Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Luana França Evangelista

Por que $1414 \div 14$ não é 11? Abordagens lúdicas para o ensino da divisão

Belo Horizonte
2023

Luana França Evangelista

POR QUE 1414 ÷ 14 NÃO É 11? ABORDAGENS LÚDICAS PARA O ENSINO DA DIVISÃO

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador
Frederico Augusto Menezes Ribeiro

Coorientação
Jane Lage Bretas,
Pedro Henrique Pereira Daldegan

Banca Examinadora
Frederico Augusto Menezes Ribeiro
Fernanda Aparecida Ferreira
Aniura Milanes Barrientos

Belo Horizonte
2023

E92p

Evangelista, Luana França
Por que 1414 ÷ 14 não é 11?: abordagens lúdicas para o ensino da divisão / Luana França Evangelista. – 2023.
115 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientador: Frederico Augusto Menezes Ribeiro.
Coorientadores: Jane Lage Bretas e Pedro Henrique Pereira Daldegan.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Divisão – Teses. 2. Algorítmos – Teses. 3. Jogos no ensino de matemática – Teses. I. Ribeiro, Frederico Augusto Menezes. II. Bretas, Jane Lage. III. Daldegan, Pedro Henrique Pereira. IV Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. V. Título.

CDD 510.71

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

Luana França Evangelista

POR QUE 1414 $\div$ 14 NÃO É 11? ABORDAGENS LÚDICAS PARA O ENSINO DA DIVISÃO

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Aprovada: 12 de julho de 2023.

Luana França Evangelista

Luana França Evangelista
(Autor)

Frederico Augusto Menezes Ribeiro
(Orientador)

Belo Horizonte
2023

Agradecimentos

Ao meu marido Cássio, pelo companheirismo, apoio, carinho e compreensão durante todo o período do mestrado. Pela ajuda muito solicitada nos estudos e com Latex.

Aos meus orientadores Fred, Jane e Pedro pela paciência, acolhimento, conselhos e toda a ajuda que me proporcionaram durante o percurso deste trabalho.

A minha família, pelo apoio e amor incondicional.

Aos meus amigos do PROFMAT, especialmente Virginia e Helenice, pelas tardes de conversas e desabafos que nos permitiram chegar até o fim do mestrado.

Aos professores Aniura, Fernanda e Luis Alberto pelas valiosas contribuições e por terem aceitado o convite para participar da banca.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

O Algoritmo da Divisão é frequentemente considerado pelos discentes um conteúdo complexo. Faremos, neste trabalho, um aprofundamento sobre o tema, investigando como a divisão vem sendo abordada em livros didáticos disponíveis nas redes pública e privada das escolas de Minas Gerais. Analisaremos também as reflexões alternativas sugeridas em dissertações do PROFMAT e ainda apresentaremos uma avaliação diagnóstica criada para entender quais as dúvidas e defasagens dos alunos. Por fim, estudaremos algumas teorias sobre a construção do conhecimento e o uso de material concreto e jogos como metodologia de ensino para propor atividades lúdicas que possam contribuir para a abordagem deste conteúdo.

Palavras-chave: Divisão. Algoritmo. Jogos. Ensino.

Abstract

The Division Algorithm is often considered by students to be a complex subject. As a teacher, I met with students who were lacking in this content in all grades of Elementary and High School. In this work, we will deepen the theme, investigating how the division has been approached in textbooks available in public and private schools in Minas Gerais. We will also analyze the alternative suggestions present in PROFMAT's theses and we will also present a diagnostic test created to understand the doubts and gaps of the students. Finally, we will study some theories about the construction of knowledge and the use of concrete material and games as a teaching methodology to propose ludic activities that can contribute to the approach of this content.

Keywords: Division. Algorithm. Games. Teaching.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Em minha infância, sempre demonstrei um gosto especial por jogos. Sejam jogos esportivos, de cartas, de tabuleiro ou videogames. Neste período, adquiri vários conhecimentos de maneira leve e involuntária. Quando meu professor de Matemática ensinou as letras do alfabeto grego, percebi que já as conhecia devido às muitas horas pilotando naves no *Star Force*. Após jogar dois dados tantas vezes no jogo *Colonizadores de Catan*, eu já percebia que haviam somas dos números das faces que eram mais frequentes que outras. O jogo de damas me ensinou o que era diagonal antes mesmo que eu soubesse a definição de um polígono. Os jogos de *Buraco* me fizeram contar cartas com valores predefinidos sem a ajuda de um papel, estimulando meu cálculo mental. Com *Minecraft*, o oposto aconteceu, eu pude ver conceitos matemáticos sendo desenvolvidos intrinsecamente nas ações do personagem. Os exemplos são inúmeros, assim como o potencial de aprendizado que pode ser explorado dentro dos jogos.

Ainda, durante a Licenciatura, tive a oportunidade de trabalhar como monitora (bolsista) no Projeto Visitas[1]. O projeto tem o objetivo de ensinar ou reforçar conceitos matemáticos através de jogos e atividades lúdicas. Em um local reservado, dentro da UFMG, os professores de escolas públicas e privadas podiam reservar um horário para levar suas turmas de alunos para participar de oficinas ministradas por mim e meus colegas de curso. A experiência mudou totalmente a minha visão de ensino, pois lá pude desenvolver jogos e apresentá-los, adquirindo uma experiência que levo para a sala de aula até os dias de hoje.

Ao iniciar o mestrado, já tinha em mente que iria fazer uma pesquisa em relação ao uso de jogos no ensino. E, com o tempo, resolvi combinar esta ideia com uma inquietação relacionada à operação de divisão.

Durante meu percurso como professora, lecionando na Educação Básica, percebi que, independente do ano de ensino em que estava atuando, era comum encontrar alunos que manifestavam dificuldades para a realização da operação de divisão. Este fenômeno sempre me chamou atenção, visto que enfrentei os mesmos impasses enquanto estudante.

[1] Conheça mais sobre o projeto no site https://www.mat.ufmg.br/visitas/

Como professora, considero que para o aprendizado de qualquer conteúdo da disciplina de Matemática é necessário que o discente realize, sem dificuldades, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. A compreensão, tanto das ideias que se associam a estas operações, quanto de seus respectivos algoritmos são prerrequisitos para o bom desempenho na disciplina de Matemática.

A operação de divisão pode ser considerada o primeiro contato do estudante com um algoritmo que apresenta procedimentos mais complexos. Por isso, há uma tendência a "decorar" regras que nos permitem realizar a divisão. Entretanto a relação entre as regras e estes processos não é explicada. Enquanto professora e estudante na Licenciatura, pude sanar minhas inquietações em relação ao Algoritmo da Divisão através de pesquisas e estudos independentes. Contudo, isso só foi possível devido ao amadurecimento matemático que eu já possuía no momento em que decidi solucionar minhas próprias dúvidas. Tal situação me levou a pensar em como eu poderia lidar com este problema no momento que ele normalmente surge, no 6° ano do Ensino Fundamental.

Existe uma diferença entre compreender o que significa dividir e executar a operação de divisão utilizando o processo formal. Entretanto, estas duas ideias parecem fundir quando abordamos a divisão no Ensino Fundamental II, causando um aumento do nível de complexidade do conteúdo.

O Algoritmo da Divisão é uma ferramenta para solucionar um problema que envolve, segundo Salvador (2012), as ideias de distribuir e medir.

> Considerando os livros de Arithmetica do século XIX analisados, somente Roswell C. Smith, no seu livro "Practical and Mental Arithmetic on a New Plan", de 1827, apresenta o conceito de divisão como o processo de dividir um número em partes iguais, ou achar quantas vezes um número está contido em outro, enquanto que nos demais livros, somente é abordada a ação de achar quantas vezes um número está contido em outro. (SALVADOR [12], 2012, p. 31)

Estes conceitos não são desconhecidos para uma criança, possivelmente ela já teve contato com algum deles desde o início de sua jornada escolar.

> [...] o aprendizado das crianças começa muito antes delas frequentarem a escola. Qualquer situação de aprendizado com a qual a criança se defronta na escola tem sempre uma história prévia. Por exemplo, as crianças começam a estudar aritmética na escola, mas muito antes elas tiveram alguma experiência com quantidades – elas tiveram que lidar com operações de divisão, adição, subtração e determinação de tamanho. Consequentemente, as crianças têm a sua própria aritmética pré-escolar, que somente psicólogos míopes podem ignorar. (VYGOTSKI [50], 1991, p. 56)

Entender de maneira satisfatória as ideias de repartir e medir e o porquê de cada "regra" utilizada precede o ensino do Algoritmo da Divisão. É necessária a fluência de alguns prerrequisitos, entre eles a compreensão do valor posicional de um algarismo e das três operações básicas: adição, multiplicação e divisão. O objetivo deste trabalho é observar como a Divisão vem sendo apresentado aos alunos em livros didáticos e por professores estudantes do PROFMAT, pesquisar sobre as dificuldades de compreensão em relação ao tema e propor atividades que ofereçam uma abordagem alternativa ao ensino deste tópico.

