



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Campus São Paulo
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Alguns conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio: uma abordagem vetorial baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Gilberto de Oliveira Facundo

São Paulo - SP, 2023

Gilberto de Oliveira Facundo

**Alguns conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio:
uma abordagem vetorial baseada na Teoria dos Registros
de Representação Semiótica**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tec-
nologia de São Paulo, para obtenção do título
de Mestre em Matemática.

Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo

Campus São Paulo

Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientadora: Profa. Dra. Mônica Helena Ribeiro Luiz

São Paulo - SP

2023

Catálogo na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

f143a	<p>Facundo, Gilberto de Oliveira</p> <p>Alguns conceitos de geometria analítica no ensino médio: uma abordagem vetorial baseada na teoria dos registros de representação semiótica. / Gilberto de Oliveira Facundo. São Paulo: [s.n.], 2023.</p> <p>75 f. il.</p> <p>Orientadora: Profa. Dra. Mônica Helena Ribeiro Luiz</p> <p>Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2023.</p> <p>1. Geometria Analítica. 2. Vetores. 3. Registros de Representação Semiótica. 4. Ensino Médio. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.</p> <p>CDD 510</p>
-------	--

Gilberto de Oliveira Facundo

**Alguns conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio:
uma abordagem vetorial baseada na Teoria dos Registros
de Representação Semiótica**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tec-
nologia de São Paulo, para obtenção do título
de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. São Paulo, 25 de agosto de 2023.

**Profa. Dra. Mônica Helena Ribeiro
Luiz**
Orientadora

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca
Membro interno

Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares
Membro externo

São Paulo - SP
2023

Dedico este trabalho a minha querida esposa pela paciência e compreensão.

Agradecimentos

Agradeço aos meus colegas de curso pelas ideias trocadas, em particular ao meu amigo Rosemir que tanto me socorreu em momentos de dúvidas, agradeço também aos meus professores pelas orientações ao longo do curso, principalmente a minha orientadora professora Dra. Mônica Helena Ribeiro Luiz que tanto me ajudou durante todo o período de elaboração deste trabalho, pois reconheço que sem sua ajuda jamais teria conseguido, e por fim agradeço a Deus e a minha família em que sempre busco apoio nas realizações de minhas conquistas.

“Deus seja Louvado”

Resumo

O trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta para o ensino de alguns conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio com uma abordagem vetorial. O aporte teórico deste trabalho é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida pelo pesquisador francês Raymond Duval. Foi feito um breve levantamento dos conceitos de Geometria Analítica e vetores para o Ensino Médio segundo a Base Nacional Comum Curricular. As atividades foram propostas a partir do plano cartesiano, por meio de figuras e gráficos, com o intuito de desenvolvê-las mostrando para o leitor cada passo em que foram feitos tratamentos e conversões. Também são apresentadas considerações sobre resolução de questões considerando uma abordagem vetorial e uma abordagem não vetorial.

Palavras-chaves: Geometria Analítica. Vetores. Registros de Representação Semiótica. Ensino Médio.

Abstract

The objective of this dissertation is to present a proposal for teaching some concepts of Analytical Geometry in High School using a vector approach. The theoretical contribution of this work is the Theory of Registers of Semiotic Representation, developed by the French researcher Raymond Duval. A brief survey was made of the concepts of Analytical Geometry and vectors for High School according to the National Common Curricular Base. The activities were proposed from the Cartesian plan, through figures and graphs, with the aim of developing them by showing the reader each step in which treatments and conversions were carried out. Considerations are also presented on solving issues considering a vector approach and a non-vector approach.

Keywords: Analytical Geometry. Vectors. Registers of Semiotic Representation. High School.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de tratamento e conversão de uma função quadrática.	8
Figura 2 – Ilustração de uma família de segmentos de retas orientados de mesma direção, mesmo comprimento e mesmo sentido.	15
Figura 3 – Ilustração de dois vetores \vec{u} e \vec{v} paralelos entre si.	16
Figura 4 – Ilustração de dois vetores \vec{u} e \vec{v} de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.	16
Figura 5 – Ilustração de dois vetores \vec{u} e \vec{v} ortogonais.	17
Figura 6 – Ilustração do vetor $\vec{u} + \vec{v}$	17
Figura 7 – Ilustração dos vetores \vec{u} e $k\vec{u}$	18
Figura 8 – Ilustração dos vetores \vec{u} , \vec{v} e o ângulo $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ entre eles.	18
Figura 9 – Ilustração dos vetores \vec{u} e \vec{v} , das semirretas OA , OB e do ângulo α	19
Figura 10 – Ilustração dos pontos A e B , e do vetor diretor \vec{u} da reta r no plano cartesiano.	20
Figura 11 – Ilustração dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} para verificação da equação (3.2), sendo \vec{w} a projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v}	21
Figura 12 – Ilustração do vetor \vec{u} e do ponto P no plano cartesiano.	22
Figura 13 – Ilustração dos vetores \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{AB} no plano cartesiano.	23
Figura 14 – Ilustração dos vetores \vec{u} , \vec{v} e do vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ no plano cartesiano.	24
Figura 15 – Ilustração dos vetores \vec{u} e $k\vec{u}$ no plano cartesiano.	25
Figura 16 – Ilustração dos vetores \vec{u} , \vec{v} , do ângulo θ entre eles e de suas respectivas coordenadas para a verificação da equação (3.5).	26
Figura 17 – Ilustração do vetor \vec{u} e dos pontos A e B no plano cartesiano.	27
Figura 18 – Ilustração do vetor diretor \vec{u} da reta r e dos pontos A e B no plano cartesiano.	28
Figura 19 – Ilustração dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} no plano cartesiano, sendo \vec{w} projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v}	29
Figura 20 – Ilustração de um triângulo ABC inscrito em um retângulo $CDEF$ para o cálculo de sua área por meio de suas coordenadas cartesianas.	32
Figura 21 – Ilustração dos vetores \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} e \vec{DB} no plano cartesiano para o cálculo da área do triângulo ABC	33
Figura 22 – Ilustração de um possível triângulo ABC e reta r no plano cartesiano para resolução do Exemplo 4.1.3.	35
Figura 23 – Ilustração de um possível triângulo ABC e dos vetores \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} e \vec{DC} no plano cartesiano para resolução do Exemplo 4.1.3.	36
Figura 24 – Ilustração do ponto P e da reta r no plano cartesiano para o cálculo da distância $d(P, r)$	37

Figura 25 – Ilustração do ponto P , da reta r e dos vetores \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{DP} no plano cartesiano para o cálculo da distância $d(P, r)$	39
Figura 26 – Ilustração do ponto P e da reta r no plano cartesiano para resolução do Exemplo 4.2.3.	40
Figura 27 – Ilustração dos pontos A e P , da reta r e dos vetores \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{DP} no plano cartesiano para resolução do Exemplo 4.2.3.	41
Figura 28 – Ilustração das retas não verticais r e t no plano cartesiano para o cálculo do ângulo $\alpha = \angle(r, t)$	43
Figura 29 – Ilustração das retas r e t perpendiculares entre si no plano cartesiano.	44
Figura 30 – Ilustração das retas r e t no plano cartesiano para o cálculo do ângulo $\alpha = \angle(r, t)$, considerando t vertical.	45
Figura 31 – Ilustração das retas concorrentes r e t e de seus respectivos vetores diretores \vec{u} e \vec{v} no plano cartesiano para o cálculo do ângulo $\alpha = \angle(r, t)$	46
Figura 32 – Ilustração dos pontos A , B e C no plano cartesiano para a verificação da condição de alinhamento.	48
Figura 33 – Ilustração dos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} no plano cartesiano para determinar uma condição de alinhamento dos pontos A , B e C	49

Sumário

	INTRODUÇÃO	1
1	REFERENCIAL TEÓRICO	3
1.1	Signos e representações	6
1.1.1	Signos	7
1.1.2	Representações	7
2	PROPOSTA DA BNCC PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO BÁSICO	11
2.1	Habilidades específicas da Geometria na BNCC	11
2.2	Considerações acerca do ensino de vetores segundo a BNCC	12
3	CONCEITOS PRELIMINARES	15
3.1	Tratamento geométrico	15
3.1.1	Definição de vetor	15
3.1.2	Operações com vetores	17
3.1.2.1	Adição de vetores	17
3.1.2.2	Multiplicação de número real por vetor	17
3.1.2.3	Produto escalar	18
3.1.3	Outras definições	19
3.1.3.1	Norma de um vetor	19
3.1.3.2	Ângulo entre dois vetores	19
3.1.3.3	Vetor diretor de uma reta	19
3.1.3.4	Projeção ortogonal	20
3.2	Tratamento algébrico	21
3.2.1	Definição de vetor	21
3.2.2	Operações com vetores	23
3.2.2.1	Adição de vetores	23
3.2.2.2	Multiplicação de número real por vetor	24
3.2.2.3	Produto escalar	25
3.2.3	Outras definições	26
3.2.3.1	Norma de um vetor	26
3.2.3.2	Ângulo de dois vetores	27
3.2.3.3	Vetor diretor de uma reta	27
3.2.3.4	Projeção ortogonal	28

4	PROPOSTA DE ATIVIDADES	31
4.1	Área de um triângulo	31
4.1.1	Utilizando coordenadas	31
4.1.2	Utilizando vetores	33
4.1.3	Exemplo	34
4.2	Distância de ponto à reta	36
4.2.1	Utilizando coordenadas	36
4.2.2	Utilizando vetores	38
4.2.3	Exemplo	40
4.3	Ângulo entre retas	42
4.3.1	Utilizando coordenadas	42
4.3.2	Utilizando vetores	46
4.3.3	Exemplo	47
4.4	Condição de alinhamento de três pontos	47
4.4.1	Utilizando coordenadas	47
4.4.2	Utilizando vetores	48
4.4.3	Exemplo	50
4.5	Considerações sobre as atividades com relação ao Referencial Teórico	50
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
	REFERÊNCIAS	55

Introdução

A motivação para o presente trabalho é fruto de um longo período de observações em sala de aula por parte do autor, o qual atua há vinte anos como docente de Matemática para diversas séries de Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Durante esse período, observou que ensinar Geometria Analítica sempre foi um desafio, devido às dificuldades em passar para os alunos conceitos abstratos que são intrínsecos da disciplina.

Diante disso, surgiu a questão: como apresentar conceitos de Geometria Analítica de maneira diferente da tradicionalmente abordada nos materiais didáticos?

A fim de responder este questionamento, o trabalho foi desenvolvido. Desta forma, o objetivo principal é apresentar atividades que permitam o desenvolvimento de alguns conceitos de Geometria Analítica para o Ensino Médio com uma abordagem vetorial.

Para isso, utilizamos como metodologia uma revisão da literatura, tais como artigos científicos, livros etc.

Como aporte teórico, consideramos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida pelo francês Raymond Duval. Esta teoria está relacionada aos tratamentos e conversões entre representações de objetos matemáticos, o que pode ser uma importante ferramenta no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Não é nossa pretensão apontar vantagens ou desvantagens de uma abordagem em detrimento da outra, pois, embora sejam abordagens diferentes, ambas têm o mesmo objetivo. Portanto, nosso intuito é fazer um contraponto entre duas maneiras diferentes de se trabalhar Geometria Analítica no Ensino Médio: por meio de coordenadas cartesianas, e por meio de vetores.

O trabalho está organizado em quatro capítulos: o referencial teórico; a Base Nacional Comum Curricular com relação ao ensino de Geometria e vetores; os conceitos de vetores necessários para o desenvolvimento das atividades; e algumas atividades envolvendo coordenadas cartesianas e vetores.

No primeiro capítulo, é apresentado o referencial teórico da pesquisa: a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida pelo pesquisador francês Raymond Duval. Duval desenvolveu suas pesquisas em psicologia cognitiva a partir da década de 70, oferecendo importantes contribuições para a área de Educação Matemática, foi pesquisador do Instituto de Pesquisas sobre o Ensino de Matemática de Estrasburgo, França, de 1970 até 1995 (ALMEIDA; SILVA, 2018, p.704).

No segundo capítulo, é apresentada uma breve descrição da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com relação ao ensino de Geometria e de vetores. Buscamos as

habilidades na área de Geometria que, segundo a BNCC, devem ser desenvolvidas no Ensino Básico. Também apresentamos considerações acerca do estudo de vetores no Ensino Básico segundo a BNCC.

No terceiro capítulo, são apresentados alguns conceitos, definições e operações com vetores necessários para o desenvolvimento das atividades propostas, tais como produto escalar, projeção ortogonal, ângulo entre dois vetores, soma de vetores, entre outras definições e operações.

No quarto capítulo, são propostas quatro atividades de Geometria Analítica utilizando duas abordagens distintas: primeiro com coordenadas cartesianas, e em seguida por meio de vetores. A primeira atividade envolve o cálculo da área de um triângulo; a segunda, o cálculo da distância de um ponto a uma reta; a terceira, o cálculo do ângulo entre duas retas concorrentes; e a quarta, para determinar a colinearidade de três pontos distintos no plano cartesiano.

Finalmente, apresentamos breves comentários sobre a relação existente entre as atividades propostas e o referencial teórico considerado.

1 Referencial Teórico

Neste capítulo será apresentado o referencial teórico sobre a teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo o pesquisador Raymond Duval.

Duval, filósofo, psicólogo e pesquisador francês desenvolveu grande parte de seus estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática de Estrasburgo, na França, no período de 1970 a 1999. Duval mostrou, por meio de pesquisas em Educação Matemática, que o uso da semiótica pode apresentar resultados positivos (ALMEIDA; SILVA, 2018, p.704).

É fato que a pesquisa de Raymond Duval teve como finalidade principal expor a relevância da semiótica para o estudo da Matemática. Especificamente, os estudos do autor enfatizam a necessidade de termos um ensino pautado nos Registros de Representação Semiótica para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Para o autor, descrever, raciocinar e visualizar são atividades que estão intrinsecamente ligadas à utilização de Registros de Representação Semiótica. Tarefas que desenvolvem essas habilidades precisam ser trabalhadas com os alunos em sala de aula.

O fato de a teoria de Duval, nos últimos anos, ter sido cada vez mais aprofundada e, ao mesmo tempo, os estudos em Educação Matemática encontrarem nesse caminho um respaldo para o estudo da complexidade do aprendizado tanto em Matemática quanto em outras disciplinas de Ciências Exatas, levou-nos a adotar sua teoria como o referencial teórico para o presente trabalho.

