade de se introduzir o conceito de número real. Muitas vezes nos livros do Ensino Médio a passagem de um conjunto numérico a outro ocorre de forma tão simples que os estudantes não conseguem perceber diferenças significativas entre tais conjuntos. Elucidaremos este fato durante esta exposição.

Ao longo da história podemos observar o avanço dos sistemas numéricos. Diversos sistemas de números foram criados em todo o mundo no decorrer dos tempos, sendo os mais antigos originários do Egito, Suméria e Babilônia. Podemos ainda citar outros sistemas numéricos bastante conhecidos como o chinês, o romano, o indiano e o arábico. Tais sistemas provocaram uma revolução no método de contagem da humanidade, associando símbolos (os numerais) a determinadas quantidades (os números). Ao estudarmos os conjuntos numéricos não estamos pensando somente em seus elementos, mas como esses elementos estão relacionados por uma ou mais operações.

Iniciaremos com um dos conceitos matemáticos mais antigos aceitos pela humanidade, que é o dos *números naturais*. A evolução deste conjunto numérico foi lenta e gradual. Historicamente o surgimento dos números naturais está relacionado ao problema de contagem. O primeiro estudo esquemático dos números como entidades abstratas é, em geral, atribuído aos filósofos gregos Pitágoras e Arquimedes. Mas, é apenas nos trabalhos de Euclides, de Alexandria (cerca de 300 a.C.) que temos relatos escritos sobre o que de fato se pensava em Matemática naquela época. Euclides escreveu o livro *Os Elementos* que é uma das obras mais influentes na história da Matemática, servindo como o principal livro para o ensino de Matemática desde a data da sua publicação até o fim do século XIX. Aliás, consta que nos livros VII, VIII e IX dos *Os Elementos*, Euclides desenvolve a teoria dos números naturais. Porém, é apenas no final do século XIX que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria de conjuntos. Uma construção consistente do conjunto dos números naturais via teoria dos conjuntos foi desenvolvida pelo matemático Giuseppe Peano. Essa construção, comumente chamada de Axiomas de Peano, é uma estrutura simples e elegante, servindo como um bom exemplo de construção de conjuntos numéricos [3] [6], [10].

Historicamente parece ficar claro que o zero não trata-se de um número natural (no sentido de ser usado para contar). Poderíamos dizer que a formulação do conceito do número zero está intimamente ligada à necessidade da criação de números negativos. Porém há divergências históricas sobre isso. No entanto, incluir ou não o zero como número natural hoje é uma questão de conveniência. Para fins deste texto, denotaremos o conjunto dos números naturais por: $I\!N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

A partir deste ponto, consideraremos bem definidas as operações de adição e multiplicação em $I\!N$, bem como a familiariedade do leitor com as propriedades usuais destas operações como também os conceitos de números pares, ímpares e primos.

No entanto, do ponto de vista algébrico, ao considerar o conjunto dos números naturais com o zero, isto é, $I\!N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, vemos que a operação de adição de números naturais cumpre duas importantes propriedades: a associatividade entre números naturais e a existência de elemento neutro da adição (o zero). Em outras palavras, isso quer dizer que o conjunto $I\!N$, quando colocamos o zero, munido da operação adição $+$ satisfaz:

i) dados quaisquer $a, b, c \in I\!N$, temos que $a + (b + c) = (a + b) + c$ (associatividade);

ii) dado qualquer $a \in I\!N$, existe $0 \in I\!N$ (número zero) tal que $a + 0 = a$ (existência do elemento neutro da adição).

Devido a estas propriedades, ao considerar $I\!N$ com o zero, dizemos que $(I\!N, +)$ tem uma estrutura algébrica de *monóide*.

Os números inteiros negativos surgem da ideia de oposição em relação ao conjunto dos inteiros positivos (ou naturais) e são denotados por $-1, -2, -3, \ldots$. Estes números não foram aceitos da forma natural como são hoje, já tendo sido chamados de "*numeri absurdi*" (números absurdos) e "*numeri ficti*" (números fictícios). Apenas no século XIX tais números foram agrupados para compor o conjunto dos números inteiros como conhecemos hoje. Historicamente, podemos interpretar que a necessidade dos números inteiros negativos deu-se a partir da expansão comercial, no início do Renascimento, o que provocou um aumento na circulação de dinheiro. Isso obrigou os comerciantes da época a expressarem situações envolvendo lucros e prejuízos.

Baseados na ideia de oposição, temos que -1 é oposto (ou simétrico) de 1, assim como 1 é o oposto (ou simétrico) de -1, e esta relação é estendida aos demais números do conjunto. Além disso, deste conceito de oposição segue que a adição de dois números inteiros opostos resulta em zero. Assim, o conjunto constituído pelos inteiros positivos, inteiros negativos e o zero é chamado de conjunto dos números inteiros e é denotado por $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$.

Em $\mathbb{Z}$ também estão bem definidas as operações de adição e multiplicação, e acreditamos que estas operações também são familiares ao leitor. No entanto, diferente do que ocorria no conjunto dos números naturais, $(\mathbb{Z}, +)$ tem uma estrutura algébrica mais sofisticada, no sentido de que além de ser um monóide, temos ainda que todo elemento de $\mathbb{Z}$ admite um simétrico, com relação a operação adição. Isto é, vale que:

Dado qualquer $a \in \mathbb{Z}$, existe um elemento $b \in \mathbb{Z}$ (chamado de simétrico de a) de forma que $a + b = 0$. Note que b é justamente o inteiro $-a$. $\quad (\star)$

Por $(\mathbb{Z}, +)$ satisfazer as propriedades i) e ii) de monóide e também a propriedade $(\star)$

acima, dizemos que $(\mathbb{Z}, +)$ tem uma estrutura algébrica de *grupo*.

Tendo como base o conjunto dos números inteiros, é fácil de verificar que alguns problemas cotidianos não são satisfeitos por tais números. Por exemplo, se queremos dividir uma barra unitária ao meio, como dimensionar o comprimento de cada um dos pedaços da barra utilizando apenas números naturais ou inteiros? Impossível! Pensando historicamente, podemos citar um problema bem antigo das civilizações que nos dá indícios da necessidade dos números fracionários: redimensionar as propriedades de terra às margens dos rios após inundações. Certamente este problema sugere que, na prática, desde os tempos mais remotos, o problema de dimensionar ou dividir lotes utilizando-se apenas medidas inteiras para os lados já era uma questão discutível. Tais situações sugerem a necessidade de ampliar o conceito do números inteiros e indica o aparecimento de medidas fracionárias. Assim, a partir dos números inteiros é possível obter uma outra categoria de números, a saber os *racionais*, definidos da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

Note que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$. Além disso, vale a relação $I\!\!N \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Embora o conjunto $\mathbb{Q}$ seja normalmente apresentado no Ensino Médio após a introdução do conjunto $\mathbb{Z}$, existem dados históricos de que as frações já eram empregadas pelos babilônios e egípcios antes do surgimento dos números negativos. Por exemplo, no papiro de Rhind (1700 a.C.) já constavam problemas envolvendo frações.

De um ponto de vista geométrico, podemos relacionar números racionais com segmentos de reta comensuráveis, e isto nos será útil para introduzir o conceito de números reais. Faremos isso no que segue.

Considere uma reta r na qual estamos interessados no problema da medida de segmentos.

Definição 1.1.1. *Dois segmentos de reta são ditos comensuráveis se são múltiplos de um segmento comum. Caso contrário, os segmentos são ditos incomensuráveis.*

Em outras palavras, sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos de reta de comprimentos AB e CD, respectivamente. Se existir um segmento $\overline{EF}$ (de comprimento EF) e existirem inteiros positivos m e n tais que $AB = mEF$ e $CD = nEF$, então $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são ditos comensuráveis. Disso decorre que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{mEF}{nEF} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}.$$

Uma pergunta natural que surge é a seguinte:

Dois segmentos de reta quaisquer são sempre comensuráveis?

Voltaremos a esta questão mais adiante.

Já vimos uma motivação histórica e uma interpretação geométrica relacionadas aos números racionais. Vamos agora comentar alguns aspectos da estrutura algébrica de $\mathbb{Q}$.

Em $\mathbb{Q}$ temos duas operações bem definidas, dadas por:

Adição - Dados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, definimos $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$;

Multiplicação - Dados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, definimos $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$.

O conjunto $\mathbb{Q}$ munido das operações $+$ e $\cdot$ satisfaz as seguintes condições:

(A1) Dados $a, b, c \in \mathbb{Q}$ então $a + (b + c) = (a + b) + c$ (assossiatividade da adição).

(A2) Existe um número racional, denotado por 0, tal que para todo $a \in \mathbb{Q}$, $a + 0 = a$ (existência do elemento neutro da adição).

(A3) Dado qualquer $a \in \mathbb{Q}$, existe seu simétrico com relação à adição, isto é, existe $-a \in \mathbb{Q}$ tal que, $a + (-a) = 0$ (existência do elemento simétrico).

(A4) Dados $a, b \in \mathbb{Q}$ então $a + b = b + a$ (comutatividade da adição).

(M1) Dados $a, b, c \in \mathbb{Q}$ então $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (assossiatividade da multiplicação).

(M2) Existe um número racional, denotado por 1, tal que para todo $a \in \mathbb{Q}$, $1 \cdot a = a$ (existência do elemento neutro da multiplicação).

(M3) Dado qualquer $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, existe seu inverso com relação à multiplicação, isto é, existe $\frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (existência do elemento inverso).

(M4) Dados $a, b \in \mathbb{Q}$ então $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade da multiplicação).

(D1) Dados $a, b, c \in \mathbb{Q}$ temos $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributividade).

Por cumprir todas as 9 condições acima dizemos que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ tem a estrutura algébrica de *corpo*.

Observações.

1. As condições (A1), (A2) e (A3) significam que $(\mathbb{Q},+)$ é um grupo (análogo ao que já sabíamos que ocorria com $(\mathbb{Z},+)$, por satisfazer as mesmas propriedades). A condição (A4) de comutatividade diz que o grupo é abeliano ou comutativo.

2. Como $\mathbb{Q}-\{0\}$ cumpre as condições de (M1) a (M4), temos também que $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ é um grupo abeliano. No entanto, $(\mathbb{Z},\cdot)$ não é grupo abeliano, visto que os únicos números inteiros que admitem inversos multiplicativos em $\mathbb{Z}$ são apenas o 1 e o -1. Consequentemente, $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ não tem estrutura de corpo. Como $(\mathbb{Z},+)$ tem estrutura de grupo abeliano e além disso como, $\mathbb{Z}-\{0\}$ tem estrutura de monóide (pois não vale (M3)) e vale a propriedade distributiva em $\mathbb{Z}$ dizemos que $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ tem estrutura algébrica de *anel comutativo com unidade.*

Até aqui vimos algumas situações históricas que puderam servir de motivação para ampliarmos nossos conjuntos numéricos, passando do conjunto $I\!N$ ao $\mathbb{Z}$ e do $\mathbb{Z}$ ao $\mathbb{Q}$. Também analisamos algumas de suas diferenças, em termos de suas estruturas algébricas. Nosso próximo passo é dar uma motivação para introduzir o conceito de número real. Não trataremos da construção dos números reais propriamente dita, mas apenas daremos uma motivação de sua necessidade. Existem rigorosas formas de construir o conjunto dos números reais a partir dos números racionais. As mais tradicionais são através de cortes de Dedekind e de sequências de Cauchy (ver por exemplo [5], [9]). Mas aqui cabe uma pequena reflexão ao leitor: queremos enfatizar que sobretudo a passagem dos racionais para o conjunto dos números reais, sempre tão simplificada nos livros do Ensino Médio, é muito mais sutil do que geralmente se ensina.