No Capítulo 2 analisamos como algumas coleções de livros didáticos abordam o Algoritmo da Divisão. Já no Capítulo 3 estudamos como o tema da divisão vem sendo abordado em trabalhos de dissertação do PROFMAT, enfatizando os impasses enfrentados pelos professores, métodos de ensino alternativos sugeridos e o desempenho dos alunos em relação ao conteúdo. Para orientar a construção do produto deste trabalho, no Capítulo 4 discutimos algumas teorias sobre desenvolvimento cognitivo, jogos como metodologia de ensino e práticas do professor dentro de sala de aula. No Capítulo 5 descrevemos uma avaliação diagnóstica aplicada a alunos de diversas séries de uma escola pública de Ribeirão das Neves, comentando os erros comuns, as possíveis defasagens de conteúdo relacionadas a cada erro e ainda apresentamos algumas explicações que podem ajudar a sanar estas dúvidas. Por fim, no Capítulo 6, apresentamos dois jogos inéditos que abordam a divisão: "A boca que rói" e "Copo D'água". Ainda, há duas atividades criadas para complementar o ensino deste tópico.

2 Abordagens do Algoritmo da Divisão em livros didáticos

O Algoritmo da Divisão é um procedimento utilizado para estabelecer o quociente e resto únicos da divisão de dois números inteiros. Neste capítulo, enunciaremos esse algoritmo no contexto do subconjunto dos números naturais, avaliaremos as recomendações de ensino desse tópico segundo a Base Nacional Comum Curricular BNCC [1], 2018, e ainda discutiremos sobre as práticas de ensino sugeridas pelos livros didáticos em relação ao tema.

O Teorema da Divisão Euclidiana, Algoritmo da Divisão, afirma que, dados números naturais a e b, com $b \neq 0$, existem dois únicos números também naturais, q (*quociente*) e r (*resto*), tais que $a = bq + r$ em que $0 \leq r < b$.

O procedimento para a execução do Algoritmo da Divisão não é considerado simples, envolvendo alguns prerrequisitos matemáticos e um certo amadurecimento das ideias associadas à divisão. Para realizá-lo sem dificuldades, é necessário compreender o valor posicional dos algarismos dentro dos números, realizar transformações de unidades e ter fluência nas operações de multiplicação e subtração. Tal fato nos leva a pensar: qual o melhor momento para ensinar o Algoritmo da Divisão?

Segundo a BNCC, a apresentação dos conceitos que estabelecem bases para o ensino do Algoritmo da Divisão começa no 3°, 4° e 5° ano. Em seguida, o assunto é desenvolvido no 6° e 7° ano do Ensino Fundamental. Na Tabela 2.1, são apresentados os objetos de conhecimento relacionados ao Algoritmo da Divisão, as habilidades e o ano em que é sugerido o seu ensino.

Notamos que a sugestão explícita do ensino da divisão euclidiana ocorre no 6° ano, entretanto, é comum que ela seja introduzida no 4° ano, devido à menção a algoritmos na habilidade EF04MA07. Tal prática nos leva a ponderar se esta introdução não está ocorrendo "cedo demais", visto que, neste momento do aprendizado, o aluno ainda está aprimorando o conhecimento das outras três operações básicas.

Tabela 2.1: Habilidades relacionadas à divisão recomendadas pela BNCC.

Objeto de conhecimento	Habilidade BNCC	Ano de ensino
Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida.	(EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais.	3°
Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte.	(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.	3°
Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais.	(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo.	4°
Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida.	(EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	4°
Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão.	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.	4°
Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais	(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	5°
Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais. Divisão euclidiana	(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.	6°

Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.	6°
Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.	(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.	7°

Fonte: BRASIL [1] (2018).

O momento em que o Algoritmo da Divisão é ensinado pode interferir na maneira como o aluno compreende a operação de divisão. Tal fato nos leva a pensar em quais os benefícios de ensiná-lo durante o Ensino Fundamental I. É comum encontrar em nossa prática alunos que consideram a operação de divisão apenas como a "solução" de um exercício, dissociando-a da interpretação da situação problema e/ou então que não compreendem quando é necessário utilizá-la. Para que a divisão seja aprendida, é necessário que o estudante entenda não só como realizar a operação, mas também como identificar os conceitos associados a ela. Sabe-se que a divisão é associada a duas ideias principais: a de repartição em partes iguais e a de medição.

> A divisão está relacionada à subtração. Na verdade ela é uma subtração reiterada de parcelas iguais, por isso apresenta questões semelhantes às daquela operação. O primeiro ponto que podemos destacar é o fato de a divisão estar ligada a duas diferentes ideias, repartir igualmente e medir, sendo a primeira bem mais enfatizada que a segunda. (TOLEDO [47], 1997, p. 145)

Ao conseguir aplicar estas ideias na solução de problemas, realizando o cálculo por meio de diferentes estratégias, o aluno se permite entender por que aquela operação foi necessária. Resolver operações para solucionar um problema é importante, entretanto é fundamental saber que um algoritmo é uma sequência de instruções bem definidas, normalmente usadas para realizar cálculos, e não necessariamente a solução do problema.

Considerando que o livro didático é o material de apoio mais acessível, tanto para o professor, quanto para o aluno, neste capítulo faremos uma análise das sugestões de ensino deste conteúdo contidas em algumas coleções de livros didáticos disponíveis para uso entre os anos de 2018 a 2022. O material examinado foi escolhido entre os exemplares disponibilizados aos professores da rede estadual de Minas Gerais para a utilização a partir do ano de 2019. Serão analisadas nove coleções de livros didáticos aprovadas pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). Como não é usual que uma coleção abranja tanto os anos iniciais quanto os finais do Ensino Fundamental, alguns dos títulos selecionados apresentam livros direcionados apenas para os anos finais, outros para os anos iniciais.

Investigaremos como o conteúdo é introduzido, o nível de detalhamento das explicações fornecidas para o algoritmo usual, a contextualização dos exemplos, a apresentação de resoluções alternativas, se o material concreto, jogos ou alguma outra metodologia alternativa são exibidos como auxiliares ao ensino do tema, jogos entre outras características.

2.1 Coleção 1: A Conquista da Matemática

A coleção intitulada "A conquista da Matemática", escrita por José Ruy Giovanni Júnior, dispõe de livros para todos os anos do Ensino Fundamental. O primeiro contato com as ideias associadas à divisão ocorre na Unidade 4, no livro do 3° ano, onde são abordados e resolvidos dois problemas introdutórios, mostrados na Figura 2.1.

Figura 2.1: Ideias associadas à divisão


1ª situação: Helena visitou a Rússia e comprou **12** ovos de porcelana para presentear suas **3** irmãs.

Ela quer distribuir os **12** ovos, igualmente, nestas **3** caixas.

Para saber quantos ovos Helena deve colocar em cada caixa, devemos **repartir** a quantidade **12** em **3 partes iguais**, ou seja, podemos efetuar a **divisão 12 ÷ 3**.

Portanto, Helena deve colocar 4 ovos em cada caixa.

- Se Helena quisesse distribuir igualmente os 12 ovos em apenas 2 caixas, quantos ovos ela deveria colocar em cada caixa? 12 ÷ 2 = 6. 6 ovos.

2ª situação: Um funcionário de uma loja quer organizar **36** caixas de ferramentas em uma estante. Em cada prateleira da estante cabem, no máximo, **6** caixas.

Para saber quantas prateleiras ficarão completas, devemos saber **quantas vezes** a quantidade **6** cabe na quantidade **36**, ou seja, podemos efetuar a **divisão 36 ÷ 6**.

Portanto, 6 prateleiras ficarão completas com as caixas.

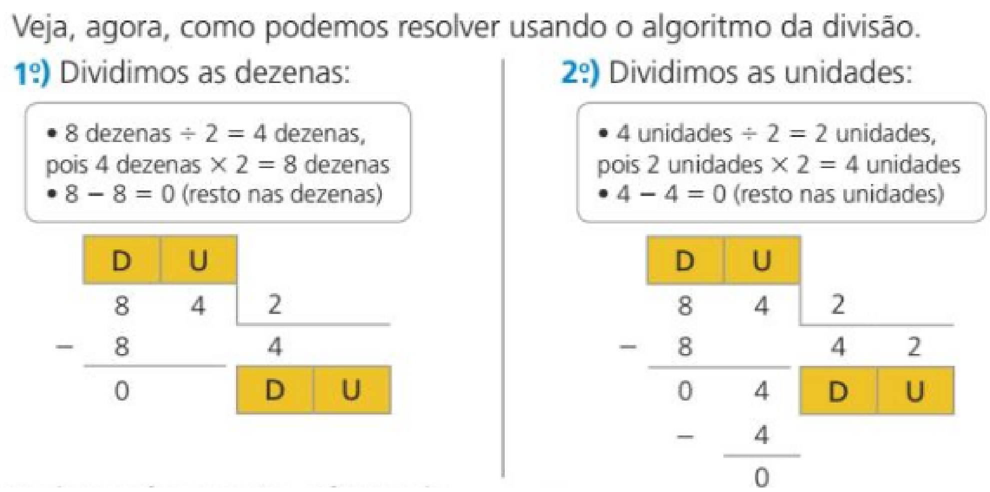
Fonte: Júnior [16] (2018, p. 81)

Observamos que não são apresentados métodos de resolução utilizando o algoritmo, porém a presença dos desenhos pode estimular o uso de técnicas alternativas para solucionar os problemas. O texto é direto e o mais conciso possível, mas considerando que nesta etapa de ensino o aluno ainda pode estar concluindo sua alfabetização, talvez seja necessária a ajuda do professor para que ele possa sustentar leituras longas. O símbolo de divisão ($\div$) é apresentado em meio ao texto, porém não é explicado seu significado. Por mais que o professor possa fornecer esta informação, seria interessante dedicar pelo menos uma frase a este detalhe.