Semiótica é a teoria geral e universal dos signos e das representações, que leva em conta todas as formas e manifestações que assumem, linguísticas ou não. A semiótica é a ciência cujo objeto de pesquisa é o estudo dos signos nos processos de significação na natureza e na cultura (FLORES, 2006, p.8).

Para Duval, a Representação Semiótica no processo de ensino e aprendizagem de Matemática está principalmente ligada ao funcionamento cognitivo do aluno (ALMEIDA; SILVA, 2018, p.704).

O funcionamento cognitivo envolve todos os processos que são necessários para que o aluno perceba, selecione, processe e armazene determinada informação. São atividades de inteira importância num complexo processo, como a leitura, por exemplo. Em especial, em relação à Matemática, seria como o aluno visualiza e interpreta os diversos símbolos matemáticos e consolida seu entendimento.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica está ligada às representações e registros dos objetos matemáticos. Consequentemente, a compreensão e o entendimento dos

diferentes registros de um mesmo objeto matemático pode ser uma importante ferramenta no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Não obstante, as representações em Matemática são consideráveis, já que os objetos matemáticos não são acessíveis pela percepção humana, estes só podem ser acessados por meio de seus registros, sejam algébrico, gráfico, geométrico, etc. Como no caso das funções. Lembrando que um mesmo objeto matemático poderá ter diferentes registros, dependendo da necessidade e da finalidade de seu uso.

Para o caso do objeto matemático “função”, por exemplo, podemos ter um registro em língua natural (função linear, função quadrática, etc), um registro gráfico que neste caso é o gráfico da função ou ainda por meio de tabelas.

A contribuição de Duval para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática está em apontar a necessidade de se usar mais de um registro semiótico para representar um mesmo objeto matemático. Desse modo, é importante que o aluno seja capaz de transitar entre diferentes representações (FLORES, 2006, p.4).

Permanecer num único registro de representação significa tomar a representação como sendo de fato o objeto matemático, por exemplo, $f(x) = x$ seria a função, e não uma representação do objeto matemático. Logo, para não confundir o objeto e o conteúdo de sua representação é necessário dispor de, ao menos, duas representações, de modo que estas duas devam ser percebidas como representando o mesmo objeto. (FLORES, 2006, p.4)

Considerar a existência de diversos registros de representação, e também ter domínio sobre as atividades de conversão e tratamento entre os registros, são importantes para o processo de compreensão dos objetos matemáticos no ensino dessa ciência.

É exatamente essa visão de que o aluno deve ter acesso aos diferentes registros que vai permitir e possibilitar a diferenciação entre o objeto matemático e sua representação. Percebe-se que o estudo de Duval com relação aos Registros de Representação Semiótica para o aprendizado de Matemática mostra-se como uma importante ferramenta de pesquisa, uma vez que tem como principal objetivo o desenvolvimeto cognitivo do aluno.

Esse entendimento significa, portanto, que compreender a criação ou a emergência deste modo de conhecer é de fundamental importância para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. A base do estudo de Duval sobre os Registros de Representação Semiótica para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática tem como fundamento o pensamento moderno: um sujeito cognoscente, ou seja, um ser pensante que possui a capacidade cognitiva de aprender; um objeto cognoscível, isto é, aquilo que é passível de ser compreendido pelo sujeito cognoscente; e uma teoria dual dos signos, a representação do que ele significa (o significado) e aquilo a que ele se refere (o objeto) (FLORES, 2006, p.2).

Para tanto, refletir sobre a instauração da representação enquanto regime de pensamento que dá aos objetos matemáticos diferentes significados estabelece entre eles o fundamento de uma relação binária do signo (símbolo). Desse modo, é necessário compreender a ligação entre o significado e o objeto para que assim possamos compreender de forma clara a relação entre os símbolos e o objeto matemático que eles representam.

Portanto, a representação semiótica que foi desenvolvida por meio de sistemas semióticos se constitui de conceitos, normas e códigos essenciais para as atividades do pensamento.

No desenvolvimento dos saberes matemáticos o termo "representação" ocupa um lugar de destaque, uma vez que os objetos matemáticos só podem ser acessados por meio de suas representações. Sabemos que a escrita, uma notação, um símbolo representam um objeto matemático que é um número, uma função, um vetor ou outro símbolo-objeto. E, da mesma maneira, através do mesmo entendimento, verificamos que os traçados e figuras também representam objetos matemáticos como um segmento, um ponto, um círculo etc.

Não obstante, as diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias. De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos "reais" ou "físicos". É preciso, portanto, dar representantes. E por outro lado, a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. Basta considerar o caso do cálculo numérico para se convencer disso: os procedimentos, o seu custo, dependem do sistema de escrita escolhido. As representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática. (MORETTI, 2012, p.268)

As modificações que transformam uma representação em outra representação semiótica estão na existência da atividade Matemática. As dificuldades dos alunos para entenderem a Matemática podem ser devido às diferenças e complexidades dessas modificações. Para desmistificar essa complexidade, as representações semióticas precisam ser estudadas, não por meio dos objetos ou dos conceitos matemáticos que eles demonstram, mas por meio do funcionamento representacional que é próprio do registro no qual são produzidas.

Essa perspectiva nos leva a uma concepção de que o pensamento cognitivo matemático, a priori, mostra que a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual, portanto, as representações semióticas podem ser uma possibilidade de tornar menos complexas as tarefas nas quais os alunos precisam manipular diversas representações de diferentes objetos matemáticos.

Portanto, quando não há uma compreensão clara das diversas representações dos objetos matemáticos é possível que ocorra confusões, por parte dos alunos, no momento em que eles precisam transitar entre os diferentes registros de um mesmo objeto matemático.

Por exemplo, no estudo de vetores é muito comum os alunos apresentarem dificuldades para diferenciar o objeto matemático vetor de um ponto no espaço. Este fato pode, de certa forma, trazer algumas dificuldades no momento em que houver a necessidade de fazer conversões entre os diferentes registros dos objetos matemáticos.

Além disso, também torna possível separar, na análise da resolução de um exercício de matemática, dois tipos de conceitos que andam juntos e se completam: o tratamento e a conversão. Conseqüentemente, isso ainda torna possível entender porque a compreensão dos objetos e dos conceitos em Matemática se inicia somente quando o indivíduo é capaz de processar espontaneamente mais de um registro de representação para um mesmo objeto.

O professor, por outro lado, sabendo que esses dois registros de representação precisam ser desenvolvidos para que ocorra o processo de ensino e aprendizagem deve ter o domínio dos diversos registros de representação semiótica.

Duval define *semiose* como a apreensão ou a produção de uma representação semiótica. E define *noesis* como a apreensão conceitual de um objeto. E, devido aos estudos de Duval, concluímos que os conceitos de *noesis* e *semiose* são inseparáveis.

Segundo Duval para que ocorra o processo de ensino e aprendizagem de Matemática é necessário, pelo menos, a utilização simultânea de duas representações diferentes (MORETTI, 2012, p.270).

Particularmente, a *semiose*, que é o próprio conceito de representação semiótica, já está sendo a base crucial de outros estudos que não somente a Matemática.

Os diversos estudos de Duval focaram em um mesmo objeto, e demonstraram conclusões interessantes sendo que a principal delas não está relacionada com as dificuldades dos alunos na compreensão e uso das representações, mas em um fenômeno que ficou evidente e cuja característica crucial está exatamente na conversão das representações semióticas (MORETTI, 2012, p. 276).

Na próxima seção, abordaremos os conceitos de signo e representações. A estrutura de Duval enfatiza a importância de entender os diferentes tipos de signos usados nas representações matemáticas, bem como as maneiras pelas quais eles estão interconectados e podem ser manipulados. Ao analisar os problemas matemáticos sob a perspectiva de Duval, podemos obter uma compreensão mais profunda da estrutura e do significado dos conceitos matemáticos e desenvolver estratégias de ensino mais eficazes para ajudar os alunos a dominar esses conceitos.

1.1 Signos e representações

Segundo Duval, os símbolos matemáticos não são apenas signos arbitrários, mas carregam uma complexa rede de significados determinada pelo contexto em que são usados.

Isso significa que o mesmo símbolo pode ter significados diferentes dependendo do contexto em que é usado. Duval argumenta que a compreensão desse contexto é crucial para a comunicação eficaz de conceitos e ideias matemáticas (ALMEIDA; SILVA, 2018, p.705).

Com alguns exemplos na matemática, Duval pondera que os signos correspondem as coisas pelas quais é preciso começar para dar um sentido a algo. As representações, por sua vez, expressam esse sentido e revelam a interpretação que os intérpretes dão para esse signo. A partir dessa discussão, Duval passa a considerar uma outra linha divisória: a que distingue as representações semióticas e as representações não semióticas. (ALMEIDA; SILVA, 2018, p.705)

1.1.1 Signos

Segundo Duval, signos são unidades elementares de sentido, ou seja, são as pequenas partes que compõe as representações dos objetos matemáticos, como expressões numéricas, algébricas etc. (ALMEIDA; SILVA, 2018, p.698).

Sob este ponto de vista a complexidade inerente à discussão da contribuição da semiótica para a Educação Matemática não ignora que a comunicação e a construção de significados em ambientes educacionais estão sempre entrelaçadas e são mediadas por signos. (ALMEIDA; SILVA, 2018, p.698)

Por exemplo, na sentença matemática $2 + 5 = 7$, os símbolos 2, +, 5, =, 7 são signos, enquanto a sentença como um todo é uma representação numérica.

1.1.2 Representações

Segundo Duval, os Registros de Representação Semiótica devem ocorrer pautados no seguinte tripé: Formação, Tratamento e Conversão (MORETTI, 2012, p.272).

A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento. Isto pode facilmente ser observado na seguinte situação muito simples: o cálculo numérico. Alunos podem, muito bem, efetuar a adição de dois números com sua expressão decimal e com sua expressão fracionária e podem não pensar em converter, se isto for necessário, a expressão decimal de um número em sua expressão fracionária (e reciprocamente), ou mesmo não conseguir efetuar a conversão. (MORETTI, 2012, p.273)

Por Formação, Tratamento e Conversão entende-se que:

- **Formação:** Define-se como formação de registros de representação semiótica as regras e características do conteúdo envolvido. Por exemplo:

$$2x + 3 = 9$$

é uma representação na forma algébrica.

- **Tratamento:** O tratamento ocorre quando a formação de um registro é representada de outra forma, porém no mesmo registro. Por exemplo:

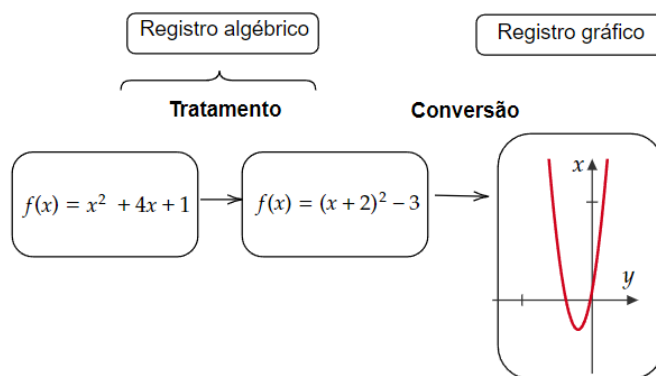
$$2x + 3 = 9 \Rightarrow x = 3$$

são duas representações diferentes em um mesmo registro.

- **Conversão:** A conversão de uma representação é uma transformação que ocorre entre registros diferentes. Por exemplo, uma função quadrática pode ser escrita da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou representada através de seu gráfico, que é uma parábola. Ou seja, são dois registros diferentes, mas que representam o mesmo objeto matemático. O processo de conversão, que envolve a tradução de mensagens de um registro para outro e os desafios e complexidades que podem surgir durante esse processo, é o ponto de encontro com uma nova abordagem do ensino de matemática em sala de aula.

Na Figura 1 é mostrada a representação algébrica de uma função quadrática e sua representação geométrica após um processo de conversão.

Figura 1 – Exemplo de tratamento e conversão de uma função quadrática.



Fonte: O próprio autor.

Segundo Duval, o significado de um símbolo ou expressão matemática é determinado não apenas por sua estrutura formal, mas também pelo contexto em que é usado. Isso significa que o mesmo símbolo pode ter significados diferentes dependendo do contexto em que é usado. Por exemplo, um símbolo (letra “x”) pode representar uma variável em um contexto (x), e também pode representar uma operação de multiplicação em outro contexto (\times). A teoria da semiótica tem implicações importantes para a Educação Matemática, pois, ao enfatizar a importância do contexto e do significado na representação Matemática, a teoria de Duval pode contribuir para que os professores tenham uma forma alternativa

na comunicação dos conceitos matemáticos com seus alunos. Também pode ajudar os alunos a compreenderem melhor a linguagem Matemática, permitindo-lhes a compreensão de conceitos abstratos e complexos que fazem parte do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

No contexto de sua teoria, Duval propõe três tipos de atividades:

- A apreensão e compreensão das representações semióticas;
- O tratamento próprio de uma certa categoria de registros;
- A produção e representação de objetos complexos.

Ao examinar esses três aspectos-chaves dos Registros de Representação Semiótica, podemos obter uma compreensão de como abordar os conteúdos em sala de aula e dos muitos fatores que influenciam as maneiras pelas quais os alunos interpretam.

Acreditamos que a compreensão dos fundamentos desse sistema pode colaborar na formação inicial e continuada do professor de Matemática, oferecendo-lhe os instrumentos necessários para chegar a um de seus objetivos que é ensinar aos alunos um modo mais efetivo de raciocinar, processar e desenvolver os conhecimentos. A teoria de Duval se opõe a uma formação docente centrada na racionalidade técnica, focando no desenvolvimento da relação do professor com o saber matemático.

2 Proposta da BNCC para o ensino de Geometria no Ensino Básico

O Ministério da Educação (MEC) consolidou a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento amplo que surgiu da necessidade de estruturar o Ensino Básico e orientar os rumos da Educação Básica em todo o país, tornando-se um documento plural e contemporâneo que todas as instituições de ensino brasileiras devem seguir como uma referência comum e obrigatória. A obrigatoriedade promove a qualidade, a equidade, e a não discriminação do ensino no Brasil (BRASIL, 2018).

Isto significa que

Assumir uma visão plural, singular e integral da criança, do adolescente, do jovem e do adulto -- considerando-os como sujeitos de aprendizagem — e promover uma educação voltada ao seu acolhimento, reconhecimento e desenvolvimento pleno, nas suas singularidades e diversidades. Além disso, a escola, como espaço de aprendizagem e de democracia inclusiva, deve se fortalecer na prática coercitiva de não discriminação, não preconceito e respeito às diferenças e diversidades. (BRASIL, 2018)

A BNCC incorpora várias mudanças em relação ao currículo do Ensino Básico. Além disso, propõe o desenvolvimento de competências e habilidades específicas pelos alunos com o propósito de contribuir para a formação de cidadãos que possuam capacidade analítica, crítica e reflexiva, além de contribuir para a formação geral dos estudantes.

