Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Gethsemani Saraiva de Goiáz Júnior

O uso do Princípio de Indução Matemática no Ensino Básico

Goiânia
2023

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação   [ ] Tese   [ ] Outro*:____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Gethsemani Saraiva de Goiáz Junior

3. Título do trabalho

O uso do Princípio de Indução Matemática no Ensino Básico

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM   [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Alacyr José Gomes**, **Professor do Magistério Superior**, em 04/09/2023, às 15:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Gethsemani Saraiva De Goiaz Júnior**, **Discente**, em 04/09/2023, às 15:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4017498** e o código CRC **BB1FB4B6**.

Referência: Processo nº 23070.045214/2023-81 SEI nº 4017498

Gethsemani Saraiva de Goiáz Júnior

O uso do Princípio de Indução Matemática no Ensino Básico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística(IME), da Universidade Federal de Goiás(UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Alacyr José Gomes

Goiânia
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Goiaz Junior, Gethsemani Saraiva de
O uso do Princípio de Indução Matemática no Ensino Básico [manuscrito] / Gethsemani Saraiva de Goiaz Junior. - 2023.
116 f.

Orientador: Prof. Dr. Alacyr José Gomes.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2023.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. Princípio de Indução. 2. Números Naturais. 3. Ensino Fundamental. 4. Ensino Médio. I. Gomes, Alacyr José , orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 8 da sessão de Defesa de Dissertação de Gethsemani Saraiva de Goiáz Junior, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.

Aos vinte e nove dias do mês de agosto de dois mil e vinte e três, a partir das 14:00 no auditório do IME/UFG, realizou-se a sessão pública de defesa de dissertação intitulada **"O uso do Princípio de Indução Matemática no Ensino Básico"**. Os trabalhos foram instalados pelo orientador, professor doutor Alacyr José Gomes (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor doutor Ronaldo Antônio dos Santos (IME/UFG) e membro titular externo o professor doutor José Éder Salvador de Vasconcelos (IFG). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor doutor Alacyr José Gomes, presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte e nove dias do mês de agosto de dois mil e vinte e três.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **JOSÉ EDER SALVADOR DE VASCONCELOS**, **Usuário Externo**, em 29/08/2023, às 15:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Alacyr José Gomes**, **Professor do Magistério Superior**, em 29/08/2023, às 15:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Ronaldo Antonio Dos Santos**, **Professor do Magistério Superior**, em 29/08/2023, às 16:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3957192** e o código CRC **E6CE02DB**.

Referência: Processo nº 23070.045214/2023-81 SEI nº 3957192

Aprovação

Gethsemani Saraiva de Goiáz Júnior

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Especializou-se em Planejamento Educacional na UNIVERSO - Universidade Salgado de Oliveira. Especializou-se em Gestão e Educação Ambiental na UNIVERSO - Universidade Salgado de Oliveira. Professor da rede pública e privada de Goiânia, Goiás. Atualmente é professor no ensino básico regular e na educação de jovens e adultos.

Dedico este trabalho a todos aqueles que acreditam na constante melhoria do processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus pela vida, especialmente após termos recentemente enfrentado uma pandemia. Expresso também a minha gratidão a todos os membros da minha família, em especial à minha esposa e filhas, pela compreensão e apoio inabalável ao meu crescimento pessoal e profissional. Ao meu sogro (em memória) que sempre deixou claro seu apoio para que eu fizesse um mestrado.

Quero estender meus agradecimentos aos amigos e colegas de trabalho, que sempre foram fontes de incentivo e prestativos em todos os momentos.

Minha sincera gratidão a todos os alunos e professores desta turma de mestrado, estendo aos demais professores do I.M.E., que desde a minha graduação nesta instituição, contribuíram com esforço e entusiasmo para expandir o nosso conhecimento.

Um agradecimento especial ao meu orientador, Alacyr, pelo compromisso, paciência e dedicação em me orientar, corrigir, guiar e aconselhar. Alacyr, meu sincero agradecimento de coração.

Saber que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção. Quando entro em uma sala de aula devo estar sendo um ser aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, a suas inibições, um ser crítico e inquiridor, inquieto em face da tarefa que tenho, a ele ensinar e não a de transferir conhecimento.

Paulo Freire,
Pedagogia da Autonomia.

Resumo

Goiáz Júnior, Gethsemani Saraiva. **O uso do Princípio de Indução Matemática no Ensino Básico**. Goiânia, 2023. 116p. Dissertação de Mestrado Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

O princípio de indução finita é uma ferramenta útil e rigorosa para demonstrações e resoluções de problemas em matemática, cujos resultados e conjecturas estão relacionados ao conjunto dos números naturais. No entanto, o uso desse princípio no ensino básico ainda é pouco explorado. Neste trabalho, temos o objetivo de destacar não apenas a importância desse princípio sólido, mas também fornecer um material de estudo e apoio para estudantes e professores, alinhado com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Apresentamos várias demonstrações voltadas para o ensino fundamental e médio, abrangendo diversos conteúdos dessas etapas do ensino. Também sugerimos proposições para aprofundamento, que podem ser utilizadas como trilhas de aprendizagem no ensino médio. Acreditamos que esse trabalho possa despertar o interesse e promover o uso mais amplo do princípio de indução finita no ensino da matemática e em outros componentes curriculares.

Palavras–chave

Princípio de Indução, Números Naturais, Ensino Fundamental, Ensino Médio.

Abstract

Goiáz Júnior, Gethsemani Saraiva. **The use of Principle of Mathematical Induction in Basic Education.**. Goiânia, 2023. 116p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The principle of finite induction is a useful and rigorous tool for mathematical proofs whose conjectures are related to the set of natural numbers. However, the use of this principle for verifications in basic education is still greatly underutilized. In this work, we intend not only to demonstrate the importance of using this strong principle but also to provide study material and support for students and teachers, based on the National Common Curricular Base (BNCC). We present various demonstrations for elementary and secondary education, covering several proposed content in these stages of education. We suggest propositions for further exploration, which can be used as pathways for high school education. We also believe that this work can spark interest and expand the use of the principle of finite induction in the teaching of mathematics and other curriculum components.

Keywords

Principle of Induction, Natural Numbers, Elementary School, High School.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

O princípio da indução matemática ou princípio de indução finita é uma ferramenta matemática, eficiente para demonstrações. As escolas possuem como referência a BNCC [3], nela a matemática é dada como uma ciência hipotética e dedutiva baseada em demonstrações que se apoiam num sistema de axiomas e postulados, e sugere que verificações e deduções de propriedades e conjecturas ocorram já no ensino básico. A utilização do princípio de indução finita tem sido amplamente subutilizada tanto por professores quanto por alunos. Diante desse cenário, sentimos a necessidade de propor um trabalho que possa inspirar e incentivar professores e estudantes a utilizarem o princípio da indução finita de maneira a contribuir nas diversas etapas da educação básica, alinhando-se às competências específicas da BNCC [3], principalmente no que se trata de desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes.

Esse trabalho foi dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos um pouco do contexto histórico com relação ao uso do princípio de indução finita, em seguida o definimos a partir dos axiomas de Peano[1], depois mostramos exemplos do seu uso de forma errônea. No segundo capítulo temos o uso do princípio de indução finita nas séries finais do ensino fundamental, onde demonstramos diversas propriedades e conjecturas que podem ser realizadas em sala de aula, desde o quinto ano da etapa escolar. As proposições apresentadas e comprovadas com o uso do princípio de indução finita, envolvem conteúdos como: igualdades, desigualdades, geometria, divisibilidade, jogo como o da torre de Hanói[2], e em definições por recorrências. No capítulo três, aprofundamos gradativamente, com relação ao ensino fundamental.

Uma série de proposições comprovadas neste trabalho, são apresentadas nos diversos materiais do ensino básico, mas não comprovadas com o rigor do princípio de indução finita. Ainda nesse capítulo três, temos demonstrações relacionadas a

[1] Giuseppe Peano (1858 - 1932), matemático italiano do século XIX.

[2] É um jogo, quebra-cabeça, inventado em 1883, cujo nome foi inspirado numa torre da cidade de Hanói, Vietnã.

progressões aritméticas, progressões geométricas, somatórios, igualdades, desigualdades, binômio de Newton[3] e geometria. No quarto capítulo, sugerimos proposições e problemas para aprofundamento em trilhas de aprendizagem para o ensino médio, de acordo com a BNCC [3]. No capítulo quatro, as propriedades e proposições não são apenas as relacionadas com os conteúdos previstos para o ensino médio. Também apresentamos, dentre as relacionadas com o ensino médio: igualdade, desigualdade, divisibilidade, geometria, trigonometria, binômio de Newton, matrizes, somatório, sequências, sequências de Fibonacci[4], função composta. E, para ampliação do saber: número de Euler[5], relações entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci e produtórios.

No apêndice deixamos uma série de problemas propostos que relacionam as proposições apresentadas no capítulo de indução nas trilhas do ensino médio. Assim, didaticamente, se interessar ao leitor, ele poderá ampliar seus conhecimentos com as proposições demonstradas e resolver os problemas sugeridos após as demonstrações.

[3]Isaac Newton (1642 - 1727), físico e matemático inglês.

[4]Conhecido também por Leonardo de Pisa (1175 - 1250), Leonardo Pisano, ou por Fibonacci, por ser filho de Bonacci.

[5]Leonard Euler (1707 - 1783), suíço, matemático e físico.

CAPÍTULO 1

Princípio de Indução Finita

1.1 O Princípio de Indução Finita

O princípio de indução finita é uma ferramenta matemática utilizada para demonstrar proposições no conjunto dos números naturais. Essa técnica de demonstração pode comprovar resultados em diversas áreas do conhecimento, de forma rigorosa. Hoje é um dos mais importantes procedimentos matemáticos para comprovação de veracidades de conjecturas e resoluções de problemas.

A utilização do princípio de indução finita não possui historicamente uma data inicial, segundo Benjúmeda [1], no seu artigo, Demostrando por Inducción, é difícil determinar o início do uso desse princípio.

> Es difícil establecer cuando se usó por primera vez este método de demostración, pero existen evidencias de que sus ideas principales se remontan a tiempos muy antiguos. Desde épocas anteriores a Cristo, es posible encontrar trabajos de matemáticos que contienen razonamientos cercanos a la inducción matemática, tal es el caso de la demostración de Euclides (300 AC) sobre la existencia de una infinidad de números primos.(BENJÚMEDA, 2009, p.1)

Guderson citou em seu livro Handbook of mathematical induction, Theory and applications [8] sobre um artigo de Bussey´s, 1917, onde Pascal[1] reconhece o italiano D.F. Maurolycus[2] por usar indução matemática no seu livro publicado em 1575. Também citado em 1962, George Polyas[3] no livro *Mathematical Discovery* confirma Pascal recebendo créditos por utilizar o princípio de indução, mas Bourbak´s[4] em 1965, confirma Maurolycus com todos os créditos por ser o primeiro a utilizar. De acordo com Quine "Indução Matemática foi explicitamente reconhecida por Pascal

[1]Blaise Pascal (1623 - 1662), matemático, físico, filósofo, escritor e teólogo francês.

[2]Francesco Maurolico (1494 - 1575) matemático e astrônomo italiano, sua origem é grega. Contribuiu nos campos da geometria, mecânica, óptica, astronomia e música.

[3]George Pólya (1887 - 1985), matemático húngaro.

[4]Nicolas Bourbaki é um pseudônimo francês, coletivo de matemáticos e ex-alunos da École normale supérieure, fundado em 1934.

em 1654 e Fermat[5] em 1659...". Ainda neste mesmo livro de Guderson[8], o autor descreve a citação de Burton[6] e Boyer[7] onde ambos afirmam que o termo *Indução Matemática* foi introduzido por Morgan[8] em 1838, no artigo *Induction Mathematics* que ele escreveu para o *Penny Cyclopedia* e ainda que a expressão *complete induction* popularizou na Alemanha e depois Dedekind[9] a utilizou em um jornal em 1887 (Burton, pág 440 e Boyer pág 404).

Encontramos no livro, Mathematics[14], uma nota histórica do princípio da indução matemática, onde os autores relatam que diferentemente de outros conceitos e métodos, as provas utilizando o princípio da indução matemática não é creditada a apenas uma pessoa, em um momento determinado. Até comenta que os pitagóricos conheciam a indução matemática. O francês matemático, Blaise Pascal recebeu mais créditos pela origem do princípio da indução matemática. Já o nome indução foi utilizado pelo inglês e matemático, John Wallis[10], sendo que mais tarde, o princípio da indução foi utilizado para demonstrar o teorema binomial. De Morgan que foi o primeiro a nomear e definir *indução matemática*, desenvolveu a regra de De Morgan, onde ele determinou uma convergência de uma série matemática. Giuseppe Peano (1858 - 1932) deduziu as propriedades para o conjunto dos naturais, hoje conhecidas como axiomas de Peano. Podemos afirmar que a reafirmação de um dos axiomas de Peano é o princípio da indução matemática.

Percebemos a importância do princípio de indução finita ao longo dos anos para o estudo da matemática por diversos estudiosos matemáticos. No livro, El Método de La Inducción Matemática[18], Sominskii relata que:

> El Metodo de la inducción matemática se usa ampliamente em la demostración matemática. Sin dominar este método, es imposible estudiar a fondo las matemáticas. Además, la idea básica em que se apoya el método de la inducción matemática, es de gran interés no sólo para los estudiantes de matemática y de las ciências aplicadas, sino también para estudiantes de otras disciplinas.(SOMINSKII, 1959, p.5)

[5]Pierre de Fermat (1607 - 1665), matemático francês. Recebeu créditos por desenvolver primeiramente o cálculo infinitesimal.

[6]David M. Burton, Ph.D. pela Universidade de Rochester, professor Emérito da Universidade de New Hampshire, em 1959. Autor de The History of Mathematics: An Introdução, e Elementary Number Theory

[7]Carl Benjamin Boyer (1906 - 1976), matemático norte americano e historiador, autor do livro História da Matemática.

[8]Augustus De Morgan (1806 - 1871), matemático, formulou as leis de De Morgan.

[9]Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916), matemático alemão, contribuiu na teoria dos números, teoria dos anéis, teoria dos conjuntos.

[10]John Wallis (1616 - 1703), matemático britânico, divulgou trabalhos de cálculo precursores aos de Newton.

Ressaltamos que as proposições matemáticas que afirmam serem verdadeiras para todos os números inteiros positivos, podem ser demonstradas por indução matemática. Essa técnica não serve para descobrir os teoremas e fórmulas, mas sim para comprovar que determinada propriedade possui validade dentro do conjunto dos naturais. Como relata Oliveira, no livro Iniciação à Matemática[15] que:

> Muitas descobertas em matemática são feitas baseadas na realização de testes que nos fornecem evidências empíricas. Tais evidências são estudadas para efetivamente verificarmos se os resultados que elas insinuam são verdadeiros. O método da indução finita constitui uma ferramenta muito útil na hora de desvendar a veracidade de resultados provenientes desse tipo de estudo. Esse método é uma das grandes armas do matemático moderno e tem utilidade na solução de vários problemas,...(OLIVEIRA, 2012, p.203).

Chamamos de números ordinais, quando olhamos os números naturais como uma sequência simples. Por meio de axiomas, ou seja, uma lista de propriedades essenciais que caracterizam a estrutura de uma sequência, assim podemos escrever a estrutura do conjunto dos números naturais. Baseado na noção de sucessor de um número natural, Giuseppe Peano caracteriza o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, por meio de uma lista com quatro axiomas.

Axioma 1.1.

1. *Qualquer número natural tem um único sucessor, este é também um número natural.*
2. *Números naturais distintos tem sucessores distintos.*
3. *Existe apenas um número natural que não é sucessor de nenhum outro número, esse número é o 1.*
4. *Seja $\mathcal{N}$ um conjunto de números naturais, sendo $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$. Caso $1 \in \mathcal{N}$ e também se, o sucessor de cada elemento de $\mathcal{N}$ ainda pertence a $\mathcal{N}$, então $\mathcal{N} = \mathbb{N}$.*

Encontrar o sucessor de um número natural é equivalente a adicionar uma unidade. Podemos reescrever os axiomas de Peano denotando o sucessor de n por $n + 1$, temos assim:

1. Qualquer numero natural n tem um único sucessor, representado por $n + 1$.
2. Se $k + 1 = n + 1$, então $k = n$.
3. Existe apenas um número natural, indicado por 1, tal que $n + 1 \neq 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
4. Seja $\mathcal{N}$ um conjunto de números naturais, sendo $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$. Caso $1 \in \mathcal{N}$ e também se, $n + 1 \in \mathcal{N}$, para cada $n \in \mathcal{N}$, então $\mathcal{N} = \mathbb{N}$.

Todos os axiomas acima são fundamentais, o quarto se destaca, e é chamado de *Axioma da Indução.* Ele pode garantir que um certo subconjunto $\mathcal{N}$ dos $\mathbb{N}$, inclui todos os elementos de $\mathbb{N}$. Podemos utilizá-lo para comprovar teoremas relativos a números naturais e construir definições.

Se formos provar que uma propriedade $P(n)$ relativa ao número natural n, é válida para todos os números naturais, devemos mostrar que o subconjunto $\mathcal{N} = \{n : P(n)\}$ é o próprio $\mathbb{N}$.

Assim, pelo item 4 do Axioma 1.1, temos de mostrar que $1 \in \mathcal{N}$ e que o sucessor de cada elemento de $\mathcal{N}$ também pertence a $\mathcal{N}$. Ou seja: para a propriedade $P(n)$

i. $P(1)$ é verdadeira;

ii. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n+1)$.

Se **i** e **ii** são válidos, concluímos a validade de $P(n)$ para todos os valores de n.

É comum chamarmos de caso ou passo base, a verificação de $P(1)$ nas demonstrações por indução finita, quando o 1 é o primeiro valor a se comprovar. Por outro lado, a demonstração de que $P(n)$ implica a validade de $P(n+1)$ é comumente chamada de *passo de indução.*

Uma outra equivalência do Princípio de Indução é o Princípio da Boa Ordenação que enunciaremos a seguir e depois usaremos para provar o Princípio de Indução como um teorema.

Axioma 1.2 (Princípio da Boa Ordenação)**.** *Todo subconjunto $\mathcal{A}$ não vazio dos naturais $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo; isto é, existe um natural $a \in \mathcal{A}$ tal $a \leqslant b$ para todo $b \in \mathcal{A}$.*

Teorema 1.1 (Princípio da Indução Finita - P.I.F.)**.** *Sendo n_0 um número inteiro e não negativo, vamos supor que para cada número inteiro n, de forma que $n \geq n_0$, tenhamos uma proposição $P(n)$. E ainda verificadas as propriedades:*

i. *$P(n_0)$ verdadeira,*

ii. *Se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira para qualquer $n \geqslant n_0$.*

Assim, $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geqslant n_0$.

Demonstração. Seja o conjunto

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{N} : x \geqslant n_0 \text{ e } P(x) \text{ é verdadeira}\},$$

que é não vazio, pois $n_0 \in A$. Assim, devemos mostrar que

$$\mathcal{A} = \{n_0, n_0+1, n_0+2, n_0+3, ...\},$$

isso é o mesmo que mostrar que o conjunto

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{N} : x \geqslant n_0 \text{ e } P(x) \text{ é falsa}\},$$

é o conjunto vazio. Suponha por contradição que $\mathcal{X}$ não seja um conjunto vazio. O princípio da boa ordenação nos garante que existe um elemento mínimo x_0 que pertence ao conjunto $\mathcal{X}$, onde $P(x_0)$ é uma sentença falsa. Observe que,

Como $P(n_0)$ é verdadeira pelo item **i**, temos que $x_0 \neq n_0$, consequentemente $x_0 \geqslant n_0 + 1$.

Como x_0 é o menor elemento de $\mathcal{X}$, segue que $x_0 - 1 \notin \mathcal{X}$, logo $P(x_0 - 1)$ é verdadeira, ou seja $x_0 - 1 \in \mathcal{A}$, e portanto o seu sucessor $(x_0 - 1) + 1 = x_0$ também pertence a $\mathcal{A}$ e portanto $P(x_0)$ é verdadeira, absurdo pois $x_0 \in \mathcal{X}$, donde concluímos que $\mathcal{X}$ é vazio, como queríamos demonstrar. □

Esse princípio de indução finita que acabamos de demonstrar também é conhecido como ***Primeiro Princípio de Indução Finita***.

Encontramos algumas propriedades em que precisamos de uma hipótese de indução que seja valida para todo k tal que $n_0 \leqslant k < n$, nestes casos precisamos de uma outra formulação do Princípio de Indução que enunciaremos e provaremos a seguir, conhecido como ***Segundo Princípio de Indução finita*** ou de ***Princípio de Indução Completa***, e em algumas literaturas ***Indução Forte***

Teorema 1.2 (Segundo Princípio de Indução Finita)**.** *Sendo n_0 um número inteiro e não negativo, vamos supor que para cada número inteiro n, de forma que $n \geqslant n_0$, tenhamos uma proposição $P(n)$. E ainda verificadas as propriedades:*

i. *$P(n_0)$ verdadeira, e*

ii. *Se $P(k)$ é verdadeira para qualquer $n_0 \leqslant k < n$, implicar que $P(n)$ verdadeira. Então, $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geqslant n_0$.*

Demonstração. Como na primeira formulação vamos definir o conjunto M, tal que

$$M = \{m \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } m \geqslant n_0 \text{ e } P(m) \text{ é falsa}\}.$$

Em seguida provaremos que o conjunto M é vazio.