Na Unidade 8 são apresentados mais exemplos práticos, desta vez deixados para que os alunos elaborem suas próprias estratégias de resolução, permitindo a prática e fixação das ideias associadas à divisão. Nesta unidade, há um capítulo cujo objetivo é introduzir o Algoritmo da Divisão. São apresentadas mais duas situações problema preliminares que são resolvidas com o auxílio do material dourado, estimativas e discussões acerca do problema. Por fim, o algoritmo é mostrado como um alternativa às soluções anteriores.

A explicação para a primeira situação problema, contida na Figura 2.2, é exibida de maneira esclarecedora e didática, porém considerando que o aluno está aperfeiçoando a compreensão das ideias associadas à divisão e consolidando as técnicas alternativas de resolução, talvez a introdução do algoritmo neo 3° ano tenha sido precoce.

Figura 2.2: Algoritmo da Divisão



Fonte: Júnior [16] (2018, p. 185)

Por outro lado, a segunda situação problema, mostrada na Figura 2.3, envolve o uso de dinheiro. Entretanto, na contextualização não é explorada uma solução que envolva as trocas entre notas e moedas. Consideramos que esta seria uma boa oportunidade para fazê-la, já que o sistema monetário é um tema que oferece suporte para que tal e se relaciona com o cotidiano dos alunos. A discussão sugerida para a solução ocorre novamente utilizando material dourado, estimativas e posteriormente o algoritmo, de maneira análoga à apresentada na Figura 2.2.

Figura 2.3: Problema com sistema monetário

2ª situação: Veja a quantia que 4 irmãos juntaram durante o ano.

Eles vão dividir igualmente essa quantia. Quantos reais cada irmão receberá?

Para determinar a quantia que cada irmão receberá, podemos efetuar a divisão **92 ÷ 4**.

VOCÊ CONSEGUE ESTIMAR O RESULTADO DA DIVISÃO 92 ÷ 4?

COMO 4 × 20 = 80 (MENOR QUE 92) E 4 × 30 = 120 (MAIOR QUE 92), O RESULTADO DESSA DIVISÃO É MAIOR QUE 20 E MENOR QUE 30, OU SEJA, A QUANTIA QUE CADA IRMÃO RECEBERÁ ESTÁ ENTRE 20 E 30 REAIS.

CLICK ART

Inicialmente, vamos efetuar essa divisão usando o material dourado.

Representamos o número 92.

92

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Dividimos as dezenas em 4 partes iguais.

8 dezenas distribuídas igualmente em 4 grupos

Restou 1 dezena.

Como restou 1 dezena, vamos trocar essa dezena por 10 unidades. Então, juntamos essas 10 unidades às 2 que já tínhamos.

10 unidades 2 unidades

12 unidades

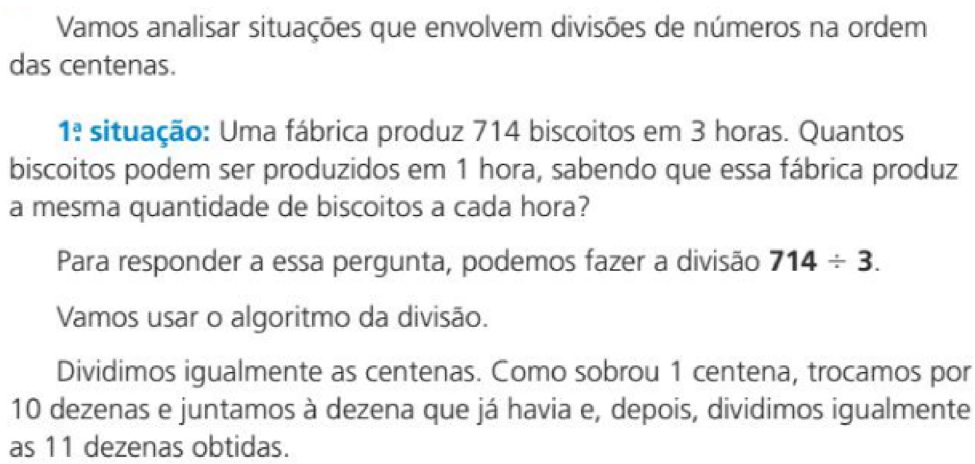
Fonte: Júnior [16] (2018, p. 186)

A unidade apresenta ainda a divisão não exata, através de exemplos ilustrados.

Como consequência, é abordada também a nomenclatura dos termos da divisão: dividendo, divisor, quociente e resto. Neste capítulo, alguns dos exemplos são resolvidos por meio de subtrações sucessivas, além dos métodos empregados anteriormente. Também, a multiplicação é apresentada implicitamente como operação inversa da divisão, como uma maneira de explicar o surgimento do "resto".

No capítulo intitulado "Outras situações envolvendo divisão", são apresentados cálculos com números na ordem das centenas, conforme a Figura 2.4. Consideramos que esta introdução aumenta a complexidade do conteúdo em um momento inoportuno, quando o aprendizado ainda não foi consolidado.

Figura 2.4: Divisões com números na ordem das centenas


Vamos analisar situações que envolvem divisões de números na ordem das centenas.

1ª situação: Uma fábrica produz 714 biscoitos em 3 horas. Quantos biscoitos podem ser produzidos em 1 hora, sabendo que essa fábrica produz a mesma quantidade de biscoitos a cada hora?

Para responder a essa pergunta, podemos fazer a divisão **714 ÷ 3**.

Vamos usar o algoritmo da divisão.

Dividimos igualmente as centenas. Como sobrou 1 centena, trocamos por 10 dezenas e juntamos à dezena que já havia e, depois, dividimos igualmente as 11 dezenas obtidas.

Fonte: Júnior [16] (2018, p. 197)

Em geral, o livro traz contextualizações e explicações bem elaboradas, porém considerando a faixa-etária para o qual ele é destinado e que este é o primeiro contato do aluno com a divisão, seria interessante que ele trouxesse mais ilustrações e menos textos. Apesar de, neste ponto, a introdução do algoritmo ainda não ter sido feita, o livro indica que a resolução da grande maioria de seus problemas não introdutórios seja feita utilizando este método. No capítulo final da Unidade, as ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima parte são mostradas, através de exercícios resolvidos apenas com o Algoritmo da Divisão.

O livro destinado ao 4° ano exibe a divisão na Unidade 5. O capítulo inicial, cujo título é “Ideias da divisão”, utiliza um problema motivador essencialmente igual ao do livro de 3° ano, mostrado na Figura 2.1. Os desenhos utilizados nesta introdução são meramente ilustrativos, não favorecendo a visualização do problema, diferentemente do que ocorre para o livro do 3° ano.

Figura 2.5: Problemas para assimilar as ideias da divisão

1ª situação: Mário comprou 20 ovos de Páscoa. Ele quer distribuí-los igualmente entre seus 5 netos. Quantos ovos ele dará a cada neto? 4

Para responder a essa pergunta, podemos repartir a quantidade 20 em 5 partes iguais, ou seja, podemos efetuar a divisão **20 ÷ 5**.

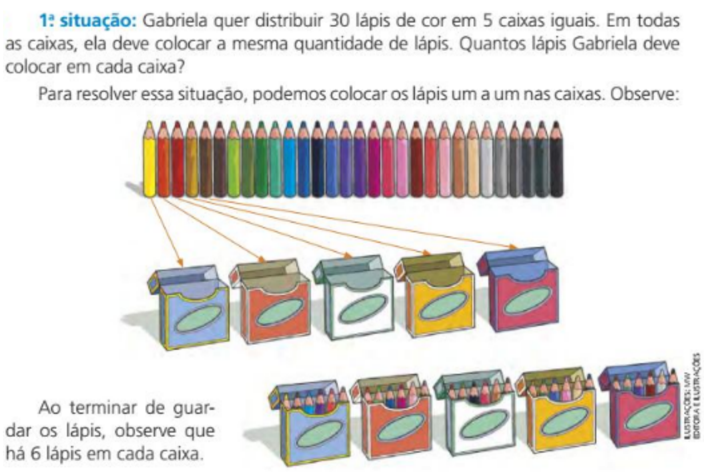
2ª. situação: Uma loja de objetos para decoração tem 80 objetos de cristal para serem organizados em caixas. Em cada uma, podem ser colocados até 8 objetos. Quantas caixas completas serão usadas? 10

Para responder a essa pergunta, podemos descobrir quantas vezes a quantidade 8 cabe na quantidade 80, ou seja, podemos efetuar a divisão **80 ÷ 8**.

Fonte: Júnior [17] (2018, p. 125)

O segundo capítulo da unidade possui o título “Situações de divisão” e não se diferencia muito do primeiro, cujo único texto contendo explicações é mostrado na Figura 2.5. Entretanto, na Figura 2.6, há uma ilustração interessante da resolução do problema proposto.

Figura 2.6: Situação problema resolvida



1ª situação: Gabriela quer distribuir 30 lápis de cor em 5 caixas iguais. Em todas as caixas, ela deve colocar a mesma quantidade de lápis. Quantos lápis Gabriela deve colocar em cada caixa?