Na BNCC de Matemática, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área, são elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

O foco de estudo do presente trabalho é a área de Geometria.

2.1 Habilidades específicas da Geometria na BNCC

A BNCC em seu texto elenca uma série de habilidades que os estudantes devem desenvolver durante o período de sua vida escolar. Em particular, na área de Geometria, espera-se que os alunos desenvolvam as seguintes habilidades:

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. (BRASIL, 2018)

Segundo a BNCC, aperfeiçoar as competências derivadas do pensamento geométrico é fundamental para o desenvolvimento dos estudantes, para que tenham noção de localização, área, espaço, volume, profundidade etc.

Em relação ao pensamento geométrico, eles [alunos] desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, 2018, p.517)

2.2 Considerações acerca do ensino de vetores segundo a BNCC

A BNCC não trata diretamente do ensino de vetores no currículo de Matemática do Ensino Básico, pelo menos não de forma explícita. Portanto, é um grande desafio para os professores utilizarem o objeto matemático vetor no ensino de Geometria.

Acreditamos que o uso de vetores no ensino de Geometria seria bastante útil e poderia trazer um ganho para o processo de ensino e aprendizagem desta área da Matemática.

Buscaremos, a partir daqui, abordar uma articulação das habilidades de Geometria propostas na BNCC e o referencial teórico apresentado no Capítulo 1.

Acreditamos que o ensino de Matemática, em particular de Geometria, tendo como respaldo a teoria dos Registros de Representação Semiótica, permitiria obter bons resultados no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Isso implica em elaborar atividades matemáticas que permitam estimular a curiosidade e o interesse do aluno. A proposta é abordar o conteúdo proposto pela BNCC de tal modo que o aluno possa desenvolver habilidades como planejar ações, projetar soluções, atribuir conceitos, interpretar e raciocinar.

Mostrar a relação entre teoria e prática pode ser uma estratégia importante na busca de alcançar o que está proposto na BNCC. Afinal, a diversidade proposta pelas atividades práticas pode gerar outras formas de representação, e não somente os objetos do modo como já são conhecidos na Geometria, da forma como é comumente abordada no Ensino Básico.

A conversão dos registros da linguagem algébrica para linguagem geométrica pode ser um grande obstáculo a ser enfrentado por alunos e professores, por exemplo, quando os alunos precisam relacionar a representação algébrica de uma função com sua respectiva representação geométrica e vice-versa.

Por fim, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, poderemos desenvolver algumas atividades matemáticas em Geometria que possibilitem o aluno articular diversos registros de representação relacionado às atividades de leitura e interpretação.

3 Conceitos preliminares

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos necessários para o desenvolvimento das atividades propostas no Capítulo 4. Para isso, tomamos como referência os livros de [Camargo e Boulos \(2005\)](#), [Delgado, Fresnel e Crissaff \(2013\)](#) e [Winterle \(2000\)](#).

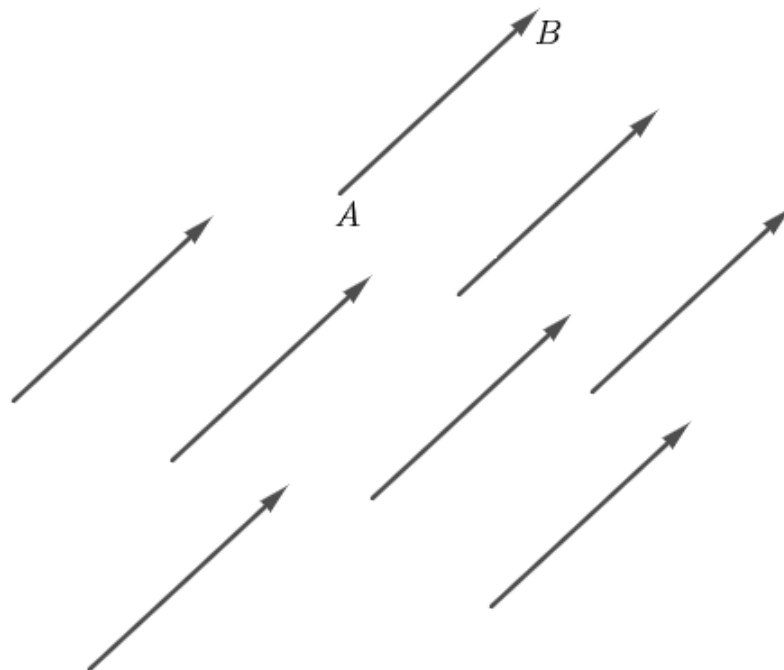
3.1 Tratamento geométrico

3.1.1 Definição de vetor

Dados dois pontos A e B , definimos o vetor \overrightarrow{AB} como o segmento de reta orientado que tem como origem o ponto A e extremidade o ponto B .

Dizemos que o segmento orientado AB é um representante de uma família de segmentos orientados e paralelos entre si, como ilustrado na Figura 2. Portanto, qualquer outro segmento com o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido de AB também representa o mesmo vetor \overrightarrow{AB} , ou seja, qualquer ponto do espaço pode ser origem de um representante de \overrightarrow{AB} .

Figura 2 – Ilustração de uma família de segmentos de retas orientados de mesma direção, mesmo comprimento e mesmo sentido.



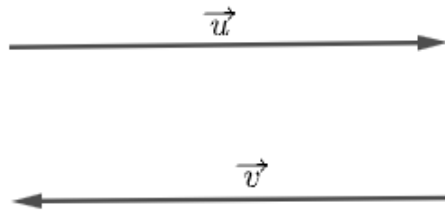
Fonte: O próprio autor.

Costumamos representar um vetor por uma letra minúscula, por exemplo, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Complementando a definição, temos ainda que:

- Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são paralelos, $\vec{u} // \vec{v}$, se possuem a mesma direção, como ilustrado na Figura 3.

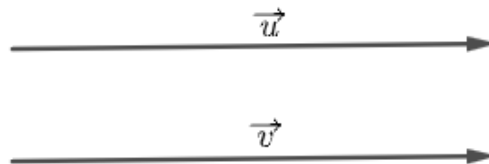
Figura 3 – Ilustração de dois vetores \vec{u} e \vec{v} paralelos entre si.



Fonte: O próprio autor.

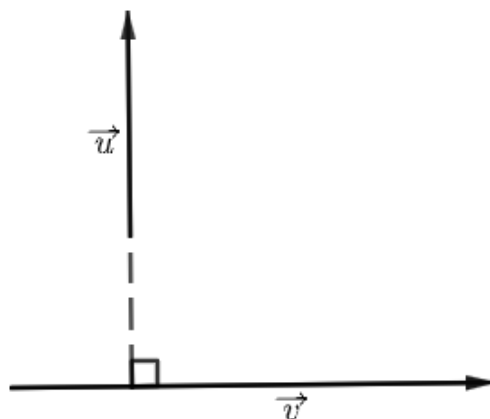
- Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são iguais, $\vec{u} = \vec{v}$, se possuem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido, como ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Ilustração de dois vetores \vec{u} e \vec{v} de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.



Fonte: O próprio autor.

- Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais, $\vec{u} \perp \vec{v}$, se algum representante de \vec{u} formar um ângulo igual a $\frac{\pi}{2}$ rad com algum representante de \vec{v} , como ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Ilustração de dois vetores \vec{u} e \vec{v} ortogonais.

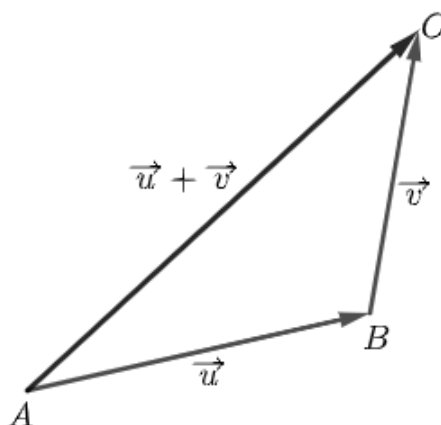
Fonte: O próprio autor.

3.1.2 Operações com vetores

3.1.2.1 Adição de vetores

Sejam os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Definimos o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ como o segmento orientado de origem A e extremidade C , como ilustrado na Figura 6, isto é:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Figura 6 – Ilustração do vetor $\vec{u} + \vec{v}$.

Fonte: O próprio autor.

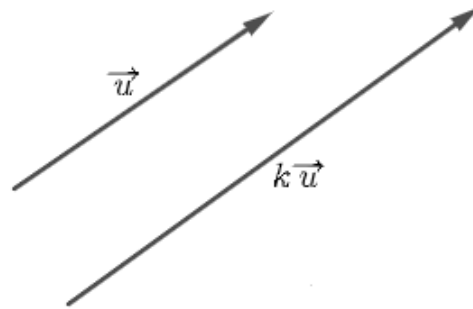
3.1.2.2 Multiplicação de número real por vetor

Sejam \vec{u} e k um vetor e um número real, respectivamente. Definimos o produto de k por \vec{u} o vetor $k\vec{u}$, como ilustrado na Figura 7.

Note que, se $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, então $k\vec{u} = \vec{0}$. Além disso, o vetor $k\vec{u}$ é paralelo a \vec{u} , de modo que se $k > 0$, então $k\vec{u}$ terá o mesmo sentido de \vec{u} , e se $k < 0$, sentido oposto.

Observe que o vetor nulo $\vec{0}$ é paralelo a qualquer vetor.

Figura 7 – Ilustração dos vetores \vec{u} e $k\vec{u}$.



Fonte: O próprio autor.

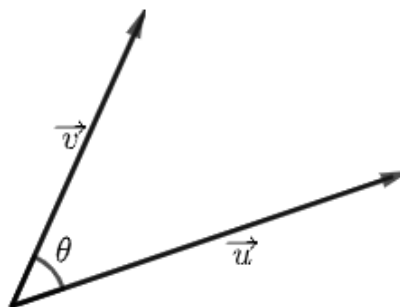
3.1.2.3 Produto escalar

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos e $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ o ângulo entre eles. Definimos o produto escalar de \vec{u} por \vec{v} como o número real dado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta. \quad (3.1)$$

Para uma ilustração geométrica do produto escalar, observe a Figura 8, na qual estão representados os vetores \vec{u} , \vec{v} e o ângulo $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Figura 8 – Ilustração dos vetores \vec{u} , \vec{v} e o ângulo $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ entre eles.



Fonte: O próprio autor.

3.1.3 Outras definições

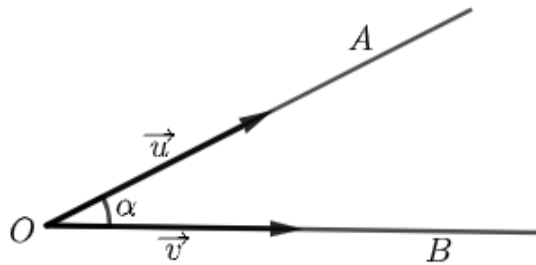
3.1.3.1 Norma de um vetor

Sejam A e B dois pontos e $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Definimos a norma de \vec{u} como o comprimento do segmento de reta AB . Indicamos a norma de \vec{u} por $\|\vec{u}\|$.

3.1.3.2 Ângulo entre dois vetores

O ângulo entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} não nulos é definido como o ângulo α formado pelas semirretas OA e OB , em que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, com $0 \leq \alpha \leq \pi$, como ilustrado na Figura 9.

Figura 9 – Ilustração dos vetores \vec{u} e \vec{v} , das semirretas OA , OB e do ângulo α .



Fonte: O próprio autor.

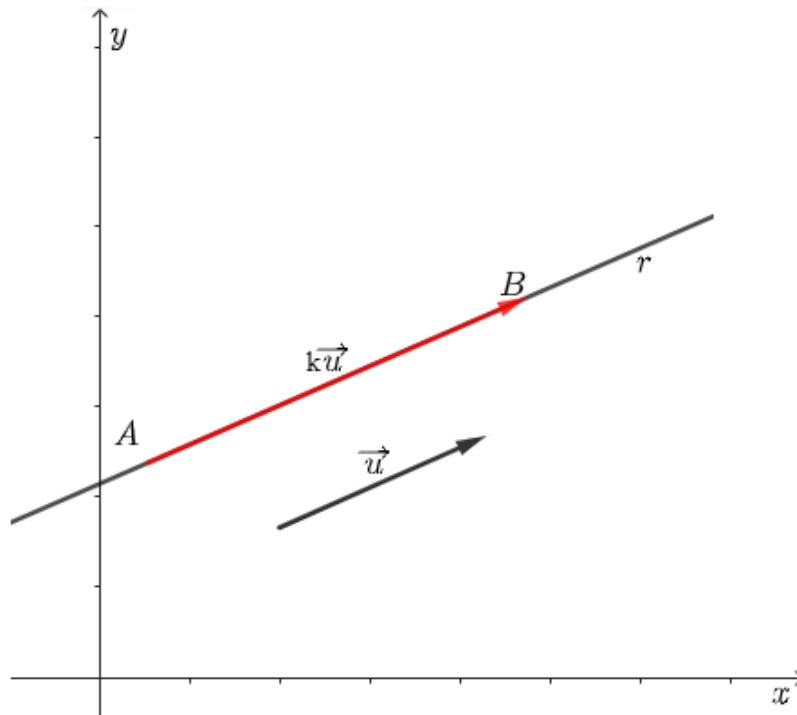
3.1.3.3 Vetor diretor de uma reta

Sejam r uma reta, \vec{u} um vetor no plano cartesiano, e A e B dois pontos distintos de r , então \vec{u} é um vetor diretor de r se, e somente se, existir um número real k , tal que:

$$\overrightarrow{AB} = k\vec{u}.$$

Ou seja, qualquer vetor paralelo a \overrightarrow{AB} é também um vetor diretor de r , como ilustrado na Figura 10.

Figura 10 – Ilustração dos pontos A e B , e do vetor diretor \vec{u} da reta r no plano cartesiano.



Fonte: O próprio autor.

