



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

---



JAIRO ALVES BATALHA

## **UM ESTUDO DAS CÔNICAS NO PLANO DE MINKOWSKI**

Rio Branco-AC

2023

JAIRO ALVES BATALHA

## **UM ESTUDO DAS CÔNICAS NO PLANO DE MINKOWSKI**

### **Versão Original**

Dissertação de mestrado apresentado à Universidade Federal do Acre como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - PROFMAT/UFAC.

Orientador: Prof. Dr. Clebes do Nascimento Brandão

Rio Branco-AC

2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

---

B328e Batalha, Jairo Alves, 1988 -  
Um estudo das cônicas no plano de Minkowski/ Jairo Alves Batalha;  
Orientador: Prof. Dr. Clebes do Nascimento Brandão. -- 2023.  
73 f.: il.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Programa de  
Mestrado profissional em Matemática. Rio Branco, 2023.  
Inclui referências bibliográficas e anexos.

1. Plano de Minkowski. 2. Geometria. 3. Geogebra. I. Brandão ,Clebes do  
Nascimento (orientador). II. Título.

CDD: 510.92

---

Bibliotecária: Juliana Nunes de Amartine Alves CRB7-7086



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

Titulo da {dissertação/tese}: Um estudo das cônicas no plano de Minkowski

Autor: Jairo Alves Batalha

Orientador: Prof. Dr. Clebes do Nascimento Brandão

Dissertação aprovada como parte das exigências para obtenção do título de Mestre pela Banca Examinadora.

DATA DA APROVAÇÃO:15 de agosto de 2023.

**BANCA EXAMINADORA:**

Assinado Eletronicamente

**Prof. Dr. Clebes do Nascimento Brandão**

Orientador

Universidade Federal do Acre

Assinado Eletronicamente

**Prof. Dr. Joel Cruz  
Ramirez**

Membro

Universidade Federal do  
Acre

Assinado Eletronicamente

**Profa. Dra. Kelly Alves Marães de  
Almeida**

Membra Externa

Universidade do Estado do Amazonas -  
UEA



Documento assinado eletronicamente por **Kelly Alves Marães de Almeida, Usuário Externo**, em 18/08/2023, às 14:35, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Joel Cruz Ramirez, Professor do Magisterio Superior**, em 11/09/2023, às 13:23, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Clebes do Nascimento Brandao, Professor do Magisterio Superior**, em 14/09/2023, às 15:20, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade do documento pode ser conferida no site [https://sei.ufac.br/sei/valida\\_documento](https://sei.ufac.br/sei/valida_documento) ou click no link [Verificar Autenticidade](#) informando o código verificador **0999329** e o código CRC **E8AA56A6**.

À minha mãe, Jovelina, e ao meu filho, Jairo Júnior,  
dedico.

## AGRADECIMENTOS

Depois de anos de muita dedicação, dias que pareciam inacabáveis, foram tantas as alegrias, e claro, muitas dificuldades. Diante de tudo isto, vem o sentimento de gratidão às pessoas que foram essenciais para que esta conquista enfim se concretizasse. Por este motivo, meus agradecimentos a todos que contribuíram para esse momento, em especial, a minha família que tanto me ajudou durante esta árdua trajetória, pois sem eles essa conquista talvez não tivesse o êxito merecido, já que eles foram quem oportunizaram tudo isto.

À minha mãe, Jovelina Alves da Fonseca, que me faltam as palavras para descrevê-la, tamanha é sua importância não só na minha formação, como em tudo na minha vida. Quantas foram as dificuldades enfrentadas, mas ela sempre esteve firme e me ajudando a também estar firme. Sem ela nada seria possível.

À minha esposa e ajudadora que abriu mão de muitas coisas para ficar com nosso filho, enquanto eu estava a estudar ou escrever este trabalho. E também o meu filho, que nem tem consciência do seu papel nesse trabalho, mas ele foi e é uma fonte de motivação e inspiração diária.

Ao meu amigo e orientador Dr. Clebes do Nascimento Brandão por ter aceitado me orientar e que tanto contribuiu, tendo a paciência necessária no decorrer do processo para que este trabalho fosse finalizado com êxito.

Aos muitos colegas e amigos de turma que tanto colaboraram direta ou indiretamente durante esta trajetória, e até mesmo fora dela, sempre com boas energias e contribuições que agregaram muito.

Aos professores que contribuíram para uma formação de excelência, em especial aos professores Edcarlos e Sérgio Brasil.

À Universidade Federal do Acre e a Sociedade Brasileira de Matemática que através do PROFMAT possibilitou a realização deste momento memorável.

*“Deus não desenha em planos euclidianos. Pois, Ele não criaria um universo, onde, geometricamente, não pudesse se expressar.”*

*(Inuijf)*



## RESUMO

BATALHA, Jairo A. **UM ESTUDO DAS CÔNICAS NO PLANO DE MINKOWSKI. 2023. 72f.** Trabalho de Conclusão de Curso (PROFMAT) - Universidade Federal do Acre, Rio Branco-AC, 2023.

Neste trabalho estudamos sobre as cônicas no Plano de Minkowski. Inicialmente, tomando como principal referência Couto e Lymberopoulos (2018), é abordado um pouco sobre a geometria do Plano de Minkowski e, em seguida, são usadas as definições dadas por Shonoda (2015) para as cônicas no referido plano. Estuda-se sobre a  $\mathcal{M}$ -elipse, a  $\mathcal{M}$ -hipérbole e a  $\mathcal{M}$ -parábola. Após suas respectivas definições, são deduzidas suas equações "reduzidas" e gerais, e são abordados alguns exemplos. Com o uso do software Geogebra conseguimos esboçar as curvas apresentadas nos exemplos.

**Palavras-chave:** Plano de Minkowski, Cônicas no plano de Minkowski,  $\mathcal{M}$ -elipse,  $\mathcal{M}$ -hiperbole,  $\mathcal{M}$ -parábola.

# ABSTRACT

BATALHA, Jairo A. **A STUDY OF CONICS IN THE MINKOWSKI PLANE.** 2023. 72f. Undergraduate thesis (PROFMAT) - Federal University of Acre, Rio Branco-AC, 2023.

In this work we study about the conics in the Minkowski Plane. Initially, taking Couto e Lymberopoulos (2018) as the main reference, we discuss a little about the geometry of the Minkowski Plane and then use the definitions given by Shonoda (2015) for the conics in that plane. We will study about the  $\mathcal{M}$ -ellipse, the  $\mathcal{M}$ -hyperbola and the  $\mathcal{M}$ -parabola. After their respective definitions, we will deduce their "reduced" and general equations and make some examples. With the use of the Geogebra software we were able to sketch the curves given in the examples.

**Keywords:** Minkowski plane, Conics in the Minkowski plane,  $\mathcal{M}$ -ellipse,  $\mathcal{M}$ -hyperbola,  $\mathcal{M}$ -parabola.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	A localização dos tipos causais em $\mathcal{M}^2$ . . . . .	16
Figura 2	$\mathcal{M}$ -círculo centrado na origem . . . . .	19
Figura 3	$\mathcal{M}$ -Elipses com reta focal no eixo $OX$ . . . . .	21
Figura 4	Traços das curvas com parâmetros $a = 2$ e $c = 3$ . . . . .	28
Figura 5	União das curvas . . . . .	28
Figura 6	$\mathcal{M}$ -Elipse com centro na origem e focos sobre o eixo $OX$ . . . . .	29
Figura 7	$\mathcal{M}$ -Elipse centrada na origem com parâmetros $a = c = 3$ . . . . .	30
Figura 8	Traço da $\mathcal{M}$ -Elipse para $a = 4$ . . . . .	31
Figura 9	$\mathcal{M}$ -Elipse com reta focal no eixo $OY$ . . . . .	31
Figura 10	$\mathcal{M}$ -Elipse com focos em $OY$ e parâmetros $a = 1, c = 2$ . . . . .	34
Figura 11	$\mathcal{M}$ -Elipse com focos em $OY$ e parâmetros $a = c = 2$ . . . . .	35
Figura 12	$\mathcal{M}$ -Elipse com focos no eixo $OY$ e parâmetros $a = 3$ e $c = 2$ . . . . .	36
Figura 13	$\mathcal{M}$ -Elipse de focos: $F_1(1, 1), F_2(0, 2)$ e $a = 2$ . . . . .	44
Figura 14	$\mathcal{M}$ -Elipses de focos arbitrários e parâmetros $a < c, a = c$ e $a > c$ . . . . .	45
Figura 15	Traço da $\mathcal{M}$ -Hipérbole com parâmetros $a=2$ e $c=3$ . . . . .	51
Figura 16	$\mathcal{M}$ -Hipérbole de parâmetros $a = c = 3$ . . . . .	52
Figura 17	Traço da $\mathcal{M}$ -Hipérbole de parâmetros $a = 4$ e $c = 3$ . . . . .	53
Figura 18	Traço da $\mathcal{M}$ -Hipérbole para $a = 1$ . . . . .	55
Figura 19	Traço da $\mathcal{M}$ -Hipérbole de parâmetros $a = c = 2$ . . . . .	55
Figura 20	Traço da $\mathcal{M}$ -Hipérbole parâmetros $a = 3$ e $c = 2$ . . . . .	56
Figura 21	$\mathcal{M}$ -Hipérbole de focos: $F_1(-2, 2), F_2(3, -3)$ e $a = 3$ . . . . .	64
Figura 22	$\mathcal{M}$ -Parábola com reta focal no eixo $X$ . . . . .	68
Figura 23	$\mathcal{M}$ -Parábola com reta focal no eixo $OY$ . . . . .	69

Figura 24  $\mathcal{M}$ -Parábola com reta focal não paralela aos eixos coordenados . 70

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>14</b>
2.1	Plano de Minkowski $\mathcal{M}^2$ . . . . .	14
2.2	O Cone de Luz . . . . .	17
2.3	A $\mathcal{M}$ -norma e a $\mathcal{M}$ -distância . . . . .	18
<b>3</b>	<b><math>\mathcal{M}</math>-ELIPSE</b>	<b>20</b>
3.1	Equações Reduzidas da $\mathcal{M}$ -Elipse . . . . .	21
3.1.1	$\mathcal{M}$ -Elipse com centro na origem e reta focal no eixo $OX$ . . . . .	21
3.1.1.1	Pontos delimitantes de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ . . . . .	22
3.1.1.2	Equações reduzidas de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ . . . . .	24
3.1.2	$\mathcal{M}$ -Elipse com centro na origem e reta focal no eixo $OY$ . . . . .	30
3.1.2.1	Pontos delimitantes e equações reduzidas de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ . . . . .	32
3.2	Equações Gerais da $\mathcal{M}$ -Elipse . . . . .	36
3.2.1	Pontos delimitantes de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ . . . . .	36
3.2.2	Equações gerais da $\mathcal{M}$ -Elipse . . . . .	40
<b>4</b>	<b><math>\mathcal{M}</math>-HIPÉRBOLE</b>	<b>46</b>
4.1	Equações Reduzidas da $\mathcal{M}$ -Hipérbole . . . . .	47
4.1.1	$\mathcal{M}$ -Hipérbole com reta focal no eixo $OX$ . . . . .	47
4.1.1.1	Pontos delimitantes de $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ . . . . .	47
4.1.1.2	Equações reduzidas de $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ . . . . .	48

4.1.2	$\mathcal{M}$ -Hipérbole com reta focal no eixo $OY$ . . . . .	53
4.2	Equações Gerais da $\mathcal{M}$ -Hipérbole . . . . .	57
4.2.1	Pontos delimitantes de $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ . . . . .	57
4.2.2	Equações gerais da $\mathcal{M}$ -Hipérbole . . . . .	61
<b>5</b>	<b><math>\mathcal{M}</math>-PARÁBOLA</b>	<b>65</b>
5.1	Classificação de retas e segmentos de retas no plano de Minkowski . . .	65
5.1.1	A $\mathcal{M}$ -Parábola . . . . .	66
5.1.2	$\mathcal{M}$ -Parábola com foco no eixo $X$ . . . . .	66
5.1.3	$\mathcal{M}$ -Parábola com foco no eixo $Y$ . . . . .	67
5.1.4	$\mathcal{M}$ -Parábola com focos fora dos eixos . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>71</b>
	<b>Referências</b>	<b>72</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Até o início do século XIX, mais precisamente até o ano de 1829, a única geometria conhecida era aquela que chamamos de geometria euclidiana, desenvolvida desde os primórdios da humanidade e compilada por Euclides em sua famosa obra "Elementos". Foi natural, portanto, que todas as teorias, tanto matemáticas quanto físicas, desenvolvidas até o ano de 1829 tivessem os ambientes ditos euclidianos como únicos "panos de fundo". Andrade (2013) comenta que:

"Durante séculos, a Matemática ficou presa nessa concepção (que ela era uma Ciência da Natureza) fazendo com que a maior parte das suas teorias tivesse como moldura o espaço euclidiano e fosse direcionada para o estudo de um universo euclidiano."

Com o advento das geometrias não euclidianas, de maneira bastante natural, foram sendo transportadas para estas novas geometrias tudo o que se estudou no ambiente euclidiano, e este processo continua até os dias atuais. Shonoda (2015), por exemplo, apresenta em seu trabalho uma versão no plano de Minkowski das cônicas definidas e estudadas por Apolônio de Perga. A estes objetos, Shonoda dá o nome de  $\mathcal{M}$ -Cônicas.

O espaço-tempo de Minkowski é uma geometria não-euclidiana e teve sua origem a partir do desenvolvimento da teoria da relatividade restrita de Albert Einstein, após o matemático alemão Hermann Minkowski, que fora professor de Einstein, proferir sua famosa palestra "Espaço e Tempo". Sobre isto, Biezuner (2017) comenta:

"Vale a pena ressaltar que foi Minkowski quem traduziu a Teoria da Relatividade Especial para a linguagem do espaço-tempo (em 1907), isto é, foi ele quem reconheceu que a consequência principal da teoria foi a unificação do espaço e do tempo em uma só unidade. Em suas palavras: "De agora em diante, espaço por si só e tempo por si estão condenados a desaparecer em meras sombras, e somente uma união dos dois preservaria uma realidade independente."

O espaço-tempo de Minkowski é, portanto, o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido de um produto escalar especial, conhecido como métrica de Lorentz, segundo Couto e Lymberopoulos (2018).

No presente trabalho estudaremos sobre as Cônicas no plano de Minkowski e a principal referência, como já indicamos acima, é o artigo de Shonoda (2015). O plano de Minkowski é um protótipo do espaço quadridimensional de Lorentz-Minkowski, e o estudo sobre ele possibilitará com que os alunos do ensino básico, ou mesmo das universidades, fiquem mais receptíveis com o modelo apresentado por Minkowski e que é usado quando se estuda a relatividade restrita (ou especial).

Para uma melhor compreensão, dividimos o trabalho da seguinte forma:

O Capítulo 2 é um capítulo de preliminares. Nele consta uma breve revisão do que julgamos ser importante para o desenvolvimento do trabalho.

Nos Capítulos 3, 4 e 5, respectivamente, tratamos da  $\mathcal{M}$ -Elipse, da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole e da  $\mathcal{M}$ -Parábola. Todos estes capítulos seguem normalmente o mesmo padrão estrutural, a saber: inicia-se definindo estes conjuntos no plano de Minkowski e, em seguida, estuda-se os casos especiais em que seus focos estão sobre os eixos coordenados de um sistema de eixos ortogonais, ocasião em que suas equações reduzidas são deduzidas. Após isso, são feitos alguns exemplos com valores previamente definidos, para assim serem esboçados os seus traços, utilizando como ferramenta o software livre Geogebra versão 5.0. Por fim, considerando os focos em qualquer parte do plano de Minkowski, são deduzidas as equações gerais e feito exemplos.

Concluimos esta introdução destacando que em seu artigo, Shonoda (2015) não deduz nenhuma das equações das  $\mathcal{M}$ -cônicas, restringindo-se apenas a apresentar suas respectivas definições, apresentar alguns pontos especiais, denominados pontos delimitantes e apresentar traços dessas curvas com valores pré fixados. Neste trabalho, portanto, a partir das definições dadas, conseguimos deduzir todas as equações necessárias para cobrir os resultados apresentados por Shonoda. Também destacamos que este não é o primeiro trabalho nesta direção, pois Silva (2021), em seu trabalho de conclusão de curso do PROFMAT se propôs a estudar a  $\mathcal{M}$ -elipse e sugeriu que se fosse feito um trabalho mais geral, envolvendo todas as cônicas, o que nos motivou a executar esta tarefa.



## 2 PRELIMINARES

Para se entender uma teoria é necessário que se tenha um modelo adequado onde a mesma possa ser desenvolvida e bem representada. Por isso, antes de abordarmos o assunto proposto no título deste trabalho, é mister que apresentemos o mínimo de conceitos que julgamos importantes para o melhor entendimento do mesmo, e isto veremos nas preliminares. Como as cônicas aqui estudadas são aquelas que se encontram no plano de Minkowski, iniciaremos tratando um pouco sobre este plano e, na medida do possível, mostrando sua diferença para o conhecido e bastante estudado plano euclidiano.

### 2.1 Plano de Minkowski $\mathcal{M}^2$

Conforme definido em Couto e Lymberopoulos (2018) e Shonoda (2015), o *plano de Minkowski* é o par  $\mathcal{M}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}})$ , onde  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$  está munido com a estrutura de espaço vetorial real canônico. Isto é, suas operações de adição de vetores e multiplicação por escalar são aquelas oriundas da adição e multiplicação canônicas do conjunto dos números reais. A operação  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  é um produto escalar definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightsquigarrow \langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

onde  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = x_1x_2 - y_1y_2$ , com  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$ . Este produto escalar é conhecido na literatura como o *produto escalar de Lorentz* ou *métrica de Minkowski* (ver, por exemplo, Couto e Lymberopoulos (2018))

Percebamos com esta definição que a principal diferença do plano de Minkowski para o conhecido plano Euclidiano não está no ambiente  $\mathbb{R}^2$ , e sim na maneira como ali se define o produto escalar.

A segunda observação, que gostaríamos de fazer, está no uso da terminologia

"produto escalar", ao invés de "produto interno". Isto se dá, conforme declara Couto e Lymberopoulos (2018), pelo fato de que "produto interno" é comumente usado para designar uma forma bilinear simétrica, positivo-definida e não-degenerada. Um exemplo de produto interno é o produto escalar Euclidiano. O produto escalar de Minkowski  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$ , muito embora seja não-degenerado, bilinear e simétrico, não satisfaz a propriedade de ser positivo-definido. Isto significa que pode ocorrer de  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}}$  ser um número real não positivo, isto é, menor ou igual a zero. De fato, basta tomar  $u$  como sendo um vetor da forma  $u = (x, x)$ , e teremos  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = 0$ . Por outro lado, se  $u = (x, y) \in \mathcal{M}^2$  é tal que a segunda coordenada é maior que a primeira ( $y > x$ ), teremos  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} < 0$ . Daí, tem-se as seguintes propriedades:

### Propriedades

Para todo  $u, v, w \in \mathcal{M}^2$  e  $k \in \mathbb{R}$ , tem-se

- (i) Bilinearidade:  $\langle ku + v, w \rangle_{\mathcal{M}} = k\langle u, w \rangle_{\mathcal{M}} + \langle v, w \rangle_{\mathcal{M}}$ .
- (ii) Comutatividade:  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = \langle v, u \rangle_{\mathcal{M}}$ .
- (iii) Não-degenerescência: Para cada vetor não nulo  $u \in \mathcal{M}^2$  existe  $v \in \mathcal{M}^2$  tal que  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} \neq 0$ .