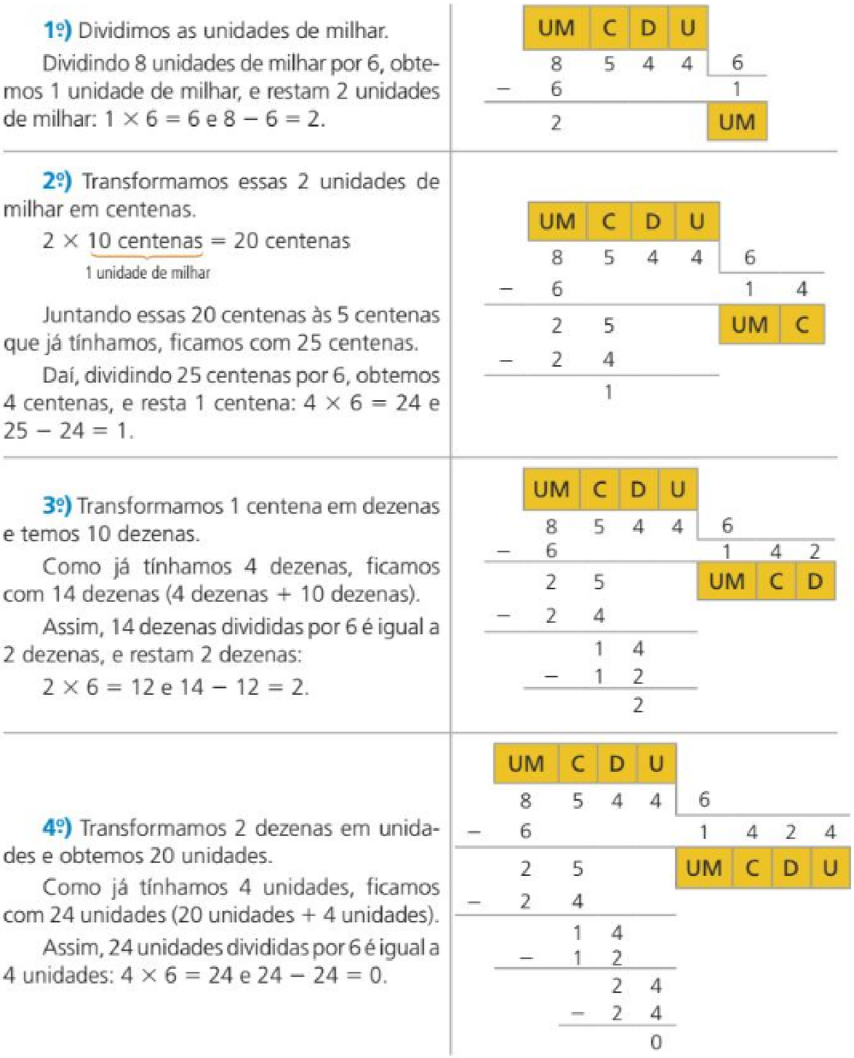
Para resolver essa situação, podemos colocar os lápis um a um nas caixas. Observe:

Ao terminar de guardar os lápis, observe que há 6 lápis em cada caixa.

Fonte: Júnior [17] (2018, p. 128)

A situação de dividir lápis entre caixas é adequada, simples e sua resolução pode ser simulada com materiais dentro da sala de aula. O uso de setas e o desenho do resultado final pode estimular a imaginação de todo o processo feito para encontrar o resultado da divisão. Parece haver uma inconsistência entre as escolhas de abordagem nos livros do 3° e 4° ano. O livro de 3° ano apresenta problemas introdutórios mais distantes do cotidiano do aluno, porém suas explicações preferem métodos alternativos como por exemplo desenhos. No livro de 4° ano, o autor escolhe se aproximar do aluno usando apenas problemas com temática escolar, mas privilegia explicações textuais extensas e oferece poucos métodos alternativos.

Figura 2.7: Explicando o algoritmo da divisão


1º) Dividimos as unidades de milhar.

Dividindo 8 unidades de milhar por 6, obtemos 1 unidade de milhar, e restam 2 unidades de milhar: 1 × 6 = 6 e 8 − 6 = 2.

2º) Transformamos essas 2 unidades de milhar em centenas.

$2 \times \underbrace{10 \text{ centenas}}_{\text{1 unidade de milhar}} = 20$ centenas

Juntando essas 20 centenas às 5 centenas que já tínhamos, ficamos com 25 centenas.

Daí, dividindo 25 centenas por 6, obtemos 4 centenas, e resta 1 centena: 4 × 6 = 24 e 25 − 24 = 1.

3º) Transformamos 1 centena em dezenas e temos 10 dezenas.

Como já tínhamos 4 dezenas, ficamos com 14 dezenas (4 dezenas + 10 dezenas).

Assim, 14 dezenas divididas por 6 é igual a 2 dezenas, e restam 2 dezenas:

2 × 6 = 12 e 14 − 12 = 2.

4º) Transformamos 2 dezenas em unidades e obtemos 20 unidades.

Como já tínhamos 4 unidades, ficamos com 24 unidades (20 unidades + 4 unidades).

Assim, 24 unidades divididas por 6 é igual a 4 unidades: 4 × 6 = 24 e 24 − 24 = 0.

Fonte: Júnior [17] (2018, p. 133)

O algoritmo é explicado no capítulo seguinte, no qual há duas seções separadas para divisores de um e dois algarismos. Durante os exemplos, o uso de desenhos ilustrativos é praticamente abandonado para dar lugar a explicações longas. Há também o primeiro esclarecimento sobre a transformação de unidades. Como este é um ponto importante no aprendizado do Algoritmo da Divisão, o autor enfatiza este processo e o explica da maneira mais minuciosa possível. Mostramos uma das explicações na Figura 2.7. No último capítulo da unidade, é abordada brevemente a relação entre multiplicação e divisão, curiosamente sem explicitar que elas são inversas.

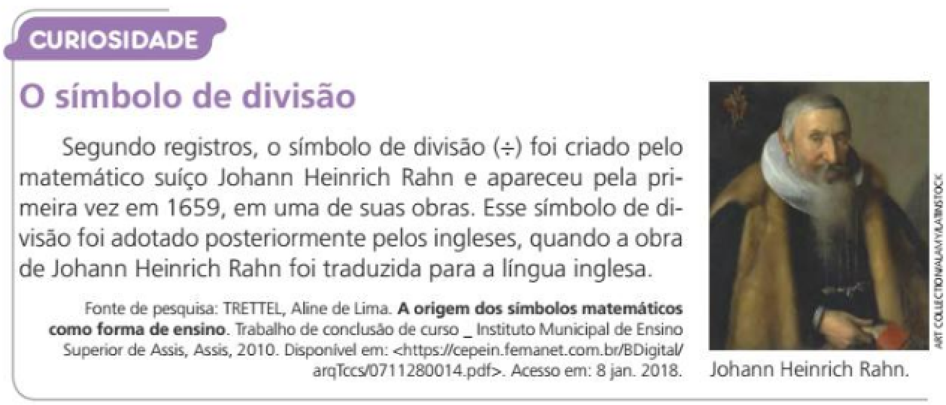
Notamos que, no livro de 4° ano desta coleção, os desenhos e figuras cedem espaço a explicações mais extensas e com maior nível de detalhamento. Alguns exemplos iniciais se repetem do livro do 3° ano e os restantes são em maioria relacionados ao ambiente escolar. Em geral, este livro, excetuando-se pelos dois primeiros capítulos, parece ter uma melhor estrutura e organização que o anterior. Em contrapartida, as figuras, em maioria, são meramente ilustrativas e não ajudam na resolução dos problemas. Isso provavelmente se deu devido à alta complexidade dos exemplos propostos.

No livro de 5° ano, a abordagem da divisão é feita nas Unidades 4 e 9, que tratam respectivamente de multiplicação e divisão de números naturais e operações entre números decimais.

O capítulo “Situações de Divisão”, na Unidade 4, é enxuto e relembra o assunto através de quatro situações problema. As propostas são simples e resolvidas utilizando o algoritmo. A cada problema, a explicação é feita enfatizando alguma característica da operação de divisão: a primeira destaca os nomes dos seus termos, a segunda se concentra em divisões exatas, a terceira na explicação do algoritmo, e a última na característica não exata da divisão. O capítulo faz assim um resumo dos conteúdos vistos nos livros de 3° e 4° ano.

Pela primeira vez, é falado diretamente o significado do símbolo $\div$, através de um *box* com uma curiosidade histórica, conforme a Figura 2.8.

Figura 2.8: Curiosidade sobre o símbolo da divisão


CURIOSIDADE

O símbolo de divisão

Segundo registros, o símbolo de divisão (÷) foi criado pelo matemático suíço Johann Heinrich Rahn e apareceu pela primeira vez em 1659, em uma de suas obras. Esse símbolo de divisão foi adotado posteriormente pelos ingleses, quando a obra de Johann Heinrich Rahn foi traduzida para a língua inglesa.

Fonte de pesquisa: TRETTEL, Aline de Lima. **A origem dos símbolos matemáticos como forma de ensino**. Trabalho de conclusão de curso _ Instituto Municipal de Ensino Superior de Assis, Assis, 2010. Disponível em: <https://cepein.femanet.com.br/BDigital/arqTccs/0711280014.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2018.