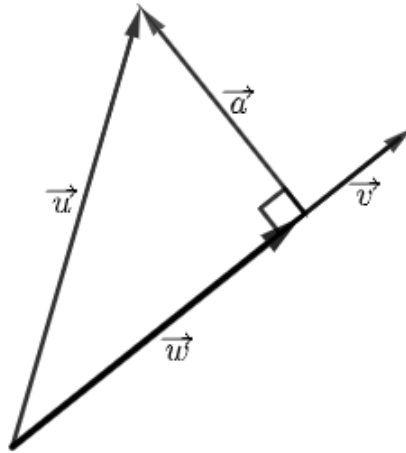
3.1.3.4 Projeção ortogonal

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores no plano cartesiano com $\vec{v} \neq \vec{0}$. Definimos a projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} como o vetor $Proj_{\vec{v}} \vec{u}$, tal que:

$$Proj_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \right) \vec{v}. \quad (3.2)$$

Para verificarmos a equação (3.2), considere a Figura 11, na qual estão ilustrados os vetores \vec{u} , \vec{v} e $\vec{w} = Proj_{\vec{v}} \vec{u}$.

Figura 11 – Ilustração dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} para verificação da equação (3.2), sendo \vec{w} a projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} .



Fonte: O próprio autor.

Os vetores \vec{w} e \vec{v} são paralelos, logo existe um número real k tal que $\vec{w} = k\vec{v}$. Além disso, \vec{a} é ortogonal a \vec{v} , ou seja, $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$, e como $\vec{a} = \vec{u} - \vec{w}$, temos:

$$(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{u} - k\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0,$$

donde obtemos:

$$k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

3.2 Tratamento algébrico

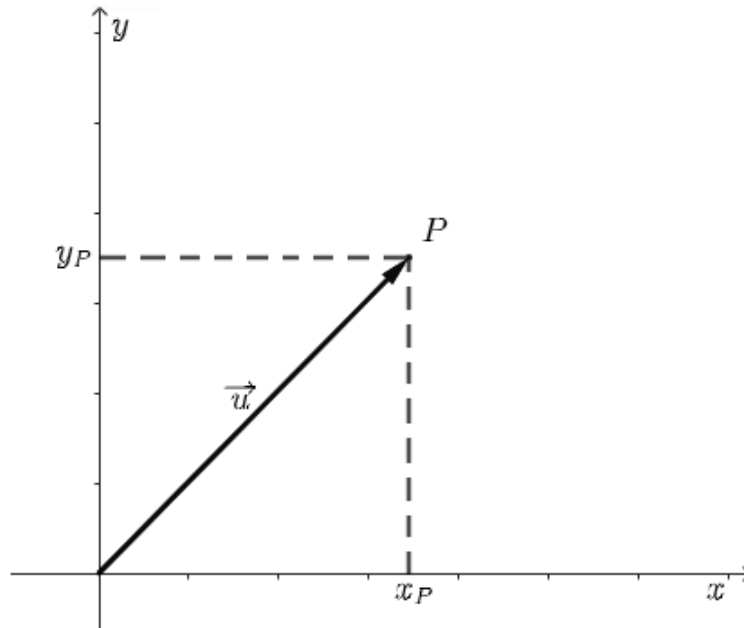
3.2.1 Definição de vetor

Considere o ponto $P = (x_P, y_P)$ e o vetor \vec{u} no plano cartesiano como ilustrado na Figura 12.

O ponto P é a extremidade do vetor \vec{u} e os números reais x_P e y_P são as coordenadas de \vec{u} no plano cartesiano, chamadas componentes de \vec{u} , logo o vetor \vec{u} possui expressão analítica dada por um par ordenado de números reais:

$$\vec{u} = (x_P, y_P).$$

Figura 12 – Ilustração do vetor \vec{u} e do ponto P no plano cartesiano.



Fonte: O próprio autor.

Dizemos que dois vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ no plano cartesiano são iguais, $\vec{u} = \vec{v}$, se, e somente se, $x_u = x_v$ e $y_u = y_v$.

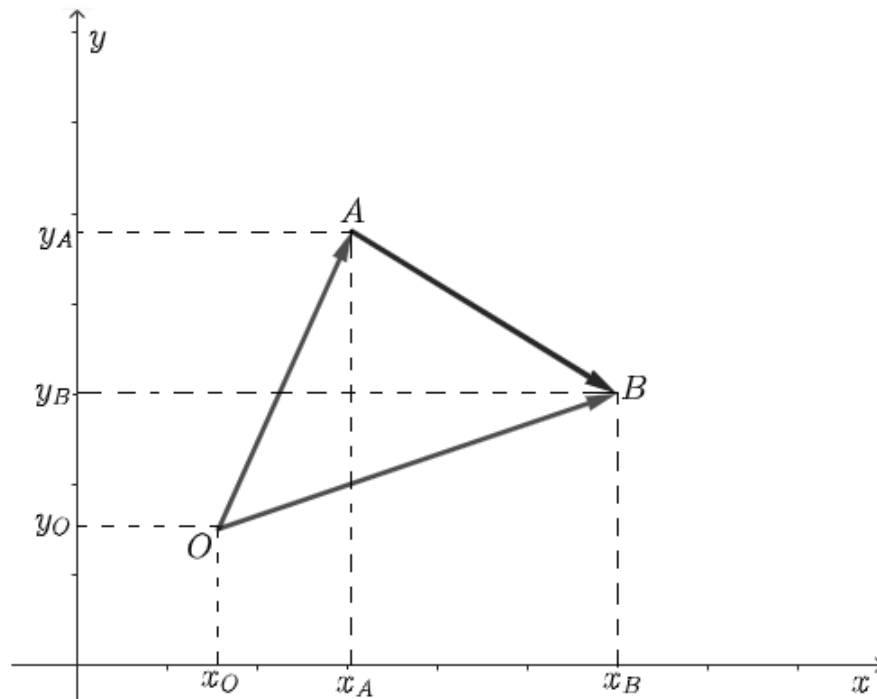
Podemos, ainda, definir vetor por dois pontos. Sejam $O = (x_O, y_O)$, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos no plano cartesiano, como ilustrado na Figura 13. Vamos determinar o vetor \vec{AB} , cuja origem é o ponto A e extremidade é o ponto B .

Da definição de adição de vetores, temos:

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \quad \Rightarrow \quad \vec{AB} = \vec{OB} + (-\vec{OA}).$$

Segue que:

$$\vec{AB} = (x_B - x_O, y_B - y_O) + (x_O - x_A, y_O - y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A). \quad (3.3)$$

Figura 13 – Ilustração dos vetores \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{AB} no plano cartesiano.

Fonte: O próprio autor.

3.2.2 Operações com vetores

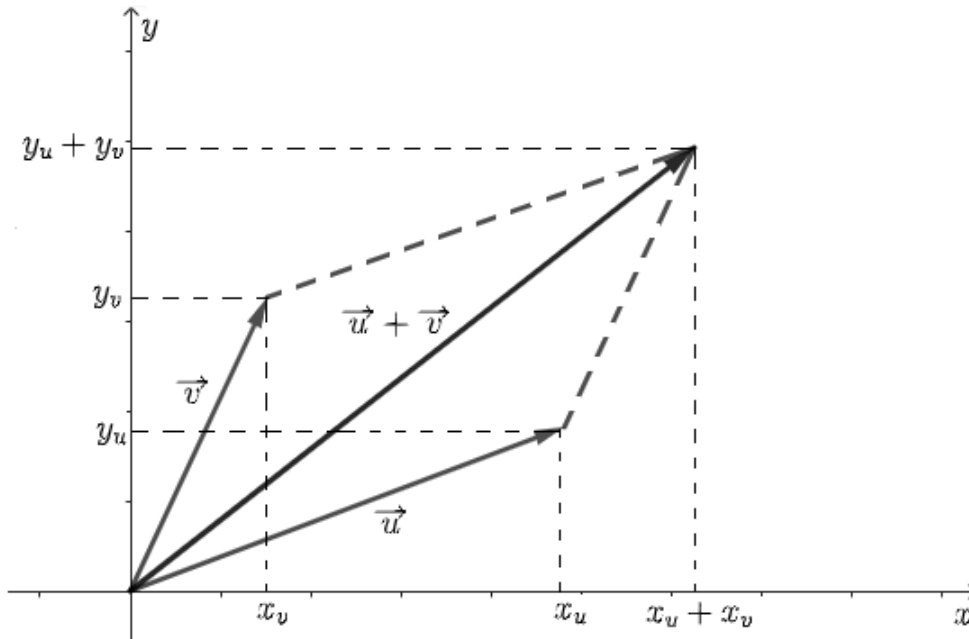
3.2.2.1 Adição de vetores

Sejam $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ dois vetores no plano cartesiano. Definimos o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ da seguinte maneira:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_u + x_v, y_u + y_v), \quad (3.4)$$

como ilustrado na Figura 14.

Figura 14 – Ilustração dos vetores \vec{u} , \vec{v} e do vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ no plano cartesiano.



Fonte: O próprio autor.

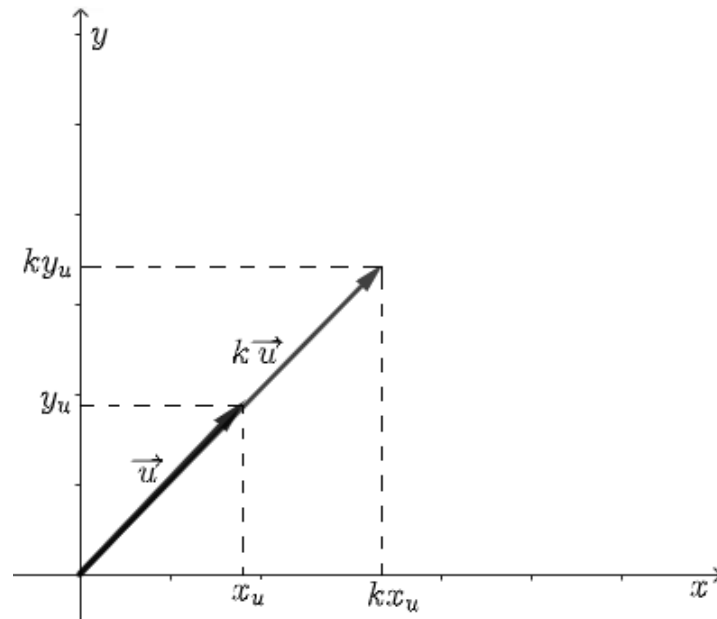
3.2.2.2 Multiplicação de número real por vetor

Sejam $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e k um número real no plano cartesiano e um número real, respectivamente. A multiplicação do número real k pelo vetor \vec{u} é definida da seguinte maneira:

$$k\vec{u} = (k x_u, k y_u),$$

como ilustrado na Figura 15.

Logo, para multiplicarmos um número real k por um vetor \vec{u} , multiplicamos cada componente de \vec{u} por este número.

Figura 15 – Ilustração dos vetores \vec{u} e $k\vec{u}$ no plano cartesiano.

Fonte: O próprio autor.

3.2.2.3 Produto escalar

Sejam $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ vetores no plano cartesiano. Chamamos produto escalar de \vec{u} por \vec{v} o número real $\vec{u} \cdot \vec{v}$, tal que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v. \quad (3.5)$$

Para verificarmos a equação (3.5), considere a Figura 16, na qual estão ilustrados os vetores \vec{v} , \vec{u} , o ângulo θ entre eles.

Temos:

$$\vec{PQ} = \vec{v} - \vec{u} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P).$$

Aplicando o teorema da lei dos cossenos, obtemos:

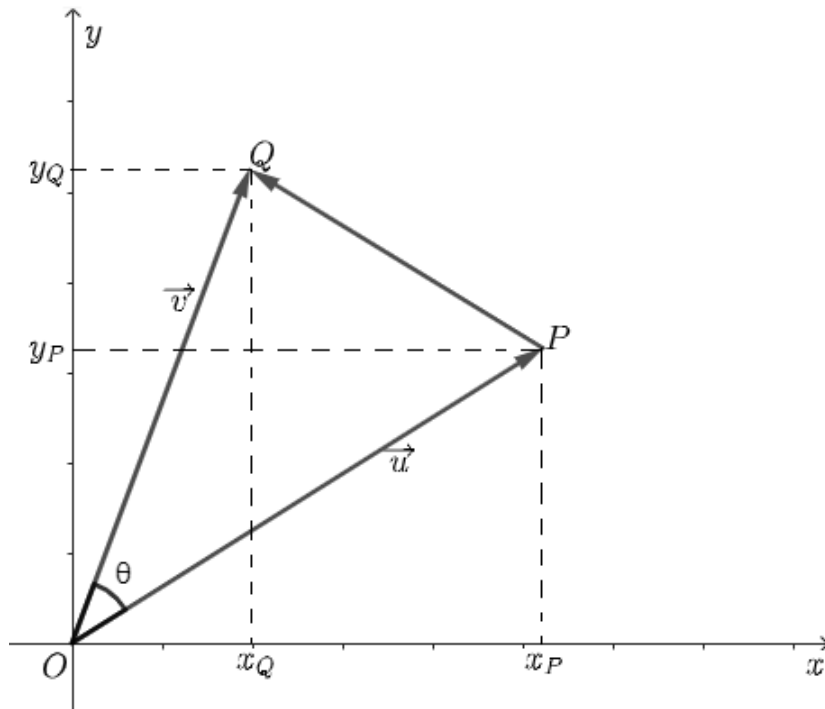
$$\begin{aligned} \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 &= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos\theta \\ \Rightarrow 2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos\theta &= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \\ &= (x_Q^2 + y_Q^2) + (x_P^2 + y_P^2) - ((x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2) \\ &= 2(x_Q x_P + y_Q y_P). \end{aligned}$$

Donde obtemos:

$$\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos\theta = x_Q x_P + y_Q y_P. \quad (3.6)$$

Por fim, comparando as equações (3.1) com (3.6), obtemos a equação (3.5).

Figura 16 – Ilustração dos vetores \vec{u} , \vec{v} , do ângulo θ entre eles e de suas respectivas coordenadas para a verificação da equação (3.5).



Fonte: O próprio autor.

