Universidade Federal do ABC

PROFMAT

Alexandre Miranda Ferreira

A Ruína do Jogador: Uma análise para o Ensino Médio

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Santo André
2013

Universidade Federal do ABC

Alexandre Miranda Ferreira

A Ruína do Jogador: Uma Análise para o Ensino Médio

Orientador: Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, 15 de agosto de 2013

A Ruína do Jogador: Uma Análise para o Ensino Médio

Alexandre Miranda Ferreira

Este exemplar corresponde à redação final do trabalho de conclusão de curso devidamente corrigida e defendida por Alexandre Miranda Ferreira e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi (orientador) - UFABC.
- Prof. Dr. Daniel Miranda Machado - UFABC.
- Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos - UFAM.

Dedico este trabalho aos meus pais Maria José (in memoriam) e Amazonas (in memoriam) que, apesar de terem participado de uma pequena parte do que já vivi até aqui, deixaram memórias inesquecíveis e valores inestimáveis para minha existência. Este esforço também não teria se concretizado sem o apoio de minha amada esposa Ana Cristina, com sua compreensão e sua ajuda nos momentos mais difíceis. Reconheço ainda, com carinho, a colaboração de meus familiares e amigos que, durante todo o processo, participaram de forma insubstituível de cada etapa.

Agradecimentos

Agradeço aos que vislumbraram o potencial do projeto Profmat, aos professores que arregaçaram suas mangas e colocaram o curso para funcionar. Obrigado membros do Conselho Gestor, em especial os representantes da Capes, que garantiu um essencial financiamento aos trabalhos em geral. Obrigado UFABC, por abrigar boa parte das minhas tarefas, dando estrutura suficiente para suas realizações. Sou grato também aos coordenadores e membros da Comissão Nacional que ocuparam-se em resolver problemas individuais das diversas regiões participantes. Ao nosso coordenador local e professor Rodney Bassanezi, com sua constante preocupação em atender as solicitações dos alunos. Ao meu orientador e professor Rafael de Mattos Grisi e seu incansável desdobramento, dedicado a acompanhar os trabalhos dos alunos e a dar apoio às tarefas administrativas do curso. Penso que o professor Rafael, sempre acessível, solícito e paciente, foi imprescindível na conclusão desta minha principal etapa de formação profissional. Não há como esquecer dos demais professores, Armando, Daniel, João e Sinuê. Cada um a seu modo, todos os que lecionaram para a turma de 2011, mostraram ser doutores também na missão de indicar o caminho do conhecimento e da busca do sonho de cada discente. Sou ainda muito grato pela sorte de ter encontrado colegas tão lutadores e determinados. Certamente nossas paixões pelos números farão com que nossos destinos se comportem como retas concorrentes muitas vezes antes dos limites das nossas vidas nada infinitas.

Resumo

Neste trabalho estudamos o conhecido problema da ruína do jogador e alguns desdobramentos, como forma de introduzir e motivar o estudo da teoria das probabilidades no ensino fundamental. Trata-se de um problema simples, de fácil explanação, mas com um solução que requer mais do que apenas a contagem de casos favoráveis. Abordamos o problema considerando diferentes estratégias de jogo, mostrando como a matemática pode trazer resultados que a simples intuição não alcança. No capítulo final usamos os resultados do problema da ruína do jogador no estudo de um modelo aleatório para comparação de dois medicamentos. Terminamos o trabalho introduzindo brevemente o chamado passeio aleatório simples, como forma de generalizar o modelo da ruína do jogador.

Palavras-chave: Esperança, Lei dos Grandes Números, Probabilidade, Ruína do Jogador, Variáveis Aleatórias

Abstract

In this work we study the gambler's ruin problem as a way to introduce and motivate the study of probability theory in high school. This is a simple problem, easy to state, but with a solution that requires more than just the counting of favorable cases. We address the problem considering different player strategies, showing how mathematics can bring results that simple intuition may not be able to reach. In the final chapter we use the previous results to analyze a random model for the comparison of two drugs. We finish the work by briefly introducing the so-called simple random walk as generalization of the gambler's ruin problem.

Keywords: Expectation, Law of large numbers, Probability, Gambler´s Ruin, Random variables.

Conteúdo

Introdução

São inúmeras as situações do cotidiano que envolvem resultados imprevisíveis. A incerteza está presente sob diversos aspectos na vida do homem. Ficamos limitados a analisar e a comparar resultados potenciais. A Teoria da Probabilidade apareceu então como uma ferramenta que quantificava esta aleatoriedade. Sua criação está intimamente ligada à circunstâncias que eram de interesse no século XVII . Os jogos de azar, que envolviam lançamentos de dados, distribuições de cartas e arremessos de bolinhas em roletas chamaram a atenção de Blaise Pascal (1623-1662) e de Pierre Fermat (1601-1665). Estes matemáticos famosos, que se comunicavam por correspondência, descreveram desenvolvimentos distintos mas chegaram a resultados comuns sobre diversas idéias. Estes novos conhecimentos vieram a constituir os primórdios da Teoria das Probabilidades. Nos dias atuais, no que diz respeito à realidade do jovem que vive sua fase de estudante do nível médio escolar, estão distantes as curiosidades a respeito das probabilidades inerentes aos jogos de azar. Talvez algum adolescente, num universo de centenas deles, já tenha dedicado alguns minutos de sua vida para tentar calcular a real probabilidade de que seu time do coração conquiste o prêmio máximo do campeonato de futebol. Deparou-se assim com um árduo trabalho e passou imediatamente para o grupo dos desinteressados. Mais distantes ainda estão as investigações acerca das possibilidades de aquisições de fortunas em jogos de cartas ou de dados. Longe das práticas do cotidiano da maioria dos brasileiros, tais atividades não aparecem nas grades de programação dos canais da tv aberta ou nas folhas dos jornais famosos. Aqui neste trabalho voltamos ao assuntos que motivaram os primeiros passos no estudo das probabilidades. Tentaremos então, mostrar como usá-los no ensino desta área.

No capítulo 1, introduzimos alguns conceitos teóricos úteis na compreensão dos problemas tratados mais a frente. Tentamos colocá-los de maneira menos formal e um pouco mais intuitiva para o leitor. É possível que em algum momento tenhamos ido um pouco além do necessário, mas isso ficará para o leitor decidir.

Uma vez estabelecidas as ferramentas matemáticas, no capítulo 2 passaremos a analisar um modelo simples de jogo de azar, onde um jogador enfrenta uma banca em um jogo simples. Tal análise tem por intuito exemplificar o uso da probabilidade para além da contagem de “casos favoráveis”, tão comum na abordagem atual do ensino médio. As ferramentas usadas na solução deste problema, apesar de não estarem todas no atual currículo do ensino médio, são simples o suficiente para que os alunos neste nível a compreendam. Analisaremos duas estratégias em um mesmo jogo, mostrando com um exemplo simples como modelos matemáticos podem revelar comportamentos e resultados que por vezes a simples intuição não alcança. Terminamos o capítulo com algumas atividades para dar sequência as análises iniciadas no texto.

No capítulo 3 mostramos através de exemplos como um mesmo modelo matemático pode ser usado para representar e estudar situações completamente distintas. Na primeira parte mostramos como o usar as técnicas do capítulo anterior para comparar a administração de dois medicamentos em um grupo de pacientes, e assim decidir qual deles é mais eficaz. Estas pessoas, divididas em pares, apresentavam reações de cura diante da injestão de um dos dois remédios. A comparação do total de pessoas curadas por cada remédio, leva a um modelo similar ao modelo de jogo analisado anteriormente. Assim, usamos as mesmas ferramentas para decidir qual o melhor remédio. Completamos com uma análise parcial de passeios aleatórios, encerrando com algumas atividades relativas a este modelo.

Capítulo 1

Conceitos Teóricos

Neste capítulo trataremos brevemente de alguns conceitos importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Faremos a apresentação de maneira rápida e concisa, porém suficiente para a compreensão dos assuntos aqui abordados. Todos os conceitos apresentados abaixo estão presentes em grande parte dos livros de probabilidade, mas a maior parte deles não é normalmente apresentada nos conteúdos do ensino básico. Tentaremos fazer o texto mais simples e acessível ao aluno do ensino médio. O leitor interessado em uma explicação mais detalhada dos conceitos desenvolvidos pode encontrar em [5, 1, 3].

1.1 Probabilidade

Para a matemática, a passagem do século XVII para o XVIII marcou a história com diversos pensamentos direcionados para as incertezas pertinentes aos fatos. Entre os curiosos, destacava-se Abrahan De Moivre (1667 - 1754), um francês que vislumbrava a criação de uma "nova álgebra" para concentrar os conceitos que explicavam os pensamentos de diversos matemáticos sobre o assunto. Entretanto, os primeiros cálculos de probabilidades, feitos através da determinação da razão entre a quantidade de casos favoráveis e a de casos possíveis, já eram rabiscados por Jerônimo Cardano (1501 - 1576).

Ainda nos dias atuais, vivenciamos diversas circunstâncias cujo desfecho é comandado pelo acaso. No intuito de organizar as idéias, pensemos na diversidade de situações em que isso acontece e tentemos modelar as ocorrências de acordo com suas complexidades. Estaremos então envolvidos concretamente com a Teoria das Probabilidades.

Ao repetirmos um experimento diversas vezes, seguindo sempre as mesmas condições, podem aparecer resultados diferentes e imprevisíveis. Este fator o classifica como aleatório. É oposto a um experimento determinístico, que se caracteriza por ter resultado final controlável. Se tivermos domínio sobre as condições de um ensaio e isto influenciar seu resultado final devemos classificá-lo como determinístico. Se conseguíssemos manter total controle sobre a forma como seguramos um dado antes de jogá-lo, sobre a altura específica que o arremesso deve atingir, sobre a exata distância da mesa que devemos estar e sobre todos os outros fatores físicos envolvidos no lançamento, este experimento seria então determinístico. Podemos pensar então que, ao menos neste caso, a aleatoriedade modela ou representa todos os fatores que não controlamos. Soltar uma moeda diversas vezes, sempre com a Efígie da República voltada para cima, de uma altura de 1 centímetro e perceber que obviamente ficará constantemente aparente a face cara, é um experimento determinístico. Por outro lado, se arremessarmos a moeda para cima, fazendo-a sempre girar diversas vezes, esperando que caia sobre o chão para verificarmos a face aparente, estaremos realizando um experimento aleatório, já que será impossível prever os resultados finais.

O primeiro passo na modelagem matemática de um experimento qualquer é identificar todos os seus resultados possíveis. A este conjunto daremos o nome de *Espaço Amostral*, e denotaremos por Ω. Temos assim que

Definição 1.1. Chamaremos de **Espaço Amostral** o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

O lançamento de uma moeda comum nos oferece o espaço amostral

$$\Omega = \{\text{cara, coroa}\},$$

enquanto o lançamento de um dado possui

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Seguem alguns exemplos que podem ajudar e esclarecer o conceito

Exemplo 1.1.

Experimento: Lançar duas moedas.

Espaço Amostral:

$$\Omega = \{(\text{cara, cara}); (\text{cara, coroa}); (\text{coroa, cara}); (\text{coroa, coroa})\}.$$

Exemplo 1.2.

Experimento: Escolher uma pessoa na rua e perguntar sobre intenção de voto em uma eleição com 3 candidatos.

Espaço Amostral:

$$\Omega = \{\text{Branco, Nulo, Indeciso, Candidato 1, Candidato 2, Candidato 3}\}.$$

O próximo passo é identificar as observações de interesse. No lançamento de uma moeda, por exemplo, estamos interessados unicamente na face que é sorteada mas, no lançamento de um dado podemos, por exemplo, querer saber apenas se o número lançado é par. Estes fatos observáveis são chamados de ***eventos*** e são basicamente subconjuntos do espaço amostral.

Assim, se $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$, seus 4 subconjuntos seriam $\emptyset$, $\{\text{cara}\}$, $\{\text{coroa}\}$ e $\{\text{cara, coroa}\}$. São estes então os eventos relacionados ao experimento.

Vamos clarear mais as idéias com outro exemplo.

Exemplo 1.3. Uma urna formada por vidros opacos contém bolinhas numeradas de 1 a 9, não necessariamente de mesma dimensão, cor ou peso. O experimento consiste em sortear uma bola da urna. Temos imediatamente que

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

O evento $E_1 = \{\text{sortearmos uma bolinha cujo valor é um número primo ímpar}\}$ é representado por

$$E_1 = \{3, 5, 7\}.$$

O evento $E_2 = \{\text{sortearmos uma bolinha cujo valor é um número de dois algarismos}\}$ equivale à

$$E_2 = \emptyset.$$

enquanto o evento $E_3 = \{\text{sortearmos uma bolinha cujo valor é um número de um algarismo}\}$ equivale à

$$E_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \Omega.$$

O espaço amostral pode, em alguns casos, ser um conjunto infinito. Imaginemos, por exemplo, que sejam feitas sucessivas retiradas (sempre com reposição) de bolinhas da urna do exemplo acima, de tal forma que o processo só cessa quando é retirada a de valor 8. Por se tratar de um experimento aleatório, podem ser necessárias diversas tentativas até que saia este número. Um resultado possível deste experimento é $(1, 3, 7, 5, 8)$ e, neste caso, teríamos que o primeiro valor sorteado foi 1, o segundo 3, o terceiro 7, o quarto 5 e o quinto 8, encerrando o sorteio. Usando esta mesma representação, outros resultados possíveis são $(5, 8)$, $(2, 1, 1, 4, 7, 8)$ ou mesmo (8). Assim, o espaço amostral deste experimento seria o conjunto de todas as sequência finitas de números do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ onde o último é 8 e os anteriores são diferentes de 8. Ou seja,

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 8) : \; n \geq 1, \; a_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}, \; k = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Neste caso o evento $E = \{\text{foram necessários 2 sorteios}\}$ é equivalente a

$$E = \{(1, 8); (2, 8); (3, 8); (4, 8); (5, 8); (6, 8); (7, 8); (9, 8)\}.$$

Antes de finalmente seguirmos para a definição do que entenderemos por probabilidade, precisamos compreender melhor como os eventos se relacionam uns com os outros. Como vimos, eles são subconjuntos de um espaço amostral e, deste modo, podemos manipulá-los usando todas as operações naturais sobre conjuntos como união, interseção e complementos. Para fixar idéias, considere o exemplo 1.3 acima, onde sorteamos uma bola em uma caixa com 9 numeradas, e considere os eventos :

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{\text{sortear um número ímpar}\} \\ B &= \{2, 4, 6, 8\} = \{\text{sortear um número par}\} \\ C &= \{1, 2, 3, 5, 7, 9\} = \{\text{sortear um número primo}\} \\ D &= \{1, 2, 3, 4\} = \{\text{sortear um número menor que 5}\} \end{aligned}$$

União de eventos Ao unirmos dois conjuntos estamos criando um novo conjunto formado por todos os elementos contidos em algum dos dois originais. Em outras palavras, para que um elemento esteja na união $C \cup D$ é necessário e suficiente que ele esteja em C **ou em** D.

Pensando na realização do nosso experimento aleatório, podemos dizer que ocorre a união $C \cup D$ de dois eventos sempre que ocorre C ou ocorre D. Assim, considerando os eventos descritos acima temos

$$C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} = \{\text{sortear um número primo ou um número menor que 5}\}.$$

Observe que não é necessário que observemos apenas um deles. Se no sorteio retirarmos a bola de número 2, ainda assim estamos observando o evento $C \cup D$, e 2 é um número primo, menor que 5. Os eventos A e B acima são portanto mutuamente exclusivos, pois $A \cap B = \emptyset$. Ou seja, um número não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo.

Interseção de eventos Como sabemos, a interseção é o conjunto formado por todos os elementos comuns aos conjuntos considerados. Assim, dizer que na realização de um experimento aleatório foi observada a interseção de dois eventos C e D, é o mesmo que dizer que C foi observado **e** D também ocorreu.