Novamente por absurdo, suponhamos que M não seja vazio, pelo princípio da boa ordenação, existe $m_0 = min(M)$. Temos que $P(n_0)$ é válida pelo item **i.**, logo $m_0 > n_0$. Daí, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $n_0 \leqslant k < m_0$, temos também que $P(k)$ é verdadeira, pois m_0 é mínimo de todos os $m \geqslant n_0$ onde $P(m)$ é falsa. Assim pela hipótese **ii.**, $P(m_0)$ é também verdadeira, o que é absurdo. Portanto, M é vazio, como queríamos demonstrar. □

Uma ideia comparativa do princípio da indução finita é o chamado efeito cascata, ou também efeito dominó, pois quando colocamos os dominós em fila e seguidos um do outro, ao derrubarmos o primeiro deles, ele irá cair sobre o segundo e causará sua queda, e a queda do segundo irá consequentemente causar a queda do terceiro e assim por diante, até que todos os dominós caiam. Esta é uma reação em cadeia, cujo fim é a queda de todos os dominós. Essa ideia do efeito dominó aparece no livro Círculos Matemáticos[6], os autores se referem ao princípio de indução matemática por MIM, Método de Indução Matemática, e também, sugerem um plano geral para soluções de problemas em quatro passos.

De forma segura, o princípio de indução comprova que determinada proposição é válida para uma infinidade de números naturais pois, mostramos que cada vez que a sentença é válida para qualquer número natural, também vale para o natural seguinte. Se a propriedade é satisfeita para o primeiro natural, então será válida para um segundo natural. E por ser válida para o segundo, satisfaz a validez para o terceiro, e assim por diante.

Pode-se gerar uma confusão nos primeiros contatos com as demonstrações por indução, no sentido de confundir que estamos usando, na demonstração, o que queremos provar $P(n)$, mas na verdade a demonstração, no segundo passo, exige a prova de que $P(n)$ implica $P(n+1)$. Reforçamos aqui que nas demonstrações admitimos a validade da hipótese, e por indução, admitimos a validade da *hipótese de indução* $P(n)$ e mostramos a tese, ou seja, que $P(n+1)$ é válida.

O princípio da indução finita possui extensa vantagem para provar que são verdadeiras uma quantidade de afirmações infinitas, pois basta verificar a veracidade de uma única afirmação.

1.2 Induções Errôneas

Importante saber que o princípio de indução finita, não deve ser aplicado, se nas sequências de afirmações, essas forem verdadeiras apenas para alguns valores de n ou não serem verdadeiras para nenhum valor de n, pois a comprovação será falha. O princípio de Indução Finita não comprova a veracidade das conjecturas, afirmações e definições, caso o passo base seja falso, ou então, quando não se prova que $P(n)$ verdadeira, implica a veracidade de $P(n+1)$.

Nos exemplos a seguir, ilustramos situações interessantes para uma indução errônea. O Exemplo 1.3 abaixo se encontra no livro de Hefez [10].

Exemplo 1.3. Seja $P(n)$ a afirmação $n^2 - n + 41$ é um número primo, para todo n natural.

Percebemos facilmente que $P(1)$ é verdadeira, pois $1^2 - 1 + 41 = 41$ e 41 é um número primo. Assim como $P(2)$ é verdadeira ($2^2 - 2 + 41 = 43$), pois também é primo. E podemos pensar que essa conjectura pode ser verdadeira. Mas se verificarmos os casos $P(1), P(2), P(3), ..., P(40)$, realmente obtemos números primos. No entanto, $P(41)$ é falsa. Veja,

$41^2 - 41 + 41 = 41^2$, e portanto não é primo. Logo, mesmo sendo verdadeira inicialmente para alguns valores de n, não podemos comprovar ser verdadeira de modo geral.

O Exemplo 1.4 a seguir se encontra no livro, El Método de La Inducción Matemática[18].

Exemplo 1.4. Os valores absolutos dos coeficientes da forma fatorada de $x^n - 1$ nunca excederão ao número 1.

Quando estudadas as fatorações para vários valores particulares n, os matemáticos notaram que em cada um dos casos estudados, os valores absolutos dos coeficientes nas fatorações nunca excediam o número 1.

$$\begin{aligned}
x - 1 &= x - 1,\\
x^2 - 1 &= (x-1)(x+1),\\
x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1),\\
x^4 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1),\\
x^5 - 1 &= (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),\\
x^6 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1),\\
&\ \ \vdots,
\end{aligned}$$

Acreditaram que se continuarem com qualquer valor para n a propriedade seria válida. Mas, em 1941, V. Ivanov obteve para $x^{105} - 1$, na sua forma fatorada, um dos fatores contendo coeficientes cujos valores absolutos são maiores que 1, veja:

$$\begin{aligned}
x^{105} - 1 = (x-1) &\cdot \big(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\big) \cdot \big(x^4+x^3+x^2+x+1\big)\\
&\cdot \big(x^{24}-x^{23}+x^{19}-x^{18}+x^{17}-x^{16}+x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^8+x^7\\
&-x^6+x^5-x+1\big) \cdot \big(x^2+x+1\big) \cdot \big(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3\\
&-x+1\big) \cdot \big(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1\big) \cdot \big(x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}\\
&-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}\\
&-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^9-x^8-2x^7\\
&-x^6-x^5+x^2+x+1\big)
\end{aligned}$$

Assim, $x^{105} - 1$ não possui essa propriedade.

Encontramos a expressão *Indução Vulgar*, onde Iezzi [12], a classifica como uma generalização de propriedades após verificação de que a propriedade é valida em alguns casos particulares, e ressalta que isso pode conduzir a sérios enganos na matemática. O livro ainda mostra um exemplo clássico, referente aos números primos de Fermat.

Exemplo 1.5. Considere a relação que determina os números primos p, de Fermat, da forma $p = 2^{2^n} + 1$, definida para todo $n \in \mathbb{N} \cup 0$.

Temos assim:

$$\begin{aligned}
n = 0 &\Longrightarrow p = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3\\
n = 1 &\Longrightarrow p = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5\\
n = 2 &\Longrightarrow p = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17\\
n = 3 &\Longrightarrow p = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257\\
n = 4 &\Longrightarrow p = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Fermat acreditava que essa fórmula apresentaria números primos para qualquer valor natural de n. Mas, essa indução vulgar, é falsa, pois o matemático e físico Euler(1707-1783) comprovou que para $n = 5$, o resultado é divisível por 641. Pois,

$$p = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417,$$

portanto $2^{2^5} + 1$ não é primo.

Um outro exemplo notável do uso errôneo da indução, é o da conjectura de Euler, formulado em 1769: É verdadeiro que a soma de três quartas potências seja igual a uma quarta potência? Ou seja, é possível encontrar a, b, c e d números naturais, de forma que $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$? Não encontrando nenhum exemplo numérico que satisfaz essa igualdade, Euler afirmou que essa equação nunca poderia ser satisfeita. Mais de dois séculos depois, no ano de 1987, encontramos o primeiro exemplo, com números de sete e oito dígitos, que satisfez esta igualdade. Usando a computação: $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$, podemos também encontrar outra solução dobrando cada uma das bases dessas potências. Observaram, também, que 422481^4 possui vinte e três dígitos. O raciocínio dedutivo não está sujeito a erros desse tipo. Quando a regra conjecturada é correta e aplicável à situação em análise, a conclusão a que se chega é correta. Partindo de uma premissa falsa, podemos chegar dedutivamente a uma conclusão falsa(princípio em que se baseiam as provas por contradição).

CAPÍTULO 2

Indução no Ensino Fundamental

É comum, no início do primeiro ano do ensino fundamental, estudar os números naturais. E uma das ideias divulgadas, é a de que esses números foram os primeiros a serem usados pelo ser humano, principalmente com a intenção de contar e medir. A ordenação desse conjunto é compreensível para os alunos dessa fase, mas a questão da infinidade aparece carregada com dúvidas e questionamentos. Se as demonstrações de fórmulas, forem conjecturadas e dadas como válidas, a partir de tabelas e termos como "assim sucessivamente"ou "assim por diante", as dúvidas com relação a veracidade destas proposições, para essa infinidade de números naturais não testados, continuarão. Apresentamos a seguir, para o ensino básico, algumas demonstrações utilizando o princípio de indução finita, que podem ser realizadas nas séries finais do ensino fundamental.

Desde o 6º ano do ensino fundamental, nos deparamos com exemplos clássicos, em diversos materiais destinados a essa etapa escolar sem uma demonstração rigorosa e convincente. O princípio de indução finita, comprova com mais rigor as conjecturas, como as que apresentaremos nesses próximos capítulos.

2.1 Indução nas Igualdades

Ao examinarmos os casos de proposições que envolvem as igualdades com somatórios ou produtórios, no ensino básico, as conjecturas apresentadas nos livros, estão corretas, mas na sua maioria não demonstradas. E esses casos, não trazem dificuldades para serem demonstrados através do princípio de indução finita. Segundo Morgado e Carvalho [13]:

> O que torna o uso de indução nesses casos particularmente fácil é que a passagem de $P(n)$ para $P(n+1)$ é quase automática: basta acrescentar o novo termo do somatório a cada membro da igualdade e manipular o lado direito de modo que ele adquira a forma necessária para verificar a veracidade de $P(n+1)$ (MORGADO, CARVALHO, 2015, p.15).

A seguir apresentamos alguns casos com igualdades.

Observando as igualdades,

$$\begin{aligned} 1 = 1 =& 1^2, \\ 1+3 = 4 =& 2^2, \\ 1+3+5 = 9 =& 3^2, \\ 1+3+5+7 = 16 =& 4^2, \\ 1+3+5+7+9 = 25 =& 5^2, \\ &\vdots, \end{aligned} \tag{2.1}$$

obtemos a seguinte conjectura.

Proposição 2.1. *A soma dos n primeiros números naturais ímpares, é n^2, isto é*

$$1+3+5+7+9+11+\cdots+(2n-1) = n^2. \tag{2.2}$$

Demonstração. Para provar que a igualdade (2.2) é realmente verdadeira para todo natural n, podemos usar o princípio de indução finita.

Seja $P(n) : 1+3+5+7+9+11+\cdots+(2n-1) = n^2$, para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

i. Para $n = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira. Verificamos a veracidade na primeira linha das igualdades (2.1), pois $1 = 1^2$.

ii. Admitimos por hipótese de indução que $P(n)$ seja verdadeira para algum natural n, tal que $n > 1$, temos de mostrar que $P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Isto é,

$$P(n+1) : 1+3+5+\cdots+(2n-1)+\big(2(n+1)-1\big) = (n+1)^2.$$

Para que isso ocorra, vamos adicionar a ambos os membros de (2.2) o termo $2(n+1)-1 = 2n+1$. Assim,

$$\begin{aligned} 1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1) &= n^2+\big(2(n+1)-1\big), \\ &= n^2+2n+1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ verdadeiro para um valor n natural qualquer, implica a validez para $P(n+1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

A soma dos primeiros números naturais ímpares, aparecem em diversos livros e materiais didáticos, destinados ao ensino da matemática para turmas do 6º ano do ensino fundamental. Podemos encontrar essa soma nos capítulos relacionados aos números naturais.

De forma semelhante, podemos conjecturar e demonstrar a soma dos primeiros números naturais pares. Observe as igualdades a seguir:

$$\begin{aligned}
2 &= 1 \cdot 2 = 2, \\
2+4 &= 2 \cdot 3 = 6, \\
2+4+6 &= 3 \cdot 4 = 12, \\
2+4+6+8 &= 4 \cdot 5 = 20, \\
2+4+6+8+10 &= 5 \cdot 6 = 30, \\
&\vdots, \\
2+4+6+8+10+\cdots+2n &= n \cdot (n+1).
\end{aligned}$$

Desta forma, apresentamos a proposição a seguir.

Proposição 2.2. *A soma dos* n *primeiros números naturais pares, é dada por* $n \cdot (n+1)$*, isto é*

$$2+4+6+8+\cdots+2n = n \cdot (n+1). \tag{2.3}$$

Demonstração. Iremos provar que a igualdade (2.3) é verdadeira para todo natural n, usando o princípio de indução finita.

Seja $P(n) : 2+4+6+8+\cdots+2n = n \cdot (n+1)$, para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

- **i.** Para $n = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira. Verificamos a veracidade na primeira linha das igualdades, pois $2 = 1 \cdot (1+1) = 1 \cdot 2$.
- **ii.** Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira para o natural n, tal que $n > 1$, devemos mostrar que $P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Isto é,

$$P(n+1) : 2+4+6+8+\cdots+2n+2(n+1) = (n+1) \cdot (n+2).$$

Para que isso ocorra, vamos adicionar a ambos os membros de (2.3) o termo $2(n+1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
2+4+6+8+\cdots+2n+2(n+1) &= n(n+1)+2(n+1) \\
&= (n+1) \cdot (n+2)
\end{aligned}$$

Logo, $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

No ensino fundamental podemos destacar algumas aplicações e propriedades importantes e que são utilizadas com frequência, mas, para a adição de potências de mesma base, não encontramos exemplos nos livros e nos materiais diversos, pesquisados. A seguir, uma proposição relevante para não apenas conjecturar, mas também para provarmos por indução no ensino fundamental, referente a potências. Observe as identidades a seguir,

$$
\begin{aligned}
1 &= 2^1 - 1, \\
2^1 &= 2^2 - 2^1, \\
2^2 &= 2^3 - 2^2, \\
2^3 &= 2^4 - 2^3, \\
2^4 &= 2^5 - 2^4, \\
&\vdots, \\
2^{n-1} &= 2^n - 2^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Fazendo a soma telescópica obtemos o seguinte resultado: $1 + (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) = (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) + 2^n - (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1})$ Assim,

$$1 = 2^n - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}).$$

Podemos conjecturar a proposição a seguir, e provar com o princípio de indução matemática.

Proposição 2.3. *Para todo n natural,*

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1. \tag{2.4}$$

Demonstração. Vamos comprovar que a igualdade (2.4) é, de fato, verdadeira para todo natural n, utilizando o princípio de indução finita.
Seja $P(n) : 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

i. Para $n = 1$, $P(1)$ é verdadeira. Pois, $1 = 2^1 - 1 = 2 - 1$.

ii. Vamos admitir $P(n) : 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ verdadeira para algum natural n, e mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira. Ou seja,

$$P(n+1) : 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Vamos adicionar a ambos os membros de (2.2) o termo 2^n. Desta forma,

$$\begin{aligned}1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n &= 2^n - 1 + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

Logo, $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

No ensino básico, mais precisamente, a partir do 7º ano do ensino fundamental, é comum para agilizar, facilitar ou diminuir os cálculos, utilizarmos em diversas situações de igualdades, a lei do corte.

Proposição 2.4 (Lei do corte). *Se a, b e c são números naturais de forma que*

$$a + c = b + c, \text{ então } a = b.$$

Demonstração. Vamos mostrar por indução finita em c, notando que o caso base da indução é o segundo axioma de Peano. Assim, para $c = 1$, a lei do corte é válida pelo segundo axioma de Peano, ou seja, se os sucessores $a + 1$ e $b + 1$ de a e b são iguais, então $a = b$. Vamos supor agora que a propriedade seja válida para algum número natural c. Isto é,
$a + c = b + c$, então $a = b$.
Supomos agora que $a + (c+1) = b + (c+1)$. Pela propriedade associativa da adição, essa igualdade é equivalente a $(a+1) + c = (b+1) + c$. Porém, pela hipótese de indução, $a + 1 = b + 1$, então $a = b$. Daí, se a propriedade vale para c, então é válida para $c + 1$. Portanto pelo princípio de indução finita, a lei do corte é válida para todo número c natural. □

2.2 Indução em Definições por Recorrência

O princípio de indução finita é bastante utilizado para demonstrações, mas também pode ser utilizado para comprovar uma expressão definida por recorrência. Para definirmos uma expressão E_n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, sendo $n \geqslant a$, definimos E_a e devemos mostrar como determinar E_{a+1} a partir de E_n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tendo $n \geqslant a$. Desta forma, dizemos que E_n foi definida por recorrência.

Vamos definir potência, utilizando a recorrência.

Dado um elemento a de um conjunto A definido com duas operações seguindo as leis básicas da aritmética, definimos as potências a^n com $n \in \mathbb{Z}$, onde $n \geqslant 0$, por recorrência.

Fazemos $a^1 = a$ e $a^0 = 1$, para $a \neq 0$. Como a^n está definido, definimos $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

O estudo das potenciações e suas propriedades está presente em todas as séries do ensino básico. Vamos provar por indução, algumas das propriedades mais utilizadas no ensino básico com relação à potenciação.

Proposição 2.5 (Produto de potências de mesma base). *Dados $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, e $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então,*

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}. \tag{2.5}$$

Demonstração. Fixados os valores a e x arbitrários. Vamos demonstrar por indução sobre y.

i. Por definição, temos que $a^x \cdot a^0 = a^x \cdot 1 = a^x = a^{x+0}$. ou seja a afirmação (2.5) é verdadeira para $y = 0$.

ii. Supondo que (hipótese de indução),

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

é válida para algum inteiro $y \geqslant 0$. Podemos escrever

$$a^x \cdot a^{y+1} = a^x \cdot (a^y.a^1) = (a^x \cdot a^y) \cdot a \overset{H.I.}{=} a^{x+y} \cdot a = a^{(x+y)+1} = a^{x+(y+1)}.$$

O que mostra que essa propriedade é válida para $(y+1)$, portanto pelo princípio de indução finita, temos que a afirmação (2.5) é verdadeira para todo real a não nulo e todos os inteiros não negativos x e y. □

Proposição 2.6 (Potência de uma potência). *Dados $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, e $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então,*

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \tag{2.6}$$

Demonstração. Fixados os valores a e x arbitrários. Vamos demonstrar por indução sobre y.

i. Por definição, temos que $(a^x)^0 = 1 = a^0 = a^{0 \cdot x}$, ou seja a afirmação (2.6) é verdadeira para $y = 0$.

ii. Supondo que (hipótese de indução), $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, é válida para algum $y > 0$. Assim,

$$(a^x)^{y+1} = (a^x)^y \cdot a^x \overset{H.I.}{=} a^{xy} \cdot a^x = a^{xy+x} = a^{x(y+1)}.$$

O que mostra que essa propriedade é válida para $y + 1$. Portanto, pelo princípio de indução finita, temos que a afirmação (2.6) é verdadeira para todo real a e todos $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. □

Proposição 2.7 (Potência de um produto)**.** *Dados a e $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, e $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então,*

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x. \tag{2.7}$$

Demonstração. Vamos demonstrar por indução sobre x.

i. Temos que $(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$. A identidade (2.7) é verdadeira para $x = 0$.

ii. Supondo por hipótese de indução que, $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$, é válida para algum inteiro não negativo x. Segue,

$$(a \cdot b)^{x+1} = (a \cdot b)^x \cdot (a \cdot b)^1 = (a \cdot b)^x \cdot (a \cdot b) \overset{H.I.}{=} a^x \cdot b^x \cdot a^1 \cdot b^1 = a^x \cdot a^1 \cdot b^x \cdot b^1 = a^{x+1} \cdot b^{x+1}.$$

O que mostra que essa propriedade é válida para $x + 1$, portanto pelo princípio de indução finita, temos que a afirmação (2.7) é verdadeira para todos os reais a e b não negativos e x inteiro não negativo. □

2.3 Indução no Jogo Torre de Hanoi

A Torre de Hanoi mostrada na Figura 2.1 é um jogo ou um "quebra-cabeça" com três hastes verticais, onde em uma dessas hastes são colocados discos com diferentes diâmetros. Os discos são colocados de forma que o menor sobrepõe o maior. Assim, podemos pensar em como transferir todos os discos para uma outra haste, movendo um disco de cada vez, sendo que um disco maior nunca sobrepõe um disco menor com um número mínimo de movimentos?

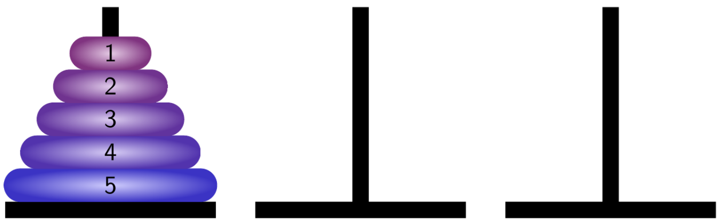


Figura 2.1: *Torre de Hanoi, com 5 discos*

Veja que com d discos podemos reduzir para $d - 1$ discos, sendo $d > 1$. Pois se soubermos transferir $d - 1$ discos de uma haste para outra, saberemos como transferir d discos também.

Para se transferir d discos de uma extremidade para a a outra, temos de transferir o disco de maior diâmetro de uma extremidade para a outra, ou seja, temos de remover os $d - 1$ discos superiores para a haste central. Após a transferência do disco de maior diâmetro para uma das extremidades fica restando a transferência dos demais $d - 1$ da haste central para a extremidade onde está o de maior diâmetro.

Se chamarmos de m_d o número mínimo de movimentos que são necessários para transferir d discos de uma haste para a outra, podemos escrever a igualdade

$m_d = m_{d-1} + 1 + m_{d-1}$, o mesmo que escrevermos $m_d = 2m_{d-1} + 1$, onde $d > 1$.

Uma igualdade equivalente pode ser escrita da forma:

$m_{d+1} = 2m_d + 1$, onde os valores de d são números naturais. Sabemos que $m_1 = 1$, pois com um movimento transferimos de haste um disco, e que $m_{d+1} = 2m_d + 1$, para qualquer $d \in \mathbb{N}$, assim m_d está definida por recorrência.

Desta forma,

$n°$ de discos	$n°$ mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127

Tabela 2.1: *Tabela de movimentos*

Assim, $(1,1); (2,3); (3,7); (4;15); (5,31); (6,63)$ e $(7,127)$ são exemplos de pares ordenado (d, m_d), donde podemos fazer a conjectura do termo geral ser $m_d = 2^d - 1$. Para mostrar que essa conjectura está correta, vamos utilizar o princípio de indução matemática.