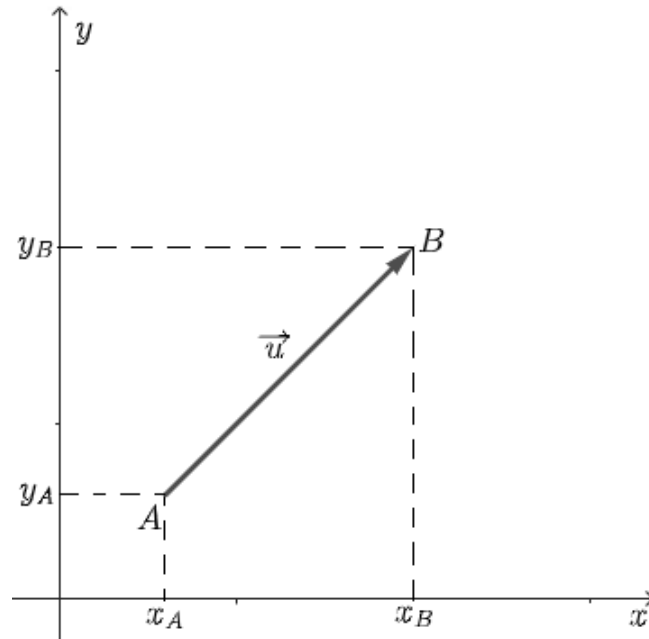
3.2.3 Outras definições

3.2.3.1 Norma de um vetor

Seja $\vec{u} = (x_u, y_u)$ um vetor no plano cartesiano tal que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, como ilustrado na Figura 17. Definimos a norma de \vec{u} como a distância entre os pontos A e B , ou seja:

$$\|\vec{u}\| = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_u)^2 + (y_u)^2}. \quad (3.7)$$

Figura 17 – Ilustração do vetor \vec{u} e dos pontos A e B no plano cartesiano.



Fonte: O próprio autor.

3.2.3.2 Ângulo de dois vetores

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos, aplicando a equação (3.1), obtemos o ângulo θ entre \vec{u} e \vec{v} .

$$\cos \theta = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right) \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right), \quad \text{com } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

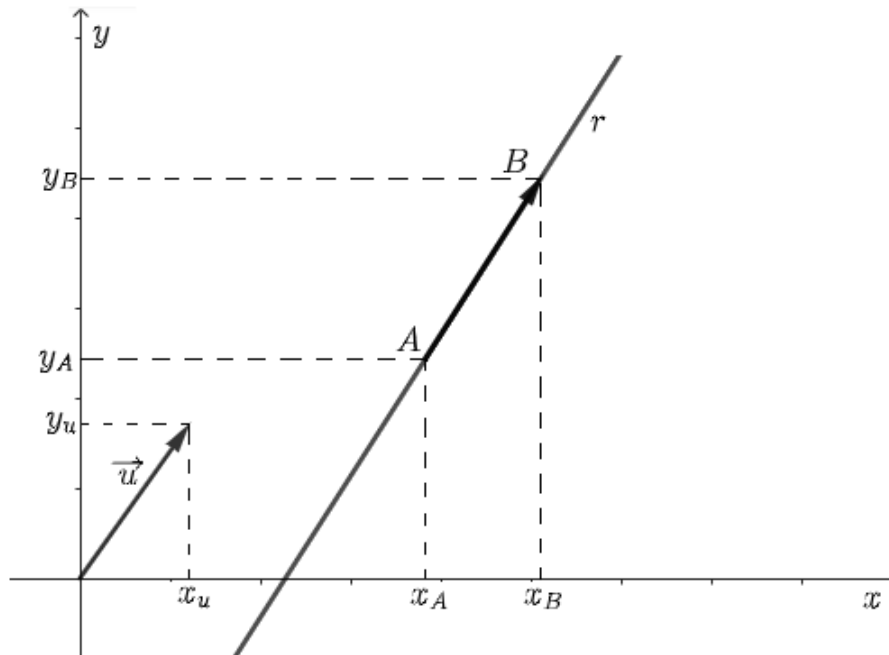
Note que, se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3.2.3.3 Vetor diretor de uma reta

Sejam r e $\vec{u} = (x_u, y_u)$ uma reta e um vetor no plano cartesiano, respectivamente. Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos distintos de r , como ilustrado na Figura 18. Dizemos que \vec{u} é um vetor diretor da reta r se, e somente se, existir um número real k , tal que:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = k\vec{u} = (k x_u, k y_u).$$

Figura 18 – Ilustração do vetor diretor \vec{u} da reta r e dos pontos A e B no plano cartesiano.



Fonte: O próprio autor.

3.2.3.4 Projeção ortogonal

Sejam $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ vetores no plano cartesiano com $\vec{v} \neq \vec{0}$. Definimos a projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} como o vetor $Proj_{\vec{v}} \vec{u} = k\vec{v} = (kx_v, ky_v)$, em que k é um número real dado por:

$$k = \frac{x_u x_v + y_u y_v}{(x_v)^2 + (y_v)^2}. \quad (3.8)$$

Para verificarmos a equação (3.8), considere a Figura 19, na qual estão ilustrados os vetores \vec{u} , \vec{v} , suas respectivas componentes, e o vetor $\vec{w} = Proj_{\vec{v}} \vec{u}$.

De modo análogo ao que foi feito na Subseção 3.1.3.4, obtemos:

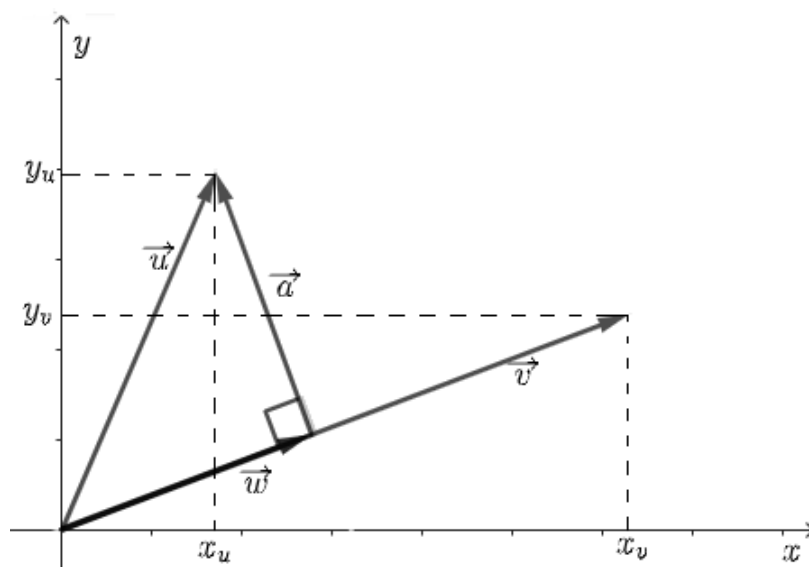
$$(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{u} - k\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} - k\|\vec{v}\|^2 = 0. \quad (3.9)$$

Substituindo as componentes de \vec{u} e \vec{v} na equação (3.9), obtemos:

$$(x_u x_v + y_u y_v) - k(x_v^2 + y_v^2) = 0. \quad (3.10)$$

Isolando k na equação (3.10), obtemos a equação (3.8).

Figura 19 – Ilustração dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} no plano cartesiano, sendo \vec{w} projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} .



Fonte: O próprio autor.

4 Proposta de atividades

Neste capítulo apresentaremos algumas atividades de Geometria Analítica utilizando duas abordagens com base no Referencial Teórico, são elas: utilizando coordenadas cartesianas no plano, e utilizando vetores. Para isso, tomamos como base os livros de [Iezzi \(2011\)](#), [Bucchi \(2000\)](#), [Winterle \(2000\)](#) e [Delgado, Fresnel e Crissaff \(2013\)](#).

4.1 Área de um triângulo

Nesta atividade mostraremos como calcular a área de um triângulo no plano cartesiano.

4.1.1 Utilizando coordenadas

Primeiramente, vamos abordar como calcular a área de um triângulo a partir das coordenadas de seus vértices. Para isso, considere a Figura 20, na qual é apresentado um triângulo de vértices ABC , cujas coordenadas dos vértices são, respectivamente, $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$.

Faremos, primeiramente, uma conversão do registro gráfico do retângulo $CDEF$ e do triângulo ABC para o registro algébrico a partir das coordenadas de seus vértices e, em seguida, por meio de tratamentos algébricos, determinarmos uma fórmula para o cálculo da área do triângulo ABC .

Observando a Figura 20, temos que a área do triângulo ABC é igual a área do retângulo $CDEF$ menos as áreas dos triângulos ABE , ACF e BCD . Por meio de tratamentos algébricos calculemos essas áreas.

- (i) Cálculo da área A_R do retângulo $CDEF$, cujos vértices são os pontos $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$, $E(x_E, y_E)$, $F(x_F, y_F)$:

$$A_R = (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_C) = x_C y_B - x_C y_C - x_A y_B + x_A y_C.$$

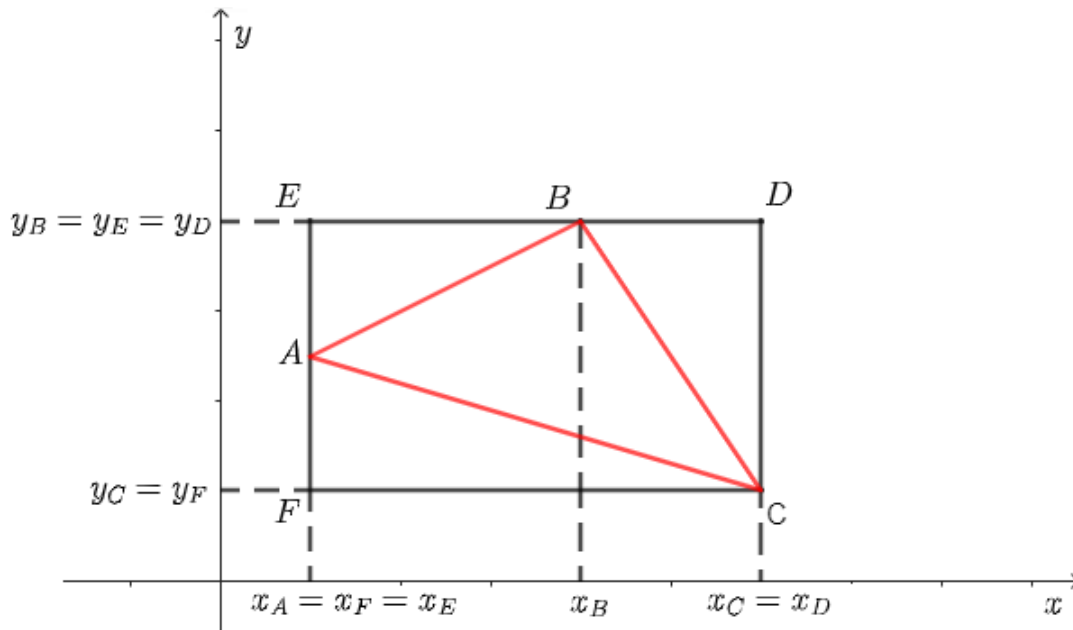
- (ii) Cálculo da área A_1 do triângulo ACF , cujos vértices são os pontos $A(x_A, y_A)$, $C(x_C, y_C)$, $F(x_A, y_C)$:

$$A_1 = \frac{1}{2}(x_C - x_A)(y_A - y_C) = \frac{1}{2}(x_C y_A - x_C y_C - x_A y_A + x_A y_C).$$

- (iii) Cálculo da área A_2 do triângulo ABE , cujos vértices são os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $E(x_A, y_B)$:

$$A_2 = \frac{1}{2}(x_B - x_A)(y_B - y_A) = \frac{1}{2}(x_B y_B - x_B y_A - x_A y_B + x_A y_A).$$

Figura 20 – Ilustração de um triângulo ABC inscrito em um retângulo $CDEF$ para o cálculo de sua área por meio de suas coordenadas cartesianas.



Fonte: O próprio autor.

- (iv) Cálculo da área A_3 do triângulo BCD , cujos vértices são os pontos $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_C, y_B)$:

$$A_3 = \frac{1}{2}(x_C - x_B)(y_B - y_C) = \frac{1}{2}(x_C y_B - x_C y_C - x_B y_B + x_B y_C).$$

- (v) Cálculo da área A do triângulo ABC , cujos vértices são os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$:

$$\begin{aligned} A &= A_R - (A_1 + A_2 + A_3) \\ &= x_C y_B - x_C y_C - x_A y_B + x_A y_C + \\ &\quad - \frac{1}{2}(x_C y_A - x_C y_C - x_A y_A + x_A y_C) + \\ &\quad - \frac{1}{2}(x_B y_B - x_B y_A - x_A y_B + x_A y_A) + \\ &\quad - \frac{1}{2}(x_C y_B - x_C y_C - x_B y_B + x_B y_C) \\ &= \frac{1}{2}(x_C y_B + x_A y_C + x_B y_A - x_A y_B - x_C y_A - x_B y_C). \end{aligned}$$

Após uma conversão do registro algébrico para o registro matricial, podemos

verificar que a última expressão entre parênteses equivale ao módulo do determinante:

$$D = \det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, a área A do triângulo ABC é dada por:

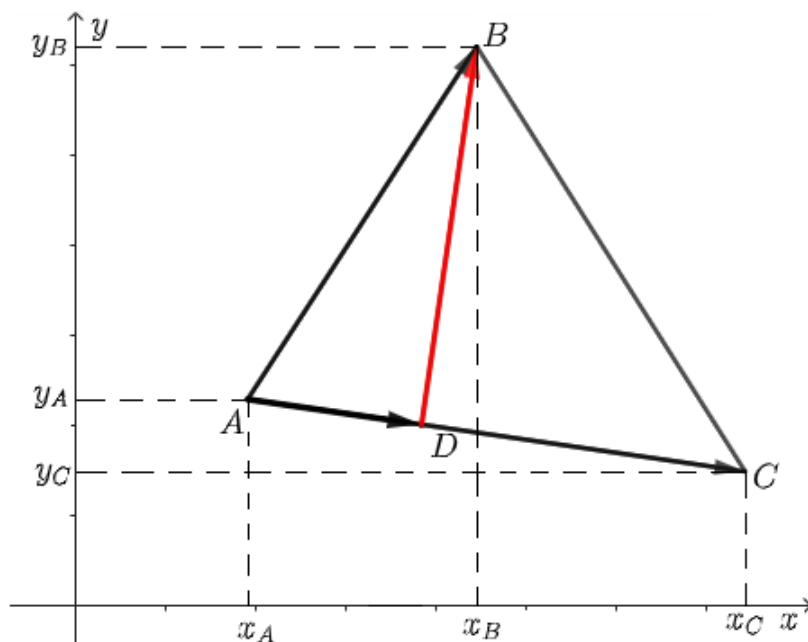
$$A = \frac{1}{2}|D|. \quad (4.1)$$

4.1.2 Utilizando vetores

Faremos o cálculo da área de um triângulo ABC utilizando vetores. Para isso, considere a Figura 21, na qual é apresentado um triângulo ABC , cujo vetor \overrightarrow{AD} é a projeção ortogonal do vetor \overrightarrow{AB} sobre o vetor \overrightarrow{AC} , logo o vetor \overrightarrow{DB} é perpendicular ao vetor \overrightarrow{AC} , de modo que a norma $\|\overrightarrow{DB}\|$ é a altura do triângulo ABC relativa ao lado AC .