**Observação:**  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}$  não é positivo definido.

Desta forma torna-se natural estabelecer a seguinte classificação para os vetores em  $\mathcal{M}^2$ :

### Classificação

Seja  $u \in \mathcal{M}^2$ . Dizemos que

- (i)  $u$  é um vetor *tipo-espaço* se  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} > 0$ ;
- (ii)  $u$  é um vetor *tipo-luz* se  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = 0$ ;
- (iii)  $u$  é um vetor *tipo-tempo* se  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} < 0$ .

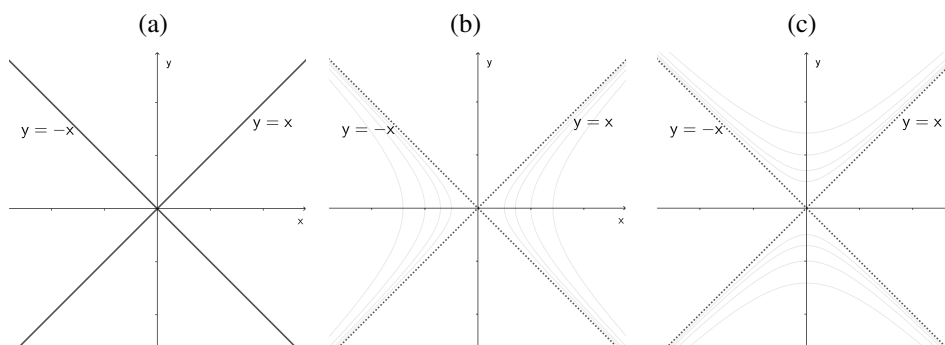
Uma curiosidade envolvendo a classificação acima, cuja demonstração também pode ser vista em Couto e Lymberopoulos (2018), é a seguinte:

**Proposição 1:** Se  $u, v \in \mathcal{M}^2$  são vetores tipo-luz linearmente independentes (isto é, eles não são paralelos), então  $u + v$  e  $u - v$  não são de tipo-luz e são de tipos distintos.

Os autores destacam que a partir da tricotomia na relação de ordem em  $\mathbb{R}$ , cada vetor em  $\mathcal{M}^2$  possui um e somente um dos três tipos apresentados acima (chamados por eles de tipos causais). Mais ainda, a fim de adquirir uma intuição geométrica inicial em  $\mathcal{M}^2$ , os autores determinam o lugar geométrico dos vetores de cada tipo, da seguinte maneira: Se  $u = (x, y) \in \mathcal{M}^2$ , então  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = c \Leftrightarrow x^2 - y^2 = c$ . Da geometria analítica, temos que a expressão  $x^2 - y^2 = c$  representa:

- (a) as bissetrizes dos eixos coordenados, se  $c = 0$ ;
- (b) dois ramos de uma hipérbole, localizados nos semiplanos determinados pela reta  $x = 0$ , se  $c > 0$ ;
- (c) dois ramos de uma hipérbole, localizados nos semiplanos determinados pela reta  $y = 0$ , se  $c < 0$ .

Figura 1: A localização dos tipos causais em  $\mathcal{M}^2$



Fonte: Couto & Lyberopoulos (2018).

Uma vez estabelecida a definição do plano de Minkowski podemos trabalhar um conceito que está diretamente ligado ao de produto interno (ou produto escalar) que é ortogonalidade.

**Definição 1.** Dois vetores  $u$  e  $v$  em  $\mathcal{M}^2$  são chamados *Minkowski-ortogonais* (ou simplesmente  *$\mathcal{M}$ -ortogonais*) se  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 0$ .

Observe que a definição de  $\mathcal{M}$ -ortogonalidade no plano de Minkowski é basicamente a mesma de ortogonalidade encontrada na geometria Euclidiana. Mas, diferentemente daquela, casos bastante interessantes aparecem envolvendo esse conceito no

plano de Minkowski. Por exemplo, como visto na classificação acima, item (ii), todo vetor tipo-luz é  $\mathcal{M}$ -ortogonal a si mesmo. Mais ainda, em Couto e Lymeropoulos (2018) também encontramos as seguintes proposições.

**Proposição 2:** Dois vetores tipo-luz são  $\mathcal{M}$ -ortogonais se, e somente se, são paralelos.

**Proposição 3:** Não existem dois vetores tipo-tempo  $\mathcal{M}$ -ortogonais, tampouco vetores de tipo-tempo  $\mathcal{M}$ -ortogonais a vetores de tipo-luz.

## 2.2 O Cone de Luz

**Definição 2.** *O conjunto de todos os vetores tipo-luz do plano de Minkowski, denotado por  $C$ , é chamado cone de luz (centrado em  $(0,0)$ ).*

Observe que o cone de luz em  $\mathcal{M}^2$  é exatamente a união das retas  $y = x$  e  $y = -x$ . Observe ainda, como mostra a Figura 1, que o cone de luz separa o plano de Minkowski em exatamente duas partes: a parte interna do cone de luz é formada apenas por vetores tipo-tempo e a parte externa do cone de luz é formada apenas por vetores tipo-espaço.

A partir da Definição 2, os autores Couto e Lymeropoulos Couto e Lymeropoulos (2018) também sugerem a seguinte definição - que dada sua importância, será usada em vários momentos no próximo capítulo deste trabalho.

**Definição 3.** *O cone de luz centrado em  $p \in \mathcal{M}^2$  é o conjunto*

$$C_L(p) = \{q \in \mathcal{M}^2; q - p \text{ é do tipo-luz}\}.$$

Observe, a partir das Definições 2 e 3, que o cone de luz centrado em  $p \in \mathcal{M}^2$  é basicamente a translação do cone de luz centrado na origem para o ponto  $p$ .

Existem vários fatos curiosos que distinguem a geometria do plano de Minkowski para a do plano Euclidiano. Uma dessas curiosidades, por exemplo, é que, como escrevem Couto e Lymeropoulos (2018), aos olhos Euclidianos, vetores de tipo-tempo são vistos com comprimento maior do que quando vistos com olhos Minkowskianos<sup>1</sup>. Ainda, de acordo com os autores, na passagem do plano Euclidiano para o plano de Minkowski, alguns resultados que dependem do produto escalar perdem sua validade

---

<sup>1</sup>Em verdade, os autores citados chamam "olhos Lorentzianos", e usam essa palavra por trabalharem em espaços de dimensão maior que dois, os quais são chamados "espaços de Lorentz-Minkowski".

e outros sofrem alterações drásticas. Comentaremos um pouco mais sobre isso posteriormente.

## 2.3 A $\mathcal{M}$ -norma e a $\mathcal{M}$ -distância

A  $\mathcal{M}$ -norma no plano de Minkowski é denotada por  $|\cdot|_{\mathcal{M}}$  e definida a partir do produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  da seguinte forma:

$$|u|_{\mathcal{M}} = \sqrt{|\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}}|}, \quad \forall u \in \mathcal{M}^2.$$

Ao se referirem à  $\mathcal{M}$ -norma, Couto e Lymberopoulos (2018), esclarecem que o termo "norma" é um abuso de linguagem, haja vista que  $|\cdot|_{\mathcal{M}}$  não é de fato uma norma, pois a  $\mathcal{M}$ -norma de qualquer vetor tipo-luz é zero. Vejamos abaixo algumas propriedades relacionadas à  $\mathcal{M}$ -norma:

Sejam  $u$  e  $v$  em  $\mathcal{M}^2$  e  $k \in \mathbf{R}$ . Então

- (a)  $|u|_{\mathcal{M}} \geq 0$ ;  $|u|_{\mathcal{M}} = 0 \iff u$  for um vetor tipo-luz;
- (b)  $|ku|_{\mathcal{M}} = |k||u|_{\mathcal{M}}$ ;
- (c)  $|\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}| \geq |u|_{\mathcal{M}}|v|_{\mathcal{M}}$ , para  $u$  e  $v$  vetores tipo-tempo (desigualdade reversa de Cauchy-schwarz);
- (d)  $|u + v|_{\mathcal{M}} \geq |u|_{\mathcal{M}} + |v|_{\mathcal{M}}$ , para  $u$  e  $v$  vetores tipo-tempo ( desigualdade triangular reversa).

Um vetor  $\mathcal{M}$ -unitário em  $\mathcal{M}^2$  é um vetor  $u$  tal que  $|u|_{\mathcal{M}} = 1$ .

A seguir apresentamos algumas definições que servirão de base para o estudo das Cônicas no plano espaço-tempo de Minkowski.

**Definição 4.** *Definição A  $\mathcal{M}$ -distância entre dois pontos  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_1, y_1)$  em  $\mathcal{M}^2$  é denotada e definida por*

$$d_{\mathcal{M}}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{|(x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2|},$$

em que  $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ .

**Definição 5.** O círculo no plano de Minkowski (ou simplesmente  $\mathcal{M}$ -círculo) de centro em  $A \in \mathcal{M}^2$  e raio  $k > 0$ , denotado por  $S_{\mathcal{M}}(A, k)$ , é o subconjunto dos pontos de  $\mathcal{M}^2$  situados à  $\mathcal{M}$ -distância  $k$  do ponto  $A$ . Algebricamente, escrevemos

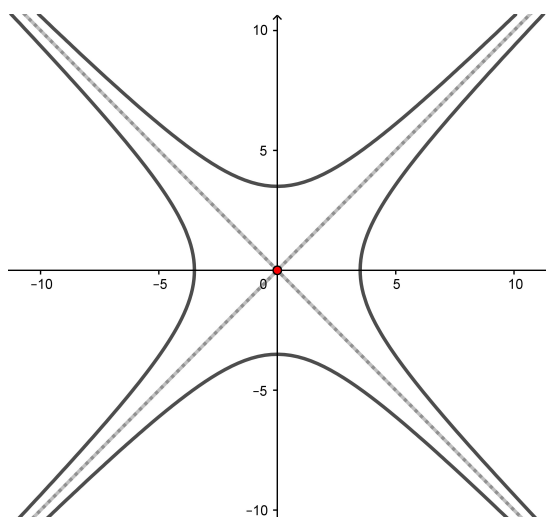
$$S_{\mathcal{M}}(A, k) := \{P \in \mathcal{M}^2; d_{\mathcal{M}}(A, P) = k\}.$$

Para encontrar a equação geral de um  $\mathcal{M}$ -círculo centrado no ponto  $A(x_0, y_0) \in \mathcal{M}^2$ , tomemos um ponto genérico  $P = (x, y)$ . Então,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in S_{\mathcal{M}}(A, k) &\iff d_{\mathcal{M}}(P, A) = k \\ &\iff d_{\mathcal{M}}(P, A)^2 = k^2 \\ &\iff |(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2| = k^2 \\ &\iff (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = \pm k^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

A Equação (2.1) é denominada de equação geral do  $\mathcal{M}$ -círculo centrado no ponto  $A(x_0, y_0)$  de  $\mathcal{M}^2$ . Observe também, a partir desta equação, que o  $\mathcal{M}$ -círculo é precisamente um par de hipérbolas conjugadas com eixos paralelos aos eixos coordenados no sentido euclidiano. Na Figura 2 temos o esboço do  $\mathcal{M}$ -círculo unitário centrado na origem. Suas assíntotas, como mostra a figura, são as retas  $y = x$  e  $y = -x$ , que compõem o cone de luz centrado na origem do sistema  $OXY$ .

Figura 2:  $\mathcal{M}$ -círculo centrado na origem



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

### 3 $\mathcal{M}$ -ELIPSE

Neste capítulo estudaremos a elipse no plano de Minkowski, a  $\mathcal{M}$ -elipse, onde o objetivo será deduzir as suas equações reduzidas e geral. Afim de um entendimento mais conciso, iniciamos na Seção (3.1) com os casos particulares em que as retas focais da  $\mathcal{M}$ -elipse coincidem com os eixos coordenados. Após esta análise e a partir das experiências com os exemplos abordados, estudaremos o caso geral.

Em Shonoda (2015) e em Aceff-Sanchez F; Senior (2007) encontramos a seguinte definição.

**Definição 6.** *Uma  $\mathcal{M}$ -elipse de focos  $F_1 = (z_1, z_2)$  e  $F_2 = (w_1, w_2)$ , que denotamos por  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ , é o conjunto dos pontos  $P(x, y)$  do plano de Minkowski cuja soma das  $\mathcal{M}$ -distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante  $2a > 0$ .*

Algebricamente,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2) = \{P \in \mathcal{M}^2; d_{\mathcal{M}}(P, F_1) + d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = 2a, a > 0\}.$$

Em coordenadas, um ponto  $P(x, y)$  pertence à  $\mathcal{M}$ -elipse  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$  se, e somente se, suas coordenadas satisfazem

$$\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} + \sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 2a. \quad (3.1)$$

Denotando por  $2c$  a  $\mathcal{M}$ -distância do foco  $F_1$  ao foco  $F_2$ , obtemos

$$c = \frac{1}{2}d_{\mathcal{M}}(F_1, F_2).$$

A reta que contém os focos da  $\mathcal{M}$ -Elipse é denominada reta focal; o ponto médio do seguimento cujas extremidades são os focos  $F_1$  e  $F_2$  é chamado o centro da  $\mathcal{M}$ -Elipse. Por fim, diferentemente do caso euclidiano, em que o número real  $a$  é obrigado a ser maior que  $c$ , na definição de  $\mathcal{M}$ -Elipse esta exigência não é necessária,

podendo  $a$  assumir valores menores, igual ou maiores que  $c$ . Estudaremos cada um destes casos nas próximas seções e subseções.

### 3.1 Equações Reduzidas da $\mathcal{M}$ -Elipse

Nesta seção estudaremos a Equação (3.1) para os casos específicos em que a  $\mathcal{M}$ -Elipse tem centro na origem e seus focos estão sobre os eixos coordenados.

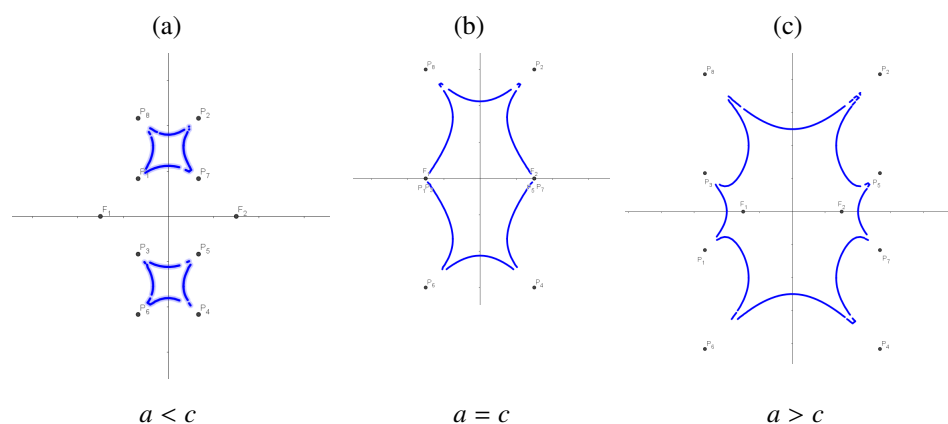
#### 3.1.1 $\mathcal{M}$ -Elipse com centro na origem e reta focal no eixo $OX$ .

Denotemos por  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$  a  $\mathcal{M}$ -elipse de centro na origem e com focos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ ,  $c > 0$ . De acordo com a Equação (3.1), um ponto  $P(x, y) \in \mathcal{M}^2$  pertence a  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$  se, e somente se, satisfaz

$$\sqrt{|(x+c)^2 - y^2|} + \sqrt{|(x-c)^2 - y^2|} = 2a. \quad (3.2)$$

Usando o software Geogebra é possível esboçar a curva cuja equação é (3.2). Na Figura 3, por exemplo construímos os traços de três curvas para os casos  $a < c$ ,  $a = c$  e  $a > c$ , respectivamente.

Figura 3:  $\mathcal{M}$ -Elipses com reta focal no eixo  $OX$ .



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

No link (<https://www.geogebra.org/m/h7euee7t>) encontra-se uma animação feita no Geogebra online que nos permite visualizar a evolução da curva de maneira contínua desde o caso em que  $a < c$ , passando por  $a = c$  e chegando até  $a > c$ .

Observemos na Figura 3 acima que em todos os casos as curvas são delimitadas



por alguns pontos, denominados pontos delimitantes, e que são obtidos fazendo a interseção destas referidas curvas com os cones de luz centrados nos respectivos focos. Nas duas subseções a seguir encontraremos as expressões que nos dão as coordenadas destes pontos delimitantes.

### 3.1.1.1 Pontos delimitantes de $\mathcal{E}_M(F_1, F_2)$

Suponha que  $P(x, y) \in \mathcal{E}_M(F_1, F_2)$  também pertença ao cone de luz  $C_L(F_1)$ . Então, a partir da Definição 4 e da Equação (3.2), temos que  $\sqrt{|(x+c)^2 - y^2|} = 0$  e, conseqüentemente,  $\sqrt{|(x-c)^2 - y^2|} = 2a$ . De  $\sqrt{|(x+c)^2 - y^2|} = 0$  segue que  $P$  deve pertencer ou à reta  $y = x + c$  ou à reta  $y = -x - c$ . E de  $\sqrt{|(x-c)^2 - y^2|} = 2a$  obtemos que  $P$  deve pertencer a um dos  $\mathcal{M}$ -círculos definidos respectivamente pelas expressões  $(x-c)^2 - y^2 = 4a^2$  e  $(x-c)^2 - y^2 = -4a^2$ . Analisemos, portanto, os quatro casos a seguir.

**Primeiro Caso:** Admita que o ponto  $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E}_M(F_1, F_2)$  pertença à reta  $y = x + c$  e à hipérbole euclidiana  $(x-c)^2 - y^2 = 4a^2$ . Então, substituindo  $y_1 = x_1 + c$  em  $(x_1 - c)^2 - y_1^2 = 4a^2$ , obtemos que

$$\begin{aligned} (x_1 - c)^2 - (x_1 + c)^2 &= 4a^2 \\ \iff x_1^2 - 2x_1c + c^2 - x_1^2 - 2x_1c - c^2 &= 4a^2 \\ \iff -4x_1c &= 4a^2 \\ \iff x_1 &= -\frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,  $y_1 = -\frac{a^2 - c^2}{c}$ .

**Segundo Caso:** Suponha que o ponto  $P_2(x_2, y_2) \in \mathcal{E}_M(F_1, F_2)$  pertença à reta  $y = x + c$  e à hipérbole  $(x-c)^2 - y^2 = -4a^2$ . Então, substituindo  $y_2 = x_2 + c$  em  $(x_2 - c)^2 - y_2^2 = -4a^2$ , obtemos que

$$\begin{aligned} (x_2 - c)^2 - (x_2 + c)^2 &= -4a^2 \\ \iff x_2^2 - 2x_2c + c^2 - x_2^2 - 2x_2c - c^2 &= -4a^2 \\ \iff -4x_2c &= -4a^2 \\ \iff x_2 &= \frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,  $y_2 = \frac{a^2 + c^2}{c}$ .

**Terceiro Caso:** Supondo que o ponto  $P_3(x_3, y_3) \in \mathcal{E}_M$  pertença à reta  $y = -x - c$  e à hipérbole  $(x - c)^2 - y^2 = 4a^2$ , substituindo  $y_3 = -x_3 - c$  em  $(x_3 - c)^2 - y_3^2 = 4a^2$ , obtemos:

$$\begin{aligned} (x_3 - c)^2 - (-x_3 - c)^2 &= 4a^2 \\ \iff x_3^2 - 2x_3c + c^2 - x_3^2 - 2x_3c - c^2 &= 4a^2 \\ \iff -4x_3c &= 4a^2 \\ \iff x_3 &= -\frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,  $y_3 = \frac{a^2 - c^2}{c}$ .