Proposição 2.8. *Na Torre de Hanoi, seja m_d o número mínimo de movimentos que são necessários para transferir d discos de uma haste para a outra, então $m_d = 2^d - 1$.*

Demonstração.

i. Para $d = 1$ a conjectura é válida, pois $m_1 = 1 = 2^1 - 1$.

ii. vamos agora supor que a conjectura seja válida para algum valor d natural, isto é, $m_d = 2^d - 1$.

Para retirar o maior disco da haste inicial precisamos mover $d - 1$ discos para a outra haste, com o mínimo de movimentos, assim

$$m_{d+1} = 2m_d + 1 \overset{H.I.}{=} 2(2^d - 1) + 1 = 2^{d+1} - 2 + 1 = 2^{d+1} - 1,$$

temos que a proposição é verdadeira para $d + 1$. Portanto, pelo princípio de indução finita, a conjectura é válida para todo $d \in \mathbb{N}$. $\square$

Vamos agora para um outro problema com a Torre de Hanoi. Suponha que desejamos passar d discos de uma das hastes extrema para outra, de forma que não é permitido passar de forma direta um disco de um extremo para outro, isso significa que todo movimento tem origem ou destino a haste que está no centro.

Se, inicialmente todos os discos estiverem em um extremo, para se passar um só disco se faz necessário dois movimentos: o primeiro que leva até a haste central e o segundo movimento para levar da haste central até o outro extremo.

Vamos verificar que são necessários, no mínimo, 8 movimentos para se transferir dois discos. De fato, com dois movimentos, passamos o disco menor para a terceira haste, em seguida, o disco maior é passado para a haste central. Em mais dois movimentos, o disco menor retorna para a primeira haste e o maior é passado para a terceira haste, e por fim, com mais dois movimentos, o disco menor é levado para a terceira haste.

Se denotarmos por h_d o número mínimo de movimentos que se faz necessário para transportar d discos, por recorrência podemos expressar h_{d+1} da seguinte forma: $h_{d+1} = 3h_d + 2$. Podemos mostrar que o número mínimo de movimentos que são necessários para se transferir d discos é $h_d = 3^d - 1$, para qualquer $d \in \mathbb{N}$. E faremos essa demonstração utilizando o princípio de indução finita.

Demonstração. Fazendo indução sobre o número de discos d, temos,

- **i.** Para $d = 1$, dois movimentos, como $3^1 - 1 = 3 - 1 = 2$, a proposição está correta.
- **ii.** Suponhamos agora que a proposição esteja correta para d discos, ou seja, $h_d = 3^d - 1$.

Pela forma recorrente temos,

$$h_{d+1} = 3h_d + 2 \overset{H.I.}{=} 3(3^d - 1) + 2 = 3^{d+1} - 3 + 2 = 3^{d+1} - 1,$$

comprovando que a proposição é valida para $d+1$ discos. Portanto, pelo princípio de indução finita, a proposição é verdadeira para qualquer que seja o número de disco, isto é, $h_d = 3^d - 1$, para qualquer $d \in \mathbb{N}$. $\square$

2.4 Indução nas Desigualdades

O princípio de indução finita é também adequado para provar resultados em aritmética, em particular, situações que envolvem desigualdades com números naturais.

Podemos empregar a indução em demonstrações de desigualdades, estas às vezes aparecem associadas a somatórios ou produtórios. Nas desigualdades, a inclusão de termos adicionais a ambos os membros, geralmente não se chega à desigualdade desejada. Assim, em muitos casos se faz necessário demonstrar uma outra desigualdade para chegarmos a desigualdade que queremos comprovar. O estudo de juros compostos e juros simples, a partir do 7º ano do ensino fundamental, podem ser relacionados com a desigualdade de Bernoulli [1].

Proposição 2.9 (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Temos que* $(1+h)^n \geqslant 1+nh$*, para qualquer* $n \in \mathbb{N}$ *e o real* $h > -1$*.*

Demonstração. Seja

$$P(n) : (1+h)^n \geqslant 1+nh.$$

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $(1+h)^1 = 1+h = 1+1\cdot h$.

ii. Vamos supor que $P(n)$, seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$(1+h)^n \geqslant 1+nh.$$

Como, $1+h$ é um valor positivo, pois $h > -1$, vamos multiplicar ambos os membros da desigualdade da hipótese de indução por $1+h$. Assim:

$$(1+h)^n \cdot (1+h) \geqslant (1+nh)\cdot(1+h) = 1+(n+1)h+nh^2.$$

Então,

$$(1+h)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)h+nh^2 \geqslant 1+(n+1)h,$$

pois $nh^2 \geqslant 0$. Assim, podemos afirmar que $(1+h)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)h$, ou seja, $P(n) \longrightarrow P(n+1)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $(1+h)^n \geqslant 1+nh$, para qualquer n natural e todo real $h > -1$. □

Podemos ver de forma ampla com um caso geral para n fatores no primeiro membro da desigualdade e consequentemente $n+1$ parcelas no segundo membro, e nesse caso, o princípio de indução finita permite comprovar a desigualdade.

Proposição 2.10. *Sejam os números reais* x_i*, com* $i = 1, 2, 3, ..., n$ *e* $x_i > -1$*, tal que todo* x_i *possui o mesmo sinal. Então,*

$$(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n. \tag{2.8}$$

[1] Jakob Bernoulli, ou Jacob I Bernoulli (1654 - 1705), um dos matemáticos proeminentes da família Bernoulli.

Demonstração. Vamos utilizar o princípio de indução finita. Seja

$$P(n) : (1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

i. Para $n = 1$, temos $P(1)$ verdadeira, pois $1 + x_1 \geqslant 1 + x_1$.

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja verdadeira para algum n natural, tal que $n > 1$.

Na desigualdade (2.8) multiplicamos ambos os membros por $(1 + x_{n+1})$. E como $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot x_{n+1} \geqslant 0$. Então,

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \cdot (1 + x_{n+1}) \geqslant (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot (1 + x_{n+1}), \tag{2.9}$$

e denotando o lado esquerdo da desigualdade (2.9) por,

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \cdot (1 + x_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} (1 + x_i)$$

temos

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1} (1 + x_i) &\geqslant (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot 1 + (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot x_{n+1} \\
&\geqslant (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1} + \big(x_1 \cdot x_{n+1} + x_2 \cdot x_{n+1} + \cdots + x_n \cdot x_{n+1}\big) \\
&\geqslant \big(1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}\big) + \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot x_{n+1}}_{\geqslant 0} \\
&\geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}.
\end{aligned}$$

O que mostra a validade de $P(n)$ para um valor n natural qualquer, implica a validez para $P(n + 1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, para os números reais $x_i > -1$, com $i = 1, 2, 3, ..., n$, tal que todo x_i possui o mesmo sinal, concluindo a demonstração da proposição. □

As potências de base dois, estudadas constantemente no ensino fundamental séries finais, podem ser aplicadas em diversas situações ao longo de todo o ensino básico. A seguir, temos uma desigualdade com essa potência, que pode ser trabalhada desde o primeiro ano do ensino básico e comprovada por indução finita.

Proposição 2.11. *Para qualquer n,*

$$2^n > n \tag{2.10}$$

Demonstração. Para provar que a desigualdade (2.10) é realmente verdadeira para todo natural n, vamos utilizar o princípio de indução finita. Seja $P(n) : 2^n > n$, para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

i. Para $n = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira. Pois $2^1 > 1$.

ii. Admitimos $P(n) : 2^n > n$ verdadeira para um natural n, tal que $n > 1$, temos de mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira. Isto é, $2^{n+1} > n + 1$

Para isso, vamos multiplicar ambos os membros da desigualdade (2.10) por 2. Assim,

$$2 \cdot 2^n > 2 \cdot n = n + n > n + 1,$$

pois $n+n > n+1$, para todo $n > 1$. Logo, admitindo $P(n)$ verdadeira para um valor n natural qualquer, temos $P(n+1)$ verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

A desigualdade a seguir apresenta uma curiosidade a mais para os alunos do ensino fundamental, com relação a potência de ordem superior, pouco estudada nessa fase do ensino. Essa desigualdade é um exemplo do livro [15].

Proposição 2.12. *Para todo n natural, prove que*

$$3^{n-1} < 2^{n^2}. \tag{2.11}$$

Demonstração. Vamos provar que a desigualdade (2.11) é verdadeira para todo natural n, utilizando o princípio da indução finita. Seja $P(n) : 3^{n-1} < 2^{n^2}$, para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

i. Para $n = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira. Pois $3^{1-1} = 3^0 = 1 < 2 = 2^{1^2} = 2^1$.

ii. Vamos admitir $P(n) : 3^{n-1} < 2^{n^2}$ verdadeira para um natural n, tal que $n > 1$, temos de mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira. Isto é, $3^n < 2^{(n+1)^2}$.

Como

$$3^n = 3^{n-1} \cdot 3 \overset{H.I.}{<} 2^{n^2} \cdot 2^1 = 2^{n^2+1} < 2^{n^2+2n+1} = 2^{(n+1)^2},$$

pois $n^2 + 1 < n^2 + 2n + 1$. Pelo princípio da indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

2.5 Indução na Divisibilidade

Para descobrir antecipadamente quando um número natural é múltiplo de outro, utilizamos os critérios de divisibilidade. Esses critérios de divisibilidade são apresentados no $6^{\underline{o}}$ ano do ensino fundamental. Algumas divisibilidades podem ser apresentadas, de forma a motivar o estudo com relação às divisibilidades, no ensino básico. Muitos problemas que envolvem divisibilidade aparecem constantemente em olimpíadas matemáticas. E para comprová-las utilizamos o princípio de indução finita. A seguir apresentamos proposições que podem ser estudadas e comprovadas no ensino fundamental. Nesta seção usaremos a notação $a\Big|b$ para indicar que o número a divide o número b.

Proposição 2.13. *Para qualquer número inteiro não negativo n, temos que* $3\Big|\left(n^3 - n\right)$.

Demonstração. Seja $P(n) : 3\Big|\left(n^3 - n\right)$, para qualquer número inteiro não negativo n. Então,

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $3\Big|\left(1^3 - 1\right) = 0$.

ii. Vamos supor $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 1$. Provar que 3 divide $n^3 - n$ basta mostra que $n^3 - n = 3k$, para $k \in \mathbb{Z}$.

$$P(n+1) : 3\Big|\left[(n+1)^3 - (n+1)\right].$$

Pela hipótese de indução existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n^3 - n = 3k$, logo

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\
&= (\underbrace{n^3 - n}_{3k}) + 3(n^2 + n) \\
&\overset{H.I.}{=} 3k + 3(n^2 + n) \\
&= 3 \cdot (\underbrace{k + n^2 + n}_{\in \mathbb{Z}})
\end{aligned}$$

Logo, $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

A seguir, uma proposição interessante, onde podemos comprovar que o 4 divide o produto de dois números quadrados perfeitos consecutivos.

Proposição 2.14. *Para qualquer número natural n, temos que*

$$4\Big|n^2 \cdot (n+1)^2.$$

Demonstração. Seja $P(n) : 4\Big|n^2 \cdot (n+1)^2$, para qualquer n natural. Então,

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $4\Big|1^2 \cdot (1+1)^2 = 1 \cdot 2^2 = 4$.

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 1$. Ou seja, exist $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n^2 \cdot (n+1)^2 = 4k$. Devemos mostrar que

$$4 \Big| (n+1)^2 \cdot (n+2)^2.$$

Como,

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 &= (n+1)^2 \cdot (n^2+4n+4) \\
&= n^2 \cdot (n+1)^2 + 4n \cdot (n+1)^2 + 4(n+1)^2 \\
&\overset{H.I.}{=} \underbrace{n^2 \cdot (n+1)^2}_{4k} + (4n+4) \cdot (n+1)^2 \\
&= 4k + (4n+4) \cdot (n+1)^2 \\
&= 4 \cdot \underbrace{\left[k + (n+1) \cdot (n+1)^2\right]}_{\in \mathbb{Z}}.
\end{aligned}$$

O que mostra $P(n+1)$ verdadeira. Logo, a validez de $P(n)$ para um valor n natural qualquer, implica a validade para $P(n+1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Os produtos notáveis e as fatorações são temas amplamente explorados no ensino fundamental, sendo frequentemente abordados nas salas de aula. Nos materiais didáticos, é comum encontrar exercícios e problemas relacionados aos três produtos notáveis mais recorrentes, que são:

I. $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$.

II. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

III. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

A seguir, uma generalização interessante do produto notável apresentado no item **I** acima, envolvendo a divisibilidade. Essa generalização pode ser estudada e comprovada no ensino básico a partir do 8º ano, onde geralmente se estuda os produtos notáveis.

Proposição 2.15. *Para qualquer número inteiro positivo n, $a-b$ é fator de $a^n - b^n$.*

Vamos provar por indução finita essa afirmação.

Demonstração. Seja $P(n) : (a-b)$ é fator de $a^n - b^n$ para qualquer n natural. Então,

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $a - b = a^1 - b^1$, e sabemos que todo número é fator dele mesmo.

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(a-b)$ é fator de $a^n - b^n$ para algum n natural. Essa afirmação, pode ser escrita como $a^n - b^n = (a-b)Q(a,b)$, donde $Q(a,b)$ é um polinômio de grau $n-1$. Temos de mostrar que $(a-b)$ é fator de $a^{n+1} - b^{n+1}$. Donde

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a^{n+1} - ab^n + ab^n - b^{n+1} \\ &= a(a^n - b^n) + b^n(a-b) \\ &\overset{H.I.}{=} a[(a-b)Q(a,b) + b^n(a-b)] \\ &= (a-b)[aQ(a,b) + b^n] \end{aligned}$$

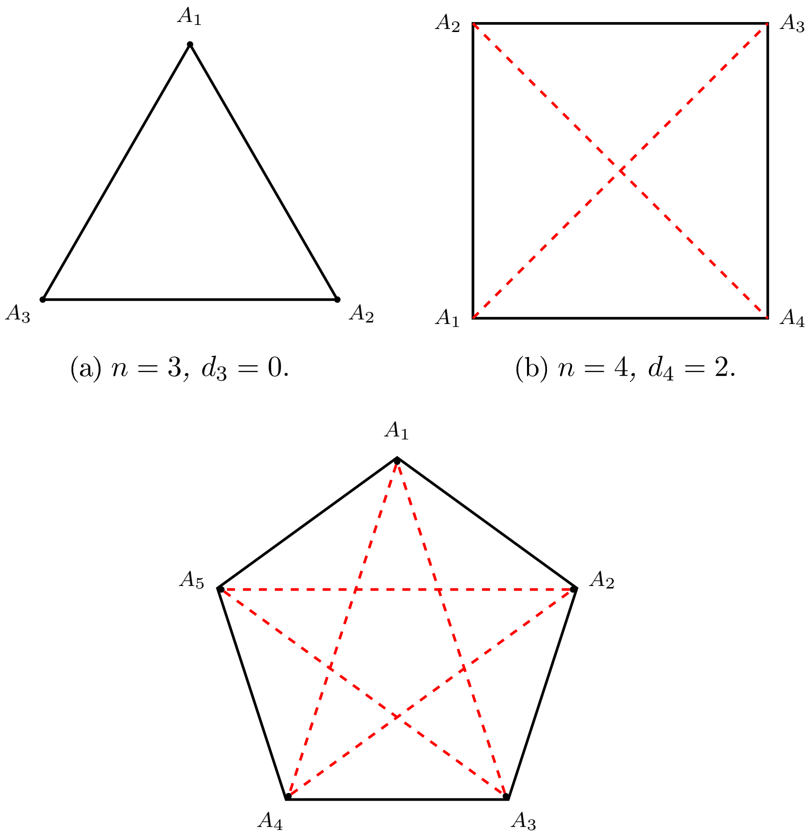
Sendo $R(a,b) = aQ(a,b) + b^n$ de grau n, então $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \cdot R(a,b)$. Assim, $(a-b)$ é fator de $(a^{n+1} - b^{n+1})$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.6 Indução na Geometria

No oitavo ano do ensino fundamental, já deparamos com a equação que determina o número de diagonais de um polígono convexo, podemos prová-la com o uso do princípio de indução finita.

Seja n o número de lados de um polígono convexo e d_n o número de suas diagonais. Observando as figuras a seguir é fácil percebermos que:

$$n = 3 \Longrightarrow d_3 = 0, \quad n = 4 \Longrightarrow d_4 = 2 \quad e \quad n = 5 \Longrightarrow d_5 = 5.$$



(a) $n = 3,\ d_3 = 0.$ (b) $n = 4,\ d_4 = 2.$

(c) $n = 5,\ d_5 = 5.$

Figura 2.2: *Diagonais de polígonos convexos*

Podemos perceber também que de cada vértice partem $n-3$ diagonais, pois para obtermos uma diagonal não podemos ligar um vértice a ele mesmo e nem aos dois a ele adjacentes. Observe também que a diagonal $\overline{A_1A_2}$ é a mesma diagonal $\overline{A_2A_1}$. Podemos então conjecturar que

$$d_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

Proposição 2.16. *O número de diagonais de um polígono convexo de n lados, $n \geqslant 3$ é*

$$d_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}. \tag{2.12}$$

Demonstração. Considerando os pontos A_j com $j = 1, 2, ..., n, (n+1)$, como sendo os vértices de um polígono de $n+1$ lados, como na Figura 2.3.

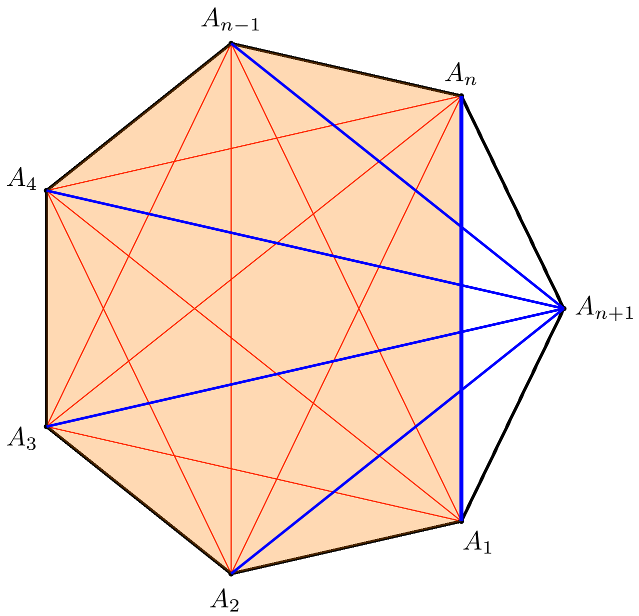


Figura 2.3: *Polígono convexo de $n+1$ lados*

Vamos utilizar o princípio de indução finita, para provar que essa relação é verdadeira para $n \geqslant 3$.

i. Para $n = 3$ temos $d_3 = 0 = \dfrac{3 \cdot (3-3)}{2}$, e a afirmação é verdadeira.

ii. Vamos supor que d_n seja verdadeira para algum natural $n > 3$. Devemos mostrar que d_{n+1} é verdadeira. Isto é,

$$d_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Acrescentando mais um vértice, A_{n+1} a um polígono de n lados, de forma que o novo polígono formado seja também um polígono convexo (basta que o triângulo definido pelos vértices A_1, A_{n+1} e A_n, seja um triângulo acutângulo), veja Figura 2.3. Percebemos que $\overline{A_1A_n}$ passa a ser uma diagonal, e como A_1 e A_n é consecutivo a A_{n+1}, partem de A_{n+1}, $(n-2)$ novas diagonais. Logo,

$$\begin{aligned} d_{n+1} = d_n + 1 + (n-2) &\overset{H.I.}{=} \frac{n(n-3)}{2} + (n-2) + 1 \\ &= \frac{n(n-3) + 2(n-1)}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução finita, $d_n = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$ é válida para qualquer natural $n \geqslant 3$. $\square$

Proposição 2.17. *A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo S_n de n lados, com $n \geqslant 3$ é $S_n = (n-2) \cdot 180°$.*

Demonstração. **i.** Para $n = 3$ temos $S_3 = (3 - 2) \cdot 180° = 180°$, e a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, verdadeira a proposição.

ii. Vamos supor que S_n seja verdadeira para algum natural $n > 3$. Devemos mostrar que S_{n+1} é verdadeira. Ou seja, $S_{n+1} = (n - 1) \cdot 180°$.

Considerando os pontos A_j com $j = 1, 2, ..., n.$, como sendo os vértices de um polígono de n lados, e a_k, com $k = 1, 2, ..., n.$, os ângulos internos desse polígono, como na Figura 2.3.

Acrescentando mais um vértice, A_{n+1}, de forma que o novo polígono formado seja também um polígono convexo, veja Figura. Percebemos que o novo polígono contém um triangulo $A_{n+1}A_nA_1$ a mais, cuja soma dos ângulos internos sabemos ser 180°. Assim a soma dos ângulos internos do polígono de $n + 1$ será a soma dos ângulos internos do polígono de n lados mais 180°. Portanto,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + 180° \\ &\overset{H.I.}{=} (n - 2) \cdot 180° + 180° \\ &= (n - 2 + 1) \cdot 180° \\ &= (n - 1) \cdot 180°. \end{aligned}$$

O que mostra $S_n \longrightarrow S_{n+1}$. Daí, pelo princípio da indução finita S_n é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geqslant 3$. □

A condição de existência de um triângulo, diz que a medida de qualquer um dos lados de um triângulo é menor que a soma das medidas dos outros dois lados. Essa desigualdade pode ser escrita para a e b números reais, na forma:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \tag{2.13}$$

Demonstração. Sabemos que $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, para todo x real. A partir dessa desigualdade:

I. para $a + b \geqslant 0$, $|a + b| = a + b \leqslant |a| + |b|$.

II. para $a + b < 0$, $|a + b| = -(a + b) = -a - b \leqslant |a| + |b|$.

Assim, pelas desigualdades, **I** e **II** acima, e sabendo que a igualdade em (2.13) ocorre quando a e b possuem os mesmos sinais, então $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, para a e b reais.