Nossa motivação para introduzir números reais vem de encontro à pergunta feita anteriormente: dois segmentos quaisquer são sempre comensuráveis? A resposta é NÃO, ou seja, dando continuidade ao problema da medição de segmentos, nos deparamos com o fato de que existem segmentos que não são comensuráveis. A existência de segmentos incomensuráveis implica na insuficiência dos sistemas numéricos apresentados até aqui (isto é, $I\!N, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$) para efetuar medidas de simples objetos geométricos (segmentos de reta).

De fato, considere o triângulo retângulo ABC inserido no quadrado de lado 1 como mostra a Figura 1.1. Considere AC a medida da hipotenusa do triângulo ABC.

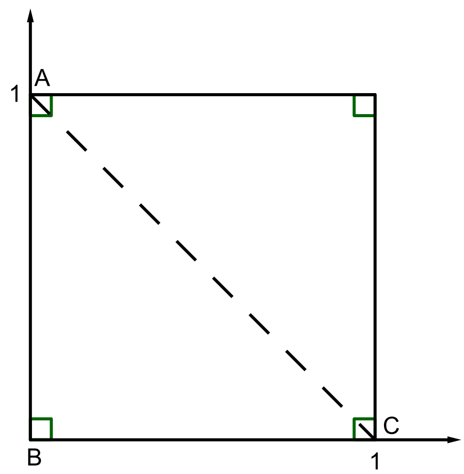


Figura 1.1: Triângulo ABC com catetos iguais a 1.

Afirmação. Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ não são comensuráveis.

Prova. Provaremos por absurdo. Se $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ fossem comensuráveis, então existiriam números não nulos $m, n \in I\!N$ tais que $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{m}{n}$. Assuma, sem perda de generalidade, que a fração $\dfrac{m}{n}$ é irredutível. Como por hipótese $AB = 1$, então $AC = \dfrac{m}{n}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC da Figura 1.1 concluí-se que $AC^2 = 2$. Ou seja, $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 = 2$. Logo,

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2.$$

Isso implica que m^2 é par e, portanto, m é par. Sendo m par, podemos escrever $m = 2p$, com p inteiro. Daí,

$$m^2 = 2n^2 \;\Rightarrow\; 4p^2 = 2n^2 \;\Rightarrow\; 2p^2 = n^2.$$

Desta forma, n^2 é par e, portanto, n também o é. Sendo m e n pares, a fração $\dfrac{m}{n}$ é redutível, o que é um absurdo!

Logo $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são incomensuráveis (ou equivalentemente, $\overline{AC}$ tal que $AC^2 = 2$ não pode ser um segmento cuja medida é racional). ■

Historicamente, este foi um momento de ruptura e de crise, entre os estudiosos da época. Aparecia pela primeira vez na história da Matemática, a possibilidade da existência de segmentos incomensuráveis e, conseqüentemente, segmentos cuja razão entre suas medidas não resulta em números racionais. Abre-se então a possibilidade da existência de outro tipo de números, tornando necessário ampliar o conjunto dos números racionais. Neste contexto, são introduzidos os *números irracionais*. Ou seja, um número irracional é um número que representa a medida de um segmento incomensurável com a unidade (segmento de medida 1). Consequentemente, um número irracional não pode ser representado como uma fração da forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Podemos então, utilizando-se deste problema de medir segmentos de reta, definir o conjunto dos números reais (positivos) como sendo o conjunto de todos os números que correspondem a medidas de segmentos não nulos, da reta. O conjunto dos números reais (positivos) resulta da união dos conjuntos dos números racionais (positivos) e dos números irracionais (positivos). Assim, segmentos comensuráveis com a unidade estão associados a números racionais (positivos) e os segmentos incomensuráveis com a unidade estão associados aos números irracionais (positivos).

De um modo mais amplo, incluindo de modo análogo os números racionais e irracionais negativos, denotamos o conjunto de todos os números irracionais por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e portanto, temos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Fixemos uma reta e sobre ela marquemos um ponto o qual chamaremos de origem 0. Então, existe uma correspondência entre os números reais e os pontos da reta. De fato, para cada número real está associado um único ponto da reta e para cada ponto da reta está associado um único número real. No que segue não distinguiremos o conjunto dos números reais e os pontos da reta.

Diremos que $x \in \mathbb{R}$ é positivo, e denotaremos $x > 0$, se x estiver no lado direito da reta, a partir da origem 0. Diremos que $x \in \mathbb{R}$ é negativo, e denotaremos $x < 0$, se x estiver no lado esquerdo da reta. As notações $x \geq 0$ e $x \leq 0$ indicam o seguinte:

$$\begin{cases} x \geq 0, & \text{representa que } x \text{ é positivo ou igual a zero,} \\ x \leq 0, & \text{representa que } x \text{ é negativo ou igual a zero.} \end{cases}$$

Em $\mathbb{R}$ podemos definir duas operações da seguinte forma:

Definição 1.1.2. *a) Sejam* $a \in \mathbb{R}$ *e* $b \geq 0$*. Definimos* $a+b$ *como o número real associado a ponta final do segmento, orientado para a direita, com extremidade inicial em* a *e com medida igual a medida do segmento associado* ab*.*

b) Sejam $a \in \mathbb{R}$ *e* $b \leq 0$*. Marcamos na reta o seguinte ponto: com extremidade inicial em* a *e orientado para o lado esquerdo, com medida igual a do segmento associado* ab*. O número real associado a ponta final deste segmento será chamado de* $a+b$*.*

c) Se $a > 0$ *e* $b > 0$*, definimos o produto* ab *da seguinte forma: traçamos uma reta* r *formando um ângulo inferior a* 90^o *com a reta real e passando pela origem. Na reta real marcamos a unidade 1 e o número* b*. Na reta* r *marcamos o número* a*. Consideramos a reta que passa por 1 e por* a *a qual chamaremos de* s*. Da geometria, sabemos que existe uma única reta* t *paralela a* s *e que passa* b*. Finalmente, marcamos em* r *o ponto* P*, dado pela itersecção de* r *e* t*. Com a ponta seca do compasso em 0 e abertura igual a* $0P$ *marcamos na reta real o ponto* Q*. O número real associado a este ponto será chamado de* ab*.*

d) Nos demais casos é só mudar o sinal ab *convenientemente:*

a	**b**	**ab**
$-$	$-$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$

Tabela 1.1: Tabela de Sinais

Observações.

1. Se fixarmos nossa atenção para os números racionais, veremos que as definições acima quando restritas ao conjunto $\mathbb{Q}$, coincidem com as operações de soma e produto de racionais que definimos anteriormente.

2. O conjunto $\mathbb{R}$ munido destas duas operações satisfaz as mesmas 9 propriedades de corpo descritas para o conjunto $\mathbb{Q}$. Basta substituir $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{R}$ em cada uma das 9 propriedades. Logo, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ também é um corpo.

3. É claro que $I\!N \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, sendo que as letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, podem ser interpretadas como as iniciais das palavras natural (ou número), quociente e real, respectivamente. A letra $\mathbb{Z}$ é a inicial da palavra zahlen, que significa número em alemão.

No conjunto dos números reais existe um subconjunto denominado números reais positivos (o qual representa as medidas dos segmentos de reta), tal que sendo a um número real qualquer, exatamente uma destas três afirmações é verificada: $a = 0$ ou a é positivo ($a > 0$) ou $-a$ é positivo ($-a > 0$). Além disso, temos que a soma de dois números reais positivos é positiva e o produto de dois números reais positivos é positivo. Num corpo, estas duas propriedades caracterizam o que chamamos de *corpo ordenado*. Neste caso temos que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo ordenado. O mesmo ocorre com o $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Uma relação de ordem “$<$” serve para comparar dois elementos de $\mathbb{R}$. Assim, escrevemos

- $a < b$ se, e somente se, $b - a$ é positivo (ou $b - a > 0$).
- $a > b$ se, e somente se, $a - b$ é positivo (ou $a - b > 0$).

Analogamente,

- $a \leq b$ se, e somente se, $b - a$ é positivo ou $a = b$.
- $a \geq b$ se, e somente se, $a - b$ é positivo ou $a = b$.

Observação 1.1.1. *Expressões dos tipos $a < b$, $a > b$, $a \leq b$ e $a \geq b$, são chamadas de* desigualdades.

Como em qualquer outro corpo ordenado, uma relação de ordem “$<$” goza das seguintes propriedades:

(O1) Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$ e $y < z$ então $x < z$ (transitividade)

(O2) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ então $x < y$ ou $y < x$ ou $x = y$ (tricotomia)

(O3) Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$ então $x + z < y + z$ (compatibilidade com a adição)

(O4) Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$ e $0 < z$ então $xz < yz$ (compatibilidade com a multiplicação)

É importante destacar que estas propriedades de corpo ordenado satisfeitas por $\mathbb{R}$ também são satisfeitas por $\mathbb{Q}$. Nosso objetivo a partir daqui é verificar alguma propriedade satisfeita por $\mathbb{R}$ e não por $\mathbb{Q}$.

1.1.1 O conjunto $\mathbb{R}$ é completo

Dado $a \in \mathbb{R}$, definimos o *módulo* (ou *valor absoluto*) de a, o qual indicamos por $|a|$, da seguinte maneira:

$$|a| = \begin{cases} a & se \;\; a \geq 0, \\ -a & se \;\; a < 0. \end{cases}$$

Geometricamente, o módulo de $a \in \mathbb{R}$ representa a distância de a marcado na reta real até a origem. Daí, resulta que $|a| = \sqrt{a^2}$.

Propriedades:

(i) Seja $a > 0$. Então, $|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a$.

Prova. Suponha $-a < x < a$.

Se $x \geq 0$, $|x| = x$. Como por hipótese, $x < a$, então $|x| < a$.

Por outro lado, se $x < 0$, $|x| = -x$. Como $-a < x$, temos $-x < a$. Consequentemente, $|x| = -x < a$, ou seja, $|x| < a$.

Reciprocamente, suponha que $|x| < a$.

Se $x \geq 0$, então $|x| = x$. Como $|x| < a$, conclui-se que $x < a$. Como $a > 0$, segue que $-a < 0$ e então $-a < 0 \leq x < a$, ou seja, $-a < x < a$.

Se $x < 0$, $|x| = -x$. Como por hipótese $|x| < a$, temos, $-x < a$. Como $x < 0$, segue que $-x > 0$. Portanto, $-a < 0 < -x < a$, ou seja, $-a < x < a$.

(ii) Seja $a > 0$. Então, $|x| > a \;\Longleftrightarrow x > a \; ou \; x < -a$.

Prova. Suponha $|x| > a$. Se $x \geq 0$, $|x| = x$. Como $|x| > a$, então $x > a$.

Se $x < 0$, $|x| = -x$. Como $|x| > a$, então $-x > a$, logo $x < -a$.

Reciprocamente, suponhamos $x > a$ ou $x < -a$. Assim, temos as seguintes possibilidades:

Se $x \geq 0$ e $x > a$, então $|x| = x$ e assim $|x| > a$.

Se $x \geq 0$ e $x < -a$, teríamos uma contradição pois $a > 0$.

Se $x < 0$ e $x > a$, também teríamos uma contradição pois $a > 0$.

Se $x < 0$ e $x < -a$, então $|x| = -x$ e assim $|x| > a$.

(iii) Se $a, b \in \mathbb{R}$, então, $|ab| = |a||b|$.

Prova. $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$.

(iv) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, então $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

Prova. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}} = \dfrac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \dfrac{|a|}{|b|}$.

(v) **(Desigualdade Triangular)** Se $a, b \in \mathbb{R}$ então $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Prova. Como $a, b \in \mathbb{R}$, temos por (O2) que ab é positivo, negativo ou zero. Em qualquer uma das ocorrências vale: $ab \leq |ab| = |a||b|$. Multiplicando $ab \leq |ab|$ por 2, temos: $2ab \leq 2|ab| = 2|a||b|$.

Da igualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e da desigualdade $2ab \leq 2|a||b|$, temos que:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 = \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = \\ &= (|a| + |b|)^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Tomando a raiz quadrada de (1.1), obtemos o desejado.