Assim, ainda considerando os eventos descritos acima temos:

$$C \cap D = \{2\} = \{\text{sortear um número que é primo e menor que } 5\}.$$

Dois eventos que não podem ocorrer simultaneamente tem portanto a interseção vazia. Neste caso, diremos que estes eventos são *mutuamente exclusivos*. Esta definição pode ser estendida para uma família de eventos, de acordo com a definição abaixo.

Definição 1.2. Dado um espaço amostral Ω, diremos que $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ são eventos *mutuamente exclusivos* se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para quaisquer $i \neq j$.

Em outras palavras, $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ são mutuamente exclusivos se nenhum par de eventos puder ser observado simultaneamente em um experimento aleatório.

Assim os eventos $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 5\}$, $A_3 = \{6, 7\}$ e $A_4 = \{9\}$ são mutuamente exclusivos, mas os eventos $B_1 = \{1, 3, 5\}$, $B_2 = \{1, 2, 4\}$ e $B_3 = \{7, 8, 9\}$ não são, pois $B_1 \cap B_2 = \{1\} \neq \emptyset$.

Complementar de um evento Esta é a mais simples e intuitiva das operações que podemos realizar com um evento. Como era de se esperar, dizer que ocorreu o complementar de um evento, é o mesmo que dizer que o evento não ocorreu. Ou seja, o complementar A^c de um evento A é formado por todos os elementos de Ω que não estão em A.

Nos eventos listados acima, por exemplo, o complementar do evento $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ é $A^c = \{2, 4, 6, 8\}$.

Após a precisa identificação de Ω e de seus eventos, é necessário que associemos a cada um sua probabilidade numérica. Para exemplificar novamente, pensemos no lançamento consecutivo de duas moedas não viciadas (a chance, para cada moeda, de cair a face cara é igual à de cair a face coroa). Desejando refletir sobre a possibilidade de ocorrência do evento $E = \{$sairá pelo menos uma face coroa$\}$ devemos antes analisar o espaço amostral:

$$\Omega = \{(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\},$$

e perceber que ele possui três elementos favoráveis ao acontecimento do evento. Eles compõe o conjunto

$$E = \{(cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\}.$$

Para atribuir a probabilidade de E temos que considerar as condição sobre a qual estamos realizando o experimento. Assim, levando em consideração que as moedas não são viciadas, é razoável pensar que cada resultado possível tem a mesma possibilidade de ocorrer que os outros e portanto dizemos que a probabilidade de E é $3/4$, ou ainda $\mathbb{P}(E) = 3/4$.

Fazendo o mesmo para todos os eventos de Ω, chegamos a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{4},$$

onde $|A|$ é o número de elementos do evento $A \subseteq \Omega$.

É importante perceber que os valores de $\mathbb{P}(A)$ escolhidos acima são um modelo matemático usado para representar o experimento aleatório de lançar duas moedas não viciadas, e que os valores foram escolhidos com base no que conhecemos ou não sobre o experimento e a maneira como ele foi realizado.

Deste modo, considerando o mesmo espaço amostral , podemos atribuir outros valores de probabilidades aos eventos de Ω, desta vez para modelar outro experimento, ou ainda o mesmo experimento em condições distintas. Considere, por exemplo, que utilizamos neste mesmo experimento moedas viciadas. Suponha que, por experiência, saibamos que, nestas moedas, aparece *cara* com uma frequência duas vezes maior que a outra face. Ou seja, no lançamento de uma das moedas, obtemos *cara* em aproximadamente $2/3$ das vezes, e coroa em $1/3$ dos lançamentos.

Para atribuir então uma probabilidade ao evento $\{(cara, cara)\}$ podemos usar o seguinte raciocínio: a cada 9 lançamentos, a primeira moeda vai dar *cara* em aproximadamente 6 ($2/3$ dos 9). Destes 6 lançamentos, a segunda moeda vai resultar em *cara* $2/3$ das vezes, ou seja, em 4 deles. Assim, em 9 lançamentos das duas moedas, esperamos obter cara nas duas moedas em 4 deles. E portanto é razoável pensar que

$$\mathbb{P}(\{(cara, cara)\}) = \frac{4}{9}.$$

Do mesmo jeito concluímos que

$$\mathbb{P}(\{(coroa, coroa)\}) = \frac{1}{9}$$
$$\mathbb{P}(\{(cara, coroa)\}) = \frac{2}{9}$$
$$\mathbb{P}(\{(coroa, cara)\}) = \frac{2}{9},$$

e a probabilidade de um evento qualquer seria dada pela soma das probabilidades de seus elementos.

Isso nos mostra que em um mesmo espaço amostral, dependendo das condições sob as quais realizamos um experimento, temos mais uma maneira de escolher as probabilidade dos diversos eventos.

A pergunta que surge agora é: de que maneira podemos escolher as probabilidades dos diversos eventos em um espaço amostral? Não faz sentido, por exemplo, falarmos em uma probabilidade maior que 1, ou mesmo em probabilidades negativas, mas que outras regras temos que seguir?

Ao lançar uma moeda viciada, por exemplo, não podemos falar que a probabilidade de cara é 3/2, ou mesmo que a probabilidade de cara é 1/3 e a de coroa é 1/6 pois, neste caso o espaço amostral inteiro teria probabilidade 1/2 de ocorrer!!

Como fazer então? Como verificar se os valores atribuídos são realmente consistentes? Um forma de fazer isso é listar todas as propriedades mínimas que este elemento deve ter e, uma vez que elas estejam elencadas, chamar de *probabilidade* qualquer objeto que satisfaça estas propriedades.

Definição 1.3. Seja Ω um espaço amostral associado a um experimento aleatório. Diremos que $\mathbb{P}(\cdot)$ é uma *probabilidade em* Ω, e leremos $\mathbb{P}(E)$ como *probabilidade de* E, se

Axioma 1

$$0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1, \text{ para todo evento } E \subseteq \Omega \tag{1.1}$$

Axioma 2

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0. \tag{1.2}$$

Axioma 3

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \cdots + \mathbb{P}(E_n) \tag{1.3}$$

para quaisquer eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n \subseteq \Omega$ mutuamente exclusivos.

Vamos discutir agora cada um dos axiomas (ou propriedades) acima.

Axioma 1

A probabilidade de um evento deve representar a frequência com a qual o observamos em uma série de repetições do experimento e portanto deve ser sempre um valor real entre 0 e 1.

Axioma 2

O espaço amostral é a coleção de todos os resultados possíveis, de modo que sempre observaremos um resultado contido nele e não existem eventos exteriores, dando a Ω probabilidade 1.

Axioma 3

Para compreender este axioma, voltemos novamente à ideia de frequência. Ao realizarmos o experimento aleatório uma vez, dizer que observamos a união de eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ é o mesmo que dizer que observamos *ao menos* um dos eventos E_i. Por outro lado, dizer que eventos são mutuamente exclusivos é o mesmo que dizer que nenhum par destes eventos pode ser observado ao mesmo tempo. Com isso, ao repetirmos o experimento várias vezes, o total de observações da união é a soma do total de vezes que observamos cada evento, e é esta propriedade que descrevemos aqui.

Ainda sobre o axioma 3, observemos um caso específico.

Exemplo 1.4. Em um jogo de bingo existem 75 bolas numeradas, todas de mesma dimensão e peso, sorteadas uma a uma até que alguém complete uma cartela. Vamos considerar apenas a primeira bola sorteada. Neste caso, dadas as condições listadas, podemos supor que cada bola tenha a mesma probabilidade de ser sorteada, e portanto a probabilidade de um evento é simplesmente a fração entre o total de seus elementos e o total de elementos na urna (75, no caso). Seja o evento

$$E_C = \{\text{ser sorteada no bingo a bolinha } B1 \text{ \underline{ou} a bolinha } N35\}.$$

A probabilidade de ocorrência de E_C é igual à soma das probabilidades de sorteio de cada bolinha. Se analisássemos as razões entre as quantidades de elementos de cada evento e a de Ω encontraríamos :

$$\frac{1}{75} + \frac{1}{75} = \frac{2}{75}$$

já que se trata de eventos mutuamente exclusivos. Valendo-se da mesma situação prática acima, vamos acrescentar outro caso. Os eventos E_D=\{ ser sorteada uma bolinha com a letra G } e E_F={ ser sorteada uma bolinha com um número par }, que não são mutuamente exclusivos, apresentam, analogamente, as seguintes razões :

$$\mathbb{P}(E_D) = \frac{15}{75} = \frac{1}{5} \qquad \mathbb{P}(E_F) = \frac{37}{75}$$

Observando os eventos E_D e E_F, percebemos a interseção entre eles não é um conjunto vazio. O fato de que o "cantador"do bingo informou que a letra da bolinha extraída da urna é G não anula a possibilidade de que o seu número seja par. Note que a interseção destes eventos é dada por

$$E_D \cap E_F = \{G46, G48, G50, G52, G54, G56, G58, G60\}$$

Propriedades Dos axiomas que definem uma probabilidade podemos concluir algumas propriedades importantes, que serão úteis para os exemplos dos próximos capítulos.

Considere então um espaço amostral Ω e um evento $A \subseteq \Omega$ qualquer. Observe que, pela definição de evento complementar, $A \cap A^c = \emptyset$. Segue que A e A^c são mutuamente exclusivos, e portanto

$$\mathbb{P}(A \cap A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c).$$

Por outro lado, $\Omega = A \cup A^c$, de onde segue que $\mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Juntando estas duas informações concluímos que $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$. Ou ainda,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Listamos abaixo algumas destas propriedades, cujas verificações deixamos para o leitor interessado

Propriedades de uma probabilidade

1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, para qualquer evento A;
2. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$, para quaisquer eventos A e B;
3. Se $A \subset B$, então $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, para quaisquer eventos A e B;
5. $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, para quaisquer eventos A e B.

1.1.1 Probabilidade Condicional

Da mesma forma que as condições sob as quais um experimento é realizado influenciam na probabilidade dos eventos que observamos, informações parciais sobre o resultado de um dado experimento podem modificar o modelo que resolvemos usar. É exatamente este processo que jogadores de carta experientes fazem durante um jogo. Cada vez que ele recebe cartas, ou que cartas descartadas aparecem na mesa, o jogador recalcula as probabilidades, avaliando assim que jogada leva ele a uma maior probabilidade de vitória.

Para entender este conceito, voltemos ao exemplo 1.3, onde sorteávamos em uma caixa uma bola numerada de 1 a 9. Como todas as bolas são idênticas, podemos assumir que a probabilidade de cada uma delas ser sorteada é igual a 1/9.

Considere, por um instante, o evento $A = \{\text{sortear um valor acima de } 5\}$. Suponha agora que, após o sorteio ser realizado, um colega olha a bola e te passa a informação de que a bola sorteada é impar. Como esta informação muda a probabilidade do evento A?

Como $A = \{6, 7, 8, 9\}$, antes de receber a informação você sabia que $\mathbb{P}(A) = 4/9$. Mas agora você sabe que o valor sorteado é impar, de modo que os única forma de ocorrer A é que sejam sorteados os números 7 ou 9. Ao mesmo tempo, você sabe que só podem ter sido sorteados os valores 1, 3, 5, 7 ou 9. Com isso você rapidamente conclui que a nova probabilidade de A é $2/5$. Chamando de B o evento de que o valor sorteado é impar, denotaremos este fato por

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{2}{5},$$

e leremos que *a probabilidade de* A *dado* B é $2/5$.

Vamos agora tentar estender estas ideias para um caso qualquer. Quando recebemos a informação de que ocorreu um evento $B \subseteq \Omega$, imediatamente descartamos todos os resultados pertencentes ao complementar de B, pois estes claramente não podem ter ocorrido. Assim, para reavaliar a probabilidade de A, consideramos agora apenas o evento $A \cap B$. Sabemos ainda que a nova probabilidade de B deve ser 1 (por que?), e temos que recalcular todas as probabilidades na mesma proporção. Com isso chegamos a seguinte definição

Definição 1.4. Sejam $A, B \subseteq \Omega$ eventos em um espaço amostral Ω, tais que $\mathbb{P}(B) > 0$. Nestas condições, definimos a *probabilidade de* A *dado* B como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1.4}$$

Para tentar entender melhor a definição acima, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 1.5. Considere o experimento de lançar duas vezes uma moeda não-viciada. Estamos interessados no evento $A = \{$a primeira moeda resultou em cara$\}$. Após o lançamento nos é passada a informação de que uma das moedas foi *cara*.

Qual a probabilidade condicional de que a primeira moeda tenha dado *cara*?

Para responder esta pergunta, vamos organizar as informações que temos. Primeiro temos os eventos

$$A = \{(cara, cara), (cara, coroa)\}$$

e

$$B = \{(cara, cara), (coroa, cara), (cara, coroa)\}$$

. Segue que $A \cap B = \{(cara, cara), (cara, coroa)\} = A$, e assim

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

Para continuar nosso estudo, vamos nos adiantar um pouco e descrever brevemente o problema que estudaremos no próximo capítulo.

Considere uma disputa em que um determinado jogador lança moedas e ganha determinado valor quando a face aparente é cara. Além disso, se o resultado do lançamento for coroa, ele perde a mesma quantia. Supondo que seu objetivo seja o de conquistar determinada fortuna N, considere os eventos

$$K = \{\text{o primeiro lançamento apresentará resultado cara}\},$$

e

$$E = \{\text{será conquistada a fortuna } N\}.$$

É imediatamente aceitável que é possível para o jogador conquistar N reais, tendo obtido cara no primeiro lançamento. Isso significa que K e E não são disjuntos ($K \cap E \neq \emptyset$). Portanto, ao representarmos os dois conjuntos em um diagrama, temos o aspecto apresentado na figura 1.1.

Segue que

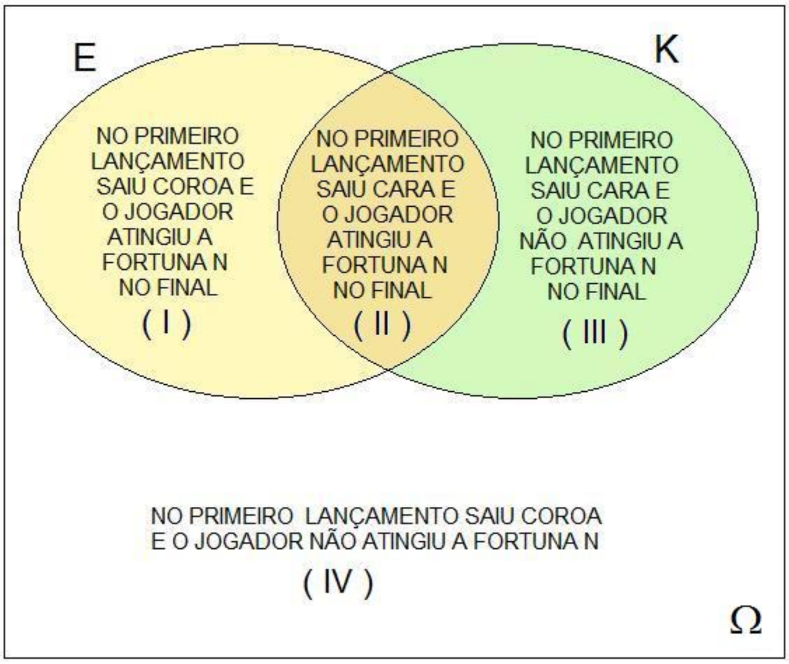


Figura 1.1: Relação entre os eventos E e K.

- $K^c = \{$o primeiro lançamento apresentou a face coroa$\}$
- $E = (E \cap K) \cup (E \cap K^c)$.

O entender melhor o último item, observe as figuras 1.2,1.3 e 1.4. O conjunto E é composto pela união entre as partes (I) e (II), que correspondem respectivamente aos conjuntos $E \cap K^c$ e $E \cap K$.