Essa desigualdade triangular pode ser ampliada para o que chamamos de Caso Geral da Desigualdade Triangular. Caso geral que podemos utilizar e comprovar no ensino básico, através do princípio de indução finita. □

Proposição 2.18. *(Caso Geral da Desigualdade Triangular). Sejam os números reais não-nulos $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ com $n \in \mathbb{N}$, então*

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$$

sendo que a igualdade ocorre quando $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ *possuem os mesmos sinais.*

Demonstração. Vamos utilizar o princípio de indução finita. Seja

$$P(n) : |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$$

i. Para $n = 1$ a proposição é verdadeira, pois $|a_1| = |a_1|$.

ii. Para $n = 2$, $|a_1 + a_2| \leqslant |a_1| + |a_2|$, verdadeiro pela desigualdade triangular(2.13).

iii. Vamos supor que $P(n)$ seja verdadeira para algum natural $n > 2$. Devemos mostrar que $P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Ou seja,
$P(n+1) : |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}| \leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}|$.

Para números reais diferentes de zero, temos que

$$\begin{aligned} |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}| &= |(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_{n+1}| \\ &\overset{n=2}{\leqslant} |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}| \\ &\overset{H.I.}{\leqslant} |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}| \end{aligned}$$

Logo, a desigualdade vale para $P(n+1)$, ou seja $P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Portanto, pelo princípio da indução finita $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

CAPÍTULO 3

Indução no Ensino Médio

Para o ensino médio, procuramos ampliar gradativamente o nível de dificuldade das proposições em relação as que foram apresentadas para o ensino fundamental. Buscamos relacionar as proposições com os conteúdos e habilidades previstas nesse nível de ensino. Assim, esperamos uma maior apropriação e apreciação do poder e da beleza do raciocínio matemático. Esperamos que o estudo das proposições que apresentamos a seguir, os estudantes possam aprender mais com os padrões e técnicas utilizadas nas demonstrações, e aprimorar assim suas habilidades com esse recurso valioso, que é o princípio de indução finita.

3.1 Indução e Progressões Aritméticas - P.A.

Uma sequência de números (3.7), em que a diferença entre qualquer termo e o seu antecessor é constante, é uma progressão aritmética(P.A.). Chamamos essa diferença constante de razão da PA, e a indicaremos por r. O estudo das progressões aritméticas ocorrem no $2^{\underline{o}}$ ano do ensino médio.

Proposição 3.1 (Termo Geral da P.A.). *Em uma progressão aritmética de razão r, o n-ésimo termo a_n é dado por $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, para todo n natural.*

Demonstração. Seja a_n o n-ésimo termo da progressão aritmética de razão r, e $P(n)$ a proposição $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, para todo n natural. Utilizando o princípio de indução finita, temos:

i. Para $n = 1$, a proposição é verdadeira, pois $a_1 = a_1 + (1-1)\cdot r = a_1$.

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum n natural maior que 1. Isto é $P(n) : a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$. Vamos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira.

Nas progressões aritméticas, a diferença entre dois termos consecutivos é igual à razão, segue que

$$r = a_{n+1} - a_n,$$

assim

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + r \\ &\overset{H.I.}{=} a_1 + (n-1)\cdot r + r \\ &= a_1 + n\cdot r - r + r \\ &= a_1 + nr \\ &= a_1 + [(n+1)-1]\cdot r. \end{aligned}$$

O que mostra $P(n+1)$ verdadeira. Logo, pelo princípio da indução finita $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Em relação a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, sendo

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n, \tag{3.1}$$

e, se escrevemos na ordem contrária os termos, de trás para frente, temos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1. \tag{3.2}$$

Somando as equações (3.1) e (3.2) termo a termo, obtemos

$$2\cdot S_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1) \tag{3.3}$$

De fato, para qualquer $i = 1, 2, 3, ..., n$, temos que

$$\begin{aligned} a_i + a_{n+1-i} &= a_1 + (i-1)r + a_1 + (n+1-i-1)r \\ &= a_1 + [a_1 + (n-1)r] \\ &= a_1 + a_n \end{aligned}$$

Podemos observar que todas as parcelas da soma (3.3) são iguais a $(a_1 + a_n)$. Logo,

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n)\cdot n,$$

e, portanto,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}.$$

Vamos agora provar, utilizando o princípio de indução finita, que essa conjectura é verdadeira para todo n natural.

Proposição 3.2 (Soma dos Termos de uma P.A.). *A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ é dada por*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração. Seja

$$S(n) : a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

i. $S(1)$ é válida, pois $a_1 = \dfrac{(a_1 + a_1)1}{2} = \dfrac{2 \cdot a_1}{2} = a_1$.

ii. Vamos supor que $S(n)$ seja verdadeira, para algum n natural maior que 1, ou seja

$$S(n) : a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Vamos adicionar o próximo termo neste somatório, isto é a_{n+1}, a ambos os membros da igualdade acima.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_{n+1}$$

ou seja

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_{n+1} \\ &= \frac{(a_1 + a_n)n + 2 \cdot a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_{n+1} - r)n + a_{n+1} + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_{n+1}) \cdot n + a_{n+1} + a_{n+1} - n \cdot r}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_{n+1}) \cdot n + a_{n+1} + a_1}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_{n+1}) \cdot (n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = \dfrac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}$, que mostra $S(n+1)$ verdadeira.

Daí, pelo princípio da indução finita $S(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$. □

Corolário 3.3. *A soma $S(n)$ a soma dos n primeiros números naturais, é*

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Demonstração. Basta toma $a_1 = 1$ e $a_n = n$ na proposição anterior. □

3.2 Indução e Progressões Geométricas - P.G.

Uma sequência de números (3.7), em que o quociente entre qualquer termo sucessor e o seu antecessor(não nulo), a partir do segundo, é constante, é uma progressão geométrica(P.G.). Chamamos esse quociente de razão da P.G., e indicaremos por q. As progressões geométricas são estudadas no 2º ano do ensino médio. Por essa propriedade podemos perceber que

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 \cdot q,\\
a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2,\\
a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3,\\
&\vdots\\
a_n &= a_1 \cdot q^{n-1}.
\end{aligned}$$

O que nos leva a seguinte proposição.

Proposição 3.4 (Termo Geral de uma P.G.). *Em uma progressão geométrica de primeiro termo a_1 e razão q, o $n-$ésimo termo a_n, para todo n natural, é dado por*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Utilizando o princípio de indução finita, temos:

i. Para $n = 1$, a proposição é verdadeira, pois $a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1$.

ii. Supondo $P(n)$ seja válida para algum n natural maior que 1. Isto é

$$P(n) : a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Como, $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Multiplicando ambos os termos da igualdade (3.4) por q. Segue que:

$$\begin{aligned}
a_n \cdot q &= a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q\\
a_{n+1} &= a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q\\
&= a_1 \cdot q^{n-1+1}\\
&= a_1 \cdot q^{(n+1)-1}.
\end{aligned}$$

O que nos mostra $P(n+1)$ verdadeira. Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

A fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, muito comum no ensino básico, pode ser demonstrada utilizando o princípio de indução finita.

Dada uma progressão geométrica de razão q e primeiro termo a_1, vamos denotar por S_n a soma dos n primeiros termos, para $q \neq 1$ e n inteiro não negativo. Desta forma,

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

Segue da Proposição 3.4, que

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1}. \tag{3.5}$$

Ao multiplicarmos ambos os membros da equação (3.5) pela razão q, obtemos:

$$S_n \cdot q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n. \tag{3.6}$$

Subtraindo de (3.6) a equação (3.5), termo a termo, temos

$$\begin{aligned} S_n \cdot q - S_n &= a_1 q^n - a_1, \\ S_n \cdot (q-1) &= a_1 q^n - a_1, \\ S_n &= \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}. \end{aligned}$$

Utilizaremos agora o princípio de indução finita para comprovarmos que essa conjectura é verdadeira.

Proposição 3.5 (Soma dos n Primeiros Termos de uma P.G.)**.** *A soma dos n primeiros termos de uma P.G., com $q \neq 1$, é dada por*

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1} = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1-q}. \tag{3.7}$$

Demonstração. Seja a proposição $S(n)$: a soma dos n primeiros termos de um P.G. é $S_n = \dfrac{a_1 q^n - a_1}{q-1}$, temos

i. $S(1)$ é válida, pois para $n = 1$ temos: $S_1 = \dfrac{a_1 q^1 - a_1}{q-1} = a_1$.

ii. Vamos supor que $S(n)$ seja verdadeira para algum natural $n > 1$. Assim, pelo princípio de indução finita, devemos mostrar que $S(n+1)$ também é verdadeira.

Adicionando o termo a_1q^n, em ambos os lados da igualdade (3.7), temos

$$\begin{aligned}
S_n + a_1q^n &= \frac{a_1q^n - a_1}{q-1} + a_1q^n,\\
S_{n+1} &= \frac{a_1q^n - a_1}{q-1} + \frac{(a_1q^n)\cdot(q-1)}{q-1},\\
&= \frac{a_1q^n - a_1}{q-1} + \frac{a_1q^{n+1} - a_1q^n}{q-1},\\
&= \frac{a_1q^{n+1} - a_1}{q-1}.
\end{aligned}$$

O que mostra ser válida a proposição para $n+1$, ou seja, $S(n) \longrightarrow S(n+1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, a proposição $S_n = \dfrac{a_1q^n - a_1}{q-1}$, com $q \neq 1$ é verdadeira para qualquer n inteiro não negativo. □

Observação 3.6. Na expressão obtida na Proposição 3.5 quando a $|q| < 1$ e n for suficientemente grande o termo q^n fica cada vez mais próximo de zero, e portando podemos concluir que a soma dos infinitos termos de uma PG tal que $|q| < 1$, é dada por

$$S = \frac{a_1}{1-q}. \tag{3.8}$$

3.3 Indução em outras sequências

No ensino médio, geralmente, o estudo das sequências são trabalhados como introdução ao ensino das progressões no 2º ano. Algumas sequências envolvem produtos ou somas de termos que não são uma progressão aritmética ou geométrica. Nesta seção, propomos o aprofundamento no estudo das sequências para além das progressões aritméticas e geométricas.

Definição 3.7. *Uma **sequência** ou **sucessão** numérica infinita é uma função indexada no conjunto dos números naturais* $\mathbb{N}$ *com valores reais,* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, onde para cada* n *natural associamos o número real* $f(n) = a_n$*, denominado o n-ésimo termo ou termo de ordem* n *ou termo geral da sequência. Usaremos* $f = (a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$*, para representar a sequência de termos* a_n*. Quando a partir de um certo* n *todos os termos* $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$*, diremos que a sequência é finita, que representaremos por* $f = (a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$*.*

Existem casos em que a forma mais natural de se definir uma sequência é por recorrência. Como por exemplo, o fatorial do número natural k, denotado por $k!$, é definido como sendo o produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots k$ dos números naturais que são menores e iguais a k. É natural compreendermos o significado das reticências no produto definido como fatorial de um número. Porém uma definição com mais rigor e utilizando recorrência pode ser feita assim:

Definição 3.8. *Seja a sequência finita definida por $s_k = k!$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Sendo,*

i. $0! = 1! = 1$, *e*
ii. $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$, *para* $k \in \mathbb{N}$.

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de sequências em que podemos comprovar, com o uso do princípio de indução finita, a soma de seus termos.

Proposição 3.9. *Dada a sequência definida pelo termo geral $a_n = n \cdot n! = n \cdot (n!)$, com $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros termos dessa sequência é $(n+1)! - 1$. Ou seja,*

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \tag{3.9}$$

Demonstração. Para provar que a identidade (3.9) é realmente verdadeira para todo natural n, vamos utilizar o princípio de indução finita.
Seja

$$P(n) : 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

i. Para $n = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira. Pois $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$.
ii. Admitimos $P(n)$ verdadeira para um natural n, tal que $n > 1$, temos de mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira, isto é,

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+2)! - 1.$$

Para que isso ocorra, vamos adicionar a ambos os membros de (3.9) o termo $(n+1) \cdot (n+1)!$. Assim,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! \cdot [(n+1+1)] - 1 \\ &= (n+1)! \cdot [(n+2)] - 1 \\ &= (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Logo $P(n+1)$ é verdeira. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Uma proposição para ampliar o interesse dos alunos, é a que apresentamos a seguir, nela temos uma adição onde nas parcelas temos produtos de dois números naturais e consecutivos, e o resultado é equivalente a terça parte do produto de três números consecutivo, interessante ao ser visto pela primeira vez.

Proposição 3.10. *Para todo n natural, a sequência cujo $n-$ésimo termo é $a_n = n \cdot (n+1)$ tem como soma dos seus n primeiros termos, o número $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Ou seja,*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \tag{3.10}$$

Demonstração. Temos,

i. que $P(1)$ é verdadeira, pois $1 \cdot 2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2.$

ii. Supondo $P(n)$ verdadeira, queremos mostrar que

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{3}.$$

Adicionando a parcela $(n+1) \cdot (n+2)$ em ambos os membros da igualdade (3.10). Segue que,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1) \cdot (n+2) \cdot \left(\frac{n}{3} + 1\right) \\ &= (n+1) \cdot (n+2) \cdot \left(\frac{n+3}{3}\right) \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Utilizando a letra grega $\sum$(sigma) para expressar somas sucessivas de termos em uma sequência de termo geral a_n, podemos escrever $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ para indicar a soma dos n primeiros termos da sequência, ou seja

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Com está notação e fazendo o uso do Princípio de Indução podemos generalizar algumas propriedades sobre números reais como as propriedades associativa e distributiva, que enunciaremos e demonstraremos nas proposições a seguir.

Proposição 3.11. *Para quaisquer duas sequências finitas de números reais de termos gerais a_n e b_n, então vale a seguinte propriedade*

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Demonstração. Seja

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

a afirmação a ser provada.

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $n = 1$ temos: $\sum_{i=1}^{1}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{1} a_i + \sum_{i=1}^{1} b_i = a_1 + b_1$.

ii. Supondo por hipótese de indução que $P(n)$ é verdadeira para o natural n. Vemos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(a_i + b_i) &= \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) + [a_{n+1} + b_{n+1}] \\
&\overset{H.I.}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) + [a_{n+1} + b_{n+1}] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i + b_{n+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} a_i + \sum_{i=1}^{n+1} b_i.
\end{aligned}$$

Donde concluímos que $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução, a proposição é verdadeira para todo natural. □

Proposição 3.12. *Dada uma sequência finita de números reais cujo termo geral é a_n, para todo n e i naturais temos que*

$$k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} k \cdot a_i$$

.

Demonstração. Seja

$$P(n) : k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} k \cdot a_i,$$

a proposição a ser demonstrada, então

i. $P(1)$ é válida, pois $n = 1$ temos: $k \cdot \sum_{i=1}^{1} a_i = \sum_{i=1}^{1} k \cdot a_i = k \cdot a_i$.

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja verdadeira para algum n natural. Mostraremos que $P(n+1)$ é também verdadeira.

$$\begin{aligned} k \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_i &= k \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} \right) \\ &= k \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) + k \cdot a_{n+1} \\ &\overset{H.I.}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} k \cdot a_i \right) + k \cdot a_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} k \cdot a_i. \end{aligned}$$

Temos que a proposição é válida para $n+1$, ou seja, $P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, está comprovada que a proposição é verdadeira. □

Proposição 3.13. *Para qualquer n e i naturais, e k um número real, então*

$$\sum_{i=1}^{n} k = k \cdot n$$

.

Demonstração. Seja

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} k = k \cdot n,$$

a proposição que demonstraremos para todo n e i naturais, e k real, então

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $n = 1$ temos: $\sum_{i=1}^{1} k = k = k \cdot 1$.

ii. Suponhamos $P(n)$ válida para algum natural n. Mostraremos, pelo princípio de indução que $P(n+1)$ também é verdadeiro. Como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} k &= \sum_{i=1}^{n} k + k \\ &\overset{H.I.}{=} n \cdot k + k \\ &= (n+1) \cdot k. \end{aligned}$$

A partir de $P(n)$, mostramos que a afirmação é válida para $n+1$. Segue, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é válida para todo n natural. $\square$

Definição 3.14. *Definimos para sequências finitas de termo geral a_n, o operador diferença Δa_n. Ou seja*

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Dessa definição, uma sequência a_n é uma progressão aritmética, se e somente se, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é constante (razão da P.A.).

Proposição 3.15 (Soma Telescópica)**.** *Para todo n e $i \in \mathbb{N}$, e dada uma sequência finita de termos reais cujo termo geral é a_n, então*

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta a_i = a_{n+1} - a_1.$$

Demonstração. Vamos provar que a afirmação $P(n)$ abaixo é verdadeira para n natural e todo a_i real.

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} \Delta a_i = a_{n+1} - a_1.$$

Daí,

i. para $n = 1$, $P(1)$ é válida, pois $\sum_{i=1}^{1} \Delta a_1 = a_{i+1} - a_i = a_{1+1} - a_1$.

ii. Supondo $P(n)$ verdadeira para algum $n > 1$ natural. Mostraremos que $P(n+1)$ é válida. Como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \Delta a_i = \sum_{i=1}^{n+1} (a_{i+1} - a_i) &= \left[\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i)\right] + a_{(n+1)+1} - a_{n+1} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} \Delta a_i\right] + a_{(n+1)+1} - a_{n+1} \\
&\overset{H.I.}{=} [a_{n+1} - a_1] + a_{(n+1)+1} - a_{n+1} \\
&= a_{(n+1)+1} - a_1.
\end{aligned}$$

Temos que a proposição é válida para $n+1$, ou seja, $P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Pelo princípio de indução finita, a proposição $\sum_{i=1}^{n} \Delta a_i = a_{n+1} - a_n$, é válida para qualquer n natural, e (a_n) uma sequência de números reais dada. $\square$

Um exemplo de como conjecturar a soma S_n dos n primeiros números naturais que apresentamos e comprovamos em (3.3) é através da soma telescópica apresentada a seguir.

Exemplo 3.16. Neste exemplo usando a soma telescópica vamos deduzir uma fórmula para calcular a soma dos n primeiros números naturais $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$.

Dados dois números naturais consecutivos: k e $k+1$, a diferença entre seus quadrados é $2k+1$, pois

$$(k+1)^2 - k^2 = k^2 - 2k + 1 - k^2 = 2k + 1. \tag{3.11}$$

Desta forma, atribuindo os valores de k de 1 até n em (3.11) temos,

$$\begin{aligned}
\cancel{2^2} - 1^2 &= 2 \cdot 1 + 1, \\
\cancel{3^2} - \cancel{2^2} &= 2 \cdot 2 + 1, \\
\cancel{4^2} - \cancel{3^2} &= 2 \cdot 3 + 1, \\
\cancel{5^2} - \cancel{4^2} &= 2 \cdot 4 + 1, \\
&\vdots \\
(n+1)^2 - \cancel{n^2} &= 2 \cdot n + 1.
\end{aligned}$$

Adicionando ambos os membros, termo a termo (soma telescópica), temos:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 - 1^2 &= 2 \cdot S_n + n \\
n^2 + 2n + 1 - 1 &= 2 \cdot S_n + n \\
n^2 + 2n &= 2 \cdot S_n + n \\
n^2 + n &= 2 \cdot S_n \\
\frac{n \cdot (n+1)}{2} &= S_n.
\end{aligned}$$

A seguir mostraremos, de forma análoga, como a soma dos n primeiros quadrados dos números naturais pode ser conjecturada.

Exemplo 3.17.

Sendo k e $k+1$ dois números consecutivos quaisquer, a diferença de seus cubos é $3k^2 + 3k + 1$. De fato

$$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1. \tag{3.12}$$

Avaliando para valores de k variando de 1 a n, temos

$$\begin{aligned}
\cancel{2^3} - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,\\
\cancel{3^3} - \cancel{2^3} &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,\\
\cancel{4^3} - \cancel{3^3} &= 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1,\\
\cancel{5^3} - \cancel{4^3} &= 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1,\\
&\vdots,\\
(n+1)^3 - \cancel{n^3} &= 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.
\end{aligned}$$

Fazendo a soma telescópica, temos

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n,$$

Usando o resultado obtido no Exemplo 3.11, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, e fazendo

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2, \tag{3.13}$$

temos

$$\begin{aligned}
3 \cdot Q_n &= (n+1)^3 - 1^3 - \left[3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n\right]\\
3 \cdot Q_n &= n^3 + 3n^2 + 3n - 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n\\
3 \cdot Q_n &= n^3 + 3n^2 + 2n - 3 \cdot \frac{n^2 + n}{2}\\
Q_n &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{6}\\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\\
&= \frac{2n^3 + 2n^2 + n^2 + n}{6}\\
&= \frac{2n^2(n+1) + n(n+1)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Essa conjectura, da soma dos n primeiros quadrados dos números naturais, pode ser demonstrada utilizando o princípio da indução finita.

Proposição 3.18. *Seja a sequência finita de termos reais definida pelo termo geral* $a_n = n^2$, *com* $n \in \mathbb{N}$, *a soma dos* n *primeiros termos dessa sequência é*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Demonstração. Seja a proposição

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $\dfrac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 = 1^2$.

ii. Supondo $P(n)$ verdadeira, para algum $n > 1$ natural, vamos mostrar, pelo princípio de indução que $P(n+1)$ é também verdadeira.