**Quarto Caso:** Para finalizar as intersecções com  $C_L(F_1)$ , suponha que o ponto  $P_4(x_4, y_4) \in \mathcal{E}_M$  pertença à reta  $y = -x - c$  e à hipérbole  $(x - c)^2 - y^2 = -4a^2$ . substituindo  $y_4 = -x_4 - c$  em  $(x_4 - c)^2 - y_4^2 = -4a^2$ , obtemos:

$$\begin{aligned} (x_4 - c)^2 - (-x_4 - c)^2 &= -4a^2 \\ \iff x_4^2 - 2x_4c + c^2 - x_4^2 - 2x_4c - c^2 &= -4a^2 \\ \iff -4x_4c &= -4a^2 \\ \iff x_4 &= \frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,  $y_4 = -\frac{a^2 + c^2}{c}$ .

Encontramos, portanto, os pontos

$$\begin{array}{ll} P_1\left(-\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2 - c^2}{c}\right), & P_2\left(\frac{a^2}{c}, \frac{a^2 + c^2}{c}\right), \\ P_3\left(-\frac{a^2}{c}, \frac{a^2 - c^2}{c}\right), & P_4\left(\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2 + c^2}{c}\right). \end{array}$$

Analogamente, se  $P(x, y)$  é um ponto de  $\mathcal{E}_M(F_1, F_2)$  também pertencente ao Cone de Luz  $C_L(F_2)$ , então  $P$  satisfaz simultaneamente  $\sqrt{|(x + c)^2 - y^2|} = 2a$  e  $\sqrt{|(x - c)^2 - y^2|} = 0$ . De  $\sqrt{|(x + c)^2 - y^2|} = 2a$ , segue que  $P$  deve pertencer a um dos  $\mathcal{M}$ -círculos cujas equações são, respectivamente  $(x + c)^2 - y^2 = 4a^2$  e  $(x + c)^2 - y^2 = -4a^2$ . E, a partir da expressão  $\sqrt{|(x - c)^2 - y^2|} = 0$ ,  $P$  deve pertencer a uma das retas  $y = x - c$  ou  $y = -x + c$ .

Procedendo de maneira inteiramente análoga ao que foi feito anteriormente, encontramos os pontos

$$P_5\left(\frac{a^2}{c}, \frac{a^2 - c^2}{c}\right), \quad P_6\left(-\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2 + c^2}{c}\right),$$

$$P_7\left(\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2 - c^2}{c}\right), \quad P_8\left(-\frac{a^2}{c}, \frac{a^2 + c^2}{c}\right).$$

Encontrados os pontos delimitantes, deduziremos agora as equações que determinam a  $\mathcal{M}$ -Elipse. Fazemos isso a partir dos pontos da  $\mathcal{M}$ -Elipse que não são pontos delimitantes.

### 3.1.1.2 Equações reduzidas de $\mathcal{E}_M(F_1, F_2)$

Seja  $P(x, y)$  um ponto de  $\mathcal{E}_M(F_1, F_2)$  que não pertence aos cones  $C_L(F_1)$  e  $C_L(F_2)$  então  $P$  satisfaz a Equação (3.2) e suas coordenadas obedecem às seguintes restrições:

$$0 < \sqrt{|(x + c)^2 - y^2|} < 2a$$

e

$$0 < \sqrt{|(x - c)^2 - y^2|} < 2a - \sqrt{|(x + c)^2 - y^2|}.$$

Diante disso, estudaremos a Equação (3.2) investigando os casos a seguir:

- Caso I -  $|x + c| > |y|$  e  $|x - c| > |y|$ ;
- Caso II -  $|x + c| < |y|$  e  $|x - c| < |y|$ ;
- Caso III -  $|x + c| > |y|$  e  $|x - c| < |y|$ ;
- Caso IV -  $|x + c| < |y|$  e  $|x - c| > |y|$ .

Vejam os casos:

**Caso I-** Quando  $|x + c| > |y|$  e  $|x - c| > |y|$ , a Equação (3.2) se torna

$$\sqrt{(x + c)^2 - y^2} + \sqrt{(x - c)^2 - y^2} = 2a.$$

Segue daí que  $\sqrt{(x + c)^2 - y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 - y^2}$ . Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtemos

$$(x + c)^2 - y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 - y^2} + (x - c)^2 - y^2,$$

o que nos dá

$$4a\sqrt{(x - c)^2 - y^2} = 4a^2 - 4cx.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por 4 e, em seguida, elevando tudo novamente ao quadrado, teremos

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 - y^2) = a^4 - 2ca^2x + c^2x^2.$$

Segue, então, que

$$(a^2 - c^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Por fim, dividindo ambos os lados desta última igualdade por  $a^2(a^2 - c^2)$ , obtemos a equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (3.3)$$

Observe que a Equação (3.3) não está definida para o caso  $a = c$ .

**Caso II-** Quando  $|x + c| < |y|$  e  $|x - c| < |y|$ , a Equação (3.2) se torna

$$\sqrt{y^2 - (x + c)^2} + \sqrt{y^2 - (x - c)^2} = 2a.$$

Segue daí que  $\sqrt{y^2 - (x + c)^2} = 2a - \sqrt{y^2 - (x - c)^2}$ . Elevando ambos os membros desta igualdade ao quadrado, obtemos

$$y^2 - (x + c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 - (x - c)^2} + y^2 - (x - c)^2,$$

de onde concluímos que

$$a\sqrt{y^2 - (x - c)^2} = a^2 + xc.$$

Elevando novamente ambos os lados desta última igualdade ao quadrado, encontramos

$$a^2[y^2 - x^2 + 2xc - c^2] = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2.$$

Reorganizando estes termos nós obtemos que

$$x^2c^2 + a^2x^2 - a^2y^2 = -a^2c^2 - a^4,$$

e, finalmente, obtemos a expressão

$$x^2(c^2 + a^2) - a^2y^2 = -a^2(c^2 + a^2).$$

Como  $a \neq 0$ , podemos dividir ambos os lados desta última igualdade por  $-a^2(a^2 + c^2)$  e encontramos a equação

$$\frac{y^2}{a^2 + c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (3.4)$$

**Caso III-** Quando  $|x + c| > |y|$  e  $|x - c| < |y|$ , a Equação (3.2) se torna

$$\sqrt{(x + c)^2 - y^2} + \sqrt{y^2 - (x - c)^2} = 2a.$$

Segue daí que  $\sqrt{(x + c)^2 - y^2} = 2a - \sqrt{y^2 - (x - c)^2}$ . Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtemos

$$(x + c)^2 - y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 - (x - c)^2} + y^2 - (x - c)^2.$$

Isto é,

$$2a\sqrt{y^2 - (x - c)^2} = 2a^2 - x^2 + y^2 - c^2.$$

Elevando novamente ambos os lados da igualdade ao quadrado e reorganizando os termos, obtemos a expressão

$$(x^2 - y^2)^2 + 2c^2(x^2 - y^2) - 8xa^2c = -c^4 - 4a^4 \quad (3.5)$$

**Caso IV-** Quando  $|x + c| < |y|$  e  $|x - c| > |y|$ , (3.2) é transformada em

$$\sqrt{y^2 - (x + c)^2} + \sqrt{(x - c)^2 - y^2} = 2a.$$

Segue daí que  $\sqrt{y^2 - (x + c)^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 - y^2}$ . Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtemos

$$y^2 - (x + c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 - y^2} + (x - c)^2 - y^2.$$

Isto é,

$$2a\sqrt{(x - c)^2 - y^2} = 2a^2 + x^2 - y^2 + c^2.$$

Elevando novamente ambos os lados da igualdade ao quadrado, desenvolvendo os termos que estão elevados ao quadrado e reorganizando-os, obtemos a expressão

$$(y^2 - x^2)^2 - 2c^2(y^2 - x^2) + 8xa^2c = -c^4 - 4a^4. \quad (3.6)$$

Portanto, a  $\mathcal{M}$ -elipse  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ , com centro na origem e cuja reta focal coincide com o eixo  $OX$ , é formada pelas curvas cujas equações são dadas a seguir:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2) : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \\ \frac{y^2}{a^2 + c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ (x^2 - y^2)^2 + 2c^2(x^2 - y^2) - 8xa^2c = -c^4 - 4a^4, \\ (y^2 - x^2)^2 - 2c^2(y^2 - x^2) + 8xa^2c = -c^4 - 4a^4, \end{cases} \quad (3.7)$$

delimitadas pelos pontos  $P_1$  a  $P_8$  obtidos anteriormente.

**Exemplo 1:** Encontre as equações e esboce o traço da  $\mathcal{M}$ -elipse de centro na origem e focos  $F_1(-3, 0)$  e  $F_2(3, 0)$ , para os seguintes valores: (a)  $a = 2$ , (b)  $a = 3$  e (c)  $a = 4$ .

**Solução.**

(a) As coordenadas dos pontos delimitantes foram encontradas na Subsecção 3.1.1.1, de onde obtemos:

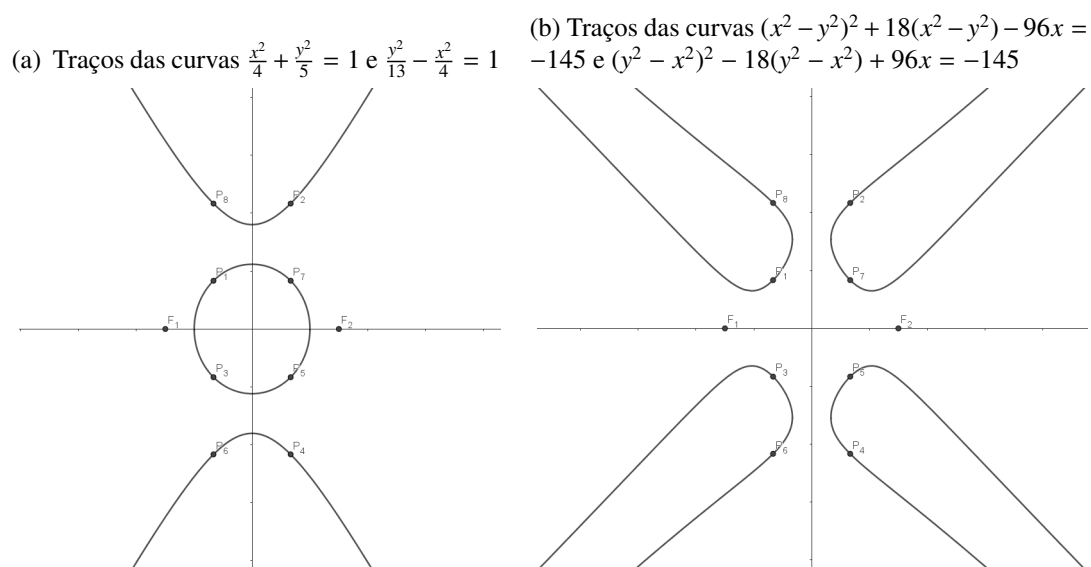
$$\begin{array}{cccc} P_1\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), & P_2\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{3}\right) & P_3\left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right) & P_4\left(\frac{4}{3}, -\frac{13}{3}\right), \\ P_5\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right), & P_6\left(-\frac{4}{3}, -\frac{13}{3}\right) & P_7\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) & P_8\left(-\frac{4}{3}, \frac{13}{3}\right). \end{array}$$

Usando  $a = 2$  e  $c = 3$  na Equação (3.7), encontramos a equação reduzida da  $\mathcal{M}$ -elipse procurada:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2) : \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \\ \frac{y^2}{13} - \frac{x^2}{4} = 1 \\ (x^2 - y^2)^2 + 18(x^2 - y^2) - 96x = -145 \\ (y^2 - x^2)^2 - 18(y^2 - x^2) + 96x = -145. \end{cases}$$

Na Figura 4, item (a) temos os traços das curvas de equações  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$  e  $\frac{y^2}{13} - \frac{x^2}{4} = 1$ ; e no item (b) temos os traços das curvas de equações  $(x^2 - y^2)^2 + 18(x^2 - y^2) - 96x = -145$  (à esquerda do eixo OY) e  $(y^2 - x^2)^2 - 18(y^2 - x^2) + 96x = -145$  (à direita do eixo OY).

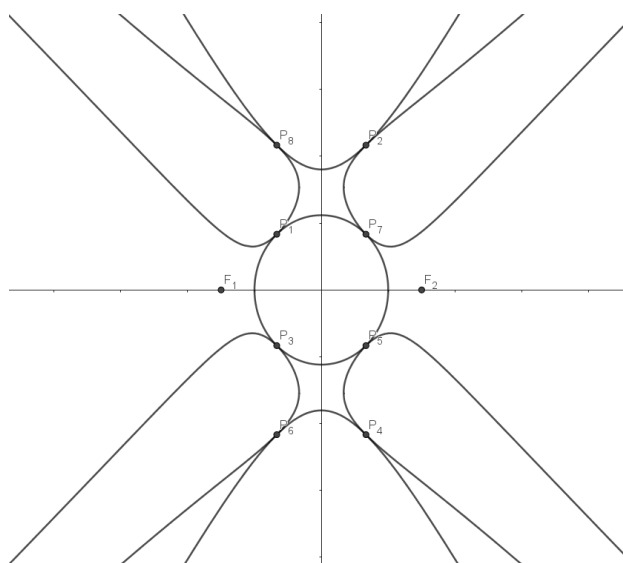
Figura 4: Traços das curvas com parâmetros  $a = 2$  e  $c = 3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o Geogebra

A Figura 5 mostra a união dos traços das curvas constantes na Figura 4.

Figura 5: União das curvas

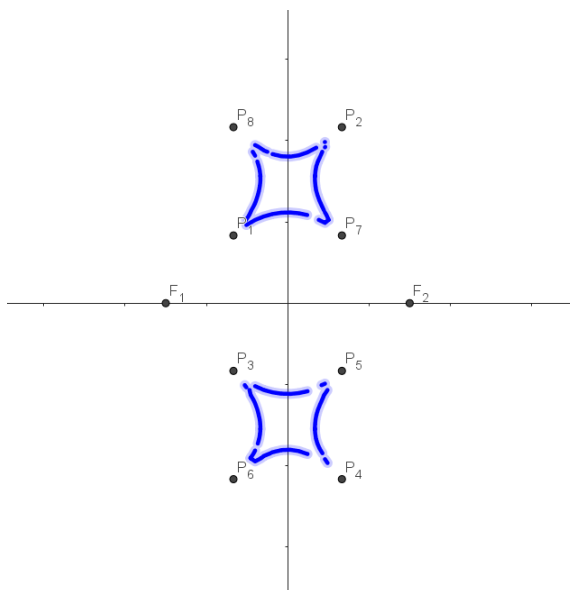


Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0. .

O traço da  $\mathcal{M}$ -elipse é obtido após usar os pontos delimitantes encontrados anteriormente, como mostrado na Figura 6.

Observe na Figura 6 que os focos  $F_1$  e  $F_2$  são exteriores à  $\mathcal{M}$ -Elipse, isso ocorre sempre que tivermos  $a < c$ . Ademais, os oito pontos delimitantes estão separados simetricamente pelo eixo focal.

Figura 6:  $\mathcal{M}$ -Elipse com centro na origem e focos sobre o eixo  $OX$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

- (b) Para  $a = c = 3$  temos apenas seis pontos delimitantes na  $\mathcal{M}$ -Elipse. Em geral, isso ocorre sempre que tivermos  $a = c$ . Os pontos delimitantes são os seguintes:

$$\begin{aligned} P_1 = P_3 = (-3, 0), & \quad P_2(3, 6), & \quad P_4(3, -6), \\ P_5 = P_7 = (3, 0), & \quad P_6(-3, -6), & \quad P_8(-3, 6). \end{aligned}$$

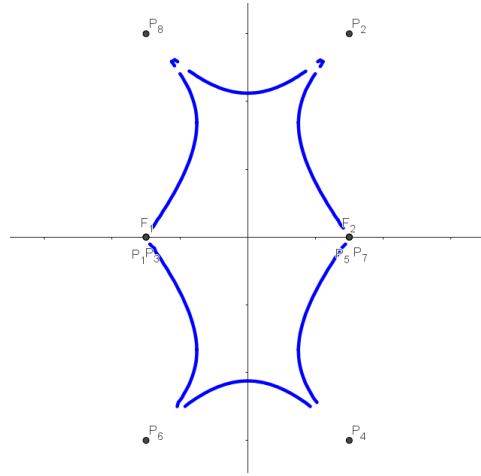
As equações reduzidas são dadas por

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} : \begin{cases} \frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{9} = 1 \\ (x^2 - y^2)^2 + 18(x^2 - y^2) - 216x = -405 \\ (y^2 - x^2)^2 - 18(y^2 - x^2) + 216x = -405. \end{cases}$$

Utilizando o mesmo procedimento adotado no item (a), temos o traço da  $\mathcal{M}$ -Elipse para  $a = 3$ , conforme figura abaixo.



Figura 7:  $\mathcal{M}$ -Elipse centrada na origem com parâmetros  $a = c = 3$ .



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

(c) Para  $a = 4$  e  $c = 3$ , encontramos os pontos

$$\begin{array}{cccc}
 P_1\left(-\frac{16}{3}, -\frac{7}{3}\right), & P_2\left(\frac{16}{3}, \frac{25}{3}\right), & P_3\left(-\frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right), & P_4\left(\frac{16}{3}, -\frac{25}{3}\right), \\
 P_5\left(\frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right), & P_6\left(-\frac{16}{3}, -\frac{25}{3}\right), & P_7\left(\frac{16}{3}, -\frac{7}{3}\right), & P_8\left(-\frac{16}{3}, \frac{25}{3}\right).
 \end{array}$$

As equações reduzidas são dadas por

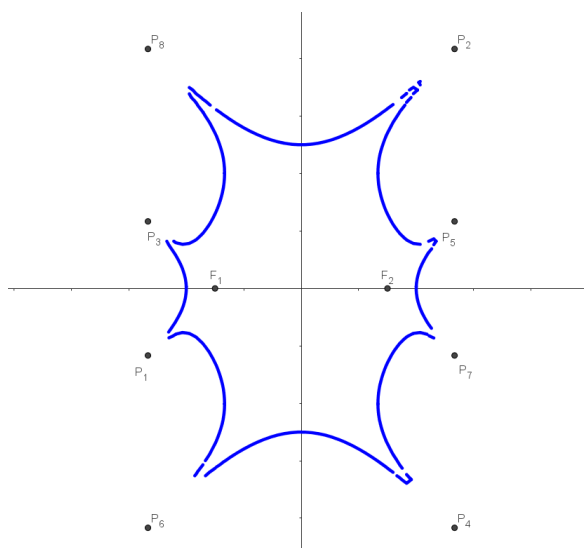
$$\mathcal{E}_M : \begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1, \\ \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1, \\ (x^2 - y^2)^2 + 18(x^2 - y^2) - 384x = -1105, \\ (y^2 - x^2)^2 - 18(y^2 - x^2) + 384x = -1105. \end{cases}$$

Na Figura 8 temos o traço da  $\mathcal{M}$ -Elipse procurada.