(vi) Se $a, b \in \mathbb{R}$ então $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Prova. Como $a - b = a + (-b)$, aplicando a Desigualdade Triangular chegamos ao desejado.

(vii) Se $a, b \in \mathbb{R}$ então $|a - b| \geq |a| - |b|$.

Prova. Fazendo $a - b = c$ e aplicando a Desigualdade Triangular temos:

$$\begin{aligned} |a| &= |c+b| \Rightarrow \\ |a| &\leq |c| + |b| \Rightarrow \\ |a| - |b| &\leq |c| \qquad \Rightarrow \\ |a| - |b| &\leq |a - b|. \end{aligned}$$

Definição 1.1.3. *Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ dizemos que A é* limitado *se existe um número real $K > 0$ tal que $|x| < K$, para todo $x \in A$.*

Definição 1.1.4. *Seja $A \subset \mathbb{R}$. O maior elemento de A quando existe, denomina-se* máximo *de A e indica-se por* $\max A$. *Por sua vez, o menor elemento de A quando existe, denomina-se* mínimo *de A, e indica-se por* $\min A$.

Um número m é cota superior *de A, se m for o máximo de A ou se m for estritamente maior que todo elemento de A.*

Um número m é cota inferior *de A, se m for o mínimo de A ou se m for estritamente menor que todo elemento de A.*

Se A admitir uma cota superior, então diremos que A é limitado superiormente.

Se A admitir uma cota inferior, então diremos que A é limitado inferiormente.

A menor das cotas superiores de A denomina-se supremo *de A e denota-se por* $\sup A$.

A maior das cotas inferiores de A denomina-se ínfimo *de A e denota-se por* $\inf A$.

Exemplo 1.1.1. *O conjunto $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente, mas não é limitado superiormente. Temos que min $\mathbb{N}$ = inf $\mathbb{N}$ =1. O conjunto $\mathbb{N}$ não admite máximo.*

Exemplo 1.1.2. *O conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x < 2\}$ não tem máximo, pois 2 não pertence a A. No entanto,* $\sup A = 2$. *O conjunto A é limitado superiormente. O* $\inf A = \min A = 1$ *e A também é limitado inferiormente.*

Propriedade do Supremo (ver [5], [9]). Todo conjunto limitado e não vazio de números reais admite supremo.

Corolário 1.1.5. *(Propriedade de Aproximação). Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $s = \sup A$. Se $a \in \mathbb{R}$ com $a < s$, então existe $x \in A$ tal que $a < x \leq s$.*

Prova. Como s é um majorante de A, temos $x \leq s$, para todo elemento $x \in A$. Assim, supondo que não exista x em A tal que $a < x = s$, temos, $x \leq a$, para todo $x \in A$ e, portanto, a é um majorante de A e $a < s$. Absurdo pois $s = \sup A$. ∎

Observe que a Propriedade do Supremo não é satisfeita por $\mathbb{Q}$. De fato, considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, 0 < x^2 < 2\}$. O sup $A = \sqrt{2}$ que, como já vimos, não é racional. A Propriedade do Supremo nos garante que o conjunto dos números reais é um *corpo ordenado completo.*

Observação. Até aqui fizemos um apanhado histórico da evolução dos conjuntos numéricos utilizados nos Ensinos Fundamental e Médio. Também destacamos as diferenças das estruturas algébricas quando passamos de um conjunto a outro. Uma outra abordagem da necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos estudados aqui poderia ser justificada pelo problema de resolver equações algébricas. De fato, é fácil ver que uma equação do primeiro grau do tipo $2x = 4$ tem solução no conjunto dos números naturais. No entanto, já a equação $2x + 6 = 4$ não tem solução em $\mathbb{N}$; apenas em $\mathbb{Z}$. Já a equação $2x + 7 = 4$ não admite solução em $\mathbb{Z}$ mas admite em $\mathbb{Q}$. Ainda assim, o conjunto $\mathbb{Q}$ não é suficiente para resolvermos equações algébricas simples como, por exemplo, $x^2 - 2 = 0$. Daí a necessidade do conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. É claro que deste ponto de vista, mesmo o conjunto dos números reais não é suficiente para resolvermos todo tipo de equação algébrica. De fato, uma simples equação do segundo grau como $x^2 + 1 = 0$ não admite raiz real. Desta análise surgem os números complexos $\mathbb{C}$, mas este não é nosso objetivo aqui. Como vamos estudar o Teorema do Valor Intermediário, para nós é suficiente conhecer as propriedades do conjunto dos números reais, uma vez que as funções que aparecerão neste texto são funções reais de uma variável real.

Definição 1.1.6. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Definimos:*

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$ *(*o qual chamamos de *intervalo fechado)*

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ *(intervalo aberto)*

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$ *(intervalo semi-aberto)*

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$ *(intervalo semi-aberto)*

Os números a *e* b são chamados *extremos* destes intervalos. Se $a = -\infty$ *ou* $b = +\infty$ temos ainda os seguintes intervalos:

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}$ *(semi-reta)*

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$ *(semi-reta)*

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\}$ *(semi-reta)*

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}$ *(semi-reta)*

$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ *(reta real)*

1.2 Funções

O estudo de funções desempenha papel fundamental nos cursos de Cálculo. É intuitivo que uma quantidade y diz-se em função de outra quantidade x, se existir uma regra por meio da qual fica determinado um único valor de y, para cada determinação do valor de x. Para formalizar matematicamente este conceito, precisamos exprimir onde se encontram y e x e como funciona esta regra de associação. Assim, a grosso modo, uma função é uma terna pois, para definí-la, precisamos de três ingredientes. Como este texto é destinado ao estudo de funções reais de uma variável real, tomaremos nossos conjuntos sempre contidos em $\mathbb{R}$, salvo menção contrária.

Definição 1.2.1. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios. Uma função $f : A \to B$ (lê-se "uma função f de A em B") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$, $y = f(x)$.*

Notação: Indicaremos uma função da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

O conjunto A é chamado de *domínio* e B é chamado de *contra-domínio* da função f. Para cada $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de *imagem* de x pela função f, ou o valor assumido por f em $x \in A$. Indicamos por $\text{Im}\,(f) = \{y \in B \,|\, y = f(x),\ \ x \in A\}$ o conjunto imagem de f. É muito comum os alunos confundirem contra-domínio com conjunto imagem. Note que $Im(f) \subseteq B$.

Note que duas funções são iguais se, e somente se, elas possuem o mesmo domínio, o mesmo contra-domínio e a mesma lei. Outro erro muito frequente de nossos alunos, e também de alguns livros didáticos, é olhar para uma função simplesmente pela sua lei de associação. Por exemplo, podemos encontrar expressões do tipo: considere a função $f(x) = 2x$, sem fazer qualquer menção do domínio e contra-domínio de f. Isso pode gerar problemas, pois as funções:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$$

são diferentes, embora tenham a mesma lei de formação. Neste caso, os domínios são diferentes.

Quando em um texto ou em uma aula está implícito que estamos tratando sempre de um mesmo determinado tipo de função daí sim fica subentendido quem é o domínio e o contra-domínio da função. Por exemplo, neste texto temos interesse em estudar funções reais de uma variável real, então ao escrever a função real $f(x) = \sqrt{x+1}$, fica implícito que o domínio de f é dado por $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x + 1 \geq 0\}$ (que é o conjunto dos pontos onde faz sentido definir f) e o contra-domínio é $\mathbb{R}_+$. Caso não esteja explícito o ambiente ao qual fazemos menção a uma função não podemos representá-la simplesmente por sua lei.

Um exemplo de função que já vínhamos utilizando neste texto são as operações de adição e multiplicação, nos diversos conjuntos numéricos tratados aqui. É muito comum os livros não trazerem a informação que tais operações são de fato funções. Talvez um dos motivos seja que tais exemplos não são funções de uma variável (real), mas sim de duas. Queremos dizer que, no caso do conjunto dos números reais, a adição é uma função definida da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rcl} +:\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

Aqui o domínio da função $+$ é o conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R} \;\; e \;\; y \in \mathbb{R}\}$, o qual contém $\mathbb{R}$. Analogamente, define-se a função multiplicação. O mesmo vale para a adição e multiplicação nos outros conjuntos numéricos numéricos tratados aqui. Ao entender a adição como uma função, fica claro que uma conta do tipo $2+3+4$ não tem sentido, pelo menos de imediato. Isso porque, como vimos, a soma se faz aos pares. Isso é interessante pois serve para esclarecermos aos nossos alunos a necessidade de propriedades como a associatividade, que estudamos na Seção 1.1. Ou seja, escrever $2+3+4$ de fato significa escrever $(2+3)+4$, que por sua vez é o mesmo que $2+(3+4)$. Dessa maneira podemos efetuar a soma pedida.

Outro exemplo muito importante de funções que trataremos neste texto são as *polinomiais*. Funções polinomiais de grau n são definidas por $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R} \ \ (i = 1, \ldots, n) \ \ e \ \ a_n \neq 0.$$

Temos mais familiaridade no Ensino Fundamental e Médio com as funções do primeiro grau (que usualmente denotamos por $f(x) = ax + b$) e com as funções do segundo grau ou quadráticas (que usualmente denotamos por $f(x) = ax^2 + bx + c$). Mas não é necessário que nos restrinjamos apenas a estes dois tipos de funções polinomiais.

Um problema fundamental no estudo de funções polinomiais é o de encontrar as raízes de f. Isto significa encontrar o conjunto solução (ou resolver) a equação polinomial $f(x) = 0$, ou seja,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0.$$

Encontrar métodos eficazes de resolver equações polinomiais ou pelo menos saber se tal equação admite solução real é um problema importante. Nos Ensinos Fundamental e Médio, exploramos métodos de resolver equações do 1^o e 2^o graus. No Capítulo 3 daremos algumas aplicações do Teorema do Valor Intermediário que nos permitirá responder questões deste tipo para uma classe bem maior de equações polinomiais.

O próximo exemplo de função que abordaremos também é explorado desde o Ensino Fundamental mas sem mencionar que trata-se de uma função: são as sequências. Definiremos aqui apenas sequências de números reais.

Definição 1.2.2. *Uma* sequência de números reais *é uma função* $x : I\!N \longrightarrow \mathbb{R}$ *que a cada número natural* n *associa um número real* $x(n) = x_n$*, chamado o* n*-ésimo termo da sequência.*

Denotamos uma sequência por $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ ou $(x_n)_{n \in I\!N}$, ou simplesmente por (x_n). As Progressões Aritméticas e as Progressões Geométricas são exemplos de sequências.

Exemplo 1.2.1. *Considere a sequência $x : I\!\!N \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $x(n) = \frac{1}{n}$. Esta sequência representa a lista infinita*

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right).$$

Note que a medida que n cresce, $\dfrac{1}{n}$ vai ficando cada vez mais próximo de zero.

Observe que é fácil criar outros exemplos de sequências de números reais, do modo como desejarmos. Por exemplo,

$$(x_n) = (1, 1, 1, 1, \dots) \ ou\ (x_n) = (1, -1, 2, -1, 3, -1, 4, -1, \dots)$$

entre outros.

Ao estudar sequências, é muito importante entender o que acontece com os termos da sequência a medida que $n \in I\!\!N$ cresce. Ou seja, é importante verificar se os valores x_n se aproximam de algo, quando n é suficientemente grande. Aqui está subentendido um conceito fundamental do Cálculo: o conceito de limite. A noção de limite em algum momento do passado já fez parte do conteúdo do Ensino Médio. Hoje, com exceção de alguns poucos colégios militares, este conceito não aparece no Ensino Médio. Isso gera uma grande novidade para os alunos que ingressam nos cursos de Exatas e se deparam com esta noção. Talvez o que torna este conceito tão difícil para os estudantes é a pouca familiaridade com a noção de infinito. O infinito representa muitas vezes algo surpreendente e não intuitivo e é pouco explorado em nossas salas de aula. Levar o aluno desde cedo a questionar sobre as similaridades ou diferenças entre os infinitos dos conjuntos $I\!\!N$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ pode ser um bom exercício para despertar a curiosidade sobre o tema.