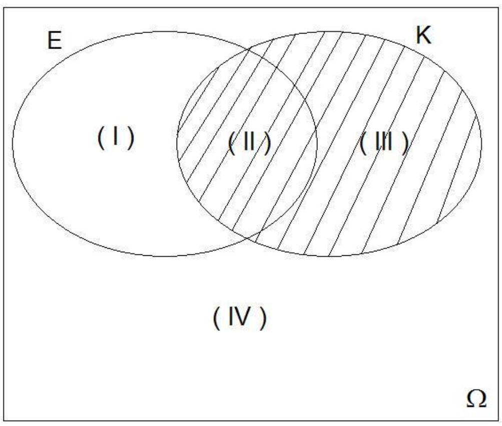


Figura 1.2: Evento K (regiões II e III).

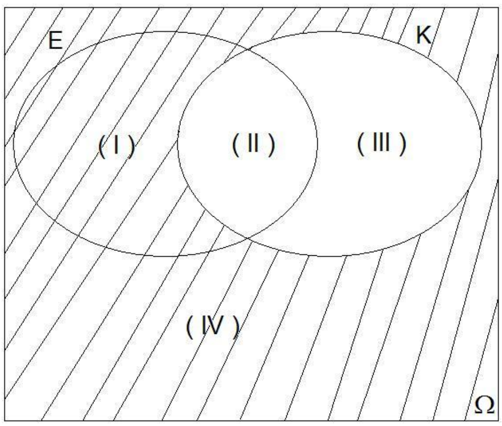


Figura 1.3: Evento K (regiões I e IV)

Como os eventos $E \cap K$ e $E \cap K^c$ são mutuamente exclusivos (observe novamente a

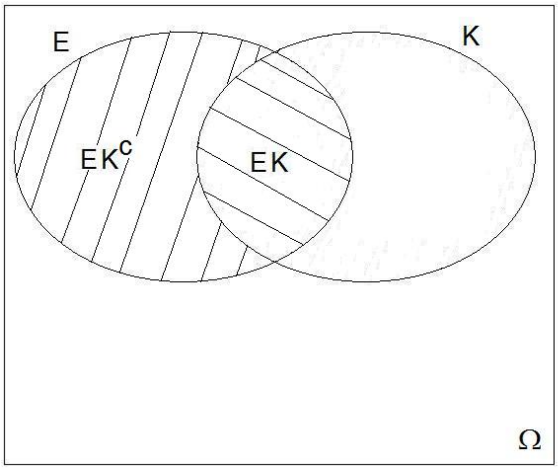


Figura 1.4: Composição do evento E

figura 1.4), segue que

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap K) + \mathbb{P}(E \cap K^c). \tag{1.5}$$

Agora, da definição de probabilidade condicional (equação (1.4)), temos que

$$\mathbb{P}(E \cap K) = \mathbb{P}(K) \cdot \mathbb{P}(E|K), \tag{1.6}$$

e portando, substituindo na equação (1.5), obtemos

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(K) \cdot \mathbb{P}(E|K) + \mathbb{P}(K^c) \cdot \mathbb{P}(E|K^c) \tag{1.7}$$

que é conhecida como *fórmula da probabilidade total.*

1.2 Variável Aleatória

Ao realizarmos um experimento aleatório, é comum termos como objetivo medir diferentes valores relacionados ao resultado obtido. Podemos pensar em um jogo, por exemplo, no qual arremessamos dois dados e a vitória (ou a derrota) é determinada pela soma dos resultados de cada dado. Podemos estar interessados no maior dos valores sorteados ou mesmo na diferença dos valores obtidos. Estas quantidades observáveis, relacionadas aos possíveis resultados de um experimento aleatório, são conhecidas como Variáveis Aleatórias.

Definição 1.5. Dado um experimento aleatório com espaço amostral Ω, uma *variável aleatória* (v.a. por simplicidade) é uma função que associa a cada elemento de Ω (resultado do experimento) um número real.

Cada resultado do experimento caracteriza portanto um determinado valor na variável aleatória.

Exemplo 1.6. Considere o experimento de lançar uma moeda. Defina a v.a. Y atribuindo o valor -1 para *cara* e 1 para *coroa*. Isto corresponde a:

$$Y(cara) = 1$$

$$Y(coroa) = -1$$

Assim, se considerarmos uma disputa onde o jogador ganha um real se lançar cara em uma moeda e perde um real se lançar coroa, a v.a. Y representa o valor que o jogador ganhou/perdeu.

Podemos ainda estar interessados em outras características, distintas dos resultados diretamente observáveis, no momento em que estivermos diante da análise de um fenômeno. Qual seria, por exemplo, a quantidade de vezes, em arremessos sucessivos de um dado em que apareceriam valores menores que 3?

Quando se analisa uma v.a., o que efetivamente interessa é sua *distribuição de probabilidades*, ou seja, as possibilidades que ela tem de assumir diferentes quantidades. Se uma v.a. X assume valores em um conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ por exemplo, sua distribuição de probabilidades é caracterizada pelos valores $\mathbb{P}(X = x_1), \ldots, \mathbb{P}(X = x_n)$.

Exemplo 1.7. Considere o lançamento de dois dados honestos (onde em cada um, a probabilidade de que saia algum dos 6 números é de $\dfrac{1}{6}$). Temos então o seguinte espaço amostral para o experimento:

$$S = \underbrace{\{(1,1), (1,2), (1,3), \cdots, (4,6), (5,6), (6,6)\}}_{36 pares}$$

Definamos agora uma v.a. (X_n) que corresponde à soma dos valores que podem sair nos dados. Eles pertencerão certamente ao conjunto

$$A = \{2, 3, \cdots, 11, 12\}$$

O menor valor para a soma é 2 (caso saiam nos dados os valores 1 e 1) e o maior é 12 (situação em que sairia um par de valores 6). A soma 11, que está no conjunto A, ocorrerá somente se sairem os pares $(5, 6)$ ou $(6, 5)$. Segue que

$$\mathbb{P}\{X = 11\} = \mathbb{P}\{(5, 6), (6, 5)\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Do mesmo modo temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X = 3\} &= \mathbb{P}\{(1, 2), (2, 1)\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \\ \mathbb{P}\{X = 4\} &= \mathbb{P}\{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\ \mathbb{P}\{X = 10\} &= \mathbb{P}\{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Deixamos para o leitor calcular as outras probabilidades e perceber que a soma dos valores de $P\{X = i\}, i = 2, 3, \cdots, 11, 12$ é igual a 1, como seria de se esperar.

Perceba agora que, associada a v.a. X descrita acima, podemos definir uma função que relaciona cada elemento conjunto A com a probabilidade de X assumir aquele valor. Esta função $p_X : A \to [0, 1]$ é chamada de *função probabilidade* de X. Ou seja, $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$ para todo $k \in A$.

Funções de probabilidade possuem algumas propriedades importantes, que as diferenciam das demais. Se X é uma variável aleatória que assume valores em um conjunto A, então a função de probabilidade de X é tal que

- $0 \leq p(x_i) \leq 1$, para todo $x_i \in A$
- $p(x_1) + p(x_2) + \cdots = 1$.

Exemplo 1.8. Considere os meses do ano. Alguns possuem 31, outros 30 dias e o mês de fevereiro possui 28 dias (em um ano não bissexto). Lembremos da antiga técnica da vovó

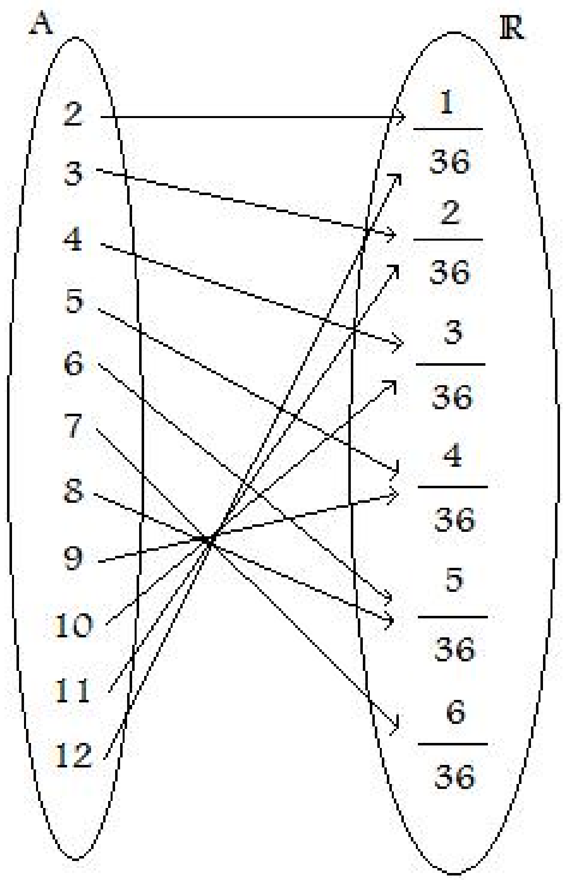


Figura 1.5: Diagrama da distribuição de probabilidades da v.a. X

para a contagem nos ossos salientes quando a mão é colocada na forma de soco (ver figura 1.6). Sorteamos um aluno aleatóriamente em uma sala de aula e perguntamos o mês do seu aniversário.

Seja X o total de dias no mês de aniversário do estudante sorteado. Temos assim uma v.a. que assume valores no conjunto $A = \{28, 30, 31\}$. E a função probabilidade de X é portanto a função $p_X : A \to [0, 1]$ definida por

$$p_X(28) = \mathbb{P}(X = 28) = \frac{1}{12}$$
$$p_X(30) = \mathbb{P}(X = 30) = \frac{4}{12}$$
$$p_X(31) = \mathbb{P}(X = 31) = \frac{7}{12}.$$

Observe que

$$p_X(28) + p_X(30) + p_X(31) = 1.$$

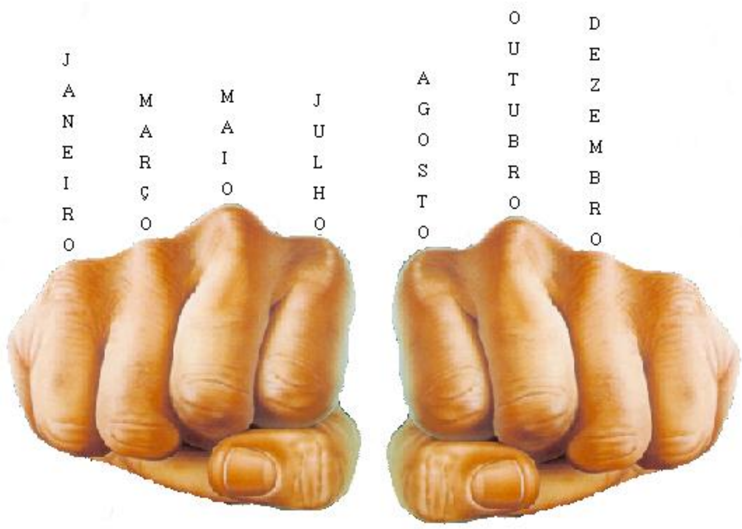


Figura 1.6: Contando da esquerda para a direita, na posição em que está a figura, os ossos indicam os meses que têm 31 dias. Os vãos entre os ossos ficam para os meses que possuem menos de 31 dias.

1.2.1 Esperança

Esperança (ou valor esperado) é a média ponderada, calculada entre os possíveis valores da variável, cujos pesos correspondem às probabilidades de cada valor da v.a. em questão. A esperança de uma variável discreta X, que assume valores em um conjunto $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$, com função distribuição de probabilidade p_X, é denotada por $E[X]$ e definida pela igualdade

$$E[X] = x_1 p_X(x_1) + x_2 p_X(x_2) + \cdots .$$

No exemplo 1.6, se considerarmos o dado honesto temos

$$E[Y] = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Se pensarmos em uma variável X dada pela face observada em um dado "honesto"lançado, teremos:

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5 \tag{1.8}$$

É importante que não se confunda esperança com valor mais provável. Como mostrado nos exemplos anteriores, a esperança de uma v.a. não precisa nem estar entre os valores possíveis assumidos pela variável.

Exemplo 1.9. Seja uma v.a. T tal que

$$P\{T = -1\} = \frac{1}{4} \qquad P\{T = 0\} = \frac{1}{2} \qquad P\{T = 2\} = \frac{1}{4}$$

Neste caso

$$E[T] = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Mais uma vez o valor obtido é diferente do mais provável. O que tem maior probabilidade é o zero.

Apesar de esperança não estar tão diretamente relacionada com o valor mais provável de uma v.a., ela ainda caracteriza uma espécie de valor central para o comportamento da variável. Um papel importante que a esperança representa está na análise de uma ação (ou experimento) repetida uma quantidade muito grande de vezes. Como mostraremos na próxima sessão, se calcularmos a média aritmética simples entre os valores observados da variável ao longo de várias repetições de um experimento, perceberemos que, após inúmeras ocorrências, ela se aproximará cada vez mais do valor determinado para a esperança da v.a. em questão.

Podemos utilizar o valor da esperança, por exemplo, se for necessário tomar uma decisão sobre qual opção adotar, diante do impasse que alguma situação de risco ofereça. Suponha que seja possível utilizar uma v.a. discreta para estudar as consequências de cada opção. Se tivermos conhecimento desta variável e de sua distribuição de probabilidades, podemos chegar à melhor escolha. Vamos analisar um caso específico. Imagine uma disputa na qual um jogador A "enfrenta"uma banca B. A cada jogada, A paga 1 real para a banca e joga 1 dado honesto. Se a face evidente for 4 ou 5 ele ganha o real de volta. Se sair 6, ganha então 2 reais. Para qualquer outro resultado A só perderá o valor pago. É comum que se imagine que qualquer jogo deste tipo é sempre mais vantajoso para a banca. Vamos investigar o caso em questão determinando a esperança. Seja X, neste caso, a v.a. possibilidade de ganhos de A. O leitor deve chegar à seguinte interpretação : A perde 1 real se sair 1, 2 ou 3 no dado (3 possibilidades em 6). Não ganha nem perde se sair 4 ou 5 e ganha 1 real (- 1 + 2 = 1) se sair 6.

$$E[X] = -1 \cdot \frac{3}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

Assim, se A continuar jogando por sucessivas vezes, a média entre as perdas e os ganhos obtidos desde o início se aproximará cada vez mais do valor $-\frac{1}{3}$ (perda de aproximadamente 33 centavos).

A esperança oferece, portanto, uma ferramenta simples de análise da tendência de um determinado resultado diante de uma significativa quantidade de realizações do experimento.

1.3 Lei dos Grandes Números

Vamos mais uma vez considerar o exemplo do lançamento de uma moeda. Recebemos uma moeda e desejamos verificar se ela é ou não viciada. Sem ter em mãos nenhum equipamento sofisticado para fazer esta determinação, como resolver o problema?

Uma maneira de fazer isso é simplesmente lançar a moeda uma quantidade grande de vezes, e calcular a proporção de vezes que observamos, por exemplo, a face *cara*. Se a moeda for "honesta", esperamos que a face cara apareça em aproximadamente metade dos lançamentos. De fato, podemos ir mais além e dizer que a proporção de *caras* que observamos é aproximadamente a probabilidade de observarmos cara em um único lançamento da moeda.

O resultado acima é conhecido como *Lei dos Grandes Números* e está entre os resultados mais importantes da proabilidade.

Este é um dos resultados que nos permite fazer, por exemplo, pesquisas eleitorais. Para isso, pesquisadores escolhem aleatóriamente pessoas na rua e perguntam sua intenção de voto. A probabilidade de sortearem um eleitor do canditato 1 é a proporção de pessoas na população que, naquele momento, pretender votar no candidato 1.

Assim, mesmo que não perguntemos a toda a população, a proporção de pessoas que na pesquisa declararam intenção de votar no candidato 1, se aproxima da proporção real de pessoas que votarão neste candidato.

De maneira um pouco mais formal, considere um experimento aleatório com espaço amostral Ω, e tome um evento $A \in \Omega$. Repitimos então o experimento n vezes, e contamos o total de vezes que o evento A é observado. Assim, se $|A|$ é o total de vezes que $|A|$ foi observado, temos que

$$\frac{|A|}{n} \to \mathbb{P}(A), \text{ quando } n \to \infty.$$

Ou seja, quando n cresce (tende ao infinito) a proporção de vezes que observamos A se aproxima da probabilidade de A.

