

**Universidade Federal de Uberlândia**

**Faculdade de Matemática**

**Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**GEOMETRIA DO TÁXI VERSUS GEOMETRIA  
EUCLIDIANA: EXPLORANDO AS DIFERENÇAS E  
APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**Samir Borges Viana**



**Uberlândia-MG**

**2023**

**Samir Borges Viana**

**GEOMETRIA DO TÁXI VERSUS GEOMETRIA  
EUCLIDIANA: EXPLORANDO AS DIFERENÇAS E  
APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de concentração:** Matemática

**Linha de pesquisa:** Geometria

**Orientador(a):** Ana Paula Tremura Galves



**Uberlândia-MG  
2023**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

V614 Viana, Samir Borges, 1987-  
2023 Geometria do táxi versus geometria euclidiana:  
explorando as diferenças e aplicações na Educação Básica  
[recurso eletrônico] / Samir Borges Viana. - 2023.

Orientadora: Ana Paula Tremura Galves.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de  
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.485>  
Inclui bibliografia.  
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Galves, Ana Paula Tremura, 1984-,  
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-  
graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:  
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional  
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3230-9452 - www.famat.ufu.br - profmat@famat.ufu.br



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 03, PROFMAT				
Data:	Cinco de setembro de dois mil e vinte e três	Hora de início:	15:30	Hora de encerramento:	17:30
Matrícula do Discente:	12112PFT012				
Nome do Discente:	Samir Borges Viana				
Título do Trabalho:	Geometria do táxi versus geometria euclidiana: explorando as diferenças e aplicações na Educação Básica				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria e Topologia				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em webconferência pela plataforma *Google Meet* a Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), assim composta pelos professores doutores: Nazira Hanna Harb - UTFPR; Luis Renato Gonçalves Dias - FAMAT/UFU e Ana Paula Tremura Galves - FAMAT/UFU, orientadora do candidato.

Iniciando os trabalhos, a presidente da mesa, Profa. Dra. Ana Paula Tremura Galves, apresentou a Comissão Examinadora e juntamente com o candidato agradeceram a presença de todos. Posteriormente, a presidente concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, a senhora presidente concedeu a palavra para os examinadores que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Luis Renato Gonçalves Dias, Professor(a) do Magistério Superior**, em 05/09/2023, às 17:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ana Paula Tremura Galves, Professor(a) do Magistério Superior**, em 05/09/2023, às 17:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Nazira Hanna Harb, Usuário Externo**, em 05/09/2023, às 17:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4759251** e o código CRC **FAE7F796**.

# Agradecimentos

À Deus por ter me mantido na trilha certa durante este projeto de pesquisa com saúde e determinação me permitindo chegar até o final concretizando meu objetivo.

Aos meus pais, Alceu e Guilherma, que me ensinaram durante toda minha vida a superar as dificuldades, nunca desistir e lutar pelos objetivos.

Aos meus familiares por todo apoio e compreensão da minha ausência no período no qual me dedicava a este projeto, em especial minha avó Adolfina.

A tia Eleusa (madrinha) pela receptividade e acolhimento na sua residência.

Aos amigos, por estarem ao meu lado quando necessitei e por compreenderem o motivo da minha ausência, em especial Susan e Lara que me incentivaram a ingressar no mestrado PROFMAT.

À Universidade Federal de Uberlândia, juntamente com o PROFMAT, pela oportunidade.

Ao corpo docente do programa, pelo aprendizado, pela dedicação e pela amizade.

À minha orientadora, Dra. Ana Paula, pela dedicação, competência, pelo compartilhamento de saberes, mas principalmente, pela paciência e sabia condução da orientação, que me possibilitou desenvolver este projeto mesmo tendo uma grande carga horária de trabalho.

Aos diretores, Jackson e Mario Calil, pela organização dos meus horários de trabalho que possibilitou um dia livre no qual pude dedicar nas disciplinas do mestrado e desenvolver este projeto.

À turma de 2021 do PROFMAT, pela amizade, pelo companheirismo e pelas trocas de saberes.

Enfim, a todos que torceram e me incentivou a realização desse mestrado, minha eterna gratidão!

*A Matemática é a mais humana das ciências.  
(Mário Sérgio Cortella)*

**VIANA, S. B. .*Geometria do táxi versus geometria euclidiana: explorando as diferenças e aplicações na Educação Básica*. 2023. 114p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.**

## **Resumo**

A geometria euclidiana é fundamentada e estruturada por Euclides de Alexandria na obra "*Os elementos*", que é predominante até hoje. Todavia, algumas falhas estruturais possibilitaram o surgimento de outras geometrias, sendo uma delas a geometria do táxi. Dessa forma, esta dissertação tem o objetivo de apresentar uma sequência didática que mostre aos estudantes da Educação Básica, de forma contextualizada, as geometrias existentes, bem como fazer comparações entre as geometrias euclidiana e do táxi. A sequência didática em questão é constituída em três atividades que possibilitam despertar o interesse dos alunos pelo estudo da distância do táxi até a consolidação do conceito de cônicas, passando pela construção e comparação das fórmulas relativas das distâncias euclidiana e do táxi. Toda a fundamentação teórica, desde o conceito de métrica, contexto histórico do surgimento da geometria do táxi e um material de apoio didático pedagógico está disponível para os professores, que transcreve cada uma das atividades com sugestões, objetivos e habilidades a serem trabalhadas com os estudantes.

**Palavras-chave:** Geometria do táxi, Geometria euclidiana, Cônicas, Sequência didática.

**VIANA, S. B. .Taxicab geometry versus Euclidean geometry: exploring the differences and applications in Basic Education. 2023. 114p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.**

## **Abstract**

Euclidean geometry is based and structured by Euclid of Alexandria in the work "*The Elements*", which is a predominant mathematical and geometric treatise until today. However, some structural flaws allowed the emergence of other geometries, one of them being the taxicab geometry. As a result, this dissertation aims to present a didactic sequence that shows Basic Education students, in a contextualized way, the existing geometries, as well as making comparisons between the euclidean and taxicab geometries. The didactic sequence in question consists of three activities that make it possible to awaken students' interest in the study of the taxicab distance until the consolidation of the concept of conics, passing through the construction and comparison of the relative formulas of the euclidean and taxicab distances. The entire theoretical foundation, from the concept of metrics, the historical context of the appearance of the taxicab geometry and a didactic pedagogical support material is available for teachers, which transcribes each of the activities with suggestions, objectives and skills to be worked on with the students.

**Keywords:** Taxicab geometry, Euclidean geometry, Conics, Didactic sequence.

---

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Tópicos de espaços métricos</b>	<b>4</b>
1.1 Valor absoluto e desigualdade de Cauchy-Schwarz . . . . .	4
1.2 Definições e exemplos de espaços métricos . . . . .	6
1.3 Bolas e esferas . . . . .	13
<b>2 Introdução à geometria do táxi</b>	<b>24</b>
2.1 Geometria euclidiana . . . . .	24
2.2 Geometrias não euclidianas . . . . .	26
2.3 Geometria do táxi . . . . .	29
2.3.1 Geometria do táxi e a geometria urbana . . . . .	29
2.3.2 Relação entre a distância do táxi e a distância euclidiana . . . . .	32
2.3.3 Número de possibilidades de trajetos do táxi . . . . .	36
2.3.4 Geometria do táxi: uma geometria não euclidiana . . . . .	37
<b>3 As cônicas na geometria do táxi</b>	<b>41</b>
3.1 Introdução às cônicas . . . . .	41
3.2 Circunferência . . . . .	42
3.2.1 Relação entre as áreas das circunferências euclidiana e do táxi . . . . .	45
3.3 Elipse . . . . .	47
3.4 Parábola . . . . .	50
3.5 Hipérbole . . . . .	55
<b>4 Aplicação da geometria do táxi na Educação Básica</b>	<b>59</b>
4.1 A importância da sequência didática . . . . .	59
4.2 Sequência didática proposta . . . . .	62
4.3 Primeira atividade . . . . .	64
4.4 Segunda atividade . . . . .	69

4.5	Terceira atividade . . . . .	72
4.6	Sugestões para a avaliação das atividades . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Resultados obtidos</b>	<b>75</b>
5.1	Aplicação e análise das atividades: resultados na turma do terceiro ano do Ensino Médio . . . . .	75
5.2	Considerações finais . . . . .	80
<b>A</b>	<b>Atividades para impressão</b>	<b>83</b>
<b>B</b>	<b>Chave de correção das atividades</b>	<b>91</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>101</b>

---

# Introdução

---

Ao analisarmos os currículos oficiais, a exemplo da Base Nacional Comum Curricular [2, BNCC] e do Currículo de Referência de Minas Gerais [14, CRMG], deparamo-nos com a abordagem da geometria. Embora essa não represente a única forma geométrica existente, tampouco seja sempre a mais aplicável às situações cotidianas, é a geometria euclidiana que predomina no ensino em sala de aula. Os livros didáticos também reforçam essa perspectiva.

Além disso, ao estudarmos a história da Matemática, percebemos a existência de outras geometrias, como a elíptica, a hiperbólica e a do táxi, esta última sendo nosso principal objeto de estudo. A geometria do táxi surge com o objetivo de analisar deslocamentos em uma cidade ideal, similar ao plano cartesiano, ou seja, através de combinações de segmentos horizontais e verticais que simulam as curvas percorridas. Em 1975, [9, Krause] apresentou de forma didática e prática as aplicações dessa geometria no cotidiano dos estudantes iniciantes, em sua obra intitulada "*Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*".

Da mesma forma, buscamos a apresentação de uma sequência didática contendo atividades que estimulem os estudantes da Educação Básica a explorarem a geometria, despertando a curiosidade por possibilidades não euclidianas de fácil compreensão e aplicáveis no dia a dia. Com o propósito de concretizar essa abordagem, dividimos nosso trabalho em cinco capítulos, os quais detalharemos a seguir.

No **Capítulo 1**, realizamos um estudo detalhado acerca da definição de métrica, abordando as quatro condições que devem ser cumpridas. Posteriormente, procedemos à definição e exemplificação de diversos espaços métricos, incluindo o espaço discreto, a reta e  $\mathbb{R}^n$ . No caso específico do espaço  $\mathbb{R}^n$ , dedicamos uma análise minuciosa considerando três métricas distintas: a distância euclidiana ( $d$ ), a distância do máximo ( $d'$ ) e a distância do táxi ( $d''$ , quando aplicada em  $\mathbb{R}^2$ ). Adicionalmente, aprofundamos nosso estudo ao explorar e demonstrar as relações de desigualdade entre essas métricas no contexto do espaço métrico  $\mathbb{R}^n$ .

Para a fundamentação das demonstrações, recorreremos a definições essenciais como o

---

valor absoluto e a utilização de teoremas fundamentais, tais como a Desigualdade Triangular e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Em seguida, utilizando os espaços métricos previamente discutidos, introduzimos as noções de bolas e esferas, enfatizando que a forma das bolas não necessariamente se restringe à redonda, o que demonstra a riqueza e diversidade das possibilidades geométricas em espaços métricos.

No **Capítulo 2**, damos início às nossas investigações a partir da História da Matemática, centrando nossa atenção no surgimento da geometria, tendo como ponto de partida a obra "*Os elementos*" de Euclides. Nessa jornada histórica, avançamos até o advento de outras geometrias, notáveis por sua designação de geometrias não-euclidianas.

Na sequência, apresentamos em detalhes a geometria do táxi, estabelecendo conexões intrincadas com os conceitos de espaços métricos previamente estudados no capítulo anterior. Nossa abordagem meticulosa também nos conduz a traçar um paralelo metuculoso entre a geometria do táxi e a geometria euclidiana, evidenciando tanto suas convergências quanto suas distinções. Um exemplo eloquente disso é nosso encerramento do capítulo, onde revelamos que, enquanto na distância euclidiana entre dois pontos existe uma única trajetória, na distância do táxi, múltiplas possibilidades de trajetos emergem, todas sujeitas a cálculo minucioso. Esse contraste é revelador das ricas e variadas perspectivas oferecidas por diferentes geometrias, enriquecendo nossa compreensão dos fundamentos matemáticos subjacentes.

No **Capítulo 3**, direcionamos nosso foco para a exploração das cônicas como lugar geométrico, sendo cada uma delas representada e exemplificada tanto em termos algébricos (através de equações) quanto graficamente. Ao olharmos de forma mais detalhada, conseguimos perceber as pequenas diferenças em cada uma dessas curvas, mostrando o que as torna únicas e especial. Isso nos ajuda a entender melhor as particularidades de cada formato.

Nossa análise também se estende à abordagem comparativa, enriquecendo nossa compreensão através das lentes das geometrias euclidiana e do táxi. Ao realizar essa comparação, revelamos tanto as correspondências quanto as discrepâncias entre as duas perspectivas geométricas. Esse contraste nos permite visualizar como as cônicas se manifestam e se comportam de maneira única em cada uma dessas geometrias, ampliando nossa apreciação pela riqueza e profundidade dos conceitos matemáticos em questão.

No **Capítulo 4**, estabelecemos a base da relevância da sequência didática como um recurso pedagógico vital para o processo de ensino e aprendizado. Sob essa ótica, apresentamos uma sequência didática composta por três atividades distintas, todas com o objetivo de comparar as geometrias euclidiana e do táxi. Essa sequência foi desenvolvida especialmente para os alunos da Educação Básica, focando, mais especificamente, nas turmas do terceiro

---

ano do Ensino Médio.

No **Capítulo 5**, finalizamos nossa abordagem ao apresentar os resultados finais alcançados após a implementação das três atividades sugeridas no capítulo anterior. Essas atividades foram aplicadas aos alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Além disso, também elaboramos a conclusão do nosso trabalho.

## Tópicos de espaços métricos

---

O objetivo deste capítulo é introduzir conceitos preliminares de valor absoluto e espaços métricos, os quais serão necessários para um bom entendimento dos capítulos seguintes. Para maiores detalhes sobre tais resultados, consultar [6, Domingues] e [11, Lima].

### 1.1 Valor absoluto e desigualdade de Cauchy-Schwarz

Para compreender um pouco melhor a definição de um espaço métrico, serão apresentados alguns exemplos posteriores. E para um bom entendimento de tais exemplos, algumas definições e resultados serão explicitados a seguir.

**Definição 1.1** *O valor absoluto (ou módulo) de um número real  $x$ , denotado por  $|x|$ , é definido por*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

*Geometricamente,  $|x|$  é a distância do número real  $x$  até a origem e  $|x - y|$  é a distância entre os números  $x$  e  $y$ .*

**Exemplo 1.2** *Para todo  $x$  real,  $|x|^2 = x^2$ .*

*De fato, se  $x \geq 0$  então  $|x| = x$  e assim  $|x|^2 = x^2$ .*

*Agora, se  $x < 0$  então  $|x| = -x$  e assim  $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$ .*

*Portanto, para todo  $x$  real,  $|x|^2 = x^2$ .*

**Observação 1.3** Do Exemplo 1.2, segue que

$$|x|^2 = x^2 \Rightarrow \sqrt{|x|^2} = \sqrt{x^2} \Rightarrow |x| = \sqrt{x^2}.$$

**Proposição 1.4** Sejam  $x$  e  $y$  números reais. Então,  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ , ou seja, o módulo de um produto é igual ao produto dos módulos dos fatores.

**Demonstração.** Pela Observação 1.3, tem-se  $\sqrt{(x \cdot y)^2} = |x \cdot y|$ . Dessa forma,

$$|x \cdot y| = \sqrt{(x \cdot y)^2} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|.$$

■

**Observação 1.5** Para todo  $x$  real,  $x \leq |x|$  e  $-x \leq |x|$ .

**Teorema 1.6 (Desigualdade Triangular)** Quaisquer que sejam os números reais  $x$  e  $y$ , tem-se  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , ou seja, o módulo de uma soma é menor ou igual a soma dos módulos das parcelas.

**Demonstração.** Pela Observação 1.5, se  $x + y \geq 0$  então  $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$ .

Se  $x + y < 0$  então  $|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$ .

Logo,  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

■

**Teorema 1.7 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $y_1, y_2, \dots, y_n$  números reais. Então,

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

**Demonstração.** Considere o trinômio  $(ax_i - y_i)^2$ , com  $a \in \mathbb{R}$  e  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Como  $(ax_i - y_i)^2 \geq 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , segue que  $\sum_{i=1}^n (ax_i - y_i)^2 \geq 0$ .

Porém,

$$\sum_{i=1}^n (ax_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a^2 x_i^2 - 2ax_i y_i + y_i^2) = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a^2 + \left( -2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) a + \sum_{i=1}^n y_i^2$$

é uma equação quadrática em  $a$ , para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ , e para que  $\sum_{i=1}^n (ax_i - y_i)^2 \geq 0$ , o discriminante dessa equação não pode ser positivo, ou seja,

$$\left(-2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \leq 0$$

$$4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \leq 0$$

o que implica em

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

como queríamos. ■

## 1.2 Definições e exemplos de espaços métricos

**Definição 1.8** Uma métrica em um conjunto  $M \neq \emptyset$  é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ , que associa a cada par ordenado de elementos  $(x, y) \in M \times M$  um número real  $d(x, y)$ , chamado distância de  $x$  a  $y$ , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer  $x, y$  e  $z \in M$ :

- (i)  $d(x, x) = 0$ ;
- (ii) se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) > 0$ ;
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (iv)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (desigualdade triangular).

**Definição 1.9** Um espaço métrico é um par  $(M, d)$ , sendo  $M$  um conjunto e  $d$  uma métrica em  $M$ . Diremos apenas "espaço métrico  $M$ ", pressupondo qual a métrica  $d$  a ser considerada.

Para compreender um pouco melhor a definição de um espaço métrico, serão apresentados alguns exemplos a seguir.

**Exemplo 1.10** Dado  $M \neq \emptyset$  a função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$  definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

é uma métrica sobre  $M$  chamada métrica discreta ou métrica zero-um. Esse é o mais simples exemplo de métrica.

De fato, dados  $x, y, z \in M$  temos

(i) se  $x = y$ , então  $d(x, x) = 0$ ;

(ii) se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) = 1 > 0$ ;

(iii)  $d(x, y) = 1 = d(y, x)$ ;

(iv) para o caso em que  $x, y$  e  $z$  são dois a dois distintos, analisaremos duas situações:

- $x \neq z$  e  $y = z$ , temos  $d(x, z) = 1$ ,  $d(x, y) = 1$  e  $d(y, z) = 0$ , então

$$1 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 1 + 0 = 1.$$

- $x \neq z$  e  $x = y$ , temos  $d(x, z) = 1$ ,  $d(x, y) = 0$  e  $d(y, z) = 1$ , então

$$1 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 0 + 1 = 1.$$

Logo,  $M$  é um espaço métrico com a métrica discreta.

**Exemplo 1.11** A reta, ou seja, o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais, é um exemplo importante de espaço métrico. A função  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , dada pela lei  $d(x, y) = |x - y|$ , é uma métrica no conjunto  $\mathbb{R}$ , chamada métrica usual da reta.

De fato, dados  $x, y, z \in \mathbb{R}$  temos

(i)  $d(x, x) = |x - x| = 0$ ;

(ii)  $d(x, y) = |x - y| > 0$ , se  $x \neq y$ ;

(iii) consideremos os dois casos a seguir:

se  $x \geq y$ , então  $d(x, y) = |x - y| = x - y = -(y - x) = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x)$ .

se  $x < y$ , então  $d(x, y) = |x - y| = -(x - y) = y - x = |y - x| = d(y, x)$ .

Portanto,  $d(x, y) = d(y, x)$ , para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

(iv)  $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$ .

A desigualdade considerada vem do Teorema 1.6.

Portanto,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Logo, a reta é um espaço métrico com métrica  $d$ .

**Exemplo 1.12** O conjunto  $\mathbb{R}^n$  é formado por todas as  $n$ -uplas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , onde  $x_i \in \mathbb{R}$ . Existem três métricas importantes sobre  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, três maneiras diferentes de definir distância entre dois pontos em  $\mathbb{R}^n$ , as quais serão definidas a seguir. Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  pontos arbitrários de  $\mathbb{R}^n$ , definimos  $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  por:

$$\bullet d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\bullet d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;$$

$$\bullet d''(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Verifiquemos que  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  são métricas em  $\mathbb{R}^n$ .

De fato, para  $n = 1$  podemos perceber que, dados  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\bullet d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|;$$

$$\bullet d'(x, y) = |x - y|;$$

$$\bullet d''(x, y) = \max \{|x - y|\} = |x - y|.$$

Portanto,  $d(x, y) = d'(x, y) = d''(x, y) = |x - y|$ , ou seja, voltamos ao Exemplo 1.11. Logo, a reta,  $\mathbb{R}$ , é um espaço métrico com as métricas  $d$ ,  $d'$  e  $d''$ .

Resta mostrar o caso em que  $n > 1$ .

Dados  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  pontos arbitrários de  $\mathbb{R}^n$  temos

$$(i) d(x, x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \dots + (x_n - x_n)^2} = \sqrt{0 + \dots + 0} = 0;$$

$$d'(x, x) = |x_1 - x_1| + \dots + |x_n - x_n| = |0| + \dots + |0| = 0;$$

$$d''(x, x) = \max \{|x_1 - x_1|, \dots, |x_n - x_n|\} = \max \{|0|, \dots, |0|\} = \max \{0, \dots, 0\} = 0.$$

(ii) Se  $x \neq y$ , então existe  $i \in \{1, \dots, n\}$ , tal que  $x_i \neq y_i$ . Assim,

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} = |x_i - y_i| > 0;$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \geq |x_i - y_i| > 0;$$

$$d''(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} \geq |x_i - y_i| > 0.$$

$$(iii) d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = d(y, x);$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = |y_1 - x_1| + \dots + |y_n - x_n| = d'(y, x);$$

$$d''(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max \{|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|\} = d''(y, x).$$

(iv) Seja  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ . Então,

$$\begin{aligned} [d(x, z)]^2 &= \left[ \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2} \right]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i + y_i - z_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n [(x_i - y_i) + (y_i - z_i)]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \cdot (y_i - z_i) + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.7), temos

$$\begin{aligned} [d(x, z)]^2 &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + 2 \cdot \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 = \\ &= \left[ \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \right]^2 = [d(x, y) + d(y, z)]^2, \end{aligned}$$

ou seja,  $[d(x, z)]^2 \leq [d(x, y) + d(y, z)]^2$  e como  $d(x, z)$ ,  $d(x, y)$  e  $d(y, z)$  são números reais não negativos, extraíndo a raiz quadrada de ambos lados da desigualdade, obtemos  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Agora,

$$d'(x, z) = |x_1 - z_1| + \dots + |x_n - z_n| = |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + \dots + |x_n - y_n + y_n - z_n|.$$

Utilizando a desigualdade triangular (Teorema 1.6), temos

$$d'(x, z) \leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + \dots + |x_n - y_n| + |y_n - z_n| = d'(x, y) + d'(y, z),$$

ou seja,  $d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z)$ .

Por fim, sejam

$$|x_i - y_i| = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = d''(x, y), \text{ para algum } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$|y_j - z_j| = \max \{|y_1 - z_1|, \dots, |y_n - z_n|\} = d''(y, z), \text{ para algum } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ e}$$

$$|x_k - z_k| = \max \{|x_1 - z_1|, \dots, |x_n - z_n|\} = d''(x, z), \text{ para algum } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Desta forma,

$$d''(x, z) = \max \{|x_1 - z_1|, \dots, |x_n - z_n|\} = |x_k - z_k| = |x_k - y_k + y_k - z_k|.$$

Utilizando a desigualdade triangular (Teorema 1.6), temos

$$d''(x, z) \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \leq |x_i - y_i| + |y_j - z_j| = d''(x, y) + d''(y, z).$$

Logo,  $d''(x, z) \leq d''(x, y) + d''(y, z)$ .

Portanto,  $\mathbb{R}^n$  é um espaço métrico com as métricas  $d$ ,  $d'$  e  $d''$ .

**Observação 1.13** A métrica  $d$  é conhecida como **distância euclidiana** e a métrica  $d''$  como **distância do máximo**. Já a métrica  $d'$ , quando aplicada em  $\mathbb{R}^2$ , é conhecida como **distância do táxi**, ou seja, tal distância é dada por  $d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ .

**Observação 1.14** No capítulos seguintes iremos trabalhar predominantemente com as métricas  $d$  e  $d'$ , as quais serão sempre referidas como distância euclidiana e distância do táxi e serão denotadas, respectivamente, por  $d_E$  e  $d_T$ .

O próximo objetivo desta seção é fornecer uma comparação entre as métricas  $d$ ,  $d'$  e  $d''$ . Para isso, precisaremos da proposição a seguir.

Nos próximos resultados, utilizaremos a seguinte notação de somatório,

$$\sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^{n-1, n} a_i \cdot a_j.$$

Essa notação indica uma soma de todos os produtos  $a_i \cdot a_j$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $j \in \{2, 3, \dots, n\}$ , com  $i < j$ , ou seja,

$$\sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^{n-1, n} a_i \cdot a_j = a_1 \cdot a_2 + \dots + a_1 \cdot a_n + a_2 \cdot a_3 + \dots + a_2 \cdot a_n + \dots + a_{n-1} \cdot a_n.$$

**Proposição 1.15** Sejam  $a_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , números reais. Temos

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \cdot \left[ \sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^{n-1, n} a_i \cdot a_j \right] = \left[ \sum_{i=1}^n a_i \right]^2, \quad (1.1)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

**Demonstração.** Faremos a prova pelo Princípio de Indução.

Para  $n = 2$ , temos

$$\sum_{i=1}^2 a_i^2 + 2 \cdot \left[ \sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^{1, 2} a_i \cdot a_j \right] = (a_1)^2 + (a_2)^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 = (a_1 + a_2)^2 = \left[ \sum_{i=1}^2 a_i \right]^2.$$

Suponhamos agora que a equação (1.1) seja válida para algum  $k \in \mathbb{N}$ , com  $k \geq 2$ , ou seja,

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 + 2 \cdot \left[ \sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^{k-1, k} a_i \cdot a_j \right] = \left[ \sum_{i=1}^k a_i \right]^2, \quad (1.2)$$

Mostraremos que a equação (1.1) é válida para  $k + 1$ .

Partindo do primeiro membro da igualdade, temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 + 2 \cdot \left[ \sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^{k, k+1} a_i \cdot a_j \right] &= \sum_{i=1}^k a_i^2 + (a_{k+1})^2 + 2 \cdot \left[ \sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^{k-1, k} a_i \cdot a_j + \sum_{i=1}^k a_i \cdot a_{k+1} \right] = \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^k a_i^2 + 2 \cdot \left[ \sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^{k-1, k} a_i \cdot a_j \right]}_{(1.2)} + 2 \cdot \left[ \sum_{i=1}^k a_i \cdot a_{k+1} \right] + (a_{k+1})^2 = \left[ \sum_{i=1}^k a_i \right]^2 + 2 \cdot \left[ \sum_{i=1}^k a_i \cdot a_{k+1} \right] + (a_{k+1})^2 = \\
 &= \left[ \left( \sum_{i=1}^k a_i \right) + a_{k+1} \right]^2 = \left[ \sum_{i=1}^{k+1} a_i \right]^2.
 \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade (1.1) é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . ■

**Proposição 1.16** *Sejam  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  as métricas definidas no Exemplo 1.12. Quaisquer que sejam  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , com  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , tem-se*

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y).$$

**Demonstração.** Mostraremos cada desigualdade separadamente

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \tag{1.3}$$

$$d(x, y) \leq d'(x, y) \tag{1.4}$$

$$d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y) \tag{1.5}$$

(i) Por definição,

$$[d(x, y)]^2 = \left[ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \right]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2.$$

Por outro lado, existe  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que

$$d''(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = |x_j - y_j|.$$

$$\text{Então, } [d''(x, y)]^2 = |x_j - y_j|^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = [d(x, y)]^2.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, sabendo que uma métrica é sempre um número não negativo, chegamos à desigualdade (1.3) desejada.

(ii) Para provar a desigualdade (1.4) vamos considerar  $a_i = |x_i - y_i|$ , com  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  e  $i = \{1, 2, \dots, n\}$  na Proposição 1.15, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 + 2 \cdot \left[ \sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^{n-1, n} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j| \right] = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right]^2.$$

Além disso, observemos que a desigualdade

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 + 2 \cdot \left[ \sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^{n-1, n} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j| \right]$$

é sempre verdadeira, pois

$$\left[ \sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^{n-1, n} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j| \right] \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} [d(x, y)]^2 &= \left[ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \right]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 + 2 \cdot \left[ \sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^{n-1, n} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j| \right] = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right]^2 = [d'(x, y)]^2. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, sabendo que uma métrica é sempre um número não negativo, chegamos à desigualdade (1.4).

(iii) Resta mostrar a desigualdade (1.5).

Como  $d''(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = |x_j - y_j|$ , para algum  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , segue que  $|x_j - y_j| \geq |x_i - y_i|$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Logo,

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq \underbrace{|x_j - y_j| + \dots + |x_j - y_j|}_{n \text{ vezes}} = n \cdot |x_j - y_j| = \\ &= n \cdot \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = n \cdot d''(x, y). \end{aligned}$$

Portanto, é válida a desigualdade (1.5). ■

Considerando  $n = 2$  na Proposição 1.16, concluímos que a distância euclidiana é menor ou igual a distância do táxi, apresentadas na Observação 1.13.

### 1.3 Bolas e esferas

Nesta seção vamos mostrar que nem toda bola é redonda. Para isso consideraremos a definição de bola nas métricas  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  definidas e exemplificadas na seção anterior.

**Definição 1.17** *Seja  $a$  um ponto no espaço métrico  $(M, d)$ . Dado  $r > 0$  um número real, definimos bola aberta, bola fechada e esfera da seguinte forma:*

(i) *A bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto, denotado por  $B(a; r)$ , dos pontos de  $M$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor do que  $r$ , ou seja,*

$$B(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\}.$$

(ii) *A bola fechada de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto, denotado por  $B[a; r]$ , formado pelos pontos de  $M$  que estão a uma distância menor ou igual a  $r$  do ponto  $a$ , ou seja,*

$$B[a; r] = \{x \in M \mid d(x, a) \leq r\}.$$

(iii) *A esfera de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto, denotado por  $S(a; r)$ , formado pelos pontos de  $M$  que estão a uma distância igual a  $r$  do ponto  $a$ , ou seja,*

$$S(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) = r\}.$$

A partir da definição anterior podemos notar claramente que a bola aberta e a esfera são disjuntas e que a união entre elas forma a bola fechada, isto é,

$$B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r).$$

Para compreender um pouco melhor a definição de bola aberta, bola fechada e esfera, serão apresentados alguns exemplos a seguir, utilizando as métricas vistas na seção anterior.

**Exemplo 1.18** *Considerando  $M$  com a métrica discreta (zero-um) do Exemplo 1.10, ou seja,*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

*Observemos que dados  $x, a \in M$ , temos*

- $d(x, a) < 1 \iff x = a$ ;
- $d(x, a) \geq 1 \iff x \neq a$ .

Assim, para todo  $a \in M$ , temos três casos a considerar

(i) Se  $r = 1$ , então

- $B(a; 1) = \{x \in M \mid d(x, a) < 1\} = \{a\}$ ;
- $B[a; 1] = \{x \in M \mid d(x, a) \leq 1\} = M$ ;
- $S(a; 1) = \{x \in M \mid d(x, a) = 1\} = M - \{a\}$ .

(ii) Se  $r > 1$ , então

- $B(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\} = M$ ;
- $B[a; r] = \{x \in M \mid d(x, a) \leq r\} = M$ ;
- $S(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) = r\} = \emptyset$ .

(iii) Se  $0 < r < 1$ , então

- $B(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\} = \{a\}$ ;
- $B[a; r] = \{x \in M \mid d(x, a) \leq r\} = \{a\}$ ;
- $S(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) = r\} = \emptyset$ .

**Exemplo 1.19** Seja  $M$  com a métrica usual da reta, vista no Exemplo 1.11, isto é,  $d(x, y) = |x - y|$ . Para todo  $a \in \mathbb{R}$  e todo  $r > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \bullet B(a; r) &= \{x \in M \mid d(x, a) < r\} = \{x \in M \mid |x - a| < r\} = \{x \in M \mid -r < x - a < r\} = \\ &= \{x \in M \mid a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet B[a; r] &= \{x \in M \mid d(x, a) \leq r\} = \{x \in M \mid |x - a| \leq r\} = \{x \in M \mid -r \leq x - a \leq r\} = \\ &= \{x \in M \mid a - r \leq x \leq a + r\} = [a - r, a + r]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet S(a; r) &= \{x \in M \mid d(x, a) = r\} = \{x \in M \mid |x - a| = r\} = \{x \in M \mid x - a = r \text{ ou } x - a = -r\} = \\ &= \{a - r, a + r\} \text{ apenas dois pontos } a - r \text{ e } a + r. \end{aligned}$$

Vejamos nos próximos exemplos a aplicação dos conceitos de bola aberta, bola fechada e esfera para as métricas  $d$ ,  $d'$  e  $d''$ , definidas no Exemplo 1.12, considerando o  $\mathbb{R}^2$ .