1.3 Limite de funções

Para iniciarmos esta seção faremos algumas considerações sobre o caso particular de limites de sequências, que julgamos ser mais fácil de ser interpretado.

Por exemplo, considere as sequências de números reais

$$(x_n) = (1, 2, 3, 4, 5, \dots) \quad e \quad (y_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

É fácil intuir que os termos de (x_n) tornam-se cada vez maiores sem atingir um limite. Isto é, dado um número real qualquer, por maior que seja, podemos sempre encontrar um elemento da sequência (x_n) maior que tal número. Dizemos então que os termos desta sequência (x_n) tendem ao infinito ou que o limite da sequência é infinito. Já na sequência (y_n), os termos decrescem e aproximam-se cada vez mais do valor de 0, sem nunca atingirem este valor. Dizemos, neste caso, que os termos de (y_n) tendem a 0 ou que o limite de (y_n) é zero. Formalizamos o conceito de limite de uma sequência de números reais por:

Definição 1.3.1. *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Dizemos que (x_n)* converge *para um número real L se, dado $\epsilon > 0$, é sempre possível encontrar um índice $n_0 \in I\!N$ de tal modo que, para todo índice $n \geq n_0$ teremos $|x_n - L| < \epsilon$.*

Em outras palavras, a definição nos diz que a partir de um índice n_0, os termos da sequência (x_n) vão ficando ϵ-próximos de L, qualquer que seja o valor de $\epsilon > 0$ dado. Como $\epsilon > 0$ é arbitrariamente pequeno, isso sugere que os termos de (x_n) estão ficando suficientemente próximos de L, a partir de um certo termo x_{n_0}. Ou seja, dizemos neste caso que (x_n) é convergente ou que a sequência (x_n) converge para o número L.

Como aplicação das propriedades de sequências, provaremos a seguir um teorema que será fundamental na demonstração do Teorema de Bolzano.

Teorema 1.3.2. ***(Teorema dos Intervalos Encaixantes)***
Sejam $[a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ uma sequência de intervalos satisfazendo as seguintes condições:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots \tag{1.2}$$

$$\textit{para todo } r > 0, \textit{ existe um natural } n \textit{ tal que } b_n - a_n < r \tag{1.3}$$

Então, existe um único real α que pertence a todos os intervalos da sequência, isto é, existe um único real α tal que para todo n, $a_n \leq \alpha \leq b_n$.

Prova. Considere o conjunto $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. Note que A é não vazio e limitado superiormente, pela condição (1.2). Então, pela Propriedade do Supremo, existe $\alpha = \sup A$. Além disso, ainda por (1.2), é claro que para todo natural n, temos $a_n \leq \alpha \leq b_n$. Com isso a existência de α nas condições do teorema está provada.

Provemos agora a unicidade. Suponha que exista outro $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq \alpha$ tal que, para todo n, $a_n \leq \beta \leq b_n$. Então, neste caso teríamos

$$| \alpha - \beta | < b_n - a_n, \ \ \forall n \in I\!N.$$

Note que à medida que n cresce, a diferença $b_n - a_n$ fica suficientemente próxima de zero. Consequentemente, a diferença $|\alpha - \beta|$ também fica suficientemente próxima de zero, o que nos permite concluir que, no limite, $\alpha = \beta$. Absurdo, pois $\alpha \neq \beta$. Portanto, α existe e é único. ■

Observação 1.3.1. *Uma consequência do Teorema dos Intervalos Encaixantes é que o conjunto $\mathbb{R}$ tem como propriedade que seus elementos não podem ser colocados em uma fila infinita, respeitando-se as posições da fila. Esta é outra propriedade que distingue o conjunto $\mathbb{R}$ dos conjuntos $I\!N$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.*

Até aqui estudamos a noção de limite para sequências. É claro que esta noção pode ser ampliada para funções de um modo geral. Isso será fundamental para o conceito de continuidade. Para dar início a nossa discussão, vamos inicialmente considerar alguns exemplos de funções e tentar intuir sobre algumas propriedades de limites.

Exemplo 1.3.1. *Seja $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. Não é difícil intuir que esta função se aproxima de* 1 *à medida que $x > 0$ cresce indefinidamente ou $x < 0$ decresce indefinidamente. Podemos confirmar esta análise olhando para alguns valores de $f(x)$ dados nas tabelas a seguir:*

x	1	2	3	4	5	6	$\dots$	500	$\dots$	1000	$\dots$
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\dots$	$\frac{499}{500}$	$\dots$	$\frac{499}{1000}$	$\dots$

x	-1	-2	-3	-4	-5	$\dots$	-100	$\dots$	-500	$\dots$
$f(x)$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\dots$	$\frac{101}{100}$	$\dots$	$\frac{501}{500}$	$\dots$

É claro que analisar apenas uma quantidade de pontos, mesma que infinita, sugere o que acontece à medida que x é muito grande (ou muito pequeno) mas não serve de prova formal. Precisamos de um conceito que formalize esta nossa intuição.

Antes disso, para ajudar em nossa intuição, utilizamos um software disponível na internet para plotar o gráfico da função f.

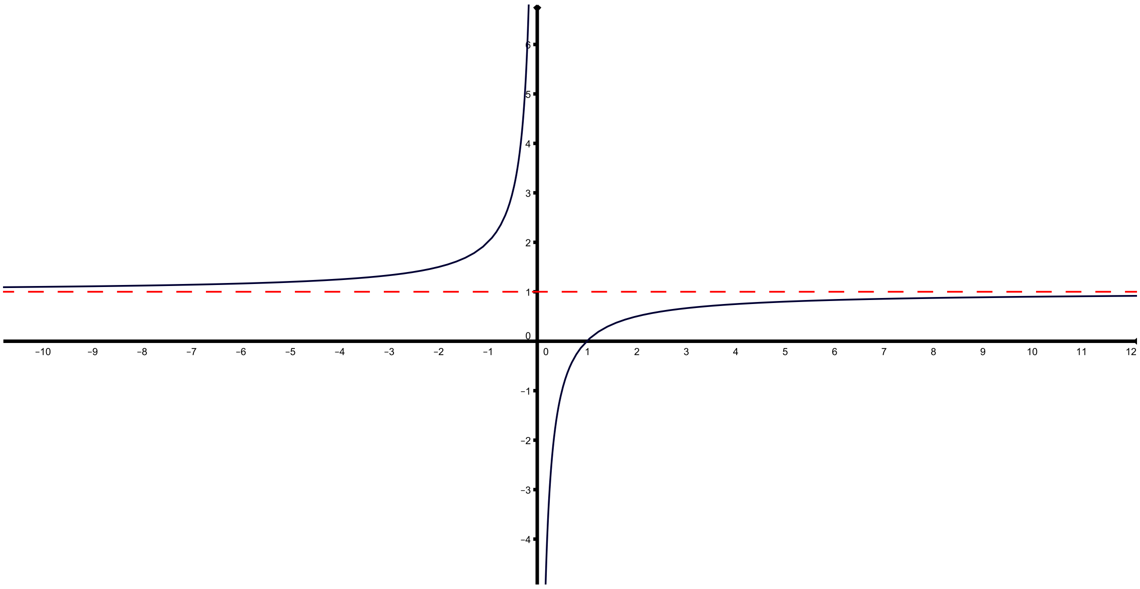


Figura 1.2: Gráfico de $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

Exemplo 1.3.2. *Considere agora a função $f(x) = x^2 + 3x - 2$. Esta função tende para $+\infty$ quando x tende para $\pm\infty$. Note que este fato é observado nas tabelas a seguir ou no gráfico de f na Figura 1.3.*

x	1	2	3	4	5	6	7	...	100	...	1000	...
f(x)	2	8	16	26	38	52	68	...	10298	...	1002998	...

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...	-100	...	-500	...
f(x)	-4	-4	-2	2	8	16	...	9698	...	248498	...

De maneira bem intuitiva, dizemos que uma função $f(x)$ tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando x tende a $p \in \mathbb{R}$, se é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L (tão próximos quanto quisermos), a medida que tomamos valores de x, $x \neq p$, suficientemente próximos de p (por ambos os lados de p). De modo mais formal temos a seguinte definição:

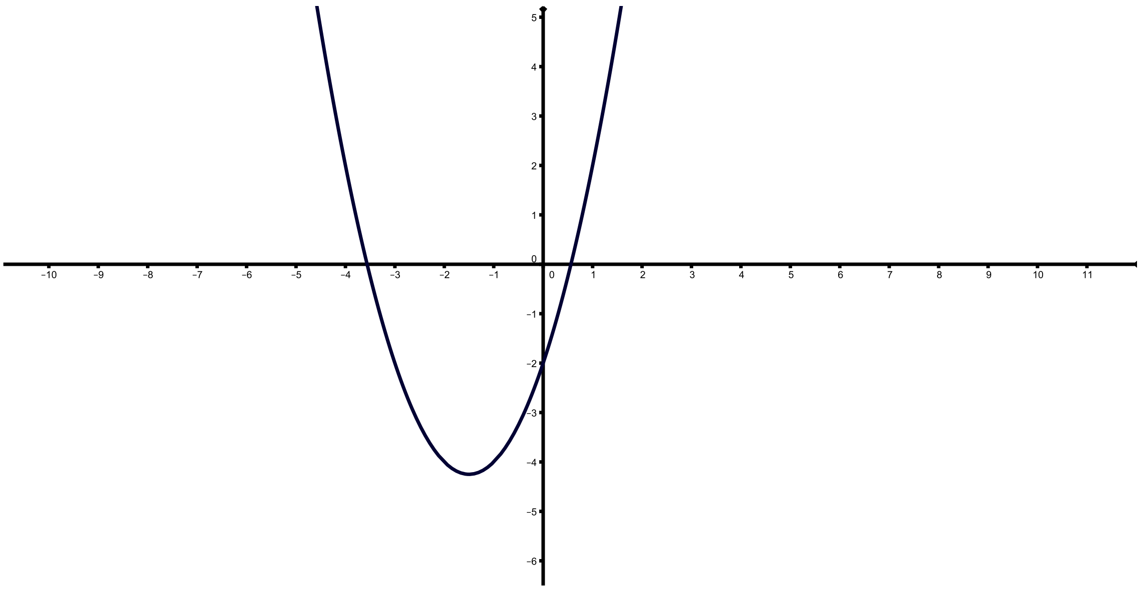


Figura 1.3: Gráfico de $f(x) = x^2 + 3x - 2$

Definição 1.3.3. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ e considere $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $f(x)$ tende para $L \in \mathbb{R}$ quando x tende para p, e escreve-se:*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$.

Em outras palavras, de modo bem ingênuo, a definição acima nos diz que à medida que x está suficientemente próximo de p (seja por valores maiores ou menores do que p), então a imagem de x por f estará suficientemente próxima do número L.