Para o caso (c), os dois focos são pontos internos à  $\mathcal{M}$ -elipse. Isso acontece sempre que tivermos  $a > c$ . Além disso, os oito pontos delimitantes da  $\mathcal{M}$ -Elipse são diferentes e não coincidem com os focos, que neste caso ficam internos a  $\mathcal{M}$ -Elipse.

### 3.1.2 $\mathcal{M}$ -Elipse com centro na origem e reta focal no eixo $OY$ .

Seja  $\mathcal{E}_M(F_1, F_2)$  a  $\mathcal{M}$ -Elipse de centro na origem e com focos  $F_1(0, -c)$  e  $F_2(0, c)$ . Usando a Equação (3.1), temos que  $P(x, y) \in \mathcal{M}^2$  pertence a  $\mathcal{E}_M(F_1, F_2)$  se, e somente

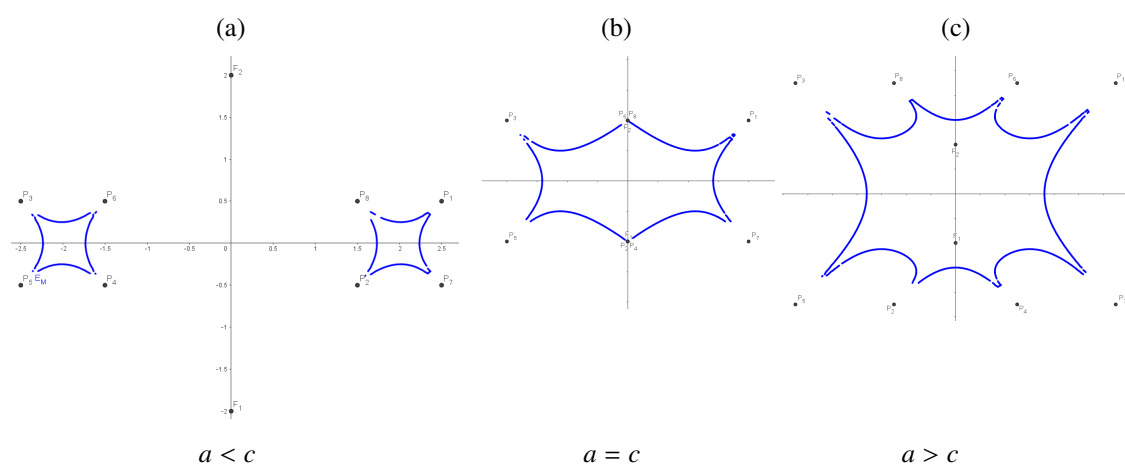
Figura 8: Traço da  $\mathcal{M}$ -Elipse para  $a = 4$ 

Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

se, satisfaz

$$\sqrt{|x^2 - (y + c)^2|} + \sqrt{|x^2 - (y - c)^2|} = 2a. \quad (3.8)$$

Usando o software Geogebra é possível esboçar a curva cuja equação é (3.8). Na Figura 9, por exemplo construímos os traços de três curvas usando parâmetros  $a < c$ ,  $a = c$  e  $a > c$ .

Figura 9:  $\mathcal{M}$ -Elipse com reta focal no eixo  $OY$ .

No link (<https://www.geogebra.org/calculator/fzhjhb95>) encontra-se uma animação feita no Geogebra online que nos permite visualizar a evolução da curva de maneira continuada desde o caso em que  $a < c$ , passando por  $a = c$  e chegando até  $a > c$ .

Assim como na subsecção anterior, para encontrarmos as expressões das coordenadas dos pontos delimitantes, faremos as intersecções destas referidas curvas com os cones de luz centrados nos respectivos focos.

### 3.1.2.1 Pontos delimitantes e equações reduzidas de $\mathcal{E}_M(F_1, F_2)$ .

Suponha que  $P \in \mathcal{E}_M(F_1, F_2)$  também pertença ao cone de luz  $C_L(F_1)$ . Então, a partir da Definição 4 e da Equação (3.1) temos que  $\sqrt{|x^2 - (y + c)^2|} = 0$  e, consequentemente,  $\sqrt{|x^2 - (y - c)^2|} = 2a$ . De  $\sqrt{|x^2 - (y + c)^2|} = 0$  segue que  $P$  deve pertencer ou à reta  $x = y + c$  ou à reta  $x = -y - c$ . E de  $\sqrt{|x^2 - (y - c)^2|} = 2a$  obtemos que  $P$  deve pertencer a um dos  $\mathcal{M}$ -círculos definidos respectivamente pelas expressões  $x^2 - (y - c)^2 = 4a^2$  e  $x^2 - (y - c)^2 = -4a^2$ . Analisemos, portanto, os quatro casos a seguir.

**Primeiro Caso:** Admita que o ponto  $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E}_M(F_1, F_2)$  pertença à reta  $x = y + c$  e à hipérbole euclidiana  $x^2 - (y - c)^2 = 4a^2$ . Então, substituindo  $x_1 = y_1 + c$  em  $x_1^2 - (y_1 - c)^2 = 4a^2$ , obtemos  $y_1 = \frac{a^2}{c}$  e, consequentemente,  $x_1 = \frac{a^2 + c^2}{c}$ .

**Segundo Caso:** Admita que o ponto  $P_2(x_2, y_2) \in \mathcal{E}_M(F_1, F_2)$  pertença à reta  $x = y + c$  e à hipérbole euclidiana  $x^2 - (y - c)^2 = -4a^2$ . Então, substituindo  $x_2 = y_2 + c$  em  $x_2^2 - (y_2 - c)^2 = -4a^2$ , obtemos  $y_2 = -\frac{a^2}{c}$  e, consequentemente,  $x_2 = -\frac{a^2 - c^2}{c}$ .

**Terceiro Caso:** Admita que o ponto  $P_3(x_3, y_3) \in \mathcal{E}_M(F_1, F_2)$  pertença à reta  $x = -y - c$  e à hipérbole euclidiana  $x^2 - (y - c)^2 = 4a^2$ . Então, substituindo  $x_3 = -y_3 - c$  em  $x_3^2 - (y_3 - c)^2 = 4a^2$ , obtemos  $y_3 = \frac{a^2}{c}$  e, consequentemente,  $x_3 = -\frac{a^2 + c^2}{c}$ .

**Quarto Caso:** Admita que o ponto  $P_4(x_4, y_4) \in \mathcal{E}_M(F_1, F_2)$  pertença à reta  $x = -y - c$  e à hipérbole euclidiana  $x^2 - (y - c)^2 = -4a^2$ . Então, substituindo  $x_4 = -y_4 - c$  em  $x_4^2 - (y_4 - c)^2 = -4a^2$ , obtemos  $y_4 = -\frac{a^2}{c}$  e, consequentemente,  $x_4 = \frac{a^2 - c^2}{c}$ .

Obtemos, portanto, os pontos

$$\begin{array}{ll} P_1 \left( \frac{a^2 + c^2}{c}, \frac{a^2}{c} \right), & P_2 \left( -\frac{a^2 - c^2}{c}, -\frac{a^2}{c} \right), \\ P_3 \left( -\frac{a^2 + c^2}{c}, \frac{a^2}{c} \right), & P_4 \left( \frac{a^2 - c^2}{c}, -\frac{a^2}{c} \right). \end{array}$$

Analogamente, se  $P(x, y)$  é um ponto de  $\mathcal{E}_M$  que também pertence ao Cone de Luz  $C_L(F_2)$ , então  $P$  satisfaz simultaneamente  $\sqrt{|x^2 - (y + c)^2|} = 2a$  e  $\sqrt{|x^2 - (y - c)^2|} = 0$ . De  $\sqrt{|x^2 - (y + c)^2|} = 2a$ , segue que  $P$  deve pertencer a

um dos  $\mathcal{M}$ -círculos cujas equações são, respectivamente  $x^2 - (y + c)^2 = 4a^2$  e  $x^2 - (y + c)^2 = -4a^2$ . E, a partir da expressão  $\sqrt{|(x - c)^2 - y^2|} = 0$ ,  $P$  deve pertencer a uma das retas  $x = y - c$  ou  $x = -y + c$ .

Procedendo como anteriormente, encontramos os pontos

$$\begin{array}{ll} P_5 \left( -\frac{a^2 + c^2}{c}, -\frac{a^2}{c} \right), & P_6 \left( \frac{a^2 + c^2}{c}, -\frac{a^2}{c} \right), \\ P_7 \left( \frac{a^2 - c^2}{c}, \frac{a^2}{c} \right), & P_8 \left( -\frac{a^2 - c^2}{c}, \frac{a^2}{c} \right). \end{array}$$

Também obtemos as equações reduzidas da referida  $\mathcal{M}$ -Elipse de forma análoga a encontrada quando os focos estavam sobre o eixo  $OX$ , a saber:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2) : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 + c^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \\ \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2 - c^2} = 1. \\ (y^2 - x^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) - 8a^2cy = -c^4 - 4a^4 \\ (x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + 8a^2cy = -c^4 - 4a^4 \end{cases}$$

Agora trataremos de um exemplo para o caso abordado. Isto é, para uma  $\mathcal{M}$ -Elipse, centrada na origem, e focos sobre o eixo  $Y$ .

**Exemplo 2:** Encontre a  $\mathcal{M}$ -elipse com focos  $F_1(0, -2)$  e  $F_2(0, 2)$  para cada um dos valores de  $a$  seguir.

- (a)  $a = 1$ .      (b)  $a = 2$ .      (c)  $a = 3$ .

**Solução.**

- (a) Utilizando o mesmo procedimento do Exemplo 1, encontramos os pontos delimitantes

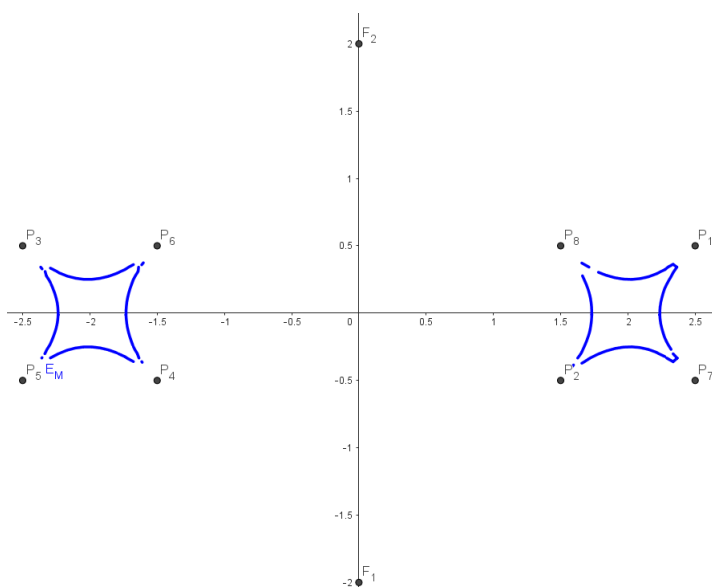
$$\begin{array}{llll} P_1 \left( \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right), & P_2 \left( \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right), & P_3 \left( -\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right), & P_4 \left( -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right), \\ P_5 \left( -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right), & P_6 \left( -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right), & P_7 \left( \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right), & P_8 \left( \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right). \end{array}$$

Também, para os valores  $a = 1$  e  $c = 2$  obtemos as seguintes equações reduzidas:

$$\mathcal{E}_M : \begin{cases} \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{1} = 1 \\ \frac{y^2}{1} + \frac{x^2}{3} = 1 \\ (y^2 - x^2)^2 + 8(y^2 - x^2) - 16y + 20 = 0 \\ (x^2 - y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 16y + 20 = 0 \end{cases}$$

O traço desta  $\mathcal{M}$ -Elipse é dado na Figura 10.

Figura 10:  $\mathcal{M}$ -Elipse com focos em  $OY$  e parâmetros  $a = 1$ ,  $c = 2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Perceba que os focos são externos à  $\mathcal{M}$ -Elipse. Isto ocorre sempre que  $a < c$ .

(b) Para  $a = c = 2$  encontramos os pontos delimitantes, que neste caso são apenas seis, são eles:

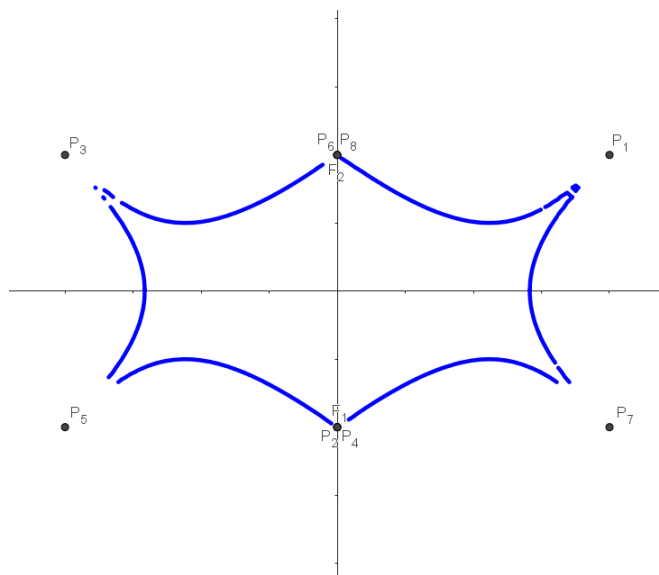
$$\begin{aligned} P_1(4, 2), \quad P_2 = P_4 = (0, -2), \quad P_3(-4, 2) \\ P_5(-4, -2), \quad P_6 = P_8 = (0, 2), \quad P_7(4, -2). \end{aligned}$$

Também obtemos as equações reduzidas:

$$\mathcal{E}_M : \begin{cases} \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ (y^2 - x^2)^2 + 8(y^2 - x^2) - 64y + 80 = 0 \\ (x^2 - y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 64y + 80 = 0 \end{cases}$$

O traço desta  $\mathcal{M}$ -Elipse é dado na Figura 11.

Figura 11:  $\mathcal{M}$ -Elipse com focos em  $OY$  e parâmetros  $a = c = 2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Perceba que os focos coincidem com dois dos pontos delimitantes da  $\mathcal{M}$ -Elipse. Isto ocorre sempre que  $a = c$ .

(c) Para este caso os pontos delimitantes são

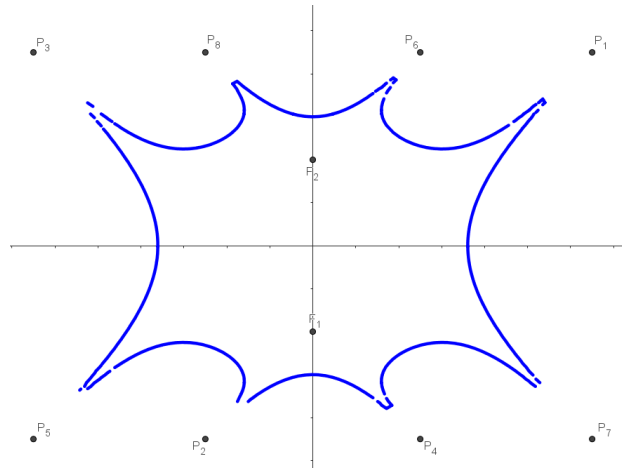
$$\begin{array}{cccc}
 P_1\left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right), & P_2\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right), & P_3\left(-\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right), & P_4\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right), \\
 P_5\left(-\frac{13}{2}, -\frac{9}{2}\right), & P_6\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right), & P_7\left(\frac{13}{2}, -\frac{9}{2}\right), & P_8\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right).
 \end{array}$$

Também encontramos as equações reduzidas:

$$\mathcal{E}_M : \begin{cases} \frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{5} = 1 \\ (y^2 - x^2)^2 + 8(y^2 - x^2) - 144y = -340 \\ (x^2 - y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 144y = -340 \end{cases}$$

A Figura 12 mostra o traço desta  $\mathcal{M}$ -Elipse :

Figura 12:  $\mathcal{M}$ -Elipse com focos no eixo  $OY$  e parâmetros  $a = 3$  e  $c = 2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

## 3.2 Equações Gerais da $\mathcal{M}$ -Elipse

Nesta seção deduziremos as equações gerais de uma  $\mathcal{M}$ -Elipse  $\mathcal{E}_M$ , cujos focos  $F_1(z_1, z_2)$  e  $F_2(w_1, w_2)$  são dois pontos arbitrários do plano de Minkowski. Voltaremos, portanto, à Expressão (3.1) para, a partir dela, alcançarmos nosso objetivo. Iniciamos encontrando os pontos delimitantes de  $\mathcal{E}_M$  e, após isso, deduziremos suas equações gerais.

### 3.2.1 Pontos delimitantes de $\mathcal{E}_M$

Seja  $P(x, y)$  um ponto de interseção de  $\mathcal{E}_M$  com  $C_L(F_1)$ . Então, a partir da Definição 4 e de (3.1), temos que  $\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 0$  e, conseqüentemente,  $\sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 2a$ . De  $\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 0$  segue que  $P$  deve pertencer à reta  $x = y + z_1 - z_2$  ou à reta  $x = -y + z_1 + z_2$ . E de  $\sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 2a$ , segue que  $P$  deve pertencer a um dos ramos do  $\mathcal{M}$ -círculo de equação  $(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2 = \pm 4a^2$ . Procedendo como nas seções anteriores, analisaremos os casos possíveis.

**Primeiro Caso:** Assuma que o ponto  $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E}_M$  pertença à reta  $x = y + z_1 - z_2$  e à hipérbole  $(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2 = 4a^2$ . Então as coordenadas de  $P_1$  satisfazem

$$x_1 = y_1 + z_1 - z_2 \quad (3.9)$$

e

$$(x_1 - w_1)^2 - (y_1 - w_2)^2 = 4a^2. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.9) em (3.10) obtemos

$$\begin{aligned} 4a^2 &= (y_1 + z_1 - z_2 - w_1)^2 - (y_1 - w_2)^2 \\ &= y_1^2 + 2y_1(z_1 - z_2 - w_1) + (z_1 - z_2 - w_1)^2 - y_1^2 + 2y_1w_2 - w_2^2, \end{aligned}$$

o que implica em

$$2y_1(w_2 - w_1 + z_1 - z_2) = 4a^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2.$$

Assim encontramos

$$y_1 = \frac{4a^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2(w_2 - w_1 + z_1 - z_2)}$$

e, conseqüentemente,

$$x_1 = \frac{4a^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2(w_2 - w_1 + z_1 - z_2)} + z_1 - z_2.$$

**Segundo Caso:** Assuma que  $P_2(x_2, y_2) \in \mathcal{E}_M$  pertença à reta  $x = -y + z_1 + z_2$  e à hipérbole euclidiana  $(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2 = 4a^2$ . Procedendo como no caso anterior, encontramos

$$y_2 = \frac{4a^2 + w_2^2 - (z_1 + z_2 - w_1)^2}{2(w_1 + w_2 - z_1 - z_2)}$$

e

$$x_2 = \frac{4a^2 + w_2^2 - (z_1 + z_2 - w_1)^2}{2(z_1 + z_2 - w_1 - w_2)} + z_1 + z_2.$$

**Terceiro Caso:** Suponha que  $P_3(x_3, y_3) \in \mathcal{E}_M$  também pertença à reta  $x = y + z_1 - z_2$  e à hipérbole  $(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2 = 4a^2$ . Então encontramos

$$y_3 = \frac{4a^2 - w_2^2 + (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2(w_1 - w_2 + z_2 - z_1)}$$

e

$$x_3 = \frac{4a^2 - w_2^2 + (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2(w_1 - w_2 + z_2 - z_1)} + z_1 - z_2.$$



**Quarto Caso:** Suponha que  $P_4(x_4, y_4) \in \mathcal{E}_M$  também pertença à reta  $x = -y + z_1 + z_2$  e à hipérbole  $(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2 = 4a^2$ . Neste caso, obtemos

$$y_4 = \frac{4a^2 - w_2^2 + (z_1 + z_2 - w_1)^2}{2(z_1 + z_2 - w_1 - w_2)}$$

e

$$x_4 = \frac{4a^2 - w_2^2 + (z_1 + z_2 - w_1)^2}{2(w_1 + w_2 - z_1 - z_2)} + z_1 + z_2.$$

De maneira totalmente análoga ao que foi feito anteriormente, suponhamos que  $P(x, y)$  é um ponto de interseção da  $\mathcal{M}$ -elipse  $\mathcal{E}_M$  com o cone de luz  $C_L(F_2)$ . Então as coordenadas de  $P$  satisfazem simultaneamente

$$\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 2a$$

e

$$\sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 0.$$

De  $\sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 0$  segue que  $P$  deve pertencer à reta  $x = y + w_1 - w_2$  ou à reta  $x = -y + w_1 + w_2$ . E de  $\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 2a$ , segue que  $P$  deve pertencer a um dos ramos do  $\mathcal{M}$ -círculo de equação  $(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2 = \pm 4a^2$ . Temos então mais quatro casos a considerar, e são dados a seguir.