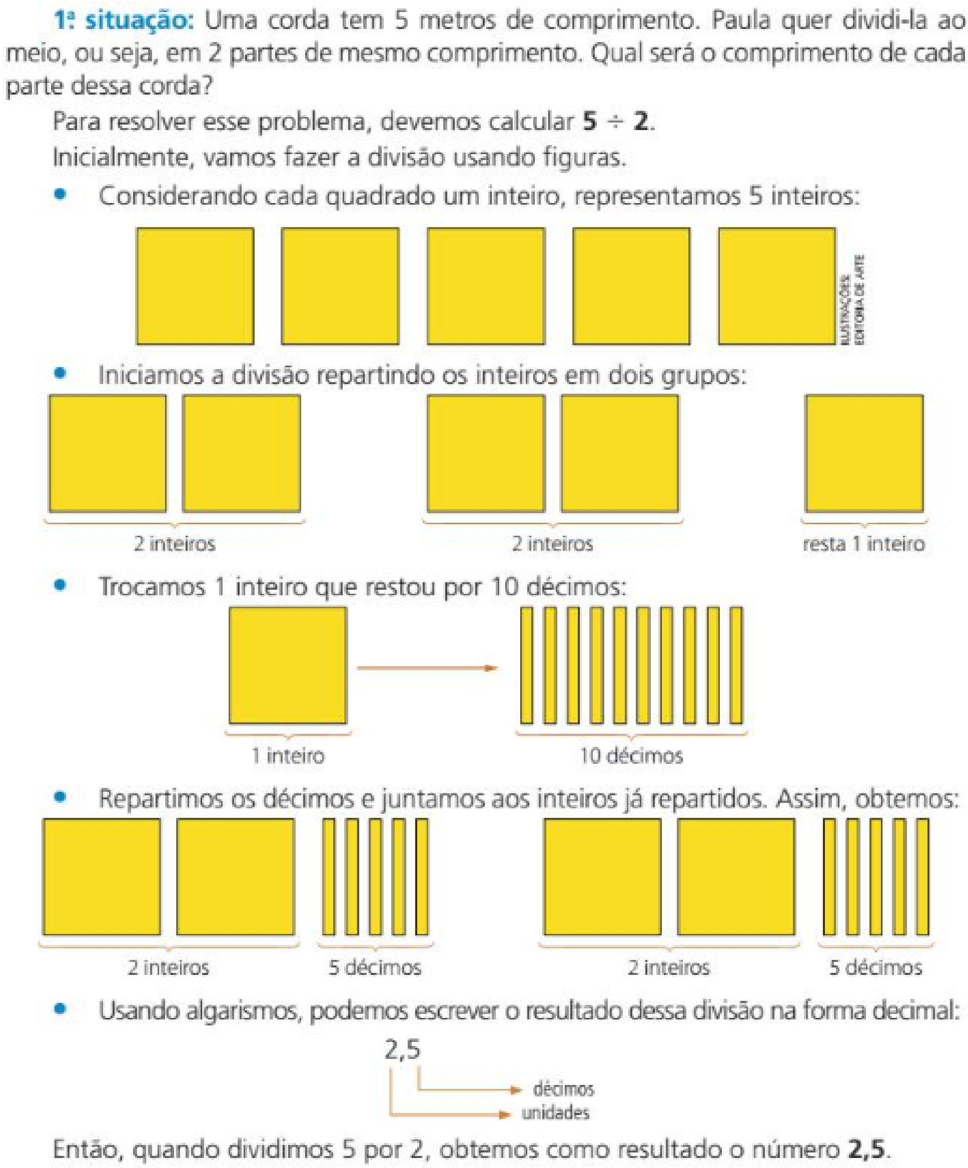
ART COLLECTION/ALAMY/LATINSTOCK

Johann Heinrich Rahn.

Fonte: Júnior [18] (2018, p. 96)

A Unidade 9 inicia a discussão com uma divisão entre dois números naturais que resulta em um número decimal, mostrada na Figura 2.9. A explicação é feita retomando o uso do material dourado, que foi um recurso bastante explorado no livro de 3° ano, mas que não figurou no de 4°. Posteriormente, a mesma divisão é feita através do algoritmo, com ênfase nas transformações de unidades numéricas e a colocação da vírgula é justificada.

Figura 2.9: Dividindo números decimais



1ª situação: Uma corda tem 5 metros de comprimento. Paula quer dividi-la ao meio, ou seja, em 2 partes de mesmo comprimento. Qual será o comprimento de cada parte dessa corda?

Para resolver esse problema, devemos calcular **5 ÷ 2**.

Inicialmente, vamos fazer a divisão usando figuras.

- Considerando cada quadrado um inteiro, representamos 5 inteiros:

- Iniciamos a divisão repartindo os inteiros em dois grupos:

- Trocamos 1 inteiro que restou por 10 décimos:

- Repartimos os décimos e juntamos aos inteiros já repartidos. Assim, obtemos:

- Usando algarismos, podemos escrever o resultado dessa divisão na forma decimal:

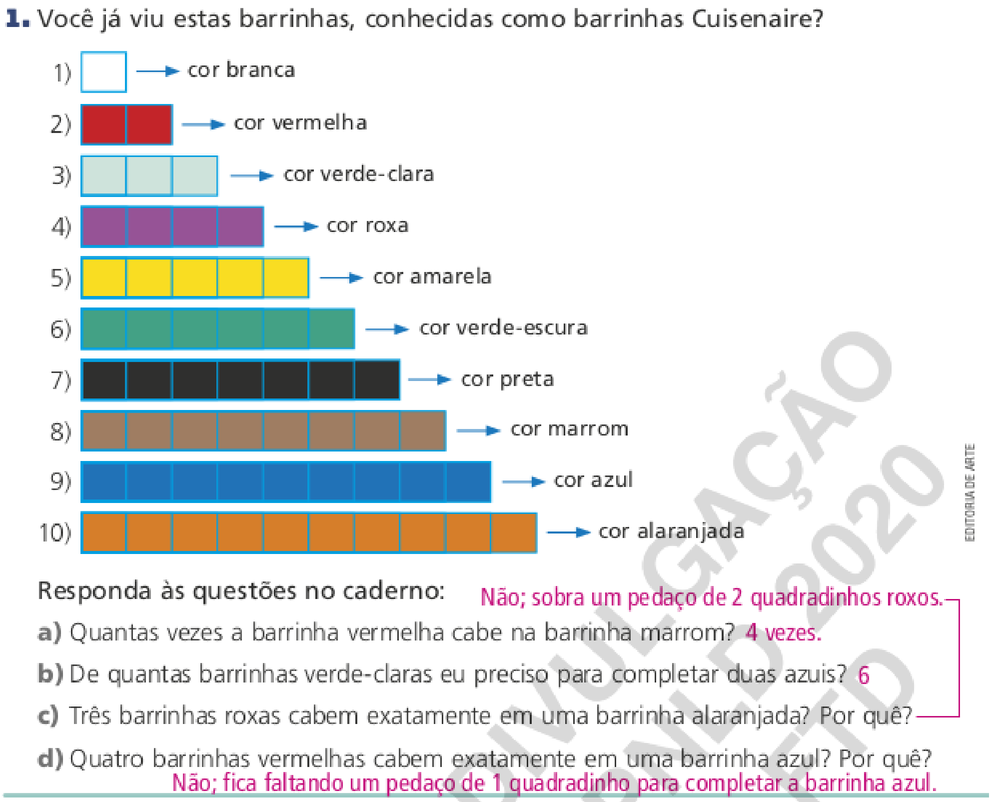
Então, quando dividimos 5 por 2, obtemos como resultado o número **2,5**.

Fonte: Júnior [18] (2018, p. 240)

Os três problemas seguintes apresentam explicações similares, porém não possuem a ilustração utilizando o material dourado. Entre os cinco exemplos apresentados, um apresenta a divisão de um número decimal por um natural. A divisão entre dois decimais não é introduzida. No capítulo seguinte, que aborda decimais e medidas, há um quadro que explica o posicionamento da vírgula em caso de divisões por potências de dez.

No livro de 6° ano, a Unidade 4, destinada à divisão, resume o que já foi abordado nos livros anteriores, resolvendo os problemas introdutórios com o algoritmo diretamente. Há uma atividade, mostrada na Figura 2.10, que apresenta uma maneira alternativa de perceber uma das ideias associadas a divisão, utilizando o material de Cuisenaire. Este material consiste em de barras de cores e tamanhos diferentes, que variam de 1 a 10 unidades. Ele é utilizado para o ensino das operações básicas.

Figura 2.10: O material de Cuisenaire



Fonte: Júnior [20] (2018, p. 55)

A obra não acrescenta nenhum conteúdo novo em relação aos livros anteriores. A única notável diferença é a presença de um quadro, intitulado “Propriedades da divisão”, que aborda os casos do zero no divisor, que invalida a operação, no dividendo, que fornece como resultado zero e divisões de números iguais, que determinam quociente igual a um.

Na Unidade 6, que trata dos números decimais, há um capítulo sobre a divisão dos mesmos. São mostrados três tipos de divisão: entre naturais que resulta em decimal, entre um natural e um decimal, e entre decimais. Para a primeira, no livro do professor, é sugerido o uso do material dourado, entretanto o desenho não é apresentado para os alunos em meio à explicação, como no livro de 5° ano. Apesar das explicações das divisões apresentadas neste capítulo serem detalhadas, para compreendê-las é possível que o aluno já precise ter algum domínio do algoritmo.

Notamos ainda que, quando o exemplo apresenta o zero no quociente ou divisor, o texto não justifica a parte do processo envolvendo este número. Na Figura 2.11 há um exemplo de uma divisão apresentada que deixa implícito o raciocínio para este caso.