É importante observar que o limite de f pode ainda existir mesmo que $p \notin I$ ou mesmo que $f(p) \neq L$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.3.3. *Vamos analisar o $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, onde $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Note que f não esta definida em $x = 1$. Ao fazer o limite de $f(x)$ quando x tende a 1, temos que $x \neq 1$ e, portanto,*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

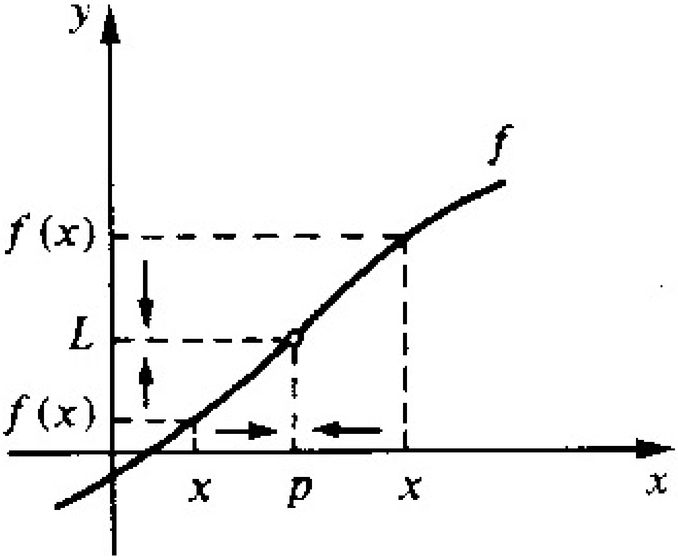


Figura 1.4: Gráfico da definição 1.3.3

Exemplo 1.3.4. *Considere agora a função dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 4 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

A função f está definida em $x = 1$. Vamos calcular o $\lim_{x \to 1} f(x)$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2 \neq 4 = f(1).$$

Exemplo 1.3.5. *Por fim, considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}.$$

Neste caso,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2 = f(1).$$

Os três exemplos acima mostram como pode ser sutil o cálculo de limites. Quando as funções envolvidas no cálculo de um limite apresentam "algum tipo de restrição", tal cálculo pode tornar-se uma tarefa difícil. Estas restrições podem ser por exemplo, funções dadas por várias leis de formação diferentes ou funções que envolvam quocientes, raízes ou outras particularidades. No entanto, existem também muitas funções que não apresentam nenhum tipo de restrição, o que pode tornar o cálculo de limites uma tarefa mais fácil. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 1.3.6. *Considere* $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ *uma função polinomial de grau* n*. Então, para todo* $p \in \mathbb{R}$*, temos que* $\lim\limits_{x \to p} f(x) = a_0 + a_1a + \cdots + a_na^n = f(p)$.

Observação 1.3.2. *No Exemplo 1.3.1 verificamos uma situação diferente àquela dada na Definição 1.3.3. De fato, não analisamos uma situação do tipo: quando* x *se aproximava de um ponto, mas sim quando* x *assumia valores arbitrariamente grandes ou pequenos. Isso requer uma definição de limite apropriada a este tipo de situação.*

Definição 1.3.4. *Seja* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função e suponhamos que exista* a *tal que* $(a, +\infty) \subset A$*. Definimos*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \text{ com } \ \delta > a \ \text{ tal que } \ x > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definição 1.3.5. *Seja* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função e suponhamos que exista* a *tal que* $(-\infty, a) \subset A$*. Definimos*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \text{ com } \ -\delta < a \ \text{ tal que } \ x < -\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Exemplo 1.3.7. *De posse das definições acima, é fácil ver que* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$*. De fato, basta tomar* $\delta = \frac{1}{\epsilon}$*. Analogamente,* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$*. Desta análise resulta que a função do Exemplo 1.3.1 tende a* 1 *quando* x *tende a* $\pm\infty$*.*

Para entender as propriedades dos limites e analisar mais exemplos recomendamos as referências [5], [9]. Ressaltamos que nosso interesse aqui não é explorar os conceitos de Cálculo, mas sim produzir um material auto suficiente e didático que seja efetivamente útil para alunos e professores do Ensino Médio. Sendo assim, descreveremos apenas as noções fundamentais do Cálculo de modo mais ingênuo possível, mas sem deixar de lado a formalidade apropriada, de modo que o leitor possa entender o conteúdo do Teorema do Valor Intermediário e suas aplicações.

1.4 Funções contínuas

Na seção anterior, quando definimos o $\lim_{x\to p} f(x)$ analisamos o comportamento da função $f(x)$ para valores de x próximos de p, mas diferentes de p. Em muitos exemplos pode ocorrer que $\lim_{x\to p} f(x)$ exista, mesmo que f não esteja definida no ponto p (ver Exemplo 1.3.3). Se f está definida em p e $\lim_{x\to p} f(x)$ existe, pode ocorrer ainda que este limite seja diferente de $f(p)$ (ver Exemplo 1.3.4). Quando $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ diremos que a função f é contínua em p (ver Exemplos 1.3.5 e 1.3.6).

Definição 1.4.1. *Uma função real $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é* contínua no ponto p *se as seguintes condições forem satisfeitas:*

i) $f(p)$ está definido (isto é, p pertence ao domínio de f),

ii) $\lim_{x\to p} f(x)$ existe,

iii) $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Se f não é contínua em p dizemos que f é descontínua em p.

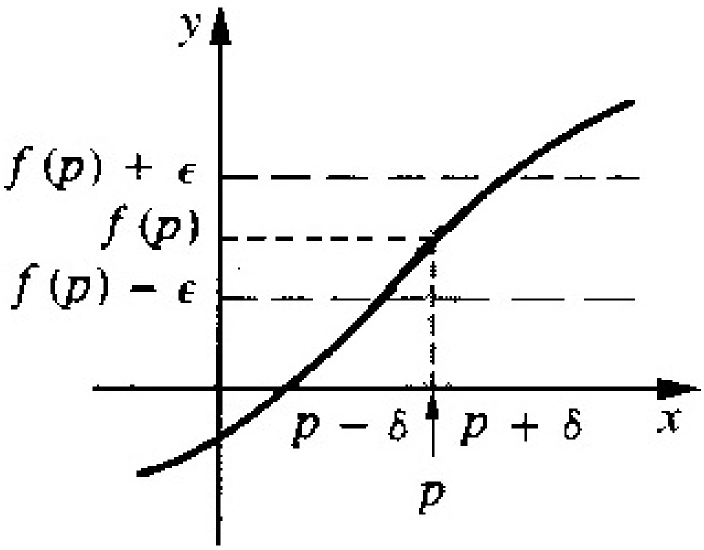


Figura 1.5: Gráfico da definição 1.4.1

Definição 1.4.2. *Uma função f é dita* contínua *se f é contínua em todos os pontos de seu domínio.*

Vejamos mais alguns exemplos:

Exemplo 1.4.1. *Seja* $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$. *Neste caso, fica implícito que o domínio de* f *é o conjunto* $\mathbb{R} - \{1\}$. *Podemos estudar o limite de* f *quando* x *tende a 1:*

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3.$$

Neste exemplo, f *não é contínua no ponto* $x = 1$*, uma vez que* 1 *não pertence ao domínio da* f *(e, por conseguinte, não podemos calcular* $f(1)$*). No entanto, para todo* $x \neq 1$ *segue que a função é contínua, pois cumpre as condições da Definição 1.4.1.*

Exemplo 1.4.2. *Seja* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & se \quad x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ 5 & se \quad x = 1. \end{cases}$

Neste caso, f *não é contínua no ponto* $x = 1$*, embora assuma valores em todo seu domínio. Neste caso,* $\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \neq f(1)$. *No entanto, para todo* $x \neq 1$ *segue que a função é contínua.*

Exemplo 1.4.3. *Considere agora* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & se \quad x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ 3 & se \quad x = 1. \end{cases}$

Neste caso, f *é contínua no ponto* $x = 1$*, pois cumpre todas as condições da Definição 1.4.1. Isto é,* $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ *(inclusive para* $p = 1$*).*

Exemplo 1.4.4. *Considere a função polinomial* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$. *Neste caso, o domínio de* f *é* $\mathbb{R}$ *e segue que para todo* p,

$$\lim_{x \to p} (2x^3 - 3x^2 + x - 1) = 2p^3 - 3p^2 + p - 1 = f(p).$$

Portanto, f *é contínua.*

Uma maneira muito útil de verificar se uma função real $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua é analisando o gráfico de f. Sabemos que o gráfico de f é definido por

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\} \subset A \times \mathbb{R}.$$

Uma função contínua se caracteriza pelo fato de seu gráfico não ser interrompido, isto é, o gráfico de f não apresenta saltos ou quebras. O gráfico pode ser desenhado sem remover o lápis do papel. Veja os gráficos dos Exemplos 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3 e 1.4.4, mostrados a seguir.

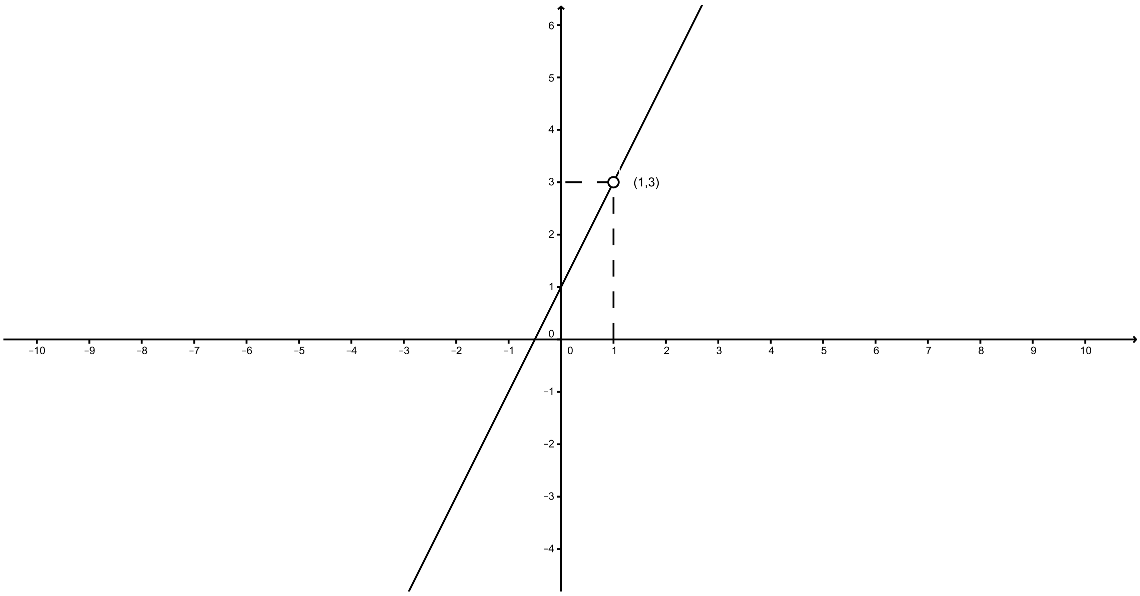


Figura 1.6: Gráfico do Exemplo 1.4.1

Outra coisa interessante é que muitos fenômenos físicos são contínuos. Por exemplo, considere a temperatura, ou o deslocamento ou mesmo a velocidade de um veículo. Tais coisas variam continuamente com o tempo. No entanto, é claro que existem fenômenos físicos descontínuos. Observe, por exemplo, o estado físico da água contida em um recipiente. A medida que este recipiente é submetido ao fogo, com o passar do tempo a temperatura da água vai aumentando continuamente até um certo momento, no qual seu estado físico muda abruptamente e a água dentro do recipiente começa a ferver. Assim, houve uma quebra ou ruptura no estado físico da água, mostrando uma descontinuidade.