Lembrando que as métricas  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  no  $\mathbb{R}^2$  são definidas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}; \\ d'(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|; \\ d''(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}. \end{aligned}$$

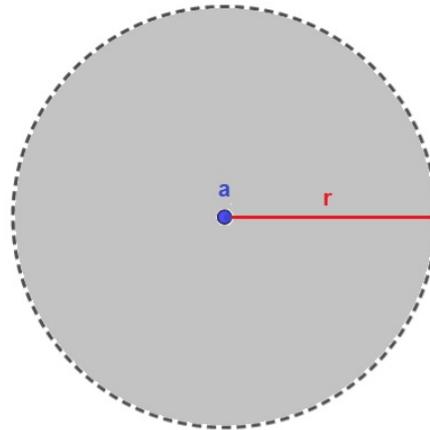
**Exemplo 1.20** Pela métrica  $d$ , considerando o centro  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  e raio  $r$  temos

- $B(a; r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r\}$ , ou seja,

$$d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r \iff \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r \iff (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2.$$

Graficamente, a bola aberta na métrica euclidiana  $d$  representa o interior da circunferência de centro  $a = (a_1, a_2)$  e raio  $r$  no  $\mathbb{R}^2$ , conforme a Figura 1.1.

**Figura 1.1:** Bola aberta  $B(a; r)$  na métrica  $d$ .



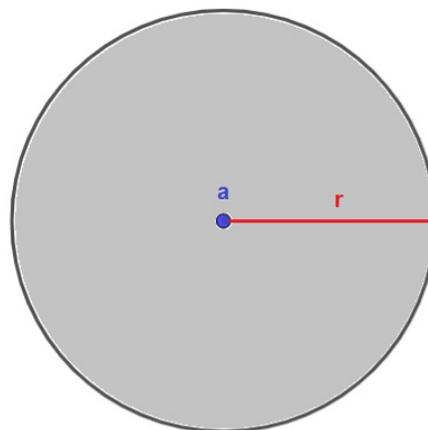
Fonte: Elaborado pelo autor.

- $B[a; r] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq r\}$ , ou seja,

$$d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq r \iff \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \leq r \iff (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2.$$

Graficamente, a bola fechada na métrica euclidiana  $d$  representa o círculo (a união da circunferência e do seu interior) de centro  $a = (a_1, a_2)$  e raio  $r$  no  $\mathbb{R}^2$ , conforme a Figura 1.2.

**Figura 1.2:** Bola fechada  $B[a; r]$  na métrica  $d$ .



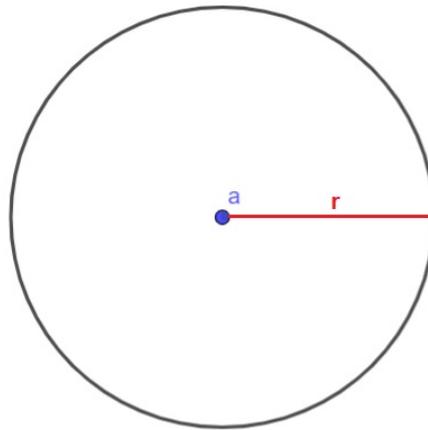
Fonte: Elaborado pelo autor.

- $S(a; r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r\}$ , ou seja,

$$d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r \iff \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = r \iff (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2.$$

A esfera representa, graficamente, a circunferência de centro  $a = (a_1, a_2)$  e raio  $r$  no  $\mathbb{R}^2$ , conforme a Figura 1.3.

**Figura 1.3:** Esfera  $S(a; r)$  na métrica  $d$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Exemplo 1.21** Pela métrica  $d'$ , considerando o centro  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  e raio  $r$  temos

- $B(a; r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d'((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r\}$ , ou seja,

$$d'((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r \iff |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r;$$

- $B[a; r] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d'((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq r\}$ , ou seja,

$$d'((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq r \iff |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \leq r;$$

- $S(a; r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d'((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r\}$ , ou seja,

$$d'((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r \iff |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r.$$

A fim de visualizarmos graficamente as bolas e esfera na métrica do táxi  $d'$ , faremos o estudo da equação  $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r$ .

Considerando a Definição 1.1, temos

$$|x_1 - a_1| = \begin{cases} x_1 - a_1, & \text{se } x_1 \geq a_1; \\ -x_1 + a_1, & \text{se } x_1 < a_1. \end{cases}$$

e

$$|x_2 - a_2| = \begin{cases} x_2 - a_2, & \text{se } x_2 \geq a_2; \\ -x_2 + a_2, & \text{se } x_2 < a_2. \end{cases}$$

Assim, devemos analisar quatro situações diferentes

(i) se  $x_1 \geq a_1$  e  $x_2 \geq a_2$  então

$$|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r \iff x_1 - a_1 + x_2 - a_2 = r \iff x_2 = -x_1 + a_1 + a_2 + r; \quad (1.6)$$

(ii) se  $x_1 \geq a_1$  e  $x_2 < a_2$  então

$$|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r \iff x_1 - a_1 - x_2 + a_2 = r \iff x_2 = x_1 - a_1 + a_2 - r; \quad (1.7)$$

(iii) se  $x_1 < a_1$  e  $x_2 \geq a_2$  então

$$|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r \iff -x_1 + a_1 + x_2 - a_2 = r \iff x_2 = x_1 - a_1 + a_2 + r; \quad (1.8)$$

(iv) se  $x_1 < a_1$  e  $x_2 < a_2$  então

$$|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r \iff -x_1 + a_1 - x_2 + a_2 = r \iff x_2 = -x_1 + a_1 + a_2 - r. \quad (1.9)$$

Podemos notar que as equações (1.6), (1.7), (1.8) e (1.9) são retas, e as chamaremos de  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  e  $t_4$ , respectivamente. Observemos ainda que  $t_2$  e  $t_3$  possuem coeficiente angular igual a 1 e  $t_1$  e  $t_4$  possuem coeficiente angular igual a  $-1$ . Assim,  $t_1$  é paralela a  $t_4$ ,  $t_2$  é paralela a  $t_3$  e  $t_1$  e  $t_4$  são perpendiculares a  $t_2$  e  $t_3$ .

Igualando as equações das retas perpendiculares, encontramos o ponto de interseção entre elas, os quais denotaremos por  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_4$ , como a seguir

$$i_1 = t_1 \cap t_2 = (a_1 + r, a_2);$$

$$i_2 = t_1 \cap t_3 = (a_1, a_2 + r);$$

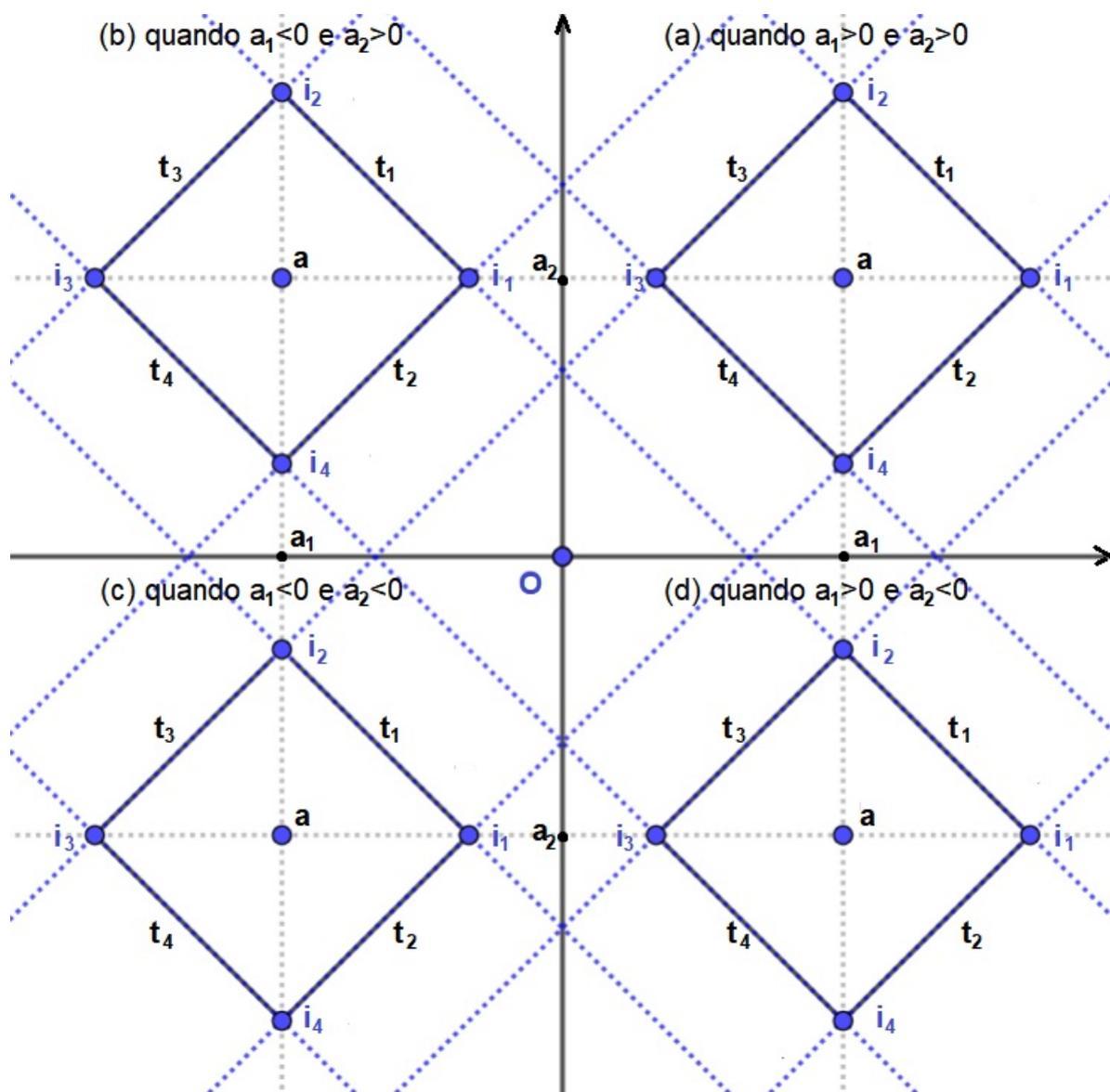
$$i_3 = t_3 \cap t_4 = (a_1 - r, a_2);$$

$$i_4 = t_2 \cap t_4 = (a_1, a_2 - r).$$

Na Figura 1.4 estão representadas  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  e  $t_4$  considerando a possibilidade do ponto  $a = (a_1, a_2)$  em cada um dos quatro quadrantes do plano cartesiano. Caso,  $a$  esteja situado em algum dos eixos  $x$  ou  $y$ , a representação é análoga.

Portanto, para todo  $x_1$  e  $x_2 \in \mathbb{R}$ , temos que a esfera na métrica do táxi  $d'$ , dada pela equação  $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r$ , é representada, geometricamente, pelos lados de um quadrado de diagonais medindo  $2r$ , paralelas aos eixos coordenados, com centro em  $a = (a_1, a_2)$  e vértices nos pontos  $i_1 = (a_1 + r, a_2)$ ,  $i_2 = (a_1, a_2 + r)$ ,  $i_3 = (a_1 - r, a_2)$  e  $i_4 = (a_1, a_2 - r)$ .

**Figura 1.4:** Esfera  $S(a; r)$  na métrica  $d'$  nos quatro quadrantes.

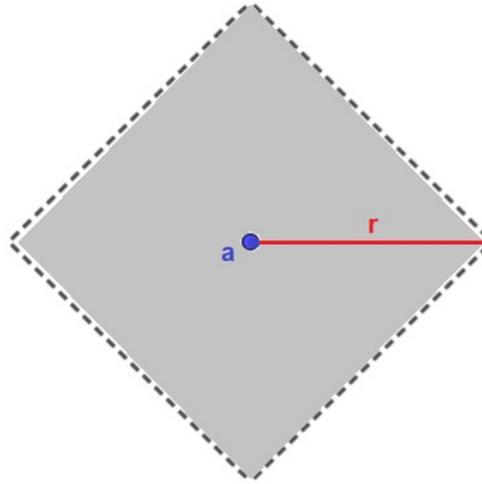


Fonte: Elaborado pelo autor.

De modo análogo, a bola aberta na métrica do táxi  $d'$ , dada pela desigualdade  $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r$ , é representada, geometricamente, pelo interior de um quadrado

de centro  $a = (a_1, a_2)$ , diagonais de comprimento  $2r$ , paralelas aos eixos coordenados, e vértices nos pontos  $i_1 = (a_1 + r, a_2)$ ,  $i_2 = (a_1, a_2 + r)$ ,  $i_3 = (a_1 - r, a_2)$  e  $i_4 = (a_1, a_2 - r)$ , como mostra a Figura 1.5.

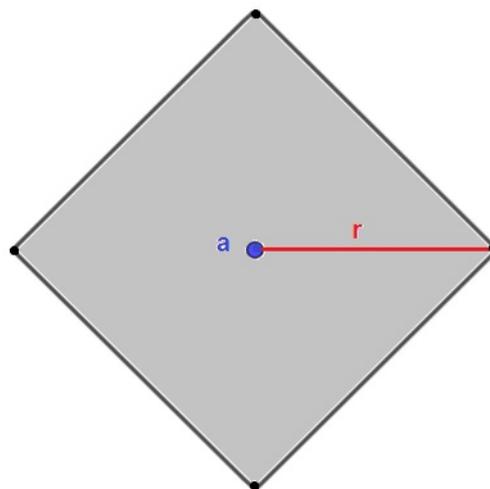
**Figura 1.5:** Bola aberta  $B(a; r)$  na métrica  $d'$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

E por fim, a bola fechada na métrica do táxi  $d'$ , dada pela desigualdade  $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \leq r$ , é representada, geometricamente, por um quadrado (interior e bordas) de centro  $a = (a_1, a_2)$ , diagonais de comprimento  $2r$ , paralelas aos eixos coordenados, e vértices nos pontos  $i_1 = (a_1 + r, a_2)$ ,  $i_2 = (a_1, a_2 + r)$ ,  $i_3 = (a_1 - r, a_2)$  e  $i_4 = (a_1, a_2 - r)$ , como mostra a Figura 1.6.

**Figura 1.6:** Bola fechada  $B[a; r]$  na métrica  $d'$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Exemplo 1.22** Pela métrica  $d''$ , considerando o centro  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  e raio  $r$  temos

- $B(a; r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d''((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r\}$ , ou seja,

$$d''((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r \iff |x_1 - a_1| < r \text{ e } |x_2 - a_2| < r;$$

- $B[a; r] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d''((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq r\}$ , ou seja,

$$d''((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq r \iff |x_1 - a_1| \leq r \text{ e } |x_2 - a_2| \leq r;$$

- $S(a; r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d''((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r\}$ , ou seja,

$$d''((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r \iff \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} = r \iff \begin{cases} |x_1 - a_1| = r \text{ e } |x_2 - a_2| \leq r \\ \text{ou} \\ |x_1 - a_1| \leq r \text{ e } |x_2 - a_2| = r. \end{cases}$$

A fim de visualizarmos graficamente as bolas e esfera na métrica do máximo  $d''$ , faremos o estudo da equação  $\max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} = r$ . Para que a igualdade anterior aconteça podemos ter

$$|x_1 - a_1| = r \text{ e } |x_2 - a_2| \leq r \quad (1.10)$$

ou

$$|x_1 - a_1| \leq r \text{ e } |x_2 - a_2| = r \quad (1.11)$$

Analisemos cada uma das situações (1.10) e (1.11).

(i) Para que ocorra (1.10), devemos ter, simultaneamente,  $|x_1 - a_1| = r$  e  $|x_2 - a_2| \leq r$ .

Porém,

$$|x_2 - a_2| \leq r \iff -r \leq x_2 - a_2 \leq r \iff a_2 - r \leq x_2 \leq a_2 + r.$$

Portanto, (1.10) será representado por  $|x_1 - a_1| = r$  no intervalo  $[a_2 - r, a_2 + r]$ , ou seja,

- se  $x_1 \geq a_1$ ,

$$|x_1 - a_1| = r \iff x_1 - a_1 = r \iff x_1 = a_1 + r; \quad (1.12)$$

- se  $x_1 < a_1$ ,

$$|x_1 - a_1| = r \iff -x_1 + a_1 = r \iff x_1 = a_1 - r. \quad (1.13)$$

(ii) Para que ocorra (1.11), devemos ter, simultaneamente,  $|x_2 - a_2| = r$  e  $|x_1 - a_1| \leq r$ . Mas,

$$|x_1 - a_1| \leq r \iff -r \leq x_1 - a_1 \leq r \iff a_1 - r \leq x_1 \leq a_1 + r.$$

Logo, (1.11) será representado por  $|x_2 - a_2| = r$  no intervalo  $[a_1 - r, a_1 + r]$ , ou seja,

- se  $x_2 \geq a_2$ ,

$$|x_2 - a_2| = r \iff x_2 - a_2 = r \iff x_2 = a_2 + r; \quad (1.14)$$

- se  $x_2 < a_2$ ,

$$|x_2 - a_2| = r \iff -x_2 + a_2 = r \iff x_2 = a_2 - r. \quad (1.15)$$

Podemos notar que as equações (1.12), (1.13), (1.14) e (1.15) são retas e as chamaremos de  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  e  $s_4$ , respectivamente. Observemos ainda que as retas  $s_1$  e  $s_2$  são paralelas ao eixo  $y$ , logo, paralelas entre si. Já as retas  $s_3$  e  $s_4$  são paralelas ao eixo  $x$ , logo, paralelas entre si.

Como as retas  $s_1$  e  $s_2$  são paralelas ao eixo  $y$  e as retas  $s_3$  e  $s_4$  são paralelas ao eixo  $x$ , então, as retas  $s_1$  e  $s_2$  são perpendiculares as retas  $s_3$  e  $s_4$ .

As interseções entre as retas perpendiculares, as quais denotaremos por  $j_1$ ,  $j_2$ ,  $j_3$  e  $j_4$ , acontecem nos extremos dos intervalos  $[a_1 - r, a_1 + r]$  e  $[a_2 - r, a_2 + r]$ , ou seja,

$$j_1 = s_1 \cap s_3 = (a_1 + r, a_2 + r);$$

$$j_2 = s_1 \cap s_4 = (a_1 + r, a_2 - r);$$

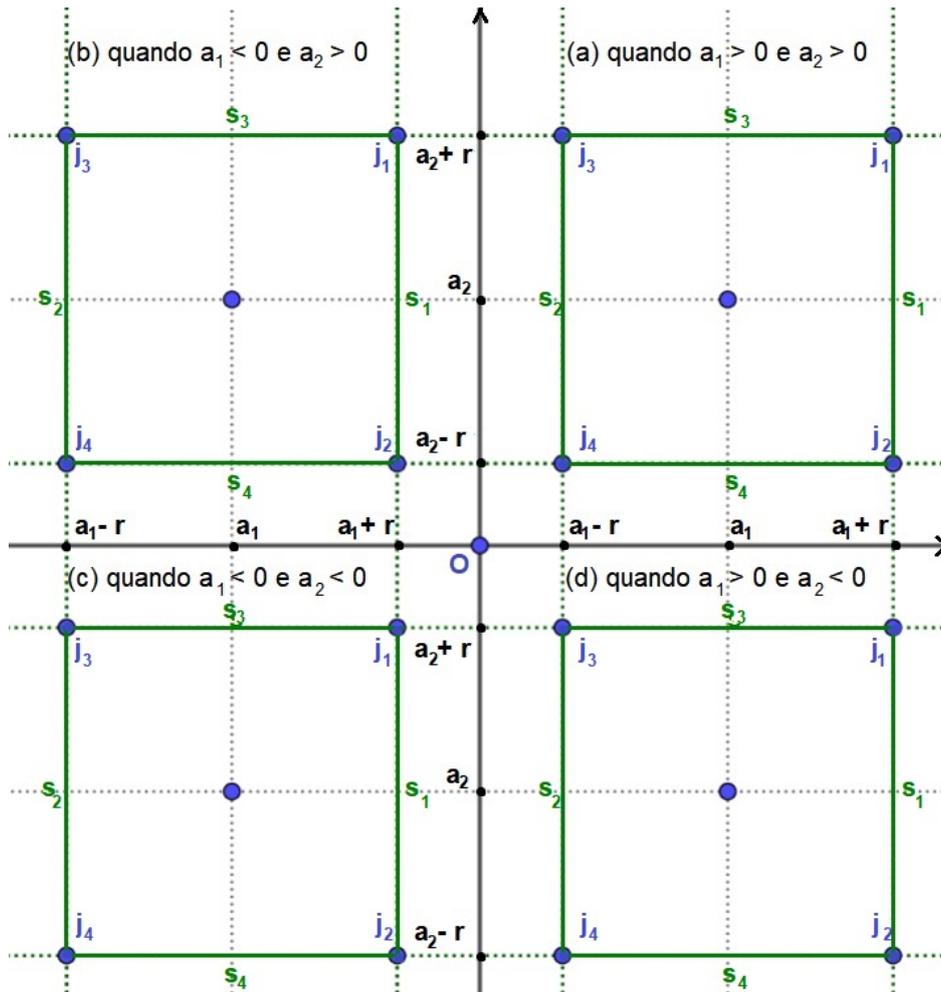
$$j_3 = s_2 \cap s_3 = (a_1 - r, a_2 + r);$$

$$j_4 = s_2 \cap s_4 = (a_1 - r, a_2 - r).$$

A Figura 1.7 representa, graficamente, as retas  $s_1$  e  $s_2$  no intervalo  $[a_2 - r, a_2 + r]$  e as retas  $s_3$  e  $s_4$  no intervalo  $[a_1 - r, a_1 + r]$ , considerando o ponto  $a = (a_1, a_2)$  em cada um dos quadrantes do plano cartesiano. Caso  $a$  esteja situado em algum dos eixos  $x$  ou  $y$ , a representação é análoga.

Portanto, para todo  $x_1 \in \mathbb{R}$  e para todo  $x_2 \in \mathbb{R}$ , temos que a esfera na métrica do máximo  $d''$ , dada pela equação  $\max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} = r$ , é representada, geometricamente, pelos lados, com comprimento  $2r$ , de um quadrado com centro em  $a = (a_1, a_2)$  e vértices nos pontos  $j_1 = (a_1 + r, a_2 + r)$ ,  $j_2 = (a_1 + r, a_2 - r)$ ,  $j_3 = (a_1 - r, a_2 + r)$  e  $j_4 = (a_1 - r, a_2 - r)$ , como mostra a Figura 1.7.

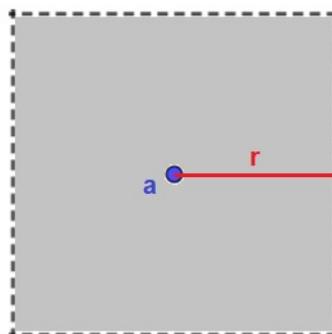
Figura 1.7: Esfera  $S(a; r)$  na métrica  $d''$  nos quatro quadrantes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Da mesma forma, a bola aberta na métrica do máximo  $d''$ , dada pelas desigualdades  $|x_1 - a_1| < r$  e  $|x_2 - a_2| < r$ , é representada, geometricamente, pelo interior de um quadrado de centro em  $a = (a_1, a_2)$ , lados de comprimento  $2r$  paralelos aos eixos coordenados e vértices nos pontos  $j_1 = (a_1 + r, a_2 + r)$ ,  $j_2 = (a_1 + r, a_2 - r)$ ,  $j_3 = (a_1 - r, a_2 + r)$  e  $j_4 = (a_1 - r, a_2 - r)$ , como mostra a Figura 1.8.

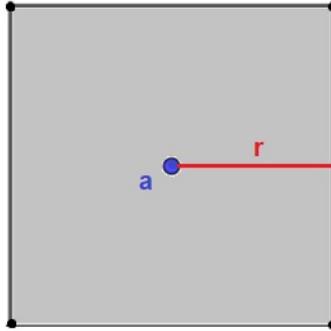
Figura 1.8: Bola aberta  $B(a; r)$  na métrica  $d''$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

E por fim, a bola fechada na métrica do máximo  $d''$ , dada pelas desigualdades  $|x_1 - a_1| \leq r$  e  $|x_2 - a_2| \leq r$ , é representada, geometricamente, por um quadrado (interior e bordas) de centro em  $a = (a_1, a_2)$ , lados de comprimento  $2r$  paralelos aos eixos coordenados e vértices nos pontos  $j_1 = (a_1 + r, a_2 + r)$ ,  $j_2 = (a_1 + r, a_2 - r)$ ,  $j_3 = (a_1 - r, a_2 + r)$  e  $j_4 = (a_1 - r, a_2 - r)$ , como mostra a Figura 1.9.

**Figura 1.9:** Bola fechada  $B[a; r]$  na métrica  $d''$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Proposição 1.23** Dados os pontos  $a \neq b$  em um espaço métrico  $(M, d)$ , sejam  $r > 0$  e  $s > 0$  tais que  $r + s \leq d(a, b)$ . Então as bolas abertas  $B(a; r)$  e  $B(b; s)$  são disjuntas.

**Demonstração.** Suponhamos, por absurdo, que exista  $x \in B(a; r) \cap B(b; s)$ , ou seja, que as bolas abertas  $B(a; r)$  e  $B(b; s)$  não sejam disjuntas. Dessa forma,  $d(a, x) < r$  e  $d(x, b) < s$ .

Então,

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + s \leq d(a, b),$$

a última desigualdade decorre da hipótese.

Assim, concluímos que  $d(a, b) < d(a, b)$ , o que é uma contradição.

Portanto, as bolas abertas  $B(a; r)$  e  $B(b; s)$  são disjuntas. ■

**Proposição 1.24** Dados os pontos  $a \neq b$  em um espaço métrico  $(M, d)$ , sejam  $r > 0$  e  $s > 0$  tais que  $r + s \leq d(a, b)$ . Então as bolas abertas  $B[a; r]$  e  $B[b; s]$  são disjuntas.

A demonstração da Proposição 1.24 é análoga a demonstração da Proposição 1.23.

# CAPÍTULO 2

---

## Introdução à geometria do táxi

---

Neste capítulo temos como objetivo principal apresentar a geometria do táxi que é uma geometria não euclidiana que se baseia na distância percorrida em movimentos horizontais e verticais, em contraste com a geometria euclidiana que considera a distância em linha reta. Para isso, iniciaremos o capítulo apresentando uma breve introdução das geometrias euclidiana e não euclidiana abordando suas principais diferenças. E por fim, introduziremos a geometria do táxi, relacionando os conceitos de espaços métricos estudados no Capítulo 1 e fazendo um paralelo com a geometria euclidiana.

### 2.1 Geometria euclidiana

Ao estudarmos a História da Matemática, especificamente o surgimento da geometria, nos deparamos com Euclides (aprox. 325 a.C. – 265 a.C.), um notável matemático grego conhecido por sua obra “Os Elementos” - que é composta por 13 livros e que reúne grande parte do conhecimento matemático de sua época. Como afirma [10, Leivas, 2013, p.647-648], “consta um tratado de Matemática, de forma organizada, especialmente da geometria, que permeou o conhecimento por mais de dois mil anos”. Nessa obra abordam os temas: geometria plana, construções geométricas, teoremas de congruência, áreas de polígonos, Teorema de Pitágoras, estudo do círculo, problemas relativos à construção de alguns polígonos regulares, proporções, semelhança de figuras, teoria dos números, incomensurabilidade, geometria espacial e poliedros regulares.

Além da obra ter como característica a objetividade, clareza nas demonstrações dos teoremas e o carácter lógico-dedutivo, destaca-se a utilização de definições baseado em cinco postulados e cinco axiomas e que, a partir deles, são demonstrados os teoremas. Para Eu-

clides, os postulados eram afirmações referentes à geometria plana, enquanto os axiomas, ou noções comuns, eram afirmações gerais aceitas em outros campos, como por exemplo: o todo é maior do que as partes. Nos dias atuais, não existe distinção entre os significados das palavras axioma e postulado.

Abaixo estão listados e enumerados os axiomas e postulados de Euclides como apresenta [4, Coutinho, 2018, p.2-3].

Axiomas:

1. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
2. Se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais.
3. Se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com outra são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Postulados:

1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos a vontade.
2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.
3. Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto de mesmo lado.

Tais afirmações possibilitaram Euclides criar o primeiro e mais duradouro modelo para o espaço físico, denominado **geometria euclidiana**. Esse modelo pareceu ser, por muito tempo, um encadeamento lógico perfeito, porém estudos aprofundados referentes aos sistemas axiomáticos passaram a ser questionados exibindo problemas na obra. [19, Presmic, 2014, p.3] afirma que nesses estudos ficaram determinados que um sistema axiomático deve ter três propriedades: consistência, completude e independência. [12, Loiola, 2014, p.28-29] explica melhor estas três propriedades citando Asger Aaboe:

Não é tão simples quanto parece ter-se certeza de que um sistema de axiomas é completo, mas se procedermos, passo a passo, examinando cada raciocínio nos mínimos detalhes, poderemos ter certeza que não foram feitas hipóteses tácitas.

A consistência de um conjunto de axiomas é extremamente difícil de decidir. Demonstra-se geralmente que um certo conjunto de axiomas, por exemplo os da geometria plana, é consistente, se outro conjunto de axiomas, por exemplo o dos números reais, for consistente. No exemplo dado, a ponte entre os dois conjuntos de axiomas é a geometria analítica.

A independência diz que não deveríamos escrever mais axiomas do que os absolutamente necessários. Se um sistema de axiomas é consistente e completo, mas não independente isso não causará nenhum problema sério; significa simplesmente que um ou mais dos axiomas estão erroneamente designados, e deveriam em vez disso serem chamados de teoremas, pois podem ser demonstrados usando outros axiomas. [1, Aaboe, 2013, p.56]

Dessa forma, compreendemos que um sistema axiomático estabelece que o que será utilizado no desenvolvimento da teoria está devidamente constituído no conjunto de axiomas, que nenhum teorema será conflitante a outro teorema, e ainda que nenhum axioma é proveniente de outro. Assim, fica claro que o método axiomático é suficiente para percebermos a grandiosidade da obra de Euclides, contudo por ser pioneiro cometeu enganos, mas que de modo algum reduz sua importância histórica na edificação de alicerces sólidos para o desenvolvimento da matemática. Logo, as falhas propõem uma necessidade de reformulação das obras, já que elas não satisfazem tais propriedades axiomáticas. Foi então que,

David Hilbert (1862-1943) fez uma reconstrução rigorosa de Os Elementos em sua obra Fundamentos da Geometria, esclarecendo os problemas lógicos com uma nova proposta de noções primitivas e axiomas. Hilbert tomou como conceitos primitivos o ponto, a reta e o plano e os considera interligados a duas relações não definidas: “estar entre” e “congruência”. Também elaborou o primeiro conjunto completo de axiomas da geometria euclidiana, subdividindo-os como axiomas de incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade. Em 1904, Hilbert provou que a Geometria Euclidiana proposta por ele era tão consistente quanto a aritmética. [19, Presmic, 2014, p.3]

Uma vez provada a geometria euclidiana como consistente quanto à aritmética, estudaremos na seção seguinte as geometrias não euclidianas partindo das falhas ou equívocos de Euclides.

## 2.2 Geometrias não euclidianas

Como vimos anteriormente, a obra de Euclides, embora tenha sua importância histórica no desenvolvimento da geometria, possuía falhas e a partir delas surgiram vários questionamentos que possibilitaram o surgimento de outras geometrias, uma dessas lacunas foi o quinto postulado, um dos mais famosos conhecido como o Postulado das Paralelas. Por volta

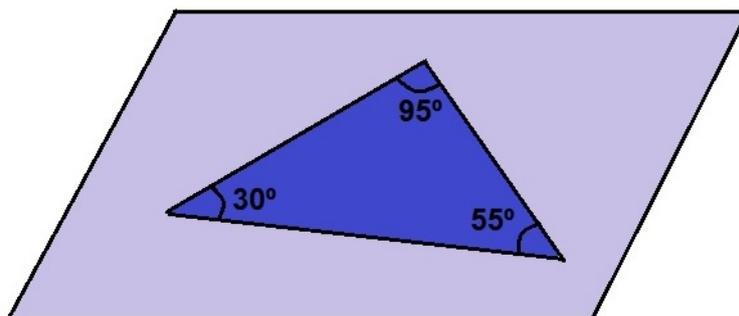
do século XIX, muitos matemáticos tentaram provar o mesmo partindo dos outros quatro postulados, culminando com o surgimento de novas geometrias e acarretando novas interpretações das implicações decorrentes do método axiomático. Isso porque levaram esses matemáticos a acreditarem que não se tratava de um postulado e sim de um teorema que precisava ser demonstrado. Nesse contexto, [10, Leivas] afirma que

[...] matemáticos do século XIX perceberam que esse postulado era independente dos quatro primeiros e que havia sistemas geométricos em que ele, da forma como enunciado por Euclides, não se coadunava, sendo substituído por outro, o qual possibilitava criar um sistema geométrico consistente e perfeitamente compatível. Isso fazia parte denominada crise dos Fundamentos da Matemática, pois a concepção de mundo não era mais a euclidiana. [10, Leivas, 2013, p.648]

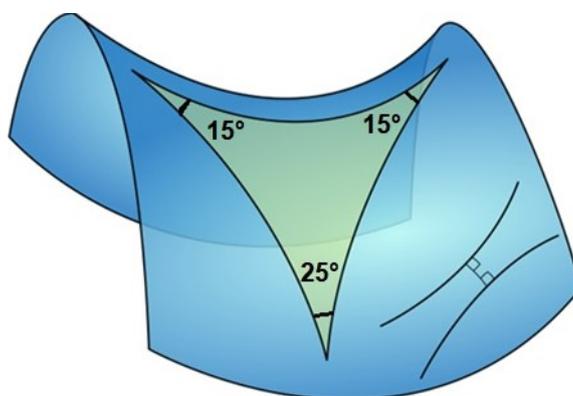
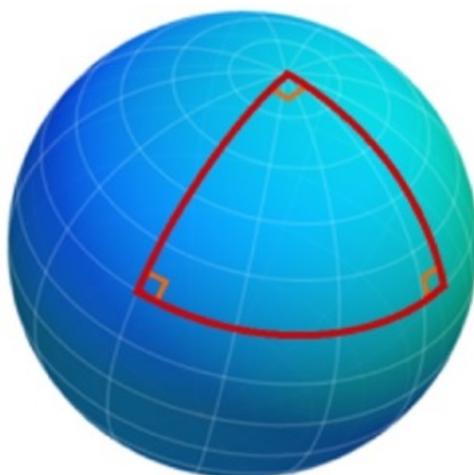
Na tentativa de provar o quinto postulado, três matemáticos se destacaram ao chegarem a novos conceitos sobre uma nova geometria de forma independente e tão sólida quanto a geometria euclidiana, são eles: o matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855); o matemático húngaro János Bolyai (1802 - 1860); o matemático russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 - 1860). O primeiro a publicar um trabalho sobre o tema foi Lobachevsky, em 1829, no seu artigo intitulado "Sobre os Princípios da Geometria", o qual marca o nascimento oficial da **geometria não euclidiana**, desenvolvendo assim a **geometria hiperbólica**. Segundo [10, Leivas, 2013, p.649] esse trabalho pontua que os princípios das geometrias euclidiana e hiperbólica se diferenciam em pontos como: "a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que  $180^\circ$ ; dada uma reta e um ponto fora dela, existe mais do que uma paralela passando pelo ponto e que não a intersecciona".