**Quinto Caso:** Assuma que  $P_5(x_5, y_5) \in \mathcal{E}_M$  também pertença à reta  $x = y + w_1 - w_2$  e à hipérbole  $(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2 = 4a^2$ . Então as coordenadas de  $P_5$  satisfazem

$$x_5 = y_5 + w_1 - w_2$$

e

$$(x_5 - z_1)^2 - (y_5 - z_2)^2 = 4a^2.$$

Substituindo  $x_5 = y_5 + w_1 - w_2$  na equação  $(x_5 - z_1)^2 - (y_5 - z_2)^2 = 4a^2$ . Obtemos

$$y_5 = \frac{4a^2 + z_2^2 - (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2[z_2 - z_1 + w_1 - w_2]}$$

e, conseqüentemente

$$x_5 = \frac{4a^2 + z_2^2 - (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2[z_2 - z_1 + w_1 - w_2]} + w_1 - w_2.$$

**Sexto Caso:** Para  $P_6(x_6, y_6) \in \mathcal{E}_M$  pertencente à reta  $x = -y + w_1 + w_2$  e à hipérbole  $(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2 = 4a^2$ , encontramos

$$y_6 = \frac{4a^2 + z_2^2 - (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2[z_1 + z_2 - w_1 - w_2]}$$

e

$$x_6 = \frac{4a^2 + z_2^2 - (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2[w_1 + w_2 - z_1 - z_2]} + w_1 + w_2.$$

**Sétimo Caso:** Suponha que  $P_7(x_7, y_7) \in \mathcal{E}_M$  também pertença à reta  $x = y + w_1 - w_2$  e a hipérbole euclidiana  $(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2 = 4a^2$ . Então

$$x_7 = y_7 + w_1 - w_2$$

e

$$(y_7 - z_2)^2 - (x_7 - z_1)^2 = 4a^2.$$

Substituindo  $x_7 = y_7 + w_1 - w_2$  na equação  $(y_7 - z_2)^2 - (x_7 - z_1)^2 = 4a^2$  obtemos que

$$y_7 = \frac{4a^2 - z_2^2 + (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2[z_1 - z_2 - w_1 + w_2]}$$

e

$$x_7 = \frac{4a^2 - z_2^2 + (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2[z_1 - z_2 - w_1 + w_2]} + w_1 - w_2.$$

**Oitavo Caso:** Para  $P_8(x_8, y_8) \in \mathcal{E}_M$  pertencente à reta  $x = -y + w_1 + w_2$  e à hipérbole euclidiana  $(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2 = 4a^2$ , obtemos

$$y_8 = \frac{4a^2 - z_2^2 + (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2[w_1 + w_2 - z_1 - z_2]}.$$

e

$$x_8 = \frac{4a^2 - z_2^2 + (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2[z_1 + z_2 - w_1 - w_2]} + w_1 + w_2.$$

Uma vez encontrados os pontos delimitantes da  $\mathcal{M}$ -Elipse, passaremos agora a deduzir suas equações gerais.

### 3.2.2 Equações gerais da $\mathcal{M}$ -Elipse

Seja  $P(x, y) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  um ponto não delimitante. Então as coordenadas de  $P$  satisfazem simultaneamente as seguintes desigualdades  $0 < \sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} < 2a$  e  $0 < \sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} < 2a$ , obedecendo (3.1). Assim, temos os seguintes casos a considerar:

- 1º Caso -  $|x - z_1| > |y - z_2|$  e  $|x - w_1| > |y - w_2|$ ;
- 2º Caso -  $|x - z_1| < |y - z_2|$  e  $|x - w_1| < |y - w_2|$ ;
- 3º Caso -  $|x - z_1| > |y - z_2|$  e  $|x - w_1| < |y - w_2|$ ;
- 4º Caso -  $|x - z_1| < |y - z_2|$  e  $|x - w_1| > |y - w_2|$ .

Usaremos  $2a = k$  para que os cálculos não fiquem tão extensos.

**1º Caso** - Se  $|x - z_1| > |y - z_2|$  e  $|x - w_1| > |y - w_2|$ , a Equação (3.1) é transformada em

$$\sqrt{(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2} + \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2} = k.$$

Segue daí que

$$\sqrt{(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2} = k - \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2}.$$

Ao elevar ao quadrado ambos os lados da igualdade, obtemos

$$(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2 = k^2 - 2k \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2} + (x - w_1)^2 - (y - w_2)^2.$$

Fazendo algumas manipulações algébricas e reorganizando as parcelas, chegamos na equação

$$(2x - z_1 - w_1)(w_1 - z_1) + (2y - w_2 - z_2)(z_2 - w_2) - k^2 = 2k \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2}.$$

Elevando novamente ambos os lados da igualdade ao quadrado, teremos

$$((2x - w_1 - z_1)(w_1 - z_1) + (2y - z_2 - w_2)(z_2 - w_2) - k^2)^2 = 4k^2((x - w_1)^2 - (y - w_2)^2). \quad (3.11)$$

Desenvolvendo o 1º membro da Equação (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} & ((2x - w_1 - z_1)(w_1 - z_1) + (2y - z_2 - w_2)(z_2 - w_2) - k^2)^2 = \\ & 4x^2(w_1 - z_1)^2 - 4x(w_1 - z_1)(w_1^2 - z_1^2 + z_2^2 - w_2^2 + k^2) + \\ & + 4y^2(z_2 - w_2)^2 - 4y(z_2 - w_2)(w_1^2 - z_1^2 + z_2^2 - w_2^2 + k^2) + \\ & + 8xy(w_1 - z_1)(z_2 - w_2) + ((w_1^2 - z_1^2) + (z_2^2 - w_2^2))^2 + \\ & + 2k^2(w_1^2 - z_1^2 + z_2^2 - w_2^2) + k^4. \end{aligned}$$

Agora desenvolvendo o segundo membro da Equação (3.11), temos

$$\begin{aligned} 4k^2((x - w_1)^2 - (y - w_2)^2) &= 4k^2(x^2 - 2xw_1 + w_1^2 - y^2 + 2yw_2 - w_2^2) \\ &= 4k^2x^2 - 8k^2w_1x + 4k^2w_1^2 - 4k^2y^2 + 8k^2w_2y - 4k^2w_2^2. \end{aligned}$$

Assim, igualando as expressões e reorganizando os termos, teremos

$$\begin{aligned} & 4x^2((w_1 - z_1)^2 - k^2) + 8xy(w_1 - z_1)(z_2 - w_2) + 4y^2((z_2 - w_2)^2 + k^2) \\ & + 4x((w_1 - z_1)(z_1^2 - w_1^2 + w_2^2 - z_2^2 - k^2) + 2k^2w_1) \\ & + 4y((z_2 - w_2)(z_1^2 - w_1^2 + w_2^2 - z_2^2 - k^2) - 2k^2w_2) \\ & + (z_1^2 - w_1^2 + w_2^2 - z_2^2 - k^2)^2 - 4k^2w_1^2 + 4k^2w_2^2 = 0. \end{aligned}$$

com  $k = 2a$ .

**2º Caso** - Se  $|x - z_1| < |y - z_2|$  e  $|x - w_1| < |y - w_2|$ . Daí, a Equação (3.1) é transformada em

$$\sqrt{(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2} + \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2} = k,$$

Assim obtemos

$$\sqrt{(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2} = k - \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2}.$$

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado e reorganizando os termos, encontramos

$$(y - z_2)^2 - (y - w_2)^2 + (x - w_1)^2 - (x - z_1)^2 - k^2 = -2k\sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2},$$

e assim,

$$(2y - z_2 - w_2)(w_2 - z_2) + (2x - w_1 - z_1)(z_1 - w_1) - k^2 = -2k \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2}.$$

Elevando novamente ambos os lados da última igualdade ao quadrado,

$$((2y - z_2 - w_2)(w_2 - z_2) + (2x - w_1 - z_1)(z_1 - w_1) - k^2)^2 = 4k^2((y - w_2)^2 - (x - w_1)^2). \quad (3.12)$$

Ao desenvolver ambos os lados da igualdade (3.12), encontramos que

$$\begin{aligned} &4y^2((w_2 - z_2)^2 - k^2) + 8xy(w_2 - z_2)(z_1 - w_1) + 4x^2((z_1 - w_1)^2 + k^2) \\ &\quad + 4y((w_2 - z_2)(w_1^2 - w_2^2 + z_2^2 - z_1^2 - k^2) + 2k^2w_2) \\ &\quad + 4x((z_1 - w_1)(w_1^2 - w_2^2 + z_2^2 - z_1^2 - k^2) - 2k^2w_1) \\ &\quad + (w_1^2 - w_2^2 + z_2^2 - z_1^2 - k^2)^2 - 4k^2w_2^2 + 4k^2w_1^2 = 0. \end{aligned}$$

**3º Caso** - Se  $|x - z_1| > |y - z_2|$  e  $|x - w_1| < |y - w_2|$ , a Equação (3.1) é transformada em

$$\sqrt{(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2} + \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2} = k$$

Assim temos que

$$\sqrt{(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2} = k - \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade, e manipulando, segue que

$$2x^2 - 2y^2 - 2x(z_1 + w_1) + 2y(z_2 + w_2) + z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2 = 2k \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2}$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os lados desta igualdade e desenvolvendo-os, chegamos a

$$\begin{aligned}
& 4x^4 - 8x^2y^2 + 4y^4 - 8x^3(z_1 + w_1) + 8x^2y(z_2 + w_2) + 8y^2x(z_1 + w_1) \\
& - 8y^3(z_2 + w_2) + 4x^2((z_1 + w_1)^2 + z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2) \\
& - 8xy(z_1 + w_1)(z_2 + w_2) + 4y^2((z_2 + w_2)^2 - (z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2) - k^2) \\
& - 4x((z_1 + w_1)(z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2) + 2k^2w_1) \\
& + 4y((z_2 + w_2)(z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2) + 2k^2w_2) \\
& + (z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2)^2 - 4k^2w_2^2 + 4k^2w_1^2 = 0.
\end{aligned}$$

**4º Caso** - Se  $|x - z_1| < |y - z_2|$  e  $|x - w_1| > |y - w_2|$ , a Equação (3.1) é transformada em

$$\sqrt{(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2} + \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2} = k$$

o que implica em

$$\sqrt{(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2} = k - \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2}.$$

Usando o mesmo procedimento dos casos anteriores, encontramos que

$$\begin{aligned}
& 4y^4 - 8x^2y^2 + 4x^4 - 8y^3(z_2 + w_2) + 8y^2x(z_1 + w_1) + 8x^2y(z_2 + w_2) - 8x^3(z_1 + w_1) \\
& + 4y^2((z_2 + w_2)^2 + z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2) - 8xy(z_2 + w_2)(z_1 + w_1) \\
& + 4x^2((z_1 + w_1)^2 - (z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2 - k^2) - k^2) \\
& - 4y((z_2 + w_2)(z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2 - k^2) + 2k^2w_2) \\
& + 4x((z_1 + w_1)(z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2 - k^2) + 2k^2w_1) \\
& + (z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2 - k^2)^2 - 4k^2w_1^2 + 4k^2w_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

A partir destes casos encontramos todas as expressões que compõem as equações gerais de uma  $\mathcal{M}$ -Elipse no plano de Minkowski.

No exemplo a seguir, determinamos as equações e esboçamos a  $\mathcal{M}$ -elipse para o caso particular em que um de seus focos está contido no cone de luz do outro.

**Exemplo 3:** Determine a  $\mathcal{M}$ -elipse de focos  $F_1 = (1, 1)$  e  $F_2 = (0, 2)$ , com  $a = 2$ .

**Solução.** Substituindo as coordenadas dos focos  $F_1, F_2$  e o valor de  $a = 2$  nas

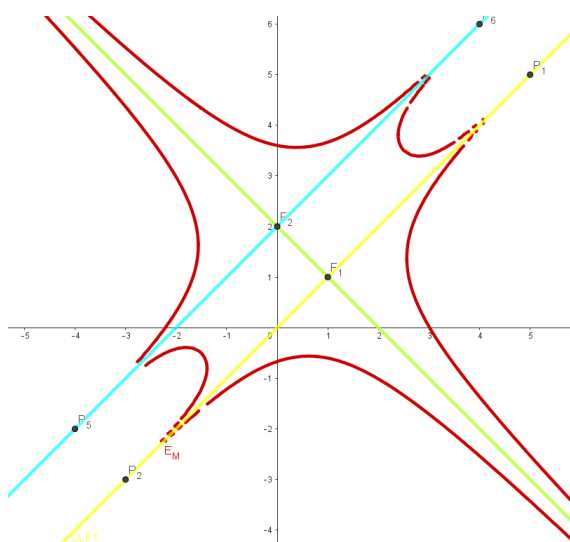
equações encontradas nos quatro casos gerais, obtemos as equações:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} : \begin{cases} -60x^2 + 8xy + 68y^2 + 48x - 208y + 400 = 0 \\ -60y^2 + 8xy + 68x^2 + 176y - 80x + 144 = 0 \\ 4x^4 - 8x^2y^2 + 4y^4 - 8x^3 + 24x^2y + 8y^2x + \\ -24y^3 - 12x^2 - 24xy + 52y^2 + 80x + 16y + 144 = 0 \\ 4y^4 - 8x^2y^2 + 4x^4 - 24y^3 + 8y^2x + 24x^2y + \\ -8x^3 + 52y^2 - 24xy - 12x^2 - 112y - 48x + 400 = 0 \end{cases}$$

Usando o software Geogebra podemos esboçar a referida  $\mathcal{M}$ -Elipse, como mostra a Figura 13.

$\mathcal{M}$ -Elipse.

Figura 13:  $\mathcal{M}$ -Elipse de focos:  $F_1(1, 1)$ ,  $F_2(0, 2)$  e  $a = 2$

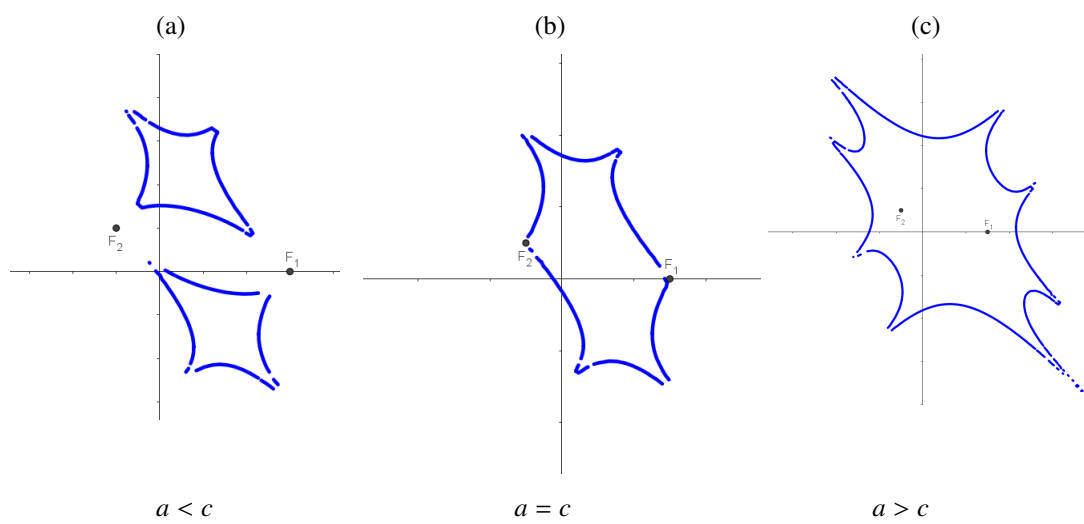


Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Em geral, se os focos da  $\mathcal{M}$ -Elipse estiverem na mesma reta tipo-luz, teremos seis pontos delimitantes, sendo dois deles pontos no infinito.

Para concluir este capítulo, destacamos que o traço da  $\mathcal{M}$ -Elipse pode tomar formas variadas ao se fixar seus focos de maneira arbitrária. Na figura abaixo, por exemplo, temos alguns casos específicos.

Figura 14:  $\mathcal{M}$ -Elipses de focos arbitrários e parâmetros  $a < c$ ,  $a = c$  e  $a > c$ .





## 4 $\mathcal{M}$ -HIPÉRBOLE

Neste capítulo estudaremos sobre a hipérbole no plano de Minkowski, também chamada de  $\mathcal{M}$ -hipérbole. Sua definição, como veremos, é bem semelhante àquela que conhecemos no plano euclidiano. Assim como no capítulo anterior, nosso objetivo aqui será primeiramente deduzir as equações reduzidas da  $\mathcal{M}$ -hipérbole e, após isso, conseguir deduzir suas equações gerais. Veremos, por fim que há uma ligação muito forte entre o traço de uma  $\mathcal{M}$ -hipérbole com o da  $\mathcal{M}$ -elipse.

Em Shonoda (2015) encontramos a seguinte definição.

**Definição 7.** *Uma  $\mathcal{M}$ -Hipérbole de focos  $F_1 = (z_1, z_2)$  e  $F_2 = (w_1, w_2)$  é o conjunto dos pontos  $P(x, y)$  do plano de Minkowski cuja diferença em valor absoluto das  $\mathcal{M}$ -distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual uma constante  $2a > 0$ .*

Algebricamente,

$$\mathcal{H}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2) = \{P \in \mathcal{M}^2; |d_{\mathcal{M}}(P, F_1) - d_{\mathcal{M}}(P, F_2)| = 2a, a > 0\}.$$

Em coordenadas, um ponto  $P(x, y)$  pertence à  $\mathcal{M}$ -hipérbole  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$  se, e somente se, suas coordenadas satisfazem

$$\left| \sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} - \sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} \right| = 2a. \quad (4.1)$$

A reta que contém os focos da  $\mathcal{M}$ -hipérbole é denominada reta focal; o ponto médio do seguimento cujas extremidades são os focos  $F_1$  e  $F_2$  é chamado o centro da  $\mathcal{M}$ -hipérbole. Por fim, diferentemente do caso euclidiano, em que o número real  $a$  é obrigado a ser menor que  $c$ , na definição de  $\mathcal{M}$ -hipérbole esta exigência não é necessária, podendo  $a$  assumir valores menores, igual ou maiores que  $c$ . Estudaremos cada um destes casos nas próximas seções e subseções.