Não é muito difícil de perceber que as funções polinomiais, as funções raízes, as funções trigonométricas, as funções trigonométricas inversas, as funções exponenciais e as funções logarítmicas são todas contínuas em seus respectivos domínios. Uma maneira intuitiva e fácil de comprovar isso é analisar seus respectivos gráficos. Isso é uma informação relevante pois estas são os tipos de funções que aparecem com maior frequência no Ensino

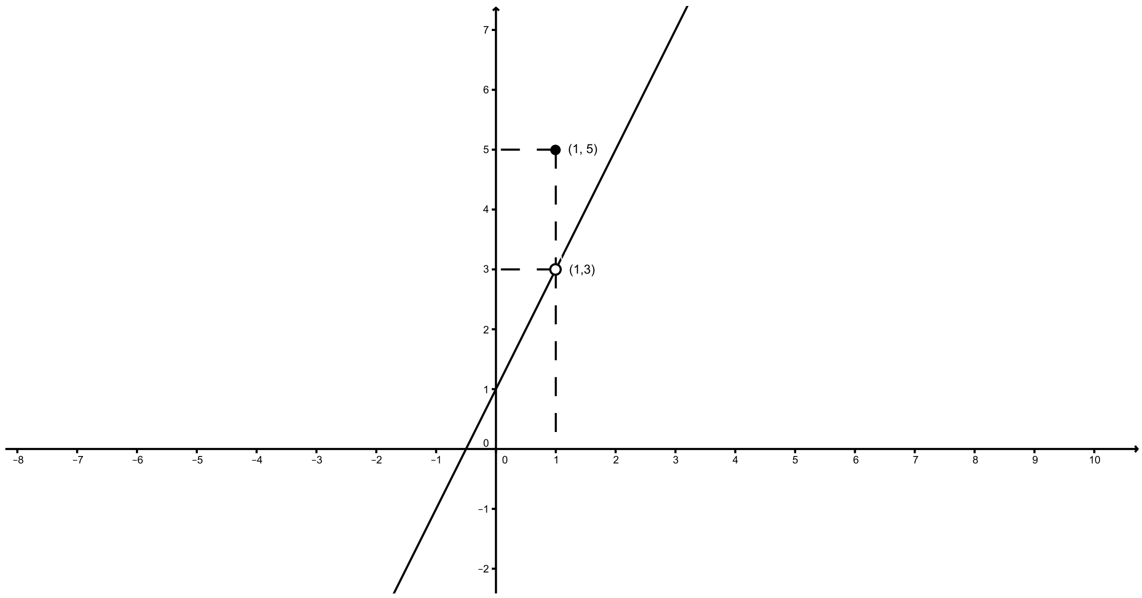


Figura 1.7: Gráfico do Exemplo 1.4.2

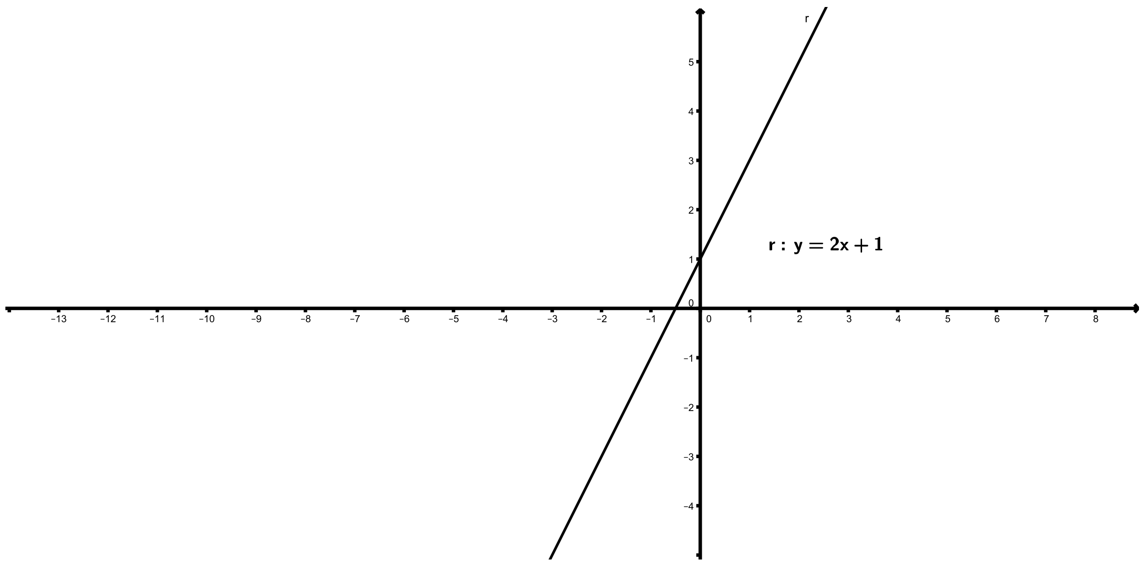


Figura 1.8: Gráfico do Exemplo 1.4.3

Médio. Ou seja, embora a noção de continuidade envolva a definição de limite - que não é ensinado no Ensino Médio - via esta nossa observação podemos concluir que a grande maioria das funções que aparecem em nossos livros textos do Ensino Médio são contínuas. No que segue daremos os elementos do Cálculo necessários para comprovar esta afirmação.

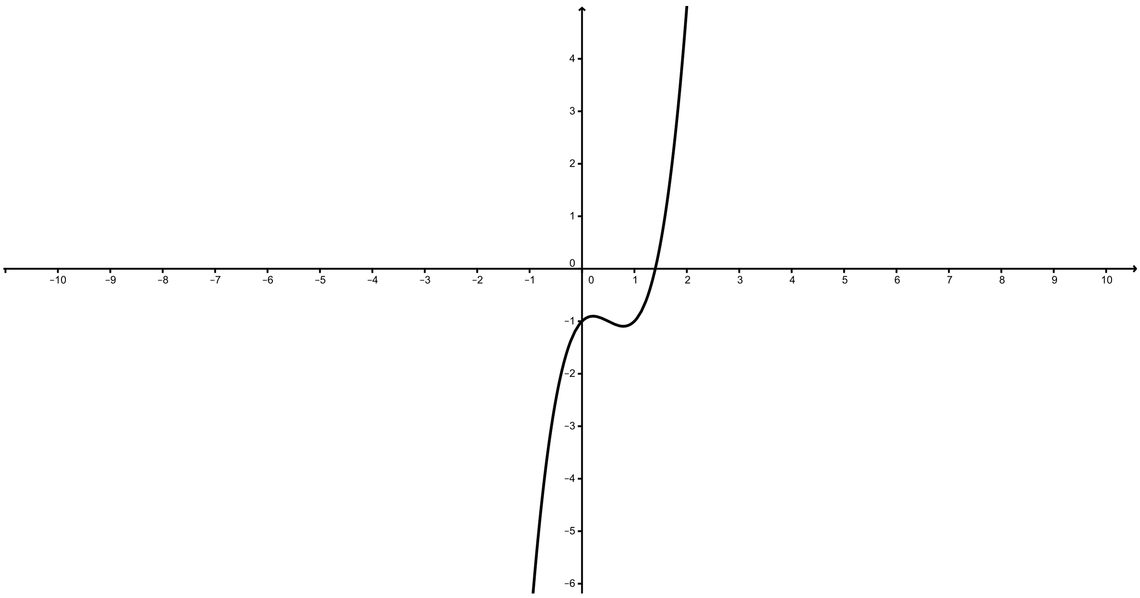


Figura 1.9: Gráfico do Exemplo 1.4.4

Proposição 1.4.3. *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $p \in A$, e seja $c \in \mathbb{R}$. Então, as funções $f+g$, $f \cdot g$, $f-g$ e cf também são contínuas em p. Além disso, se $g(p) \neq 0$, segue que a função $\dfrac{f}{g}$ também é contínua em p.*

Prova. Faremos a demonstração apenas para $f+g$. Os outros casos seguem com raciocínio análogo.

Seja $\epsilon > 0$. Da hipótese de continuidade de f e g temos que existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que

$$0 < |x-p| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e}$$
$$0 < |x-p| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(p)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos

$$0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e}$$

$$0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(p)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí, se $|x-p| < \delta$ segue da Desigualdade Triangular que $|(f(x)+g(x))-(f(p)+g(p))| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Portanto, $f+g$ é contínua em p. ■

Disso resulta que soma, produto, diferença e quociente de funções contínuas é ainda uma função contínua.

Outro resultado importante sobre funções contínuas é o seguinte:

Proposição 1.4.4. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset Im(f) \to \mathbb{R}$ tais que f é contínua em $p \in A$ e g é contínua em $f(p) \in B$. Então, a função composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$, definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é contínua em p.*

Prova. Como g é contínua em $f(p)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que

$$0 < |y - f(p)| < \delta_1 \Rightarrow |\, g(y) - g(f(p))| < \epsilon.$$

Para esse $\delta_1 > 0$, como f é contínua em p, existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |\, f(x) - f(p)| < \delta_1.$$

Ou seja, a partir do $\epsilon > 0$ inicial dado, mostramos que existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |\, f(x) - f(p)| < \delta_1 \Rightarrow |\, g(f(x)) - g(f(p))| < \epsilon.$$

Portanto, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é contínua em p. ■

Segue da Proposição 1.4.3, da Proposição 1.4.4 e dos comentários feitos anteriormente que a soma, multiplicação, divisão ou composição de funções polinomiais, raízes, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e trigonométricas inversas, são contínuas. Além da caracterização geométrica de continuidade - analisando o gráfico da função - ou da caracterização algébrica de continuidade envolvendo as Proposições 1.4.3 e 1.4.4, temos ainda outras formas de mostrar que uma função é contínua. A seguir, mostraremos uma caracterização de continuidade via sequências. Este resultado será útil na demonstração do Teorema de Bolzano.

Proposição 1.4.5. *Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $p \in A$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_n \in A$ com $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = p$, tem-se que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(p)$.*

Prova. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $p \in A$. Dada a sequência de pontos $x_n \in A$ com $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = p$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - p| < \delta$

acarreta que $|f(x) - f(p)| < \epsilon$. Correspondente a δ, existe um índice $n_0 \in I\!N$, tal que a partir desse índice (ou para todo $n > n_0$) segue que $|x_n - p| < \delta$. Logo, para todo $n > n_0$ segue que $|f(x_n) - f(p)| < \epsilon$. Isso mostra que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(p)$.

Reciprocamente, suponhamos, por absurdo, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = p$ implica que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(p)$, mas que f seja descontínua no ponto p. Então, existe $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $n \in I\!N$, podemos encontrar $x_n \in A$ com $|x_n - p| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(p)| \geq \epsilon$. Assim, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = p$ mas não temos $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(p)$, uma contradição. ■

Recomendamos ao leitor menos familiarizado com a definição de limite, que utilize esta caracterização de continuidade dada na Proposição 1.4.5 para um estudo formal de continuidade de funções. Isto porque é mais fácil e intuitivo trabalhar com a noção de convergência de sequências do que a noção de limite de funções de uma maneira mais geral.

Capítulo 2

Teorema do Valor Intermediário

Embora já fosse conhecido e utilizado, foi só no início do século XIX, que o Teorema do Valor Intermediário foi demonstrado. Deve-se ao matemático tcheco Bernhard Bolzano (1781 - 1848) a demonstração analítica deste teorema. Antes disso, todos os matemáticos da época apoiavam-se em alguma justificativa geométrica para o resultado.

Inicialmente, apresentaremos um caso particular do Teorema do Valor Intermediário, chamado de Teorema de Bolzano. Na verdade, na maioria das aplicações, é esta versão que utilizaremos com frequência. De posse do Teorema de Bolzano, mostraremos o caso geral.

Teorema 2.0.6. *(Teorema de Bolzano) Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua e suponha que* $f(a)$ *e* $f(b)$ *tenham sinais contrários. Então, existirá pelo menos um* $\alpha \in [a, b]$ *tal que* $f(\alpha) = 0$.

Prova. *Sem perda de generalidade, vamos supor que* $f(a) < 0$ *e* $f(b) > 0$. *Façamos* $a = a_0$ *e* $b = b_0$. *Seja* c_0 *o ponto médio do segmento* $[a_0, b_0]$. *Desta forma, temos*

$$f(c_0) < 0 \text{ ou } f(c_0) \geq 0.$$

Suponhamos $f(c_0) < 0$ $(f(c_0) \geq 0$ *apresenta raciocínio análogo) e façamos* $c_0 = a_1$ *e* $b_0 = b_1$. *Então* $f(a_1) < 0$ *e* $f(b_1) > 0$. *Seja* c_1 *o ponto médio do segmento* $[a_1, b_1]$. *Desta forma*

$$f(c_1) < 0 \text{ ou } f(c_1) \geq 0.$$

Suponhamos $f(c_1) \geq 0$ ($f(c_1) < 0$ apresenta raciocínio análogo) e façamos $a_1 = a_2$ e $c_1 = b_2$. Assim,

$$f(a_2) < 0 \text{ e } f(b_2) \geq 0.$$

Prosseguindo com este o raciocínio, construiremos uma sequência de intervalos encaixados da forma:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

Note que para todo $n \in I\!N$,

$$f(a_n) < 0 \text{ e } f(b_n) \geq 0. \tag{2.1}$$

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes, existe um único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq \alpha \leq b_n$, para todo $n \in I\!N$.