Ainda durante o século XIX, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), matemático alemão, deu o próximo passo no desenvolvimento da geometria não euclidiana, desenvolvendo uma nova estrutura geométrica diferente das geometrias euclidiana e hiperbólica. Essa estrutura foi denominada como **geometria elíptica**, em que [10, Leivas, 2013, p.649] destaca essas diferenças em pontos como: "a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior do que  $180^\circ$ , [...] dada uma reta e um ponto fora dela, não existe paralela a ela passando pelo ponto".

Para melhor visualizar e distinguir as geometrias euclidiana, hiperbólica e elíptica, observaremos a soma dos ângulos internos de um triângulo em cada um desses espaços, como mostram as Figuras 2.1, 2.2 e 2.3, respectivamente.

**Figura 2.1:** Triângulo euclidiano: soma dos ângulos internos é igual a  $180^\circ$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 2.2:** Triângulo hiperbólico: soma dos ângulos internos é menor do que  $180^\circ$ .Fonte: [Triângulo hiperbólico](#). Acesso em: 25 fev. 2023.**Figura 2.3:** Triângulo elíptico: soma dos ângulos internos é maior do que  $180^\circ$ .Fonte: [Triângulo elíptico](#). Acesso em: 25 fev. 2023.

Como vimos, o espaço geométrico não se limita a geometria euclidiana, exemplos disso são as geometrias hiperbólica e elíptica, que foram denominadas por Gauss de geometrias não euclidianas. A partir de então, surgiram outras geometrias não euclidianas e uma delas veremos na próxima seção: a geometria do táxi.

## 2.3 Geometria do táxi

A geometria do táxi, também conhecida como geometria de Minkowski, é uma extensão da geometria euclidiana tradicional que foi introduzida no século XIX a partir dos estudos relacionados à Topologia, desenvolvidos pelo renomado matemático e físico alemão Hermann Minkowski (1864 – 1909), que é conhecido principalmente por suas contribuições para a geometria e à teoria da relatividade. Minkowski contribuiu para o desenvolvimento da distância de Minkowski, também conhecida como distância do táxi, que é a base para a geometria do táxi. Ele introduziu essa medida de distância como uma generalização da distância euclidiana em espaços  $n$ -dimensionais.

Entretanto, foi apenas em 1975 que os conceitos da geometria do táxi foram formalizados e tratados como uma geometria não euclidiana. Essa formalização foi realizada por Eugene F. Krause em seu livro *"Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry"*. Além disso, segundo [8, Gusmão, Sakaguti e Pires, 2017, p.7], nesse livro, Krause explora a geometria do táxi de duas maneiras distintas: uma abordagem didática voltada para estudantes iniciantes e outra que explora a aplicabilidade prática desse conteúdo no cotidiano. Em tal livro a geometria do táxi é apresentada com o propósito de estudar o deslocamento em uma cidade ideal, onde as ruas formam uma grade semelhante a um plano cartesiano. Os movimentos nessa geometria são limitados a combinações de segmentos horizontais e verticais, simulando curvas no percurso, como um táxi navegando pelas ruas de uma cidade.

A geometria do táxi tem várias aplicações práticas em diversas áreas, como ciência da computação, robótica e geometria computacional. Ela é especialmente relevante em algoritmos de busca em grafos, permitindo calcular caminhos mais curtos em sistemas urbanos com ruas dispostas em grades. Além disso, essa geometria é fundamental para resolver problemas de otimização e planejamento de rotas em contextos onde os movimentos são restritos aos eixos horizontais e verticais, como em sistemas urbanos de transporte e logística.

Nas próximas subseções serão detalhadas a geometria do táxi vista como uma geometria urbana, a relação entre a distância do táxi e a distância euclidiana, o número de possibilidades de trajetos com a geometria do táxi e uma justificativa mais formal do fato da geometria do táxi ser uma geometria não euclidiana.

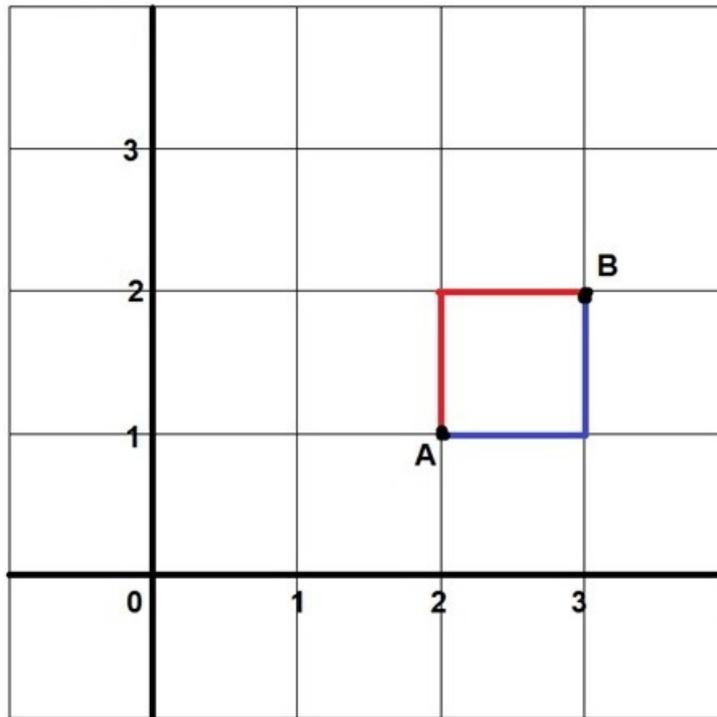
### 2.3.1 Geometria do táxi e a geometria urbana

Imagine uma cidade ideal onde as ruas são representadas por retas horizontais e verticais em uma malha quadriculada, formando um plano cartesiano ortogonal. Nessa representação

peculiar, definimos "quarteirão" como a distância entre uma esquina e a outra mais próxima, percorrendo-se apenas ao longo das ruas paralelas aos eixos cartesianos.

Para um motorista de táxi trafegar do ponto  $A = (2, 1)$  ao ponto  $B = (3, 2)$  utilizando um caminho mais curto existem duas possibilidades, as quais estão representadas em azul e vermelho na Figura 2.4. Os dois trajetos mais curtos são formados por dois quarteirões.

**Figura 2.4:** Distância do táxi entre os pontos  $A$  e  $B$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

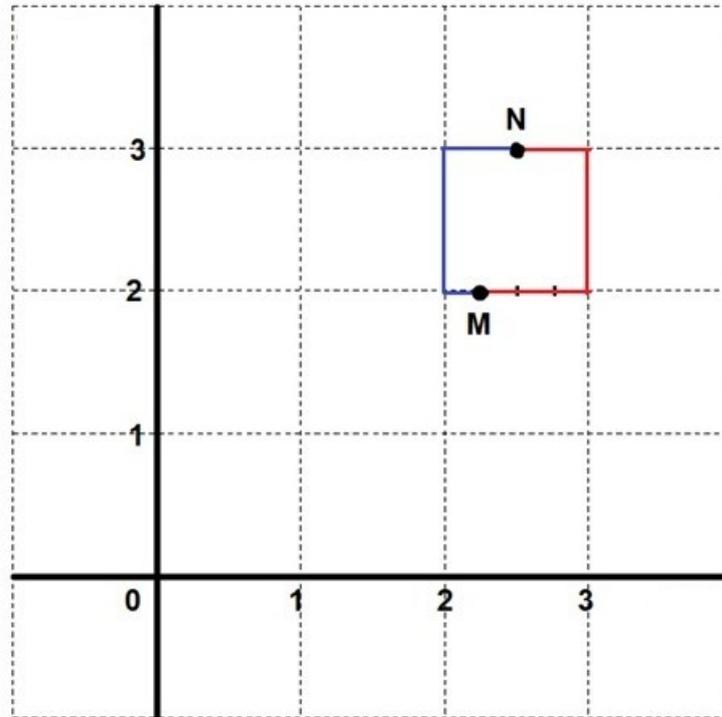
A distância do táxi, a qual denotaremos por  $d_T$ , entre os pontos  $A$  e  $B$  é dada por

$$d_T(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| = |2 - 3| + |1 - 2| = 2.$$

Nesta situação, o comprimento de qualquer trajeto mais curto do táxi entre os pontos  $A$  e  $B$  são distâncias iguais, como mostra a Figura 2.4.

Outra situação seria a de um motorista de táxi trafegar do ponto  $M = \left(\frac{9}{4}, 2\right)$  ao ponto  $N = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$  utilizando um caminho mais curto. Os trajetos estão ilustrados na Figura 2.5 nas cores azul e vermelho, um deles é o menor e será o trajeto que o taxista seguirá.

O comprimento do caminho azul é igual a  $\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$  e o comprimento do caminho vermelho é igual  $\frac{3}{4} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$ . Assim, o trajeto mais curto é o azul, pois  $\frac{7}{4} < \frac{9}{4}$ .

**Figura 2.5:** Trajetos possíveis entre os pontos  $M$  e  $N$ .

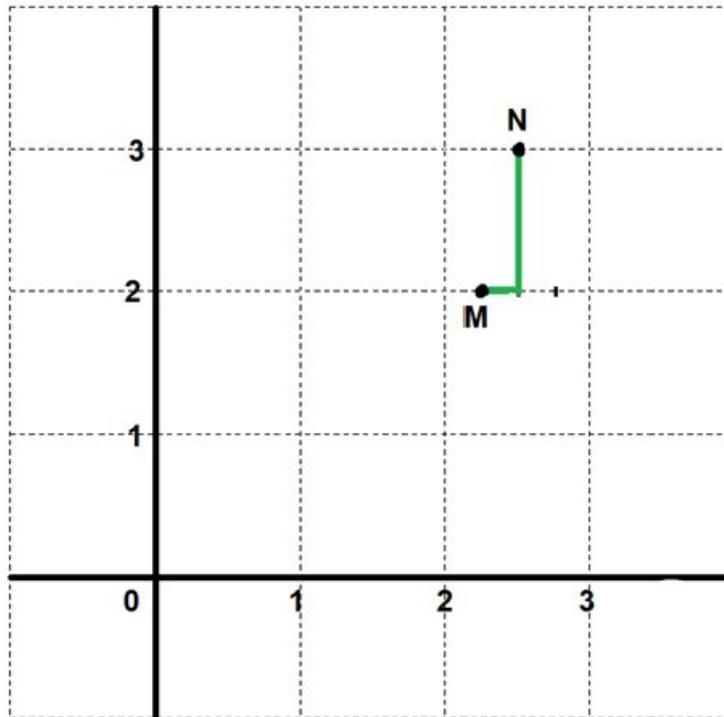
Fonte: Elaborado pelo autor.

A distância do táxi ( $d_T$ ) entre os pontos  $M$  e  $N$  é dada por

$$d_T(M, N) = |x_M - x_N| + |y_M - y_N| = \left| \frac{9}{4} - \frac{5}{2} \right| + |2 - 3| = \frac{5}{4}.$$

Notemos que há uma divergência entre o comprimento do trajeto azul com a suposta distância do táxi do ponto  $M$  ao  $N$ , as quais são, respectivamente,  $\frac{7}{4}$  e  $\frac{5}{4}$ , isto é, valores diferentes. Isso ocorre porque houve mais de uma mudança de direção desde quando o trajeto partiu do ponto  $M$  até chegar no ponto  $N$ , ou seja, a distância calculada não representa a distância do táxi. Notemos que, ela corresponde à soma das medidas dos dois segmentos destacados em verde na Figura 2.6, mas o taxista não pode ir de  $M$  até  $N$  por um trajeto como esse, pois precisa seguir pelo traçado das ruas.

Analisando as situações anteriores, percebemos que para dois pontos de coordenadas inteiras a medida de um menor trajeto entre eles é igual à distância do táxi entre tais pontos. Dessa forma, embora na geometria do táxi os pontos possam estar em qualquer posição do plano cartesiano, quando restrita aos pontos de coordenadas inteiras ela descreve bem a geometria urbana de uma cidade ideal.

**Figura 2.6:** Trajeto inviável para o taxista.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A aplicação destas ideias em problemas relacionados a trafegar por ruas justifica o nome geometria do táxi, o qual surgiu da analogia com a forma como um táxi se move pelas ruas de uma cidade, tendo que seguir uma rede de ruas ortogonais em vez de percorrer caminhos diretos. Nesse contexto, a distância percorrida por um táxi entre dois pontos é a soma das distâncias horizontais e verticais percorridas, sem considerar atalhos diagonais.

### 2.3.2 Relação entre a distância do táxi e a distância euclidiana

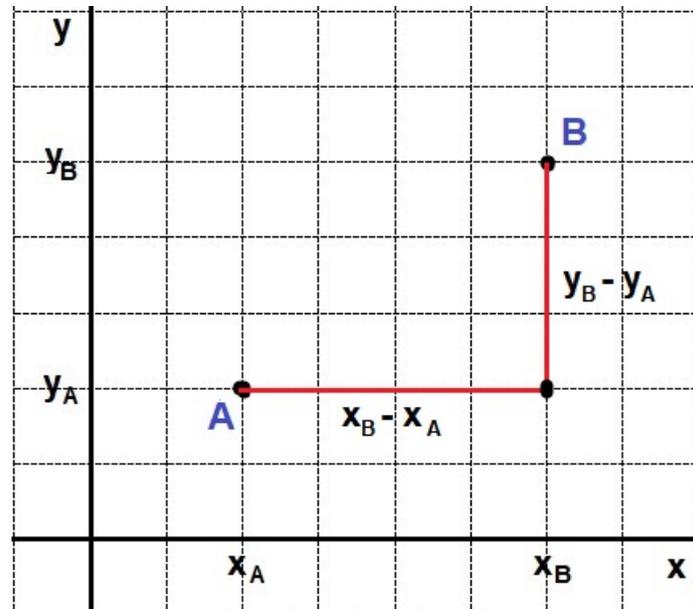
Na geometria do táxi, os pontos e as retas são os mesmos da geometria euclidiana, também os ângulos são medidos do mesmo modo. O que as difere é apenas a função distância, ou seja, a distância entre dois pontos na geometria do táxi é determinada por uma métrica diferente da distância euclidiana. [19, Presmic] afirma que

A métrica euclidiana dominou a visão de mundo natural e a noção de distância “por linha reta” garantiu o estável desenvolvimento da geometria euclidiana. As geometrias ditas não euclidianas podem utilizar-se de outras métricas, muitas vezes até mais adequadas, como a interessante geometria do táxi. [19, Presmic, 2014, p.14]

Para distinguirmos melhor a geometria do táxi da geometria euclidiana vejamos o próximo exemplo.

**Exemplo 2.1** Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  dois pontos no plano cartesiano, como mostra a Figura 2.7. Suponhamos que as linhas sejam as ruas e que precisamos deslocar de A para B. Considerando as geometrias do táxi e a euclidiana, como calcular este percurso?

**Figura 2.7:** Deslocamento horizontal e vertical entre os pontos A e B.



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Considerando a geometria do táxi.

Para calcular a distância entre os pontos A e B na malha quadriculada apresentada na Figura 2.7, consideramos que apenas as linhas da malha representam os "caminhos" possíveis. Dessa forma, somaremos os deslocamentos horizontais e verticais para determinar a distância total percorrida.

Matematicamente, temos:

$$d(A, B) = (x_B - x_A) + (y_B - y_A).$$

Agora, é importante ressaltar que nem sempre os deslocamentos são positivos, pois levamos em conta as coordenadas dos pontos de partida e chegada. Contudo, um deslocamento negativo apenas indica que foi realizado no sentido contrário ao crescimento do eixo. Para eliminar qualquer dúvida em relação ao sinal, consideramos o módulo do deslocamento horizontal somado ao módulo do deslocamento vertical como a distância entre os pontos A e B, ou seja,

$$d(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|.$$

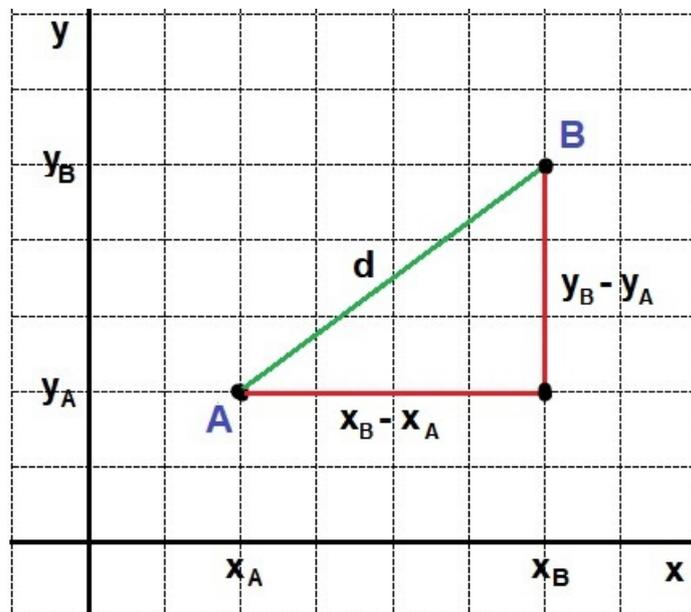
Notemos que a expressão encontrada anteriormente representa a distância do táxi, ou seja, a métrica  $d'$  em  $\mathbb{R}^2$ , conforme a Observação 1.13, o que exemplifica precisamente o que buscamos demonstrar. Agora, denotemos a distância do táxi por  $d_T$ , definida para os pontos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  como:

$$d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|.$$

- Considerando a geometria euclidiana.

Para calcular a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  na malha quadriculada destacada em verde na Figura 2.8, consideramos a menor distância direta entre esses pontos. Em seguida, podemos perceber que a distância percorrida pelo táxi (que envolve o deslocamento horizontal e vertical) forma um triângulo retângulo com a distância direta.

**Figura 2.8:** Distância euclidiana (verde) e distância do táxi (vermelho).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Algebricamente, aplicamos o Teorema de Pitágoras, em que a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  correspondem à hipotenusa, e os deslocamentos horizontais e verticais atuam como os catetos, medindo, respectivamente,  $x_B - x_A$  e  $y_B - y_A$ . Com base nessas informações, temos

$$(d(A, B))^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \quad \Rightarrow \quad d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Observe que a distância encontrada é exatamente a métrica  $d$  em  $\mathbb{R}^2$ , como mencionado na Observação 1.13, o que exemplifica precisamente o que procurávamos demonstrar. Agora, vamos denotar a distância euclidiana por  $d_E$ , a qual é definida para os pontos

$A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  como

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Vimos no Exemplo 2.1 a diferença entre as distâncias do táxi e euclidiana. Agora, veremos que existe uma relação entre elas, que é o fato de a distância do táxi ser sempre maior ou igual à euclidiana.

Para verificar esta relação, sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  pontos do plano cartesiano.

Temos  $2|x_B - x_A| \cdot |y_B - y_A| \geq 0$ , pois todos os fatores deste produto são positivos ou iguais a zero. Somando  $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$  aos dois membros da desigualdade obtemos

$$2|x_B - x_A| \cdot |y_B - y_A| + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Reorganizando a desigualdade no primeiro membro e usando a propriedade comutativa da adição, obtemos

$$(x_B - x_A)^2 + 2|x_B - x_A| \cdot |y_B - y_A| + (y_B - y_A)^2 \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Observando o primeiro membro da desigualdade, notemos que se trata de um produto notável. Reescrevendo obtemos

$$(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|)^2 \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Uma vez que os dois membros da desigualdade anterior são maiores do que ou iguais a zero, ao extrairmos a raiz quadrada de ambos os lados, a desigualdade continua válida, ou seja,

$$\sqrt{(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|)^2} \geq \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Dessa forma, temos

$$|x_B - x_A| + |y_B - y_A| \geq \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Por outro lado,  $d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$  e  $d_E(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

Portanto,  $d_T(A, B) \geq d_E(A, B)$ .

Vale lembrar que a relação  $d_T(A, B) \geq d_E(A, B)$  corresponde à Proposição 1.16 que estu-

damos nas métricas do Capítulo 1. Nessa proposição, chegamos a essa mesma desigualdade utilizando  $d'(A, B) \geq d(A, B)$ .

### 2.3.3 Número de possibilidades de trajetos do táxi

Na geometria do táxi, existem várias possibilidades de trajetos para se deslocar de um ponto a outro, enquanto na geometria euclidiana há apenas um único trajeto que percorre a distância entre dois pontos, conforme afirmado por [12, Loiola]

No modelo euclidiano a distância entre dois pontos é fornecida como a medida de um segmento de reta que une esses dois pontos, desse modo existe um único caminho para percorrer essa distância. Já no modelo do táxi podemos ter vários caminhos que fornecem a mesma medida de distância entre dois pontos. [12, Loiola, 2014, p. 46]

Portanto, na geometria do táxi, podemos quantificar as possibilidades de trajetórias entre dois pontos por meio da Análise Combinatória. Mais especificamente, empregaremos a permutação com repetição, demonstrada por [16, Oliveira, 2020, p.36-38] e representada pela seguinte expressão

$$N = P_{d_T}^{V,H} = \frac{d_T!}{V!H!}$$

em que,

$N$  representa o número total de trajetos possíveis do táxi entre dois pontos;

$P$  é a notação utilizada para o cálculo da permutação;

$d_T = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$  corresponde à distância do táxi entre dois pontos;

$H = |x_B - x_A|$  representa a distância percorrida na direção horizontal;

$V = |y_B - y_A|$  indica distância percorrida na direção vertical.

**Observação 2.2** Lembrando que a geometria do táxi utiliza somente coordenadas inteiras como vimos anteriormente nas páginas 31 e 32.

**Exemplo 2.3** Considerando os pontos  $A = (1, 1)$  e  $B = (6, 4)$ , e sabendo que um táxi desloca-se de  $A$  até  $B$ , quantos trajetos são possíveis para realizar esse deslocamento?

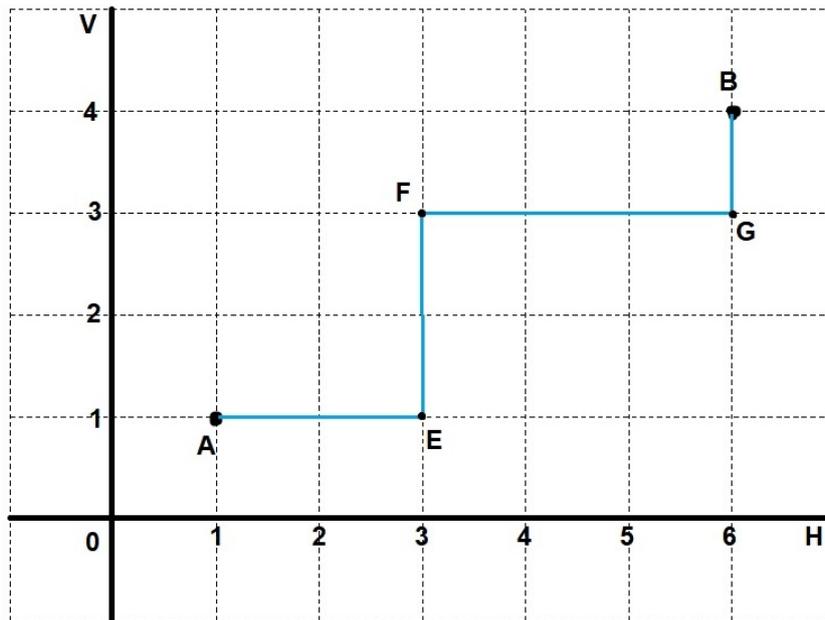
**Solução.** Dados os pontos  $A = (1, 1)$  e  $B = (6, 4)$ , temos

$d_T = |6 - 1| + |4 - 1| = 8$  é a distância do táxi entre dois pontos;

$H = |6 - 1| = 5$  indica a distância percorrida na direção horizontal;

$V = |4 - 1| = 3$  representa a distância percorrida na direção vertical.

**Figura 2.9:** Um possível trajeto do táxi de A até B.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Substituindo os valores encontrados na expressão  $N = P_{d_T}^{V,H} = \frac{d_T!}{V!H!}$ , temos

$$N = P_8^{3,5} = \frac{8!}{3!5!} = 56.$$

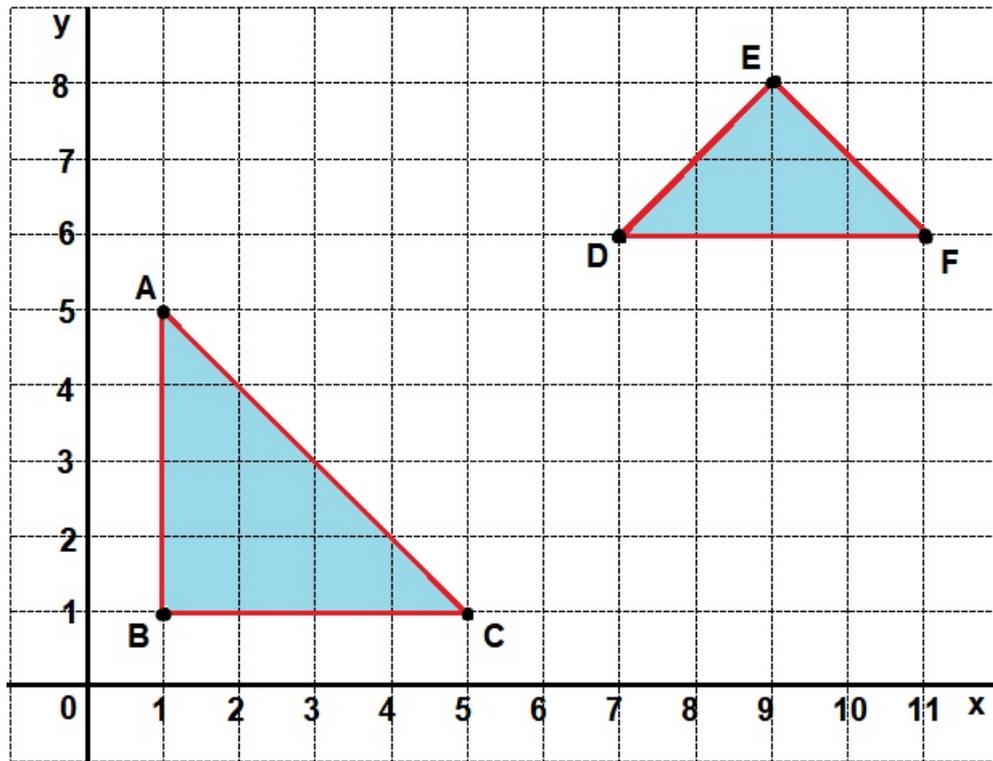
Portanto, há 56 caminhos distintos para o táxi deslocar-se de A até B.

### 2.3.4 Geometria do táxi: uma geometria não euclidiana

Nas literaturas estudadas, alguns autores, como [8, Gusmão, Sakaguti e Pires], bem como [17, Oliveira], explicam o motivo pelo qual a geometria do táxi é classificada como uma geometria não euclidiana. Eles abordam essa questão de maneira intuitiva, utilizando-se do fato de que as métricas que definem a distância entre dois pontos são distintas.

Por outro lado, outros autores adotam argumentos diferentes para demonstrar que a geometria do táxi não se enquadra como geometria euclidiana. Entre eles, está [12, Loiola], que destaca que um dos axiomas euclidianos, mais precisamente o de congruência de triângulos referente ao postulado lado-ângulo-lado (LAL), não é válido para a geometria do táxi. Para ilustrar essa situação, consideremos dois triângulos retângulos e isósceles, cujos lados são medidos pela distância percorrida pelo táxi, conforme mostrado na Figura 2.10.

Figura 2.10: Contradição do axioma de congruência de triângulos – caso LAL.

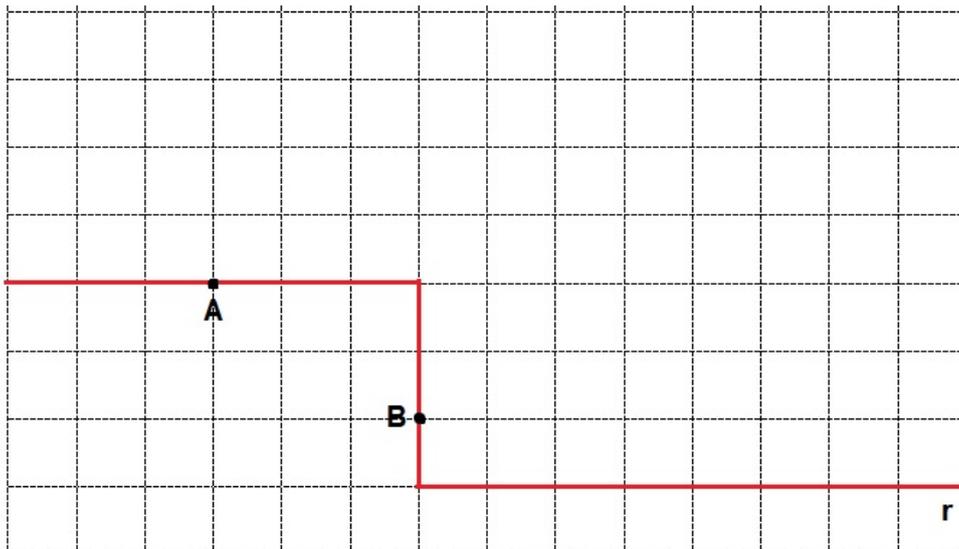


Fonte: Elaborado pelo autor.

Notemos que, ao comparar os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , segundo a distância do táxi, temos que o lado  $AB$  possui a mesma medida que o lado  $DE$ , os ângulos  $\hat{A}BC$  e  $\hat{D}EF$  são ambos retos e os lados  $BC$  e  $EF$  também possuem a mesma medida (com a distância do táxi). Assim, pelo caso de congruência  $LAL$ , os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  deveriam ser congruentes. Contudo, na distância do táxi, o lado  $AC$  mede oito unidades e o lado  $DF$  mede quatro unidades. Essa discrepância nos leva a concluir que os dois triângulos não são congruentes e, portanto, o axioma de congruência baseado no postulado  $LAL$  não é aplicável à geometria do táxi.

Uma outra forma de comprovar que a geometria do táxi não é uma geometria euclidiana é discutida pelos autores [7, Fernandes] e [5, Cruz]. Ambos negam a geometria do táxi a partir da contradição do quinto postulado de Euclides, assim como nas geometrias hiperbólica e elíptica. Para compreender melhor a contradição do quinto postulado, lembremos que o conceito de reta na geometria euclidiana é primitivo, ou seja, sem definição formal. Na geometria do táxi, segundo [16, Abreu; Barroso; Miranda; Fernandes, apud Oliveira, 2020, p.35] “[...] a reta é a união de viagens diretas, ou seja, é uma viagem estendida, no sentido de que se considera sempre o caminho mais curto entre dois pontos quaisquer dessa viagem”, como mostra a Figura 2.11.

**Figura 2.11:** Retas  $r$  passando pelos pontos  $A$  e  $B$  na geometria do táxi.

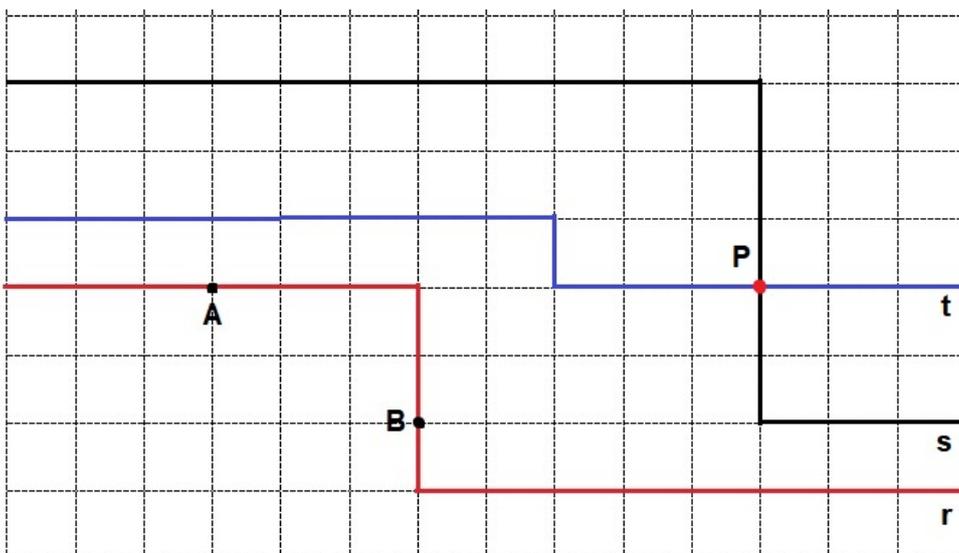


Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando a Figura 2.11, percebemos que existem diversos caminhos que passam por  $A$  e  $B$ , alguns mais longos e outros com a mesma distância, porém nenhum deles é mais curto do que o destacado.