Adicionando o próximo termo $(n+1)^2$, a ambos os membros da proposição $P(n)$, temos

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 \overset{H.I.}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} P(n+1) &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

O que nos mostra $P(n+1)$ verdadeira. Daí, pelo princípio da indução finita $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$. □

Sugerimos como exercícios complementares ao conteúdo de sequências em anexo os Problemas A.47, A.48, A.49, A.50, A.51, A.52, A.53, (A.54), (A.55) e (A.56). Alguns destes problemas podem também serem encontrados em [11] e [13].

3.4 Indução e o Binômio de Newton

No ensino médio, o Binômio de Newton é abordado com frequência e destaque considerável a partir do 2º ano do ensino médio. Suas propriedades e identidades são apresentadas nos materiais didáticos e livros, e também relacionadas com o Triângulo de Pascal. A partir da fórmula a seguir, Newton descobriu regularidades que resultam da potência $(a+b)^n$.

Considere a e b números reais, e n um número natural, temos que

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \qquad (3.14)$$

Onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, com n e k naturais, e $1 \leqslant k \leqslant n$, chamado de número binomial. Dessa definição de número binomial e lembrando da Definição 3.8 de $k!$ fatorial, segue que

1. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1,$

2. $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1,$

3. $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n,$

4. $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n,$

5. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$

Os números binomiais da identidade 5 acima, são chamados de números binomiais complementares.

Lema 3.19. *Em relação ao coeficientes binomiais vale a seguinte propriedade*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \qquad (3.15)$$

Conhecida como ***Relação de Stiffel***[1].

Demonstração. Usando as propriedades de fatorial e a definição dos coeficientes binomiais, segue que

[1]Michael Stifel, ou Stieffel (1487 - 1567), matemático alemão. Descobriu o logaritmo e criou uma pequena tabela logarítmica.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)![(n-(k+1)]!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)![(n-k-1)]!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k![(n-k-1)]!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{n+1}{(n-k)(k+1)}\right) \\
&= \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \dfrac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \binom{n+1}{k+1}$. □

Vamos tomar em (3.14), $b = 1$, assim temos $(a+1)^n$. Logo,

$$
(a+1)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} a + 1^n
$$

Sabemos que o Triângulo de Pascal pode ser representado com os coeficientes binomiais do desenvolvimento desse Binômio de Newton, como o que segue abaixo.

$$
\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\vdots
\end{array}
$$

Podemos perceber, no Triângulo de Pascal, e conjecturar as conhecidas: identidade das linhas, identidade das colunas e identidade nas diagonais. Vamos demonstrar, a seguir as veracidades dessas identidades, faremos isso utilizando o princípio de indução finita.

Proposição 3.20 (Identidade das linhas)**.** *No triângulo de Pascal, temos que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a soma dos elementos das mesma linha é dado por*

$$SL(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demonstração. Vejamos que

i. $SL(0)$ é verdadeira, pois $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$.

ii. Supondo por hipótese que $SL(n)$ é verdadeira, vamos mostrar que $SL(n+1)$ também é verdadeira Ou seja,

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1}. \tag{3.16}$$

Aplicando a Relação de Stiffel na igualdade (3.16), nos termos intermediários do lado esquerdo, obtemos

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\cdots+\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}$$
$$=\binom{n}{0}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]+\cdots+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]+\binom{n}{n}$$
$$\stackrel{H.I.}{=} 2\cdot\underbrace{\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\right]}_{2^n}=2^{n+1}.$$

Portanto, $SL(n+1)$ é verdadeira, segue do princípio de indução que $SL(n)$ é verdadeira para todo $n\in\mathbb{N}\cup 0$. $\square$

Proposição 3.21 (Identidade das colunas)**.** *No triângulo de Pascal, para todo $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, temos que*

$$SC(k)=\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}.$$

Demonstração. Vamos provar, fazendo indução sobre k.

i. $SC(0)$ é verdadeira, pois $\binom{n+0}{n}=\binom{n}{n}=1=\binom{n+1}{n+1}=\binom{n+0+1}{n+1}$.

ii. Admitindo que $SC(k)$ por hipótese de indução sobre k é verdadeira, calculando $SC(k+1)$, temos

$$SC(k+1)\stackrel{H.I.}{=}\underbrace{\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}}_{\binom{n+k+1}{n+1}}+\binom{n+k+1}{n}$$
$$=\binom{n+k+1}{n+1}+\binom{n+k+1}{n}$$
$$\stackrel{Stiffel}{=}\binom{(n+k+1)+1}{n+1}=\binom{n+(k+1)+1}{n+1}.$$

Portanto, $SC(k+1)$ é verdadeira, donde concluímos o resultado desejado. $\square$

Proposição 3.22 (Identidade nas diagonais)**.** *No triângulo de Pascal, para todo n e $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, temos*

$$SD(k)=\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}.$$

Demonstração. Por indução sobre $k\in\mathbb{N}$, verificamos que

i. Para $k = 1$, temos

$$SD(1) = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} = 1 + (n+1) = n+2 = \binom{n+2}{1},$$

ou seja, $SD(1)$ é verdadeira.

ii. Tomando $SD(k)$ como verdadeira, por hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned} SD(k+1) &= \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} + \binom{n+(k+1)}{k+1} \\ &\overset{H.I.}{=} \binom{n+(k+1)}{k} + \binom{n+(k+1)}{k+1} \overset{Stiffel}{=} \binom{n+(k+1)+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução finita, segue o resultado. □

O estudo do desenvolvimento do binômio de Newton, que normalmente ocorre no terceiro ano do ensino médio, muitas vezes é apresentado mas não comprovado. Newton criou uma técnica para calcular o resultado da potência de um binômio, onde o expoente é um número natural. O desenvolvimento do binômio de Newton é amplamente utilizado em problemas de física, matemática e química. À medida que o expoente aumenta, os cálculos se tornam mais complexos, tornando crucial uma compreensão sólida desse estudo.

A seguir, demonstraremos a veracidade do desenvolvimento desse binômio para uma potência n natural, utilizando o princípio de indução finita.

Proposição 3.23. *(Teorema Binomial) Considere a e b números reais, e n um número natural, temos que*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n. \quad (3.17)$$

Que de maneira mais simples, usando a notação de somatório, sigma, podemos escrever

$$B(n) = (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (3.18)$$

Demonstração. Observe que

i. Para $n = 1$, a sentença é verdadeira, pois

$$\binom{1}{0} a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b = 1 \cdot a + 1 \cdot b = a + b = (a+b)^1.$$

ii. Vamos supor que $B(n)$ seja verdadeira para n natural maior que 1. Assim, para aplicar o princípio de indução finita, mostraremos que $B(n+1)$, também é verdadeira. Ou seja,

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Como

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n \\
&\overset{H.I.}{=} (a+b)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= a\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{(n+1)-k} b^k \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{(n+1)-k} b^k \\
&\overset{Stiffel}{=} \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k.
\end{aligned}$$

Logo $B(n+1)$ é verdadeira e portanto segue o resultado. □

3.5 Indução e Números Figurados

Na geometria pré-euclidiana, a teoria dos números era concreta para Pitágoras [2], tendo como base a manipulação dos números. Os pitagóricos [3] acreditavam

[2]Pitágoras (Nascimento: 571 a.C. - 570a.C - Morte: 500 a.C. - 490 a.C.), músico, astrônomo, filósofo e matemático grego. Nascido na ilha de Samos, recebeu os créditos de fundador do Pitagorismo.

[3]Os pitagóricos estudavam aritmética, geometria, música e astronomia. Os Pitagóricos (ou Escola Pitagórica) eram os seguidores de Pitágoras. A Escola Pitagórica foi fundada por Pitágoras, era uma corrente influente da filosofia grega.

que os números dariam uma explicação para todo o cosmo. Os números figurados eram aqueles que podiam ser expressos a partir de uma determinada configuração geométrica, estes eram obtidos ao examinar a quantidade de pontos na figura que representa cada número.

Para os Pitagóricos os números triangulares [4], quadrangulares, pentagonais, e outros, eram formados por diversos pontos, que não eram pontos matemáticos, e sim, elementos discretos, como por exemplo, pedrinhas, bolinhas dispostas em certas posições.

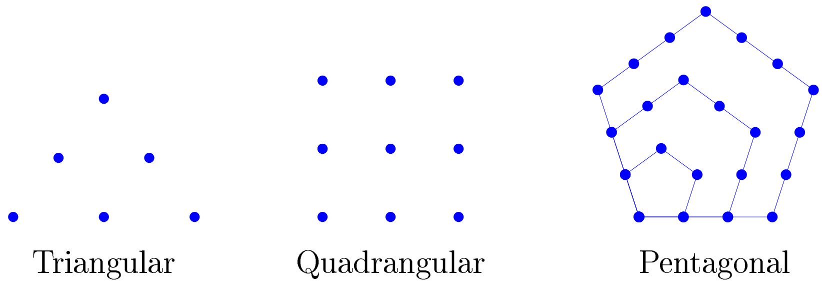


Figura 3.1: *Números poligonais*

A sequência de números triangulares são: $(1, 3, 6, 10, 15, 21, ...)$. Em nossa atual linguagem, o número que está na ordem n pode ser determinado pela soma dos elementos de uma progressão aritmética (soma dos n primeiros números naturais), $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n - 1) + n$. Para os números triangulares, vamos denotar por $T(n)$ o número de bolinhas na ordem n. Observe a seguir os quatro primeiros números triangulares.

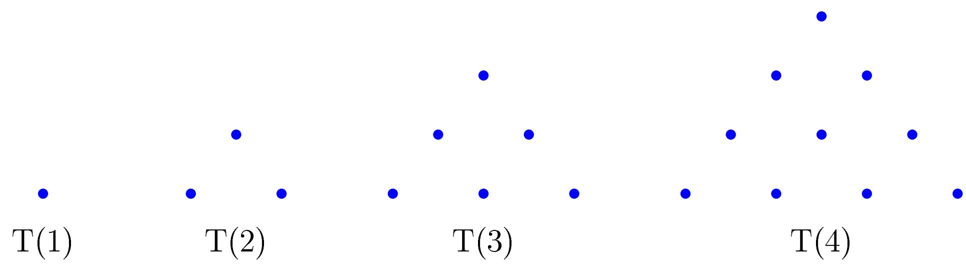


Figura 3.2: *Números triangulares*

[4]Os números triangulares são formados por pontos que formam figuras triangulares(coleções de bolinhas). O leitor mais interessado na história desses números sugerimos a leitura: Tópicos de História Matemática, Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira de Carvalho, SBM, RJ 2012.páginas 59 a 70

Temos que:

$$\begin{aligned}
T(1) &= 1,\\
T(2) &= 3 = T(1) + 2,\\
T(3) &= 6 = T(2) + 3,\\
T(4) &= 10 = T(3) + 4,\\
&\vdots,
\end{aligned}$$

o que sugere a fórmula recursiva: $T(1) = 1$ e $T(n+1) = T(n) + (n+1)$. Mas, também podemos escrever:

$$\begin{aligned}
T(1) &= 1,\\
T(2) &= 1 + 2 = 3,\\
T(3) &= 1 + 2 + 3 = 6,\\
T(4) &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10,\\
&\vdots,
\end{aligned}$$

dessa forma conjecturamos

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Essa propriedade já demonstramos ser verdadeira, utilizando o princípio de indução finita, em (3.3).

Agora, vamos denotar por $Q(n)$ o número quadrangular na ordem n. Observe a imagem abaixo com os três primeiros números quadrangulares.

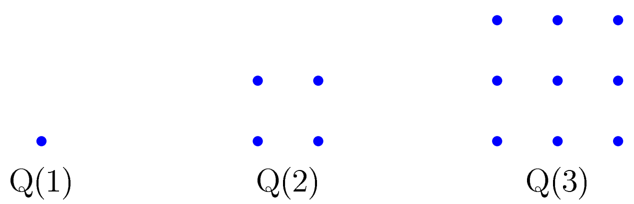


Figura 3.3: *Números quadrangulares*

Fácil perceber que $Q(n) = n^2$. E se necessário obter a soma dos n primeiros números quadrangulares, podemos recorrer a identidade a seguir, esta demonstrada em (3.18).

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

O número pentagonal é equivalente ao menor número de bolinhas que utilizamos para formar um pentágono. O primeiro número pentagonal é o 1, assim como nos números triangulares e quadrangulares.

Seja $P(n)$ o número pentagonal na ordem n. Observe na figura a seguir que: $P(1) = 1$, $P(2) = 5$, $P(3) = 12$ e $P(4) = 22$.

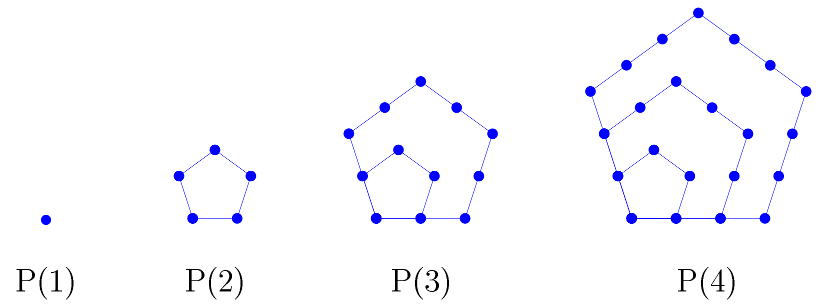


Figura 3.4: *Números pentagonais*

Fato que de $P(1)$ para $P(2)$ acrescentamos 4 bolinhas, o pentágono formado possui cada lado com duas bolinhas, e de $P(2)$ para $P(3)$ acrescentamos 7 bolinhas, e o pentágono formado possui cada lado com 3 bolinhas. Esse fato sugere que da ordem n para a ordem seguinte, $n+1$, basta juntarmos três lados de comprimento igual a $(n+1)$, ou seja, com $(n+1)$ bolinhas em cada lado, e descontarmos as duas sobreposições que ocorrem nos cantos, isto é:

$$P(n+1) = P(n) + 3 \cdot (n+1) - 2 = P(n) + 3n + 1. \tag{3.19}$$

Então,

$$\begin{aligned}
P(1) &= 1, \\
P(2) &= P(1) + 3 \cdot 1 + 1 = 1 + 4 = 5, \\
P(3) &= P(2) + 3 \cdot 2 + 1 = 1 + 4 + 7 = 12, \\
P(4) &= P(3) + 3 \cdot 3 + 1 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22, \\
&\vdots \\
P(n) &= P(n-1) + 3(n-1) + 1 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \cdots + (3n-2).
\end{aligned}$$

Observe que $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \cdots + (3n-2)$ é uma PA de razão 3, pela fórmula da soma da PA que foi obtida em (3.2), determinamos que

$$P(n) = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{[(1 + (3n-2)] \cdot n}{2} = \frac{n \cdot (3n-1)}{2}. \tag{3.20}$$

Portanto, temos uma conjectura para os números pentagonais $P(n)$.

Proposição 3.24. *Para todo n natural, o número pentagonal $P(n)$ de ordem n, é dado por*

$$P(n) = \frac{n \cdot (3n-1)}{2}. \tag{3.21}$$

Demonstração. Temos que

i. $P(1) = 1 = \dfrac{1(3 \cdot 1 - 1)}{2}$, portanto segue que $P(1)$ é verdadeira.

ii. Supondo por hipótese de indução que $P(n) = \dfrac{n \cdot (3n-1)}{2}$, é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$, calculando $P(n+1)$, pela fórmula de recorrência (3.19) segue que,

$$\begin{aligned}
P(n+1) &= P(n) + 3n + 1 \\
&\overset{H.I.}{=} \frac{n \cdot (3n-1)}{2} + 3n + 1 \\
&= \frac{n \cdot (3n - 1 + 3 - 3) + 2(3n+1)}{2} \\
&= \frac{n \cdot (3n+2) - 3n + 6n + 2}{2} \\
&= \frac{n \cdot (3n+2) + 3n + 2}{2} \\
&= \frac{(n+1)\,(3n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

CAPÍTULO 4

Indução nas Trilhas para o Ensino Médio

A Lei nº 13415/2017 alterou a LDB[1], estabelecendo, no Art. 36, que no ensino médio, o currículo será composto pela Base Nacional Comum Curricular [3] e por itinerários formativos. Estes deverão estar organizados através da oferta de diferentes agrupamentos curriculares, de acordo com a relevância para o cenário local e a possibilidade de cada sistema de ensino. Assim, o protagonismo juvenil fica mais valorizado com as ofertas de diversos itinerários formativos, que atendem o aprofundamento acadêmico e a formação técnica profissional.

Nas competências gerais para a área de Matemática e suas Tecnologias, a BNCC[3] cita que

> ... os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área.(BRASIL. Ministério da Educação, 2018, p.470)

Além disso, o documento orienta sobre as possibilidades de conexões entre diferentes áreas do conhecimento, como laboratórios, oficinas, clubes, observatórios, incubadoras e núcleos de estudo e produção artística. A matemática desempenha um papel fundamental nessas áreas, possibilitando o surgimento de conjecturas que podem ser validadas, se necessário, por meio do uso do princípio de indução finita. Ao formular e testar conjecturas, os alunos aprimoram sua habilidade de argumentação, bem como as habilidades de raciocínio e representação, conforme previsto no documento. Veja esse trecho a seguir da BNCC[3]:

> Com relação à competência de argumentar, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar.(BRASIL. Ministério da Educação, 2018, p.519)

[1]LDB - Lei de diretrizes e bases da educação nacional - Lei no 9.394/1996: Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

Dentre as competências específicas citadas da matemática e suas tecnologias para o ensino médio, destacamos para a importância do uso do princípio de indução finita a competência 5:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

A BNCC [3] sugere que para desenvolver essa competência, se faz necessário

> ...um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos que podem emergir de experiências empíricas. Os estudantes deverão ser capazes de fazer induções por meio de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais. Assim, ao formular conjecturas, mediante suas investigações, eles deverão buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não precisa ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve incluir também argumentos mais "formais", sem que haja necessidade de chegarem à demonstração de diversas proposições.(BRASIL. Ministério da Educação, 2018, p.532)

Assim, de acordo com a BNCC[3], os estudantes desenvolverão as habilidades relacionadas a essa competência, ao fazerem investigações, e formularem conjecturas. Essas podem ser refutadas ou validadas, desta forma o estudante irá comunicar com maior precisão as suas conclusões. Como descrito nesse documento, acredita-se também que

> ...é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências. Assim, a construção de uma argumentação, incluindo o desenvolvimento de algumas demonstrações matemáticas, proposta por esta Base, é uma importante contribuição para a representatividade da Matemática como área do conhecimento.(BRASIL. Ministério da Educação, 2018, p.532)

Observamos ainda que, na BNCC[3] essa competência aproxima de um processo de buscas, conjecturas, questionamentos, contraexemplos, comunicação, aplicações e refutações.

O objetivo é ser mais atrativo para os jovens e dar mais autonomia aos estudantes. Através dos Itinerários Formativos, onde o currículo é mais flexível, o aluno escolhe quais matérias poderá aprofundar seus conhecimentos.

Para o Novo Ensino Médio, no estado de Goiás [4], encontramos nas trilhas de aprofundamento, o itinerário *A Matemática Escolar aplicada ao Mercado de*

Trabalho[2]. Nesse itinerário, o objetivo é ampliar os saberes que poderão ser utilizados nas profissões, nos negócios, em projetos e nas relações mercadológicas.

Outra opção escolhida pelo aluno do novo ensino médio é aprofundar seus conhecimentos nas *Trilhas Eletivas*[3], pois cada escola deve oferecer duas opções de Trilha de Aprofundamento e duas opções de Eletiva. Nessa opção, cada componente curricular deve trabalhar de forma interdisciplinar utilizando de metodologias diferentes das convencionais, como por exemplo grupo de pesquisa ou trabalho de campo, até mesmo clube de leitura, gincanas ou produção de jornais. Essa trilha deve estar de acordo com o interesse e o perfil dos alunos.

Propomos o uso do princípio de indução finita, em itinerários formativos, de acordo com o cenário citado acima que leve o aluno a comprovar, gradativamente, por nível de dificuldade, diversas proposições, utilizando o princípio de indução finita nas que já foram estudadas ou em novas conjecturas que poderão surgir ao longo dos diferentes itinerários.

Neste capítulo, apresentaremos mais proposições, exemplos e problemas para serem estudadas em itinerários formativos ou até mesmo durante as aulas caso os alunos já saibam como utilizar o princípio de indução finita.

Aos estudantes que ainda não tiveram o contato com o princípio de indução finita, sugerimos começar os estudos com as definições, exemplos e observações citados nos capítulos anteriores. Durante o desenvolver das trilhas, de acordo com os diagnósticos constantes dos estudantes, em relação a aprendizagem, o professor poderá também utilizar as demonstrações e sugestões que apresentaremos a seguir. Em certo momento, poderá parecer exagerado o número de problemas e proposições, mas buscamos diversificá-los em cada sessão. Iremos apresentar alguns proposições como problemas para aprofundamento e apoio. Esses problemas devem ser demonstrados utilizando, é claro, o princípio de indução finita.

4.1 Indução e Aritmética

Provamos que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2, na proposição(2.2), e também que a soma dos n primeiros números naturais pares, é $n \cdot (n+1)$,

[2] O Itinerário Formativo A Matemática Escolar Aplicada ao Mercado de Trabalho visa ampliar as percepções dos/as estudantes em relação ao uso da matemática escolar enquanto ferramenta que subsidia um número relevante de profissões, colaborando com as descobertas ligadas às potencialidades deste componente curricular e direcionando os/as estudantes para o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas à matemática escolar utilizadas no mercado de trabalho, no processo de criação e desenvolvimento de projetos.