Primeiramente faremos uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico dos vetores \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} .

Figura 21 – Ilustração dos vetores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{DB} no plano cartesiano para o cálculo da área do triângulo ABC .



Fonte: O próprio autor.

Note que:

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.$$

Segue que a área A do triângulo ABC pode ser determinada por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{DB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \\ &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\| \|\overrightarrow{AC}\|, \end{aligned}$$

sendo o vetor \overrightarrow{AD} a projeção ortogonal de \overrightarrow{AB} sobre \overrightarrow{AC} , ou seja:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|^2} \overrightarrow{AC}.$$

Após alguns tratamentos algébricos chegamos a fórmula que nos permite calcular a área A do triângulo ABC por meio de vetores:

$$A = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|^2} \overrightarrow{AC} \right\| \|\overrightarrow{AC}\|. \quad (4.2)$$

4.1.3 Exemplo

Faremos uma questão adaptada do vestibular da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ) do ano de 2016¹.

Questão (PUC-RJ - 2016 - Adaptada): *Sejam os pontos $A(0,0)$ e $B(3,4)$. Sabemos que a área do triângulo ABC é igual a 4 unidades de área e que o vértice C pertence à reta r de equação $r : x + y = 2$. Determine as coordenadas do ponto C .*

Resolução com coordenadas:

Na Figura 22 está representada uma conversão do registro algébrico para o registro gráfico do triângulo ABC cujos vértices são os pontos $A = (0,0)$, $B = (3,4)$ e $C = (x, 2-x)$, pois C pertence à reta $x + y = 2$.

Fazendo uma conversão dos registros algébricos para o registro matricial dos pontos A , B e C e aplicando a equação (4.1), após efetuarmos alguns tratamentos algébricos, obtemos a área A do triângulo ABC :

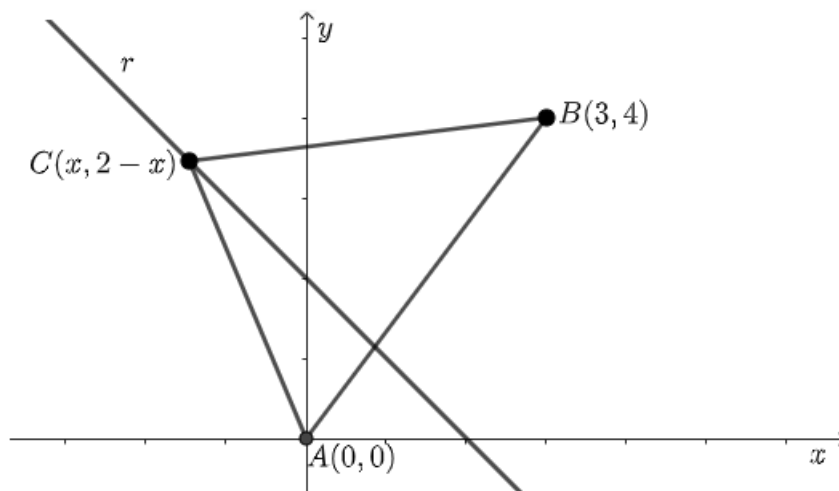
$$A = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |6 - 7x|.$$

Do enunciado, temos que o triângulo ABC possui 4 unidades de área, ou seja:

$$\frac{1}{2} |6 - 7x| = 4 \quad \Rightarrow \quad |6 - 7x| = 8 \quad \Rightarrow \quad 6 - 7x = 8 \quad \text{ou} \quad 6 - 7x = -8$$

¹ Fonte: Hexag Vestibulares: Estudo Orientado, Apostila 6.

Figura 22 – Ilustração de um possível triângulo ABC e reta r no plano cartesiano para resolução do Exemplo 4.1.3.



Fonte: O próprio autor.

Resolvendo as duas últimas equações, obtemos:

$$x = -\frac{2}{7} \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

E, portanto, o ponto C tem as seguintes coordenadas:

$$C = (2, 0) \quad \text{ou} \quad C = \left(-\frac{2}{7}, \frac{16}{7}\right).$$

Resolução com vetores:

Na Figura 23 temos a representação gráfica dos vetores \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} e \vec{DC} . Após uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico, obtemos: $\vec{AB} = (3, 4)$, $\vec{AC} = (x, 2 - x)$, uma vez que o ponto C pertence à reta $r: x + y = 2$.

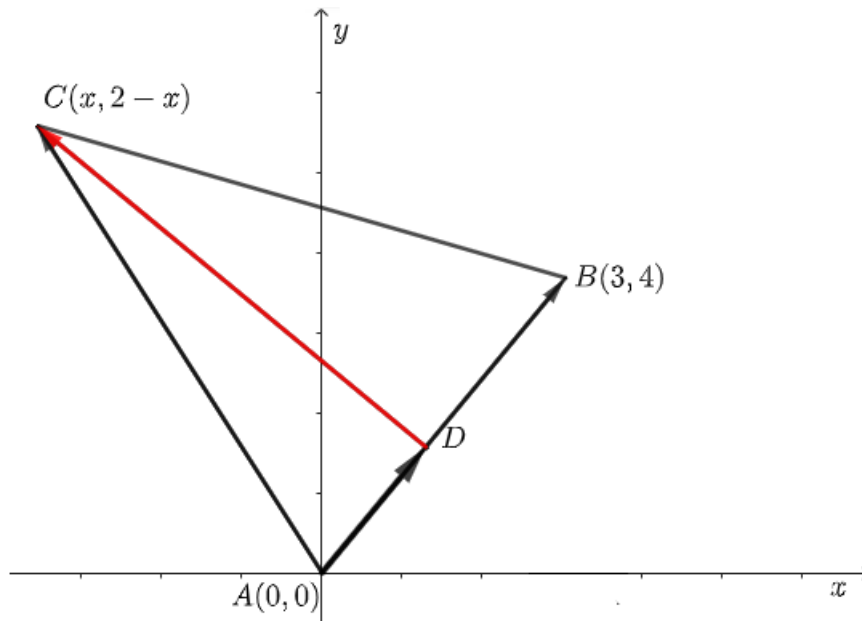
Sendo o vetor \vec{AD} a projeção ortogonal de \vec{AC} sobre \vec{AB} , após alguns tratamentos algébricos, obtemos:

$$\vec{AD} = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2} \vec{AB} = \frac{1}{25} (24 - 3x, 32 - 4x).$$

Aplicando a equação (4.2) e efetuando tratamentos algébricos obtemos a área A do triângulo ABC :

$$A = \frac{1}{10} \sqrt{(4(7x - 6))^2 + (3(7x - 6))^2}.$$

Figura 23 – Ilustração de um possível triângulo ABC e dos vetores \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} e \vec{DC} no plano cartesiano para resolução do Exemplo 4.1.3.



Fonte: O próprio autor.

Do enunciado, o triângulo ABC possui 4 unidades de área, de modo que:

$$\frac{1}{10} \sqrt{(4(7x - 6))^2 + (3(7x - 6))^2} = 4 \Rightarrow \frac{5}{10} \sqrt{(7x - 6)^2} = 4 \Rightarrow |7x - 6| = 8$$

Resolvendo esta última equação de modo análogo ao que foi feito na resolução com coordenadas, obtemos:

$$x = -\frac{2}{7} \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

Portanto, o ponto C tem as seguintes coordenadas:

$$C = (2, 0) \quad \text{ou} \quad C = \left(-\frac{2}{7}, \frac{16}{7}\right).$$

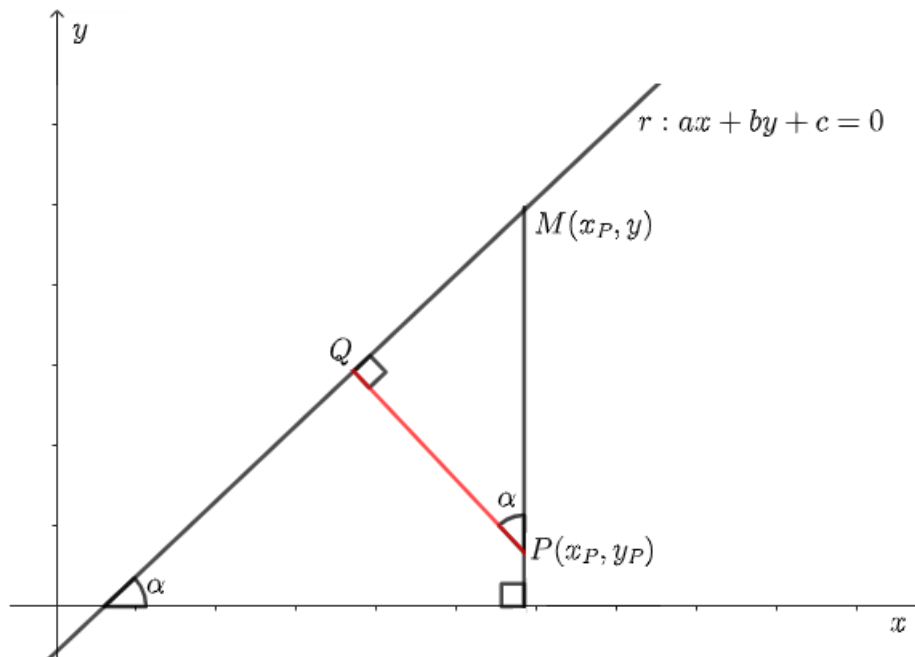
4.2 Distância de ponto à reta

Nesta atividade serão apresentadas duas maneiras de calcular a distância de um ponto a uma reta no plano cartesiano.

4.2.1 Utilizando coordenadas

Vamos calcular a distância $d(P, r)$ de um ponto arbitrário P a uma reta qualquer r no plano cartesiano utilizando coordenadas. Para isso, sejam os pontos Q , interseção da reta r com sua perpendicular que passa por P , e M , interseção da reta r com a reta vertical que passa por P , representados na Figura 24.

Figura 24 – Ilustração do ponto P e da reta r no plano cartesiano para o cálculo da distância $d(P, r)$.



Fonte: O próprio autor.

Observando a Figura 24 e fazendo uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico podemos constatar que a distância $d(P, r)$ do ponto P a reta r que é igual a $d(P, Q)$ distância do ponto P ao ponto Q é dada por:

$$d(P, r) = d(P, Q) = PM |\cos \alpha|. \quad (4.3)$$

Por meio de uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico do segmento de reta PM podemos observar que:

$$PM = |y - y_P|. \quad (4.4)$$

Efetuada o tratamento algébrico de substituir a equação (4.4) na equação (4.3), obtemos:

$$d(P, r) = |y - y_P| |\cos \alpha|. \quad (4.5)$$

Da equação da reta r , alguns tratamentos algébricos nos permite escrever:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b}. \quad (4.6)$$

Da relação fundamental da trigonometria:

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1.$$

e do fato que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha}.$$

Alguns tratamentos algébricos nos leva a seguinte relação:

$$|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \quad (4.7)$$

Substituindo a equação (4.6) na equação (4.7) e efetuando alguns tratamentos algébricos, obtemos:

$$|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.8)$$

Substituindo a equação (4.8) na equação (4.5), por meio de um tratamento algébrico, obtemos:

$$d(P, r) = |y - y_P| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.9)$$

Como o ponto $M = (x_P, y)$ pertence à reta r , após alguns tratamentos algébricos, temos:

$$ax_P + by + c = 0 \quad \Rightarrow \quad by = -ax_P - c. \quad (4.10)$$

Substituindo a equação (4.10) na equação (4.9) e executando tratamentos algébricos adequados, obtemos:

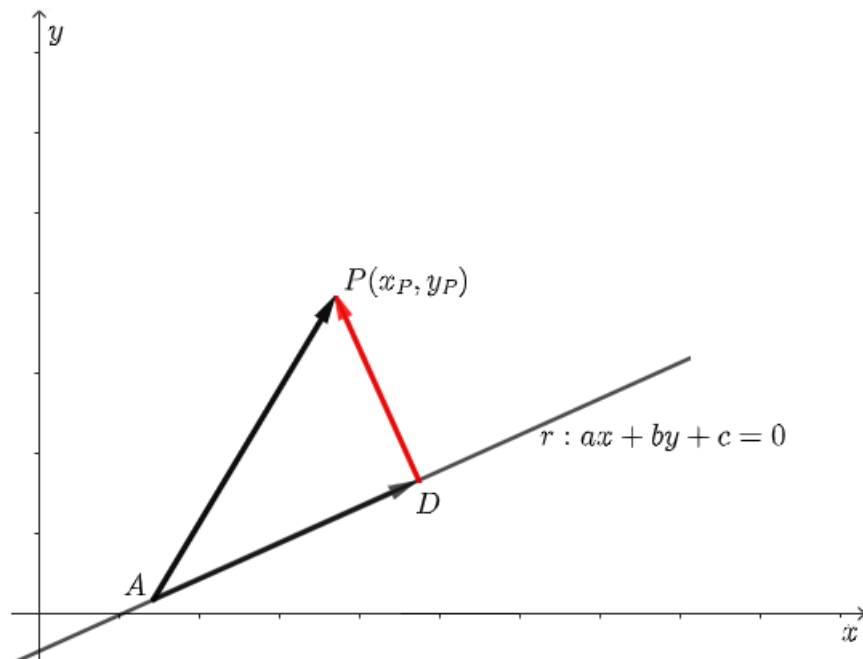
$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.11)$$

que é a equação da distância do ponto P à reta r .

4.2.2 Utilizando vetores

Vamos apresentar uma outra forma para o cálculo da distância $d(P, r)$ entre um ponto P e uma reta r no plano cartesiano, agora utilizando vetores. Para isso, considere a Figura 25, na qual temos os registros gráficos do ponto $P(x_P, y_P)$, da reta $r : ax + by + c = 0$ e dos vetores \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{DP} .

Figura 25 – Ilustração do ponto P , da reta r e dos vetores \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{DP} no plano cartesiano para o cálculo da distância $d(P, r)$.



Fonte: O próprio autor.

Por meio de tratamentos algébricos obtemos o vetor $\vec{u} = (-b, a)$ que é um vetor diretor da reta r , temos ainda que o vetor \overrightarrow{AD} é a projeção ortogonal do vetor \overrightarrow{AP} sobre o vetor \vec{u} .

Por meio de uma operação de conversão do registro gráfico para o registro algébrico, obtemos:

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD}. \quad (4.12)$$

Donde concluímos que, a distância entre P e r é igual a norma do vetor \overrightarrow{DP} .