Agora, desenharemos mais duas retas paralelas à reta  $r$  destacada, denominadas de  $s$  e  $t$ , considerando a definição de retas paralelas nas geometrias euclidiana e do táxi, ou seja, as retas paralelas não se interceptam.

**Figura 2.12:** Retas  $s$  e  $t$  paralelas à reta  $r$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, a geometria do táxi contesta o quinto postulado de Euclides e, de acordo com [5, Cruz, 2015, p.17], possibilita reescrevê-lo da seguinte maneira: " [...] por um ponto

dados  $P$ , exterior à reta  $r$ , ambos em um mesmo plano, existe mais de uma reta paralela a esta reta”, como pode ser observado na Figura 2.12.

Também pela análise da Figura 2.12, temos as retas  $s$  e  $t$  paralelas à reta  $r$ , porém elas não são paralelas entre si, pois existe um ponto  $P$  em que  $s$  e  $t$  se interceptam, o que não ocorre na geometria euclidiana.

## As cônicas na geometria do táxi

---

Neste capítulo, estudaremos cada uma das cônicas sob a perspectiva da geometria euclidiana e da geometria do táxi, respectivamente. Apresentaremos as equações que as representam, exemplificando-as e comparando-as tanto numericamente quanto graficamente.

### 3.1 Introdução às cônicas

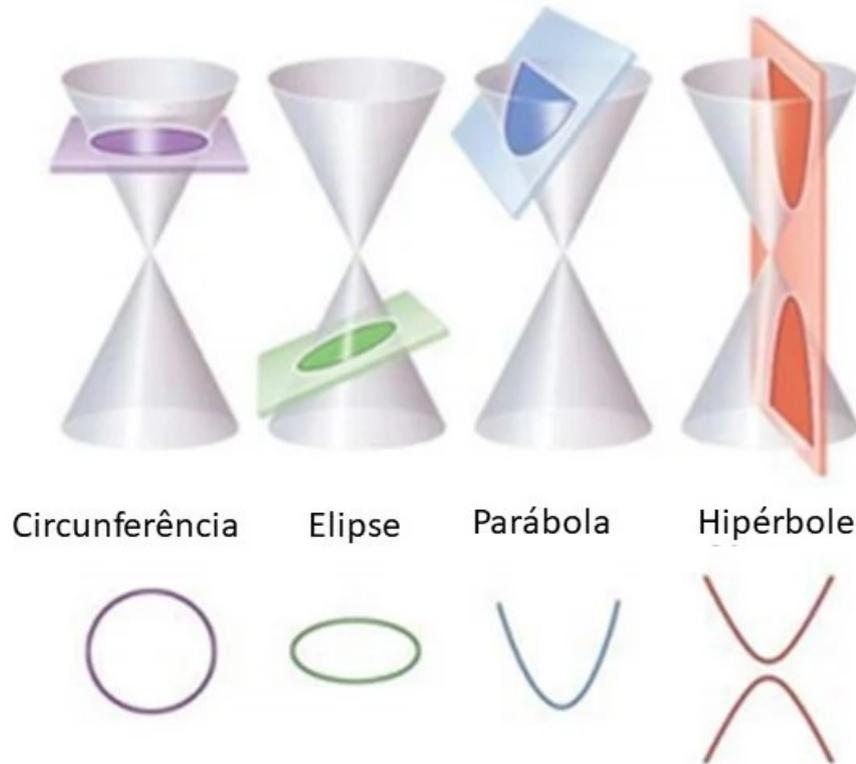
Antes de começarmos os estudos, é importante lembrar que as cônicas são obtidas através da intersecção de um plano com um cone duplo, o que pode resultar em vários tipos de curvas, tais como a circunferência, a elipse, a parábola e a hipérbole, como mostra a Figura 3.1. Existem alguns casos especiais nos quais essa intersecção resulta em um ponto ou em uma linha reta, mas não são de interesse para o estudo das cônicas que faremos neste capítulo.

As cônicas são definidas como lugares geométricos, ou seja, como conjuntos de pontos fixados em um plano com uma propriedade (envolvendo o conceito de distância de pontos) que assegura a ocorrência de duas condições:

1. todos os pontos do conjunto satisfazem a propriedade;
2. nenhum outro ponto do plano que esteja fora do conjunto satisfaz a propriedade.

As definições das cônicas na geometria do táxi são as mesmas da geometria euclidiana, apenas substituindo a distância euclidiana pela distância do táxi. Com isso, as representações geométricas de tais curvas familiares da geometria euclidiana são modificadas na geometria do táxi. Vamos mostrar algumas dessas figuras através de exemplos nas seções a seguir.

**Figura 3.1:** Intersecções de um plano e um cone duplo.



Fonte: [Cônicas](#). Acesso em: 22 jul. 2023.

## 3.2 Circunferência

A circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam uma medida  $r$  (raio) de um ponto fixo  $O$  (centro). Desse modo, dados os pontos  $P = (x, y)$  e  $O = (a, b)$ , tal que  $P$  pertence à circunferência e  $O$  é seu centro, a distância de  $P$  a  $O$  é  $d(O, P) = r$ . Logo,

$$C_E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_E(O, P) = r\};$$

$$C_T = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_T(O, P) = r\}.$$

Assim,

$$C_E \equiv \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r;$$

$$C_T \equiv |x-a| + |y-b| = r,$$

onde  $C_E$  e  $C_T$  representam algebricamente a circunferência euclidiana e a circunferência do táxi, respectivamente.

Observemos a diferença gráfica entre as circunferências euclidiana ( $C_E$ ) e a do táxi ( $C_T$ ) através do exemplo a seguir.

**Exemplo 3.1** Dados o centro  $O = (3, 3)$  e o raio  $r = 2$ , represente a circunferência de forma algébrica e gráfica tanto na geometria euclidiana quanto na geometria do táxi.

**Solução.**

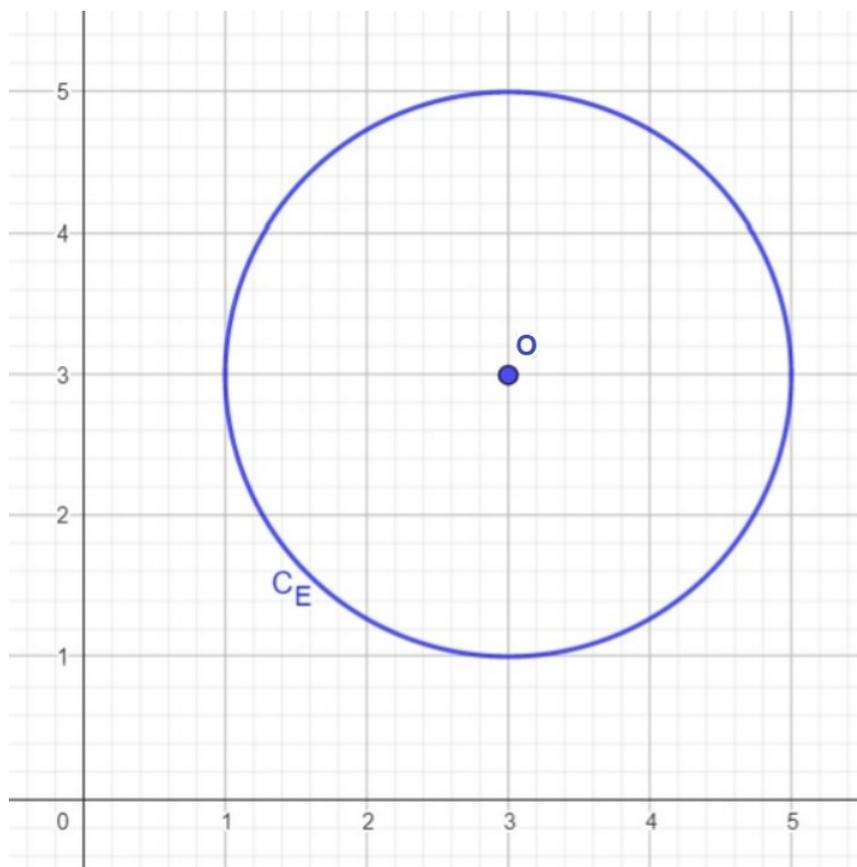
- Na geometria euclidiana.

Uma vez que  $d_E(O, P) = 2$ , obtemos

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = 2.$$

Na Figura 3.2, observaremos graficamente a circunferência na geometria Euclidiana com centro em  $O = (3, 3)$  e raio igual a 2.

**Figura 3.2:** Circunferência euclidiana com centro  $O$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Na geometria do táxi.

Uma vez que  $d_T(O, P) = 2$ , obtemos

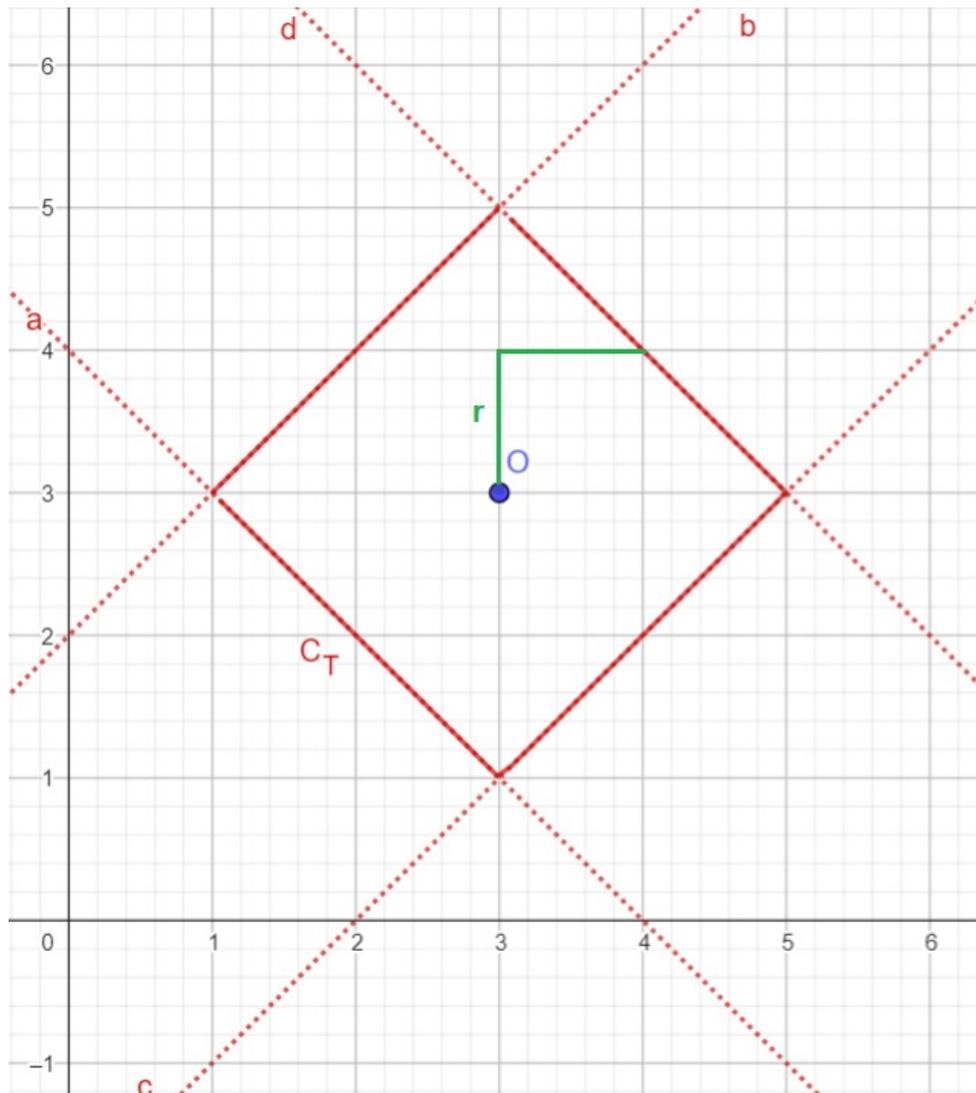
$$|x-3| + |y-3| = 2.$$

Analisando essa equação modular em cada intervalo:

- (a) Para  $x < 3$  e  $y < 3$ :  $(-x + 3) + (-y + 3) = 2 \implies y = -x + 4$ .
- (b) Para  $x < 3$  e  $y \geq 3$ :  $(-x + 3) + (y - 3) = 2 \implies y = x + 2$ .
- (c) Para  $x \geq 3$  e  $y < 3$ :  $(x - 3) + (-y + 3) = 2 \implies y = x - 2$ .
- (d) Para  $x \geq 3$  e  $y \geq 3$ :  $(x - 3) + (y - 3) = 2 \implies y = -x + 8$ .

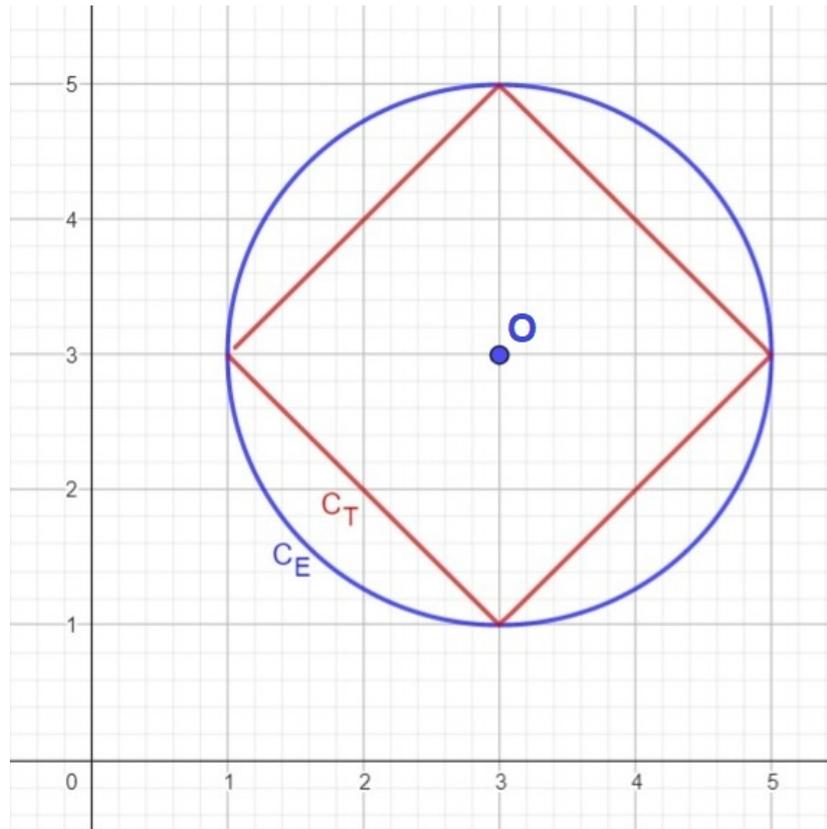
Traçando as retas (a), (b), (c) e (d), podemos visualizar a circunferência na geometria do táxi com raio igual a 2, conforme a Figura 3.3.

**Figura 3.3:** Circunferência do táxi com centro  $O$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para efeito de comparação, observaremos as circunferências na geometria euclidiana e na geometria do táxi em um mesmo plano, conforme mostrado na Figura 3.4.

**Figura 3.4:** Circunferências euclidiana ( $C_E$ ) e do táxi ( $C_T$ ) com centro  $O$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.2.1 Relação entre as áreas das circunferências euclidiana e do táxi

O objetivo agora é calcularmos a área da circunferência na geometria do táxi e a compararmos com a área da circunferência na geometria euclidiana. Para isso, vamos encontrar inicialmente o valor de  $\pi$  na geometria do táxi.

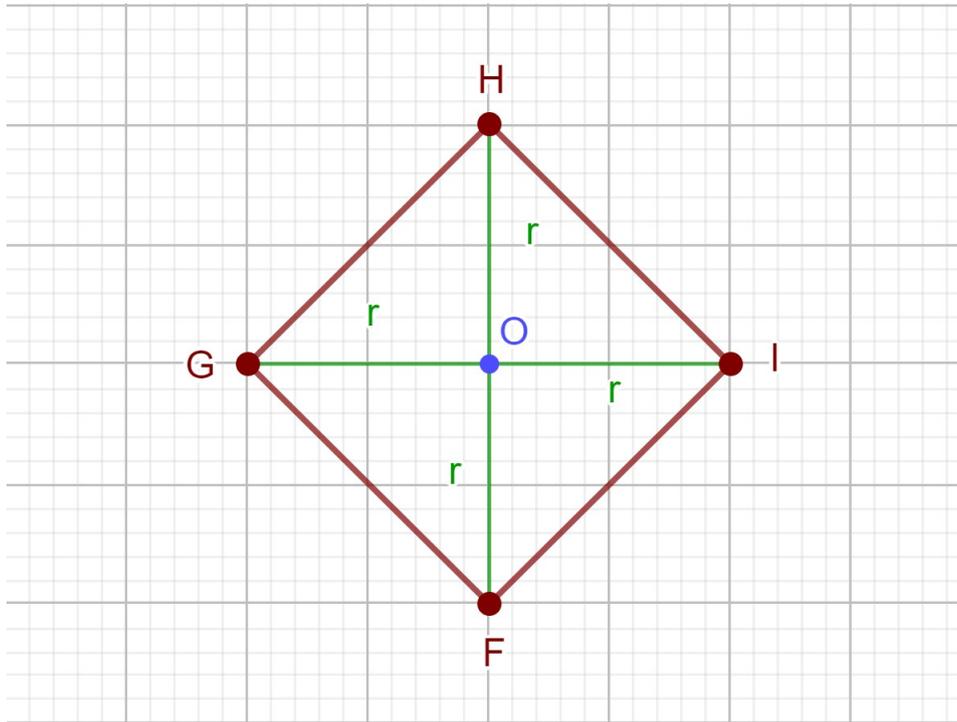
Sabemos que, na geometria euclidiana, o valor de  $\pi$  é uma constante que encontramos ao dividir o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro. Na geometria do táxi, vamos calcular o valor de  $\pi$  da mesma maneira mas o chamaremos de  $\pi_T$ .

Seja  $O$  o centro da circunferência do táxi e os pontos  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $I$  conforme a Figura 3.5.

Também pela Figura 3.5, podemos perceber que  $d_T(O, F) = d_T(O, G) = d_T(O, H) = d_T(O, I) = r$ , com  $r$  o raio da circunferência do táxi, e usando a definição de distância do táxi, podemos afirmar que  $d_T(F, G) = d_T(G, H) = d_T(H, I) = d_T(I, F) = 2r$ .

Assim, temos que o comprimento da circunferência do táxi será dado por

$$d_T(F, G) + d_T(G, H) + d_T(H, I) + d_T(I, F) = 8r.$$

**Figura 3.5:** Circunferência do táxi ( $C_T$ ) e o valor de  $\pi_T$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como,  $\pi_T$  é o quociente entre o comprimento da circunferência do táxi e o seu diâmetro, podemos escrever

$$\pi_T = \frac{2\pi_T \cdot r}{2r} = \frac{8r}{2r} = 4.$$

Portanto, o valor de  $\pi_T$  é igual a 4.

A seguir, faremos uma analogia entre a área da circunferência na geometria do táxi e a área da circunferência na geometria euclidiana as quais denotaremos por  $A_{C_T}$  e  $A_{C_E}$ , respectivamente.

Sabemos que a área da circunferência na geometria euclidiana é dada por

$$A_{C_E} = \pi \cdot r^2.$$

Sendo na geometria do táxi a circunferência representada graficamente por um quadrado, cujas diagonais são paralelas aos eixos coordenados, ela pode ser dividida em quatro triângulos retângulos isósceles cujos lados iguais medem  $r$ , conforme a Figura 3.5. É importante observar que para calcularmos a área de um triângulo na geometria do táxi usamos a mesma fórmula da geometria euclidiana, no caso em que tanto a base quanto a altura são medidas horizontais ou verticais, de modo que esses segmentos são os mesmos, tanto para a distância do táxi quanto para a distância euclidiana.

Desse modo podemos calcular a área da circunferência do táxi do seguinte modo

$$A_{C_T} = \frac{r \cdot r}{2} \cdot 4 = \frac{\pi_T}{2} \cdot r^2.$$

Considerando o mesmo raio ( $r$ ), ao compararmos as áreas das circunferências euclidiana e do táxi é possível percebermos que  $A_{C_E}$  é, aproximadamente, 57% maior do que  $A_{C_T}$ .

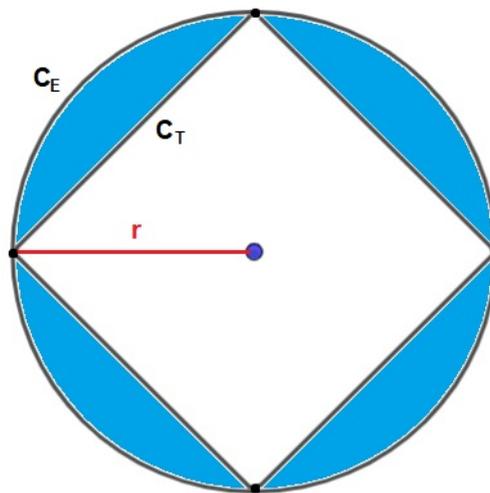
$$\frac{A_{C_E} - A_{C_T}}{A_{C_T}} \cdot 100 = \frac{\pi \cdot r^2 - \frac{\pi_T \cdot r^2}{2}}{\frac{\pi_T \cdot r^2}{2}} \cdot 100$$

Como  $\pi_T = 4$  e  $\pi \cong 3,14$ , temos

$$\frac{3,14 \cdot r^2 - \frac{4 \cdot r^2}{2}}{\frac{4 \cdot r^2}{2}} \cdot 100 \cong \frac{3,14 \cdot r^2 - 2 \cdot r^2}{2 \cdot r^2} \cdot 100 \cong \frac{1,14 \cdot r^2}{2 \cdot r^2} \cdot 100 \cong 57\%.$$

A região destacada de azul na Figura 3.6 mostra a diferença entre as áreas das circunferências nas geometrias euclidiana e do táxi.

**Figura 3.6:** Diferença entre as áreas das circunferências euclidiana e do táxi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.3 Elipse

A elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$ , chamados focos, é igual a uma constante  $2k$ , maior do que a distância entre os focos.

Logo, dados os pontos  $F_1 = (a, b)$ ,  $F_2 = (c, d)$  e  $P = (x, y)$ , e a constante  $k \in \mathbb{R}$ , temos

$$E_E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_E(F_1, P) + d_E(F_2, P) = 2k\};$$

$$E_T = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_T(F_1, P) + d_T(F_2, P) = 2k\}.$$

Assim,

$$E_E \equiv \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = 2k;$$

$$E_T \equiv |x-a| + |y-b| + |x-c| + |y-d| = 2k,$$

onde  $E_E$  e  $E_T$  representam algebricamente a elipse euclidiana e a elipse do táxi, respectivamente.

Analisemos a diferença gráfica entre as elipses euclidiana ( $E_E$ ) e do táxi ( $E_T$ ) através do exemplo a seguir.

**Exemplo 3.2** Dados os focos  $F_1 = (2, 3)$  e  $F_2 = (6, 3)$  e a constante  $k = 3$ , determine os pontos  $P = (x, y)$  do plano que atendem as equações  $d_E(F_1, P) + d_E(F_2, P) = 6$  e  $d_T(F_1, P) + d_T(F_2, P) = 6$ .

### Solução.

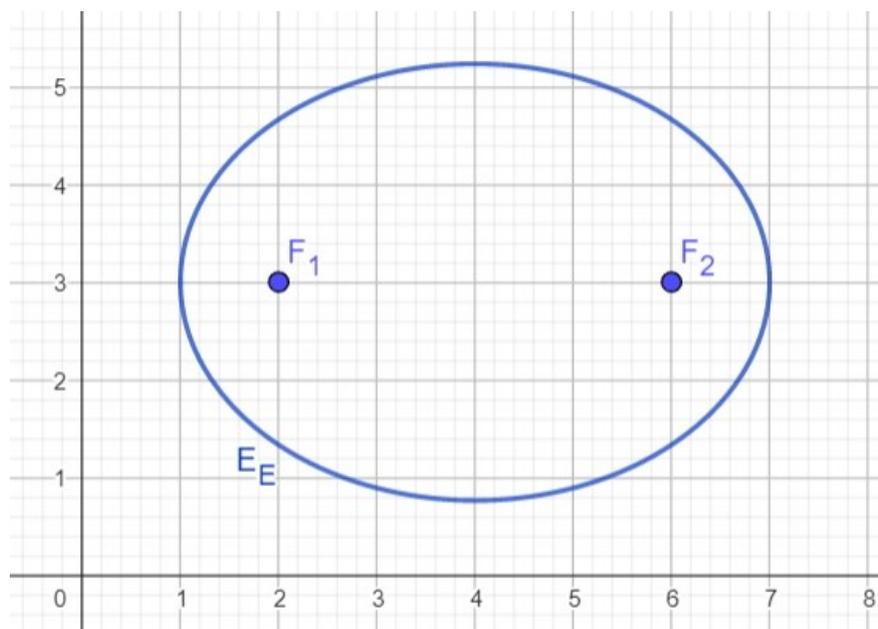
- Na geometria euclidiana.

Uma vez que  $d_E(F_1, P) + d_E(F_2, P) = 6$ , obtemos

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2} = 6.$$

A Figura 3.7 mostra graficamente a elipse na geometria euclidiana com os focos  $F_1$  e  $F_2$ .

**Figura 3.7:** Elipse euclidiana.



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Na geometria do táxi.

Uma vez que  $d_T(F_1, P) + d_T(F_2, P) = 6$ , obtemos

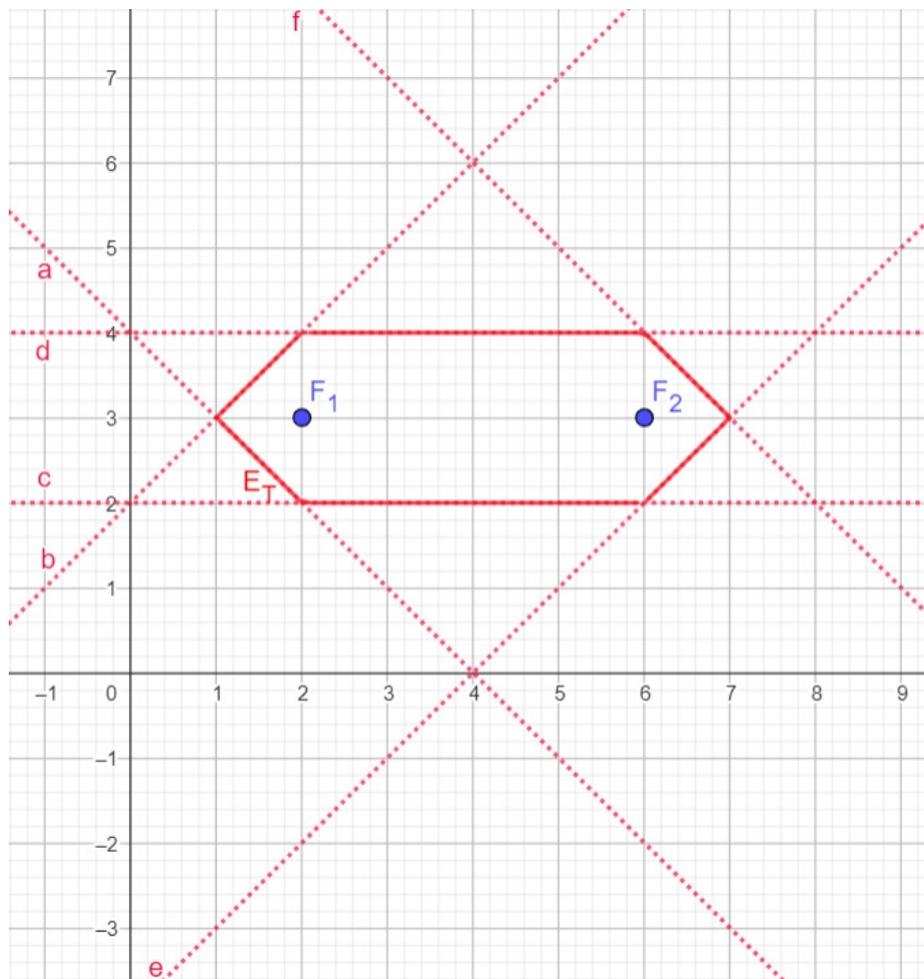
$$|x - 2| + |y - 3| + |x - 6| + |y - 3| = 6.$$

Analisando essa equação modular em cada intervalo:

- (a) Para  $x < 2$  e  $y < 3$ :  $(-x + 2) + (-y + 3) + (-x + 6) + (-y + 3) = 6 \implies y = -x + 4$ ;
- (b) Para  $x < 2$  e  $y \geq 3$ :  $(-x + 2) + (y - 3) + (-x + 6) + (y - 3) = 6 \implies y = x + 2$ ;
- (c) Para  $2 \leq x < 6$  e  $y < 3$ :  $(x - 2) + (-y + 3) + (-x + 6) + (-y + 3) = 6 \implies y = 2$ ;
- (d) Para  $2 \leq x < 6$  e  $y \geq 3$ :  $(x - 2) + (y - 3) + (-x + 6) + (y - 3) = 6 \implies y = 4$ ;
- (e) Para  $x \geq 6$  e  $y < 3$ :  $(x - 2) + (-y + 3) + (x - 6) + (-y + 3) = 6 \implies y = x - 4$ ;
- (f) Para  $x \geq 6$  e  $y \geq 3$ :  $(x - 2) + (y - 3) + (x - 6) + (y - 3) = 6 \implies y = -x + 10$ .

Traçando as retas (a), (b), (c), (d), (e) e (f), podemos visualizar a elipse na geometria do táxi, conforme a Figura 3.8.

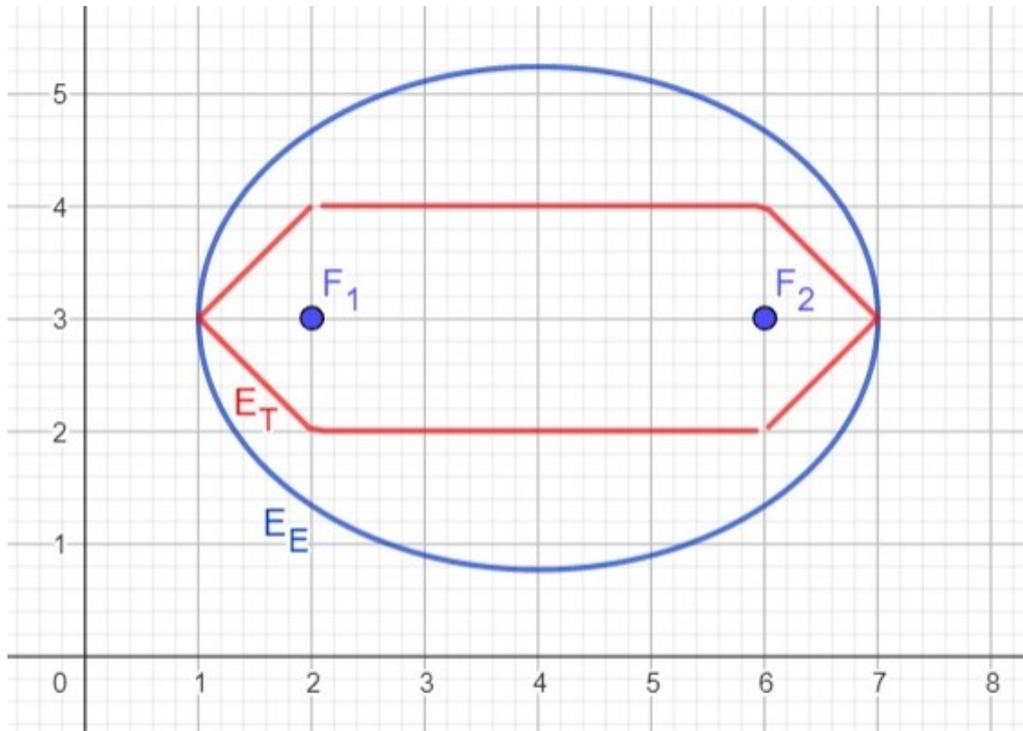
**Figura 3.8:** Elipse do táxi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para efeito de comparação, observaremos as elipses na geometria euclidiana e na geometria do táxi em um mesmo plano, conforme mostrado na Figura 3.9.

**Figura 3.9:** Elipses euclidiana ( $E_E$ ) e do táxi ( $E_T$ ).



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.4 Parábola

Dada uma reta  $L$  e um ponto  $F$ , que não pertence a  $L$ , os quais chamamos de diretriz e foco, respectivamente, definimos a parábola como o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a  $F$  e a  $L$  é igual.