Exemplo 1.10. Considere o experimento de lançar um dado. Repita o lançamento do dado 1000 vezes, e chame de X_k o valor obtido no k-ésimo lançamento. Teremos então que

$$\frac{|X_k = 1|}{1000} \approx \frac{1}{6}.$$

Ou seja, a proporção de vezes que é sorteado o valor 1 é aproximadamente 1/6.

De fato isto acontece para todos os valores possíveis do dado.

Considerando ainda o exemplo acima, vamos levar o resultado um passo adiante. Agora, ao repetir o experimento, vamos observar exatamente o valor que apareceu. Para isso, mais ma vez, chame de X_k o valor lançado no k-ésimo lançamento do dado. Assim se lançarmos o dado 3 vezes e obtermos em ordem os valores 1, 4 e 2 teremos $X_1 = 1$, $X_2 = 4$ e $X_3 = 2$.

Queremos agora calcular a média aritmética dos valores sorteados. Ou seja,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

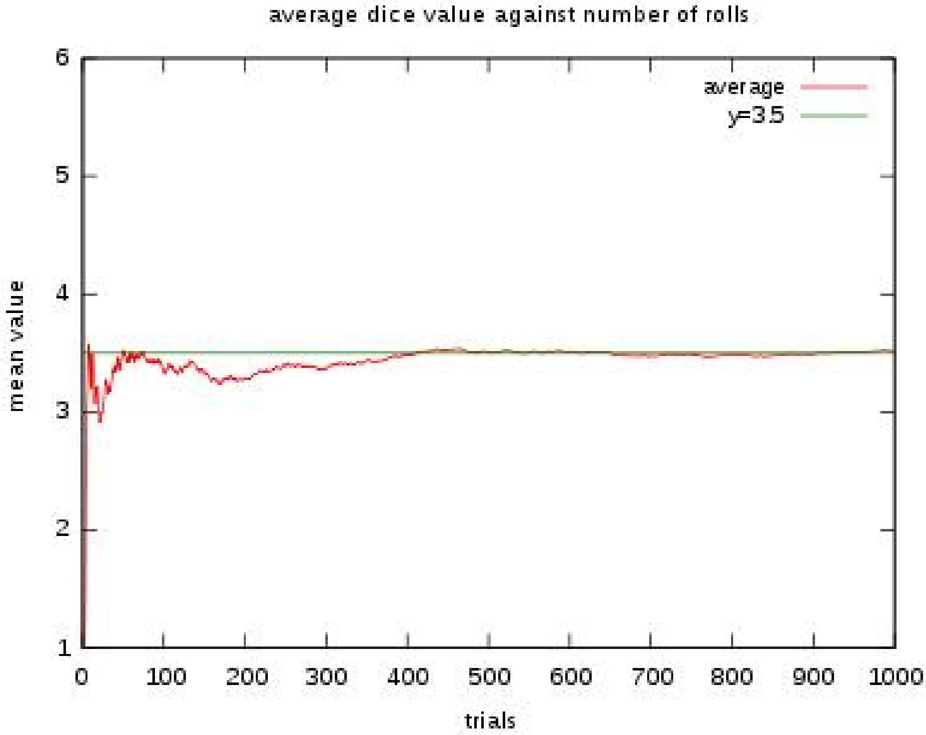
Para facilitar o cálculo, agrupe os resultados de acordo com o valor sorteado. Some primeiro os 1's, depois os 2's e assim por diante. Fazendo isso percebemos que

$$X_1 + \cdots + X_n = 1 \cdot |X_k = 1| + 2 \cdot |X_k = 2| + 3 \cdot |X_k = 3| + 4 \cdot |X_k = 4| + 5 \cdot |X_k = 5| + 6 \cdot |X_k = 6|,$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} &= \\
&= \frac{1 \cdot |X_k = 1| + 2 \cdot |X_k = 2| + \cdots + 5 \cdot |X_k = 5| + 6 \cdot |X_k = 6|}{n} \\
&= 1 \cdot \frac{|X_k = 1|}{n} + 2 \cdot \frac{|X_k = 2|}{n} + \cdots + 5 \cdot \frac{|X_k = 5|}{n} + 6 \cdot \frac{|X_k = 6|}{n} \\
&\approx 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\
&= 3,5.
\end{aligned}$$

Resumindo
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \approx 3,5$$
que é exatamente a esperança de uma (qualquer uma) das variáveis envolvidas.



O gráfico foi construído de forma que, a cada novo lançamento, é calculada a média dos resultados que já apareceram no dado e o valor é registrado com um ponto no plano. A sequência das marcações forma uma curva que se aproxima cada vez mais da reta $y = 3,5$.

Portanto, podemos escrever a Lei dos Grandes Números como

Lei dos Grande Números Seja X uma variável aleatória observada na realização de um certo experimento aleatório. Considere agora n repetições independentes deste experimento, e chame de X_k a observação da variável X na k-ésima repetição. Temos assim que
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \longrightarrow E[X] \text{ quando } n \longrightarrow \infty$$

A Lei dos Grandes Números diz portanto que a média das observações tende ao valor esperado quando a quantidade de repetições tende ao infinito. O conceito da Lei dos Grandes Números tem grande aplicação prática em outras áreas distintas da estatística, como a agricultura, a economia e as ciências diversas. Podemos, por exemplo, determinar a tendência para a fração de peças defeituosas em uma linha de produção. Realizamos, para isso, uma numerosa e suficiente quantidade de observações ou verificações das peças. A média destas tenderá ao valor esperado. Na sala de aula podemos verificar o conceito com uma prática simples.

1.4 Atividade Prática

1. Prepare uma pequena coleção de objetos que tenham mesmo peso e possuam formatos idênticos. Eles devem apresentar apenas uma característica que os divida em dois grupos. Em nosso experimento, conseguimos folhas de sulfite de duas cores : claras e escuras. Cortamos algumas de cada cor em tamanhos iguais (dividimos cada folha em 4 partes). Formamos então 8 bolinhas verdes e 3 brancas. Colocamos as 11 bolinhas dentro de um pote. A intenção era a de simular a etapa da pintura de uma linha de produção industrial. Qual seria a proporção das peças que não receberiam adequadamente a pintura nesta fábrica ? Seriam feitas diversas observações em uma amostra dividida em lotes de 11 peças. Cada observação "alimentaria"uma variável aleatória X_i com valor 0 ou 1, de forma que :

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{, se a bolinha for escura (a peça foi pintada corretamente)} \\ \\ 1 & \text{, se a bolinha for clara (a peça não foi pintada)} \end{cases}$$

   Em situações como esta, dizemos que a v.a. é uma função indicadora de um evento (no caso seria o evento de que a peça não foi adequadamente pintada).

2. Faça o cálculo da esperança ligada ao experimento. Sendo $X = 0$ para o caso em que a peça foi pintada e $X = 1$ para o caso em que não foi, fica evidente que a esperança calculada será igual à probabilidade de que uma peça apresente irregularidades em sua pintura.

3. Inicie o sorteio e o repita uma quantidade significativa de vezes. A retirada da bolinha foi feita 200 vezes . Organizando a sala em grupos, o professor pode conseguir tranquilamente 1000 resultados para o experimento.

4. Calcule a média e a compare com a esperança obtida inicialmente. É possível pedir que os alunos registrem a evolução dos resultados em um gráfico.

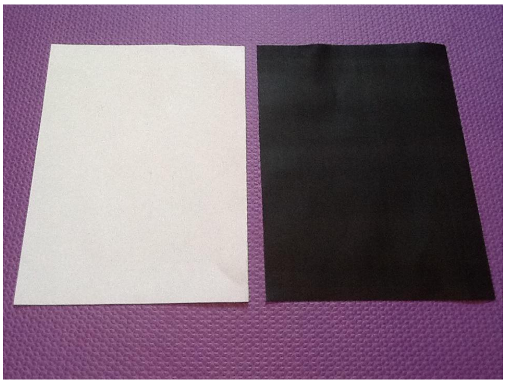


Figura 1.7: Evento K (regiões II e III).

Capítulo 2

Modelos de Ruína

Seguindo a já tradicional associação entre probabilidade e jogos de azar, neste capítulo vamos analisar algumas versões onde novamente um jogador enfrenta uma banca em um jogo simples. Nossa intenção é motivar o estudo de probabilidade através de um exemplo fácil de entender e se relacionar, mas cuja solução vai muito além da contagem, mas que pode ser resolvido com conhecimento básico de probabilidade. Além de usar diversas ferramentas matemáticas importantes, os modelos ainda revelam resultados interessantes, que a simples intuição poderiam não indicar, mostrando assim o poder dos modelos matemáticos na análise de fatos do nosso cotidiano.

O leitor interessado em outros detalhes e simulações pode encontrar em [4] e [6]

2.1 A Ruína do Jogador

Começaremos tratando do já conhecido problema da "*Ruína do Jogador*". Nele, um jogador A desafia uma banca de jogos, como em um cassino. Para simplificar, consideraremos que cada jogada seja igual e independente da anterior. Isto significa que a probabilidade de vitória do jogador e o valor apostado não variam a cada jogada. Podemos descrever o jogo da seguinte maneira. Rodada após rodada, é lançada uma moeda (possivelmente viciada), e o jogador A pode

- ganhar 1 real, com probabilidade p, caso saia cara.
- perder 1 real, com probabilidade $q = 1 - p$, caso saia coroa.

É importante notar que

$$p + q = p + (1 - p) = 1$$

O jogador começa o jogo com uma fortuna (total de dinheiro) inicial $F_0 = u$, e resolve adotar a seguinte estratégia: vai terminar o jogo quanto atingir uma fortuna de N reais, ou quando perder todo o dinheiro, ou seja, atingir uma fortuna de 0 reais. Queremos então calcular qual a probabilidade de A atingir a fortuna N desejada.

Para isso, precisamos primeiro entender o modelo que vamos estudar. Antes de mais nada, vamos entender o espaço amostral Ω relativo a este experimento aleatório. É interessante observar que neste caso, temos várias possibilidades de espaços possíveis. Podemos olhar, por exemplo, para a sequência de moedas, ou então para a fortuna do jogador ao longo das jogadas. As duas formas são equivalentes, e podem todos os eventos podem ser "traduzidos" de um para o outro. De fato, como ficará claro no resto do trabalho, a definição exata do espaço amostral não é essencial para o desenvolvimento dos cálculos, de modo que é indiferente a maneira como você decide descrevê-lo.

Aqui seguiremos a fortuna do jogador ao longo do tempo. Primeiro observe que, neste caso, um resultado possível de jogo é uma sequência de números inteiros (fortuna do jogador), com primeiro elemento u, último elemento 0 ou N, os demais entre 1 e $N - 1$, e onde a diferença entre em membro e o anterior é 1 ou -1, representando uma vitória ou uma derrota do jogador. Mais precisamente, temos

$$\Omega = \{(u, a_1, \ldots, a_n) : n \geq 1, a_n \in \{0, N\}, a_k - a_k - 1 \in \{-1, 1\}, k = 1, \ldots, n\}.$$

O evento que estamos interessados é

$$E = \{\text{A atingiu a fortuna } N\},$$

que é representado pelo conjunto de todas as sequências de Ω que terminam em N.

Neste ponto poderíamos fazer como no capítulo anterior e tentar encontrar probabilidades para cada uma das sequências consideradas, mas isso não seria de muita ajuda. Primeiro por que a probabilidade de cada sequência depende do total de jogadas que ocorreram, além do total de vitórias e de derrotas. Além disso, somar estas probabilidades para todos os elementos de E parece ser um trabalho enorme, principalmente se considerarmos que E possui infinitos elementos (por que?).

Ao invés disso, vamos nos utilizar das propriedade que conhecemos para tentar encontrar uma maneira mais fácil de calcular o que queremos.

Antes de mais nada, o leitor há de convir que, da mesma forma de Ω depende de u e N, as probabilidades dos diversos eventos também podem depender de u e N. Em particular, a probabilidade do evento que A alcance determinada fortuna N depende claramente de u e N.

Devido a esta dependência com u, e ignorando a dependência em N, vamos então usar P_u para representar esta probabilidade. Ou seja,

$$P_u = \mathbb{P}(E|F_0 = u),$$

que, para simplificar a notação, vamos notar apenas por $\mathbb{P}(E)$, que corresponde à probabilidade de atingir N, dado que a fortuna inicial é u. P_1 seria então a probabilidade de atingir N iniciando a partida com 1 real, P_4 seria a probabilidade de atingir N começando com 4 reais e assim por diante.

É comum o uso da denominação "condições de contorno' para os valores mínimo ou máximo que uma variável possa apresentar. Neste caso, portanto, temos as condições de contorno

- $P_0 = 0$ (já que é impossível atingir qualquer fortuna iniciando-se o jogo com 0 reais. É necessário ter pelo menos 1 real para jogar).
- $P_N = 1$ (uma vez que, se A já inicia o jogo com N reais, sua probabilidade de atingir N reais é de 100%).

Para seguir nossa análise vamos considerar o que acontece na primeira jogada. Para isso tome o evento

$$K = \{\text{o primeiro lançamento da moeda deu cara}\} = \{\text{o jogador A venceu a primeira jogada}\}.$$

Segue da equação 1.7) que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E \cap K) + \mathbb{P}(E \cap K^c) \\ &= \mathbb{P}(E|K) \cdot \mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(E|K^c) \cdot \mathbb{P}(K^c) \\ &= \mathbb{P}(E|K) \cdot p + \mathbb{P}(E|K^c) \cdot q.\end{aligned}$$

Observe agora que ao ganhar a primeira jogada o jogador A passa a ter fortuna $u + 1$, e como as jogadas posteriores são independentes da primeira, podemos considerar que a cada rodada o jogo se renova, mudando apenas a fortuna do jogador. Podemos assim concluir que $\mathbb{P}(E|K)$, que é a probabilidade de atingir N sabendo que o primeiro lançamento resultou em cara, é a mesma probabilidade que o jogador teria de chegar a N se iniciasse o jogo com 1 real a mais, e é portanto igual a P_{u+1}. Do mesmo modo concluímos que $\mathbb{P}(E|K^c) = P_{u-1}$. Reunindo estas informações temos que

$$\mathbb{P}(E) = P_{u+1} \cdot p + P_{u-1} \cdot q,$$

ou ainda

$$P_u = P_{u+1} \cdot p + P_{u-1} \cdot q.$$

Observação 2.1.1. *Escolhemos não apresentar aqui as contas que levam às conclusões acima, por acreditar que estas impõe uma dificuldade técnica que poderia desmotivar alguns leitores. Por esta razão deixamos tais contas como um desafio para aqueles que se interessarem.*

A solução passa pela descrição exata do evento K como subconjunto de Ω, e sua identificação com o conjunto de todas as sequências que possuem todas as propriedades desejadas, mas que começam com $u+1$.

Colocando agora as condições de contorno, $P_0 = 0$ e $P_N = 1$ encontramos que a sequência $P_0, P_1, \ldots, P_N$ satisfaz a seguinte relação :

$$\begin{cases} P_u = p \cdot P_{u+1} + q \cdot P_{u-1}, \quad u = 1, \ldots, N-1 \\ \\ P_0 = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{P_N = 1}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Observe que esta não é nenhuma das relações de recorrência comuns no currículo do ensino básico, onde são estudadas basicamente progressões aritmética e geométrica. Para tratar esta relação vamos lançar mão de alguns pequenos truques. Mais sobre a solução de algumas destas equações de recorrência pode ser encontrado em [2].