Uma vez que o vetor \overrightarrow{AD} é a projeção ortogonal sobre \vec{u} , temos que:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}. \quad (4.13)$$

Portanto, substituindo a equação (4.13) na equação (4.12) e efetuando tratamentos algébricos adequados concluímos que a distância entre o ponto P e a reta r é dada por:

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{DP}\| = \left\| \overrightarrow{AP} - \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \right\|. \quad (4.14)$$

4.2.3 Exemplo

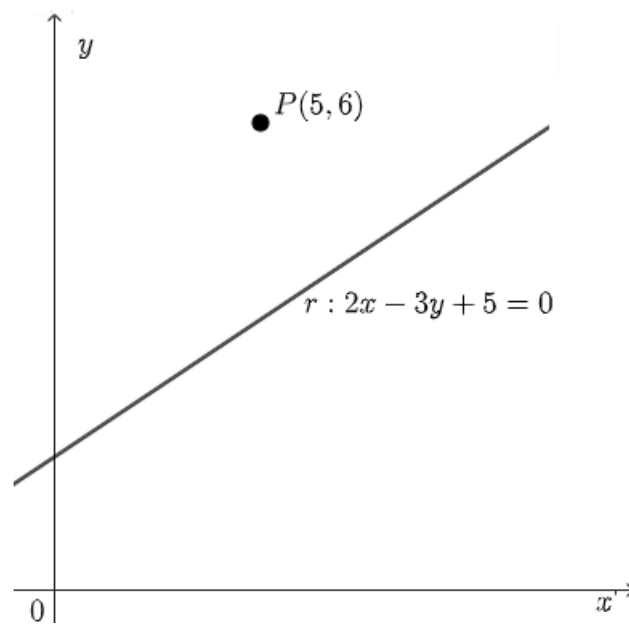
Faremos uma questão adaptada do exame de admissão para a Escola de Especialistas de Aeronáutica (EEAR) do ano de 2016².

Questão (EEAR - 2016 - Adaptada): Dada a reta $r : 2x - 3y + 5 = 0$ e o ponto $P(5, 6)$, determinar a distância de P a reta r .

Resolução com coordenadas:

Considere a Figura 26 na qual temos a representação gráfica do ponto P e da reta r .

Figura 26 – Ilustração do ponto P e da reta r no plano cartesiano para resolução do Exemplo 4.2.3.



Fonte: O próprio autor.

Para determinarmos a distância $d(P, r)$ do ponto P à reta r , vamos aplicar a equação (4.11) e efetuarmos alguns tratamentos algébricos:

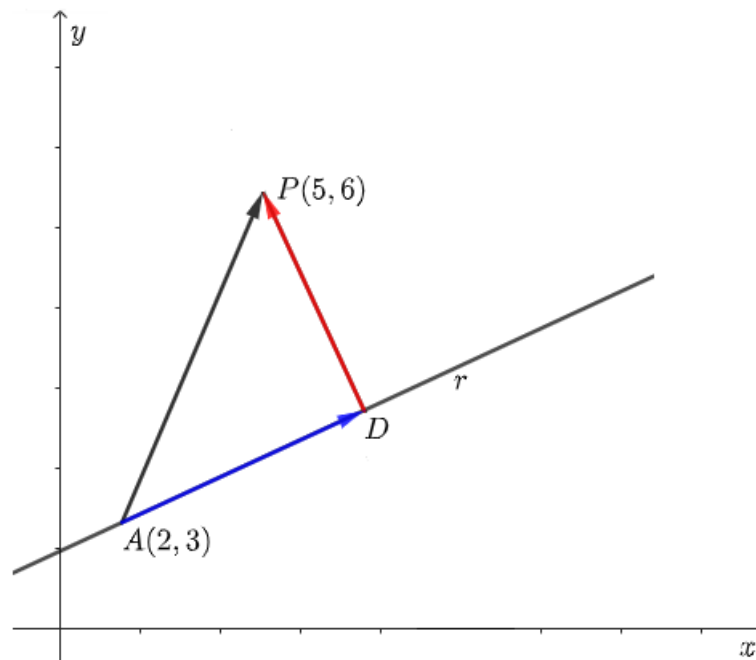
$$d(P, r) = \frac{|2 \cdot 5 + (-3) \cdot 6 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

² Fonte: https://ingresso.eear.aer.mil.br/SOO/escolaridade/CFS-B%202016/CFS_B_2_2016_Opcoes_1_2_3_4_Codigo_33.pdf
Acesso em: 29/06/2023.

Resolução com vetores:

Tomemos um ponto qualquer da reta r , por exemplo, $A = (2, 3)$. Observando a Figura 27, na qual temos a representação gráfica dos pontos A e P , da reta r e dos vetores \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{DP} , após uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico do vetor \overrightarrow{AP} , obtemos, $\overrightarrow{AP} = (3, 3)$.

Figura 27 – Ilustração dos pontos A e P , da reta r e dos vetores \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{DP} no plano cartesiano para resolução do Exemplo 4.2.3.



Fonte: O próprio autor.

Da equação da reta r e efetuando um tratamento algébrico, temos que $\vec{u} = (3, 2)$ é um vetor diretor de r . Aplicando a equação (4.13) e efetuando os tratamentos algébricos necessários, obtemos:

$$\overrightarrow{AD} = \left(\frac{45}{13}, \frac{30}{13} \right).$$

Aplicando a equação (4.12) e efetuando os tratamentos algébricos necessários, obtemos:

$$\overrightarrow{DP} = \left(\frac{-6}{13}, \frac{9}{13} \right).$$

Aplicando a equação (4.14) e efetuando os cálculos necessários, obtemos a distância entre o ponto P e a reta r :

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{DP}\| = \sqrt{\left(\frac{6}{13}\right)^2 + \left(\frac{9}{13}\right)^2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

4.3 Ângulo entre retas

Nesta atividade, apresentaremos duas formas para o cálculo do ângulo formado entre duas retas concorrentes no plano cartesiano.

Sejam r e t duas retas concorrentes e P o ponto de interseção entre elas. Definimos o ângulo entre r e t , $\alpha = \angle(r, t)$, como o menor ângulo formado pelas retas r e t .

4.3.1 Utilizando coordenadas

A atividade será dividida em três casos:

- (i) Retas não verticais e não perpendiculares;
- (ii) Retas não verticais e perpendiculares;
- (iii) Uma das retas é vertical.

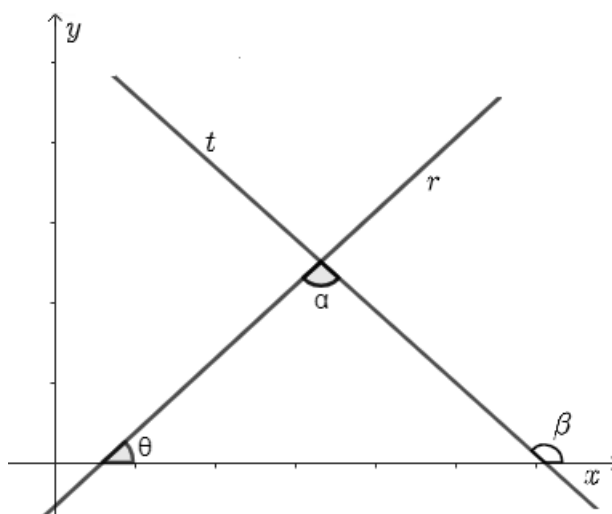
Queremos calcular o ângulo $\alpha = \angle(r, t)$ formado pelas retas r e t .

- (i) Retas não verticais e não perpendiculares:

Sejam r e t duas retas concorrentes no plano cartesiano e sejam os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, e $A' = (x'_A, y'_A)$ e $B' = (x'_B, y'_B)$ pertencentes às retas r e t , respectivamente.

Na Figura 28 estão representadas por meio do registro gráfico as retas r e t e os respectivos ângulos que elas formam com o eixo das abscissas, θ e β .

Figura 28 – Ilustração das retas não verticais r e t no plano cartesiano para o cálculo do ângulo $\alpha = \angle(r, t)$.



Fonte: O próprio autor.

Fazendo uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico e aplicando o teorema do ângulo externo, obtemos:

$$\alpha + \theta = \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta - \theta. \quad (4.15)$$

Das equações das retas r , t e efetuando tratamentos algébricos com as coordenadas dos pontos A , B , A' e B' , obtemos os coeficientes angulares m_r e m_t das retas r e t , respectivamente:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \operatorname{tg} \theta \quad \text{e} \quad m_t = \frac{y'_B - y'_A}{x'_B - x'_A} = \operatorname{tg} \beta.$$

Partindo da equa (4.15), após efetuarmos alguns tratamentos algébricos, obtemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \theta}{1 + (\operatorname{tg} \beta)(\operatorname{tg} \theta)} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \theta}{1 + (\operatorname{tg} \beta)(\operatorname{tg} \theta)} \right|. \quad (4.16)$$

Substituindo os coeficientes angulares m_r e m_t na equação (4.16) e isolando α por meio de tratamentos algébricos, obtemos:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{m_t - m_r}{1 + m_t m_r} \right|, \quad \text{com} \quad 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (4.17)$$

(ii) Retas não verticais e perpendiculares:

Quando as retas r e t forem perpendiculares entre si, a equação (4.17) não se aplica. Na Figura 29 temos ilustrado o registro gráfico das retas, r e t , perpendiculares entre si e

os ângulos que elas formam com o eixo das abscissas, θ e β , respectivamente, no plano cartesiano.

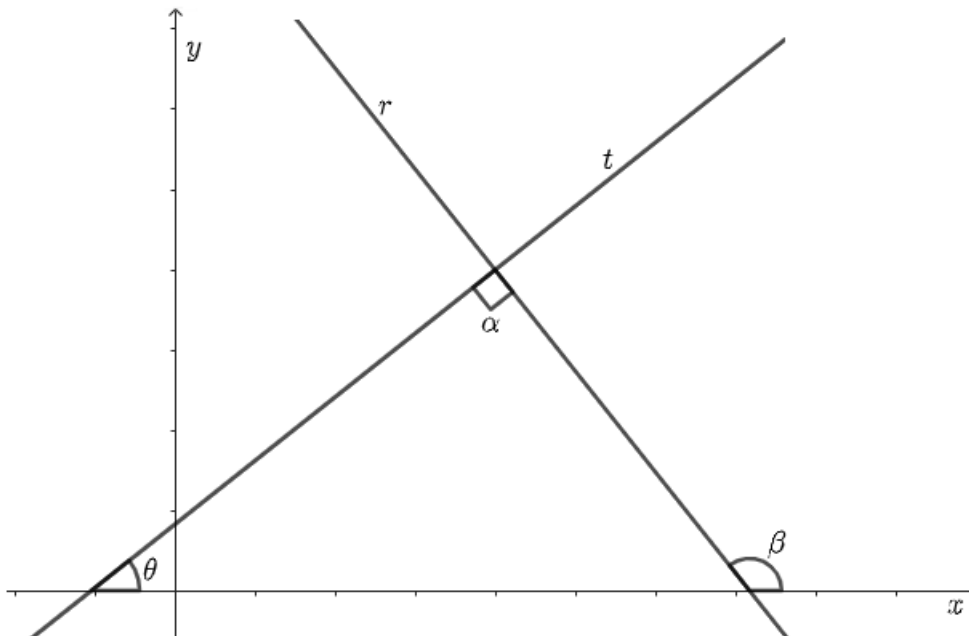
De modo análogo ao que foi feito em (4.15), temos:

$$\theta + \alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad \beta - \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (4.18)$$

Partindo da equação (4.18) e efetuando tratamentos algébricos, obtemos:

$$\cotg \beta = -\operatorname{tg} \theta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \quad \Rightarrow \quad m_r = -\frac{1}{m_t} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2}. \quad (4.19)$$

Figura 29 – Ilustração das retas r e t perpendiculares entre si no plano cartesiano.



Fonte: O próprio autor.

(iii) Uma das retas é vertical:

Na Figura 30, temos o registro gráfico da reta r , da reta t e dos respectivos ângulos que estas formam com o eixo das abscissas, θ e $\frac{\pi}{2}$.

Fazendo uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico, obtemos:

$$\theta + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \theta. \quad (4.20)$$

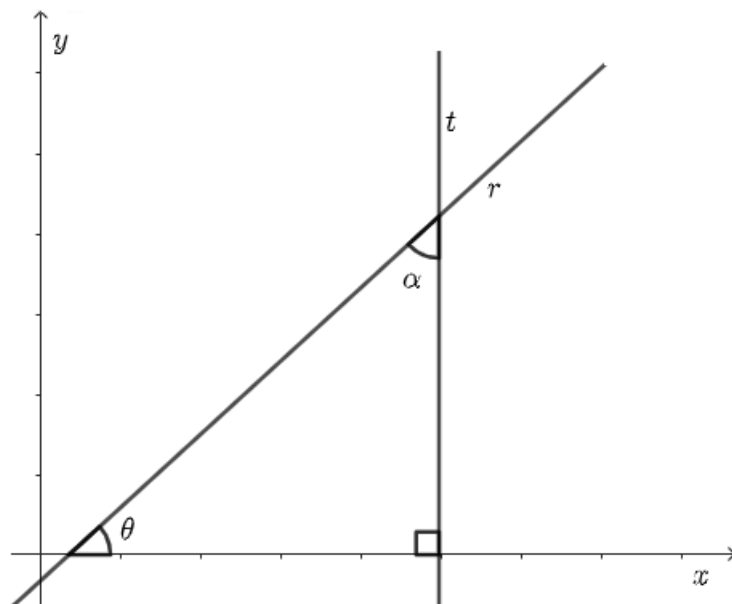
Partindo da equação (4.20) e efetuando alguns tratamentos algébricos, obtemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \operatorname{cotg} \theta \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}. \quad (4.21)$$

E, portanto, isolando α , por meio de tratamentos algébricos, na equação (4.21), obtemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \right| \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{1}{m_r} \right|. \quad (4.22)$$

Figura 30 – Ilustração das retas r e t no plano cartesiano para o cálculo do ângulo $\alpha = \angle(r, t)$, considerando t vertical.



Fonte: O próprio autor.

4.3.2 Utilizando vetores

Queremos calcular o ângulo $\alpha = \angle(r, t)$ formado pelas retas r e t .