Dessa forma, dado  $L \equiv mx + ny + c = 0$  e  $F = (a, b)$  um ponto que não pertence a reta  $L$ , temos

$$P_E = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid d_E(Q, F) = d_E(Q, L)\};$$

$$P_T = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid d_T(Q, F) = d_T(Q, L)\}.$$

Uma vez que dado um ponto  $Q = (x_Q, y_Q)$  e uma reta  $L \equiv mx + ny + c = 0$ , podemos escrever:

$$d_E(Q, L) = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Para mostrar a fórmula de  $d_T(Q, L)$ , temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.3** Dado o ponto  $Q = (x_Q, y_Q)$  e a reta  $L \equiv mx + ny + c = 0$ , na geometria do táxi, temos que a distância de  $Q$  à reta  $L$  é dada por

$$d_T(Q, L) = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\max\{|m|, |n|\}}.$$

**Demonstração.** Na geometria do táxi, a distância de um ponto a uma reta é definida como

$$d_T(Q, L) = \min_{X \in L} \{d_T(Q, X)\}.$$

Consideremos  $X_1$  e  $X_2$  pontos de intersecção da reta  $L$  com as retas  $x = x_Q$  e  $y = y_Q$ , respectivamente. Logo,

$$d_T(Q, L) = \min \{d_T(Q, X_1), d_T(Q, X_2)\}.$$

Pela forma como foram definidos os pontos  $X_1$  e  $X_2$ , obtemos

$$X_1 = \left(x_Q, -\frac{mx_Q}{n} - \frac{c}{n}\right) \text{ e } X_2 = \left(-\frac{ny_Q}{m} - \frac{c}{m}, y_Q\right).$$

Assim,

$$d_T(Q, X_1) = |x_Q - x_Q| + \left|y_Q + \frac{mx_Q}{n} + \frac{c}{n}\right| = \left|\frac{mx_Q + ny_Q + c}{n}\right|;$$

$$d_T(Q, X_2) = \left|x_Q + \frac{ny_Q}{m} + \frac{c}{m}\right| + |y_Q - y_Q| = \left|\frac{mx_Q + ny_Q + c}{m}\right|.$$

Logo,

$$d_T(Q, L) = \min \left\{ \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{|n|}, \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{|m|} \right\}, \text{ se } m \neq 0 \text{ e } n \neq 0;$$

$$d_T(Q, L) = \left|\frac{ny_Q + c}{n}\right|, \text{ se } m = 0;$$

$$d_T(Q, L) = \left|\frac{mx_Q + c}{m}\right|, \text{ se } n = 0.$$

Portanto,

$$d_T(Q, L) = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\max\{|m|, |n|\}}.$$

■

Desse modo, utilizando as definições de distância euclidiana e de distância do táxi, vistas anteriormente, temos

$$P_E \equiv \sqrt{(x_Q - a)^2 + (y_Q - b)^2} = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}};$$

$$P_T \equiv |x_Q - a| + |y_Q - b| = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\max\{|m|, |n|\}},$$

onde  $P_E$  e  $P_T$  representam algebricamente a parábola euclidiana e a parábola do táxi, respectivamente.

Observemos a diferença gráfica entre as parábolas euclidiana ( $P_E$ ) e do táxi ( $P_T$ ) através do exemplo a seguir.

**Exemplo 3.4** Dados o foco  $F = (3, 2)$  e a reta diretriz  $L \equiv y = 6$ , determine os pontos  $Q = (x, y)$  do plano que atendem as equações  $d_E(Q, F) = d_E(Q, L)$  e  $d_T(Q, F) = d_T(Q, L)$ .

### Solução.

- Na geometria euclidiana.

Uma vez que  $d_E(Q, F) = d_E(Q, L)$ , substituimos os valores dados e obtemos

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = \frac{|y - 6|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}.$$

Elevando os dois lados da igualdade anterior ao quadrado, temos

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = (y - 6)^2.$$

Desenvolvendo os produtos notáveis e simplificando a equação, ficamos com

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = y^2 - 12y + 36 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{23}{8}.$$

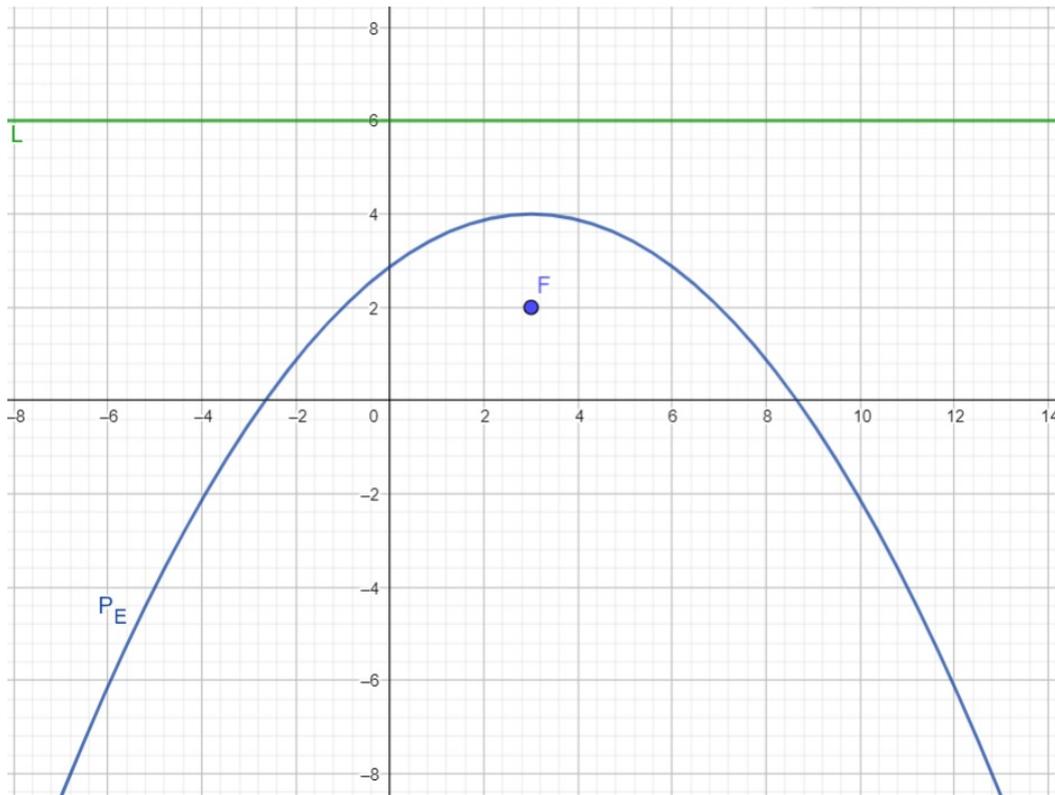
A Figura 3.10 mostra graficamente a parábola na geometria euclidiana e sua reta diretriz.

- Na geometria do táxi.

Uma vez que  $d_T(Q, F) = d_T(Q, L)$ , substituimos os valores dados e obtemos

$$|x - 3| + |y - 2| = \frac{|y - 6|}{\max\{|0|, |1|\}}.$$

Assim, ficamos com  $|x - 3| + |y - 2| = |y - 6|$ .

Figura 3.10: Parábola euclidiana e sua reta diretriz  $L$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

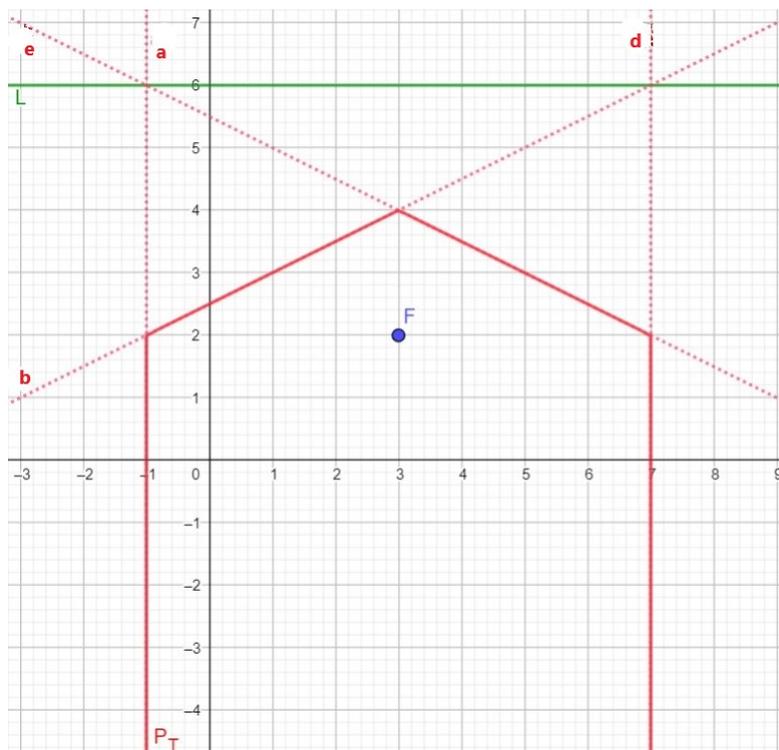
Analisando a equação modular, vista anteriormente, em cada intervalo, obtemos:

- (a) Para  $x < 3$  e  $y < 2$  :  $(-x + 3) + (-y + 2) = (-y + 6) \implies x = -1$ ;
- (b) Para  $x < 3$  e  $2 \leq y < 6$  :  $(-x + 3) + (y - 2) = (-y + 6) \implies y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ;
- (c) Para  $x < 3$  e  $y \geq 6$  :  $(-x + 3) + (y - 2) = (y - 6) \implies x = 7$  (não é uma solução);
- (d) Para  $x \geq 3$  e  $y < 2$  :  $(x - 3) + (-y + 2) = (-y + 6) \implies x = 7$ ;
- (e) Para  $x \geq 3$  e  $2 \leq y < 6$  :  $(x - 3) + (y - 2) = (-y + 6) \implies y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$ ;
- (f) Para  $x \geq 3$  e  $y \geq 6$  :  $(x - 3) + (y - 2) = (y - 6) \implies x = -1$  (não é uma solução).

Traçando as retas (a), (b), (d) e (e), podemos visualizar a parábola na geometria do táxi, conforme a Figura 3.11.

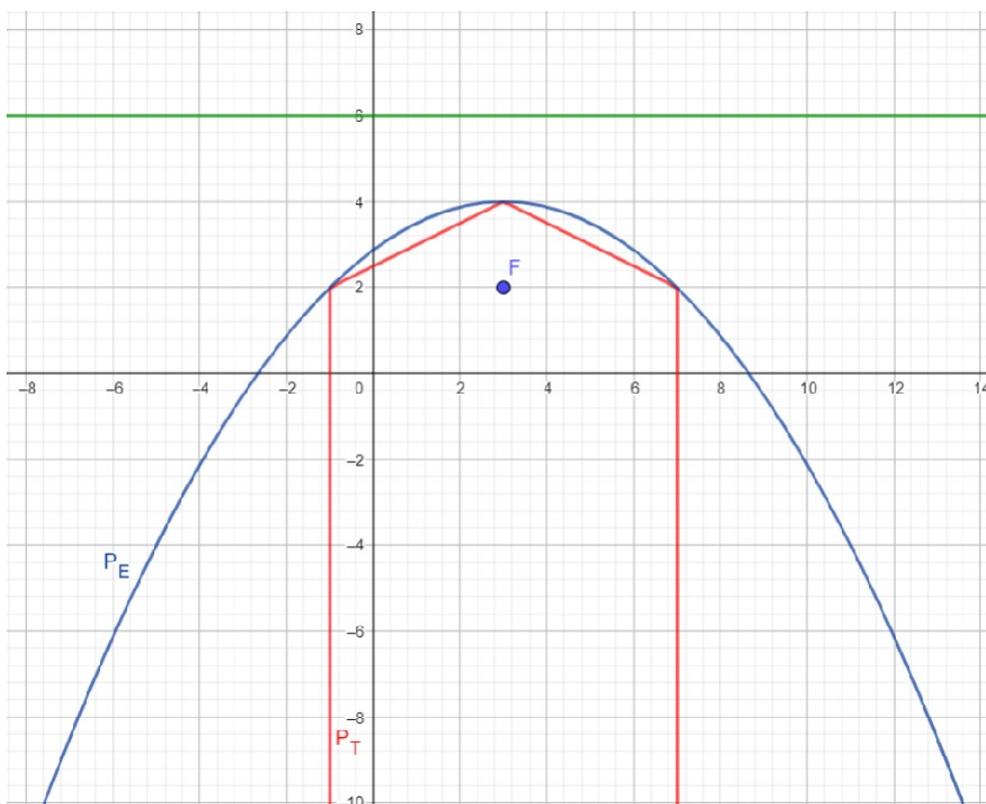
Para efeito de comparação, observaremos as parábolas na geometria euclidiana e na geometria do táxi em um mesmo plano, conforme mostrado na Figura 3.12.

Figura 3.11: Parábola do táxi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 3.12: Parábolas euclidiana ( $P_E$ ) e do táxi ( $P_T$ ).



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.5 Hipérbole

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos  $P = (x, y)$  do plano para os quais o módulo da diferença das distâncias de  $P$  aos focos  $F_1$  e  $F_2$  é igual a um valor constante  $2k$ .

Logo, dados os pontos  $F_1 = (a, b)$  e  $F_2 = (c, d)$ , e a constante  $k \in \mathbb{R}$ , temos

$$H_E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |d_E(P, F_1) - d_E(P, F_2)| = 2k\};$$

$$H_T = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |d_T(P, F_1) - d_T(P, F_2)| = 2k\}.$$

Assim,

$$H_E \equiv \left| \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} \right| = 2k;$$

$$H_T \equiv \left| (|x-a| + |y-b|) - (|x-c| + |y-d|) \right| = 2k,$$

onde  $H_E$  e  $H_T$  representam algebricamente a hipérbole euclidiana e a hipérbole do táxi, respectivamente.

A diferença gráfica entre as hipérbolas euclidiana ( $H_E$ ) e do táxi ( $H_T$ ) será analisada através do exemplo a seguir.

**Exemplo 3.5** Dados os focos  $F_1 = (-1, 2)$  e  $F_2 = (2, -1)$  e a constante  $k = 1$ , determine os pontos  $P = (x, y)$  do plano que atendem as equações  $|d_E(P, F_1) - d_E(P, F_2)| = 2k$  e  $|d_T(P, F_1) - d_T(P, F_2)| = 2k$ .

#### Solução.

- Na geometria euclidiana.

Uma vez que  $|d_E(P, F_1) - d_E(P, F_2)| = 2k$ , obtemos

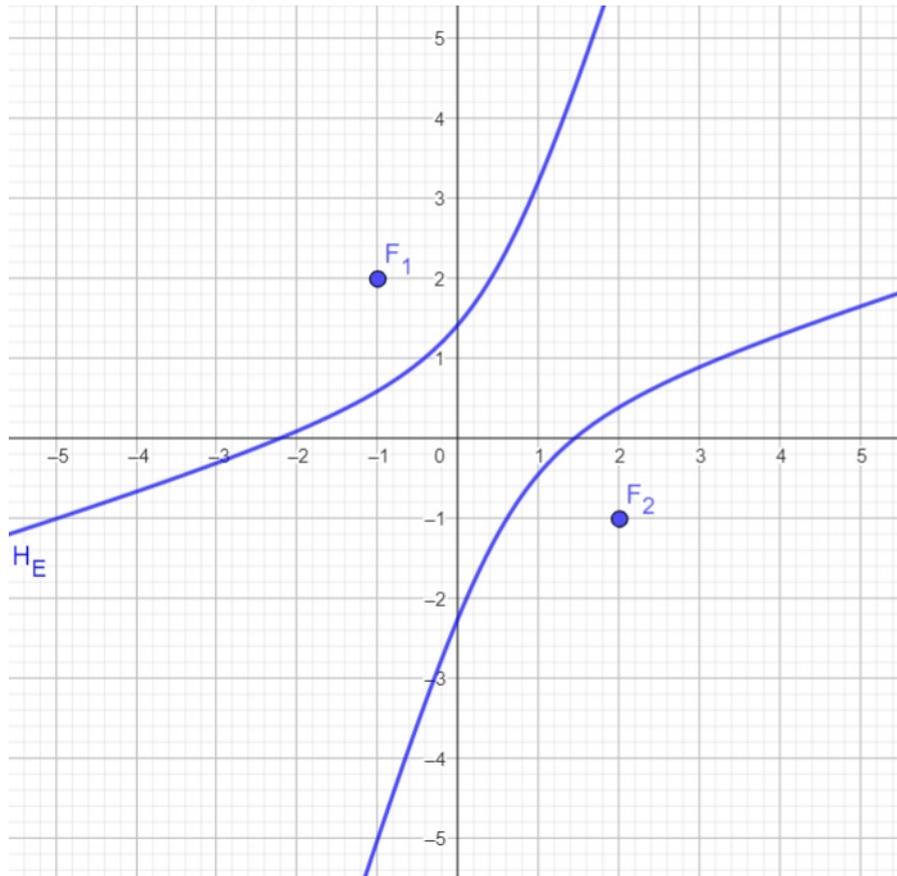
$$\left| \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \right| = 2.$$

Graficamente, a Figura 3.13 mostra a hipérbole euclidiana com os focos  $F_1$  e  $F_2$ .

- Na geometria do táxi.

Uma vez que  $|d_T(P, F_1) - d_T(P, F_2)| = 2k$ , obtemos

$$\left| |x+1| + |y-2| - |x-2| - |y+1| \right| = 2.$$

Figura 3.13: Hipérbole euclidiana com focos  $F_1$  e  $F_2$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

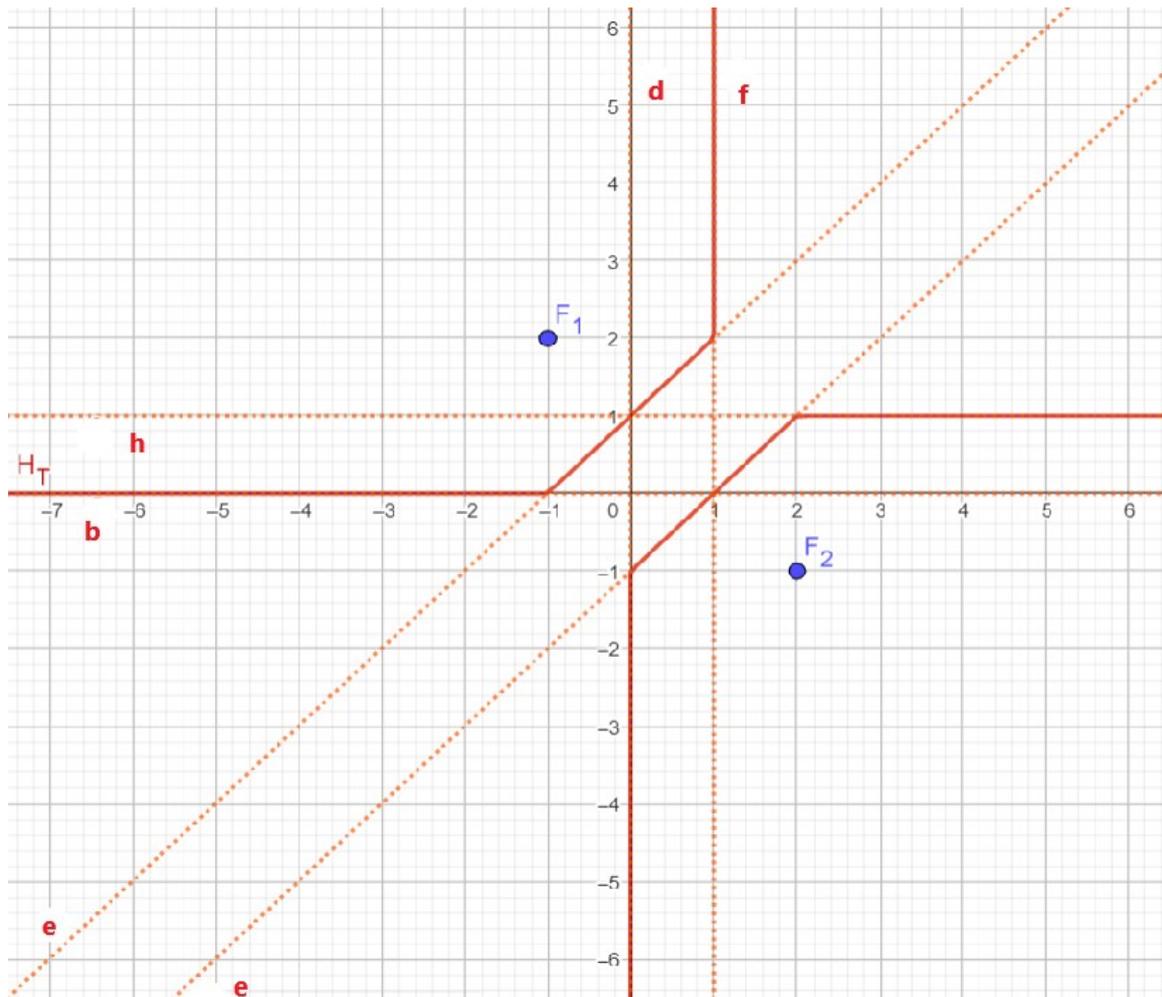
Analisando a equação modular, vista anteriormente, em cada intervalo, ficamos com:

- (a) Para  $x < -1$  e  $y < -1$ :  $|(-x-1) + (-y+2) - (-x+2) - (-y-1)| = 2 \implies |0| = 2$  (não existe solução);
- (b) Para  $x < -1$  e  $-1 \leq y < 2$ :  $|(-x-1) + (-y+2) - (-x+2) - (y+1)| = 2 \implies |-2y-2| = 2 \implies y = -2$  (não existe solução) ou  $y = 0$ ;
- (c) Para  $x < -1$  e  $y \geq 2$ :  $|(-x-1) + (y-2) - (-x+2) - (y+1)| = 2 \implies |-6| = 2$  (não existe solução);
- (d) Para  $-1 \leq x < 2$  e  $y < -1$ :  $|(x+1) + (-y+2) - (-x+2) - (-y-1)| = 2 \implies |2x+2| = 2 \implies x = 0$  ou  $x = -2$  (não existe solução);
- (e) Para  $-1 \leq x < 2$  e  $-1 \leq y < 2$ :  $|(x+1) + (-y+2) - (-x+2) - (y+1)| = 2 \implies |2x-2y| = 2 \implies y = x-1$  ou  $y = x+1$ ;
- (f) Para  $-1 \leq x < 2$  e  $y \geq 2$ :  $|(x+1) + (y-2) - (-x+2) - (y+1)| = 2 \implies |2x-4| = 2 \implies x = 3$  (não existe solução) ou  $x = 1$ ;
- (g) Para  $x \geq 2$  e  $y < -1$ :  $|(x+1) + (-y+2) - (x-2) - (-y-1)| = 2 \implies |6| = 2$  (não existe solução);

- (h) Para  $x \geq 2$  e  $-1 \leq y < 2$ :  $|(x+1) + (-y+2) - (x-2) - (y+1)| = 2 \implies |-2y+4| = 2 \implies y = 1$  ou  $y = 3$  (não existe solução);
- (i) Para  $x \geq 2$  e  $y \geq 2$ :  $|(x+1) + (y-2) - (x-2) - (y+1)| = 2 \implies |0| = 2$  (não existe solução).

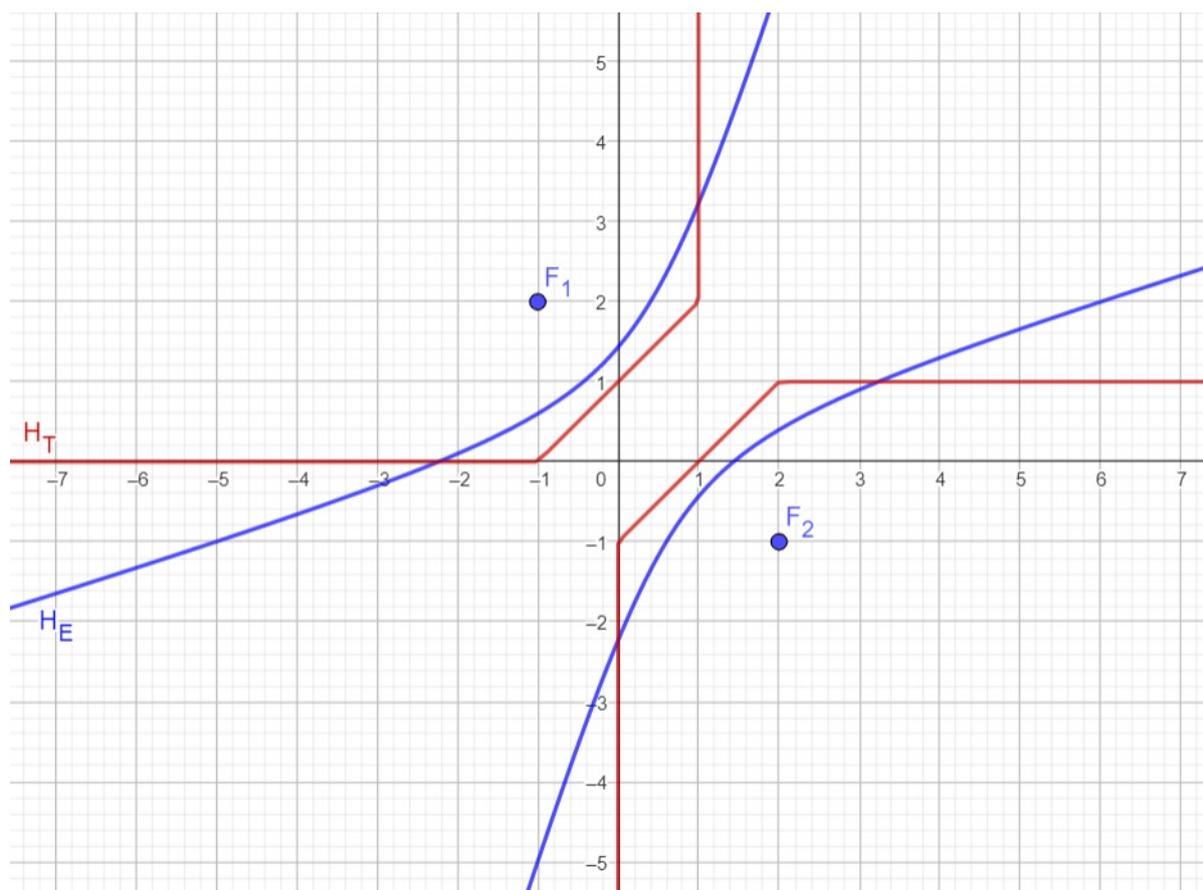
Traçando as retas (b), (d), (e), (f) e (h), podemos visualizar a hipérbole na geometria do táxi, conforme a Figura 3.14.

**Figura 3.14:** Hipérbole do táxi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para efeito de comparação, observaremos as hipérboles na geometria euclidiana e na geometria do táxi em um mesmo plano, conforme mostrado na Figura 3.15.

Figura 3.15: Hipérboles euclidiana ( $H_E$ ) e do táxi ( $H_T$ ).

Fonte: Elaborado pelo autor.

# Aplicação da geometria do táxi na Educação Básica

---

Neste capítulo, fundamentaremos a importância da sequência didática como instrumento pedagógico para o ensino e a aprendizagem. Nessa perspectiva, disponibilizaremos uma sequência didática elaborada para apresentar a geometria do táxi aos alunos da Educação Básica, especificamente para as turmas do 3º ano do Ensino Médio. Essa sequência didática está dividida em três atividades distintas, porém todas têm em comum a comparação das geometrias euclidiana e do táxi. Para melhor compreensão das atividades, utilizaremos, além de lápis, caderno e malha quadriculada impressa, recursos manipuláveis como o Geoplano e tecnológicos como o software GeoGebra.

### 4.1 A importância da sequência didática

Neste trabalho, optamos por elaborar uma sequência didática para melhor organizar as atividades, uma vez que vários teóricos a defendem como um excelente instrumento didático-pedagógico. [21, Zabala] afirma que a sequência didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos". Portanto, ela se mostra como um dos caminhos mais acertados para aprimorar a prática educativa.

Outras autoras que corroboram com o mesmo conceito são [18, Peretti e Costa], que afirmam

A sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que podem levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido. [18, Peretti e Costa, 2013, p.6]

Além disso, elas sugerem que, ao iniciar uma sequência didática, seja feito um diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos. A partir desses conhecimentos, o planejamento das aulas deve ser estruturado de forma desafiadora, seja por meio de situações-problema instigantes ou jogos pedagógicos, com o objetivo de levá-los a refletir e analisar os conteúdos propostos. Em resumo, as atividades da sequência didática devem ser práticas, lúdicas e com materiais diferenciados, proporcionando assim a construção do conhecimento.

Desta forma, a sequência didática proposta neste trabalho será composta por três atividades contextualizadas e lúdicas. Para isso, foram criados personagens fictícios em um ambiente de uma cidade ideal, apresentando situações cotidianas para a abordagem de conteúdos matemáticos de forma que as atividades sejam ordenadas, estruturadas e articuladas.

Segundo [3, Coelho e Scheid]

Os materiais didáticos manipuláveis (MD) constituem um importante recurso didático a serviço do professor em sala de aula. Estes materiais podem tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa. [3, Coelho e Scheid, 2012, p.2]

Para o desenvolvimento da primeira atividade da sequência didática, utilizaremos o Geoplano, que segundo [13, Machado], é "um recurso didático-pedagógico dinâmico e manipulativo", ou seja, possibilita a construção, movimentação e desfazer formas geométricas. Ele é formado por uma placa de madeira ou material similar (como o MDF, que é mais leve) em que pregos são alinhados formando uma malha quadriculada. Nessa malha, colocaremos elásticos ou barbantes coloridos para destacar as distâncias citadas na atividade. Além disso, existe a possibilidade de utilizar a versão do Geoplano *online* no *site* <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>.

Além disso, pensando nos estudantes com deficiência visual, o Geoplano deve ser adaptado, colocando a malha quadriculada com alto relevo, possibilitando o toque, a participação e o desenvolvimento da atividade pelo estudante. Essa adaptação é sugerida pelas autoras [20, Sá, Campos e Silva], que apontam em seu trabalho alguns critérios para a elaboração de materiais didáticos destinados a estudantes com deficiência visual.

O relevo deve ser facilmente percebido pelo tato e, sempre que possível, constituir-se de diferentes texturas para melhor destacar as partes componentes do todo. Contrastes do tipo liso/áspero, fino/espesso, permitem distinções adequadas. O material não deve provocar rejeição ao manuseio e ser resistente para que não se estrague com facilidade e resista à exploração tátil e ao manuseio constante. Deve ser simples e de manuseio fácil, proporcionando uma prática utilização e não deve oferecer perigo para os alunos. [20, Sá, Campos e Silva, 2007, p.27]

Considerando a realidade atual e as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, percebemos impactos de maneiras distintas decorrentes dos avanços tecnológicos, seja pelas exigências do mercado de trabalho, seja pela potencialidade das redes sociais, entre outros aspectos. Nessa perspectiva, utilizaremos o recurso didático tecnológico no desenvolvimento da segunda e terceira atividades da sequência didática. Ressalta-se que a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) estimula o uso de recursos tecnológicos nas práticas docentes, como aplicativos, calculadoras e softwares.

Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso às tecnologias digitais e aplicativos tanto para a instigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior (Ensino Fundamental). [2, Brasil, 2018, p.528]

Desta forma, na segunda e terceira atividades, utilizaremos o software GeoGebra, um recurso didático tecnológico que cada vez mais professores aderem em suas práticas docentes. Segundo [15, Nascimento],

O GeoGebra está rapidamente ganhando popularidade no ensino e aprendizagem da matemática em todo o mundo. Atualmente, o GeoGebra é traduzido para 58 idiomas, utilizado em 190 países e baixado por aproximadamente 300.000 usuários em cada mês. Esta utilização crescente obrigou o estabelecimento do *International GeoGebra Institute* (IGI), que serve como uma organização virtual para apoiar GeoGebra locais iniciativas e institutos. [15, Nascimento, 2012, p.113]

Embora muitas escolas e estudantes não tenham recursos tecnológicos disponíveis, como computadores, o software GeoGebra vem ganhando mais popularidade entre estudantes e professores. Isso se deve ao fato de que estamos vivenciando uma nova realidade de interação entre pessoas e tecnologia, conforme afirmado por [16, Oliveira].

Nos dias atuais a interação entre matemática e tecnologia é ainda mais importante na Educação Básica, pois estamos lidando com alunos totalmente inseridos no ambiente virtual, e por isso, podemos utilizar deste meio que já é familiarizado por eles. [16, Oliveira, 2020, p.42]

Dessa forma, desenvolveremos a segunda e terceira atividade utilizando o software GeoGebra, com a perspectiva de proporcionar a interação entre os estudantes e o ambiente

virtual para visualizar e comparar as diferenças entre a geometria euclidiana e a geometria do táxi. Nessa etapa, os estudantes terão a oportunidade de observar os gráficos e as equações de cada uma das cônicas apresentadas nas atividades.

## 4.2 Sequência didática proposta

A sequência didática proposta neste trabalho tem como objetivo geral proporcionar aos estudantes do Ensino Médio uma experiência prática e interativa no estudo da geometria, utilizando como contexto o sistema de coordenadas cartesianas e o conceito de distância em forma de "táxi". Dessa forma, oportunizaremos a exploração dos conceitos de geometria do táxi e das cônicas de forma integrada. Além disso, o projeto visa envolver os estudantes em atividades que estimulem o raciocínio lógico e a compreensão dos conceitos geométricos por meio da resolução de problemas aplicados em situações reais ou contextualizadas.

Esta sequência didática está dividida em três atividades que serão apresentadas e detalhadas com sugestões e comentários, visando a apreciação dos professores que desejam aplicá-las. O roteiro das atividades para impressão estará disponível em anexo. Vale lembrar que o público-alvo são os estudantes da Educação Básica, mais especificamente do terceiro ano do Ensino Médio.

Para o desenvolvimento dessas atividades, ressalta-se a importância do professor avaliar previamente se os estudantes possuem os pré-requisitos necessários, tais como:

- localizar um ponto no plano cartesiano;
- calcular a distância euclidiana entre dois pontos;
- identificar um ponto médio de um segmento;
- calcular o valor absoluto;
- calcular o fatorial;
- calcular a permutação com repetição;
- resolver uma equação modular;
- calcular áreas de triângulo e círculo;
- identificar uma função linear de primeiro grau;
- resolver uma equação do primeiro grau;

- reconhecer cada uma das cônicas como um lugar geométrico;
- identificar e distinguir as equações e os gráficos das cônicas (circunferência, elipse, hipérbole e parábola).