Primeiro perceba que, uma vez que $p + q = 1$, podemos acrescentar esta soma ao primeiro membro da equação acima, sem alterá-lo e encontrar :

$$(p+q)P_u = p \cdot P_{u+1} + q \cdot P_{u-1}$$

que pode ser desenvolvida até chegar a :

$$P_{u+1} - P_u = \frac{q}{p}.(P_u - P_{u-1})$$

A partir da última expressão encontramos:

$$\begin{aligned}
P_2 - P_1 &= \frac{q}{p} \cdot (P_1 - P_0) \\
P_3 - P_2 &= \frac{q}{p} \cdot (P_2 - P_1) \\
P_4 - P_3 &= \frac{q}{p} \cdot (P_3 - P_2) \\
&\vdots \\
P_N - P_{N-1} &= \frac{q}{p} \cdot (P_{N-1} - P_{N-2})
\end{aligned}$$

Aplicando o desenvolvimento acima na segunda equação, ficamos com:

$$P_3 - P_2 = \frac{q}{p} \cdot (P_2 - P_1) = \frac{q}{p} \cdot \frac{q}{p} \cdot (P_1 - P_0) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \cdot (P_1 - P_0)$$

Ao seguir este padrão de substituições, encontramos:

$$\begin{aligned}
P_2 - P_1 &= \left(\frac{q}{p}\right)^1 \cdot (P_1 - P_0) \\
P_3 - P_2 &= \left(\frac{q}{p}\right)^2 \cdot (P_1 - P_0) \\
&\vdots \\
P_u - P_{u-1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{u-1} \cdot (P_1 - P_0) \\
&\vdots \\
P_N - P_{N-1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} \cdot (P_1 - P_0)
\end{aligned}$$

De fato, isso tudo é equivalente a dizer que a progressão $Q_u = P_{u+1} - P_u$ é uma PG. Observe agora que ao somarmos as $u - 1$ primeiras equações acima ocorre uma série de cancelamentos de termos simétricos, nos levando então a uma nova equação:

$$P_u - P_1 = \left[\left(\frac{q}{p}\right)^1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{u-1}\right] \cdot (P_1 - P_0)$$

Note que, entre os colchetes, temos a soma de uma progressão geométrica de razão $\frac{q}{p}$ com $u - 1$ termos. Podemos então fazer a substituição pelas expressões convenientes.

Para o caso em que a razão não é unitária, ou seja, quando $q \neq p$, temos

$$\left(\frac{q}{p}\right)^1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{u-1} = \frac{(q/p) \cdot [1 - (q/p)^{u-1}]}{1 - (q/p)}$$

e para o caso em $q = p$ temos

$$\left(\frac{q}{p}\right)^1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{u-1} = 1 + 1 + \cdots + 1 = u - 1.$$

Teremos então, para $\dfrac{q}{p} \neq 1$

$$P_u - P_1 = \left[\frac{(q/p) \cdot \left[1 - (q/p)^{u-1}\right]}{1 - (q/p)}\right] \cdot (P_1 - P_0), \tag{2.2}$$

e com alguma manipulação algébrica, e usando que $P_0 = 0$, chegamos a

$$P_u = \frac{1 - (q/p)^u}{1 - (q/p)} \cdot P_1.$$

Por outro lado, para $\dfrac{q}{p} = 1$ temos

$$P_u - P_1 = (u - 1) \cdot (P_1 - P_0). \tag{2.3}$$

Ou seja, usando novamente que $P_0 = 0$, temos

$$P_u = u \cdot P_1.$$

Em resumo

$$P_u = \begin{cases} \dfrac{1 - (q/p)^u}{1 - (q/p)} \cdot P_1 & , \text{se } \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ \\ u \cdot P_1 & , \text{se } \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases}$$

Nas igualdades acima, se isolarmos P_1 , teremos

$$P_1 = \begin{cases} \dfrac{1 - (q/p)}{1 - (q/p)^u} \cdot P_u & \text{se } \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ \dfrac{P_u}{u} & \text{se } \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

Fazendo $u = N$, e aplicando acima a condição $P_N = 1$, temos

$$P_1 = \begin{cases} \dfrac{1 - q/p}{1 - (q/p)^N} \cdot P_N & , \text{se } \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ \dfrac{P_N}{N} & , \text{se } \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

Ou seja

$$P_1 = \begin{cases} \dfrac{1 - q/p}{1 - (q/p)^N} & , \text{se } \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ \dfrac{1}{N} & , \text{se } \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Substituindo agora os novos valores de P_1 nas expressões de P_u, encontramos

$$P_u = \begin{cases} \dfrac{1 - (q/p)^u}{1 - (q/p)^N} & , \text{se } \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ \dfrac{u}{N} & , \text{se } \dfrac{q}{p} = 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

As equações acima são exatamente as que procurávamos. Elas oferecem uma relação entre P_u, N e u.

Queremos agora analisar a probabilidade de que o jogador perca o jogo, chegando ao final com fortuna 0. Usaremos aqui um evento complementar de P_u, lembrando que $P_u + \overline{P}_u = 1$. Chamando então de $\overline{P}_u$ a probabilidade de que a banca termine com todo o dinheiro, tendo o jogador desafiante iniciado seu jogo com a fortuna u e escolhendo F como o evento {o jogador terminou o jogo com fortuna 0}, vale que

$$\overline{P}_u = \mathbb{P}(F).$$

Observação 2.1.2. *A probabilidade acima é conhecida como* probabilidade de ruína do jogador*, e é ela que dá nome ao problema.*

Neste momento seria tentador pensar que ao final do jogo a fortuna do jogador só pode ser 0 ou N, de modo que $F = E^c$. Mas estaríamos nos esquecendo de um evento importante: o de que o jogo nunca acabe. É possível imaginar trajetórias de vitórias e derrotas que não permitam que o jogo termine e, por mais que nossa intuição nos diga que este evento tem probabilidade nula, ele ainda é um evento, e não podemos ignorá-lo logo de partida. Assim, não podemos usar a expressão $\overline{P}_u = P(F) = 1 - P(E) = 1 - P_u$ para calcular P_u, pois ainda não sabemos se é possível ter certeza disso.

Nos resta então repetir todo o raciocínio anterior, analisando agora a probabilidade $\overline{P}_u$ do jogador perder o jogo. A mesma argumentação usada no caso de P_u nos mostra que

$$\overline{P}_u = p \cdot \overline{P}_{u+1} + q \cdot \overline{P}_{u-1},$$

mas agora, com condições de contorno distintas, dadas por $\overline{P}_0 = 1$ e $\overline{P}_N = 0$ (por que?).

Agora, o mesmo raciocínio que nos levou às equações (2.2) e (2.3) nos mostra que

$$\overline{P}_u - \overline{P}_1 = \begin{cases} \left[\dfrac{(q/p) \cdot \left[1 - (q/p)^{u-1}\right]}{1 - (q/p)} \right] \cdot (\overline{P}_1 - \overline{P}_0) & , \text{se } \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ (u-1) \cdot (\overline{P}_1 - \overline{P}_0) & , \text{se } \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases}.$$

Fica como exercício para o leitor demonstrar, usando as condições de contorno para $\overline{P}_u$, que

$$\overline{P}_u = \begin{cases} \dfrac{(q/p)^u - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N} & , \text{se } \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ \dfrac{N-u}{N} & , \text{se } \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases}.$$

Manipulações algébricas simples nos mostram que, tanto para $\dfrac{q}{p} \neq 1$, como para $q = p$ $(\dfrac{q}{p} = 1)$, vale que

$$\overline{P}_u + P_u = 1$$

(Fica também o convite para que o leitor faça tal verificação).

Isso mostra que, de alguma forma (já que $\overline{P}_u + P_u = 1$), um dos lados (jogador ou banca) sairá como vencedor, de algum momento do jogo. Ou seja, o evento de que não ocorra o término da competição tem probabilidade nula de ocorrer.

A probabilidade $\overline{P}_u$ que acabamos de calcular é conhecida como *probabilidade de ruína do jogador*. É interessante observar os distintos comportamentos de $\overline{P}_u$ para diferentes valores de u e N.

Observe primeiro que, quanto mais próximo de N é o valor de u, mais próximo de 0 estará $\overline{P}_u$. Isso acontece para quaisquer valores de p e q. Para cada um deles o comportamento é distinto. Quando $q \neq p$, o valor de $\overline{P}_u$ decai como uma potência, enquanto para $p = q$ o decaimento é ao longo de uma reta. A figura 2.1 ilustra bem a diferença.

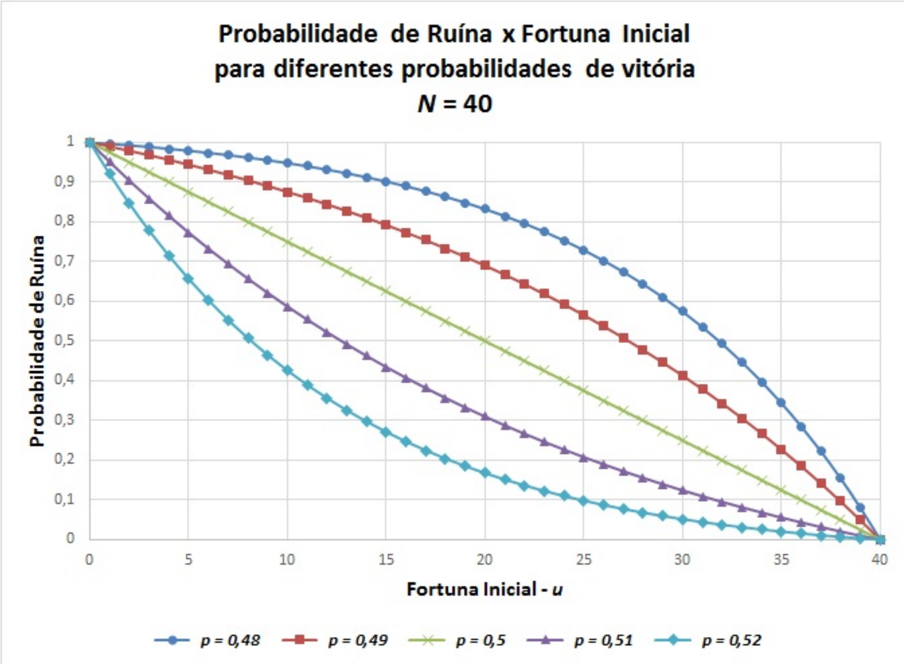


Figura 2.1: $\overline{P}_u \times u$ para $N = 40$ e diferentes valores de p e q.

Os próximos gráficos (2.2, 2.3 e 2.4) ilustram o comportamento da probabilidade de ruína em função da fortuna máxima para diferentes valores de u. É interessante notar que em todos os casos a probabilidade de ruína aumenta rapidamente com N, mas sempre com tendência a estabilizar quando N é muito grande.

No caso em que as probabilidades estão favorecendo a banca ($p < 0,5$) este crescimento é muito rápido e independente de inicial u usado no jogo, esta probabilidade converge rapidamente para 1 (figura 2.2).

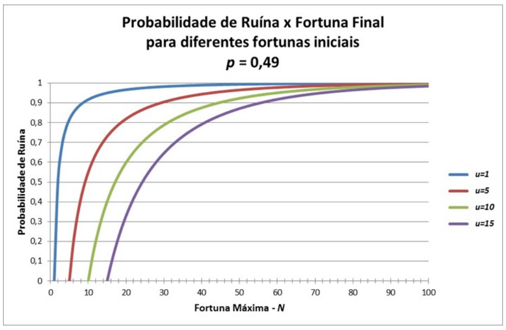


Figura 2.2: $\overline{P}_u \times u$ para $N = 40$ e diferentes valores de u.

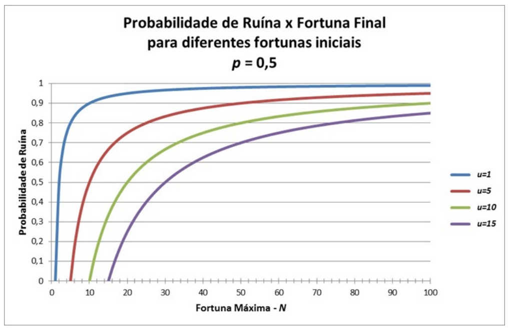


Figura 2.3: $\overline{P}_u \times u$ para $N = 40$ e diferentes valores de p e q.

Apesar de não ficar evidente no gráfico, este também é o caso no jogo justo, quando $p = q = 0,5$ (figura 2.3). Mostraremos isso com mais detalhes na próxima sessão.

Já no caso raro em que o jogo favorece o jogador ($p > 0,5$), a probabilidade de ruína parece estabilizar em valores menores que 1 e, como era esperando, este valor limite decresce com u (ver figura 2.4).

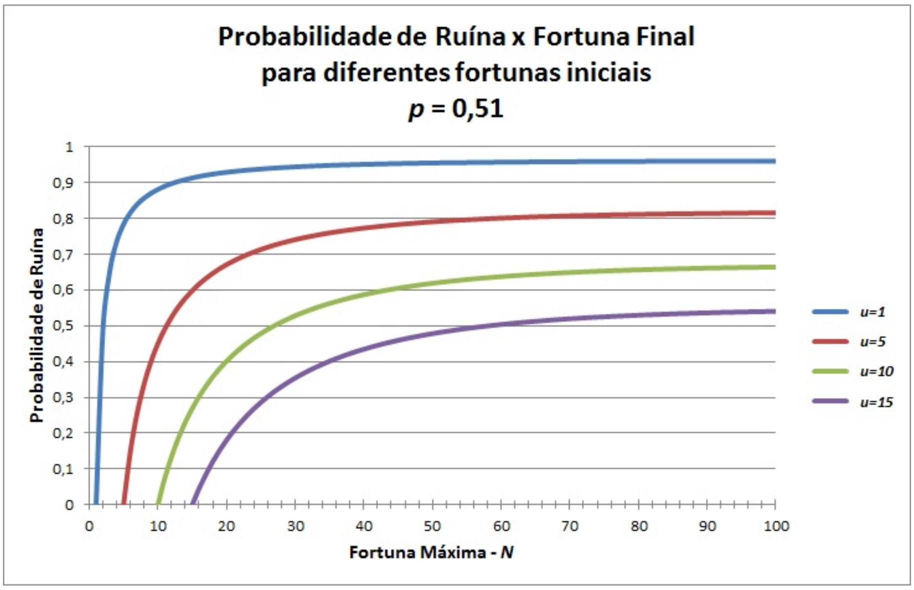


Figura 2.4: $\overline{P}_u \times u$ para $N = 40$ e diferentes valores de p e q.

2.2 A Ruína do Jogador Ambicioso

Nesta sessão vamos agora analisar o que acontece com o jogador que resolve arriscar tudo, e só parar de jogar quando o dinheiro acabar. É intuitivo e claro pensar que esta estratégia não pode dar certo, pelo menos no caso em que o jogo seja desfavorável ao jogador. O que pode vir a parecer surpresa para o leitor é que, no caso de um jogo justo, isso também não funciona. Mesmo que o jogo seja honesto, esta estratégia leva a derrota certa do jogador.

Mas como analisar este caso ? Vamos chamar de G o evento de que o jogador perde o jogo usando a estratégia acima. Ou seja,

$$G = \{\text{O jogador arrisca tudo mas atinge 0 em algum momento}\}.$$

Vamos chamar de Q_u a probabilidade de ruína do jogador dado que ele iniciou o jogo com uma fortuna u. Assim, temos que $Q_u = \mathbb{P}(G)$.

Usando os mesmos argumentos da sessão anterior convidamos o leitor a mostrar que

$$Q_u = p \cdot Q_{u+1} + q \cdot Q_{u-1}.$$

Fica claro que Q_u segue a mesma relação de recorrência que P_u e $\overline{P}_u$. Mas existe ainda uma diferença significativa : no caso de P_u e $\overline{P}_u$ conhecíamos para cada um duas condições adicionais, que foram essenciais para encontrarmos suas expressões finais. De fato, tínhamos que $P_0 = 0$ e $P_N = 1$, e que $\overline{P}_0 = 1$ e $\overline{P}_N = 0$.

No caso da sequência Q_u a única informação adicional que temos é a de que $Q_0 = 1$ e isso não é suficiente para resolvermos o problema.

Mudemos um pouco de estratégia e voltemos aos jogos. Pense em um jogador que comece um jogo com 10 reais e que cada aposta seja de 1 real. Vamos supor que ele decida parar o jogo com 10 bilhões de reais. Isso é diferente (de alguma forma) de ele tirar qualquer tipo de limite superior na sua estratégia ? Na prática a resposta é claramente que não. Isso ainda não responde nossa questão mas nos dá uma idéia de como prosseguir: vamos fazer a fortuna final N no problema anterior ser cada vez maior e, com alguma sorte, conseguiremos mostrar que este valor se aproxima de Q_u.