[3] O objetivo das Eletivas é complementar a formação do estudante com experiências enriquecedoras e conhecimentos específicos. Elas também visam dar mais autonomia ao estudante, que poderá escolher qual eletiva cursar de acordo com os seus projetos de vida e suas afinidades.

na proposição(2.3). Uma continuidade curiosa pode ser estudada a partir do questionamento: Na sequência dos números quadrados perfeitos, podemos passar de um quadrado perfeito n^2 para o próximo quadrado perfeito $(n+1)^2$, adicionando o número impar $2n+1$. Observemos as igualdes a seguir:

$$\begin{aligned} 1^2 + 3 &= 2^2, \\ 2^2 + 5 &= 3^2, \\ 3^2 + 7 &= 4^2, \\ 4^2 + 9 &= 5^2, \\ &\vdots, \\ n^2 + (2n+1) &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Assim, obtemos nossa conjectura acreditando que sim, é possível obter o quadrado sucessor, adicionando a sequência dos ímpares. Esse questionamento e conjectura, podemos encontrar em Tópicos de História da Matemática[16]. Geometricamente, nossa intuição nos leva a acreditar que também é possível essa passagem, veja na figura abaixo.

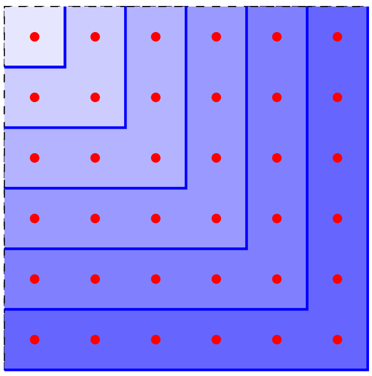


Figura 4.1: *Soma dos n primeiros ímpares*

Agora nos resta comprovar a veracidade.

Proposição 4.1. *Para todo n natural temos que*

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2. \tag{4.1}$$

Demonstração. Seja $P(n) : n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$, para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

i. Para $n = 1$, $P(1)$ é verdadeira. Verificamos a veracidade na primeira linha das igualdades, pois $1^2 + (2 \cdot 1 + 1) = 1 + 3 = (1+1)^2 = 4$.

ii. Admitindo $P(n)$ verdadeira para algum natural $n > 1$, mostraremos que também é verdadeiro

$$P(n+1) : (n+1)^2 + (2n+3) = (n+2)^2.$$

Vamos adicionar a ambos os membros de (4.1) o termo $2n+3$. Assim,

$$\begin{aligned} n^2 + (2n+1) + (2n+3) &\overset{H.I.}{=} (n+1)^2 + (2n+3) \\ (n^2 + 2n + 1) + (2n+3) &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ (n+1)^2 + (2n+3) &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2 \end{aligned}$$

Como vimos $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Para as igualdades, a primeira sugestão a seguir é a de comprovar a igualdade que envolve a soma dos n primeiros cubos perfeitos (A.1). Essa comprovação pode ser trabalhada como uma continuidade após termos demonstrado a soma dos n primeiros naturais, proposição (3.3), e também a soma dos n primeiros quadrados dos números naturais, na proposição (3.18).

Em anexo, sugerimos os problemas complementares (A.2) ao (A.7), semelhantes a estes demonstrados, para aprofundamento com relação às igualdades.

Vimos no Exemplo (1.5) que Fermat acreditava que a relação $p = 2^{2^n} + 1$ determina os números primos p, porém Euler mostrou que para $n = 5$ essa relação não é válida. Por outro lado, os números de Fermat apresentam uma interessante propriedade que pode ser enunciada assim: Qualquer número de Fermat é equivalente ao produto dos seus números anteriores mais dois. Reescrevemos essa propriedade na proposição a seguir.

Proposição 4.2. *Seja $F_n = 2^{2^n} + 1$, para todo n natural, os números de Fermat. Então,*

$$\Pi F(n) = F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{n-1} = F_n - 2. \tag{4.2}$$

Demonstração. Temos

i. para $n = 1$, $\Pi F(1)$ é verdadeira, pois $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3 = F_1 - 2$,

ii. Supondo por hipótese de indução que $\Pi F(n-1)$ seja válida para algum $n > 1$ natural, isto é

$$\Pi F(n-1) : F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{n-2} = F_{n-1} - 2. \tag{4.3}$$

Multiplicando ambos os membros de (4.3) por F_{n-1}, segue que

$$\begin{aligned}
F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{n-2} \cdot F_{n-1} &= (F_{n-1} - 2) \cdot F_{n-1} \\
&= \left(2^{2^{n-1}} + 1 - 2\right) \cdot \left(2^{2^{n-1}} + 1\right) \\
&= \left(2^{2^{n-1}} - 1\right) \cdot \left(2^{2^{n-1}} + 1\right) \\
&= \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 - 1^2 + 2 - 2 \\
&= \left(2^{2^{n-1} \cdot 2}\right) + 1 - 2 \\
&= \left(2^{2^n} + 1\right) - 2 \\
&= F_n.
\end{aligned}$$

Mostramos que $\Pi F(n)$ é verdadeira, pelo princípio da indução finita concluímos o resultado. $\square$

Proposição 4.3. *Seja $F_n = 2^{2^n} + 1$, para todo $n > 1$ natural, os números de Fermat, temos que o último algarismo (algarismo da unidade) de F_n é sempre igual a 7, ou seja $F_n = 10k + 7$, para algum natural k.*

Demonstração. Temos que

i. para $n = 2$, a proposição é verdadeira, pois $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 10 + 7$.

ii. Suponhamos por hipótese de indução que $F_n = 10k + 7$. Mostraremos que $F_{n+1} = 10m + 7$ para algum natural m.

Temos que

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= 2^{2^{n+1}} + 1 \\
&= 2^{2^n \cdot 2} + 1 \\
&= \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 \\
&= (F_n - 1)^2 + 1 \\
&\overset{H.I.}{=} (10k + 7 - 1)^2 + 1 \\
&= (10k + 6)^2 + 1 \\
&= 100k^2 + 120k + 36 + 1 \\
&= \left(100k^2 + 120k + 30\right) + 7 \\
&= 10 \underbrace{\left(10k^2 + 12k + 3\right)}_{m} + 7 \\
&= 10m + 7.
\end{aligned}$$

Comprovando assim, pelo princípio da indução finita que F_n é da forma $10k+7$ para todo natural $n > 1$. $\square$

O número de Euler[4], possui aplicações diversas na matemática do ensino básico, como por exemplo, nos estudos de juros, fatoriais, potências, logaritmos e funções. Algumas propriedades podem ser utilizadas, quando necessárias, envolvendo esse famoso e importante número. A seguir apresentamos uma propriedade e algumas sugestões de atividades com desigualdades e o número de Euler.

Proposição 4.4. *Para todo n natural, sendo $e \approx 2,7183$, o número de Euler, temos que*

$$e^n > n+1. \tag{4.4}$$

Demonstração. Seja $P(n) : e^n > n+1$, temos que:

i. Para $n = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira. Pois, $e^1 \approx 2,7183 > 1+1 = 2$.

ii. Suponha por hipótese de indução que $P(n) : e^n > n+1$, seja verdadeira para algum $n > 1$ natural, vamos mostrar que

$$P(n+1) : e^{n+1} > n+2.$$

Como $e^n > n+1$, e $e > 0$ multiplicamos por e ambos os membros da desigualdade (4.4). Temos assim que:

$$\begin{aligned} e^n \cdot e &> (n+1) \cdot e = en + e \\ e^{n+1} &\overset{e>2}{>} en + e \\ &> n+2. \end{aligned}$$

Logo $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo n natural. $\square$

Em anexo, segue dois problemas complementares (A.10) e (A.11), envolvendo desigualdades e o número de Euler.

Proposição 4.5. *Para todo n natural, tal que $n > 4$, temos que*

$$n! > 2n + 2^n \tag{4.5}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a desigualdade (4.5), então;

[4]O número de Euler, representado por - e - em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), é uma constante base nos estudos dos logaritmos naturais.

i. Para $n = 5$, temos que $P(5)$ é verdadeira. Pois,

$$5! = 120 > 2 \cdot 5 + 2^5 = 10 + 32 = 42.$$

ii. Admitimos $P(n) : n! > 2n + 2^n$, verdadeira para algum $n > 5$ natural, mostraremos, pelo princípio de indução que

$$P(n+1) : (n+1)! > 2(n+1) + 2^{n+1}.$$

Como $n! > 2n + 2^n$, pela desigualdade (4.5). Multiplicamos por $(n+1)$ ambos os membros dessa desigualdade, temos,

$$\begin{aligned}
(n+1) \cdot n! &> (n+1) \cdot (2n + 2^n) \\
(n+1)! &> (n+1) \cdot (2n) + (n+1) \cdot 2^n \\
&\overset{n>1}{>} (n+1) \cdot 2 + 2 \cdot 2^n \\
&> 2 \cdot (n+1) + [2 \cdot 2^n] \\
&> 2(n+1) + 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Comprovamos assim que $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n > 4$. □

Em anexo, apresentamos os problemas complementares (A.12) ao (A.16) que envolvem desigualdades.

A seguinte desigualdade, que envolve radicais, especialmente raízes quadradas, é extremamente interessante e acreditamos que estimula a curiosidade.

Proposição 4.6. *Para todo número n natural, temos que*

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{n-radicais} < 2. \tag{4.6}$$

Demonstração. Para provar que a desigualdade (4.6) é verdadeira para todo natural n, vamos usar o princípio de indução finita. Seja

$$P(n) : \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{n-radicais} < 2, \text{ para qualquer que seja } n \in \mathbb{N},$$

i. Para $n = 1$, temos que $P(1)$ é válida. Pois, $\sqrt{2} < 2$.

ii. Admitimos $P(n)$: $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n-radicais} < 2$, verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$, temos de mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira. Isto é,

$$P(n+1) : \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{(n+1)-radicais} < 2.$$

Vamos adicionar o número 2 em ambos os membros da desigualdade (4.6), assim temos:

$$2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n-radicais} < 2+2,$$

extraindo a raíz quadrada em ambos os membros dessa desigualdade teremos:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}}_{(n+1)-radicais} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2.$$

Logo, a validade de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Em anexo sugerimos, a generalização desse caso, o problema complementar (A.17) para comprovação.

Ainda envolvendo desigualdades com raiz quadrada, sugerimos os problemas complementares (A.18) e (A.19), um caso particular e o outro o caso mais geral, esses dois problemas podemos encontrar em [8]. Já as desigualdades propostas nos problemas (A.20) e (A.21) se relacionam de forma interessante.

Proposição 4.7. *Para todo n natural, e sendo $a, b \geqslant 0$, temos que*

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leqslant \frac{a^n+b^n}{2}. \tag{4.7}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a desigualdade (4.7), segue

i. para $n = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira. Pois,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^1 = \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{a^1+b^1}{2}.$$

ii. Admitimos $P(n)$ verdadeira para algum natural, pelo princípio de indução matemática, mostraremos que

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} \leqslant \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}. \tag{4.8}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\overset{H.I.}{\leqslant} \left(\frac{a^n+b^n}{2}\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= \frac{a^{n+1}+a^nb+b^na+b^{n+1}}{4} \\
&= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} - \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{4} + \frac{a^nb+b^na}{4} \\
&= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} - \frac{a^{n+1}+b^{n+1}-a^nb-b^na}{4} \\
&= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} - \frac{(a^n-b^n)\cdot(a-b)}{4}.
\end{aligned}$$

Para qualquer número real a e b, temos que $a \geqslant b$ ou $b \geqslant a$.

Se $a \geqslant b$, então $a-b \geqslant 0$ e $a^n - b^n \geqslant 0$, daí $(a-b)\cdot(a^n-b^n) \geqslant 0$.

Se $b \geqslant a$, então $a-b \leqslant 0$ e $a^n - b^n \leqslant 0$, daí $(a-b)\cdot(a^n-b^n) \geqslant 0$.

Assim, $(a-b)\cdot(a^n-b^n) \geqslant 0$, então $-\frac{(a^n-b^n)\cdot(a-b)}{4} \leqslant 0$. Daí, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} &\leqslant \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} - \frac{(a^n-b^n)\cdot(a-b)}{4} \\
&\leqslant \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $a, b \geqslant 0$ e n natural. □

Proposição 4.8. *Para todo n natural, e sendo $a \geqslant 2$, temos que*

$$2a^n \leqslant a^{n+1}. \tag{4.9}$$

Demonstração. Seja $P(n) : 2a^n \leqslant a^{n+1}$, segue que

i. para $n = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira. Pois, $2a^1 = 2a \leqslant a^{1+1} = a^2$, sendo verdadeira para $a = 2$, basta ver que $2 \cdot 2^1 = 4 \leqslant 2^{1+1} = 2^2$. Para todo $m \geqslant 2$, temos $2 \cdot m^2 \leqslant m^{2+1} = m \cdot m^2$. Assim, $2a^2 \leqslant a^3$ para qualquer $a \geqslant 2$.

ii. Admitimos $P(n) : 2a^n \leqslant a^{n+1}$, verdadeira para algum $n > 1$ natural, temos de mostrar que

$$P(n+1) : 2a^{n+1} \leqslant a^{n+2}.$$

Vamos multiplicar por a ambos os membros da desigualdade (4.9). Temos,

$$\begin{aligned} 2a^n \cdot a &\overset{H.I.}{\leqslant} a^{n+1} \cdot a \\ 2a^{n+1} &\leqslant a^{n+2} \end{aligned}$$

Logo, a validade de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$. Pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo natural n,sendo $a \geqslant 2$. □

Em anexo, sugerimos o problema complementar (A.22), um caso mais abrangente, com relação a essa proposição (4.9).

O estudo de médias, muitas vezes é relacionado a uma ideia de trocar uma sequência com vários números por apenas um que represente uma sequência. Porém, no ensino básico, as médias podem ser utilizadas para resolvermos problemas que envolvem a otimização, ou seja, problemas com máximos e mínimos que aparecem constantemente, em diversas expressões algébricas. Estes problemas podem estar presentes na matemática básica, trigonometria, geometria plana, analítica e espacial. Interpretamos geometricamente desigualdades entre médias e suas condições de igualdade, em diversas situações. As desigualdades algébricas, bem como as suas propriedades, nos auxiliam na resolução de problemas. Para maior aprofundamento em problemas de otimização, sugerimos a leitura da Revista Olímpica-IME-UFG, nº12, páginas 72-90[2].

Uma das desigualdades é a que relaciona a média aritmética $M_A(n)$ e a média geométrica $M_G(n)$. Sabemos, por definição, que para n números reais positivos $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_n$:

$$M_A(n) = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{e} \quad M_G(n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}.$$

Proposição 4.9. *Para quaisquer n números positivos $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, temos que $M_A(n) \geqslant M_G(n)$, isto é:*

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}, \tag{4.10}$$

e que a igualdade vale apenas se $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

Podemos encontrar a Proposição 4.9, na forma de problemas ou teoremas. Por exemplo, no livro, The USSR Oliympiad Problem Book[17], a encontramos enunciada, como um teorema (Theorem of the Arithmetic and Geometric Means for n Numbers) a ser demonstrado. Vamos demonstrar, utilizando o princípio de indução matemática.

Demonstração. Seja $P(n)$ a afirmação da desigualdade (4.10).

i. Para $n = 2$, temos que $P(2)$ é válida. Pois,

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 \cdot a_2} &= \frac{a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}}{2}\\ &= \frac{\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2}{2}\\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Assim, mostramos que $P(2)$ é verdadeira, observe que a igualdade é válida, apenas quando $a_1 = a_2$. Suponha, sem perde generalidade, que $a_{n+1} \geqslant a_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, consequentemente temos que

$$a_{n+1} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = M_A(n), \tag{4.11}$$

portanto existe um real $b > 0$ tal que

$$a_{n+1} = M_A(n) + b. \tag{4.12}$$

Assim

$$\begin{aligned}M_A(n+1) &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} =\\ &= \frac{n \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) + a_{n+1}}{n+1}\\ &= \frac{n \cdot M_A(n) + a_{n+1}}{n+1}\\ &\overset{(4.12)}{=} \frac{n \cdot M_A(n) + M_A(n) + b}{n+1}\\ &= M_A(n) + \frac{b}{n+1}\end{aligned}$$

ou seja

$$M_A(n+1) = M_A(n) + \frac{b}{n+1}. \tag{4.13}$$

Elevando a igualdade (4.13) a potência $n + 1$ e usando o desenvolvimento binomial obtido em (3.18), temos

$$
\begin{aligned}
\Big(M_A(n+1)\Big)^{n+1} &= \left(M_A(n) + \frac{b}{n+1}\right)^{n+1} \\
&\overset{(3.18)}{=} \Big(M_A(n)\Big)^{n+1} + \cancel{(n+1)}\Big(M_A(n)\Big)^{n} \cdot \frac{b}{\cancel{n+1}} + \underbrace{\cdots}_{\geqslant 0} \\
&\geqslant \Big(M_A(n)\Big)^{n+1} + \Big(M_A(n)\Big)^{n} \cdot b \\
&\geqslant \Big(M_A(n)\Big)^{n} \Big(\underbrace{M_A(n) + b}_{a_{n+1}}\Big) \\
&= \Big(M_A(n)\Big)^{n} \cdot a_{n+1} \\
&\overset{H.I.}{=} a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdot a_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Extraindo a $(n+1)-$ésima raiz dos dois lados temos

$$M_A(n+1) \geqslant \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdot a_{n+1}} = M_G(n+1),$$

portanto $P(n+1)$ é verdadeira, pelo princípio da indução segue o resultado. Observe que a igualdade só ocorre quando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, segue assim o resultado desejado. □

De fato, temos que $M_A \geqslant M_G \geqslant M_H$, onde M_H é a média harmônica. Ressaltamos que após demonstrada a desigualdade entre a médias aritmética e geométrica, as demais demonstrações dessa desigualdade entre as médias, podem ser com mais facilidade comprovadas, utilizando o fato de que $M_A \geqslant M_G$.

Para n números reais positivos $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$: a média harmônica M_H é

$$M_H = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Apresentamos em anexo, os problemas (A.23) e (A.24), envolvendo a média harmônica.

Constantemente estudamos em matemática definições por recursão, ou seja por recorrência. Essas definições, são de fato definições por indução. No capítulo anterior, estudamos, o uso do princípio de indução matemática, em casos com somatórios sobre os números naturais. Mas, podemos ampliar esse conceito para multiplicações em $\mathbb{N}$. Apresentaremos agora, a aplicação do princípio de indução nos produtórios, onde utilizamos a letra grega maiúscula $\prod$(pi) para expressar multiplicações sucessivas de termos em uma sequência(produtórios).

Considere a notação: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$(lemos: produtório dos a_i, para i variando de 1 a n), para todo i e n naturais, sendo a_i números reais. Definimos

$$a_1 = \prod_{i=1}^{1} a_i \text{ e } \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot (a_{n+1}).$$

Em anexo, apresentamos os problemas (A.33) ao (A.37) para aprofundamento. E, a seguir, uma propriedades envolvendo produtórios.

Proposição 4.10. *Para qualquer n e i naturais, então*

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{(n+1)^n}{n!}. \tag{4.14}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a afirmação (4.14). Segue que:

i. Para $n = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira. Pois,

$$\prod_{i=1}^{1} \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = (1+1) = 2 = \frac{(1+1)^1}{1!}.$$

ii. Assumimos $P(n) : \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{(n+1)^n}{n!}$, verdadeira para algum $n \geq 1$ natural, temos de mostrar que $P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Isto é,

$$\prod_{i=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Calculando $P(n+1)$, temos

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i &= \left[\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i\right] \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&\overset{H.I.}{=} \left[\frac{(n+1)^n}{n!}\right] \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1) \cdot n!} \\
&= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Vimos que $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo n e i naturais. □

Em anexo apresentamos os problemas complementares (A.28) ao (A.32) que envolvem o produtório. No problema complementar (A.9) temos o produto de dois termos consecutivos no denominador de cada fração. Esse problema também se encontra em [12] e [8]. Uma outra variação, apresenta o produto de três termos consecutivos no denominador de cada fração a ser adicionada. Veja, no problema (A.29) essa conjectura para ser comprovada, onde podemos utilizar os somatórios. Os problemas (A.31) e (A.32), um caso particular e sua generalização, podem ser encontrados em [8]. Uma proposição semelhante a (4.10) que acabamos de comprovar, segue no problema complementar (A.36), em anexo. E podemos variar esse produtório, com os números quadrados perfeitos maiores que 1, nos denominadores, no problema (A.37).