As sequências (a_n) e (b_n) convergem para α devido a maneira como (a_n) e (b_n) foram construídas. Como por hipótese f é contínua, pela Proposição 1.4.5 segue que

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\alpha) \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(\alpha). \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) conclui-se

$$f(\alpha) \leq 0 \;\text{ e }\; f(\alpha) \geq 0.$$

Portanto, $f(\alpha) = 0$. ■

Teorema 2.0.7. *(Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se d for um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = d$.*

Prova. *Vamos supor, sem perda de generalidade, que $f(a) < d < f(b)$.*

Considere a função $g(x) = f(x) - d$, onde $x \in [a, b]$. Como f é contínua em $[a, b]$, pela Proposição 1.4.3 temos que g também o é.

Além disso,

$$g(a) = f(a) - d < 0 \text{ e } g(b) = f(b) - d > 0.$$

Pelo Teorema de Bolzano, existe $\alpha \in [a, b]$ tal que se $g(\alpha) = 0$. Portanto, $f(\alpha) - d = 0$, donde $f(\alpha) = d$. ■

Capítulo 3

Aplicações

Em geral, as aplicações do Teorema do Valor Intermediário recaem no caso particular do Teorema de Bolzano. Uma das aplicações mais úteis deste teorema está relacionada ao problema da existência de raízes reais para uma dada equação. Porém, existem muitas outras aplicações interessantes. Neste capítulo enunciaremos alguns problemas que podem ser resolvidos com uma aplicação do Teorema do Valor Intermediário (ou do Teorema de Bolzano).

Aplicação 1. Mostre que a equação $x^3 - 4x + 8 = 0$ admite pelo menos uma raiz real.

Aplicação 2. Existe um número real que é exatamente uma unidade a mais que seu cubo?

Aplicação 3. Seja $f(x) = x^5 + x + 1$. Justifique a afirmação: f tem pelo menos uma raiz no intervalo [-1,0].

Aplicação 4. Prove que todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

Vejamos agora outras aplicações menos triviais.

Aplicação 5. (Teorema do Ponto Fixo) Se $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ é uma função contínua então existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = \alpha$. O ponto α é chamado de *ponto fixo* de f.

Aplicação 6. Considere uma *pizza* no formato de um disco. Será que é possível cortar a *pizza* com um único corte, de modo que ao dividi-la em 2 pedaços, ambos tenham a mesma quantidade de massa?

Aplicação 7. Um monge tibetano deixa o monastério às 07 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo de uma montanha, chegando lá às 19 horas. Na manhã seguinte ele parte do topo às 07 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 19 horas. Mostre que existe um ponto do percurso em que o monge vai estar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.

Aplicação 8. Admitindo que a variação de temperatura do globo terrestre seja uma função contínua, podemos garantir que existem pontos antípodas no globo tais que em qualquer instante, as temperaturas nestes pontos são as mesmas.

Aplicação 9. Considere um trapézio como na Figura 3.1 a seguir. Então, existe uma altura $x \in [0, h]$ onde os segmentos $e(x)$ e $d(x)$ têm ambos a mesma medida.

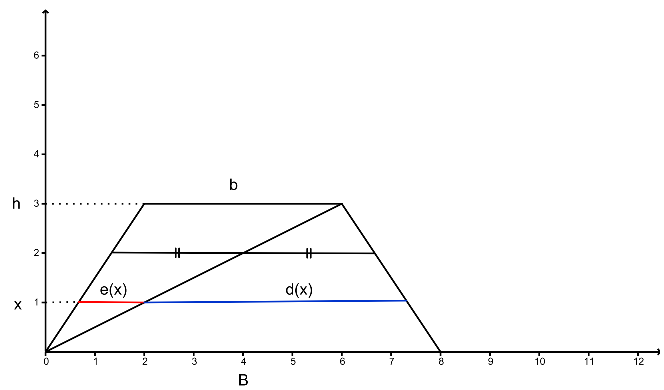


Figura 3.1: Aplicação 9 - Trapézio

3.1 Soluções

Solução 1. Considere a função $f(x) = x^3 - 4x + 8$. Como f é polinomial temos que f é contínua. Além disso, observe que $f(0) = 8 > 0$ e $f(-3) = -7 < 0$ (os números 0 e -3 foram escolhidos de forma arbitrária, de modo que f tenha sinais contrários). Poderiam ser escolhidos outros números uma vez que, na Aplicação 1, pede-se apenas para mostrar que f tem raiz real, não se importando onde encontra-se tal raiz. Restringindo o domínio de f ao intervalo $[-3, 0]$ temos ainda que f é contínua em $[-3, 0]$. Segue do Teorema de Bolzano que existe pelo menos um α em $[-3, 0]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Desta forma, a equação $x^3 - 4x + 8 = 0$ admite pelo menos uma raiz real e o teorema garante que tal raiz está entre entre -3 e 0.

Solução 2. Podemos reformular a pergunta da Aplicação 2 da seguinte forma:
Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = x^3 + 1$?
Ou ainda, dada $f(x) = x^3 - x + 1$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$?
Considerando o intervalo [-2,0] temos que f é contínua em [-2,0] e verificamos que $f(-2) = -5 < 0$ e que $f(0) = 1 > 0$. Logo pelo Teorema de Bolzano, existe $\alpha \in [-2, 0]$ nas condições exigidas. Observe que se continuarmos indefinidamente o argumento acima para outros dois valores dentro do intervalo [-2,0], estabeleceremos um processo indutivo de modo a convergir para o valor de α.

Solução 3. Considere a função $f(x) = x^5 + x + 1$. Observe que $f(0) = 1$ e $f(-1) = -1$. Obviamente f é contínua no intervalo $[-1, 0]$. Do Teorema de Bolzano, temos que existe pelo menos um α em $[-1, 0]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Desta forma a equação $x^5 + x + 1 = 0$ admite pelo menos uma raiz real entre -1 e 0. Note que neste exemplo, diferente do que ocorreu nas soluções anteriores, a escolha dos números para analisar o sinal da f deveria ser os números -1 e 0, pois era exatamente neste intervalo que queríamos verificar a existência da raiz.

Solução 4. Considere o polinômio de coeficientes reais e grau ímpar:

$$p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_1 x + a_0,\ n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} \neq 0.$$

Se $a_{2n+1} > 0$, observe que

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty.$$

Por outro lado, se $a_{2n+1} < 0$, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty.$$

Desta análise e do fato de p ser contínua, segue que podemos encontrar números reais a e b tais que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$. Logo, pelo Teorema de Bolzano, existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $p(\alpha) = 0$, como queríamos.

Solução 5. Definimos uma função g da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - x. \end{aligned}$$

Como f é contínua, g também o é (Proposição 1.4.3). Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, nada teríamos a demonstrar (pois estes pontos já seriam pontos fixos da f). Sem perda de generalidade, podemos supor $f(a) > a$ e $f(b) < b$. Assim, $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$ e pelo Teorema de Bolzano, existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $g(\alpha) = 0$. Consequentemente, existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = \alpha$, como queríamos.

Solução 6. Suponhamos a *pizza* dada, por um disco de raio R. Observe que qualquer que seja o corte que fizermos, existe um diâmetro tal que o corte é perpendicular a este diâmetro. Assim, sem perda de generalidade, vamos fixar um diâmetro D de modo que ao fazer nosso único corte, este seja perpendicular a D.

Vamos assumir que M é a quantidade de massa da pizza. Fixemos o sentido anti-horário para estabelecer que o diâmetro D varia de $-R$ a R. Seja $e : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R}$, a função contínua definida por $e(x)$ = a quantidade de *pizza* do lado esquerdo do corte. Analogamente, definimos $d : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função contínua que representa a quantidade de *pizza* a direita do corte. Definimos $f : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = e(x) - d(x)$. Pela proposição 1.4.3, f é contínua. Além disso:

$$f(-R) = e(-R) - d(-R) = 0 - M = -M < 0, \text{ e}$$

$$f(R) = e(R) - d(R) = M - 0 = M > 0.$$

Pelo Teorema de Bolzano, existe $\alpha \in [-R, R]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Logo existe $\alpha \in [-R, R]$ tal que $e(x) = d(x)$, como queríamos.

Solução 7. Considere as seguintes funções contínuas:
$s : [7, 19] \longrightarrow \mathbb{R}$ que chamaremos de função subida e $d : [7, 19] \longrightarrow \mathbb{R}$ que chamaremos de função descida. Assim, $s(t)$ denota a posição do monge no instante t durante a subida enquanto $d(t)$ denota a posição do monge no instante t, durante a descida.
Construa agora a função

$$\begin{aligned} f : [7, 19] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(t) &\longmapsto s(t) - d(t). \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar 0 a posição no monastério e P a posição no topo da montanha. Assim,

$$s(7) = 0, \;\; s(19) = P, \;\; d(7) = P \;\text{ e }\; d(19) = 0.$$

Desta forma,

$$f(7) = s(7) - d(7) = 0 - P = -P < 0 \text{ e}$$

$$f(19) = s(19) - d(19) = P - 0 = P > 0.$$

Pelo Teorema de Bolzano, existe $t_0 \in [7, 19]$ tal que $f(t_0) = 0$. Ou seja, $s(t_0) - d(t_0) = 0 \Leftrightarrow s(t_0) = d(t_0)$, como queríamos.

Solução 8. Considere o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a esfera de centro 0 e raio R cujos pontos são representados por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R\}$. Vamos assumir que a superfície da Terra seja representado por S. Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow S$ uma função contínua que toma valores em S. Isto é, γ descreve uma curva ou trajetória em S.

Dada $\gamma(t)$, definimos $\overline{\gamma}(t)$ como sendo o ponto diametralmente oposto a $\gamma(t)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a e b sejam tais que $\gamma(a) = P_0 = \overline{\gamma}(b)$ e $\gamma(b) = P_1 = \overline{\gamma}(a)$. Assumindo que a função temperatura no globo terrestre $T : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, defina $Q : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(t) = T(\gamma(t)) - T(\overline{\gamma}(t))$. Como Q é uma composição de funções contínuas, segue pela Proposição 1.4.4 que Q é contínua.

Além disso,

$$Q(a) = T(P_0) - T(P_1) \text{ e } Q(b) = T(P_1) - T(P_0) = -Q(a).$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $Q(a) > 0$. Logo, $Q(b) < 0$.

Pelo Teorema de Bolzano, temos que existe $t_0 \in [a, b]$ tal que

$$Q(t_0) = 0 \Leftrightarrow T(\gamma(t_0)) - T(\overline{\gamma}(t_0)) = 0 \Leftrightarrow T(\gamma(t_0)) = T(\overline{\gamma}(t_0)).$$

Disso concluímos que dado um ponto no globo terrestre, em qualquer trajetória γ ligando este ponto ao seu antípoda, existe pelo menos um ponto da trajetória cuja temperatura coincide com a temperatura em seu antípoda.