Com a estratégia definida, passemos às contas.

Pensemos na seção anterior, analisando quais seriam as considerações para a situação em que não haveria limite superior a ser atingido pelo jogador ($N \to \infty$). Recordando, a equação (2.7) mostra a relação entre a probabilidade P_u (probabilidade que tem o jogador de chegar à fortuna N iniciando com a fortuna u), N e u. A situação sem limite superior corresponde à intenção, que teria este participante do jogo, de conquistar um valor significativamente grande. Isto resultaria em uma dentre as possibilidades :

- Se $p > q$, então $\frac{q}{p} < 1$. Por (2.7) teríamos que :

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^N = 0 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} P_u = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^u > 0 \qquad \textit{já que } \frac{q}{p} < 1$$

- Se $p = q$, então :

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{u}{N}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} P_u = 0$$

- Se $p < q$, então $\frac{q}{p} > 1$. Pela mesma equação, desta vez, encontramos que :

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^N = \infty \Rightarrow \lim_{N\to\infty} P_u = 0$$

Em outras palavras, se $p > q$, há uma probabilidade maior do que 0 de que o jogador não caia na ruína e se torne infinitamente rico, quando N tende a infinito . Mas, por outro lado, se $p \leq 0{,}5$, diante da situação de ambicionar uma fortuna alta ($N \to \infty$), o jogador irá à ruína, pois P_u tenderá a zero.

Considerando Q_u como a probabilidade de que o jogador volte ao zero, ou seja :

$$Q_u = \text{probabilidade de ruína}$$

temos que, intuitivamente :

$$Q_u \simeq \overline{P}_u \text{ (quando N é muito grande)}$$

Em outras palavras, observando a equação 2.7 :

$$Q_u = \lim_{N \to \infty} \overline{P}_u = 1 - \lim_{N \to \infty} P_u = \left(\frac{q}{p}\right)^u$$

Complementando a idéia acima, verifiquemos que a probabilidade que o jogador A tem de atingir N antes de atingir 0 (ruína) depende de u e de N. Podemos então chamá-la de $P_{u,N}$. Acrescentando as variáveis k_i para representar valores quaisquer que A possa atingir no jogo, podemos escrever os eventos :

$$K_i = \{ \text{ A vai atingir o valor } k_i \text{ antes de atingir zero } \}$$

e concluir que :

$$P\{ \text{ não ruína } \} = P\{ \text{ A, para todo } k_i \text{ , vai atingir este valor antes de atingir zero } \}$$

Teríamos então, para todos os possíveis eventos infinitos K_i, que a probabilidade de não ruir seria :

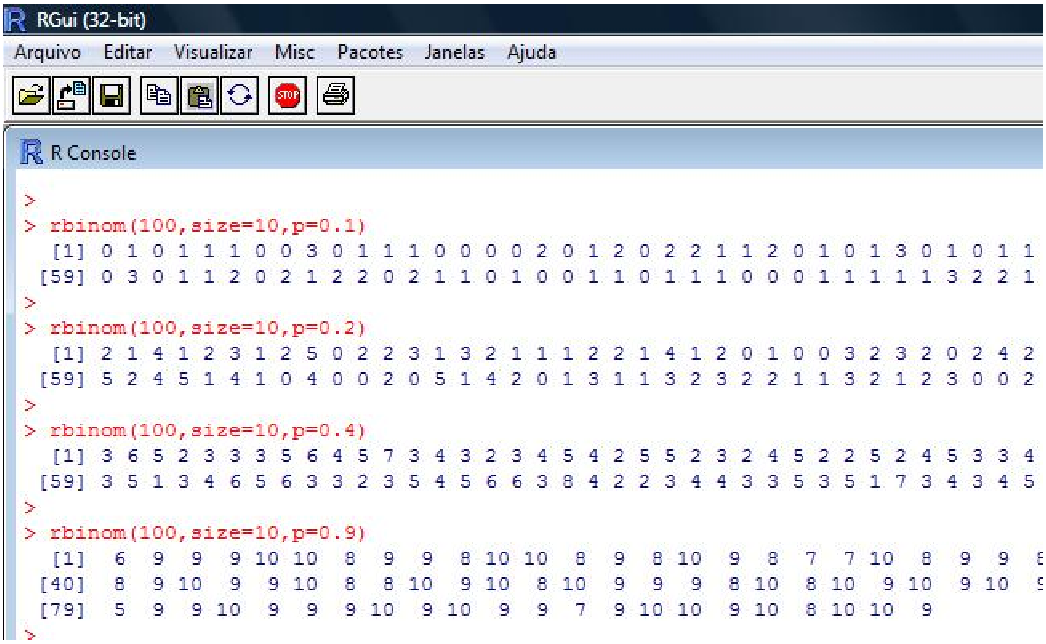
$$P\{ \text{ não ruína } \} = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i\right) = \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} K_i\right) = \lim_{n \to \infty} P(K_i) = \lim_{n \to \infty} P_{u,n}$$

2.2.1 Simulações para o problema

Apresentamos abaixo quatro simulações feitas para o problema. O script (rotina) foi feito no programa R. O software consiste em um grupo de comandos que faz manipulações de dados, simulações, cálculos e oferece uma representação gráfica dos resultados. Ele manipula e analisa valores de forma muito eficaz, contendo ainda um grupo de operadores para cálculos envolvendo matrizes. O programa também possui recursos para displays gráficos e operacionaliza dados mais sofisticados. R é uma linguagem de programação independente e aberta que está disponível nas versões Windows e Macintosh, bem como para as diversas opções do Unix e do Linux. Criado na última década do século passado, o software apresenta-se como um recurso prático para simulações nas diversas áreas de conhecimento.

Para simular a "Ruína do Jogador", desenvolvemos a programação de forma que seja possível fazer alterações nos parâmetros p, N e u. Nas linhas do programa, após cada símbolo $\#$, está explicado o procedimento executado pelas funções que estão escritas nas linhas seguintes. Os eixos horizontal e vertical representam, respectivamente, a evolução temporal das disputas e as variações na fortuna do jogador A, partida após partida. Um segmento ascendente indica que houve vitória e um descendente, que houve derrota para a banca. Vale lembrar que há dois limites para a fortuna representada. O valor mínimo seria 0. Se for atingido, temos que a banca saiu vitoriosa, situação mais comum em casas de jogos (é o que justifica a denominação usada : "Jogos de Azar"). O máximo que pode ser registrado para a fortuna de A é N, pois este é o dinheiro que está em jogo.

Partindo do ponto $(1, u)$, os resultados obtidos aleatoriamente vão formando o desenho no gráfico. A função rbinom (1,size=1,p=0.5), cada vez que é executada, dentro do limite entre 1 e NMJ (número máximo de jogadas), apresenta um valor randômico que pode ser 0 ou 1 (size=1). Apenas para esclarecer mais, se a função fosse $rbinom$(100,$size$=4,p=0.5), seriam gerados 100 valores aleatórios, sorteados no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, seguindo a probabilidade binomial para $p = 0.5$. Por seguir uma distribuição binomial, quanto maior for o valor de p, maior será a probabilidade de que os valores superiores do conjunto sejam sorteados. Veja abaixo outros valores gerados randomicamente pela função rbinom.



Os valores entre colchetes indicam a posição, na sequência de números aleatórios gerados, do primeiro valor da linha em que está. Por exemplo, [40] indica que o valor 8, que está à sua direita, foi o 40^o gerado.

Para nossa simulação, precisamos que a fortuna do jogador aumente em uma unidade, se o valor aleatório gerado for 1. A outra possibilidade, na qual o valor gerado será 0, deverá fazer com que a fortuna diminua em uma unidade. Devido a isso, foi usada a função rbinom. Sua execução ocorre de acordo com as instruções colocadas nas linhas :

$$aleat = rbinom(1, 1, p)$$

$$y = y + 2.aleat - 1$$

A última expressão indica que cada novo valor de y (fortuna do jogador a cada nova jogada) é dado pelo último acrescido de 1 (se houve vitória) ou diminuido em 1 unidade (se houve derrota). Ela foi criada levando-se em consideração que os possíveis valores gerados pela função rbinom são iguais a 0 ou 1 ($aleat$=0 ou $aleat$=1). Era necessário então uma relação :

aleat	variação em y (Δy)
0	-1
1	1

Montamos então a proporção :

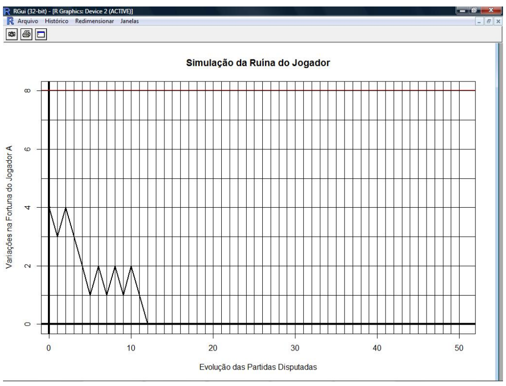
$$\frac{aleat - 0}{0 - 1} = \frac{\Delta y - (-1)}{-1 - 1}$$

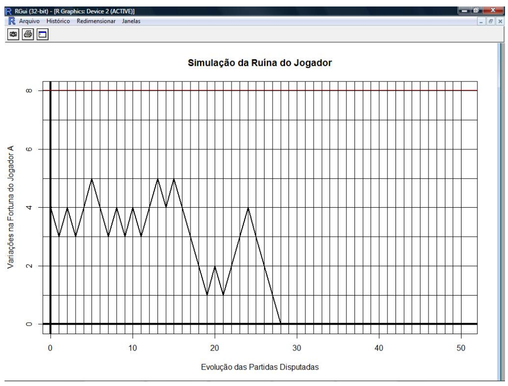
Que leva à expressão :

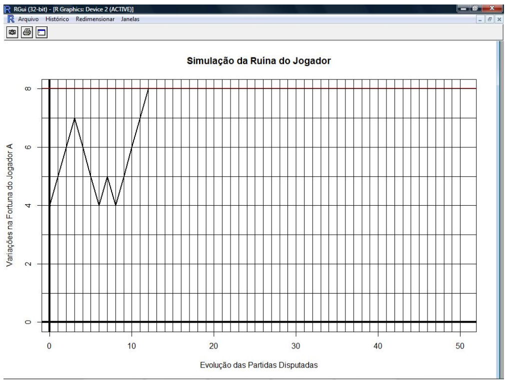
$$aleat = \frac{\Delta y + 1}{2}$$

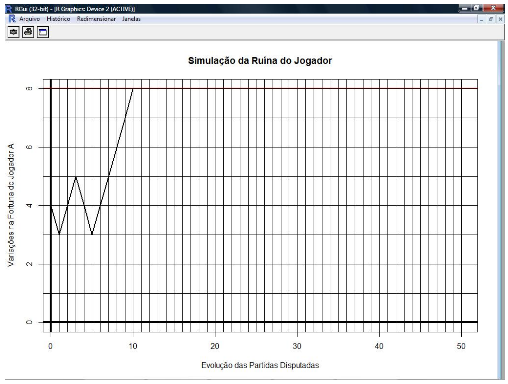
Ou seja :

$$\Delta y = 2.aleat - 1$$









Para as quatro execuções da rotina mostradas acima (quatro jogos diferentes), o programa foi configurado com $u = 4$, $N = 8$ e $p = 0.5$. Foi pedido um máximo de 50 partidas e um único jogo. Interpretando os resultados temos :

Jogo	Número de partidas	Ganhador
1	12	banca
2	28	banca
3	12	jogador
4	10	jogador

Apresentamos abaixo a rotina completa usada nas simulações feitas acima .

RGui (32-bit) - [C:\Users\Professor\Dropbox\ARQUIVOS TESE\simularw1.R - Editor R]
Arquivo Editar Pacotes Janelas Ajuda

```
# Definindo a probabilidade p ( em decimal ) de que o jogador A
ganhe 1 real da banca.
p=0.5

# Definindo a fortuna inicial N ( em reais ),disputada nos jogos,
que equivale à do jogador somada com a da banca.
N=8

# Definindo a fortuna inicial u ( em reais ) do jogador A.
u=4

# Definindo o número máximo NMJ de jogos a disputar.
NMJ=50

# Definindo o número de partidas, representadas no mesmo gráfico em
cores diferentes.

NP=1

# Definindo condições iniciais para a plotagem no gráfico.

x=0
y=A

# Definindo o aspecto do gráfico.

plot(x,y,type="b",xlab="Evolução das Partidas Disputadas",
ylab="Variações na Fortuna do Jogador A", pch=20,cex=1,
main = "Simulação da Ruína do Jogador",xlim=c(1,NMJ),
ylim=c(0,N))
abline(h=0,col=1,lwd=4,)
abline(v=0,col=1,lwd=4,)
abline(h=N,col=2,lwd=2,)

## Subrotina para plotar as linhas horizontais.

for (lNP in 1:N){
y=1
while(y<N){
y=y+1
abline(h=lNP,col=1,lwd=1,)}}

## Subrotina para plotar as linhas verticais.

for (cNP in 1:NMJ){
x=1
while(x<NMJ){
x=x+2
abline(v=cNP,col=1,lwd=0.1,)}}


# Definindo a continuidade dos jogos de simulação.

for (iNP in 1:NP){
x=0
y=A
while(0<y & y<N & x<NMJ){
x=x+1
yi=y

## Definindo 1 valor aleatório (sendo 1 ou 0) com distribuição binomial.

aleat=rbinom(1,1,p)

y=y+2*aleat-1

segments(x-1,yi,x,y,col=iNP,lwd=2)}}
```

2.3 Atividades Teórica e Prática

Nas atividades a seguir faremos uma análise passo a passo de um problema não considerado acima: o tempo de duração do jogo.

Primeiro observe que o tempo de jogo é claramente aleatório, e depende da sequência de jogadas que ocorreram ao longo do jogo e da fortuna inicial do jogador.

Dado T o tempo de duração de um jogo, seja τ_u o tempo médio de jogo dado que o jogador começou o jogo com fortuna u. Ou seja, dado que a fortuna inicial do jogador é u temos

$$\tau_u = \mathbb{E}[T] = 1 \cdot P(T=1) + 2 \cdot P(T=2) + 3 \cdot P(T=3) + \cdots ,$$

dado que a fortuna inicial do jugador era u. O cálculo exato de τ_u não é tarefa simples. Antes de mais nada estamos lidando uma soma de infinitos termos, uma vez que o jogo pode durar um total ilimitado de jogadas para terminar. Mas, além disso, calcular $P(T=k)$ não é tarefa fácil, principalmente para valores grandes de k. Por isso mesmo, com a intenção de evitar cálculos longos, tediosos e pouco informativos, nossa proposta é repetir a mesma análise que fizemos nas sessões anteriores.

Atividade 1. Utilize os mesmos argumentos das sessões anteriores para justificar a equação abaixo.

$$\begin{cases} \tau_u = p \cdot \tau_{u+1} + q \cdot \tau_{u-1} + 1 \\ \tau_0 = \tau_N = 0 \end{cases}$$

Atividade 2. Usando técnicas similares às utilizadas no cálculo de P_u, tente encontrar τ_u no caso onde $p = q = \dfrac{1}{2}$.

Atividade 3. Verifique que

$$\tau_u = \begin{cases} \dfrac{1}{p-q}\left[N \cdot \dfrac{1-(q/p)^u}{1-(q/p)^N} - u\right] & , \text{ se } \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ u(N-u) & , \text{ se } \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases} ,$$

é solução da equação.

Atividade 4. Usando algum software de planilha de dados calcule os valores de τ_u para N indo até 300, para $u = 1,\ 5,\ 10$ e 15. Gere gráficos de $\tau_u \times N$ para os diversos valores de u considerados. O que os valores e os gráficos sugerem? O que podemos concluir do comportamento de τ quando N cresce? O que podemos concluir do tempo médio de jogo para o jogador ambicioso?