4.2 Indução e um clássico problema geométrico

Propomos nesta seção, o uso do princípio de indução finita, na geometria, apresentando o clássico problema, *A Pizza de Steiner*. O renomado geômetra Jacob Steiner (1796-1863) resolveu esse problema em 1826, e podemos enunciá-lo assim: Qual o número máximo de regiões em que n retas dividem o plano? Ou, qual o número máximo de pedaços que podemos obter dividindo uma pizza ao fazermos n cortes em linha reta? Em [11] e [15] encontramos esse problema para o leitor resolver, em [6] os autores além de sugerirem o problema, auxiliam na conjectura correta para a demonstração, e também apresentam uma variação para a divisão com n círculos e por n triângulos (A.26). Já em [13], a conjectura final é obtida por recorrência e sugerida para demonstração, e os autores apresentam como exercício, *O Queijo de Steiner*(A.27), esse problema envolve o número de regiões no espaço tridimensional. Vamos aqui conjecturar, o problema da *Pizza de Steiner*, como em Morgado[13]. Seja n o número de cortes e r_n o número de regiões. Percebemos que para obter o maior número de regiões, o próximo corte deve intersectar todos os cortes anteriores em pontos distintos. Assim, para os quatro primeiros cortes temos:

$n°$ de cortes	$n°$ de regiões
1	2
2	4
3	7
4	11

Tabela 4.1: *Tabela número de cortes e regiões*

percebemos que as regiões acrescentadas a partir do segundo corte, são $2, 3$ e 4, o que sugere n regiões acrescentadas no n-ésimo corte. Daí, temos

$$2 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Como analisamos um pequeno número de cortes, vamos ver uma conjectura mais rigorosa, antes de afirmar que o número total de regiões é $\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Se o n-ésimo corte foi realizado de forma a garantir o número máximo de regiões no plano, o próximo corte também deverá ocorrer dessa forma. Assim o corte $n+1$ intersecta os n cortes existentes de forma a intersectá-los em pontos distintos. Os n pontos distintos divide o corte $n+1$ em $n+1$ partes, e cada uma dessas partes, aumenta a região dividida anteriormente em $n+1$ regiões. Assim, podemos enunciar o seguinte resultado.

Proposição 4.11 (A Pizza de Steiner)**.** *Seja r_n o número máximo de pedaços que podemos obter ao dividirmos uma pizza fazendo n cortes em linha reta, onde cada corte intersecte os demais em pontos distintos. Então, r_n é para todo $n \in \mathbb{N}$ dado pela recorrência:*

$$\begin{cases} r_1 = 2, \\ r_n = r_{n-1} + n. \end{cases} \tag{4.15}$$

E

$$r_n = \frac{n^2+n+2}{2}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar, utilizando o princípio de indução finita.

i. A afirmação é válida para $n = 1$ e $n = 2$, pois para

$$n = 1, \text{ temos } r_1 = 2 = \frac{1^2+1+2}{2} = \frac{4}{2}, \text{ e para}$$

$$n = 2, \text{ temos } r_2 = r_1 + 2 = 2 + 2 = \frac{2^2+2+2}{2} = \frac{8}{2} = 4,$$

ii. Admitimos $r_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$, verdadeira para algum $n > 2$ natural, temos de mostrar que $r_n \longrightarrow r_{n+1}$. Isto é,

$$r_{n+1} = \frac{(n+1)^2+(n+3)}{2}.$$

Pela fórmula de recorrência (4.17), temos

$$
\begin{aligned}
r_{n+1} &\overset{H.I.}{=} r_n + (n+1) \\
&= \frac{n^2+n+2}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n^2+n+2+2n+2}{2} \\
&= \frac{n^2+2n+1+n+3}{2} \\
&= \frac{(n+1)^2+(n+3)}{2} \\
&= \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}.
\end{aligned}
$$

Assim, a Proposição é válida para $n+1$, ou seja, $r_n \longrightarrow r_{n+1}$. Portanto, pelo princípio de indução finita, a proposição (4.11) é verdadeira, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = \frac{n^2+n+2}{2}.$$

□

Em anexo, sugerimos o problema complementar (A.26), onde a divisão do plano será dividida por círculos ou por triângulos. E também, uma variação para o espaço tridimensional com o problema (A.27) do *Queijo de Steiner*.

Problemas semelhantes a Pizza e Queijo de Steiner, foram estudados em [7], onde os autores conjecturaram uma fórmula para determinar, não somente o número de regiões, mas também, o número de vértices e arestas.

4.3 Indução nas Divisibilidades

Uma divisibilidade interessante, se refere à soma de três cubos perfeitos consecutivos. Essa soma é sempre um número múltiplo de 9. Sugerimos como aprofundamento em divisibilidade, além dessa proposição que enunciamos a seguir(apresentada como exercício em [13]), também outras, e demais problemas propostos nesta seção.

Proposição 4.12. *Para qualquer número natural n,*

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ é divisível por 9.}$$

Demonstração. Seja $P(n) : 9 \big| [n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3]$, para todo n natural.

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$, que é divisível por 9.

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 1$, ou seja

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k, \text{ para } k \in \mathbb{N},$$

reescrevendo obtemos

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k - n^3. \tag{4.16}$$

Adicionando a ambos os membros de 4.16 o termo $(n+3)^3$, temos:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= 9k - n^3 + (n+3)^3\\ &= 9k + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 - n^3\\ &= 9(k + n^2 + 3n + 3).\end{aligned}$$

Como, $(k+n^2+3n+3)$ é um número inteiro positivo, mostramos que $(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3$ é múltiplo de 9. Portanto, $P(n+1)$ é verdadeira, segue pelo princípio de indução, que $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 4.13. *Para qualquer número natural* n, $7^n - 1$ *é divisível por* 6.

Vamos provar, utilizando o princípio de indução finita, essa afirmação (4.13).

Demonstração. Seja $P(n)$ a afirmação $6 \,\big|\, (7^n - 1)$, para qualquer n natural.

i. $P(1)$ é válida, pois $6 \,\big|\, (7^1 - 1 = 6)$.

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 1$, isto é $7^n - 1 = 6k$, com k inteiro positivo. Temos de mostrar que $P(n) \longrightarrow P(n+1)$, ou seja,

$$6 \,\Big|\, \left(7^{n+1} - 1\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}7^{n+1} - 1 &= 7^1 \cdot 7^n - 1\\ &= 7 \cdot (7^n - 1) + 7 - 1\\ &\overset{H.I.}{=} 7 \cdot (6k) + 7 - 1\\ &= 7 \cdot (6k) + 6\\ &= 6 \cdot (7k + 1).\end{aligned}$$

Como $(7k+1)$ é inteiro positivo, segue que $7^{n+1}-1$ é múltiplo de 6, consequentemente $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução, a propriedade $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$. □

Em anexo, apresentamos os problemas complementares (A.38) ao (A.46) que envolvem as divisibilidades.

4.4 Indução e a Sequência de Fibonacci

Leonardo Pisano(1170 e 1250), nascido em Pisa, Itália, era filho de Guilielmo Bonaccio. Por ser filho de Bonaccio, o apelidaram Fibonacci. Leonardo Fibonacci publicou, por volta do ano 1202, a famosa obra *Líber Abacci*(Livro do Ábaco), com diversos assuntos de álgebra e aritmética da época. Nesse livro Fibonacci apresentou o problema relacionado à reprodução de coelhos, que deu origem a sequência que leva seu nome, sequência de Fibonacci. O problema foi apresentado como exercício no seu livro, onde um casal de coelhos cercado, gerava outro casal a cada mês, a partir do segundo mês após o nascimento, a questão solicitava o número de casal de coelhos após um ano. Então, os resultados mensais podem ser representados com os números na sequência

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233).$$

Até os dias atuais, essa sequência de Fibonacci é também atrativa por se relacionar com o número de ouro. Ao dividirmos qualquer número dessa sequência pelo anterior, vamos obtendo um quociente próximo do número de ouro ($\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618...$), e essa aproximação é cada vez maior, a medida que pegamos termos consecutivos maiores. O número de ouro, representado pela letra grega Φ, também conhecido pela razão áurea, pode ser encontrado em outras áreas: arte(Monalisa), física(Ótica), química, biologia, arquitetura(Parthenon), computação, design, música. Na natureza, já foi relacionado estudos com conchas, pinhas, girassois furacões, galáxias e partes do corpo humano.

Definição 4.14. *A sequência* $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ *é denominada sequência de Fibonacci e seus termos* F_n *são obtidos pela recorrência*

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 2. \end{cases} \tag{4.17}$$

Os termos da sequência de Fibonacci são chamados números de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci possui várias propriedades, vamos aqui apresentar algumas dessas propriedades com demonstrações, utilizando o princípio de indução finita, e outras como atividades.

O matemático francês Jacques Binet (1786-1856), em 1843, descobriu o termo geral da sequencia de Fibonacci. Primeiramente iremos comprovar, utilizando o princípio de indução finita, a Fórmula de Binet.

Proposição 4.15 (Fórmula de Binet). *O termo geral F_n da sequência de Fibonacci é dada por*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \tag{4.18}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a igualdade (4.18) acima. Então,

i. $P(1)$ são verdadeiras, pois

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

e

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

ii. Suponhamos por hipótese pelo segundo principio de indução Teorema 1.2 que $P(k)$ é verdadeira para todo $2 < k < n+2$, devemos mostrar que $P(n+2)$ é verdadeira, isto é

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]. \tag{4.19}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_n + F_{n+1} \\
&\overset{H.I.}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2 &= \frac{1 \pm 2 \cdot \sqrt{5} + 5}{4} \\
&= \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]. \end{aligned}$$

Donde concluímos que $P(n+2)$ é verdadeira. Pelo princípio de indução finita, concluímos que a fórmula de Binet é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposição 4.16 (Soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci)**.** *A soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é*

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1. \tag{4.20}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a igualdade (4.20) acima. Então,

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $F_1 + F_2 = 2 = F_4 - 1$.

ii. Supondo $P(n)$ válida para algum n natural, mostraremos que $P(n+1)$ é verdadeira. Ou seja,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n + F_{n+1} = F_{n+3} - 1.$$

Vamos adicionar F_{n+1} em ambos os membros da igualdade (4.20),

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n + F_{n+1} &= F_{n+1} + F_{n+2} - 1 \\ &\overset{(4.17)}{=} F_{n+3} - 1. \end{aligned}$$

Donde $P(n+1)$ é verdadeira para todo natural $n > 1$. Portanto, pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposição 4.17 (Soma dos n primeiros termos pares da sequência de Fibonacci)**.** *A soma dos n primeiros termos pares da sequência de Fibonacci é*

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1. \tag{4.21}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a identidade (4.21) acima. Então,

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4 = F_5 - 1$.

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida. Mostraremos, pelo princípio de indução finita que,

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} + F_{2n+2} = F_{2n+3} - 1$$

Adicionando F_{2n+2} em ambos os membros da igualdade (4.21),

$$\begin{aligned} F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} + F_{2n+2} = & F_{2n+1} + F_{2n+2} - 1 \\ = & F_{2n+3} - 1. \end{aligned}$$

Ou seja $P(n+1)$ é verdadeira, consequentemente pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

As proposições (4.15), (4.16), (4.17) e problemas em anexo (A.57), soma dos n primeiros termos ímpares da sequência de Fibonacci, (A.58), soma dos quadrados dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci e (A.59), da sequência de Fibonacci, estão propostas como exercícios em [13] e o problema complementar (A.60) no anexo, o encontramos como exercício em [11].

A proposição a seguir, é um exemplo de desigualdade com a sequência de Fibonacci apresentado em [15].

Proposição 4.18. *Sendo F_n o termo geral da sequência de Fibonacci, temos que*

$$F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n. \tag{4.22}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a igualdade (4.22) acima. Então,

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $F_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1 = \frac{7}{4}$.

ii. Suponhamos por hipótese pelo segundo principio de indução Teorema 1.2 que $P(k)$ é verdadeira para todo $1 \leq k < n+1$, devemos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira.

Temos que

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &\overset{(4.17)}{=} F_n + F_{n-1} \\
&\overset{H.I.}{<} \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \\
&= \frac{7}{4}\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{7}{4}\right) \\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{11}{4}\right) \\
&< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{49}{16}\right) \\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^{2} \\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Provamos ser verdadeira $P(n+1)$. Logo, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira, ou seja, $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 4.19. *Sejam m e n números naturais, e F_n a sequência de Fibonacci, então*

$$F_{m+n} = F_{m-1}\cdot F_n + F_m \cdot F_{n+1}. \tag{4.23}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a identidade (4.23) acima. Vamos provar por indução em n.

i. $P(1)$ e $P(2)$ são verdadeiras, pois

$$F_{m-1}\cdot \underbrace{F_1}_{1} + F_m \cdot \underbrace{F_2}_{1} = F_{n-1} + F_n \overset{(4.17)}{=} F_{m+1}$$

e

$$F_{m-1}\cdot \underbrace{F_2}_{1} + F_m\cdot F_{2+1} = F_{m-1} + F_m\cdot \underbrace{F_3}_{2} = F_{m-1} + 2\cdot F_m \overset{(4.17)}{=} F_{m+1} + F_m \overset{(4.17)}{=} F_{m+2}.$$

ii. Pelo segundo princípio de Indução suponhamos que $P(k)$ seja valida para todo natural $2 \leq k < n+1$. Devemos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira, isto é

$$F_{m+(n+1)} = F_{m-1}\cdot F_{n+1} + F_m \cdot F_{n+2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} F_{m+(n+1)} &\overset{(4.17)}{=} F_{m+n} + F_{m+(n-1)} \\ &\overset{H.I.}{=} (F_{m-1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n+1}) + (F_{m-1} \cdot F_{n-1} + F_m \cdot F_n) \\ &= F_{m-1} \cdot (F_n + F_{n-1}) + F_m \cdot (F_{n+1} + F_n) \\ &\overset{(4.17)}{=} F_{m-1} \cdot F_{n+1} + F_m \cdot F_{n+2}. \end{aligned}$$

Provamos ser verdadeira $P(n+1)$. Logo, pelo segundo princípio de indução, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Em anexo, no problema complementar (A.62), encontramos a *Fórmula de Binet*[5] *para* F_n, utilizando a notação Φ para o número de ouro.

Apresentaremos a seguir, a identidade conhecida por *Hockey-Stick*(taco de hóquei), ou por meia de natal. Essa identidade envolvem os coeficientes binomiais, e sua representação gráfica no triângulo de Pascal quando destacada, a forma que se revela é semelhante a esses objetos.

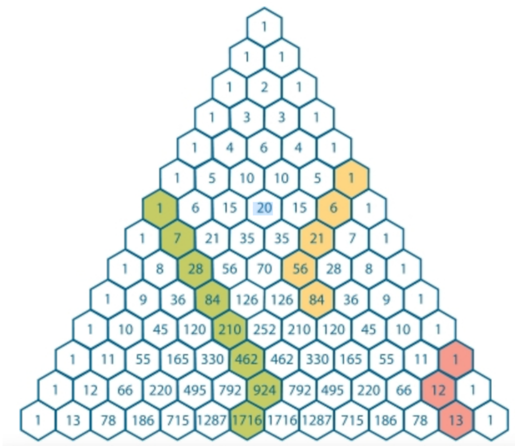


Figura 4.2: *Hockey-Stick*

Proposição 4.20 (Identidade do Hockey-Stick). *Para qualquer* n *e* $r \in \mathbb{N}$*, sendo* $n \geqslant r$*, temos que*

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}. \tag{4.24}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a igualdade (4.24), temos que

[5]Jacques Philippe Marie Binet (1786 - 1856), matemático francês. Em 1807 começou a lecionar na École Polytechnique, também foi professor de astronomia no Collège de France. Desenvolveu, em 1843, uma fórmula para os números de Fibonacci, mas essa fórmula, não recursiva, já era conhecida por Euler, Bernoulli e De Moivre.

i. $P(r)$ é verdadeira, pois se $n = r$, temos

$$\sum_{i=r}^{r} \binom{i}{r} = \binom{r}{r} = 1 = \binom{r+1}{r+1}.$$

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida.

Temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=r}^{n+1} \binom{i}{r} &= \binom{n+1}{r} + \sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} \\ &\overset{H.I.}{=} \binom{n+1}{r} + \binom{n+1}{r+1} \\ &\underset{Stifel}{\overset{(3.15)}{=}} \binom{n+2}{r+1}\end{aligned}$$

Provamos a veracidade para $P(n+1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira, para todo n e $r \in \mathbb{N}$, sendo $n \geqslant r$. $\square$

Apresentamos a seguir a interessante Proposição (4.21). Ela envolve os coeficientes binomiais e os números de Fibonacci.

Proposição 4.21. *Para todo número inteiro não negativo k, temos*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{k+i} = F_{k+2n}, \tag{4.25}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, sendo F_n o enésimo número de Fibonacci.

Demonstração. Seja $P(n)$ a identidade (4.25), temos

i. $P(1)$ é verdadeira, pois

$$\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} F_{k+i} = \binom{1}{0} F_{k+0} + \binom{1}{1} F_{k+1} = F_k + F_{k+1} = F_{k+2}.$$

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum n natural, tal que $n \geq 1$. Assim, pelo princípio de indução finita, mostraremos que $P(n) \longrightarrow P(n+1)$.

Note que separando a primeira e ultima parcela da soma $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} F_{k+i}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} F_{k+i} &= \binom{n+1}{0} F_{k+0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} F_{k+i} + \binom{n+1}{n+1} F_{k+n+1} \\
&= F_k + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} F_{k+i} + F_{k+n+1}.
\end{aligned}$$

Usando a relação de Stiffel, Lema 3.15

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} F_{k+i} &= F_k + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] F_{k+i} + F_{k+n+1} \\
&= F_k + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} F_{k+i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} F_{k+i} + F_{k+n+1}.
\end{aligned}$$

Reindexando a terceira parcela do lado direito da igualdade anteiro, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} F_{k+i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} F_{k+i+1}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} F_{k+i} &= F_k + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} F_{k+i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} F_{k+i+1} + F_{k+n+1} \\
&= \binom{n}{0} F_{k+0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} F_{k+i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} F_{k+i+1} + \binom{n}{n} F_{k+n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{k+i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{k+i+1} \\
&\overset{H.I.}{=} F_{k+2n} + F_{k+1+2n} \\
&\overset{(4.17)}{=} F_{k+2n+2}.
\end{aligned}$$

Provamos a veracidade para $P(n+1)$ para todo natural $n > 1$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira, para todo inteiro não negativo k e qualquer $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Em anexo, o problema (A.63) envolve os coeficientes binomiais e a sequência de Fibonacci, assim como as proposições (4.20) e (4.21).

4.5 Indução nas Funções Compostas

A partir do primeiro ano do ensino médio, encontramos nos mais variados materiais didáticos, o estudo das funções compostas. De um modo geral, se define as funções compostas e utiliza-se as notações conforme apresentamos a seguir:

Dadas as funções f e g, sendo f uma função de um conjunto A em um conjunto B e g uma função de B em um conjunto C. Chamamos de função composta de g e f a função h de A em C, de modo que a imagem de cada x é obtida: aplicando a x, a função f, obtemos $f(x)$; em seguida aplicando a $f(x)$ a função g, assim obtemos $g(f(x))$. Indicamos por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$, e também indicamos por $g \circ f$, onde se-lê "g composta com f" ou, até mesmo, "g círculo f". Temos que, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para qualquer $x \in A$.

Apresentamos aqui proposições que não só aprimora o conhecimento sobre as funções compostas, mas que busca também motivar o estudo, além de despertar a curiosidade.

Para uma funçãp $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, vamos denotar por $f^n(x)$ a enésima composição da função $f(x)$. Ou seja,

$$f^n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-vezes})(x).$$

e

$$f^1(x) = 1(x)$$

Proposição 4.22. *Sejam a, $b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, e a função afim $f(x) = ax + b$. Temos para qualquer $n \in \mathbb{N}$ que*

$$f^n(x) = a^n \cdot x + b \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a^i. \tag{4.26}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a afirmação (4.26) acima.

i. $P(1)$ é verdadeira, pois

$$f^1(x) = a^1 \cdot x + b \cdot \sum_{i=0}^{1-1} a^i = ax + b \cdot a^0 = ax + b = f(x).$$

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum n natural, tal que $n \geq 1$. Assim, pelo princípio de indução finita, mostraremos que $P(n+1)$ é verdadeira. Ou seja,

$$P(n+1) : f^{n+1}(x) = a^{n+1} \cdot x + b \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) = (f^n \circ f)(x) &= a^n \cdot (ax+b) + b \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a^i \\ &= a^{n+1}x + a^n \cdot b + b \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a^i \\ &= a^{n+1}x + b \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i. \end{aligned}$$

Provamos ser verdadeira $P(n+1)$ para todo natural $n \geq 1$. Logo, a validade de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira, ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo a, $b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ temos que

$$f^n(x) = a^n \cdot x + b \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a^i.$$

□

A seguir, duas proposições envolvendo $f^n(x)$, na (4.24) a $f(x)$ é uma função irracional.

Proposição 4.23. *Seja a função* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$*, para qualquer* $n \in \mathbb{N}$*, temos que*

$$f^n(x) = \sqrt{x^2+n}.$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a Proposição (4.23) acima.

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $f^1(x) = \sqrt{x^2+1} = f(x)$.

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum n natural, tal que $n \geq 1$. Assim, pelo princípio de indução finita, mostraremos que $P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Ou seja,

$$P(n+1) : f^{n+1}(x) = \sqrt{x^2+n+1}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) = (f^n \circ f)(x) &= \sqrt{(\sqrt{x^2+1})^2 + n} \\ &= \sqrt{x^2+1+n}. \end{aligned}$$

Provamos ser verdadeira $P(n+1)$ para todo natural $n > 1$. Logo, a validade de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira, ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$f^n(x) = f^n(x) = \sqrt{x^2+n}.$$

$\square$

Proposição 4.24. *Seja a função $f(x) = 2x(1-x)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$f^n(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - (1-2x)^{2^n}\right].$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a Proposição (4.24) acima.

i. $P(1)$ é verdadeira, pois

$$\begin{aligned} f^1(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left[1 - (1-2x)^{2^1}\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[1 - (1-4x+4x^2)\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[4x - 4x^2\right] \\ &= 2x - 2x^2 = 2x(1-x) = f(x). \end{aligned}$$

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum n natural, tal que $n > 1$. Assim, pelo princípio de indução finita, mostraremos que $P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Ou seja,

$$P(n+1) : f^{n+1}(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - (1-2x)^{2^{n+1}}\right].$$

Temos que,

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) = (f^n \circ f)(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left[1 - (1 - 2 \cdot 2x(1-x))^{2^n}\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \left(1 - 4x + 4x^2\right)^{2^n}\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[1 - (1-2x)^{2 \cdot 2^n}\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[1 - (1-2x)^{2^{n+1}}\right]. \end{aligned}$$

Provamos ser verdadeira $P(n+1)$ para todo natural $n > 1$. Logo, a validade de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira, ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$f^n(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - (1-2x)^{2^n}\right].$$

$\square$

Em anexo, o problema complementar (A.65), apresenta uma relação entre $f^n(x)$ e os números de Fibonacci, e o (A.66) temos para $f(x)$ uma função polinomial do 2°.