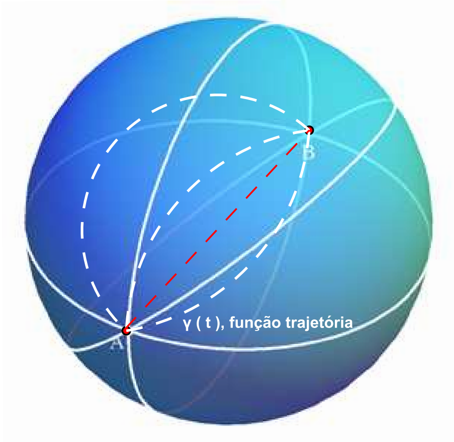


Figura 3.2: Representação de pontos diametralmente opostos em S

Solução 9. Considere as seguintes funções contínuas, como sugere a Figura 3.3:
$e : [0, h] \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo a medida do segmento à esquerda da diagonal do trapézio, na altura x e $d : [0, h] \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo a medida do segmento à direita da diagonal do trapézio, na altura x.
Defina

$$\begin{aligned} f : [0, h] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e(x) - d(x). \end{aligned}$$

Temos então que

$$e(0) = 0 \;\; e(h) = b, \;\; d(0) = B \;\text{ e }\; d(h) = 0.$$

Desta forma,

$$f(0) = e(0) - d(0) = 0 - B = -B < 0, \;\text{ enquanto}$$

$$f(h) = e(h) - d(h) = b - 0 = b > 0.$$

Pelo Teorema de Bolzano, temos que existe $\alpha \in [0, h]$ tal que

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e(\alpha) - d(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e(\alpha) = d(\alpha).$$

Observe na Figura 3.3 que b denota a base menor do trapézio, B a base maior e h a sua altura.

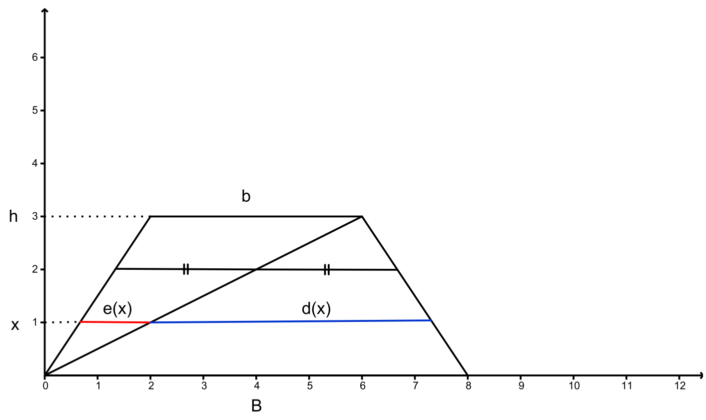


Figura 3.3: Aplicação 9 - Trapézio

Capítulo 4

Experiência didática em sala de aula

Atendendo ao disposto no regimento do Mestrado Profissional, que tem como objetivo proporcionar formação Matemática aprofundada, relevante e articulada com o exercício da docência no Ensino Fundamental e Médio, elaboramos com base na teoria desenvolvida um plano para aferição da aplicabilidade dos estudos aqui desenvolvidos.

Para tanto, desenvolvemos uma ficha de trabalho para ser a aplicada para os alunos, sobre o tema de nosso trabalho. A ficha encontra-se no Apêndice A. Basicamente, nossa ideia foi experimentar a aplicabilidade do Teorema do Valor Intermediário (ou Teorema de Bolzano) numa linguagem acessível aos alunos. Na ficha, e nas aulas expositivas onde a aplicamos, fizemos uma introdução (ou revisão) sobre o conceito de função, exploramos alguns exemplos e tentamos explicar a noção geométrica e intuitiva de continuidade. Daí, apresentamos o Teorema de Bolzano aos alunos e fizemos três perguntas, relacionadas ao problema de encontrar raízes para funções.

Aplicamos esta ficha para alunos do nível fundamental - que ainda não haviam aprendido o conceito de função; para alunos do Ensino Médio de escolas públicas e particulares e ainda para um grupo de alunos integrantes da Olimpíada de Matemática de Rio Preto. Para fins comparativos, aplicamos também para um grupo de alunos de um curso superior de Engenharia, de uma faculdade particular da região. Os nomes das unidades escolares, bem como o da instituição de ensino superior envolvidas terão suas identificações preservadas por questões éticas.

Diante da análise dos resultados alcançados pelo exposto, inferimos que:

- Alunos do Ensino Fundamental - encontraram muita dificuldade de interpretação das questões, e ausência do domínio de operações básicas necessárias até para o preenchimento da tabela do exercício I da ficha de trabalho. Dentre as possíveis causas destacamos que este material não é totalmente apropriado ao nível de ensino que estes alunos se encontram. Sobretudo, tiveram a dificuldade de entender o conceito de função. Mesmo assim, acreditamos que foi uma experiência positiva no sentido de que pudemos observar o comportamento dos alunos frente a um tema novo, fora de sua realidade acadêmica, e que necessitaria fazê-los pensar.

- Alunos do Ensino Médio - na rede pública tivemos quase as mesmas dificuldades que encontramos nos alunos do fundamental. A grande maioria tem a dificuldade inicial de entender o conceito de função, mesmo já tendo visto este conteúdo. Mesmo o exercício I, para completar uma tabela de valores, os alunos tiveram muitas dificuldades. Na rede particular, aplicamos em duas salas de uma conceituada escola. O desempenho dos alunos foi muito satisfatório. Em uma das salas, não fizemos a aula expositiva. Apenas pedimos que os mesmos preenchessem as fichas. Mesmo assim o resultado foi ainda satisfatório, de acordo com o esperado. É claro que tiveram alunos com muita dificuldade de responder as três questões de modo correto.

- Grupo de alunos da Olimpíada de Matemática de Rio Preto - aplicamos para um grupo seleto de alunos. O desempenho foi muito satisfatório, tanto para os alunos do fundamental - que desconheciam o conceito de função, quanto para os alunos do Ensino Médio. Ou seja, dentro do esperado.

- Alunos do curso de Engenharia de uma escola particular - os resultados obtidos foram reveladores frente ao despreparo em que se encontram. Pode-se notar que a defasagem advinda dos anos iniciais de sua formação não foi suprimida, mesmo com a oferta de cursos de nivelamento pela instituição. O resultado foi bem abaixo do esperado.

4.1 Conclusão

Acreditamos que os resultados foram os esperados, a menos do grupo de alunos do curso de Engenharia. Ou seja, para alunos do Ensino Médio da rede particular e da Olimpíada de Matemática de Rio Preto, os resultados foram bastante satisfatórios, demonstrando a viabilidade do uso deste trabalho como material de apoio no estudo da determinação de raízes de funções contínuas. Os resultados insatisfatórios - alcançados pela grande maioria dos alunos do Ensino Médio da rede pública - traduzem estudos recentes sobre os baixos índices do aprendizado de Matemática por parte dos estudantes da rede pública. Nossa surpresa foi com os alunos do curso de Engenharia. Vale observar um dado curioso: os alunos do curso superior de Engenharia que participaram de nossa atividade são em sua quase totalidade alunos oriundos da rede pública.

Enfim, acreditamos que o material elaborado nesta dissertação poderá contribuir na formação do professor do Ensino Médio e servirá também para alunos que tenham interesse pelo tema, ou pelo menos pelas aplicações possíveis a partir do tema. Nosso esforço neste trabalho concentrou-se em dois propósitos:

1. Propiciar no texto uma visão histórica e algébrica dos conjuntos numéricos usados no Ensino Médio, valorizando as diferenças entre eles e argumentando a passagem de um a outro.

2. Utilizar um tema que não é próprio da grade dos alunos do Ensino Médio para testar sua aplicabilidade, por se tratar de um assunto interessante, de fácil compreensão e com grande número de aplicações. Neste sentido, tentamos confeccionar um texto explorando os conceitos da forma mais ingênua possível, no sentido de mostrar os elementos necessários para que o texto seja auto-suficiente e com uma linguagem que torna possível sua leitura.

Apêndice A

Ficha de Trabalho

Ficha de Trabalho		
Nome:	**Idade:**	**Escolaridade:**

Notas:

1. Entenda por função contínua em um intervalo, a função cujo traço da sua representação gráfica neste intervalo possa ser obtido sem que o objeto utilizado (caneta, lápis etc...), seja removido do papel, ou seja, não haja "saltos" neste traço.
2. A função assume **valores positivos acima do eixo x** e assume **valores negativos abaixo do eixo x.**
3. Utilizando-nos de um sistema de coordenadas ortogonais, **os pontos de intersecção do eixo x com o traço da função são os pontos onde a função assume o valor zero**.

Teorema: Seja $f\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários, então existirá pelo menos um $\boldsymbol{c}$ em $[a\,,b]$ tal que $f(c) = \mathbf{0}$.

Atividades

I. Dada a função:

$$\begin{aligned} f\colon [-5, 5] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 2 \end{aligned}$$

Complete a tabela:

x	-5	-4	-3	0	$+3$	$+4$	$+5$
$x+2$							

Responda: É correto afirmar que existe um ponto pertencente ao intervalo $[-5, 5]$ aonde a função assume o valor zero ? Justifique.

____

____

____

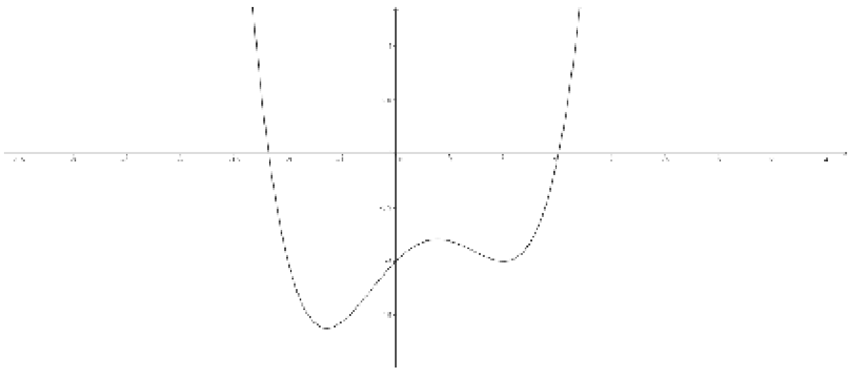
____

____

____

Figura A.1: Ficha de Trabalho - Frente

II. Observe o gráfico :



Embora a função seja desconhecida é possível estimar intervalos do domínio onde a função assume o valor zero ? Justifique.

III. Mostre que a equação $x^3 - 4x + \mathbf{8} = \mathbf{0}$, admite pelo menos uma raiz real. Sem resolver a equação. Justifique.

Figura A.2: Ficha de Trabalho - Verso

Referências Bibliográficas

[1] Boulos, P., *Cálculo Diferencial e Integral Vol. I.* São Paulo, 2006 - Makron Books.

[2] Domingues, H.H.; Iezzi, G., *Algebra Moderna.* São Paulo, 1982 - Editora Atual.

[3] Ferreira, J., *A Construção dos Números.* 1a ed., Rio de Janeiro: SBM (Coleção Textos Universitários), 2010.

[4] Flemming, D.M.; Gonçalves, M.B., *Cálculo A: funções, limites, derivação e integração.* Pearson Prentice Hall, 2006.

[5] Guidorizzi, H.L., *Um curso de Cálculo - Vol. I.* LTC Editora, 1986.

[6] Hefez, A., *Elementos de Aritmética*, 1a. ed., Rio de Janeiro: SBM (Coleção Textos Universitários), 2008.

[7] Hefez, A., *Curso de Álgebra, Vol. 1*, 5a. ed., Rio de Janeiro: SBM (Coleção Matemática Universitária), 2013.

[8] Leithold, L., *O cálculo com Geometria Analítica - Vol. I.* São Paulo, 1976 - Editora Harper & Row do Brasil, Ltda.

[9] Lima, E.L., *Curso de Análise Vol. I.* Rio de Janeiro, 1999. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Projeto Euclides.

[10] Lima, E.L., *O princípio da indução*, Revista Eureka, número 3.

[11] Shenk, A., *Cálculo e Geometria Analítica - Volume I.* Rio de Janeiro, 2004 - Editora Campus.