Além de estudarmos os conteúdos listados como pré-requisitos, também exploraremos alguns deles, como a distância entre dois pontos, ponto médio, equações e gráficos da circunferência, elipse, hipérbole e parábola, mas na distância do táxi.

Além dos estudantes terem os pré-requisitos, o professor deverá ter recursos didáticos disponíveis, como:

- quadro branco ou lousa para exposição dos conceitos teóricos;
- papel e lápis para os alunos realizarem cálculos, desenhos e representações gráficas;
- materiais manipuláveis, como régua, compasso e papel milimetrado ou Geoplano, para auxiliar os alunos nas atividades práticas;
- computadores ou dispositivos móveis com acesso à internet para pesquisas complementares;
- material de apoio impresso ou digital contendo informações sobre a geometria do táxi e das cônicas;
- recursos visuais, como projeção de slides ou vídeos explicativos, para auxiliar na apresentação dos conceitos;
- softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, para facilitar a visualização e exploração dos conceitos.

Quanto às metodologias a serem utilizadas, caberá ao professor, de acordo com sua prática e realidade, escolher uma ou mais para aplicação da sequência didática. Abaixo, listamos algumas sugestões.

- Iniciar as atividades apresentando uma introdução teórica com uma breve explicação sobre o conceito de geometria do táxi.
- Apresentar exemplos práticos por meio de situações-problema reais e/ou contextualizadas em que a geometria do táxi é aplicada, como a determinação da distância percorrida por um táxi.

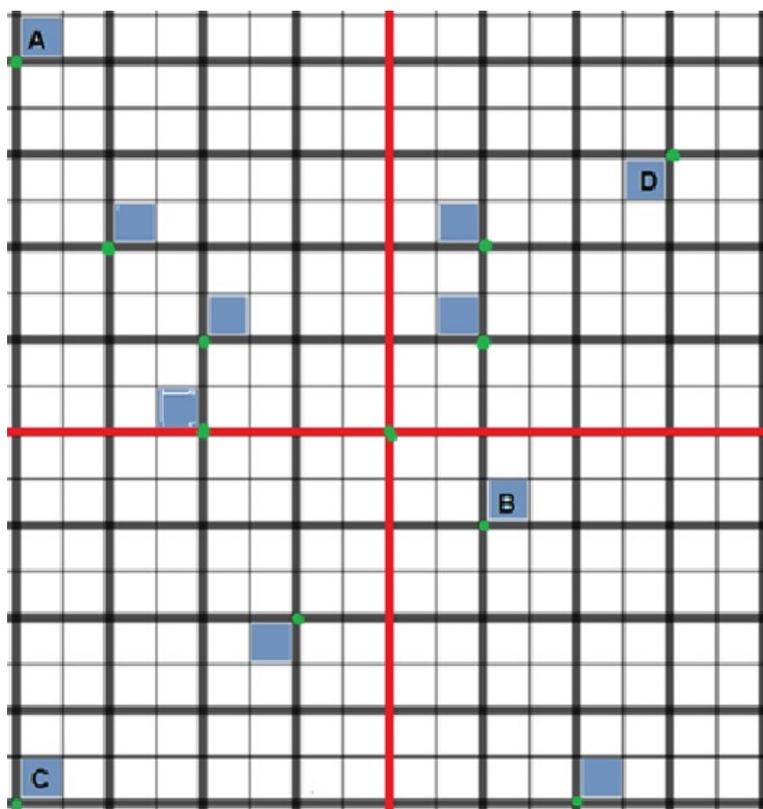
- Dividir os estudantes em grupos e propor desafios práticos a serem resolvidos utilizando a geometria do táxi.
- Promover discussões em grupo sobre as soluções encontradas pelos alunos, estimulando-os a realizar análises críticas com justificativas para suas respostas e também comparar as diferentes abordagens para a resolução de problemas.
- Propor uma atividade prática em que os estudantes possam aplicar a geometria do táxi em um contexto real.

Nas seções a seguir, serão apresentadas as atividades, cujos enunciados estão destacados em quadros e, em seguida, com os devidos comentários, sugestões e/ou orientações didáticas para auxiliar o professor na aplicação.

### 4.3 Primeira atividade

Esta atividade apresentará aos estudantes o conceito de distância do táxi e sua finalidade por meio de uma situação-problema contextualizada. Nessa situação, os personagens se deslocarão em uma cidade ideal, na qual todos os quarteirões são quadrados de mesma área, conforme ilustrado na Figura 4.1.

**Figura 4.1:** Cidade ideal.

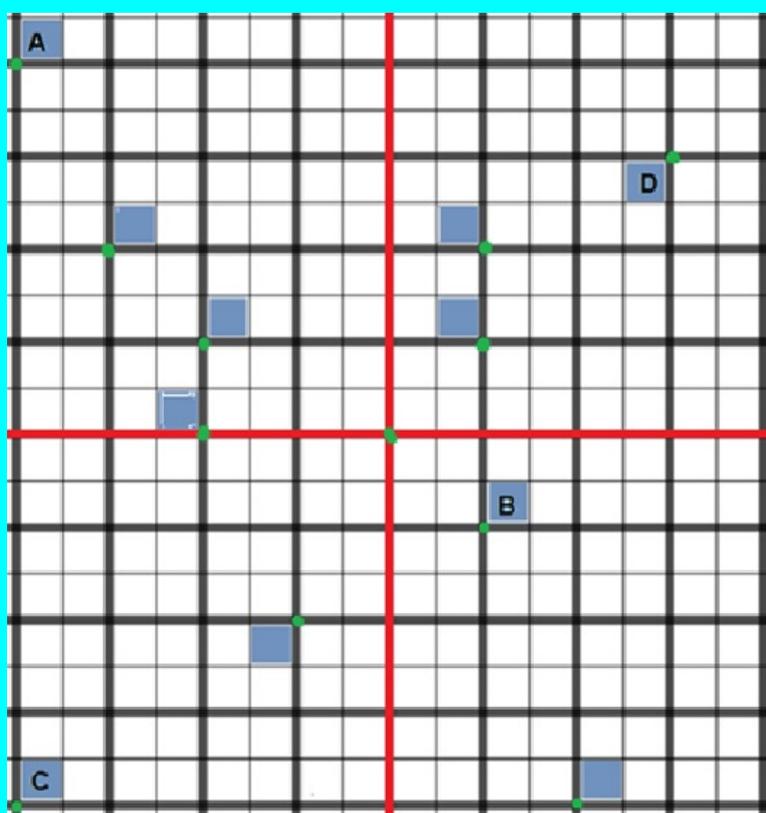


Fonte: Elaborado pelo autor.

No primeiro momento, o professor apresentará o roteiro da atividade impressa aos estudantes, orientando-os de que a Figura 4.1 representa o mapa de uma cidade ideal. Será explicado que os quarteirões são quadrados com mesma área, e que as ruas e avenidas são perpendiculares entre si. Além disso, duas ruas destacadas em vermelho que se cruzam perpendicularmente serão consideradas como os eixos de um plano cartesiano. Isso possibilitará a localização de moradias e estabelecimentos a partir do ponto de interseção dessas ruas, que servirá como ponto de referência ou origem.

Na Figura 4.2 está o mapa de uma cidade ideal, na qual os quarteirões são quadrados de mesma área. Nesse mapa, é possível visualizar duas ruas principais destacadas em vermelho, que se cruzam perpendicularmente, formando um plano cartesiano e facilitando a localização de moradias e estabelecimentos.

**Figura 4.2:** Cidade ideal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste mapa, estão destacadas as localizações das moradias de quatro amigos: Ana, Bruno, Carlos e Daniela, representados, respectivamente, pelos pontos A, B, C e D. Além disso, estão marcadas as localizações de alguns estabelecimentos da cidade, como supermercado, farmácia, clube, banco, escola, hospital e shopping.

Em seguida, com a leitura da introdução do enunciado da atividade, espera-se que os estudantes entendam o contexto dos pontos demarcados no mapa. Ou seja, os pontos representam as localizações das residências dos quatro amigos citados (Ana, Bruno, Carlos e

Daniela) e também alguns estabelecimentos da cidade, como supermercado, farmácia, clube, banco, escola, hospital e shopping.

A partir desse contexto apresentado na atividade, serão propostas questões que explorarão conteúdos matemáticos e desenvolverão habilidades nos estudantes, os quais detalharemos em cada item.

(a) Quais as coordenadas cartesianas das residências de Ana, Bruno, Carlos e Daniela?

Nesta questão, os estudantes devem determinar as coordenadas cartesianas das residências de Ana, Bruno, Carlos e Daniela no mapa da cidade ideal. Essa tarefa permitirá que eles pratiquem e apliquem os conceitos de localização no plano cartesiano, associando cada pessoa (representada por um ponto no mapa) a um par ordenado que indica sua posição em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . O objetivo é que os estudantes compreendam como as coordenadas cartesianas podem ser usadas para identificar e representar as posições de diferentes pontos no espaço.

(b) Marque na Figura 4.2 os pontos  $E = (-3, 2)$ ,  $F = (2, -4)$ ,  $G = (1, 2)$ ,  $H = (1, 1)$ ,  $I = (-2, 1)$ ,  $J = (-1, -2)$ ,  $L = (-2, 0)$  que representam, respectivamente, a localização do supermercado, farmácia, clube, banco, escola, hospital e shopping.

Neste item, serão localizados os pontos no plano cartesiano a partir das coordenadas indicadas no enunciado.

(c) Qual a distância do menor caminho entre as residências de:

- c.1) Ana e Bruno?
- c.2) Ana e Carlos?
- c.3) Ana e Daniela?
- c.4) Bruno e Carlos?
- c.5) Bruno e Daniela?
- c.6) Carlos e Daniela?

Neste item, será calculada a menor distância entre duas residências indicadas no enunciado. Ao final deste item, o professor deverá questionar os estudantes sobre como foram realizados os cálculos dessas distâncias, visando formalizar o conceito de distância do táxi e chegar no modelo:

$$d_T(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|.$$

(d) Qual a distância em linha reta entre as casas de:

d.1) Ana e Bruno?

d.2) Ana e Carlos?

d.3) Ana e Daniela?

d.4) Bruno e Carlos?

d.5) Bruno e Daniela?

d.6) Carlos e Daniela?

(Sugestão: utilizar o Teorema de Pitágoras.)

Neste item, será calculada a distância em linha reta entre duas residências indicadas no enunciado. Provavelmente, os estudantes calcularão a distância usando o Teorema de Pitágoras. Ao término desse item, o professor questionará qual o método utilizado pelos alunos e, em seguida, formalizará o conceito de distância euclidiana entre dois pontos, apresentando o modelo:

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

(e) Qual é a relação entre as distâncias dos menores caminhos e as distâncias em linha reta?

Neste item, o professor irá estimular os alunos a comparar e estabelecer relações entre a distância do táxi e a distância euclidiana, a partir de observações dos resultados obtidos nos itens (c) e (d) (sugestão: montar uma tabela). Em seguida, os estudantes, com a mediação do professor, formalizarão o conceito de que a distância euclidiana é menor ou igual à distância do táxi, isto é,  $d_E(A, B) \leq d_T(A, B)$ .

Como sugestão, é interessante que o professor demonstre algebricamente essa desigualdade (a demonstração está na chave de correção).

(f) Certo dia, os quatro amigos saíram de suas respectivas casas e foram para a escola, onde passaram toda a manhã. Decidiram almoçar juntos, assistir a um filme no cinema do shopping e, por volta das 16:00 horas, dirigiram-se ao clube para aproveitar a tarde ensolarada. Mais tarde, cada um deles voltou para sua própria casa.

f.1) Qual é a distância total percorrida por cada um deles ao longo do trajeto?

f.2) Se fosse em linha reta, qual seria a distância total percorrida por cada um deles ao longo do trajeto?

Neste item, é apresentada uma nova situação-problema na qual os estudantes devem calcular o perímetro percorrido pelos personagens, utilizando tanto a distância do táxi quanto a distância euclidiana. Espera-se que os alunos percebam que para cada personagem existem dois percursos distintos dos demais: da casa à escola e do clube de volta para casa. Os

demais percursos são compartilhados, uma vez que os estudantes viajam juntos. Caso não haja esta percepção, o professor orientará os estudantes a representar no plano cartesiano a situação propostas no enunciado. Naturalmente, depois de realizados os cálculos, será necessário conduzir uma discussão sobre os resultados, com o intuito de formalizar o conceito de perímetro e estabelecer comparações entre as distâncias percorridas.

(g) Um dos percursos mais curtos entre Bruno e Daniela possui dois estabelecimentos destacados no mapa. Qual estabelecimento desses está precisamente localizado na metade do caminho?

(h) Sabemos que existem outros caminhos mais curtos entre Bruno e Daniela, implicando na existência de outros pontos médios. Quantos pontos médios existem e quais são as coordenadas correspondentes a esses pontos?

(i) Em um dos percursos mais curtos entre Bruno e Ana, existem alguns estabelecimentos. Qual deles está precisamente localizado na metade do caminho mais curto?

(j) Sabemos que há outros caminhos mais curtos entre Bruno e Ana. Portanto, também existem outros pontos médios. Quantos são e quais são as coordenadas desses pontos médios?

Nestes itens, os estudantes deverão encontrar os pontos médios que existem entre dois pontos. Para isso, eles devem reconhecer que há vários caminhos que representam o percurso mais curto entre esses pontos, o que chamamos de distância do táxi.

(k) Considerando o caminho mais curto, quantos percursos distintos são possíveis para:

k.1) Ana ir à escola?

k.2) Bruno ir ao supermercado?

k.3) Carlos ir à farmácia?

k.4) Daniela ir ao shopping?

Neste item, os alunos calcularão o número de diferentes possibilidades de percursos, levando em consideração a distância do táxi, que já foi conceituada nos itens anteriores. Inicialmente, os alunos realizarão cálculos por contagem, e o professor mediará, apresentando outra abordagem de cálculo, como a permutação com repetição. No terceiro cenário, "Carlos ir à farmácia", é observado um percurso em linha reta. Nesse momento, o professor tem a oportunidade de questionar os alunos sobre o motivo pelo qual existe apenas um único caminho mais curto possível. Espera-se que os estudantes reflitam e concluam que, nesse caso, isso ocorre devido à igualdade entre as distâncias euclidiana e do táxi.

## 4.4 Segunda atividade

Nesta atividade, o professor apresentará uma situação-problema que envolve o conceito de lugar geométrico, especificamente a circunferência. Será utilizado um cenário de uma pizzaria que atende os clientes tanto presencialmente quanto por meio do serviço de entrega em toda a cidade (*delivery*). Nesse contexto, é estabelecida uma distância de até quatro quadras a partir da pizzaria em que não será aplicada taxa de entrega. No entanto, ao ultrapassar essa distância, será cobrada uma taxa composta por cinco reais acrescidos de cinquenta centavos por cada quadra excedente. É importante destacar que o número de quadras considerado para o cálculo da taxa de entrega será o menor valor possível, correspondendo à distância do táxi.

A pizzaria La Bella, para além do atendimento presencial, também oferece serviço de entrega em toda a cidade (*delivery*). A taxa de entrega é calculada conforme a seguinte condição: até quatro quadras, não há cobrança de taxa; contudo, ao ultrapassar essa distância, uma taxa de cinco reais, somada a cinquenta centavos por quadra excedente, será aplicada. É importante ressaltar que o número de quadras considerado para o cálculo da taxa de entrega corresponde à menor distância possível (ou seja, a distância do táxi).

(a) Represente na malha quadriculada (Figura 4.3)

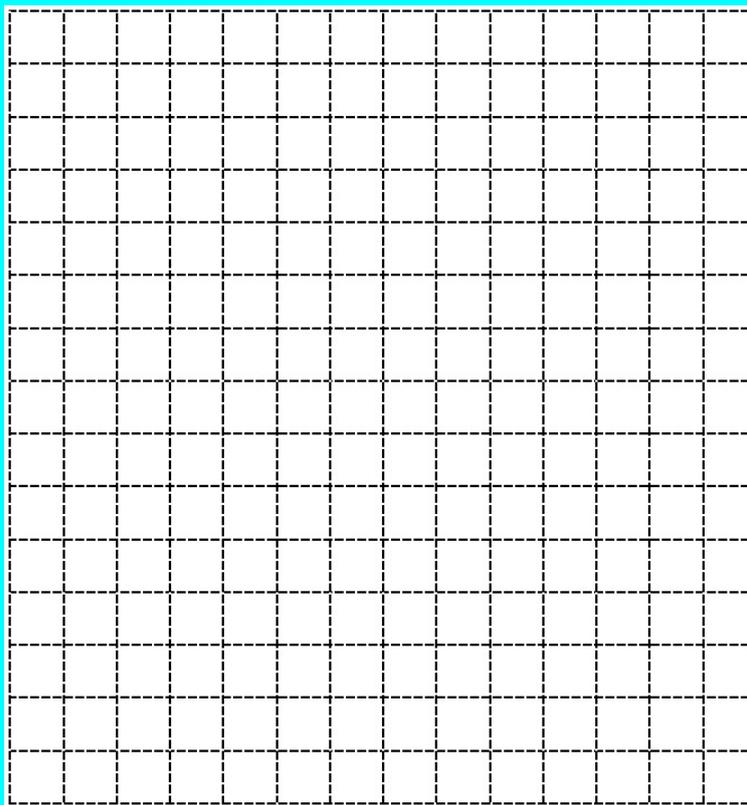
a.1) a pizzaria com um ponto  $P$  de sua escolha;

a.2) o limite máximo da região em que não será cobrada a taxa de entrega, correspondendo à distância do táxi;

a.3) o limite máximo da região se fosse considerada a distância euclidiana (usar um compasso).

No item (a), o estudante começará por representar um ponto  $P$ , sob orientação do professor para garantir que esse ponto esteja próximo ao centro da malha quadriculada, indicando a localização da pizzaria. A seguir, o estudante marcará outros pontos nessa mesma malha que representem o limite máximo da região onde a taxa de entrega não será cobrada, considerando sempre uma distância de quatro unidades (quadras) de  $P$  até esse limite. Em outras palavras, o estudante irá marcar pontos que representem os extremos de um círculo com raio quatro unidades, com centro em  $P$ , refletindo a distância do táxi.

Finalmente, utilizando um compasso com ponta seca em  $P$  e ajustando a abertura para medir exatamente quatro quadras, o estudante desenhará uma circunferência na mesma malha, levando em conta a distância euclidiana entre  $P$  e os pontos nessa circunferência.

**Figura 4.3:** Malha quadriculada.

Fonte: Elaborado pelo autor.

(b) Comparando as figuras do item (a), descreva as semelhanças, se houver, e as diferenças.

Neste item, o professor promoverá a análise das figuras elaboradas pelos alunos no item (a), com o intuito de estimular a percepção de semelhanças e diferenças. É esperado que os estudantes identifiquem aspectos em comum e divergentes entre as representações. No desfecho, o professor formalizará a concepção da circunferência como um lugar geométrico. Ele demonstrará que ambas as figuras consistem em circunferências com o mesmo centro e raio, embora fundamentadas em conceitos distintos – a distância euclidiana e a distância do táxi.

(c) Quais equações representam o limite máximo da área isenta de taxa de entrega, considerando a distância do táxi, e o limite máximo da área se fosse utilizada a distância euclidiana (com o uso de um compasso)?

Neste item, procederemos com a continuação do item (b), porém, agora adotando uma abordagem algébrica. O professor instruirá os alunos sobre as equações que descrevem as circunferências nas perspectivas da distância euclidiana e da distância do táxi.

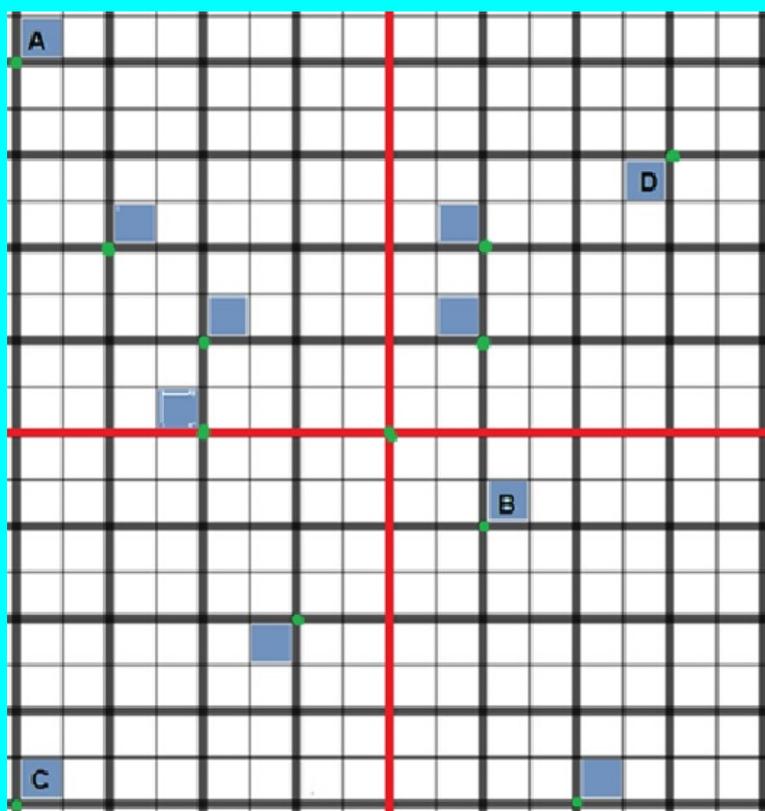
- (d) Qual é a medida da área que estará isenta de taxa de entrega?
- (e) Qual é a medida da área se a distância euclidiana fosse considerada?
- (f) Em quantos por cento a área calculada com base na distância euclidiana é superior à área calculada com base na distância do táxi?

Nos itens (d) e (e), os estudantes irão calcular as áreas das circunferências correspondentes. Já no item (f), eles realizarão uma comparação, expressa em porcentagem, para determinar o aumento da área da circunferência na distância euclidiana em relação à área da circunferência na distância do táxi.

(g) Com base na informação de que a pizzaria La Bella está situada no ponto  $P = (0, 0)$  da cidade ideal mostrada na Figura 4.4 da **Primeira atividade**, forneça as respostas às seguintes questões:

- g.1) Qual dos quatro amigos não terá que pagar taxa de entrega?
- g.2) Qual será o valor da taxa de entrega para cada um dos quatro amigos?

**Figura 4.4:** Cidade ideal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste item, a abordagem será voltada ao contexto da primeira atividade. O estudante deverá assinalar na figura a posição da pizzaria e, posteriormente, fornecer respostas para duas perguntas relevantes à situação-problema.

## 4.5 Terceira atividade

Nesta atividade, serão abordadas as cônicas como lugares geométricos. Serão equacionadas a partir de suas definições e, em seguida, representadas graficamente levando em consideração as geometrias euclidiana e do táxi.

(a) Sabendo que a circunferência é um lugar geométrico dos pontos que distam uma medida  $r$  (raio) de um ponto fixo  $O$  (centro), sua definição pode ser expressa como  $C = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(O, P) = r\}$ . Desse modo, a equação da circunferência é dada por:

Na geometria euclidiana:  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$ .

Na geometria do táxi:  $|x-a| + |y-b| = r$ .

Considerando as coordenadas do centro da circunferência como  $O = (3, 2)$  e o raio com medida igual a 5, determine as equações das circunferências considerando as geometrias euclidiana e do táxi.

Nesta etapa, os alunos, sob a orientação do professor, irão deduzir as equações que descrevem o lugar geométrico conhecido como circunferência. Essas equações serão desenvolvidas levando em consideração tanto a geometria euclidiana quanto a geometria do táxi.

(b) Sabemos que a elipse é um lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é igual a uma constante maior do que a distância entre os focos.

Dados os pontos  $F_1 = (a, b)$ ,  $F_2 = (c, d)$  e  $P = (x, y)$ , e a constante  $k \in \mathbb{R}$ , temos que a elipse é definida por  $E = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2k\}$ . Desse modo, a equação da elipse é dada por:

Na geometria euclidiana:  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = 2k$ .

Na geometria do táxi:  $|x-a| + |y-b| + |x-c| + |y-d| = 2k$ .

Considerando as geometrias euclidiana e do táxi, determine as equações das elipses a seguir, sabendo que:

b.1) os focos  $F_1 = (0, 3)$ ,  $F_2 = (0, 3)$  e constante  $k = 4$ ;

b.2) os focos  $F_1 = (4, 1)$ ,  $F_2 = (-4, 1)$  e constante  $k = 10$ .

Neste item, os alunos, sob a orientação do professor, irão deduzir as equações que descrevem o lugar geométrico conhecido como elipse. Essas equações serão desenvolvidas levando em consideração tanto a geometria euclidiana quanto a do táxi.

(c) Sabemos que a parábola é um lugar geométrico dos pontos no plano onde a distância a  $F$  é igual à distância a  $L$ , onde  $L$  é uma reta diretriz e  $F$  é um ponto focal que não está localizado em  $L$ .

Dado  $L \equiv mx + ny + c = 0$  e  $F = (a, b) \notin L$ , temos que a parábola é definida por  $P = \{Q = (x_Q, y_Q) \in \mathbb{R}^2 \mid d(Q, F) = d(Q, L)\}$ . Assim, a equação da parábola é dada por:

Na geometria euclidiana,  $d(Q, L) = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ . Dessa forma, a equação da parábola é dada por:  $\sqrt{(x_Q - a)^2 + (y_Q - b)^2} = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ .

Na geometria do táxi,  $d(Q, L) = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\max\{|m|, |n|\}}$ . Desse modo, a equação da parábola é dada por:  $|x_Q - a| + |y_Q - b| = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\max\{|m|, |n|\}}$ .

Considerando as geometrias Euclidiana e do Táxi, determine as equações das parábolas a seguir, sabendo que:

c.1) o foco  $F = (0, 2)$  e a reta diretriz  $L \equiv y - 4 = 0$ ;

c.2) o foco  $F = (-2, 0)$  e a reta diretriz  $L \equiv x - 2 = 0$ .

Neste item, os alunos, com a orientação do professor, irão deduzir as equações que descrevem o lugar geométrico conhecido como parábola. Essas equações serão desenvolvidas considerando tanto a geometria euclidiana quanto a do táxi.

(d) Sabemos que a hipérbole é um lugar geométrico dos pontos do plano  $P = (x, y)$  para os quais o módulo da diferença das distâncias de  $P$  aos focos  $F_1$  e  $F_2$  é igual a um valor constante.

Dados os pontos  $F_1 = (a, b)$  e  $F_2 = (c, d)$  e a constante  $k \in \mathbb{R}$ , temos que a hipérbole é definida por  $H = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2k\}$ . Desse modo a equação da hipérbole é dada por:

Na geometria euclidiana:  $|\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}| = 2k$ ;

Na geometria do táxi:  $||x-a| + |y-b| - (|x-c| + |y-d|)| = 2k$ .

Considerando as geometrias euclidiana e do táxi, determine as equações das hipérbolas a seguir, sabendo que:

d.1) os focos  $F_1 = (-2, 0)$ ,  $F_2 = (2, 0)$  e a constante  $k = 2$ ;

d.2) os focos  $F_1 = (-1, 2)$  e  $F_2 = (3, -2)$  e a constante  $k = 1$ .

Neste item, os alunos, sob a orientação do professor, irão deduzir as equações que descrevem o lugar geométrico conhecido como hipérbole. Essas equações serão desenvolvidas considerando tanto a geometria euclidiana quanto a do táxi.

(e) Usando o software GeoGebra, represente graficamente cada uma das equações determinadas nos itens (a), (b), (c) e (d).

Neste ponto, os alunos terão a oportunidade de criar gráficos com base nas equações abordadas nos itens anteriores, utilizando o software GeoGebra. O professor, além de fornecer orientação, incentivará os alunos a fazer comparações por meio da observação dos gráficos das cônicas nas geometrias euclidiana e do táxi.

É importante ressaltar que essa atividade proporcionará uma compreensão visual das diferenças e semelhanças entre as geometrias euclidiana e do táxi, permitindo que os estudantes explorem como as cônicas são representadas em cada uma dessas geometrias distintas.

## **4.6 Sugestões para a avaliação das atividades**

A avaliação dos alunos pode ser conduzida de maneira contínua ao longo das oficinas, abrangendo aspectos como participação nas atividades em grupo, habilidade para resolver problemas com base nos conceitos abordados, qualidade das discussões e justificativas apresentadas. Além disso, é viável solicitar a entrega de relatórios individuais ou em grupo, nos quais os alunos evidenciem a aplicação da geometria do Táxi e das cônicas em contextos do mundo real.

Adicionalmente, a avaliação pode incorporar uma autoavaliação na qual os alunos reflitam sobre seu próprio aprendizado e os desafios que enfrentaram durante as oficinas. Isso proporcionará uma oportunidade valiosa para que os alunos avaliem seu próprio progresso e desenvolvimento ao longo do curso, contribuindo para uma compreensão mais profunda dos conceitos e princípios abordados.

## Resultados obtidos

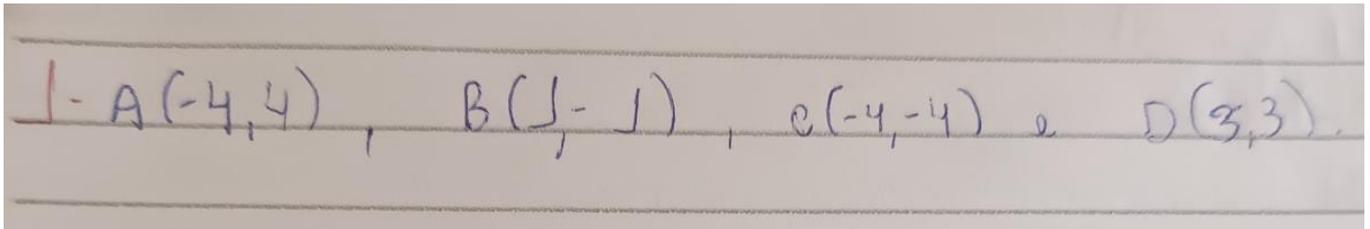
---

As três atividades que foram propostas no capítulo anterior foram colocadas em prática em uma escola estadual na cidade de Ituiutaba, Minas Gerais, com uma turma do terceiro ano do Ensino Médio. Os resultados e as análises realizadas pelo professor, com base nas soluções dos alunos, serão detalhados na seção a seguir.

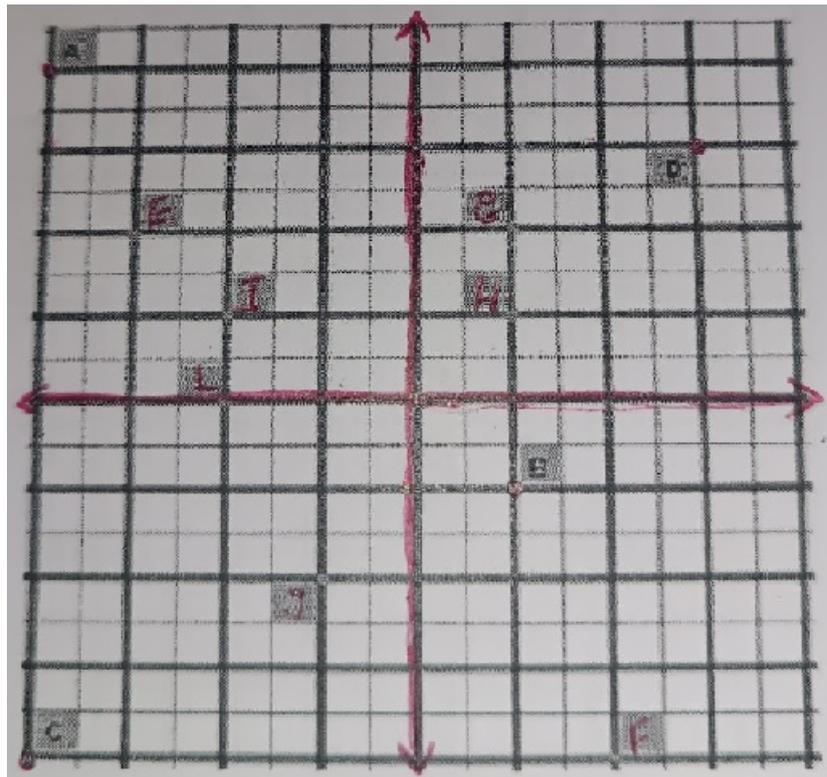
### 5.1 Aplicação e análise das atividades: resultados na turma do terceiro ano do Ensino Médio

Ao aplicarmos a sequência didática, constatamos que, na *Primeira atividade*, os estudantes compreenderam o contexto da situação-problema e demonstraram domínio de conhecimento acerca dos pré-requisitos, como a localização de um ponto no plano cartesiano, o cálculo da distância entre dois pontos (distância euclidiana) e a identificação do ponto médio. Também observamos que os estudantes compreenderam o conceito de distância do táxi. Inicialmente, perceberam que a distância do táxi trata-se da soma das distâncias horizontal e vertical em um plano cartesiano, representando uma cidade ideal em que os quarteirões têm formato quadrado e mesma área. Em seguida, com orientação do professor, formalizaram a distância do táxi, chegando à equação  $d_T = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$ , que era um dos objetivos da atividade.