## 4.1 Equações Reduzidas da $\mathcal{M}$ -Hipérbole

Nesta seção estudaremos a Equação (4.1) do ponto de vista analítico, tomando inicialmente a  $\mathcal{M}$ -hipérbole, de centro na origem e focos sobre os eixos coordenados.

### 4.1.1 $\mathcal{M}$ -Hipérbole com reta focal no eixo $OX$ .

Seja  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$  a  $\mathcal{M}$ -hipérbole com focos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ . A partir da Equação (4.1), um ponto  $P(x, y)$  pertence a  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$  se, e somente se, satisfaz

$$\left| \sqrt{|(x+c)^2 - y^2|} - \sqrt{|(x-c)^2 - y^2|} \right| = 2a. \quad (4.2)$$

A fim de esboçar seu traço, iniciamos encontrando os seus pontos de interseção com os cones de luz  $C_L(F_1)$  e  $C_L(F_2)$ , também denominados de pontos delimitantes da  $\mathcal{M}$ -hipérbole.

#### 4.1.1.1 Pontos delimitantes de $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$

Seja  $P(x, y)$  um ponto de interseção de  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$  com o cone de luz  $C_L(F_1)$ . Então, temos na Equação (4.2), que  $\sqrt{|(x+c)^2 - y^2|} = 0$  e, conseqüentemente,  $\sqrt{|(x-c)^2 - y^2|} = 2a$ . De  $\sqrt{|(x+c)^2 - y^2|} = 0$  obtemos que  $P$  pertence à reta  $y = x + c$  ou à reta  $y = -x - c$ . E, a partir de  $\sqrt{|(x-c)^2 - y^2|} = 2a$ , obtemos que  $P$  também pertence a uma das hipérboles euclidianas  $(x-c)^2 - y^2 = 4a^2$  ou  $(x-c)^2 - y^2 = -4a^2$ .

Temos então os seguintes casos a considerar.

**1º Caso:** Assuma que  $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}}$  também pertença à reta  $y = x + c$  e à hipérbole euclidiana  $(x-c)^2 - y^2 = 4a^2$ . Substituindo  $y_1 = x_1 + c$  na equação  $(x_1 - c)^2 - y_1^2 = 4a^2$ , obtemos  $x_1 = -\frac{a^2}{c}$  e  $y_1 = -\frac{a^2 - c^2}{c}$ .

**2º Caso:** Se  $P_2(x_2, y_2) \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ , também pertence à reta  $y = x + c$  e à hipérbole euclidiana  $(x-c)^2 - y^2 = -4a^2$ , substituindo  $y_2 = x_2 + c$  na equação  $(x_2 - c)^2 - y_2^2 = -4a^2$ , obtemos  $x_2 = \frac{a^2}{c}$  e  $y_2 = \frac{a^2 + c^2}{c}$ .

**3º Caso:** Suponha que  $P_3(x_3, y_3) \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ , pertença à reta  $y = -x - c$  e à hipérbole euclidiana  $(x_1 - c)^2 - y_1^2 = 4a^2$ . Substituindo  $y_3 = -x_3 - c$  na equação  $(x_3 - c)^2 - y_3^2 = 4a^2$ , encontramos,  $x_3 = -\frac{a^2}{c}$  e  $y_3 = \frac{a^2 - c^2}{c}$ .

**4º Caso:** Por fim, se  $P_4(x_4, y_4) \in \mathcal{H}_M$  pertence à reta  $y = -x - c$  e à hipérbole euclidiana  $(x_1 - c)^2 - y_1^2 = -4a^2$ , substituindo  $y_4 = -x_4 - c$  na equação  $(x_4 - c)^2 - y_4^2 = -4a^2$ , encontramos  $x_4 = \frac{a^2}{c}$  e  $y_4 = -\frac{a^2 + c^2}{c}$ .

Obtemos, portanto, os pontos

$$\begin{array}{ll} P_1\left(-\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2 - c^2}{c}\right), & P_2\left(\frac{a^2}{c}, \frac{a^2 + c^2}{c}\right), \\ P_3\left(-\frac{a^2}{c}, \frac{a^2 - c^2}{c}\right), & P_4\left(\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2 + c^2}{c}\right). \end{array}$$

Seja agora  $P(x, y)$  um ponto de interseção de  $\mathcal{H}_M(F_1, F_2)$  com o cone de luz  $C_L(F_2)$ . Então as coordenadas de  $P$  satisfazem  $\sqrt{|(x - c)^2 - y^2|} = 0$  e  $\sqrt{|(x + c)^2 - y^2|} = 2a$  em (4.2). Procedendo como nos casos anteriores encontramos:

$$\begin{array}{ll} P_5\left(\frac{a^2}{c}, \frac{a^2 - c^2}{c}\right), & P_6\left(-\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2 + c^2}{c}\right), \\ P_7\left(\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2 - c^2}{c}\right), & P_8\left(-\frac{a^2}{c}, \frac{a^2 + c^2}{c}\right). \end{array}$$

Observe que os pontos delimitantes da  $\mathcal{M}$ -hipérbole são os mesmos da  $\mathcal{M}$ -elipse vistos no capítulo anterior. A fim de deduzir as equações que compõem a  $\mathcal{M}$ -hipérbole, verificaremos a expressão (4.2) para o casos em que os pontos não são pontos delimitantes.

#### 4.1.1.2 Equações reduzidas de $\mathcal{H}_M(F_1, F_2)$

Seja  $P(x, y) \in \mathcal{H}_M$  um ponto não delimitante. Então suas coordenadas satisfazem a Equação (4.2) obedecendo às seguintes restrições:

$$0 < \sqrt{|(x + c)^2 - y^2|} < 2a \quad e \quad 0 < \sqrt{|(x - c)^2 - y^2|} < 2a.$$

Estas desigualdades nos levam a estudar os casos listados abaixo.

- 1º Caso:  $|x + c| > |y|$  ,  $|x - c| > |y|$  e  $|x + c| > |x - c|$  ou  $|x + c| > |y|$  ,  $|x - c| > |y|$  e  $|x + c| < |x - c|$ .
- 2º Caso:  $|x + c| < |y|$  ,  $|x - c| < |y|$  e  $|x + c| > |x - c|$  ou  $|x + c| < |y|$  ,  $|x - c| < |y|$  e  $|x + c| < |x - c|$ .

- 3º Caso:  $|x + c| > |y|$  ,  $|x - c| < |y|$  e  $|x + c| > |x - c|$  ou  $|x + c| > |y|$  ,  $|x - c| < |y|$  e  $|x + c| < |x - c|$ .
- 4º Caso:  $|x + c| < |y|$  ,  $|x - c| > |y|$  e  $|x + c| > |x - c|$  ou  $|x + c| < |y|$  ,  $|x - c| > |y|$  e  $|x + c| < |x - c|$ .

Passaremos agora a analisar cada um deles.

**1º Caso-** Se  $|x + c| > |y|$  e  $|x - c| > |y|$ , a Equação (4.2) se torna

$$\sqrt{(x + c)^2 - y^2} - \sqrt{(x - c)^2 - y^2} = \pm 2a,$$

Elevando ambos os lados desta igualdade ao quadrado, obtemos

$$\sqrt{((x + c)^2 - y^2)((x - c)^2 - y^2)} = x^2 + c^2 - y^2 - 2a^2.$$

Elevando novamente ambos os lados desta igualdade ao quadrado, obtemos que

$$\begin{aligned} ((x + c)^2 - y^2)((x - c)^2 - y^2) &= x^4 + 2x^2c^2 + c^4 - 2x^2y^2 - 4x^2a^2 \\ &\quad - 2c^2y^2 - 4c^2a^2 + y^4 + 4y^2a^2 + 4a^4. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo desta última igualdade chegamos à expressão

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2c^2 + a^2y^2 + a^4 = 0.$$

Ou seja,

$$(a^2 - c^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Dividindo toda a equação por  $a^2(a^2 - c^2)$  obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{4.3}$$

Observe que a Equação (4.3) acima, não está definida para  $a = \pm c$ .

**2º Caso-** Para  $|x + c| < |y|$  e  $|x - c| < |y|$ , a Equação (4.2) se torna

$$|\sqrt{y^2 - (x + c)^2} - \sqrt{y^2 - (x - c)^2}| = 2a.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta igualdade, obtemos a expressão

$$\sqrt{(y^2 - (x + c)^2)(y^2 - (x - c)^2)} = -2a^2 + y^2 - c^2 - x^2.$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os lados desta igualdade, obtemos

$$x^2(c^2 + a^2) - a^2y^2 = -a^2(c^2 + a^2).$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por  $-a^2(a^2 + c^2)$  encontramos

$$\frac{y^2}{a^2 + c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (4.4)$$

**3º Caso-** Quando  $|x + c| > |y|$  e  $|x - c| < |y|$ , a Equação (4.2) se torna

$$\sqrt{(x + c)^2 - y^2} - \sqrt{y^2 - (x - c)^2} = 2a$$

Elevando ambos os lados desta igualdade ao quadrado, obtemos a expressão

$$\sqrt{((x + c)^2 - y^2)(y^2 - (x - c)^2)} = -2a^2 + 4xc.$$

Elevando novamente ambos os lados da igualdade ao quadrado, encontramos

$$(x^2 - y^2)^2 + 2c^2(x^2 - y^2) - 8xa^2c = -c^4 - 4a^4. \quad (4.5)$$

**4º Caso-** Para  $|x + c| < |y|$  e  $|x - c| > |y|$ , a Equação (4.2) se torna.

$$\sqrt{y^2 - (x + c)^2} - \sqrt{(x - c)^2 - y^2} = 2a$$

Utilizando os mesmos artifícios dos casos anteriores, encontramos a equação

$$(y^2 - x^2)^2 - 2c^2(y^2 - x^2) + 8xa^2c = -c^4 - 4a^4. \quad (4.6)$$

Obtemos, portanto, as equações da  $\mathcal{M}$ -hipérbole:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{M}(F_1, F_2)} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \\ \frac{y^2}{a^2 + c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ (x^2 - y^2)^2 + 2c^2(x^2 - y^2) - 8xa^2c = -c^4 - 4a^4, \\ (y^2 - x^2)^2 - 2c^2(y^2 - x^2) + 8xa^2c = -c^4 - 4a^4, \end{cases} \quad (4.7)$$

e delimitada pelos pontos  $P_1$  a  $P_8$  encontrados na seção anterior. Veja que as equações encontradas para a  $\mathcal{M}$ -hiperbole são também as mesmas que encontramos para a  $\mathcal{M}$ -elipse. A grande diferença em seus esboços é dada pelos pontos delimitantes, como veremos nos exemplos a seguir.

**Exemplo 4:** Encontre as equações e esboce o traço da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole de centro na origem e focos  $F_1(-3, 0)$  e  $F_2(3, 0)$ , tais que:

- (a)  $a = 2$       (b)  $a = 3$       (c)  $a = 4$ .

**Resposta:**

(a) Para  $a = 2$  e  $c = 3$ , os pontos delimitantes são

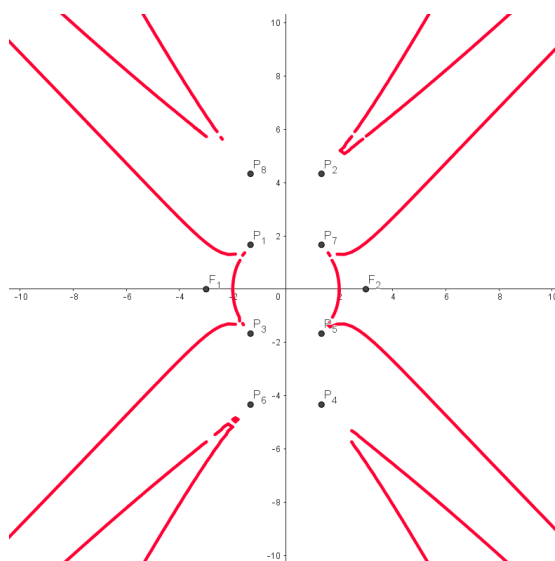
$$\begin{array}{cccc} P_1\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), & P_2\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{3}\right), & P_3\left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right), & P_4\left(\frac{4}{3}, -\frac{13}{3}\right), \\ P_5\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right), & P_6\left(-\frac{4}{3}, -\frac{13}{3}\right), & P_7\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), & P_8\left(-\frac{4}{3}, \frac{13}{3}\right). \end{array}$$

Substituindo os valores de  $a$  e de  $c$  em (4.7), obtemos as equações da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole:

$$\mathcal{H}_M : \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1, \\ \frac{y^2}{13} - \frac{x^2}{4} = 1, \\ (x^2 - y^2)^2 + 18(x^2 - y^2) - 96x = -145, \\ (y^2 - x^2)^2 - 18(y^2 - x^2) + 96x = -145. \end{cases}$$

A união dos traços e dos pontos delimitantes das curvas encontradas são exatamente como na Figura 5. Mas, a partir dos quatro casos especiais vistos anteriormente, obtemos que o traço da referida  $\mathcal{M}$ -Hipérbole é dado pela Figura 15 abaixo.

Figura 15: Traço da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole com parâmetros  $a=2$  e  $c=3$ .



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

(b) Quando  $a = c = 3$  os pontos delimitantes são:

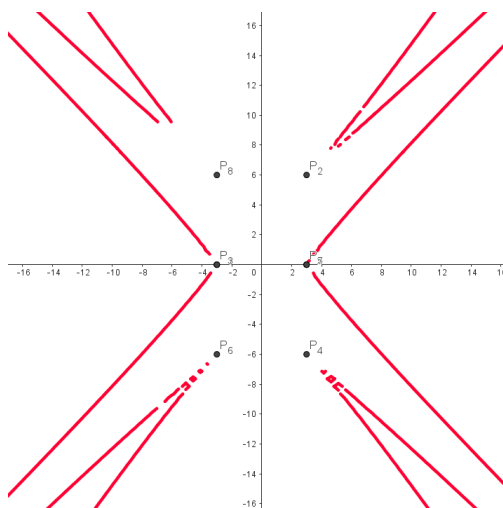
$$\begin{aligned} P_1 = P_3 &= (-3, 0), & P_2 &= (3, 6), & P_4 &= (3, -6), \\ P_5 = P_7 &= (3, 0), & P_6 &= (-3, -6), & P_8 &= (-3, 6). \end{aligned}$$

E suas equações reduzidas são dadas por

$$\mathcal{H}_M : \begin{cases} \frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{9} = 1, \\ (x^2 - y^2)^2 + 18(x^2 - y^2) - 216x = -405, \\ (y^2 - x^2)^2 - 18(y^2 - x^2) + 216x = -405. \end{cases}$$

O traço da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole é dado na Figura 16 abaixo.

Figura 16:  $\mathcal{M}$ -Hipérbole de parâmetros  $a = c = 3$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Perceba para este caso que apenas seis pontos delimitam a  $\mathcal{M}$ -Hipérbole, e dois deles coincidem com os seus focos. Em geral, isso ocorre sempre que tivermos  $a = c$ .

(c) Para  $a = 4$  e  $c = 3$  teremos os pontos delimitantes

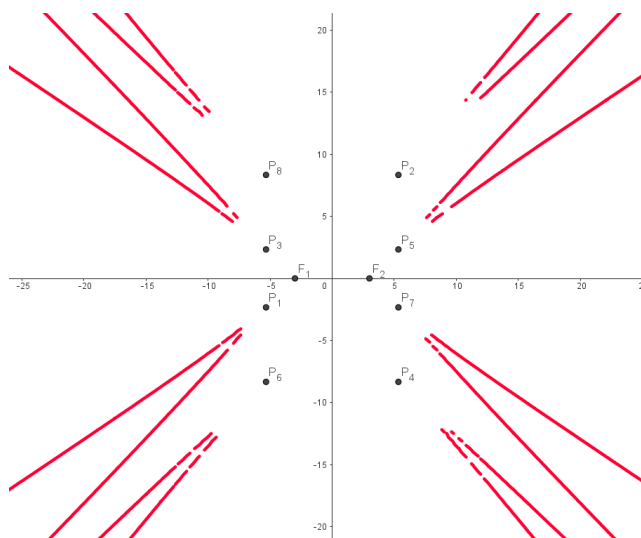
$$\begin{aligned} P_1 \left( -\frac{16}{3}, -\frac{7}{3} \right), & P_2 \left( \frac{16}{3}, \frac{25}{3} \right), & P_3 \left( -\frac{16}{3}, \frac{7}{3} \right), & P_4 \left( \frac{16}{3}, -\frac{25}{3} \right), \\ P_5 \left( \frac{16}{3}, \frac{7}{3} \right), & P_6 \left( -\frac{16}{3}, -\frac{25}{3} \right), & P_7 \left( \frac{16}{3}, -\frac{7}{3} \right), & P_8 \left( -\frac{16}{3}, \frac{25}{3} \right). \end{aligned}$$

As equações da  $\mathcal{M}$ -hipérbole são dadas a seguir

$$\mathcal{H}_M : \begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1, \\ \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1, \\ (x^2 - y^2)^2 + 18(x^2 - y^2) - 384x = -1105, \\ (y^2 - x^2)^2 - 18(y^2 - x^2) + 384x = -1105. \end{cases}$$

A Figura 17 nos mostra o traço da referida  $\mathcal{M}$ -Hhipérbole.

Figura 17: Traço da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole de parâmetros  $a = 4$  e  $c = 3$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Veja em todos os itens do exemplo acima que o traço da  $\mathcal{M}$ -hipérbole de centro na origem e focos sobre o eixo  $OX$  é exatamente a parte complementar do traço da  $\mathcal{M}$ -elipse de centro na origem e cujos focos e os valores de  $a$  coincidem com os da  $\mathcal{M}$ -hipérbole.

No link (<https://www.geogebra.org/m/vxakufbr>) encontra-se uma animação, feita no Geogebra online, que nos permite visualizar a evolução da  $\mathcal{M}$ -hipérbole de maneira continuada desde o caso em que  $a < c$ , passando por  $a = c$  e chegando até  $a > c$ .

#### 4.1.2 $\mathcal{M}$ -Hipérbole com reta focal no eixo $OY$ .

Para o caso da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole de centro na origem com reta focal sobre o eixo  $Y$  o processo é totalmente análogo ao da Subseção 4.1.1.

Encontramos os pontos delimitantes.



$$\begin{array}{cccc}
P_1\left(-\frac{a^2 - c^2}{c}, -\frac{a^2}{c}\right), & P_2\left(\frac{a^2 + c^2}{c}, \frac{a^2}{c}\right), & P_3\left(\frac{a^2 - c^2}{c}, -\frac{a^2}{c}\right), & P_4\left(-\frac{a^2 + c^2}{c}, \frac{a^2}{c}\right), \\
P_5\left(-\frac{a^2 + c^2}{c}, -\frac{a^2}{c}\right), & P_6\left(\frac{a^2 - c^2}{c}, \frac{a^2}{c}\right), & P_7\left(\frac{a^2 + c^2}{c}, -\frac{a^2}{c}\right), & P_8\left(-\frac{a^2 - c^2}{c}, \frac{a^2}{c}\right).
\end{array}$$

Também encontramos as equações reduzidas da referida  $\mathcal{M}$ -Hipérbole:

$$\mathcal{H}_M : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 + c^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \\ \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2 - c^2} = 1. \\ (y^2 - x^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) - 8a^2cy = -(c^4 + 4a^4) \\ (x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + 8a^2cy = -(c^4 + 4a^4). \end{cases}$$

**Exemplo 5:** Encontre a  $\mathcal{M}$ -Hipérbole com focos  $F_1(0, -2)$  e  $F_2(0, 2)$  para cada um dos valores de  $a$  dados a seguir.