Figura 2.11: O zero no quociente

1 Para montar um mecanismo, Jorge precisa de 7 metros de fio de cobre cortados em pedaços de 0,14 metro. Quantos pedaços Jorge vai obter, usando a quantidade total desse fio?
Para resolver essa situação, precisamos do resultado da divisão de 7 por 0,14. Uma maneira que podemos fazer é lembrando que 7 metros são 700 centímetros e que 0,14 metro são 14 centímetros.
Então, em vez de dividirmos 7 por 0,14, podemos dividir 700 por 14; assim, temos que:

$$7 \text{ m} : 0{,}14 \text{ m} = 700 \text{ cm} : 14 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{ccc|cc}
\text{C} & \text{D} & \text{U} & & \\
7 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \cline{4-5}
 & 0 & 0 & 5 & 0 \\
 & & 0 & \text{D} & \text{U}
\end{array}$$

Jorge vai obter 50 pedaços de fio.

Fonte: Júnior [20] (2018, p. 187)

Já no livro de 7° ano, o conteúdo da divisão entre naturais vem apenas como um lembrete no primeiro capítulo da primeira unidade, assumindo-se que ele já foi consolidado nos anos anteriores. No Capítulo 9 da unidade seguinte, há uma menção à divisão, porém o foco é a divisão entre números inteiros e a regra de sinais, deixando de lado o algoritmo. Por fim, o último capítulo da coleção destinado ao tópico está na Unidade 4. O exemplo numérico (sem a contextualização) e explicações apresentados são os mesmos do livro de 6° ano, mostrados na Figura 2.11, com a pontual diferença do número sete ser negativo, o que torna o resultado igual a -50.

Em geral, a coleção apresenta explicações coerentes e detalhadas em relação ao Algoritmo da Divisão, entretanto todas elas se encontram nos livros dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, não há uma diferença de estrutura, linguagem e organização entre os livros de anos iniciais e finais. Esperava-se que os livros de anos iniciais tivessem uma linguagem mais direta e utilizassem mais desenhos para elucidar os exemplos.

As contextualizações para os exemplos introdutórios apresentadas na coleção são, em maioria, coerentes, porém há uma tendência a repetir exemplos em livros destinados a anos diferentes de ensino. Nota-se ainda que o uso de desenhos e sugestões de métodos alternativos se concentra no livro de 3° ano.

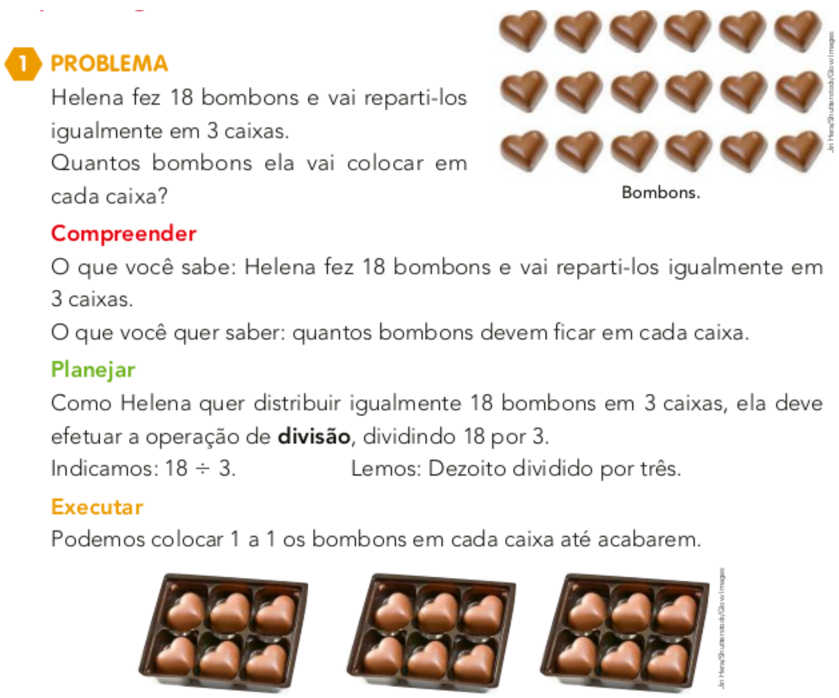
Sendo a colocação do zero no quociente uma grande fonte de dúvidas entre alunos, notamos que em nenhum dos livros há um exemplo resolvido desta situação, porém isso é cobrado em alguns exercícios. Os textos que explicam a colocação da vírgula no quociente, tópico que também causa equívocos entre os alunos, são coerentes e esclarecedores, mas também tendem a se concentrar nos livros de 3°, 4° e 5° ano. Considerando que a recomendação do ensino do algoritmo é feita para o 6° ano, esperava-se ver estas explicações nos livros desta etapa de ensino.

2.2 Coleção 2: Ápis e Teláris

Examinaremos em conjunto as coleções Ápis e Teláris, destinadas aos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental respectivamente, pois ambas foram escritas pelo mesmo autor, Luiz Roberto Dante.

No livro de 3° ano, da coleção Ápis, encontramos no Capítulo 1 da Unidade 6 a apresentação das ideias relacionadas à divisão. Notamos que a organização das características relacionadas aos problemas introdutórios e a qualidade das ilustrações facilitam sua compreensão. Um exemplo pode ser visto na Figura 2.12.

Figura 2.12: Ideias da divisão



1 PROBLEMA

Helena fez 18 bombons e vai reparti-los igualmente em 3 caixas.
Quantos bombons ela vai colocar em cada caixa?

Bombons.

Compreender

O que você sabe: Helena fez 18 bombons e vai reparti-los igualmente em 3 caixas.
O que você quer saber: quantos bombons devem ficar em cada caixa.

Planejar

Como Helena quer distribuir igualmente 18 bombons em 3 caixas, ela deve efetuar a operação de **divisão**, dividindo 18 por 3.
Indicamos: 18 ÷ 3. Lemos: Dezoito dividido por três.

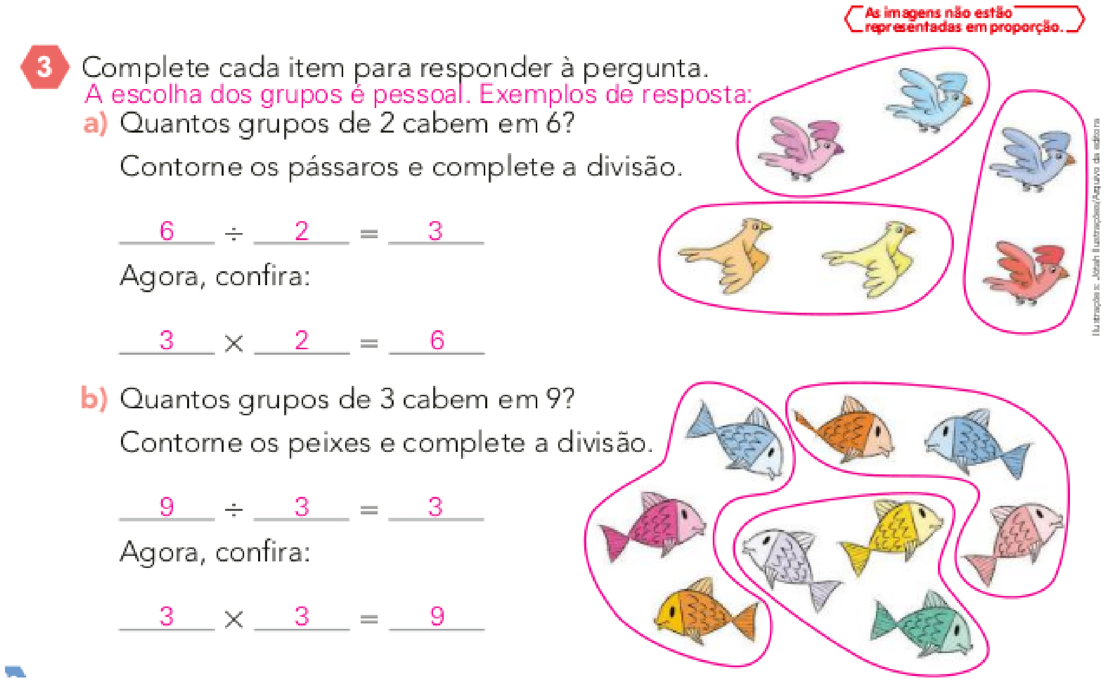
Executar

Podemos colocar 1 a 1 os bombons em cada caixa até acabarem.

Fonte: Dante [19] (2018, p. 149)

Os exercícios, como os mostrados na Figura 2.13, possuem ilustrações para auxiliar o aluno a resolvê-los. Ainda, há uma preocupação em estabelecer já neste momento que a divisão é o inverso da multiplicação, com o uso de perguntas que induzem este raciocínio ao aluno.

Figura 2.13: Exercícios de divisão



Fonte: Dante [19] (2018, p. 152)

No capítulo seguinte, intitulado "Estratégias para efetuar uma divisão", o autor sugere duas maneiras de resolver os problemas apresentados: o uso de desenhos e da reta numérica. As estratégias estão explicadas de maneira acessível ao aluno, sem uso de textos longos. Através de um pequeno quadro, é informado que o resultado da divisão é chamado "quociente", mas não há preocupação em enfatizar a informação.

Os capítulos finais da unidade são destinados a formalizar a multiplicação e divisão como operações inversas e abordar as ideias de metade e terça parte, respectivamente.

A disposição dos capítulos iniciais do livro de 4° ano é semelhante ao de 3°. São abordadas as ideias e estratégias da divisão, sendo que, a estratégia do uso de desenhos é substituída pela sugestão do uso da operação inversa. Naturalmente, a quantidade de ilustrações começa a diminuir neste exemplar.