**Figura 5.1:** Resolução de um estudante referente ao item (a) da *Primeira atividade*.



**Figura 5.2:** Resolução de um estudante referente ao item (b) da *Primeira atividade*.



**Figura 5.3:** Resolução de um estudante referente ao item (c) da *Primeira atividade*.

$$\begin{aligned}
 c2- \text{dac} &= |x_a - x_c| + |y_a - y_c| \\
 \text{dac} &= |-4 - (-4)| + |4 - (-4)| \\
 \text{dac} &= |-4 + 4| + |4 + 4| \\
 \text{dac} &= |0| + |8| \\
 \text{dac} &= 0 + 8 \\
 \text{dac} &= 8
 \end{aligned}$$

Figura 5.4: Resolução de um estudante referente ao item (d) da Primeira atividade.

Handwritten solution for item (d):

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{[-4 - (+1)]^2 + [1 - (-4)]^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{[-4 - 1]^2 + [1 + 4]^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{[-5]^2 + [5]^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{25 + 25}$$

$$d_{AB} = \sqrt{50}$$

$$d_{AB} = 7,1$$

Outro objetivo superado envolve a comparação entre a distância euclidiana ( $d_E$ ) e a distância do táxi ( $d_T$ ). Os estudantes organizaram os resultados dos itens (c) e (d), da Primeira atividade, em uma tabela e, após uma análise direta, concluíram que  $d_E \leq d_T$ . No entanto, vale destacar que a demonstração algébrica foi conduzida pelo professor.

Figura 5.5: Resolução de um estudante referente ao item (e) da Primeira atividade.

1) distância do táxi  $\Rightarrow$  distâncias dos caminhos laminares.  
 2) distância euclidiana  $\Rightarrow$  distâncias em linha reta.

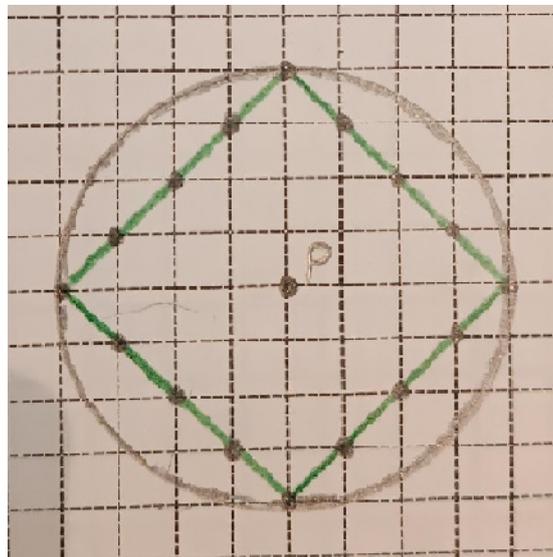
	Distância do táxi	Distância Euclidiana
Ana e Bruno	10	7,1
Ana e Carlos	8	8
Ana e Daniela	8	7,1
Bruno e Carlos	8	5,1
Bruno e Daniela	6	4,5
Carlos e Daniela	14	9,1

$d_T \geq d_E$

Na *Segunda atividade* da sequência didática, no item (a), os estudantes realizaram a representação gráfica do ponto  $P$  na malha quadriculada, que indica a localização da pizzaria mencionada na situação problema. A partir deste ponto, eles delimitaram a região de alcance máximo onde a taxa de entrega não será cobrada. Esse processo foi conduzido utilizando tanto o conceito de distância do táxi quanto o conceito de distância euclidiana.

Assim, o objetivo desse item foi plenamente alcançado. Ao observarem as figuras formadas na malha, os estudantes perceberam a formação de circunferências tanto no contexto do táxi quanto no contexto euclidiano. Além disso, eles concluíram que, embora a distância do táxi seja sempre maior ou igual à distância euclidiana, quando se trata da região delimitada pelas circunferências do táxi e da distância euclidiana, a desigualdade se inverte. Em outras palavras, a área da circunferência do táxi é menor do que a área da circunferência euclidiana.

**Figura 5.6:** Resolução de um estudante referente ao item (a) da *Segunda atividade*.



Nos itens (d) e (e), da *Segunda atividade*, os estudantes demonstram essa desigualdade por meio de cálculos de áreas das duas circunferências. No item (f), eles realizam uma comparação entre essas áreas em termos percentuais.

**Figura 5.7:** Resolução de um estudante referente aos itens (d) e (e) da *Segunda atividade*.

Handwritten mathematical calculations on lined paper. On the left, under 'd)', the student calculates the area of a square with side length 4:  $A_T = 4 \cdot A_0$ ,  $A_T = 4 \cdot \left(\frac{4 \cdot 4}{2}\right)$ , and  $A_T = 32$ . On the right, under 'e)', the student calculates the area of a circle with radius 4:  $A_E = \pi \cdot r^2$ ,  $A_E = 3,14 \cdot (4)^2$ ,  $A_E = 3,14 \cdot 16$ , and  $A_E = 50,24$ .

**Figura 5.8:** Resolução de um estudante referente ao item (f) da *Segunda atividade*.

$$\begin{aligned} & \frac{50,24 - 32}{32} \cdot 100 \\ &= \frac{18,24}{32} \cdot 100 \\ &= \frac{1824}{32} \\ &= 57\% \end{aligned}$$

Na *Terceira atividade*, os estudantes demonstraram domínio ao abordar o desenvolvimento do item (a), devido ao pré-requisito sobre circunferência que havia sido estudado no bimestre anterior. Contudo, nos itens (b), (c) e (d), eles enfrentaram algumas dificuldades, requerendo a intervenção do professor, que ofereceu orientações específicas para cada uma das cônicas apresentadas nessas etapas. Com a assistência do professor, os estudantes conseguiram compreender de maneira efetiva o conceito de lugar geométrico e foram capazes de estabelecer as equações das cônicas tanto na geometria euclidiana quanto na geometria do táxi, conforme era esperado.

**Figura 5.9:** Resolução de um estudante referente ao item (a) da *Terceira atividade*.

a)  $C = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid D(O,P) = r\}$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$|x-a| + |y-b| = r$$

$O(3,2)$   $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 5$   $O(3,2)$

Circunferência Euclidiana  $|x-3| + |y-2| = 5$

Circunferência do táxi

**Figura 5.10:** Resolução de um estudante referente ao item (b) da *Terceira atividade*.

b)  $E = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid D(F_1, P) + D(F_2, P) = 2k\}$

geometria Euclidiana

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = 2k$$

sendo:  $F_1(-3,3)$  e  $F_2(3,5)$  e  $k=4$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = 8$$

geometria do Táxi

$$|x-a| + |y-b| + |x-c| + |y-d| = 2k$$

$$|x+3| + |y-3| + |x-3| + |y-5| = 8$$

A frustração surgiu no não desenvolvimento do item (e), da *Terceira atividade*. A escola dispõe de apenas um laboratório de informática, o qual precisa ser compartilhado entre todas as turmas. Além disso, esse espaço possui prioridades específicas, sendo reservado para disciplinas do curso técnico em Logística e também para a realização de provas governamentais (Avaliação Trimestral), que são conduzidas de forma *online*.

Apesar disso, o professor apresentou os gráficos das cônicas aos alunos utilizando seu próprio *notebook*. No entanto, compreendemos que essa abordagem não proporciona a mesma motivação e envolvimento que surgiriam caso os próprios estudantes pudessem explorar as cônicas usando o *software* GeoGebra no laboratório de informática.

## 5.2 Considerações finais

A geometria do táxi é empregada espontaneamente pelas pessoas, dispensando a necessidade de formalização, simplesmente aplicando a ideia de escolher o melhor percurso a ser realizado para deslocar-se de um lugar para outro em uma cidade. Portanto, apresentar esse conceito na sala de aula facilita para o aluno associar as situações cotidianas.

Ao ponderar sobre essas considerações, optamos por desenvolver uma sequência didática que introduza o conceito de distância e cônicas na geometria do táxi no âmbito da Educação Básica. No entanto, antes de prosseguir com esse plano, julgamos relevante fornecer aos educadores um material teórico de apoio, que possa ser utilizado caso haja necessidade. Esse

material aborda a teoria subjacente à geometria do táxi, destacando o conceito de métrica (distância) e outros temas abordados nas atividades propostas.

Além disso, durante o curso deste trabalho, também demonstramos que a geometria euclidiana não é a única abordagem geométrica existente. Realizamos comparações e distinções entre a geometria do táxi e a geometria euclidiana, destacando suas diferenças e enriquecendo a compreensão dos docentes sobre esses dois enfoques.

Nossa sequência didática foi elaborada considerando a oportunidade para que os estudantes descubram a distância do táxi de maneira natural. A partir dessa compreensão inicial, buscamos desenvolver outros conceitos interligados. Por exemplo, exploramos o cálculo de possibilidades de trajetos para deslocamentos entre pontos, assim como sua aplicação prática. Este enfoque fica evidente na segunda e terceira atividades, nas quais introduzimos a aplicação da geometria do táxi ao conceito de lugar geométrico.

Ao aplicar essa abordagem nas atividades, como nas cônicas, conseguimos demonstrar como a geometria do táxi se relaciona e enriquece a compreensão desses conceitos. Isso proporciona aos estudantes uma perspectiva mais abrangente e aplicável, permitindo-lhes explorar conexões interdisciplinares e enxergar como a geometria do táxi pode ser uma ferramenta valiosa para análises geométricas e solução de problemas do mundo real.

No planejamento das atividades da sequência didática, propusemos a utilização de recursos manipulativos, como o Geoplano, bem como recursos tecnológicos, incluindo o *software* GeoGebra. No entanto, somos cientes das limitações enfrentadas pelas escolas, especialmente as públicas, que frequentemente carecem desses recursos. Uma análise dos resultados obtidos durante a implementação da sequência destacou justamente essa carência de recursos tecnológicos.

Apesar de a escola possuir um laboratório de informática, reconhecemos que esse espaço é altamente disputado e possui prioridades definidas para diversas disciplinas, incluindo avaliações governamentais realizadas de forma *online*. Isso muitas vezes dificulta o acesso e a disponibilidade desse recurso para atividades específicas, como as que propusemos na sequência.

Diante dessas circunstâncias, percebemos a necessidade de buscar abordagens alternativas e adaptativas para viabilizar a aprendizagem, buscando formas de promover o entendimento dos conceitos mesmo em cenários com recursos limitados. Isso reforça a importância de flexibilidade e criatividade por parte dos educadores ao explorar estratégias de ensino que se adequem às condições disponíveis.

Como perspectiva para futuros trabalhos, nossa ideia é a reestruturação da terceira ati-

vidade de maneira mais contextualizada e aplicável a situações concretas, da mesma forma que fizemos com sucesso na segunda atividade, ao empregar o conceito de circunferência em um cenário de entrega de pizzas.

Nesse sentido, podemos explorar a geometria do táxi de maneira prática e tangível, incorporando exemplos do cotidiano que os alunos possam se relacionar, compreendendo assim como esse conceito pode ser útil em diversos contextos reais. Isso pode envolver o cálculo de trajetos mais eficientes em cidades, planejamento de rotas para serviços de entrega ou mesmo otimização de deslocamentos em cenários urbanos.

Dessa forma, ao trazer a teoria para a prática de maneira mais concreta, podemos aumentar a motivação e a compreensão dos alunos, além de ajudá-los a enxergar as aplicações reais da geometria do táxi em suas vidas e em situações profissionais futuras.

# APÊNDICE A

---

## Atividades para impressão

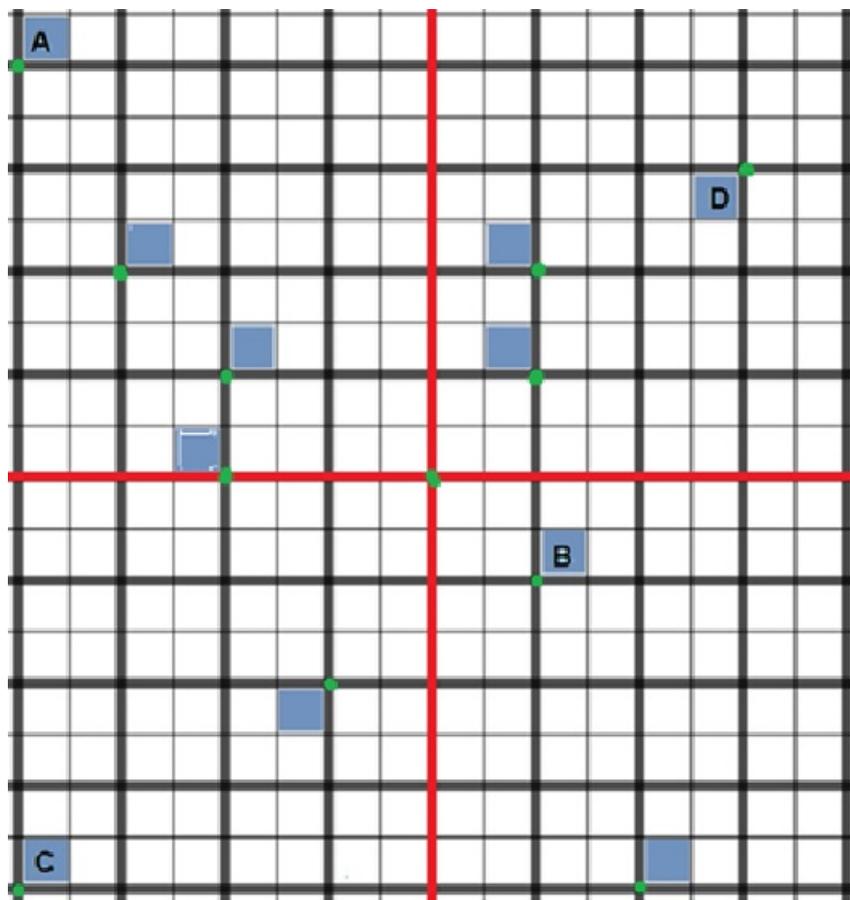
---

Neste apêndice, encontram-se as atividades detalhadas do Capítulo [4](#), disponíveis para impressão e utilização por parte do professor ou de qualquer outra pessoa interessada em utilizá-las.

## Primeira atividade

Na figura a seguir está o mapa de uma cidade ideal, na qual os quarteirões são quadrados de mesma área. Nesse mapa, é possível visualizar duas ruas principais destacadas em vermelho, que se cruzam perpendicularmente, formando um plano cartesiano e facilitando a localização de moradias e estabelecimentos.

Neste mapa, estão destacadas as localizações das moradias de quatro amigos: Ana, Bruno, Carlos e Daniela, representados, respectivamente, pelos pontos A, B, C e D. Além disso, estão marcadas as localizações de alguns estabelecimentos da cidade, como supermercado, farmácia, clube, banco, escola, hospital e shopping.



- (a) Quais as coordenadas cartesianas das residências de Ana, Bruno, Carlos e Daniela?
- (b) Marque na figura os pontos  $E = (-3, 2)$ ,  $F = (2, -4)$ ,  $G = (1, 2)$ ,  $H = (1, 1)$ ,  $I = (-2, 1)$ ,  $J = (-1, -2)$ ,  $L = (-2, 0)$  que representam, respectivamente, a localização do supermercado, farmácia, clube, banco, escola, hospital e shopping.
- (c) Qual a distância do menor caminho entre as residências de:
- c.1) Ana e Bruno?

- c.2) Ana e Carlos?
- c.3) Ana e Daniela?
- c.4) Bruno e Carlos?
- c.5) Bruno e Daniela?
- c.6) Carlos e Daniela?

(d) Qual a distância em linha reta entre as casas de:

- d.1) Ana e Bruno?
- d.2) Ana e Carlos?
- d.3) Ana e Daniela?
- d.4) Bruno e Carlos?
- d.5) Bruno e Daniela?
- d.6) Carlos e Daniela?

(Sugestão: utilizar o Teorema de Pitágoras.)

(e) Qual é a relação entre as distâncias dos menores caminhos e as distâncias em linha reta?

(f) Certo dia, os quatro amigos saíram de suas respectivas casas e foram para a escola, onde passaram toda a manhã. Decidiram almoçar juntos, assistir a um filme no cinema do shopping e, por volta das 16:00 horas, dirigiram-se ao clube para aproveitar a tarde ensolarada. Mais tarde, cada um deles voltou para sua própria casa.

f.1) Qual é a distância total percorrida por cada um deles ao longo do trajeto?

f.2) Se fosse em linha reta, qual seria a distância total percorrida por cada um deles ao longo do trajeto?

(g) Um dos percursos mais curtos entre Bruno e Daniela possui dois estabelecimentos destacados no mapa. Qual estabelecimento desses está precisamente localizado na metade do caminho?

(h) Sabemos que existem outros caminhos mais curtos entre Bruno e Daniela, implicando na existência de outros pontos médios. Quantos pontos médios existem e quais são as coordenadas correspondentes a esses pontos?

(i) Em um dos percursos mais curtos entre Bruno e Ana, existem alguns estabelecimentos. Qual deles está precisamente localizado na metade do caminho mais curto?

(j) Sabemos que há outros caminhos mais curtos entre Bruno e Ana. Portanto, também existem outros pontos médios. Quantos são e quais são as coordenadas desses pontos médios?

(k) Considerando o caminho mais curto, quantos percursos distintos são possíveis para:

k.1) Ana ir à escola?

k.2) Bruno ir ao supermercado?

k.3) Carlos ir à farmácia?

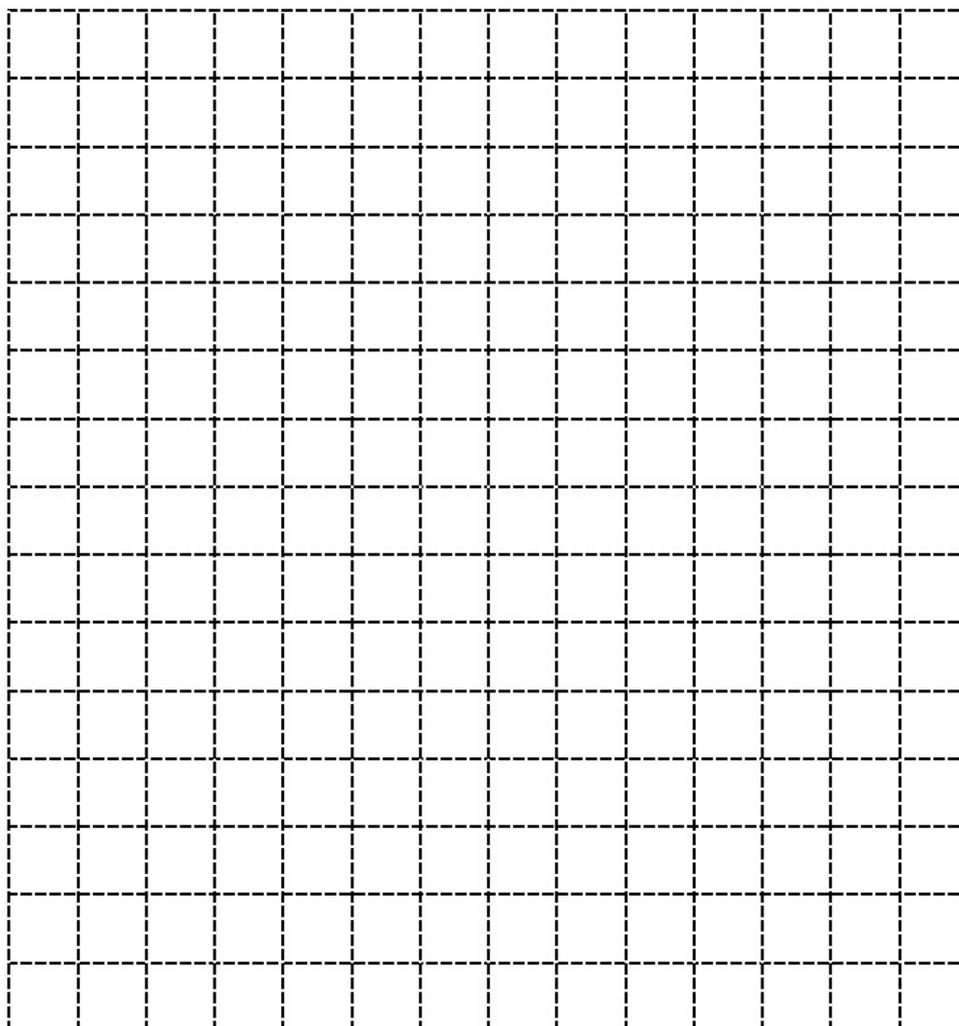
k.4) Daniela ir ao shopping?

## Segunda atividade

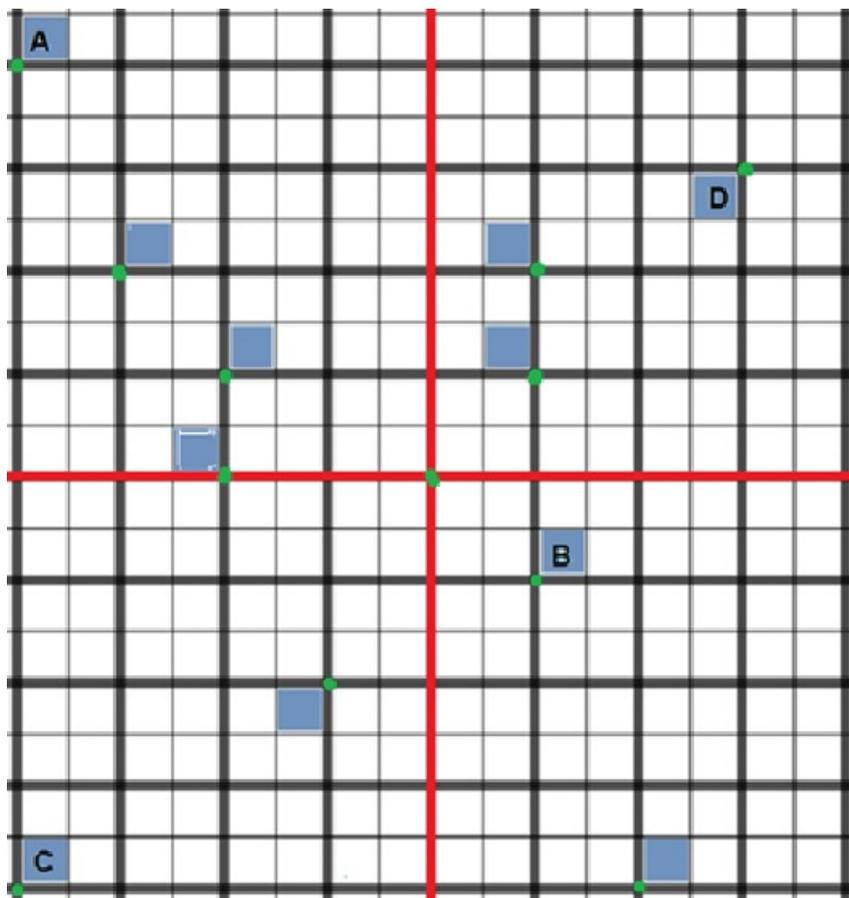
A pizzaria La Bella, para além do atendimento presencial, também oferece serviço de entrega em toda a cidade (*delivery*). A taxa de entrega é calculada conforme a seguinte condição: até quatro quadras, não há cobrança de taxa; contudo, ao ultrapassar essa distância, uma taxa de cinco reais, somada a cinquenta centavos por quadra excedente, será aplicada. É importante ressaltar que o número de quadras considerado para o cálculo da taxa de entrega corresponde à menor distância possível (ou seja, a distância do táxi).

(a) Represente na malha quadriculada a seguir.

- a.1) a pizzaria com um ponto  $P$  de sua escolha;
- a.2) o limite máximo da região em que não será cobrada a taxa de entrega, correspondendo à distância do táxi;
- a.3) o limite máximo da região se fosse considerada a distância euclidiana (usar um compasso).



- (b) Comparando as figuras do item (a), descreva as semelhanças, se houver, e as diferenças.
- (c) Quais equações representam o limite máximo da área isenta de taxa de entrega, considerando a distância do táxi, e o limite máximo da área se fosse utilizada a distância euclidiana (com o uso de um compasso)?
- (d) Qual é a medida da área que estará isenta de taxa de entrega?
- (e) Qual é a medida da área se a distância euclidiana fosse considerada?
- (f) Em quantos por cento a área calculada com base na distância euclidiana é superior à área calculada com base na distância do táxi?
- (g) Com base na informação de que a pizzaria La Bella está situada no ponto  $P = (0, 0)$  da cidade ideal apresentada na **Primeira atividade**, utilize a figura a seguir e forneça as respostas às seguintes questões:



- g.1) Qual dos quatro amigos não terá que pagar taxa de entrega?
- g.2) Qual será o valor da taxa de entrega para cada um dos quatro amigos?

## Terceira atividade

(a) Sabendo que a circunferência é um lugar geométrico dos pontos que distam uma medida  $r$  (raio) de um ponto fixo  $O$  (centro), sua definição pode ser expressa como  $C = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(O, P) = r\}$ . Desse modo, a equação da circunferência é dada por:

- Na geometria euclidiana:  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$ .

- Na geometria do táxi:  $|x-a| + |y-b| = r$ .

Considerando as coordenadas do centro da circunferência como  $O = (3, 2)$  e o raio com medida igual a 5, determine as equações das circunferências considerando as geometrias euclidiana e do táxi.

(b) Sabemos que a elipse é um lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é igual a uma constante maior do que a distância entre os focos.

Dados os pontos  $F_1 = (a, b)$ ,  $F_2 = (c, d)$  e  $P = (x, y)$ , e a constante  $k \in \mathbb{R}$ , temos que a elipse é definida por  $E = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2k\}$ . Desse modo, a equação da elipse é dada por:

- Na geometria euclidiana:  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = 2k$ .

- Na geometria do táxi:  $|x-a| + |y-b| + |x-c| + |y-d| = 2k$ .

Considerando as geometrias euclidiana e do táxi, determine as equações das elipses a seguir, sabendo que:

b.1) os focos  $F_1 = (0, 3)$ ,  $F_2 = (0, 3)$  e constante  $k = 4$ ;

b.2) os focos  $F_1 = (4, 1)$ ,  $F_2 = (-4, 1)$  e constante  $k = 10$ .

(c) Sabemos que a parábola é um lugar geométrico dos pontos no plano onde a distância a  $F$  é igual à distância a  $L$ , onde  $L$  é uma reta diretriz e  $F$  é um ponto focal que não está localizado em  $L$ .

Dado  $L \equiv mx + ny + c = 0$  e  $F = (a, b) \notin L$ , temos que a parábola é definida por  $P = \{Q = (x_Q, y_Q) \in \mathbb{R}^2 \mid d(Q, F) = d(Q, L)\}$ . Assim, a equação da parábola é dada por:

- Na geometria euclidiana,  $d(Q, L) = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ . Dessa forma, a equação da parábola é dada por:  $\sqrt{(x_Q - a)^2 + (y_Q - b)^2} = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ .

- Na geometria do táxi,  $d(Q, L) = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\max\{|m|, |n|\}}$ . Desse modo, a equação da parábola é dada por:  $|x_Q - a| + |y_Q - b| = \frac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\max\{|m|, |n|\}}$ .

Considerando as geometrias Euclidiana e do Táxi, determine as equações das parábolas a seguir, sabendo que:

- c.1) o foco  $F = (0, 2)$  e a reta diretriz  $L \equiv y - 4 = 0$ ;  
c.2) o foco  $F = (-2, 0)$  e a reta diretriz  $L \equiv x - 2 = 0$ .

(d) Sabemos que a hipérbole é um lugar geométrico dos pontos do plano  $P = (x, y)$  para os quais o módulo da diferença das distâncias de  $P$  aos focos  $F_1$  e  $F_2$  é igual a um valor constante.

Dados os pontos  $F_1 = (a, b)$  e  $F_2 = (c, d)$  e a constante  $k \in \mathbb{R}$ , temos que a hipérbole é definida por  $H = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2k\}$ . Desse modo a equação da hipérbole é dada por:

- Na geometria euclidiana:  $|\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}| = 2k$ ;  
- Na geometria do táxi:  $||x-a| + |y-b| - (|x-c| + |y-d|)| = 2k$ .

Considerando as geometrias euclidiana e do táxi, determine as equações das hipérboles a seguir, sabendo que:

- d.1) os focos  $F_1 = (-2, 0)$ ,  $F_2 = (2, 0)$  e a constante  $k = 2$ ;  
d.2) os focos  $F_1 = (-1, 2)$  e  $F_2 = (3, -2)$  e a constante  $k = 1$ .

(e) Usando o software GeoGebra, represente graficamente cada uma das equações determinadas nos itens (a), (b), (c) e (d).

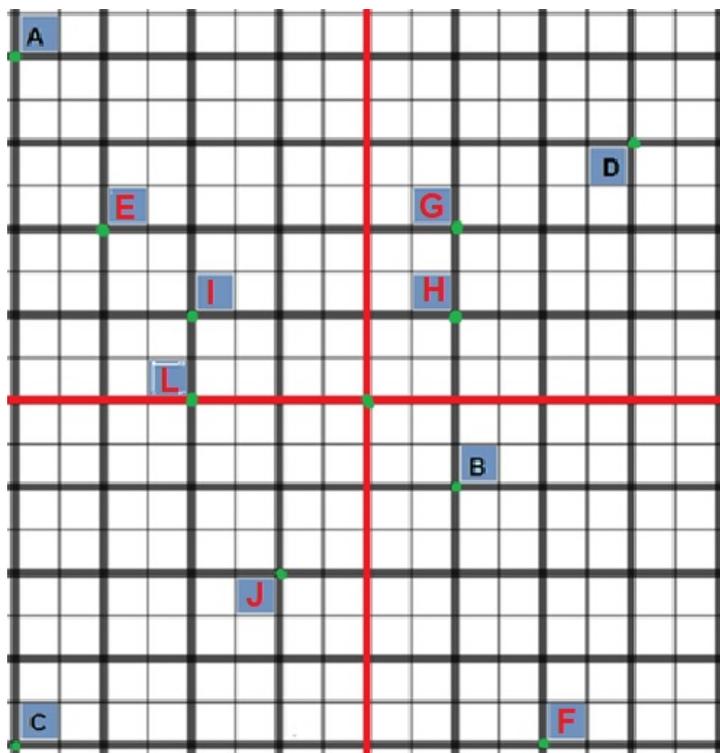
# APÊNDICE B

## Chave de correção das atividades

### Primeira atividade

(a)  $A = (-4, 4)$ ,  $B = (1, -1)$ ,  $C = (-4, -4)$  e  $D = (3, 3)$ .

(b) Resposta na figura abaixo.



(c) Considerando as coordenadas:  $A = (-4, 4)$ ,  $B = (1, -1)$ ,  $C = (-4, -4)$  e  $D = (3, 3)$ , temos:

c.1)  $d_{AB} = |-4 - (+1)| + |4 - (-1)| = |-5| + |5| = 5 + 5 = 10$

c.2)  $d_{AC} = |-4 - (-4)| + |4 - (-4)| = |0| + |8| = 0 + 8 = 8$

c.3)  $d_{AD} = |-4 - (+3)| + |4 - (+3)| = |-7| + |+1| = 7 + 1 = 8$

c.4)  $d_{BC} = |+1 - (-4)| + |-1 - (-4)| = |+5| + |+3| = 5 + 3 = 8$

c.5)  $d_{BD} = |+1 - (+3)| + |-1 - (+3)| = |-2| + |-4| = 2 + 4 = 6$

c.6)  $d_{CD} = |-4 - (+3)| + |-4 - (+3)| = |-7| + |-7| = 7 + 7 = 14$

(d) Considerando as coordenadas:  $A = (-4, 4)$ ,  $B = (1, -1)$ ,  $C = (-4, -4)$  e  $D = (3, 3)$ , temos:

d.1)  $d_{AB} = \sqrt{[-4 - (+1)]^2 + [4 - (-1)]^2} = \sqrt{[-5]^2 + [+5]^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2} \approx 7,1$

d.2)  $d_{AC} = \sqrt{[-4 - (-4)]^2 + [4 - (-4)]^2} = \sqrt{[0]^2 + [+8]^2} = \sqrt{0 + 64} = \sqrt{64} = 8$

d.3)  $d_{AD} = \sqrt{[-4 - (+3)]^2 + [4 - (+3)]^2} = \sqrt{[-7]^2 + [+1]^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2} \approx 7,1$

d.4)  $d_{BC} = \sqrt{[+1 - (-4)]^2 + [-1 - (-4)]^2} = \sqrt{[+5]^2 + [+3]^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \approx 5,8$

d.5)  $d_{BD} = \sqrt{[+1 - (+3)]^2 + [-1 - (+3)]^2} = \sqrt{[-2]^2 + [-4]^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \approx 4,5$

d.6)  $d_{CD} = \sqrt{[-4 - (+3)]^2 + [-4 - (+3)]^2} = \sqrt{[-7]^2 + [-7]^2} = \sqrt{49 + 49} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2} \approx 9,9$

(e) As distâncias dos menores caminhos são denominadas distância do táxi e as distâncias dos menores caminhos em linha reta são denominadas distância euclidiana.

A tabela abaixo apresenta as distâncias entre os quatro amigos calculadas nos itens (c) e (d), sendo a primeira coluna considera a distância do táxi e a segunda a distância euclidiana.

Distância do táxi	Distância euclidiana
$d_{AB} = 10$	$d_{AB} \approx 7,1$
$d_{AC} = 8$	$d_{AC} = 8$
$d_{AD} = 8$	$d_{AD} \approx 7,1$
$d_{BC} = 8$	$d_{BC} \approx 5,8$
$d_{BD} = 6$	$d_{BD} \approx 4,5$
$d_{CD} = 14$	$d_{CD} \approx 9,9$

Comparando as distâncias apresentadas na tabela percebemos que a distância do táxi é sempre maior ou igual a distância euclidiana. Isso pode ser comprovado de maneira geral.