- (a)  $a = 1$ .      (b)  $a = 2$ .      (c)  $a = 3$ .

**Resposta:**

- (a) Para os valores  $a = 1$  e  $c = 2$ , encontramos os pontos delimitantes

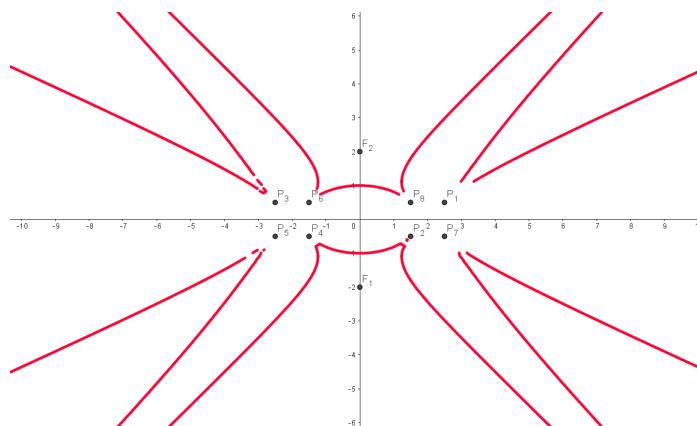
$$\begin{array}{cccc}
P_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right), & P_2\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right), & P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right), & P_4\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right), \\
P_5\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), & P_6\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), & P_7\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), & P_8\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).
\end{array}$$

Também obtemos as equações reduzidas a seguir:

$$\mathcal{H}_M : \begin{cases} \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{1} = 1 \\ \frac{y^2}{1} + \frac{x^2}{3} = 1 \\ (y^2 - x^2)^2 + 8(y^2 - x^2) - 16y + 20 = 0 \\ (x^2 - y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 16y + 20 = 0. \end{cases}$$

O traço da  $\mathcal{M}$ -hipérbole é mostrado na Figura 18 abaixo.

Figura 18: Traço da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole para  $a = 1$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

(b) Para os valores  $a = c = 2$ , encontramos os pontos delimitantes da  $\mathcal{M}$ -hipérbole.

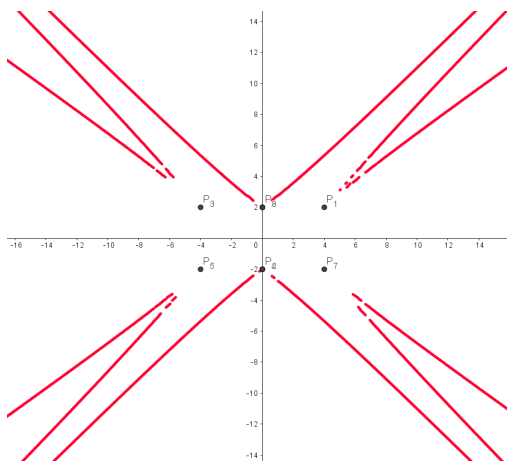
$$\begin{array}{lll} P_1 = P_3 = (0, -2), & P_2(4, 2), & P_4(-4, 2), \\ P_5(-4, -2), & P_6 = P_8 = (0, 2), & P_7(4, -2). \end{array}$$

As equações reduzidas são:

$$\mathcal{H}_M : \begin{cases} \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ (y^2 - x^2)^2 + 8(y^2 - x^2) - 64y + 80 = 0 \\ (x^2 - y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 64y + 80 = 0. \end{cases}$$

O traço da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole é apresentado na Figura (19).

Figura 19: Traço da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole de parâmetros  $a = c = 2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Observe que, assim como nos casos anteriores, quando os parâmetros  $a$  e  $c$  forem iguais, teremos apenas seis pontos delimitantes. Ademais, dois destes pontos delimitantes coincidem com os focos  $F_1$  e  $F_2$ .

(c) Para  $a = 3$  e  $c = 2$ , encontramos os pontos delimitantes da  $\mathcal{M}$ -hipérbole, são eles:

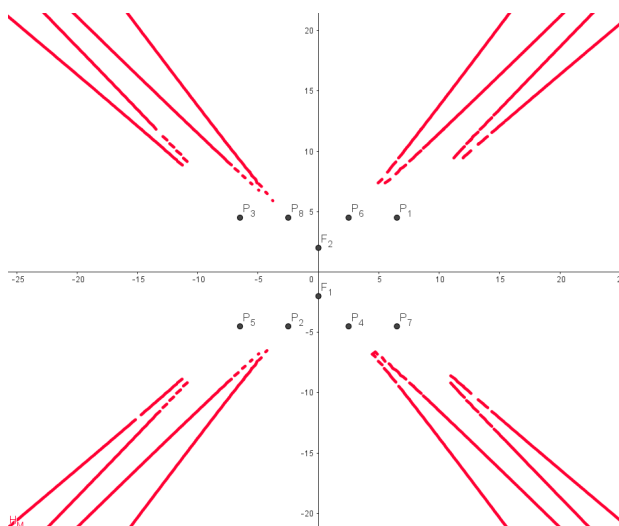
$$\begin{array}{cccc} P_1\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right), & P_2\left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right), & P_3\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right), & P_4\left(-\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right), \\ P_5\left(-\frac{13}{2}, -\frac{9}{2}\right), & P_6\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right), & P_7\left(\frac{13}{2}, -\frac{9}{2}\right), & P_8\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right). \end{array}$$

As equações reduzidas são:

$$\mathcal{H}_M : \begin{cases} \frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1 \\ (y^2 - x^2)^2 + 8(y^2 - x^2) - 144y = -340 \\ (x^2 - y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 144y = -340. \end{cases}$$

Portanto, temos o traço da  $\mathcal{M}$ -hipérbole como segue:

Figura 20: Traço da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole parâmetros  $a = 3$  e  $c = 2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Encerramos, portanto, o estudo dos casos particulares das  $\mathcal{M}$ -hipérboles centradas na origem do sistema de eixos ortogonais  $OXY$ , e cujas retas focais coincidem com os eixos  $OX$  e  $OY$ .

## 4.2 Equações Gerais da $\mathcal{M}$ -Hipérbole

Nesta seção estudaremos o caso mais geral da  $\mathcal{M}$ -hipérbole. Tomando seus focos  $F_1(z_1, z_2)$  e  $F_2(w_1, w_2)$  em posições arbitrárias do plano de Minkowski, encontraremos seus pontos delimitantes e deduziremos suas equações gerais. Faremos isso desenvolvendo e estudando a Equação (4.1).

### 4.2.1 Pontos delimitantes de $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$

Se  $P(x, y)$  é um ponto de  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$  que também pertence a  $C_L(F_1)$ , então as coordenadas de  $P$  satisfazem:

$$\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 0$$

e

$$\sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 2a.$$

O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  tais que  $\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 0$  são as retas

$$x = y + z_1 - z_2 \quad e \quad x = -y + z_1 + z_2.$$

E o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y) \in \mathcal{M}^2$  tais que  $\sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 2a$  é o  $\mathcal{M}$ -círculo de equação

$$(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2 = \pm 4a^2. \quad (4.8)$$

Assim, sabendo que  $P(x, y) \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}}$  e  $P \in C_L(\mathcal{F}_{\infty})$ , o referido ponto pertence à reta  $x = y + z_1 - z_2$  ou à reta  $x = -y + z_1 + z_2$  e também pertence a uma das hipérboles euclidianas dadas na Equação (4.8).

- (1) Assuma que o ponto  $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}}$  pertença à reta  $x = y + z_1 - z_2$  e à hipérbole  $(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2 = 4a^2$ . Então suas coordenadas satisfazem:

$$x_1 = y_1 + z_1 - z_2 \quad (4.9)$$

e

$$(x_1 - w_1)^2 - (y_1 - w_2)^2 = 4a^2. \quad (4.10)$$

Substituindo a Equação (4.9) na Equação (4.10) obtemos

$$\begin{aligned} 4a^2 &= (y_1 + z_1 - z_2 - w_1)^2 - (y_1 - w_2)^2 \\ &= y_1^2 + 2y_1(z_1 - z_2 - w_1) + (z_1 - z_2 - w_1)^2 - y^2 + 2y_1w_2 - w_2^2, \end{aligned}$$

o que implica em

$$2y_1([w_2 - w_1 + z_1 - z_2]) = 4a^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2.$$

E assim encontramos

$$y_1 = \frac{4a^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2[w_2 - w_1 + z_1 - z_2]}$$

e, conseqüentemente,

$$x_1 = \frac{4a^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2[w_2 - w_1 + z_1 - z_2]} + z_1 - z_2.$$

- (2) Assuma  $P_2(x_2, y_2) \in \mathcal{H}_M$  pertença à reta  $x = -y + z_1 + z_2$  e à hipérbole euclidiana  $(x_1 - w_1)^2 - (y_1 - w_2)^2 = 4a^2$ . Usando o mesmo procedimento do item (1) acima, encontramos as coordenadas de  $P_2$ , a saber:

$$y_2 = \frac{4a^2 + w_2^2 - (z_1 + z_2 - w_1)^2}{2[w_1 + w_2 - z_1 - z_2]}$$

e

$$x_2 = \frac{4a^2 + w_2^2 - (z_1 + z_2 - w_1)^2}{2[z_1 + z_2 - w_1 - w_2]} + z_1 + z_2.$$

- (3) Suponha que  $P_3(x_3, y_3) \in \mathcal{H}_M$  pertença à reta  $x = y + z_1 - z_2$  e à hipérbole  $(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2 = 4a^2$ . Como nos casos anteriores, encontramos

$$y_3 = \frac{4a^2 - w_2^2 + (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2[w_1 - w_2 + z_2 - z_1]}$$

e

$$x_3 = \frac{4a^2 - w_2^2 + (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2[w_1 - w_2 + z_2 - z_1]} + z_1 - z_2.$$

- (4) Suponha que  $P_4(x_4, y_4) \in \mathcal{H}_M$  pertença à reta  $x = -y + z_1 + z_2$  e à hipérbole  $(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2 = 4a^2$ . Neste caso, obtemos

$$y_4 = \frac{4a^2 - w_2^2 + (z_1 + z_2 - w_1)^2}{2[z_1 + z_2 - w_1 - w_2]}$$

e

$$x_4 = \frac{4a^2 - w_2^2 + (z_1 + z_2 - w_1)^2}{2[w_1 + w_2 - z_1 - z_2]} + z_1 + z_2.$$

Analogamente, seja  $P(x, y)$  um ponto de interseção de  $\mathcal{H}_M$  com  $C_L(F_2)$ . Então as coordenadas de  $P$  satisfazem

$$\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 2a$$

e

$$\sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 0.$$

O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  tais que  $\sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 0$  são as retas

$$x = y + w_1 - w_2 \quad e \quad x = -y + w_1 + w_2.$$

E o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y) \in \mathcal{M}^2$  tais que  $\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 2a$  é o  $\mathcal{M}$ -círculo de equação

$$(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2 = \pm 4a^2. \quad (4.11)$$

Portanto, se um ponto está na interseção de  $\mathcal{H}_M$  com  $C_L(F_2)$ , o referido ponto pertence a uma das retas  $x = y + w_1 - w_2$  e  $x = -y + w_1 + w_2$  e também a uma das hipérbolas euclidianas da Equação (4.11).

- (5) Assuma que  $P_5(x_5, y_5) \in \mathcal{H}_M$  pertença à reta  $x = y + w_1 - w_2$  e à hipérbole euclidiana  $(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2 = 4a^2$ . Então suas coordenadas satisfazem

$$x_5 = y_5 + w_1 - w_2$$

e

$$(x_5 - z_1)^2 - (y_5 - z_2)^2 = 4a^2.$$

Substituindo  $x_5 = y_5 + w_1 - w_2$  na equação  $(x_5 - z_1)^2 - (y_5 - z_2)^2 = 4a^2$ , obtemos

$$y_5 = \frac{4a^2 + z_2^2 - (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2[z_2 - z_1 + w_1 - w_2]}$$

e, conseqüentemente

$$x_5 = \frac{4a^2 + z_2^2 - (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2[z_2 - z_1 + w_1 - w_2]} + w_1 - w_2.$$

(6) Para  $P_6(x_6, y_6) \in \mathcal{H}_M$  pertencente à reta  $x = -y + w_1 + w_2$  e à hipérbole  $(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2 = 4a^2$ , encontramos

$$y_6 = \frac{4a^2 + z_2^2 - (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2[z_1 + z_2 - w_1 - w_2]}$$

e

$$x_6 = \frac{4a^2 + z_2^2 - (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2[w_1 + w_2 - z_1 - z_2]} + w_1 + w_2.$$

(7) Suponha que  $P_7(x_7, y_7) \in \mathcal{H}_M$  pertença à reta  $x = y + w_1 - w_2$  e à hipérbole euclidiana  $(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2 = 4a^2$ . Então

$$x_7 = y_7 + w_1 - w_2$$

e

$$(y_7 - z_2)^2 - (x_7 - z_1)^2 = 4a^2.$$

Substituindo  $x_7 = y_7 + w_1 - w_2$  na equação  $(y_7 - z_2)^2 - (x_7 - z_1)^2 = 4a^2$ , encontramos

$$y_7 = \frac{4a^2 - z_2^2 + (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2[z_1 - z_2 - w_1 + w_2]}$$

e

$$x_7 = \frac{4a^2 - z_2^2 + (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2[z_1 - z_2 - w_1 + w_2]} + w_1 - w_2.$$

(8) Para  $P_8(x_8, y_8) \in \mathcal{H}_M$  pertencente à reta  $x = -y + w_1 + w_2$  e à hipérbole  $(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2 = 4a^2$ , obtemos

$$y_8 = \frac{4a^2 - z_2^2 + (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2[w_1 + w_2 - z_1 - z_2]}$$

e

$$x_8 = \frac{4a^2 - z_2^2 + (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2[z_1 + z_2 - w_1 - w_2]} + w_1 + w_2.$$

Observe que, assim como nos casos particulares, os pontos delimitantes da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole são os mesmos encontrados para a  $\mathcal{M}$ -Elipse.

## 4.2.2 Equações gerais da $\mathcal{M}$ -Hipérbole

Supondo um ponto  $P(x, y) \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}}$  não pertence aos cones de luz  $C_L(F_1)$  e  $C_L(F_2)$ , então as  $P$  satisfaz simultaneamente as seguintes desigualdades  $0 < \sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} < 2a$  e  $0 < \sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} < 2a - \sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|}$ , obedecendo (??).

Assim, temos os seguintes casos:

- 1º Caso:  $|x - z_1| > |y - z_2|$  e  $|x - w_1| > |y - w_2|$  e  $[|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| > |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|$  ou  $|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| < |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|]$
- 2º Caso:  $|x - z_1| < |y - z_2|$  e  $|x - w_1| < |y - w_2|$  e  $[|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| > |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|$  ou  $|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| < |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|]$
- 3º Caso:  $|x - z_1| > |y - z_2|$  e  $|x - w_1| < |y - w_2|$  e  $[|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| > |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|$  ou  $|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| < |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|]$
- 4º Caso:  $|x - z_1| < |y - z_2|$  e  $|x - w_1| > |y - w_2|$  e  $[|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| > |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|$  ou  $|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| < |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|]$

Afim de simplificar os cálculos, usaremos  $2a = k$ .

**1º Caso** - Suponha  $|x - z_1| > |y - z_2|$  e  $|x - w_1| > |y - w_2|$ . A Equação(4.1) é transformada em

$$|\sqrt{(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2} - \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2}| = k$$



E assim, ao elevar ao quadrado ambos os lados da igualdade e após algumas manipulações algébricas, temos

$$((2x - w_1 - z_1)(w_1 - z_1) + (2y - z_2 - w_2)(z_2 - w_2) - k^2)^2 = 4k^2((x - w_1)^2 - (y - w_2)^2). \quad (4.12)$$

Desenvolvendo o 1º membro da equação (4.12), segue que

$$\begin{aligned} & ((2x - w_1 - z_1)(w_1 - z_1) + (2y - z_2 - w_2)(z_2 - w_2) - k^2)^2 = \\ & 4x^2(w_1 - z_1)^2 - 4x(w_1 - z_1)(w_1^2 - z_1^2 + z_2^2 - w_2^2 + k^2) + \\ & + 4y^2(z_2 - w_2)^2 - 4y(z_2 - w_2)(w_1^2 - z_1^2 + z_2^2 - w_2^2 + k^2) + \\ & + 8xy(w_1 - z_1)(z_2 - w_2) + ((w_1^2 - z_1^2) + (z_2^2 - w_2^2))^2 + \\ & + 2k^2(w_1^2 - z_1^2 + z_2^2 - w_2^2) + k^4. \end{aligned}$$

Agora desenvolvendo o segundo membro da equação (4.12), temos

$$\begin{aligned} 4k^2((x - w_1)^2 - (y - w_2)^2) &= 4k^2(x^2 - 2xw_1 + w_1^2 - y^2 + 2yw_2 - w_2^2) \\ &= 4k^2x^2 - 8k^2w_1x + 4k^2w_1^2 - 4k^2y^2 + 8k^2w_2y - 4k^2w_2^2. \end{aligned}$$

Assim, igualando as expressões e reorganizando os termos, teremos

$$\begin{aligned} & 4x^2((w_1 - z_1)^2 - k^2) + 8xy(w_1 - z_1)(z_2 - w_2) + 4y^2((z_2 - w_2)^2 + k^2) \\ & + 4x((w_1 - z_1)(z_1^2 - w_1^2 + w_2^2 - z_2^2 - k^2) + 2k^2w_1) \\ & + 4y((z_2 - w_2)(z_1^2 - w_1^2 + w_2^2 - z_2^2 - k^2) - 2k^2w_2) \\ & + (z_1^2 - w_1^2 + w_2^2 - z_2^2 - k^2)^2 - 4k^2w_1^2 + 4k^2w_2^2 = 0. \end{aligned}$$

com  $k = 2a$ .