Atividade 5. Nesta atividade vamos usar a Lei dos Grandes Números para verificar as contas feitas acima. Para isso precisamos escolher um número u que servirá como fortuna inicial do jogador, e um valor N como valor máximo para o jogo. O valor escolhido para N não pode ser muito grande, senão a atividade poderá durar muito tempo!! Por outro lado, um valor pequeno de N pode deixar a atividade muito rápida! Para descobrir qual o valor ideal, faça a atividade em casa e considere o tempo disponível em sala.

Em sala de aula divida seus alunos em duplas. Passe para todos o valor de u e N escolhidos. Dê uma moeda a cada dupla e peça que eles realizem a seguinte atividade:

1. Em um pedaço de papel anote o valor de u;
2. Jogue a moeda;
3. Se o resultado for cara, some 1 ao número último número anotado, e escreva ao lado deste;
4. Se o resultado for coroa, subtraia 1 do número último número anotado, e escreva ao lado deste;
5. Repita estes passos até que atinja 0 ou N;
6. Ao terminar anote: o valor final (0 ou N) e o número de jogadas necessárias para chegar ao final da atividade.

Peça que cada grupo repita esta atividade quantas vezes puder até acabar o tempo.

Com o resultado em mãos calcule a média aritmética do número de jogadas necessárias e a proporção de vezes que a atividade terminou em 0. Compare os resultados com aqueles calculados com as expressões deste capítulo.

Esta atividade pode ser modificada de várias maneiras, de acordo com o interesse do leitor. Podemos, por exemplo, trocar uma moeda por um dado ou por um saco com bolas de cores distintas, para simular um jogo com $p \neq q$. Outra possibilidade é estudar o que acontece quando se muda o valor das apostas, bastando para isso somar ou subtrair um valor diferente de 1 a cada jogada. Podemos ainda atribuir uma valor a ser comado ou subtraído que dependa do resultado no lançamento de um dado.

Capítulo 3

Modelos Similares

3.1 Teste de Dois Medicamentos

Um outro exemplo nos mostra um problema de aplicação do raciocínio usado na "Ruína do Jogador" na qual analisamos simultaneamente o comportamento de duas v.a.'s. Para comparar a capacidade de cura de dois determinados medicamentos, um grupo de pessoas é separado em duplas que são dispostas em uma sequência. Simultaneamente, cada indivíduo de cada par toma um dos dois medicamentos, de modo que cada pessoa da dupla recebe medicamentos distintos. Inicialmente, não são conhecidas suas probabilidades de cura e vamos identificar estes valores como P_1 e P_2. Busca-se determinar qual é o medicamento mais eficaz, ou seja, determinar se $P_1 > P_2$ ou $P_2 > P_1$.

Para isso vamos fazer o seguinte teste. Primeiro definimos v.a.'s X_j e Y_j de forma que

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{, se o paciente } j \text{ ficar curado por ter sido submetido à droga 1} \\ 0 & \text{, se o paciente } j \text{ não ficar curado por ter sido submetido à droga 1} \end{cases}$$

e

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{, se o paciente } j \text{ ficar curado por ter sido submetido à droga 2} \\ 0 & \text{, se o paciente } j \text{ não ficar curado por ter sido submetido à droga 2} \end{cases}$$

É então estipulado um determinado valor M que servirá de parâmetro para o encerramento dos testes. Após a verificação do resultado de cada uma das n duplas, calculamos a diferençca entre o total de pessoas curadas pelo medicamento 1 e o total de pessoas curadas pelo medicamento 2, e denotamos este total por Z_n. Ou seja,

$$Z_n = (X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) - (Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_n).$$

Observe que Z_n pode assumir qualquer valor inteiro entre $-n$ e n, e assumirá valores positivos sempre que houverem mais pessoas curadas pelo droga 1 que pela droga 2. Do mesmo modo, Z_n negativo indica um total de pessoas maior curadas pela droga 2.

O número de duplas que participam do teste é aumentado até que Z_n atinge M ou $-M$. Neste ponto encerramos o processo. Ocorrendo a primeira situação, diremos que $P_1 > P_2$. Do contrário, diremos que $P_2 > P_1$.

É fácil perceber que o este teste não é infalível! De fato, existe a chance de Z_n atinjer M quando $P2 > P_1$ e vice-versa, mas é esperado que esta probabilidade seja pequena para valores grandes de M.

Sigamos nossa análise. Após a verificação em cada nova dupla de indivíduos, podem ocorrer as seguintes situações

- Z_n aumentou 1, com probabilidade $P_1 \cdot (1 - P_2)$
- Z_n diminuiu 1, com probabilidade $P_2 \cdot (1 - P_1)$
- Z_n não se alterou, com probabilidade $P_1 \cdot P_2 + (1 - P_1) \cdot (1 - P_2)$

Como não ocorre mudança no valor de Z_n quando a terceira possibilidade ocorre, esta situação não influencia no resultado final do teste, mesmo que possa acontecer inúmeras vezes durante o processo como um todo. Para nos livrar desta alternativa, vamos supor que a cada dupla analisada ocorra uma variação de uma unidade, para mais ou para menos em Z_n. Qual seria portanto, a probabilidade de ocorrer o aumento de uma unidade dado que ocorreu variação no resultado do teste? Se chamarmos de P tal probabilidade temos

$$P = \mathbb{P}\{Z_n = Z_{n-1} + 1 | Z_n \neq Z_{n-1}\},$$

e portanto

$$P = \frac{P_1 \cdot (1 - P_2)}{P_1 \cdot (1 - P_2) + (1 - P_1) \cdot P_2}.$$

No numerador, temos a probabilidade de que ocorra a interseção entre os eventos {aumentar 1 unidade neste teste} e {aumentar ou diminuir 1 unidade neste teste} . Isto corresponde à probabilidade de que ocorra o evento {a droga 1 curou e a droga 2 não}. Já o denominador mostra a probabilidade de que Z_n tenha aumentado ou diminuído 1 unidade. Diante do que foi determinado acima, analogamente, teríamos que a probabilidade de que ocorresse a diminuição de uma unidade dado que ocorreu variação no resultado do teste da dupla seria

$$1 - P = \mathbb{P}\{Z_n = Z_{n-1} - 1 | Z_n \neq Z_{n-1}\}$$
$$1 - P = \frac{P_2. \cdot (1 - P_1)}{P_1 \cdot (1 - P_2) + (1 - P_1) \cdot P_2}.$$

Note que, ao "ignorarmos" os testes onde não ocorre mudança de Z_n passamos a ter um modelo muito similar ao modelo da ruína do jogador que estudamos no Capítulo 2. De fato, se pensarmos em Z_n como a fortuna de um jogador, e cada teste em uma dupla de pacientes como uma jogada, temos um modelo onde a fortuna do jogador aumenta uma unidade com probabilidade P e diminui uma unidade com probabilidade $1 - P$. As diferenças são que a fortuna inicial é zero, e que o jogo acaba em $-M$, e não em zero.

Para resolver estes problemas, basta que somemos M ao nosso total! Assim as transições de uma unidade continuam acontecendo, mas teremos um valor inicial M, e o processo se encerra em 0 ou $2M$. Isso é exatamente igual ao modelo da ruína do jogador se considerarmos $u = M$ e $N = 2M$.

Lembrando, o problema da Ruína do Jogador nos ofereceu a expressão (2.7)

$$P_u = \frac{1 - (q/p)^u}{1 - (q/p)^N}.$$

Onde P_u indicava a probabilidade de que o jogador A atingisse a fortuna N antes de chegar à derrota com fortuna zero. Lembremos que foi demonstrado que o jogo termina e a fortuna de A não fica eternamente oscilando entre 0 e N.

Assim, se P_{+M} representa a probabilidade de que Z_n alcance M antes de alcançar $-M$, temos que

$$\begin{aligned} P_{+M} &= \frac{1 - ((1-P)/P)^M}{1 - ((1-P)/P)^{2M}} \\ &= \frac{1 - ((1-P)/P)^M}{(1 - ((1-P)/P)^M).(1 + ((1-P)/P)^M)} \\ &= \frac{1}{1 + ((1-P)/P)^M} \end{aligned}$$

Chamando de γ o valor $((1 - P)/P)$, temos

$$P_{+M} = \frac{1}{1 + \gamma^M}.$$

Calculos simples, que deixamos para o leitor, mostram que

$$P_{-M} = 1 - P_{+M} = \frac{1}{1 + (1/\gamma)^M}.$$

Como falamos anteriormente, o teste não infalível, e existe a probabilidade de que indique o medicamento errado como sendo o mais eficaz. Suponha que $P_2 > P_1$ e portanto o segundo medicamento é o mais eficaz. Neste caso o teste daria errado se indicasse o medicamento 1 como o melhor, o que acontece se Z_n atingir M antes de $-M$. Assim, a probabilidade de erro no teste seria exatamente P_{+M}.

Observe agora que

$$\gamma = \frac{1-P}{P} = \frac{P_2 \cdot (1 - P_1)}{P_1 \cdot (1 - P_2)}.$$

$$\begin{aligned} P_2 > P_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{P_1} > \frac{1}{P_2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{P_1} - 1 > \frac{1}{P_2} - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1 - P_1}{P_1} > \frac{1 - P_2}{P_2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{P_2 \cdot (1 - P_1)}{P_1 \cdot (1 - P_2)} > 1, \end{aligned}$$

e portanto $P_2 > P1$ implica que $\gamma > 1$.

Assim, quando M cresce γ^M cresce junto e, como esperavamos, P_{+M} chega mais perto de zero.

A mesma análise pode ser feita quando $P_1 > P_2$. Neste caso a probabilidade de erro será dada por

$$P_{-M} = \frac{1}{1 + (1/\gamma)^M}.$$

Mas agora, como $P2 < P_1$, temos $\gamma < 1$, o que implica em $1/\gamma > 1$ e a mesma análise pode ser feita.

3.2 Passeios Aleatórios

O *Passeio Aleatório* ou *Caminhas do Bêbado*, como é popularmente conhecido, é um processo aleatório muito parecido com o modelo da ruína do jogador estudado no início do capítulo. Nele o "passeante aleatório" (o bêbado), sai de um ponto inicial e, por não conseguir andar em linha reta, a cada passo para frente anda uma unidade para a direita, com probabilidade p ou uma unidade para a esquerda, com probabilidade $1 - p$.

Assim, observando a distância que o indivíduo se encontra do eixo no qual deveria estar andando, temos um processo aleatório que se comporta da seguinte maneira

- No instante 0 o passeante se encontra na posição 0;
- A cada instante o passeante muda sua atual posição de 1 unidade, somando 1 com probabilidade p, ou subtraindo 1 com probabilidade $1 - p$.

Este processo é muito pareciso com o modelo da ruína do jogador, com as únicas diferenças de que o processo agora começa em 0, e não existem valores que determinam o final do processo, de modo que este continua indefinidamente.

Para representar melhor este processo, considere uma sequência de v.a.'s

$$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n,$$

onde cada uma assume valores $+1$, com probabilidade p, ou -1, com probabilidade $q = 1-p$. X_n representa portanto o passo dado no instante n. Com isso, se chamarmos de S_n a posição do passeante no instante n, temos que

- $S_0 = 0$, pois no instante 0 o passeante está na posição 0;
- $S_1 = X_1$, pois no instante 1 o passeante pode estar nas posições 1 ou -1;
- $S_n = S_{n-1} + X_n$, pois estando na posição S_{n-1} no instante $n - 1$, no próximo passo ele estará em $S_{n-1} + 1$ ou $S_{n-1} - 1$, com probabilidades descritas pela variável X_n.

Segue assim que

$$S_n = S_{k-1} + X_n = S_{n-2} + X_{n-1} + X_n = \cdots = X_1 + \cdots + X_n.$$

Assim, o Passeio Aleatório é definido como uma sucessão destas somas parciais.

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$$

Se fizermos uma comparação da presente situação com a disputa em que um jogador arremessa uma moeda e ganha 1 real se der cara ou perde a mesma quantia se der coroa teremos que, após sucessivos resultados dos lançamentos, o caminho traçado por S_n representará os ganhos acumulados pelo participante no jogo.

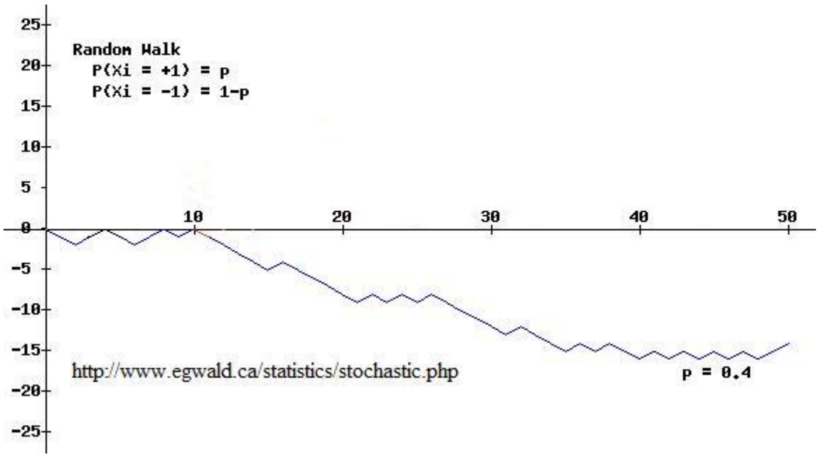


Figura 3.1: Representação da simulação de um passeio aleatório para $p = 40$ %

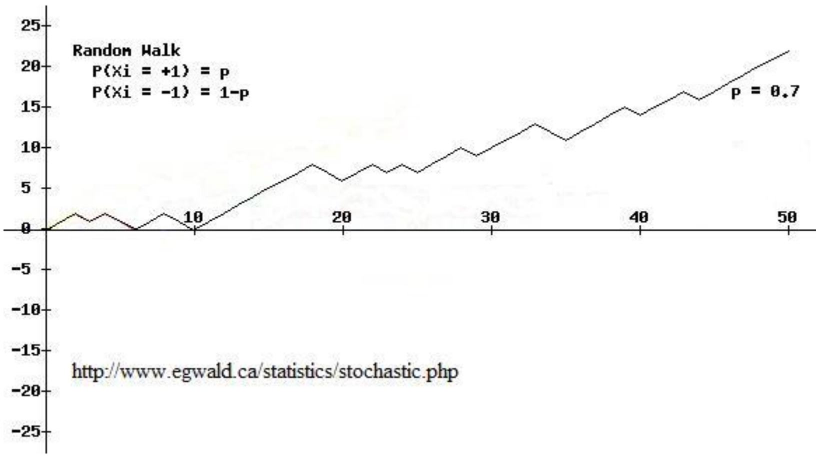


Figura 3.2: Representação da simulação de um Passeio Aleatório para $p = 70$ %

Utilizando um sistema cartesiano onde as somas parciais são registradas no eixo vertical e os passos no horizontal, podemos representar graficamente estas trajetórias, de modo a simplificar a visualização do problema. As figuras abaixo apresentam duas representações de um processo com 50 passos. Foram selecionados dois valores para a probabilidade p. Note que, se a primeira das duas figuras relatasse o passeio relativo a lançamentos sucessivos de uma moeda, como a situação descrita no parágrafo anterior, teríamos a seguinte sequência para os 10 primeiros arremessos da moeda - $CCKKCCKKCK$ (onde C = coroa e K = cara). Pode ocasionalmente ocorrer, como nas duas simulações representadas nas figuras, situações em que S_n não atinge valores positivos (ou que só atinge valores positivos). A primeira figura expõe um experimento com resultados tais que a soma parcial nunca atinge valores positivos. Já na segunda, S_n chega a ser nulo (após o sexto e o décimo lançamento), mas em momento nenhum fica negativo. Perceba então que os gráficos ilustram de forma mais expressiva o processo como um todo, evidenciando suas variações e valores extremos.