Demonstração. Consideremos os pontos  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e a desigualdade

$$2|x_B - x_A| \cdot |y_B - y_A| \geq 0.$$

Somando  $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$  aos dois membros desta desigualdade obtemos

$$2|x_B - x_A| \cdot |y_B - y_A| + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Reorganizando a desigualdade no primeiro membro e usando a propriedade comutativa da adição, ficamos com

$$(x_B - x_A)^2 + 2|x_B - x_A||y_B - y_A| + (y_B - y_A)^2 \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Observando o primeiro membro da desigualdade anterior, notemos que se trata de um produto notável. Reescrevendo obtemos

$$(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|)^2 \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Como os dois membros desta desigualdade são maiores do que ou iguais a zero, extraindo a raiz quadrada dos dois membros a desigualdade continua válida, ou seja,

$$\sqrt{(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|)^2} \geq \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Dessa forma, temos

$$|x_B - x_A| + |y_B - y_A| \geq \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Por outro lado, sabemos que  $d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$  e  $d_E(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

Portanto,

$$d_T(A, B) \geq d_E(A, B).$$

(f) Calcularemos a distância do táxi em f.1) para determinar o percurso de cada um dos amigos e em f.2) a distância euclidiana imaginando o percurso em linha reta.

f.1) Considerando as coordenadas:  $A = (-4, 4)$ ;  $B = (1, -1)$ ;  $C = (-4, -4)$ ;  $D = (3, 3)$ ;  $I = (-2, 1)$ ;  $L = (-2, 0)$  e  $G = (1, 2)$ , temos:

- Distância percorrida em grupo:  $d_{IL} + d_{LG} = 1 + 5 = 6$

$$d_{IL} = |-2 - (-2)| + |1 - 0| = |0| + |1| = 0 + 1 = 1$$

$$d_{LG} = |-2 - (+1)| + |0 - (+2)| = |-3| + |-2| = 3 + 2 = 5$$

- Distância percorrida por Ana:  $d_{AI} + (d_{IL} + d_{LG}) + d_{GA} = 5 + 6 + 7 = 18$   
 $d_{AI} = |-4 - (-2)| + |4 - (+1)| = |-2| + |3| = 2 + 3 = 5$   
 $d_{GA} = |+1 - (-4)| + |2 - (+4)| = |5| + |-2| = 5 + 2 = 7$
- Distância percorrida por Bruno:  $d_{BI} + (d_{IL} + d_{LG}) + d_{GB} = 5 + 6 + 5 = 16$   
 $d_{BI} = |+1 - (-2)| + |-1 - (+1)| = |3| + |-2| = 3 + 2 = 5$   
 $d_{GB} = |+1 - (-1)| + |2 - (-1)| = |2| + |3| = 2 + 3 = 5$
- Distância percorrida por Carlos:  $d_{CI} + (d_{IL} + d_{LG}) + d_{GC} = 7 + 6 + 11 = 24$   
 $d_{CI} = |-4 - (-2)| + |-4 - (+1)| = |-2| + |-5| = 2 + 5 = 7$   
 $d_{GC} = |+1 - (-4)| + |2 - (-4)| = |5| + |6| = 5 + 6 = 11$
- Distância percorrida por Daniela:  $d_{DI} + (d_{IL} + d_{LG}) + d_{GD} = 7 + 6 + 3 = 16$   
 $d_{DI} = |+3 - (-2)| + |3 - (+1)| = |5| + |2| = 5 + 2 = 7$   
 $d_{GD} = |+1 - (+3)| + |2 - (+3)| = |-2| + |-1| = 2 + 1 = 3$

f.2) Considerando as coordenadas:  $A = (-4, 4)$ ;  $B = (1, -1)$ ;  $C = (-4, -4)$ ;  $D = (3, 3)$ ;  
 $I = (-2, 1)$ ;  $L = (-2, 0)$  e  $G = (1, 2)$ , temos:

- Distância percorrida em grupo:  $d_{IL} + d_{LG} \approx 1 + 3,6 \approx 4,6$   
 $d_{IL} = \sqrt{[-2 - (-2)]^2 + [1 - 0]^2} = \sqrt{[0]^2 + [1]^2} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1$   
 $d_{LG} = \sqrt{[-2 - (+1)]^2 + [0 - (+2)]^2} = \sqrt{[-3]^2 + [-2]^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3,6$
- Distância percorrida por Ana:  $d_{AI} + (d_{IL} + d_{LG}) + d_{GA} \approx 3,6 + 4,6 + 5,4 \approx 13,6$   
 $d_{AI} = \sqrt{[-4 - (-2)]^2 + [4 - (+1)]^2} = \sqrt{[-2]^2 + [3]^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3,6$   
 $d_{GA} = \sqrt{[+1 - (-4)]^2 + [2 - (+4)]^2} = \sqrt{[5]^2 + [-2]^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \approx 5,4$
- Distância percorrida por Bruno:  $d_{BI} + (d_{IL} + d_{LG}) + d_{GB} \approx 3,6 + 4,6 + 3,6 \approx 11,8$   
 $d_{BI} = \sqrt{[+1 - (-2)]^2 + [-1 - (+1)]^2} = \sqrt{[3]^2 + [-2]^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3,6$   
 $d_{GB} = \sqrt{[+1 - (-1)]^2 + [2 - (-1)]^2} = \sqrt{[2]^2 + [3]^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3,6$
- Distância percorrida por Carlos:  $d_{CI} + (d_{IL} + d_{LG}) + d_{GC} \approx 5,4 + 4,6 + 7,8 \approx 17,8$   
 $d_{CI} = \sqrt{[-4 - (-2)]^2 + [-4 - (+1)]^2} = \sqrt{[-2]^2 + [-5]^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \approx 5,4$   
 $d_{GC} = \sqrt{[+1 - (-4)]^2 + [2 - (-4)]^2} = \sqrt{[5]^2 + [6]^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61} \approx 7,8$
- Distância percorrida por Daniela:  $d_{DI} + (d_{IL} + d_{LG}) + d_{GD} \approx 5,4 + 4,6 + 2,2 \approx 12,2$   
 $d_{DI} = \sqrt{[+3 - (-2)]^2 + [3 - (+1)]^2} = \sqrt{[5]^2 + [2]^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \approx 5,4$   
 $d_{GD} = \sqrt{[+1 - (+3)]^2 + [2 - (+3)]^2} = \sqrt{[-2]^2 + [-1]^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2,2$

- (g) Como a distância do táxi entre Bruno e Daniela é  $d_{BD} = 6$ , então o estabelecimento destacado no mapa que está a três unidades de Bruno e de Daniela, logo o estabelecimento é o clube, representado pelo ponto  $G$ .

$$d_{BD} = | + 1 - (+3) | + | - 1 - (+3) | = | - 2 | + | - 4 | = 2 + 4 = 6$$

- (h) Considerando a distância do táxi existem três pontos médios entre Bruno e Daniela com as seguintes coordenadas:  $(1, 2)$ ;  $(2, 1)$  e  $(3, 0)$ .

- (i) Como a distância do táxi entre Bruno e Ana é  $d_{BA} = 10$ , então o estabelecimento destacado no mapa que está a cinco unidades de Bruno e de Ana, logo o estabelecimento é a escola, representado pelo ponto  $I$ .

$$d_{BA} = | + 1 - (-4) | + | - 1 - (+4) | = | + 5 | + | - 5 | = 5 + 5 = 10$$

- (j) Considerando a distância do táxi existem seis pontos médios entre Bruno e Ana com as seguintes coordenadas:  $(-4, -1)$ ;  $(-3, 0)$ ;  $(-2, 1)$ ;  $(-1, 2)$ ;  $(0, 3)$ ; e  $(1, 4)$ .

- (k) Considerando a distância do táxi:

- k.1) Existem 10 percursos distintos para Ana ir à escola.

$$P_5^{2H,3V} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

- k.2) Existem 35 percursos distintos para Bruno ir ao supermercado.

$$P_7^{4H,3V} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

- k.3) Existe um único caminho para Carlos ir à farmácia.

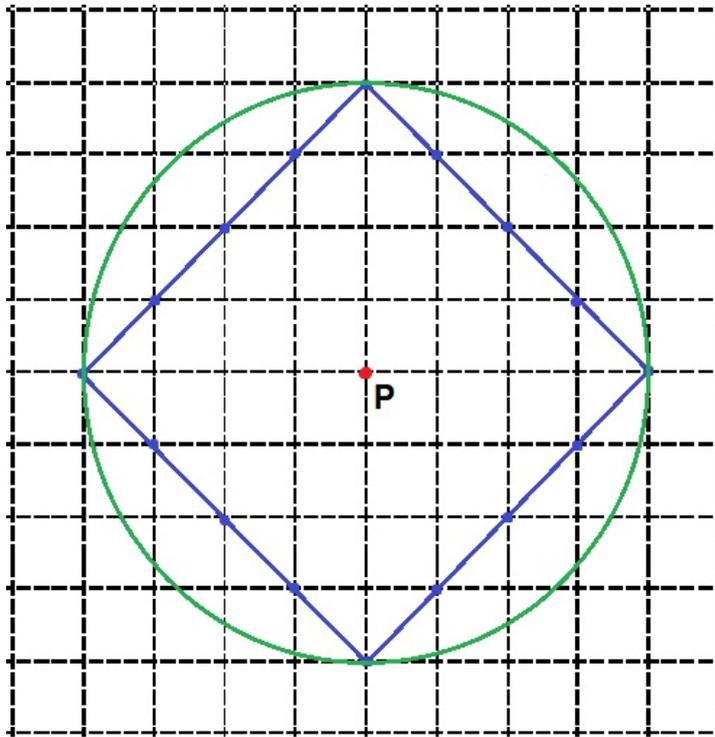
$$P_6^{6H,0V} = \frac{6!}{6!0!} = 1$$

- k.4) Existem 56 percursos distintos para Bruno ir ao shopping.

$$P_8^{5H,3V} = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

## Segunda atividade

- (a) Segue a resposta dos itens a.1), a.2) e a.3) na malha quadriculada abaixo.



(b) O centro (local da pizzaria) e o raio para entregas gratuitas são os mesmos, considerando a distância do táxi e a distância euclidiana, porém a área de cobertura para entregas gratuitas é maior quando considera a distância euclidiana, mas que inviável sua utilização para o cálculo de distâncias percorrida por entregadores haja visto que eles não movimentam em uma cidade em linha reta.

(c) Para a distância do táxi a equação que representa o limite máximo é dada por:  $|x - x_C| + |y - y_C| = 4$ , em que  $(x_C, y_C)$  é o centro e 4 é o raio.

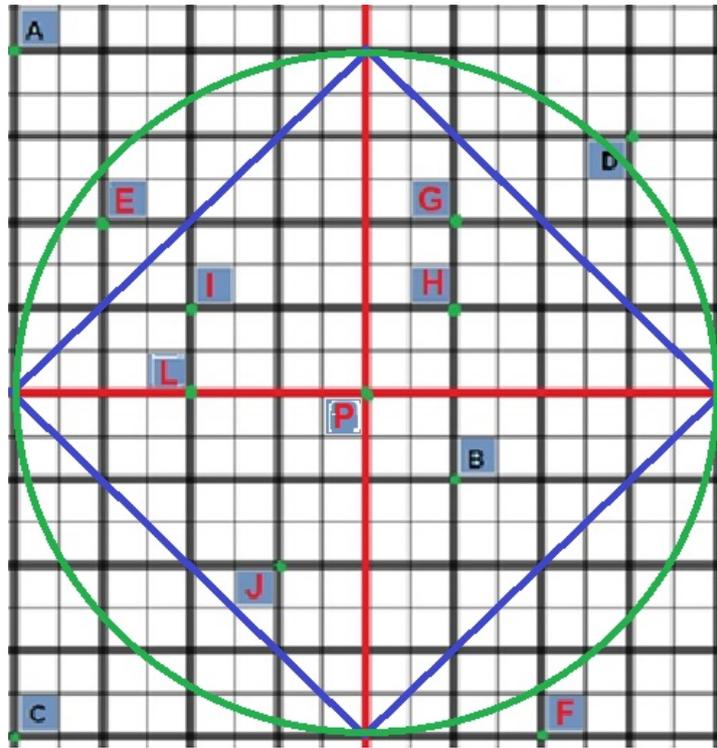
Para a distância euclidiana a equação que representa o limite máximo da região é dada por:  $\sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = 4$ , em que  $(x_C, y_C)$  é o centro e 4 é o raio.

(d)  $A = 4 \cdot A_T = 4 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 32$

(e)  $A = \pi \cdot r^2 \approx 3,14 \cdot 4^2 \approx 3,14 \cdot 16 \approx 50,24$

(f)  $\frac{50,24 - 32}{32} \cdot 100 = \frac{18,24}{32} \cdot 100 = 0,57 \cdot 100 = 57\%$

(g) Observando a figura:



g.1) Bruno não terá que pagar taxa de entrega.

g.2) O valor da taxa de entrega:

Ana:  $5 + 0,5 \cdot d_{AP} = 5 + 0,5 \cdot 4 = 5 + 2 = 7$

Bruno: 0

Carlos:  $5 + 0,5 \cdot d_{CP} = 5 + 0,5 \cdot 4 = 5 + 2 = 7$

Daniela:  $5 + 0,5 \cdot d_{DP} = 5 + 0,5 \cdot 3 = 5 + 1,5 = 6,5$

### Terceira atividade

(a) Equação da circunferência:

Na geometria euclidiana:  $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 5.$

Na geometria do táxi:  $|x-3| + |y-2| = 5.$

(b) Equações das elipses:

b.1) Na geometria euclidiana:  $\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} = 8.$

Na geometria do táxi:  $|x+0| + |y-3| + |x-0| + |y+3| = 8.$

b.2) Na geometria euclidiana:  $\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2} = 10.$

Na geometria do táxi:  $|x-4| + |y-1| + |x+4| + |y-1| = 10.$

(c) Equações das parábolas:

c.1) Na geometria euclidiana:  $\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \frac{|y-4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$ .

Na geometria do táxi:  $|x-0| + |y-2| = \frac{|y-4|}{\max\{|0|, |1|\}}$ .

(.2) Na geometria euclidiana:  $\sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = \frac{|x-2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$ .

Na geometria do táxi:  $|x+2| + |y-0| = \frac{|x-2|}{\max\{|1|, |0|\}}$ .

(d) Equações das hipérboles:

d.1) Na geometria euclidiana:  $|\sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}| = 4$

Na geometria do táxi:  $||x+2| + |y-0| - |x-2| - |y-0|| = 4$

d.2) Na geometria euclidiana:  $|\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2}| = 2$

Na geometria do táxi:  $||x+1| + |y-2| - |x-3| - |y+2|| = 2$

(e) Cônicas referentes aos itens (a), (b), (c) e (d), respectivamente.

**Figura B.1:** Circunferência (a).

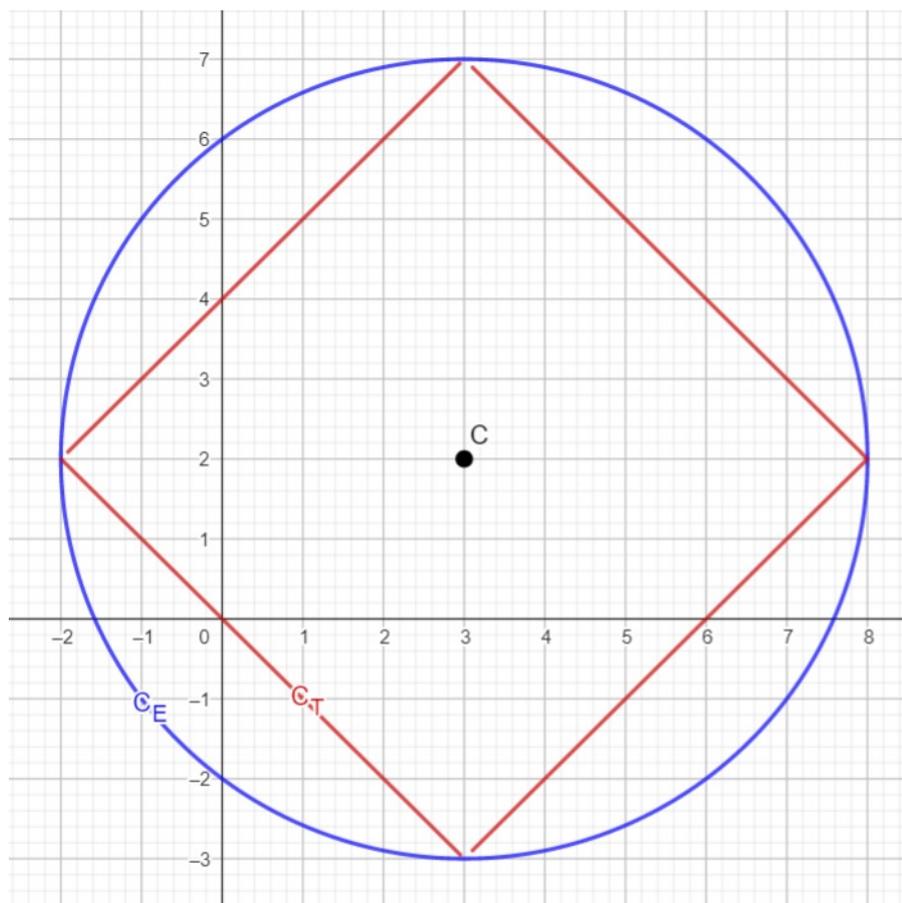


Figura B.2: Elipse b.1).

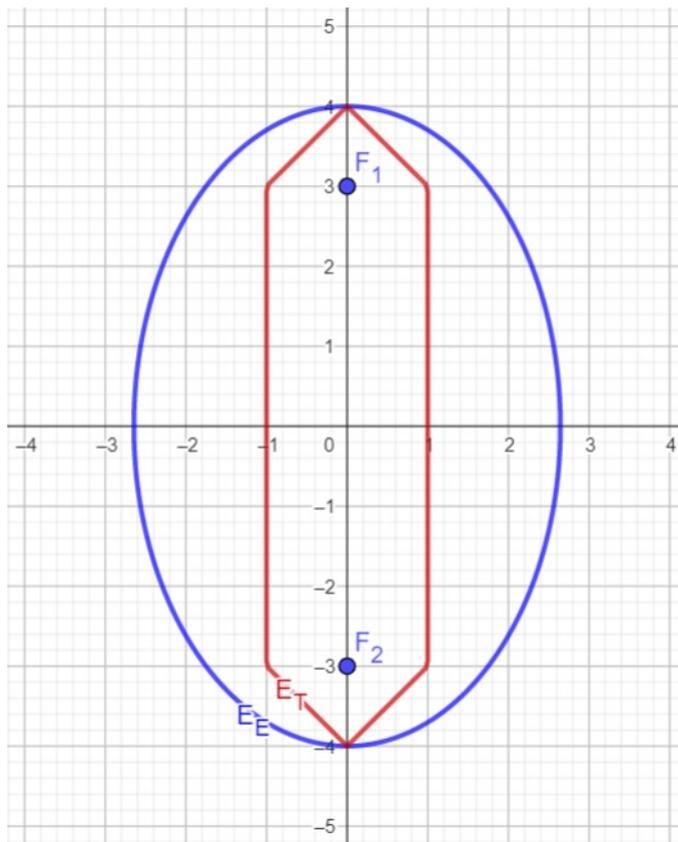


Figura B.3: Elipse b.2).

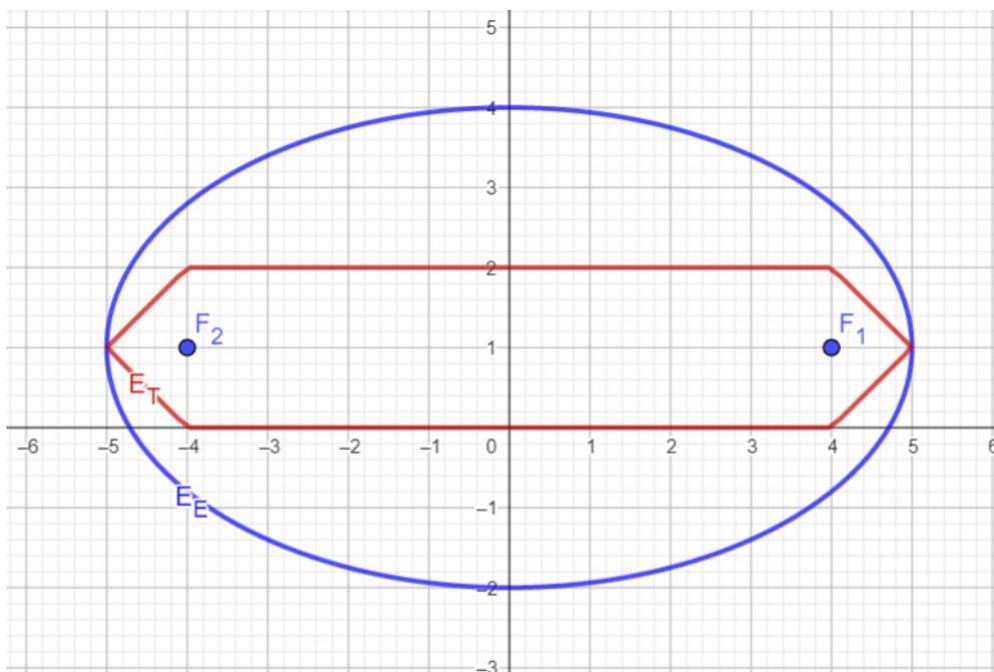


Figura B.4: Parábola c.1).

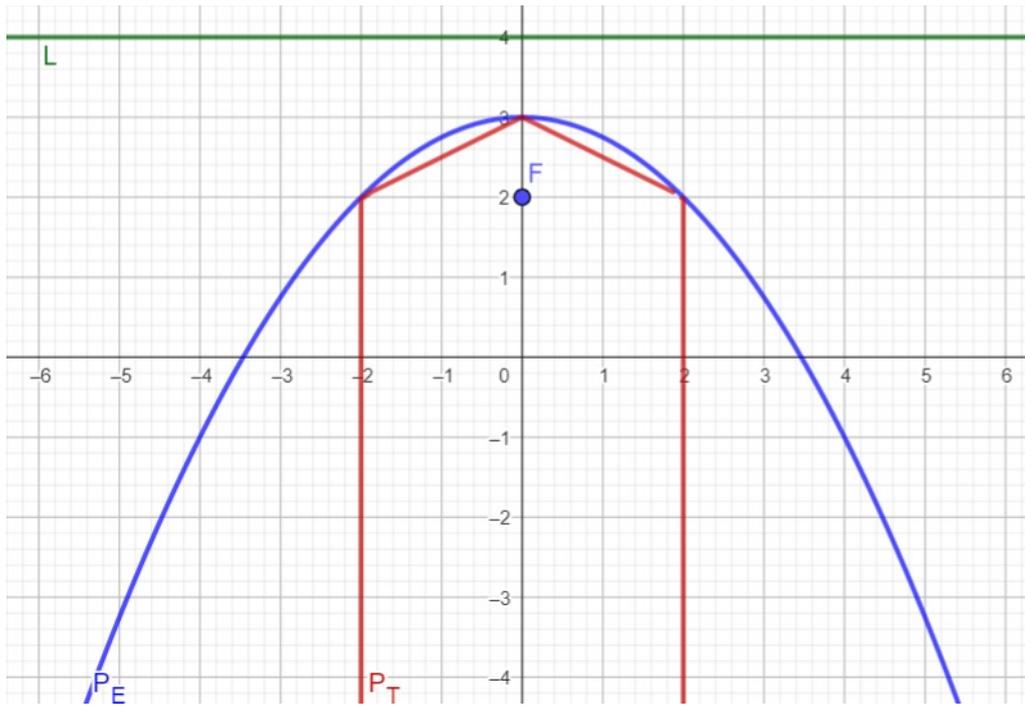


Figura B.5: Parábola c.2).

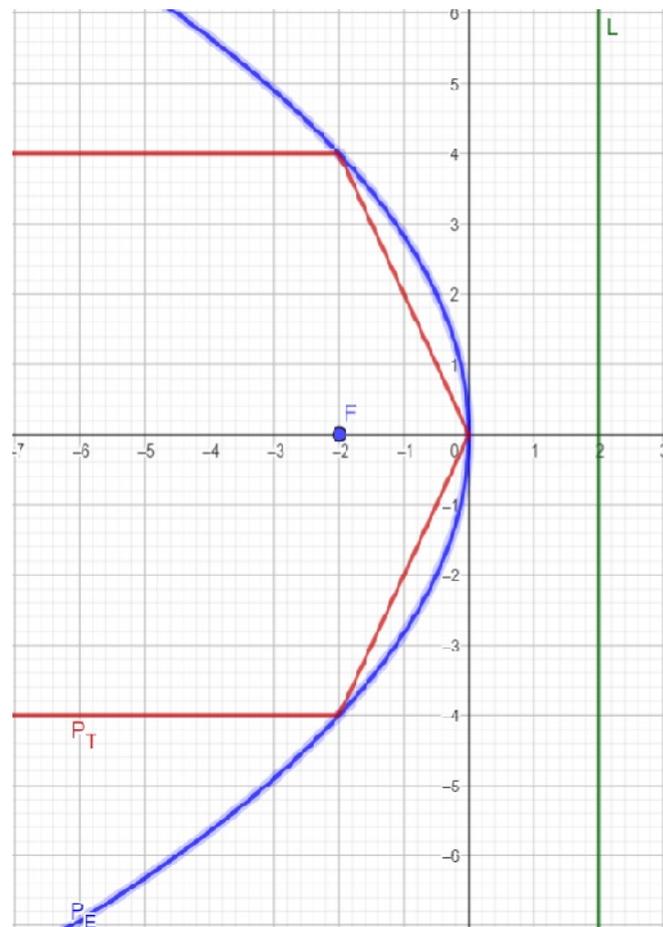


Figura B.6: Hipérbole d.1).

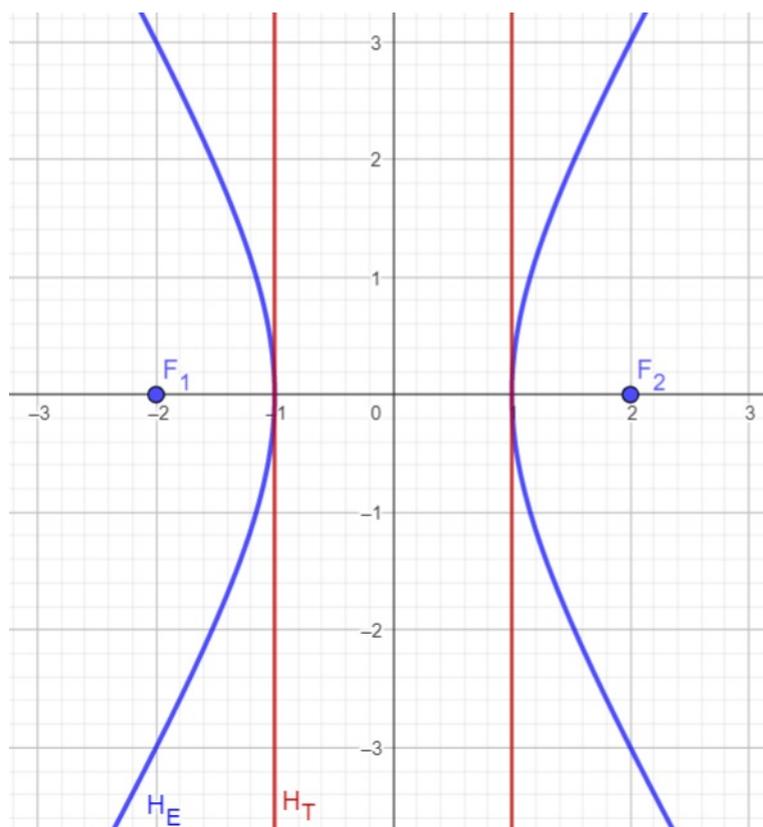
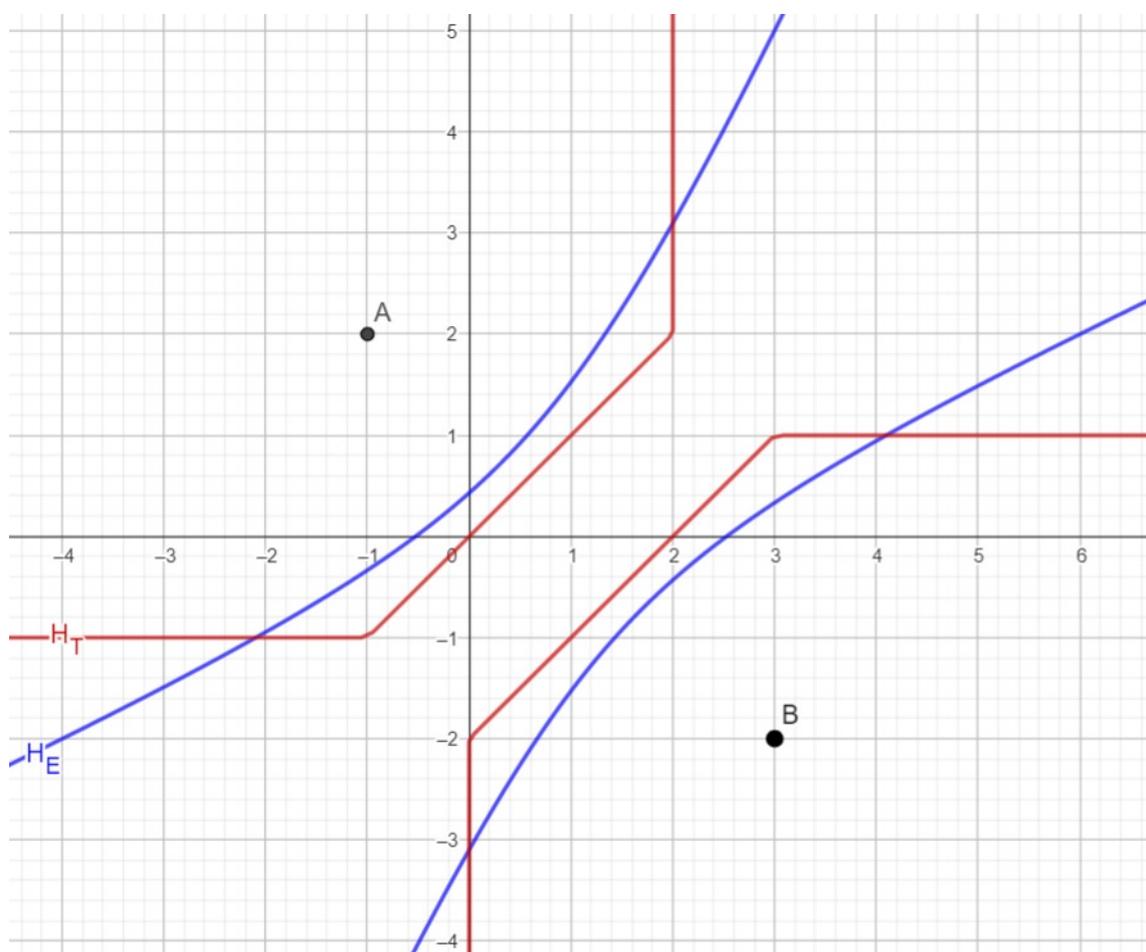


Figura B.7: Hipérbole d.2).



---

# Referências Bibliográficas

---

- [1] AABOE, A. **Episódios da história da matemática**: 3. ed. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 191 p. (Coleção Professor de Matemática; 18).
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>>. Acesso em: 17 jul. 2023.
- [3] COELHO, F.; SCHEID, E. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 7, n. 2, p. 187-196, 2012.
- [4] COUTINHO, L. **Convite às geometrias não euclidianas**: 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2018.
- [5] CRUZ, E. O. **Geometria do táxi: a táxi-elipse**. 2015. 72p. Dissertação - Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2015.
- [6] DOMINGUES, H. H. **Espaços métricos e introdução à topologia**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1982.
- [7] FERNANDES, D. A. P. **Lugares geométricos nas geometrias euclidiana X táxi: conceitos e possibilidades de abordagem no ensino**. 2017. 111 p. Dissertação - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2017.
- [8] GUSMÃO, N. L.; SAKAGUTI, F. Y.; PIRES, L. A. A geometria do táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, n. 2, 2017.
- [9] KRAUSE, E. F. **Taxicab geometry: an adventure in non-euclidean geometry**. New York: Dover Publications, 1986.

- [10] LEIVAS, J. C. Geometrias não euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 15, n. 3, p. 647-670, 2013.
- [11] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2009.
- [12] LOIOLA, C. A. G. **Um táxi para Euclides: uma geometria não euclidiana na educação básica**. 2014. 96 p. Tese - Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2014.
- [13] MACHADO, R. M. Minicurso: Explorando o geoplano. **II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**, v. 11, 2004. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf>>. Acesso em: 01 ago. 2023.
- [14] MINAS GERAIS. **Currículo Referência de Minas Gerais**. Minas Gerais: MEC, 2018. Disponível em: <<https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/>>. Acesso em: 17 jul. 2023.
- [15] NASCIMENTO, E. G. Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. **XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor**, v. 8457, p. 110 – 117, 2012.
- [16] OLIVEIRA, M. M. **Geometria do táxi: uma introdução na educação básica**. 2020. 109 p. Dissertação - Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2020.
- [17] OLIVEIRA, V. T. P. **Geometria do táxi: pelas ruas de uma cidade aprende-se uma geometria diferente**. 2014. 76 p. Dissertação - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.
- [18] PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. Sequência didática na matemática. **Revista de Educação do IDEAU**, v. 8, n. 17, p. 1-15, 2013.
- [19] PRESMIC, J. G. **Geometrias não euclidianas**. 2014. 50 p. Dissertação - Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.
- [20] SÁ, E. D.; CAMPOS, I. M.; SILVA, M. B. C. **Atendimento educacional especializado: deficiência visual**. Brasília: Gráfica e Editora Cromos, 2007.
- [21] ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.