**2º Caso** - Agora suponha que  $|x - z_1| < |y - z_2|$  e  $|x - w_1| < |y - w_2|$ . Assim, a Equação (4.1) é transformada em

$$|\sqrt{(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2} - \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2}| = k,$$

Daí, obtemos fazendo algumas manipulações algébricas chegamos em

$$((2y - z_2 - w_2)(w_2 - z_2) + (2x - w_1 - z_1)(z_1 - w_1) - k^2)^2 = 4k^2((y - w_2)^2 - (x - w_1)^2). \quad (4.13)$$

Desenvolvendo membro a membro da igualdade (4.13), encontramos que

$$\begin{aligned}
& 4y^2((w_2 - z_2)^2 - k^2) + 8xy(w_2 - z_2)(z_1 - w_1) + 4x^2((z_1 - w_1)^2 + k^2) \\
& + 4y((w_2 - z_2)(w_1^2 - w_2^2 + z_2^2 - z_1^2 - k^2) + 2k^2w_2) \\
& + 4x((z_1 - w_1)(w_1^2 - w_2^2 + z_2^2 - z_1^2 - k^2) - 2k^2w_1) \\
& + (w_1^2 - w_2^2 + z_2^2 - z_1^2 - k^2)^2 - 4k^2w_2^2 + 4k^2w_1^2 = 0.
\end{aligned}$$

**3º Caso** - Suponha que  $|x - z_1| > |y - z_2|$  e  $|x - w_1| < |y - w_2|$ . Desta forma a Equação (4.1) é transformada em

$$|\sqrt{(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2} - \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2}| = k$$

Utilizando o processo análogo ao usado nos casos anteriores e após desenvolver membro a membro da igualdade, encontramos a forma geral deste caso

$$\begin{aligned}
& 4x^4 - 8x^2y^2 + 4y^4 - 8x^3(z_1 + w_1) + 8x^2y(z_2 + w_2) + 8y^2x(z_1 + w_1) \\
& - 8y^3(z_2 + w_2) + 4x^2((z_1 + w_1)^2 + z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2) \\
& - 8xy(z_1 + w_1)(z_2 + w_2) + 4y^2((z_2 + w_2)^2 - (z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2) - k^2) \\
& - 4x((z_1 + w_1)(z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2) + 2k^2w_1) \\
& + 4y((z_2 + w_2)(z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2) + 2k^2w_2) \\
& + (z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2)^2 - 4k^2w_2^2 + 4k^2w_1^2 = 0.
\end{aligned}$$

**4º Caso** - Suponha que  $|x - z_1| < |y - z_2|$  e  $|x - w_1| > |y - w_2|$ . Daí a Equação (4.1) é transformada em

$$|\sqrt{(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2} - \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2}| = k$$

Utilizando o mesmo procedimento dos casos anteriores, encontramos o seguinte

$$\begin{aligned}
& 4y^4 - 8x^2y^2 + 4x^4 - 8y^3(z_2 + w_2) + 8y^2x(z_1 + w_1) + 8x^2y(z_2 + w_2) - 8x^3(z_1 + w_1) \\
& + 4y^2((z_2 + w_2)^2 + z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2) - 8xy(z_2 + w_2)(z_1 + w_1) \\
& + 4x^2((z_1 + w_1)^2 - (z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2 - k^2) - k^2) \\
& - 4y((z_2 + w_2)(z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2 - k^2) + 2k^2w_2) \\
& + 4x((z_1 + w_1)(z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2 - k^2) + 2k^2w_1) \\
& + (z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2 - k^2)^2 - 4k^2w_1^2 + 4k^2w_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

Encontramos, portanto, as equações gerais da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole.

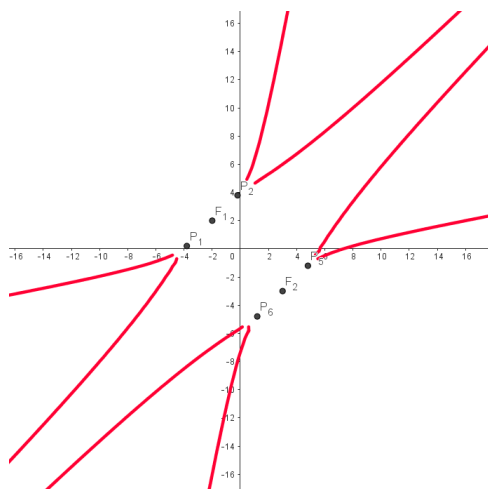
**Exemplo 6:** Determine a  $\mathcal{M}$ -Hipérbole de focos  $F_1 = (-2, 2)$  e  $F_2 = (3, -3)$ , com  $a = 3$ .

**Solução** Substituindo as coordenadas dos focos  $F_1$  e  $F_2$  e o valor de  $a$  nas equações encontradas nos quatros casos gerais, obtemos

$$\mathcal{H}_{\mathcal{M}} : \begin{cases} -60x^2 + 8xy + 68y^2 + 48x - 208y + 400 = 0 \\ -60y^2 + 8xy + 68x^2 + 176y - 80x + 144 = 0 \\ 4x^4 - 8x^2y^2 + 4y^4 - 8x^3 + 24x^2y + 8y^2x + \\ -24y^3 - 12x^2 - 24xy + 52y^2 + 80x + 16y + 144 = 0 \\ 4y^4 - 8x^2y^2 + 4x^4 - 24y^3 + 8y^2x + 24x^2y + \\ -8x^3 + 52y^2 - 24xy - 12x^2 - 112y - 48x + 400 = 0 \end{cases}$$

O traço da  $\mathcal{M}$ -Hipérbole é mostrado na Figura 21.

Figura 21:  $\mathcal{M}$ -Hipérbole de focos:  $F_1(-2, 2)$ ,  $F_2(3, -3)$  e  $a = 3$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Assim como ocorre na  $\mathcal{M}$ -Elipse, se os focos de uma  $\mathcal{M}$ -Hipérbole estiverem na mesma reta tipo-luz, temos seis pontos delimitantes, sendo dois deles pontos no infinito.

No link (<https://www.geogebra.org/m/vxakufbr>) encontra-se uma animação, feita no Geogebra online, que nos permite visualizar e comparar a  $\mathcal{M}$ -elipse (parte interior) e a  $\mathcal{M}$ -hipérbole (parte exterior) com a variação dos focos  $F_1$  e  $F_2$ , do valor de  $a$  e do valor de  $c$ .

## 5 $\mathcal{M}$ -PARÁBOLA

De acordo com a definição dada por Apolônio, a parábola é o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$ , tais que a distância destes pontos para um ponto fixo  $F(x_0, y_0)$ , chamado de foco, e para uma reta  $L$ , denominada reta diretriz da parábola, são iguais. Neste capítulo estudaremos sobre a versão no plano de Minkowski da definição de parábola, proposta por Shonoda (2015).

### 5.1 Classificação de retas e segmentos de retas no plano de Minkowski

Shonoda (2015) classifica as retas (e segmentos de reta) no plano de Minkowski da seguinte maneira:

Uma reta (ou um segmento de reta) será de tipo-espaço se for paralela a uma reta que passa pela origem localizada nas regiões que contém a hipérbole equilátera tipo-espaço. Isto é, a inclinação  $m$  desta reta satisfaz  $|m| < 1$  (ou seja  $-1 < m < 1$ ).

Análogamente, uma reta (ou um segmento de reta) será de tipo-tempo se for paralela a uma reta que passa pela origem localizada nas regiões que contém a hipérbole equilátera tipo-tempo. A inclinação  $m$ , portanto de uma reta (ou segmento de reta) tipo-tempo satisfaz  $|m| > 1$  (isto é,  $m < -1$  ou  $m > 1$ ).

Após esta classificação, Shonoda conclui que as retas (ou segmento de reta) que passam por um ponto  $(x_0, y_0)$  tem equação

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

sendo  $|m| > 1$  ou  $|m| < 1$ , para o caso em que a reta (ou segmento de reta) for de tipo-espaço ou tipo-tempo, respectivamente.

De acordo com Catoni (2008) e com Naber (2012), a reta  $\mathcal{M}$ -ortogonal de uma

reta tipo-espaco é uma reta tipo-tempo e a reta  $\mathcal{M}$ -ortogonal de uma reta tipo-tempo é uma reta tipo-espaco. Além disso, o produto de seus coeficientes angulares é igual a um. Também encontramos em Catoni (2008) e em Naber (2012) que a  $\mathcal{M}$ -distância de um ponto  $P(x_1, y_1)$  a uma reta  $L$  de equação  $y = mx + q$ , com  $m \neq \pm 1$  é dada por

$$\frac{|y_1 - mx_1 - q|}{\sqrt{|m^2 - 1|}}.$$

que é independente do tipo da reta  $L$ .

### 5.1.1 A $\mathcal{M}$ -Parábola

Em Shonoda (2015) encontramos a seguinte definição.

**Definição 8.** *Uma  $\mathcal{M}$ -Parábola de foco  $F = (x_0, y_0)$  e diretriz  $L : y = mx + q$  é o conjunto dos pontos  $P(x, y)$  do plano de Minkowski que satisfazem a seguinte equação*

$$|(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2| = \frac{|y - mx - q|}{|m^2 - 1|}. \quad (5.1)$$

Esta Equação (5.1) nasce quando consideramos a  $\mathcal{M}$ -distância de um ponto arbitrário  $P(x, y)$  ao foco  $F$  e a igualamos à  $\mathcal{M}$ -distância de  $P$  à reta  $L$ , como ocorre na definição de Apolônio no plano euclidiano. Mas ao fazer isso, como bem destaca Shonoda (2015), a Equação (5.1) não fica bem definida para o caso em que a reta  $L$  é de tipo-luz, tendo em vista que todas as suas retas  $\mathcal{M}$ -ortogonais também seriam tipo-luz e paralelas a  $L$ . Portanto, uma  $\mathcal{M}$ -parábola está bem definida em  $\mathcal{M}^2$  apenas se sua reta diretriz for tipo-espaco ou tipo-tempo. Ademais, Callahan (2000), comenta que a Equação (5.1) também falha para o caso em que a reta  $L$  coincide com o eixo  $OY$ , pois a inclinação é indefinida para  $m \rightarrow \infty$ .

Assim como fizemos nos capítulos anteriores, deduziremos nas próximas subseções as equações reduzidas e geral da  $\mathcal{M}$ -parábola.

### 5.1.2 $\mathcal{M}$ -Parábola com foco no eixo X

Considerando  $F = (p, 0)$  o foco da  $\mathcal{M}$ -parábola, onde  $p$  é o parâmetro, a sua reta diretriz é

$$x = -p. \quad (5.2)$$

Daí, a equação reduzida da reta é dada por  $r : x + p = 0$ . Se  $P(x, y)$  é um ponto da  $\mathcal{M}$ -parábola, então satisfaz:

$$d_M(P, r) = d_M(P, F).$$

Sendo

$$d_M(P, r) = x + p$$

e

$$d_M(P, F) = \sqrt{|(x - p)^2 - (y - 0)^2|},$$

obtemos

$$x + p = \sqrt{|(x - p)^2 - (y - 0)^2|}.$$

Agora, ao elevarmos ambos os membros da igualdade ao quadrado, encontramos

$$(x + p)^2 = |(x - p)^2 - y^2|,$$

e teremos que

$$(x + p)^2 = (x - p)^2 - y^2 \text{ ou } (x + p)^2 = -(x - p)^2 + y^2.$$

Desenvolvendo os quadrados nas duas equações, obtemos, respectivamente, que:

$$y^2 = -4px \tag{5.3}$$

ou

$$y^2 = 2(x^2 + p^2) \tag{5.4}$$

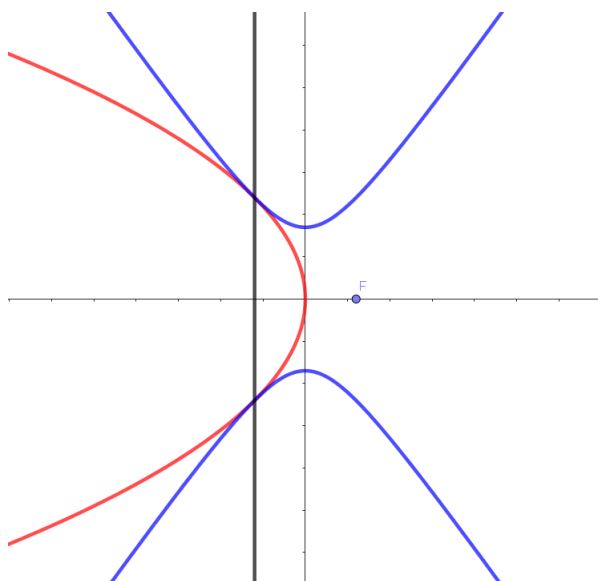
Estas são as equações reduzidas da  $\mathcal{M}$ -parábola cujo foco encontra-se sobre o eixo  $OX$ . Na Figura 22 temos a representação da Equação (5.3) em vermelho, da Equação (5.4) em azul, bem como da sua reta diretriz que foi apresentada em (5.2).

### 5.1.3 $\mathcal{M}$ -Parábola com foco no eixo $Y$

Seja  $F = (0, p)$  o foco da  $\mathcal{M}$ -Parábola cuja reta diretriz é

$$y = -p. \tag{5.5}$$

Isto é,  $r : y + p = 0$ .

Figura 22:  $\mathcal{M}$ -Parábola com reta focal no eixo X

Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Considerando  $P(x, y)$  um ponto da  $\mathcal{M}$ -Parábola, teremos que:

$$d_M(P, r) = d_M(P, F),$$

onde

$$d_M(P, r) = y + p$$

e

$$d_M(P, F) = \sqrt{|(x - 0)^2 - (y - p)^2|}$$

Assim, temos que

$$y + p = \sqrt{|(x - 0)^2 - (y - p)^2|}$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtemos

$$(y + p)^2 = |x^2 - (y - p)^2|.$$

E então,

$$(y + p)^2 = x^2 - (y - p)^2 \text{ ou } (y + p)^2 = -x^2 + (y - p)^2$$

Desenvolvendo os quadrados das duas equações acima obtemos, respectivamente:

$$x^2 = 2(y^2 + p^2) \tag{5.6}$$

ou

$$x^2 = -4py \quad (5.7)$$

**Exemplo 7:** Seja  $F = (0, 3)$  o foco da  $\mathcal{M}$ -Parábola  $\mathcal{P}_M$  cuja reta diretriz é dada por  $L : y + p = 0$ . Esboce o traço de  $\mathcal{P}_M$ .

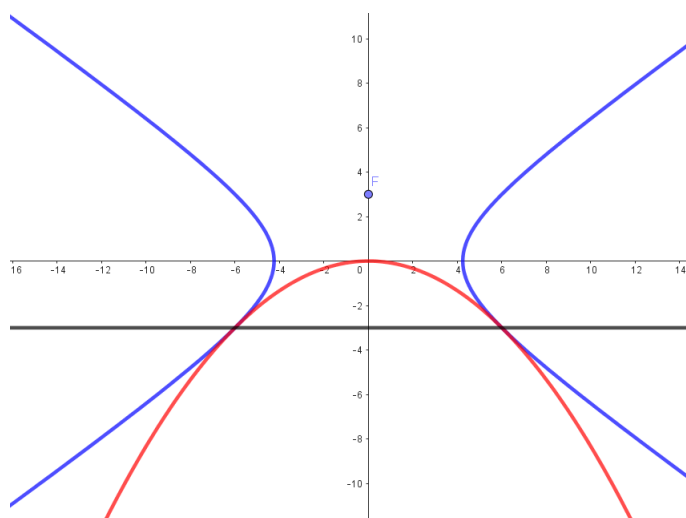
### Solução

Como  $p = 3$ , temos que a reta diretriz é dada por  $y = -3$ .

E ainda sabemos que as equações  $x^2 = 2y^2 + 18$  e  $x^2 = -12y$  são obtidas a partir da substituição do parâmetro  $p$  nas equações (5.6) e (5.7).

Daí, fazendo a união de todas essas equações obtemos a Figura (23) a seguir

Figura 23:  $\mathcal{M}$ -Parábola com reta focal no eixo OY



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

### 5.1.4 $\mathcal{M}$ -Parábola com focos fora dos eixos

Seja  $P(x, y)$  um ponto arbitrário da  $\mathcal{P}_M$ -parábola de foco  $F(z_1, z_2)$  e reta diretriz  $L : y = mx + q$ . Então as coordenadas de  $P$  satisfazem a Equação 5.1. Vejamos o exemplo a seguir.

**Exemplo 8:** Seja o foco  $F = (2, -1)$  da  $\mathcal{M}$ -Parábola e sua reta diretriz  $L : y = -2x$ . Esboce o seu traço.

**Solução** Temos as seguinte informações:  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = -1$ ,  $m = -2$  e  $q = 0$ .



Substituindo esses valores na Equação (5.1), obtemos

$$|(x - 2)^2 - (y + 1)^2| = \frac{|y + 2x|^2}{3}.$$

O que nos dá

$$(x - 2)^2 - (y + 1)^2 = \frac{(y + 2x)^2}{3} \quad (5.8)$$

ou

$$(y + 1)^2 - (x - 2)^2 = \frac{(y + 2x)^2}{3} \quad (5.9)$$

Desenvolvendo os quadrados na Equação (5.8), obtemos

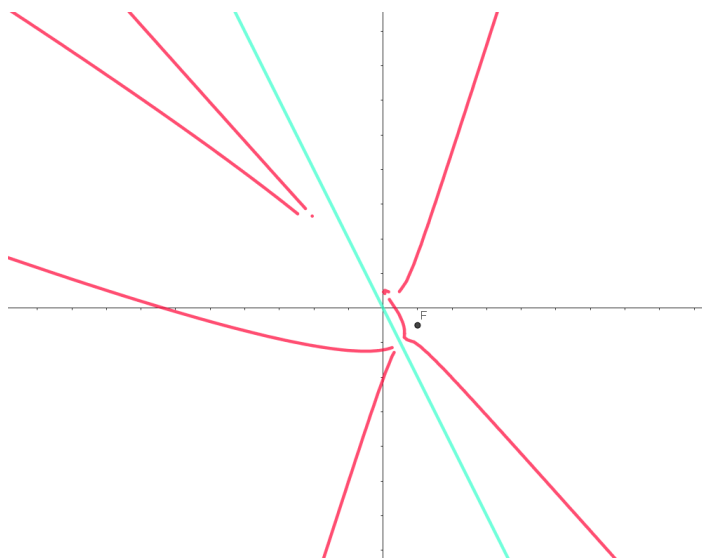
$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 12x + 6y - 9 = 0 \quad (5.10)$$

Fazendo o mesmo procedimento na Equação (5.9), chegamos em

$$2y^2 - 7x^2 - 4xy + 12x + 6y - 9 = 0 \quad (5.11)$$

A figura (24) representa a união da reta diretriz  $y = -2x$ , bem como os traços encontrados através das Equações (5.10) e (5.11).

Figura 24:  $\mathcal{M}$ -Parábola com reta focal não paralela aos eixos coordenados



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como indicado na introdução deste trabalho, nossa proposta foi a de contribuir na divulgação das geometrias não euclidianas para o ensino básico. Para tanto, escolhemos estudar uma versão das cônicas neste referido plano, às quais foram denominadas de  $\mathcal{M}$ -cônicas.

Após este contato com as  $\mathcal{M}$ -cônicas, o estudante percebe claramente as diferenças de seus traços com aqueles conhecidos e imutáveis da geometria euclidiana. E não apenas isso. Os traços são provenientes das respectivas equações que, mesmo as reduzidas, não são tão pequenas quanto gostaríamos. Por este motivo deixamos os links do Geogebra virtual durante o desenvolvimento do trabalho, onde encontram-se boa parte dessas equações já compiladas, precisando apenas que os alunos, com o auxílio do professor (ou de um(a) tutor(a)) insiram os pontos e os parâmetros necessários para que os traços possam ser esboçados.

Por fim, indicamos a inserção destes assuntos através de minicursos, oficinas, palestras, semanas de ciências, dentre outros eventos e/ou atividades que possam ocorrer nas escolas e universidades. Sugerimos também que se façam trabalhos indicando métodos de inserção destes assuntos nas turmas do ensino básico.

## REFERÊNCIAS

ACEFF-SANCHEZ F; SENIOR, L. **Geometry of the conics on the Minkowski plane**. 2007.

ANDRADE, P. **Introdução à Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

BIEZUNER, R. J. **Relatividade Especial, Geral e Geometria Lorentziana**. 2017.

CALLAHAN, J. **The Geometry of Spacetime**. New York: Springer Verlag, 2000.

CATONI, e. a. F. **The Mathematics of Minkowski Space-Time**. Berlin: Birkhuser Verlag, 2008.

COUTO, I. T.; LYMBEROPOULOS, A. **Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

NABER, G. **The Geometry of Minkowski Spacetime: An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity**. New York: Springer Science Business Media, 2012.

SHONODA, E. N. **Classification of conics and Cassini curves in Minkowski space-time plane**. 2015.

SILVA, D. A. **Elipse no plano de Minkowski**. 2021.