Em seguida, é abordada a diferença entre divisão exata e não exata. Ainda, é apresentada uma versão preliminar do algoritmo. Os exercícios são resolvidos por métodos alternativos, porém a estrutura do Algoritmo da divisão e a nomenclatura de seus termos já é usada, como podemos ver na Figura 2.14.

Figura 2.14: Introduzindo o algoritmo

- Alberto resolveu embalar 18 limões da quitanda dele em saquinhos com meia dúzia (6) de limões em cada um deles. Quantos saquinhos ele vai usar?

Meia dúzia de limões.

a) Represente concretamente os limões que Alberto vai embalar e efetue a divisão 18 ÷ 6.

b) Agora, use a operação inversa e complete.

18 ÷ 6 = __3__, pois __3__ × __6__ = __18__. ou 6 × 3 = 18

c) Veja como representamos essa divisão em um **diagrama de chaves** (algoritmo usual da divisão) e o nome dos termos. Depois, complete a resposta.

dividendo → 18 | 6 ← divisor
− 18 | 3 ← quociente
resto → 00

Penso: Qual é o número que multiplicado por 6 dá 18?
É o 3, pois 3 × 6 = 18.
Faço: 18 − 18 = 0.

Alberto vai usar __3__ saquinhos e não sobrarão limões (resto 0).

> Quando o **resto** de uma divisão é **0 (zero)**, dizemos que a **divisão é exata**.

Fonte: Dante [7] (2018, p. 154)

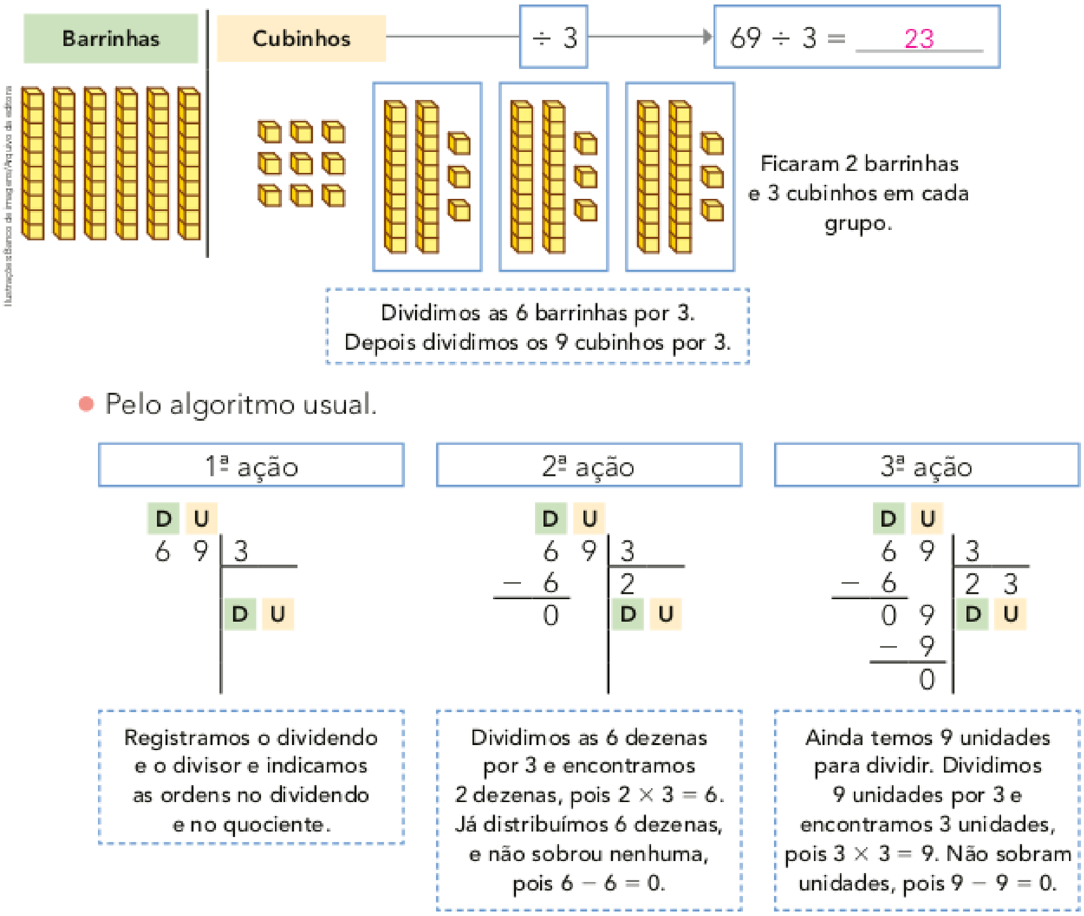
O livro permite que o aluno experimente, através de alguns exercícios, com a estrutura do Algoritmo da Divisão, sem aprendê-lo. Neste instante, o foco se torna os métodos alternativos de solução já apresentados, como o de estimativas, operação inversa e, posteriormente, é apresentado também o método das subtrações sucessivas.

Por fim, é abordado o algoritmo usual da divisão. Inicialmente, a situação problema proposta é resolvida utilizando o material dourado, sendo esta a primeira vez que o recurso é mencionado na coleção. A explicação apresentada é esclarecedora e bem ilustrada, como podemos ver na Figura 2.15. Apesar de haver apenas um exemplo introdutório, observamos que os exercícios seguintes são intercalados entre problemas contendo explicações sobre o algoritmo e divisões diretas. Encontramos ainda uma pequena seção de exercícios que aborda o tema arredondamento, introduzindo a noção de que podemos encontrar o resultado aproximado de uma divisão se alterarmos um pouco o valor do dividendo.

Notamos que não há nenhum exemplo em que o zero figura no quociente de maneira intercalada, entretanto a compreensão do funcionamento deste caso é cobrada nos exercícios.

É interessante mencionar que a coleção Ápis normalmente apresenta ao final de cada capítulo seções contendo sugestões de jogos e um resumo do conteúdo aprendido. Os resumos ao final de cada capítulo, contidos em apenas uma página, permitem que o aluno verifique se compreendeu os pontos mais importantes de todo o conteúdo passado. Na unidade de divisão, há ainda o jogo "Busca das divisões exatas", que pede que o aluno gire duas roletas e divida o número sorteado na primeira pelo da segunda e colora em um quadro o quociente. Apesar de simples, o jogo nos dá uma maneira mais lúdica para a fixação do conteúdo.

Figura 2.15: Introduzindo o algoritmo.



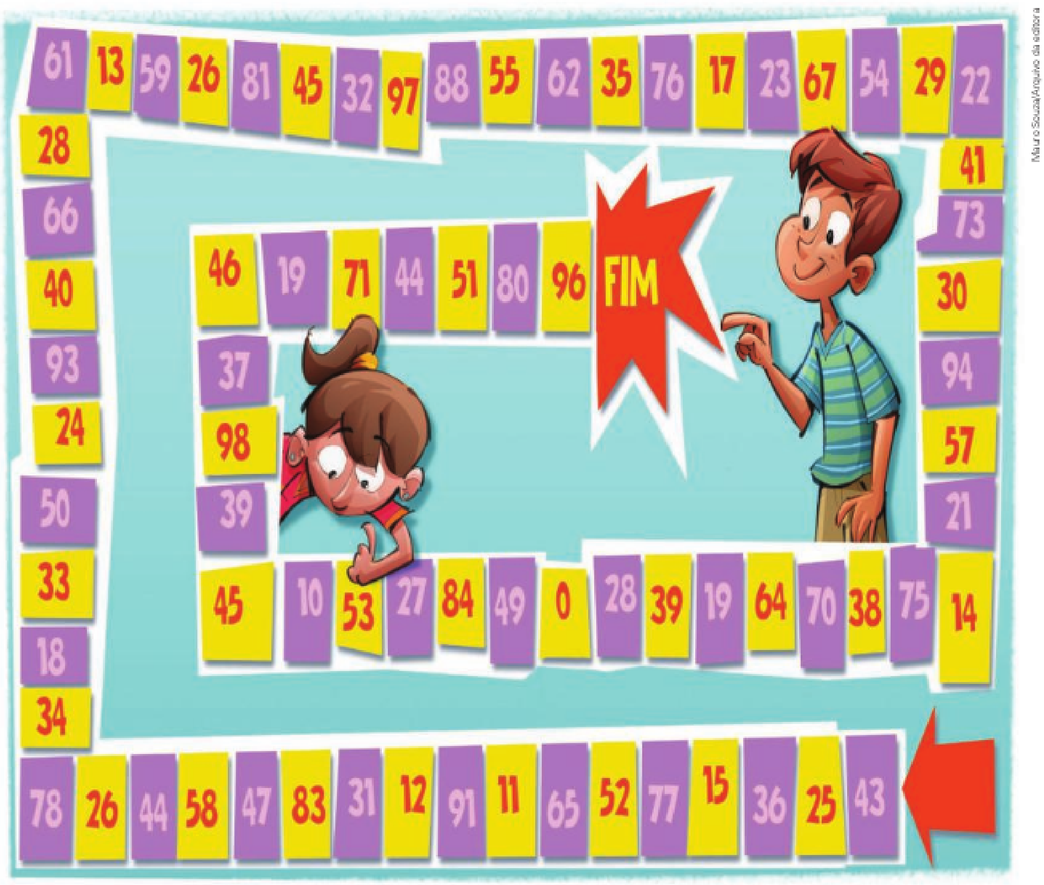
Fonte: Dante [7] (2018, p. 159)

No livro de 5° ano da mesma coleção, a divisão é abordada nas Unidades 4 e 7, que tratam de multiplicação e divisão nos naturais e operações com decimais, respectivamente.