4.6 Indução e Matrizes

O estudo de matrizes podem ser aplicados, não apenas na matemática, mas também em diversas áreas, como por exemplo: engenharia, economia, informática, física, química, meteorologia, biologia, programações, lógica, estatística, dentre outras. O estudo das matrizes ocorre no 2º ano do ensino médio. Sugerimos algumas proposições que podem ser demonstradas utilizando o princípio de indução matemática.

Um caso singular, é o da matriz idempotente. Geralmente, não estudada no ensino básico, e com uma propriedade interessante que apresentamos na proposição (4.26).

Definição 4.25. *Uma matriz quadrada A é dita idempotente se $A^2 = A$.*

Proposição 4.26. *Seja A, uma matriz idempotente. Então $A^n = A$ para qualquer n natural.*

Demonstração. Seja $P(n) : A^n = A$, para o natural $n \geqslant 1$.

i. $P(1)$ é verdadeira, por definição $A^1 = A$.

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum n natural. Temos que,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A \\ &\overset{H.I.}{=} A \cdot A \\ &= A^2 \overset{Idempotente}{=} A. \end{aligned}$$

Logo $A^{n+1} = A$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $A^n = A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Sabemos que uma matriz quadrada A é inversível quando $A \cdot A^{-1} = I$, onde A^{-1} é a inversa da matriz A e I é a matriz identidade de mesma ordem da matriz A.

Proposição 4.27. *Seja A uma matriz inversível. Então $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ para qualquer n natural.*

Demonstração. Seja $P(n): \ (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $(A^1)^{-1} = (A^{-1})^1 = A^{-1}$.

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida por hipótese de indução para algum n natural,

Como $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned}(A^{n+1})^{-1} &= (A^n \cdot A)^{-1} \\ &= A^{-1} \cdot (A^n)^{-1} \\ &\overset{H.I.}{=} A^{-1} \cdot (A^{-1})^n \\ &= (A^{-1})^{n+1}.\end{aligned}$$

Provamos ser verdadeira $P(n+1)$ para todo natural $n > 1$. Logo, a validade de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira, ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. □

Proposição 4.28. *Sejam a e b números reais, e a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Então, para qualquer n natural, temos que*

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a Proposição (4.28), e fixamos os números reais a e b.

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $A^1 = \begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ 0 & b^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = A$.

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum n natural. Assim, pelo princípio de indução finita, mostraremos que $P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Ou seja,

$$P(n+1) : A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &\overset{H.I.}{=} \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Provamos ser verdadeira $P(n+1)$ para todo natural $n > 1$. Logo, a validade de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Em anexo, no Problema (A.64) encontramos uma igualdade que envolve matrizes quadradas e os números de Fibonacci.

4.7 Indução na Trigonometria

Desde o 9° ano do ensino fundamental iniciamos o estudo da trigonometria, mas apenas no ensino médio que os estudantes tem contato com o ciclo trigonométrico. São estudadas identidades relacionadas a dois arcos, conhecidas como transformações trigonométricas, como por exemplo:

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) \pm \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(a).$$

Utilizando o princípio de indução finita vamos demonstrar proposições interessantes relacionadas ao estudo da trigonometria.

Proposição 4.29. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$\sum_{i=1}^{n} \cos i = \frac{\cos\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \cdot sen\left(\dfrac{n}{2}\right)}{sen\left(\dfrac{1}{2}\right)}. \tag{4.28}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a igualdade (4.28). Temos que

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} \cos i = \frac{\cos\left(\dfrac{1+1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \cos 1.$

ii. Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum n natural. Assim, pelo princípio de indução finita, mostraremos que $P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Ou seja,

$$P(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1} \cos i = \frac{\cos\left(\dfrac{n+2}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)}.$$

Como,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \cos i &= \left(\sum_{i=1}^{n} \cos i\right) + \cos(n+1) \\ &\overset{H.I.}{=} \frac{\cos\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)} + \cos(n+1). \qquad (4.29)\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros de (4.29) por sen $\left(\dfrac{1}{2}\right)$, temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \cos i = \cos\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right) + \cos(n+1) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (4.30)$$

Utilizando a transformação trigonométrica

$$\cos(a) \cdot \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)\right], \qquad (4.31)$$

na primeira e segunda parcela do lado direito da equação (4.30) temos, respectivamente,

$$\cos\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right) \overset{(4.31)}{=} \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right], \qquad (4.32)$$

e

$$\cos(n+1) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \overset{(4.31)}{=} \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(n + \frac{3}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]. \qquad (4.33)$$

Substituindo (4.32) e (4.33) em (4.30), obtemos

$$\begin{aligned}\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\cos i &= \frac{1}{2}\cdot\left[\cancel{\text{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)}-\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[\text{sen}\left(n+\frac{3}{2}\right)-\cancel{\text{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left[\text{sen}\left(n+\frac{3}{2}\right)-\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\\ &\overset{(4.31)}{=} \cos\left(\frac{n+2}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{n+1}{2}\right),\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n+1}\cos i = \frac{\cos\left(\dfrac{n+2}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\text{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)}.$$

Ou seja $P(n+1)$ é verdadeira, portanto pelo princípio de indução finita, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Agora, uma proposição semelhante envolvendo o somatório do seno de argumentos naturais.

Proposição 4.30. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$\sum_{i=1}^{n} sen\, i = \frac{sen\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\cdot sen\left(\dfrac{n}{2}\right)}{sen\left(\dfrac{1}{2}\right)}. \tag{4.34}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a igualdade (4.34), segue que

i. $P(1)$ é verdadeira, pois $\displaystyle\sum_{i=1}^{1}\text{sen}\, i = \frac{\text{sen}\left(\dfrac{1+1}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\text{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \text{sen}\, 1.$

ii. Supondo $P(n)$ verdadeira para algum n natural, mostraremos, pelo princípio de indução finita, que

$$P(n+1):\sum_{i=1}^{n+1}\text{sen}\, i = \frac{\text{sen}\left(\dfrac{n+2}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\text{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)}.$$

Como,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{sen} i = \left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} i\right) + \operatorname{sen}(n+1)$$
$$\overset{H.I.}{=} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)} + \operatorname{sen}(n+1). \tag{4.35}$$

Multiplicando ambos os membros de (4.35) por $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{sen} i = \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right) + \operatorname{sen}(n+1) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \tag{4.36}$$

Utilizando a transformação trigonométrica

$$\operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] \tag{4.37}$$

na primeira e segunda parcela do segundo membro da equação (4.36) temos, respectivamente

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right) \overset{(4.37)}{=} \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\right], \tag{4.38}$$

e

$$\operatorname{sen}(n+1) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \overset{(4.37)}{=} \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) - \cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\right]. \tag{4.39}$$

Substituindo (4.38) e (4.39) em (4.36), obtemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{sen} i = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cancel{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\cancel{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)} - \cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\right]$$
$$\overset{(4.37)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{n+2}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{sen} i = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+2}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)}.$$

Provamos ser verdadeira $P(n+1)$ para todo natural $n > 1$. Portanto, pelo princípio de indução finita, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} i = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)}.$$

$\square$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que o uso do princípio de indução finita no ensino básico, favorece a aprendizagem, ajuda com abstrações e no reconhecimento de padrões, de forma a ampliar as competências previstas na BNCC [3], além de construir melhores argumentações para a comprovação de propriedades. Também contribui para a habilidade de comunicar, pensar, argumentar, formular e resolver situações problemas. Auxilia na competência específica de utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. É um princípio simples que permite analisarmos as conjecturas de forma finita, e comprovar a validade das proposições para uma infinidade de números naturais. As demonstrações de fórmulas, conjecturas e proposições, ao longo dos últimos anos, aparecem cada vez menos nos livros didáticos do ensino básico, e professores cada vez mais não as fazem. Ao deixarmos de comprovar teoremas, propriedades e proposições, diminuímos a capacidade do estudante desenvolver diversas competências. Num ambiente onde os alunos conjecturam, demonstram e compreendem demonstrações, a capacidade de investigação e argumentação são amplamente desenvolvidas. Com o uso do princípio de indução finita no ensino básico, a matemática passa a ampliar sua importância para as ciências de um modo geral, a medida que busca valorizar os caminhos e processos para a obtenção dos resultados, e não apenas trabalhar com o resultado final. Procuramos apresentar o uso do princípio de indução finita, de maneira a orientar e preparar não apenas os estudantes, mas também os professores. Neste trabalho, o professor poderá conhecer ou ampliar os conceitos e aplicações desse princípio e apropriar de temas, exemplos e sugestões para suas aulas.

Referências Bibliográficas

[1] BENJÚMEDA, F. R. **Demostrando por inducción**. *Revista Tzaloa, ano 1, número 3*, 2009. https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/Gondim12.pdf Acesso: 01/03/2023.

[2] COSTA, A.; GONDIM, R. **Revista da Olimpíada-IME-UFG.** IME-UFG, 2017. https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/Gondim12.pdf Acesso: 01/03/2023.

[3] DA EDUCAÇÃO, B. M. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasilia, 2018. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso: 11/02/2023.

[4] DE ESTADO DA EDUCAÇÃO, S. **Novo Ensino Médio**. Governo de Goiás, 2022. https://site.educacao.go.gov.br/novo-ensino-medio Acesso: 24/02/2023.

[5] DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. Atual, São Paulo, 1991.

[6] FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Circulos Matemáticos: a experiência Russa**. 1ª Edição. IMPA, RJ, 2012.

[7] GOMES, A. J.; GARCIA, R. A.; DE CASTRO, H. P. **Revista da Olimpíada-UFG-IME.Nº 4**. IME-UFG, 2003. https://omeg.ime.ufg.br/n/2863-revista-da-omeg Acesso: 14/04/2023.

[8] GUNDERSON, D. S. **Handbook of mathematical induction, Theory and applications,**. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

[9] HALMOS, P. R. **Naive set theory**. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.

[10] HEFEZ, A. **Indução Matemática**. Apostila 4. Niteroi, RJ, 2007. http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf.

[11] Hefez, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT, SBM. Rio de Janeiro, RJ, 2016. https://loja.sbm.org.br/artimetica.html.

[12] Iezzi, G.; Murakami, C. **Fundamentos de Matemática Elementar, Conjuntos e Funções**. 9ª edição. Atual Editora, São Paulo, SP, 2013.

[13] Morgado, A. C.; Carvalho, P. C. P. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. SBM, RJ, 2015.

[14] NCERT. **Mathematics**. Textbook For Class XI. Sri Aurobindo Marg, Delhi, India, 2021.

[15] Oliveira, K. I. M.; Fernández, A. J. C. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**. Coleção Olimpíadas de Matemática, 2ª Edição. SBM, RJ, 2012.

[16] Roque, t.; de Carvalho, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT, 2ª Edição. SBM, RJ, 2019.

[17] Shklarsky, D. O.; Chentzov, N. N.; Yaglom, I. M. **The URSS Olympiad Problem Book**. Selected Problems and theorems of Elementary Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 2020.

[18] Sominskii, I. S. **El Método de la inducción matemática**. Temas matemáticos. Editorial Limusa, MX, 1990. https://sistemas.fciencias.unam.mx/~erhc/calculo1_20161/sominsky.pdf Acesso: 08/11/2022.

APÊNDICE A

Problemas Complementares Propostos

Problema A.1. Mostre que para todo n natural temos

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}.$$

Problema A.2. Mostre que para todo n natural temos

$$3 + 11 + 19 + 27 + \cdots + (8n-5) = 4n^2 - n.$$

Problema A.3. Mostre que para todo n natural temos

$$5 + 9 + 13 + 17 + \cdots + (4n+1) = 2n^2 + 3n.$$

Problema A.4. Mostre que para todo n natural temos

$$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \cdots + (4n-1) = 3n^2.$$

Problema A.5. Mostre que para todo n natural temos

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n \cdot (4n^2 - 1)}{3}.$$

Problema A.6. Mostre que para todo n natural temos

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{(n+1) \cdot 2n \cdot (2n+1)}{3}.$$

Problema A.7. Mostre que para todo n natural temos

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{(a^{n+1} - 1)}{a - 1}.$$

Problema A.8. Mostre que para todo $n > 1$ natural temos

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + \cdots + (n-1) \cdot (n+1) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n+5)}{6}.$$

Problema A.9. Mostre que para todo n natural temos

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n}{1+n}.$$

Problema A.10. Mostre que para todo n natural, tal que $n > 3$, e sendo $e \approx 2,7183$, temos que

$$e^{n-1} > 2^n.$$

Problema A.11. Mostre que para todo n natural, e sendo $e \approx 2,7183$, temos que

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n!.$$

Problema A.12. Mostre que para todo $n > 6$ natural, temos que

$$n! > 3^n.$$

Problema A.13. Mostre que para todo $n > 3$ natural, temos que

$$n^n > 3(n^2 + 2).$$

Problema A.14. Mostre que para todo $n > 1$ natural, temos que

$$n! > n^n.$$

Problema A.15. Mostre que para todo n natural, temos que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Problema A.16. Mostre que para todo $n > 1$ natural, temos que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Problema A.17. Mostre que para todo n natural, e $x > 0$, temos que

$$\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots + \sqrt{x}}}}}_{n-radicais} < \frac{1 + \sqrt{4x+1}}{2}.$$

Problema A.18. Mostre que para todo n natural, e $n > 0$, temos que

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{n}}}} < 3.$$

Problema A.19. Mostre que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, e todo real não negativo x, temos que

$$\sqrt{x+1+\sqrt{x+2+\cdots+\sqrt{x+n}}} < x+3.$$

Problema A.20. Mostre que para todo n natural, temos que

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^n \geqslant \frac{3+n}{3}.$$

Problema A.21. Mostre que para todo n natural, temos que

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3.$$

Problema A.22. Mostre que para todo n natural, e sendo $b > 0$ e $a > b$, temos que

$$(2a-2b)^n \geqslant 2a^n - (2b)^n.$$

Problema A.23. Mostre que para todo natural n, temos que

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant n.$$

Problema A.24. Mostre que para todo natural n, temos que

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \geqslant \frac{2n}{n+1}.$$

Problema A.25. Se $N \cdot K + 1$ ou mais pombos são colocados em N casas, pelo menos uma casa possui mais de K pombos.

Problema A.26. Qual o maior número de regiões em que um plano pode ser dividido por n círculos? E por n triângulos?

Problema A.27. (*O Queijo de Steiner*) Sendo Q_n o número de regiões, no espaço tridimensional, determinadas por n planos, explique por que $Q_{n+1} = Q_n + p_n$, onde p_n é o número máximo de regiões em que n retas divide o plano, para todo n natural.

Em seguida, mostre também que $Q_n = \dfrac{n^3 + 5n + 6}{6}$ para qualquer natural n.

Problema A.28. Mostre que para todo natural n e $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2^n + 4^i} \right) = \frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

Problema A.29. Mostre que para todo n e i naturais, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1) \cdot (i+2)} = \frac{n \cdot (n+3)}{4 \cdot (n+1) \cdot (n+2)}.$$

Problema A.30. Mostre que para todo n e i naturais, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2) \cdot (3i+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Problema A.31. Mostre que para todo n e i naturais, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) \cdot (i+2) \cdot (i+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}.$$

Problema A.32. Mostre que para todo n e i naturais, sendo $k \in \mathbb{Z}^+$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) \cdot (i+2) \cdots (i+k-1) = \frac{(k+n)!}{(k+1) \cdot (n-1)!}.$$

Problema A.33. Mostre que para todo $n \geqslant 2$ natural, temos que

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) \cdot a_n.$$

Problema A.34. Mostre que para todo n e i naturais, a_i e b_i números reais. Temos que

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} b_i \right).$$

Problema A.35. Mostre que para todo n, i e k naturais, a_i números reais. Temos que

$$\prod_{i=1}^{n} (k \cdot a_i) = k^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right).$$

Problema A.36. Mostre que para todo natural $n > 1$, temos que

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{n}.$$

Problema A.37. Mostre que para todo natural $n > 1$, temos que

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Problema A.38. Mostre que para todo n natural, temos que

$$3\Big|\left(2^{2^n}-1\right).$$

Problema A.39. Mostre que para todo n natural, temos que

$$5\Big|\left(n^5-n\right).$$

Problema A.40. Mostre que para todo n natural, temos que

$$5\Big|\left(8^n-3^n\right).$$

Problema A.41. Mostre que para todo n natural, temos que

$$6\Big|\left(n^3-n\right).$$

Problema A.42. Mostre que para todo n natural, temos que

$$7\Big|\left(n^7-n\right).$$

Problema A.43. Mostre que para todo n natural, temos que

$$7\Big|\left(3^{2n+2}-2^{n+1}\right).$$

Problema A.44. Mostre que para todo n natural, temos que

$$8\Big|\left(3^{2n}+7\right).$$

Problema A.45. Mostre que para todo n natural, temos que

$$8\Big|\left(3^n+7^n-2\right).$$

Problema A.46. Mostre que para todo n natural, temos que

$$9 \Big| \left(2^{2n} + 15n - 1\right).$$

Problema A.47. Sejam os números reais a_1 e a_2 qualquer, e a sequência

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 2$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$a_n = (n-1)a_2 - (n-2)a_1. \tag{A.1}$$

Problema A.48. Dada a recorrência $a_0 = a_1 = 2$ e $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$ para $n \geqslant 2$, mostre por indução completa que $a_n = 4^n + (-2)^n$, para todo $n \geqslant 0$.

Problema A.49. A sequência $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ de números é tal que$a_1 = 3$,$a_2 = 5$, e $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, para $n > 2$. Prove que $a_n = 2^n + 1$, para todos os números naturais n.

Problema A.50. Sejam os números reais $a_1 = 5$, $a_2 = 11$ e $a_3 = 29$, e a sequência

$$a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - 3a_{n-3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 3$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$a_n = 3^n + 2. \tag{A.2}$$

Problema A.51. Sejam os números reais $a_0 = 1$ e a sequência

$$a_n = n \cdot a_{n-1} + n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$, temos que

$$a_n \geqslant 3 \cdot n!$$

Problema A.52. Sejam $a_0 = 1$ e a sequência $a_n = n \cdot a_{n-1} + k$ para $n \geqslant 1$, onde k é um número real não negativo. Temos, para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$a_n \geqslant (1+k) \cdot n!.$$

Problema A.53. Sejam a_0 um número real qualquer, e para naturais $n \geqslant 1$ a sequência

$$a_n = 2a_{n-1}^2.$$

Temos para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$a_n = 2^{2^n - 1} \cdot a_0^{2^n}.$$

Problema A.54. Sejam a_1, a_2 e a_3 números reais quaisquer, e a sequência

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 3$. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)a_3 - (n-1)(n-3)a_2 + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)a_1.$$

Problema A.55. Sejam a_0, um número real qualquer, tal que $0 < a_0 < 1$, e $a_n = \sqrt{\dfrac{a_{n-1}+1}{2}}$, para todo natural $n \geqslant 1$. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$1 - \frac{1}{2^n} < a_n < 1.$$

Problema A.56. Sejam $a_0 = -2$, e a sequência $a_n = \dfrac{(n+2)a_{n-1}}{n+1+2a_{n-1}}$, para naturais $n \geqslant 1$. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{n+2}{2n-1}.$$

Nos problemas a seguir F_n representa o n-ésimo número de Fibonacci.

Problema A.57. (*Soma dos n primeiros termos ímpares da sequência de Fibonacci*) Mostre que

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Problema A.58. (*Soma dos quadrados dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci*) Mostre que

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Problema A.59. Mostre para qualquer $n \in \mathbb{N}$, que

$$F_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}.$$

Problema A.60. Para todo n natural, mostre que:

a. $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$.
b. $F_{2n-1} = F_{n-1}^2 + F_n^2$.
c. $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$.
d. $F_{n-1} \cdot F_{n+2} = F_{n+1}^2 - F_n^2$.

Problema A.61. Mostre para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^n.$$

Problema A.62. (*Fórmula de Binet para F_n*) Mostre para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$F_n = \frac{\Phi^n - (1-\Phi)^n}{\sqrt{5}},$$

sendo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618...$

Problema A.63. Mostre para todo $n \in \mathbb{N}$, e sendo F_n o enésimo número de Fibonacci, temos que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} = F_{n+1}.$$

Problema A.64. Mostre para todo $n \in \mathbb{N}$, e sendo F_n o enésimo número de Fibonacci, temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Problema A.65. Mostre para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo: F_n o enésimo número de Fibonacci e $f^n(x)$ a enésima composição de $f(x)$, isto é

$$f^n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-vezes})(x).$$

Se $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, temos que

$$f^n(x) = \frac{F_{n-1} \cdot x + F_n}{F_n \cdot x + F_{n+1}}.$$

Problema A.66. Mostre para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo $f^n(x)$ a enésima composição de $f(x)$, isto é

$$f^n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-vezes})(x).$$

Se $f(x) = 2x^2 - 1$, temos que

$$f^n(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(x + \sqrt{x^2-1} \right)^{2^n} + \left(x - \sqrt{x^2-1} \right)^{2^n} \right].$$