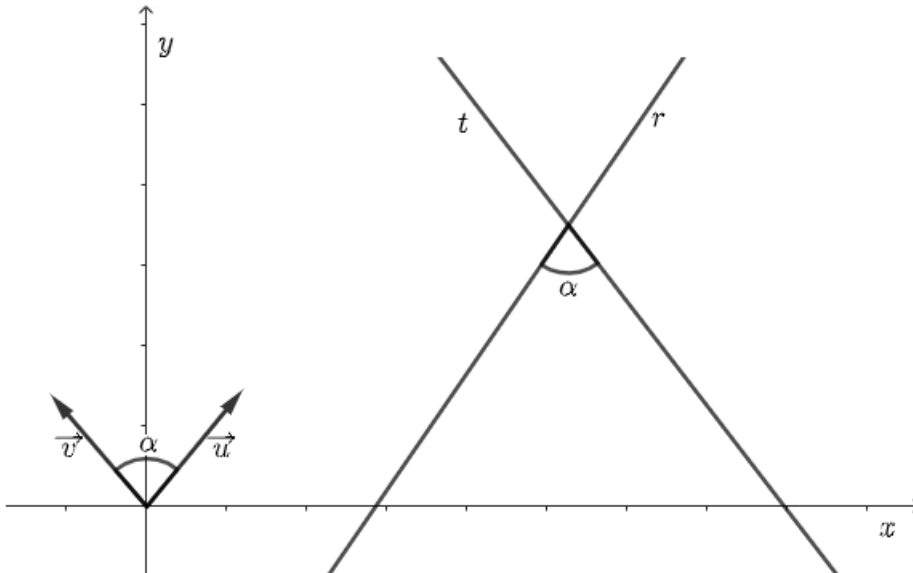
Na Figura 31 temos a representação gráfica das retas r , t e de seus respectivos vetores diretores \vec{u} e \vec{v} .

Aplicando a equação (3.1) e isolando α por meio de tratamentos algébricos, obtemos:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|} \Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|} \right) \quad (4.23)$$

com $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Figura 31 – Ilustração das retas concorrentes r e t e de seus respectivos vetores diretores \vec{u} e \vec{v} no plano cartesiano para o cálculo do ângulo $\alpha = \angle(r, t)$.



Fonte: O próprio autor.

4.3.3 Exemplo

Faremos uma questão adaptada do vestibular da Universidade de Pernambuco (UPE) do ano de 2022³.

Questão (UPE - 2022 - Adaptada): *Determine a medida do ângulo agudo formado pelas retas $r : y = \sqrt{3}x + 4$ e $t : y = x - 2$.*

Resolução com coordenadas:

Sejam m_r e m_t os coeficientes angulares das retas r e t , respectivamente. Do enunciado, temos:

$$m_r = \sqrt{3} \quad e \quad m_t = 1.$$

Da equação (4.19), concluímos que as retas r e t não são perpendiculares entre si, de tal modo que podemos aplicar a equação (4.17). Executando alguns tratamentos algébricos, obtemos:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \right| = \operatorname{arctg} (2 - \sqrt{3}).$$

Portanto, $\alpha = 15^\circ$.

Resolução com vetores:

Das equações das retas r e t , por meio de tratamentos algébricos, obtemos: $\vec{u} = (1, \sqrt{3})$ e $\vec{v} = (1, 1)$ que são, respectivamente, seus vetores diretores. Aplicando a equação (4.23) e realizando alguns tratamentos algébricos, obtemos:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) = \arccos \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right).$$

Logo, $\alpha = 15^\circ$.

4.4 Condição de alinhamento de três pontos

Nesta atividade apresentaremos duas maneiras de determinar se três pontos distintos no plano cartesiano são colineares.

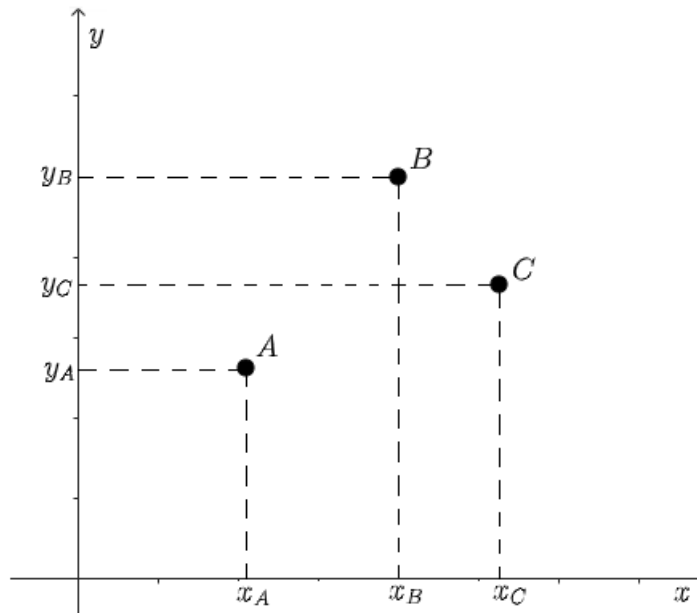
4.4.1 Utilizando coordenadas

Na Figura 32, temos o registro gráfico dos pontos A , B e C . Vamos determinar se A , B e C são colineares, ou seja, se pertencem a uma mesma reta. Primeiramente faremos

³ Fonte: http://upe.br/images/CADERNO_DE_PROVAS_SSA_3_-_1_DIA_29_10_compressed.pdf
Acesso em: 29/06/2023.

uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico: $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$.

Figura 32 – Ilustração dos pontos A , B e C no plano cartesiano para a verificação da condição de alinhamento.



Fonte: O próprio autor.

Para determinarmos se A , B e C são colineares, basta analisar se a reta r que passa pelos pontos A e B tem o mesmo coeficiente angular da reta t que passa pelos pontos A e C .

Por meio de tratamentos algébricos obtemos m_r e m_t que são os coeficientes angulares das retas r e t , respectivamente:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{e} \quad m_t = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}.$$

A fim de que A , B e C sejam colineares, devemos ter:

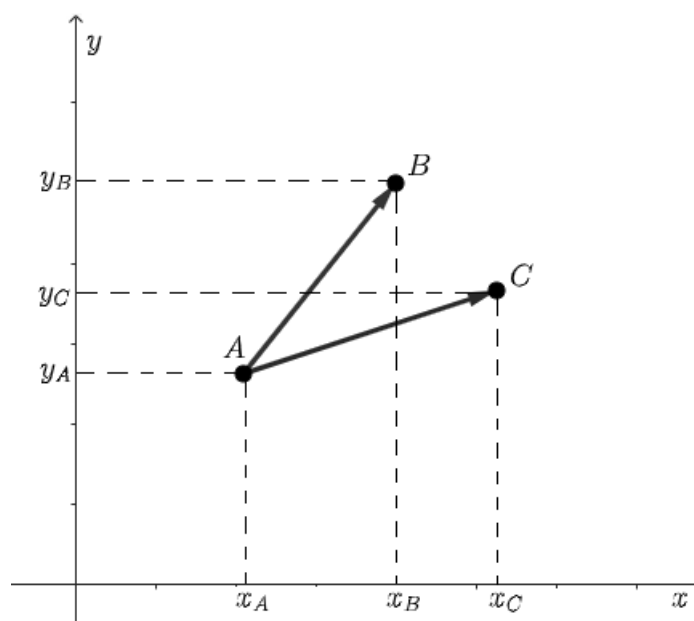
$$m_r = m_t \quad \Rightarrow \quad \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}. \quad (4.24)$$

4.4.2 Utilizando vetores

Na Figura 33 temos o registro gráfico dos pontos A , B , C e dos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

Para verificarmos se os pontos A , B e C são colineares, primeiramente, faremos uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico dos vetores $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ e $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A)$.

Figura 33 – Ilustração dos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} no plano cartesiano para determinar uma condição de alinhamento dos pontos A , B e C .



Fonte: O próprio autor.

Agora basta verificar, por meio de tratamentos algébricos, se existe um número real k tal que:

$$\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad (x_B - x_A, y_B - y_A) = k(x_C - x_A, y_C - y_A). \quad (4.25)$$

4.4.3 Exemplo

Faremos uma questão adaptada do vestibular da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ) do ano de 1999⁴.

Questão (PUC-RJ - 1999 - Adaptada): Determinar o valor de x para que os pontos $A = (1, 3)$, $B = (-2, 4)$ e $C = (x, 0)$ sejam colineares.

Resolução com coordenadas:

A fim de que os pontos A , B e C sejam colineares, utilizando a equação (4.24) e efetuando alguns tratamentos algébricos, obtemos:

$$\frac{4 - 3}{-2 - 1} = \frac{0 - 3}{x - 1} \Rightarrow x = 10.$$

Portanto, para que os pontos A , B e C sejam colineares, devemos ter $x = 10$.

Resolução com vetores:

Por meio de tratamentos algébricos obtemos os vetores $\overrightarrow{AB} = (-3, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (x - 1, -3)$. Para que os pontos A , B e C sejam colineares, utilizando a equação (4.25), e executando alguns tratamentos algébricos verificamos a existência de um número real k , tal que:

$$(-3, 1) = k(x - 1, -3) \Rightarrow k = \frac{3}{1 - x} \text{ e } k = -\frac{1}{3},$$

ou seja,

$$\frac{3}{1 - x} = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = 10.$$

4.5 Considerações sobre as atividades com relação ao Referencial Teórico

O objetivo das atividades foi apresentar duas maneiras diferentes para se trabalhar alguns tópicos de Geometria Analítica no Ensino Médio, uma a partir de coordenadas no plano cartesiano e outra utilizando vetores.

O Referencial Teórico desempenha um papel importante no processo de ensino e aprendizagem, na busca de encontrarmos novas maneiras de abordagem dos conteúdos que possam, de certa forma, contribuir para a compreensão dos conceitos matemáticos por

⁴ Fonte: <https://www.puc-rio.br/vestibular/repositorio/provas/1999/>
Acesso em: 29/06/2023.

parte dos estudantes, além de apresentar um novo caminho que permita possibilitar novas formas de interpretar os enunciados das atividades e viabilizar o entendimento dos objetos matemáticos.

Por exemplo, nas resoluções com coordenadas, é fundamental que os estudantes tenham conhecimento do plano cartesiano para identificar as coordenadas dos vértices das figuras e dos pontos em cada caso, e, a partir de tratamentos algébricos, determinar uma forma de resolver cada atividade proposta.

Nas resoluções com vetores, dois objetos matemáticos, distintos, podem ser confundidos – o ponto e o vetor – portanto, é necessário que os alunos sejam capazes de diferenciá-los, uma vez que são, ambos, representados algebricamente por um par de números reais, por exemplo: o vetor $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e o ponto $P = (x_P, y_P)$ em que x_u, y_u e x_P, y_P são as componentes do vetor \vec{u} e as coordenadas do ponto P , respectivamente.

Por exemplo, no caso do vetor, os estudantes devem ter conhecimento claro desse objeto matemático, para que, através de tratamentos e conversões, consigam fazer operações como projeção ortogonal de um vetor sobre outro, somar dois vetores, calcular o produto escalar de dois vetores, calcular a norma de um vetor etc.

De modo geral, as principais habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos nas atividades propostas são:

- Tratamentos algébricos;
- Conversões de registros algébricos e geométricos;
- Reconhecimento de figuras geométricas no plano cartesiano;
- Operações com vetores.

Através da compreensão e utilização da teoria apresentada no Referencial Teórico, espera-se que os obstáculos que possam surgir durante o processo de ensino e aprendizagem de Matemática sejam minimizados.

É importante observar que, no desenvolvimento dos cálculos para se chegar a uma fórmula, uma maneira pode se mostrar mais trabalhosa do que outra, por exemplo, na primeira e na segunda atividades, nas quais o objetivo foi encontrar uma fórmula para calcular a área de um triângulo e determinar a distância de um ponto a uma reta no plano cartesiano, respectivamente. Podemos observar que as operações algébricas com coordenadas parecem mais trabalhosas do que com vetores, no entanto, para resolver os exemplos propostos, podemos dizer que acontece o contrário, pois nos parece que o cálculo com vetores é um pouco mais trabalhoso.

Entretanto, vale ressaltar que ser mais ou menos trabalhoso é algo subjetivo, uma vez que depende do ponto de vista do leitor. Vale destacar que não estamos escolhendo

uma maneira de calcular em detrimento de outra, apenas apresentando opções distintas para se chegar a um mesmo objetivo, utilizando elementos apresentados no Referencial Teórico deste trabalho.

Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos atividades de Geometria Analítica para o Ensino Médio utilizando duas abordagens distintas: por meio de coordenadas cartesianas (tradicionalmente realizada nas aulas de Matemática), e utilizando vetores. Para isso, tivemos como embasamento teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Uma vez que propusemos duas maneiras distintas para abordar os conceitos matemáticos presentes nas atividades desenvolvidas, acreditamos que esta teoria pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem, pois permite estabelecer uma relação entre essas abordagens, utilizando tratamentos e conversões de registros distintos (algébrico e geométrico).

Foi possível observar, ao analisar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que o documento traz uma série de habilidades com relação ao ensino de Geometria, mas que não trata, pelo menos diretamente, do objeto matemático vetor no componente de Matemática.

Destacamos que não estamos propondo uma mudança na forma de ensinar Geometria Analítica, apenas apresentamos uma abordagem alternativa para o ensino desta disciplina no Ensino Médio. Caberá a cada docente e instituição estabelecer qual proposta seria mais adequada para cada contexto.

Como proposta de trabalhos futuros, pretendemos aplicar as atividades desenvolvidas, e fazer uma avaliação acerca de sua aplicabilidade e eficácia conforme objetivos esperados. Também, se necessário, fazer adaptações e melhorias nas atividades.

Finalmente, o desenvolvimento deste trabalho permitiu uma rica contribuição no desenvolvimento pessoal e profissional do autor enquanto professor de Matemática na busca por melhorar suas ações em sala de aula, bem como disponibilizar um material a outros docentes que possam se interessar pelo assunto.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Abordagens semióticas em educação matemática. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, SP, v. 32, p. 696–726, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio/a-area-de-matematica-e-suas-tecnologias>>. Acesso em: Dezembro de 2022.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio/a-area-de-matematica-e-suas-tecnologias>>. Acesso em: Abril de 2023.
- BUCCHI, P. Curso prático de Matemática. São Paulo: Editora Moderna, 2000. v. 3.
- CAMARGO, I. de; BOULOS, P. Geometria Analítica um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil Ltda, 2005.
- DELGADO, J.; FRESNEL, K.; CRISSAFF, L. Geometria Analítica. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, SP, v. 19, p. 1–22, 2006. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221866005>>. Acesso em: Fevereiro de 2023.
- IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo: Atual Editora, 2011. v. 7.
- MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat: R. Eletr. de Edu.Matem.*, v. 07, p. 266–297, 2012. Disponível em: <<dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>>. Acesso em: Dezembro de 2022.
- WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.