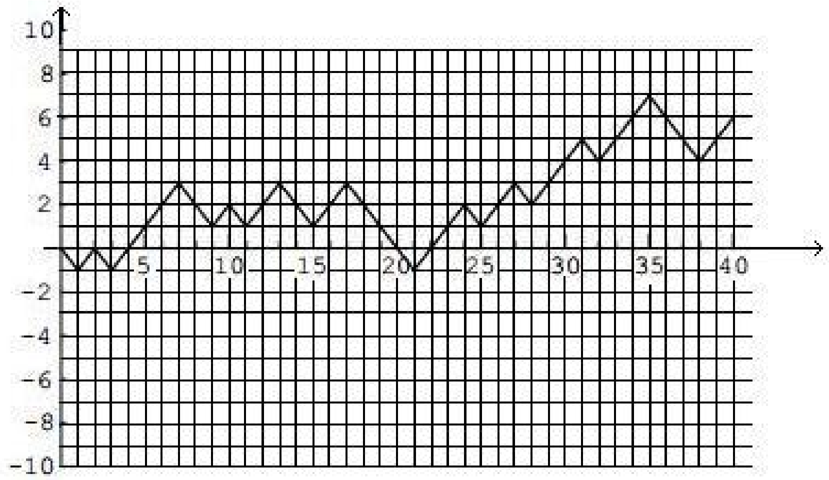


Figura 3.3: Representação da simulação de um Passeio Aleatório de comprimento 40

Voltando ao gráfico da figura 3.2, observemos que ele descreve um movimento no qual o objeto voltou à origem após os seis passos iniciais (e novamente após o décimo). Perguntas naturais neste tipo de modelo são: Qual a probabilidade do passeante estar de volta à origem no sexto passo. Qual a probabilidade da trajetória passar pelo ponto $(9, 1)$, passando pelo ponto $(7, 3)$ (figura 3.3)?

Para responder estas perguntas vamos antes simplificar o problema, e nos concentrar no caso onde $p = 1 - p = 1/2$. Neste caso, a probabilidade do caminho estar em um dado local em um dado instante k depende apenas do total de trajetórias de tamanho k que chegam até o ponto desejado. Isso por que cada uma destas trajetórias tem a mesma probabilidade.

Na mesma simulação, temos que o passeio passa pelo ponto em que S_n=1, no instante 5. Vamos contar, por exemplo, o total de caminhos que estão na posição 1 no instante 5. No gráfico seriam os caminhos que passam pelo ponto $(5, 1)$. Quantos caminhos, ao todo, levariam a este ponto, partindo da origem? Vamos chamar inicialmente de N_5 a quantidade de caminhos de tamanho 5, que partem da origem. Saindo da origem existem 2 opções de deslocamento e a cada novo passo, dobra a quantidade de ações possíveis. Se o caminho fosse decidido por lançamentos sucessivos de uma moeda, teríamos:

- 1 lançamento = 2 caminhos : K ou C
- 2 lançamentos = 4 caminhos : KK, KC, CK ou CC

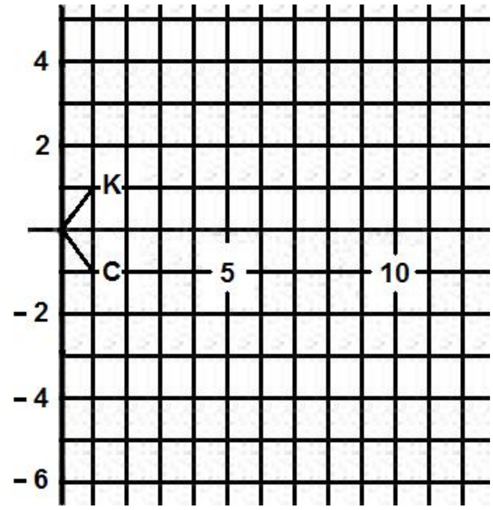


Figura 3.4: Passeios para $n = 1$

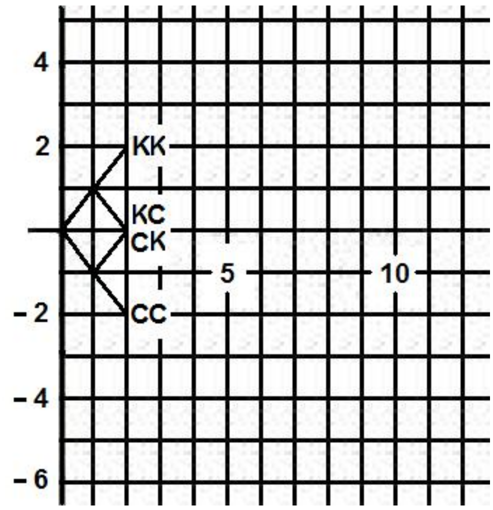


Figura 3.5: Passeios para $n = 2$

- 3 lançamentos = 8 caminhos : KKK, KKC, KCK, CKK, KCC, CKC, CCK, CCC

  ...

- n lançamentos = 2^n caminhos (para generalizar)

Se dividirmos a quantidade de passos n em duas partes, a (quantidade de variáveis X que são positivas) e b (quantidade de variáveis X que são negativas), teremos que

$$a + b = n$$

Vale lembrar que a e b são quantidades, portanto são valores positivos. Sendo o valor

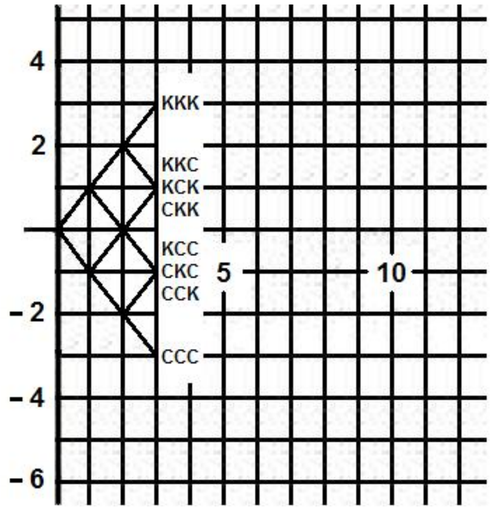


Figura 3.6: Passeios para $n = 3$

de S_n determinado pela adição entre a valores 1 e b valores -1, podemos escrever

$$a - b = S_n$$

Voltemos mais uma vez ao exemplo da representação feita na figura 3.3. Referindo-se novamente aos arremessos consecutivos de uma moeda, para chegar ao ponto $(n, S_n) = (7, 3)$, a sequência de resultados foi CKCKKKK (7 passos onde $-1+1-1+1+1+1+1 = 3$). Perceba o leitor que qualquer reorganização destes sete resultados levaria, logicamente na mesma quantidade de passos, ao valor de $S_n = 3$.

Ou seja, na linguagem dos livros de matemática dedicados ao ensino médio, temos que qualquer permutação com repetição destas sete letras (sete resultados da moeda) leva ao ponto $(7, 3)$ do gráfico. Em outras palavras, a quantidade de caminhos diferentes, que partem da origem e levam a $(7, 3)$ é

$$N_{7,3} = \frac{7!}{5! \cdot 2!}$$

Ou seja,

$$N_{7,3} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2}$$

Ou ainda, generalizando, o total de caminhos iniciados na origem que levam ao ponto (n, S_n) é

$$N_{n,Sn} = \binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$$

Onde $a + b = n$ e $a - b = S_n$.

Estas duas últimas igualdades nos permitem alterar a expressão de $N_{n,Sn}$ encontrando

$$a = \frac{2a}{2} = \frac{a-b+a+b}{2} = \frac{S_n+n}{2}.$$

De onde segue que

$$N_{n,Sn} = \binom{n}{\frac{n+Sn}{2}} = \binom{n}{\frac{n-Sn}{2}}$$

3.3 Atividade Prática

As tarefas abaixo buscam inicialmente fazer com que os alunos reflitam sobre as possibilidades de caminhos que levam a um determinado ponto do gráfico. Devemos esperar que eles percebam que, atingir um valor determinado de S_n, efetuando n lançamentos da moeda, só se é possível com uma sequência específica de caras e coroas ou com suas permutações. Apresente então as seguintes tarefas:

Atividade 1 - Pense em um caminho aleatório gerado por lançamentos sucessivos de uma moeda (passos).

(a) Responda : é possível retornar à origem ($S_n = 0$) após 6 passos ?

(b) Se respondeu sim, trace no gráfico abaixo um possível caminho que levaria a isso. Se respondeu que não, justifique a escolha.

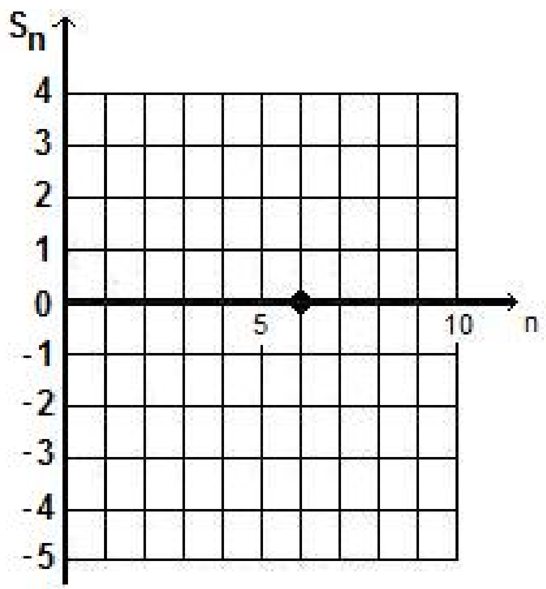


Figura 3.7:

Atividade 2 - Faça o que se pede

(a) Responda: é possível chegar ao ponto $(4, -2)$ após 4 passos?

(b) Se respondeu sim, trace no gráfico abaixo um possível caminho que levaria a isso. Se respondeu que não, justifique a escolha.

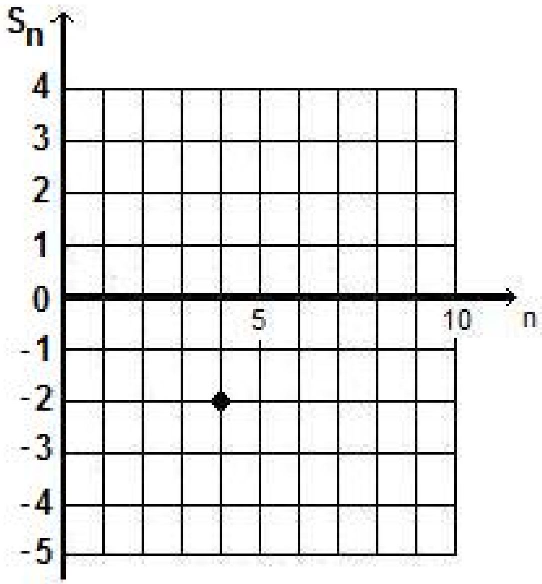


Figura 3.8:

Atividade 3 - Faça o que se pede.

(a) Responda : existe algum caminho que chegue ao ponto (2, 3) após 2 passos ?

(b) Se respondeu sim, trace um no gráfico abaixo. Se respondeu que não, justifique a escolha.

Atividade 4 - Faça o que se pede.

(a) Marque, nos gráficos abaixo, 4 caminhos diferentes que cheguem ao ponto $(3, -1)$.

(b) É possível fazer isso ? Justifique sua resposta.

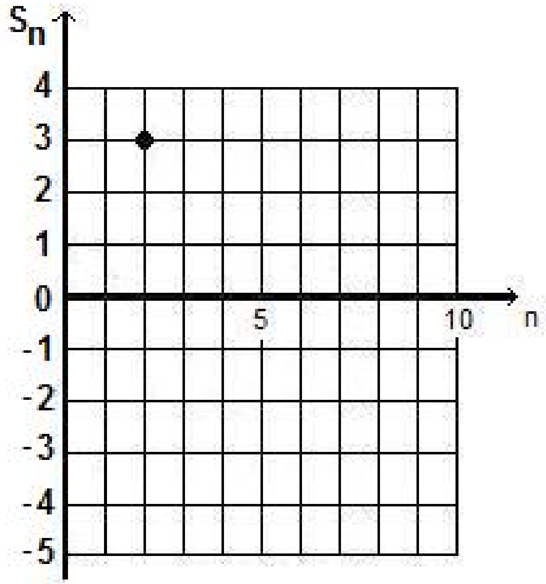


Figura 3.9:

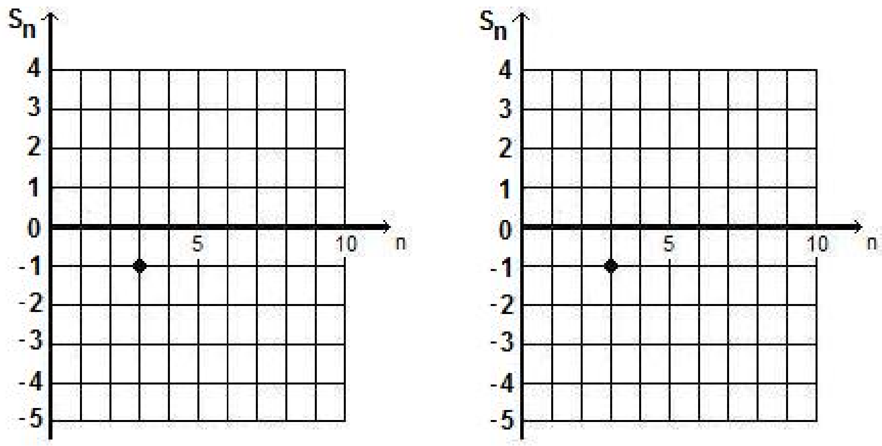


Figura 3.10:

Atividade 5 - Faça o que se pede.

(a) O que há em comum entre os caminhos que conseguiu marcar no item 4 ?

(b) Quantas caras e quantas coroas seriam necessárias para que tivéssemos cada caminho marcado ? Descreva, usando K para cara ($\nearrow$) e C para coroa ($\searrow$), os caminhos marcados.

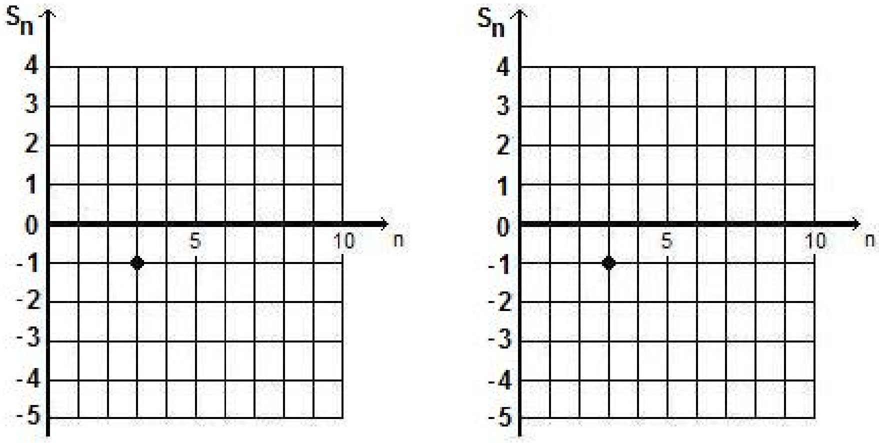


Figura 3.11:

Atividade 6 - Utilizando a relação

$$N_{n,Sn} = \binom{n}{\frac{n+Sn}{2}} = \binom{n}{\frac{n-Sn}{2}}$$

determine a quantidade de caminhos que chegam aos pontos das questões 1 a 4 acima. É possível fazer o cálculo para todas as figuras? Justifique.

Bibliografia

[1] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 1, Wiley, January 1968.

[2] E.L. Lima, P.C.P. Carvalho, E. Wagner, and A.C. Morgado, *A matemática do ensino medio*, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

[3] M.N. Magalhães, *Probabilidade e variáveis aleatórias*, Edusp, 2006.

[4] S. Pedro, *O problema da ruína do jogador*, `https://sites.google.com/site/problemadaruina/`.

[5] S. Ross, A. Pertence, and A.R. De Conti, *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações*, Bookman Companhia ed, 2010.

[6] S.M. Ross, *Introduction to probability models*, Elsevier Science, 2006.