O capítulo que aborda a divisão realiza uma pequena revisão do conteúdo que foi apresentado no livro do 4° ano. Desta vez, além do algoritmo usual, é apresentada uma breve explicação usando o Algoritmo das Estimativas.

Ainda dentro da abordagem da divisão entre naturais, o livro apresenta uma sugestão de atividade lúdica para a fixação do conteúdo. O jogo intitulado *Trilha dos Restos*, que pode ser visto na Figura 2.16, consiste em um tabuleiro com vários números formando um caminho. O jogador posiciona seu pino no primeiro número da trilha e joga um dado. Ao dividir o número em que seu pino está pelo obtido no dado e encontrar o resto da divisão, ele obtém a quantidade de casas que deve andar no tabuleiro. O processo é repetido até que um dos jogadores chegue ao final da trilha.

Figura 2.16: O jogo trilha dos restos



Fonte: Dante [9] (2018, p. 111)

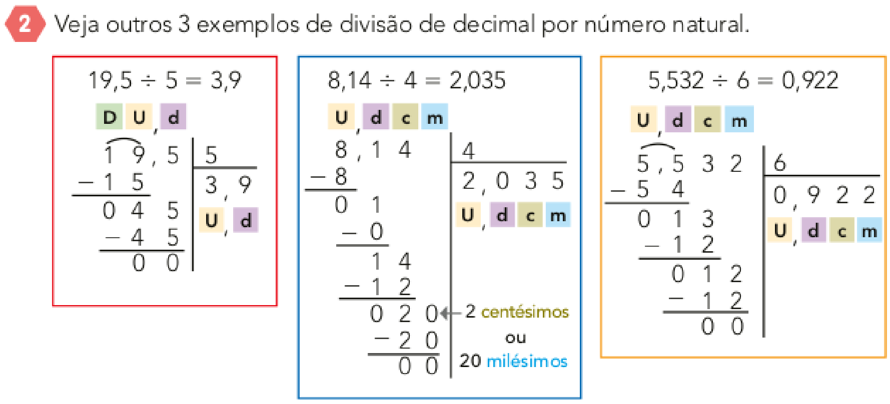
Na Unidade 7, as explicações sobre a divisão para os números decimais são mais concisas, se comparadas às apresentadas no livro do ano anterior. Pela primeira vez, encontramos um exemplo resolvido onde o zero aparece intercalado no quociente, visto na Figura 2.17, porém não há uma explicação detalhada.

Em geral, o intuito desta obra parece ser realizar um apanhado dos conteúdos abordados anteriormente e aprofundar o Algoritmo da Divisão para números decimais.

Os livros que analisaremos a seguir, para o 6° e 7° anos, pertencem à coleção Teláris. Não consideraremos esta coleção como uma "continuação" da anterior, mas observaremos o desenvolvimento do raciocínio do autor ao organizar o conteúdo em ambas as coleções.

No livro de 6° ano, o capítulo que aborda as quatro operações apresenta uma seção destinada apenas à divisão. São introduzidas, de forma resumida, as ideias associadas à

Figura 2.17: Zero intercalado no quociente



Fonte: Dante [8] (2018, p. 187)

divisão, e em meio aos problemas motivadores, o algoritmo. A explicação apresentada, apesar de bem feita, é técnica, sem uso de desenhos ou sugestões de material concreto, diferente de como é feito na coleção Ápis.

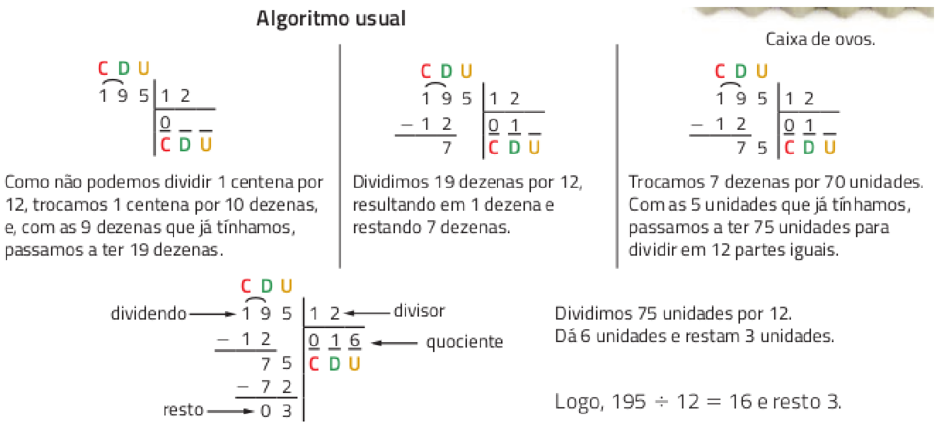
Quando se trata da divisão entre decimais, cuja introdução ocorre em outro capítulo, o autor decide por seccionar o conteúdo em três casos: "divisão entre naturais que resulta em decimal", "divisão de decimal por natural" e "divisão de natural por decimal e entre decimais". Isso nos leva a crer que, para os anos iniciais, o autor realizou apenas uma introdução à divisão para os números decimais e, agora nos anos finais do Ensino Fundamental, ele pretende aprofundar o conteúdo.

As explicações seguem o mesmo modelo da apresentada na Figura 2.18, utilizando o quadro posicional e justificando as transformações de unidades e colocação da vírgula. É apresentado ainda como método alternativo, a transformação dos números decimais em fração para realizar a divisão.

Já no livro de 7° ano, há apenas duas páginas destinadas à operação de divisão. Nelas, são encontradas apenas exemplos cujo foco é a operação entre números inteiros, com ênfase na regra de sinais e sem explicações sobre o algoritmo.

Notamos que o autor parece dedicar uma atenção especial à operação de divisão nos livros da coleção Ápis, destinados aos anos iniciais. Neles, há diversidade de exemplos, métodos alternativos, jogos e as explicações sugerem o uso de materiais lúdicos. Já para os anos finais, na coleção Teláris, há uma sensação de que o objetivo é apenas revisar o que já foi aprendido. Apesar do conteúdo ser muito bem apresentado no livro do 6° ano, seria interessante que este livro apresentasse as mesmas características dos livros destinados aos ano iniciais.

Figura 2.18: O algoritmo da divisão



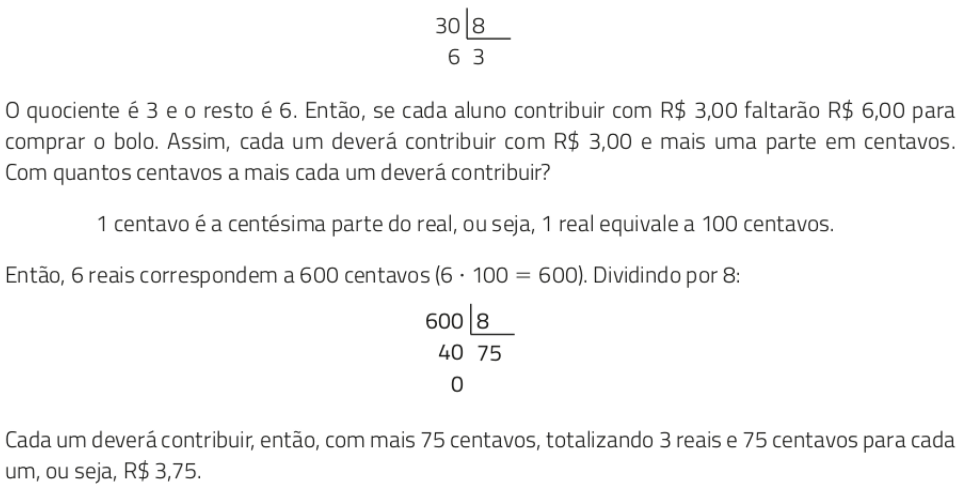
Fonte: Dante [9] (2018, p. 47)

2.3 Coleção 3: Matemática e Realidade

A coleção Matemática e Realidade, escrita por Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado é destinada apenas aos anos finais do Ensino Fundamental. A divisão é abordada nos livros de 6° e 7° anos.

No livro de 6° ano, a divisão é abordada no Capítulo 4. Há duas contextualizações iniciais, que são resolvidas por métodos alternativos como o uso de desenhos ou utilizando a operação inversa. As ideias associadas à divisão, repartir e medir, são relembradas implicitamente nos dois exemplos. Posteriormente, da mesma maneira, é abordada a divisão com resto, desta vez enfatizando os nomes dos termos da operação dentro de um exemplo que é resolvido com o algoritmo.

Figura 2.19: Introdução a divisão entre decimais


30 | 8
6 3

O quociente é 3 e o resto é 6. Então, se cada aluno contribuir com R$ 3,00 faltarão R$ 6,00 para comprar o bolo. Assim, cada um deverá contribuir com R$ 3,00 e mais uma parte em centavos. Com quantos centavos a mais cada um deverá contribuir?

1 centavo é a centésima parte do real, ou seja, 1 real equivale a 100 centavos.

Então, 6 reais correspondem a 600 centavos (6 · 100 = 600). Dividindo por 8:

600 | 8
40 75
0

Cada um deverá contribuir, então, com mais 75 centavos, totalizando 3 reais e 75 centavos para cada um, ou seja, R$ 3,75.

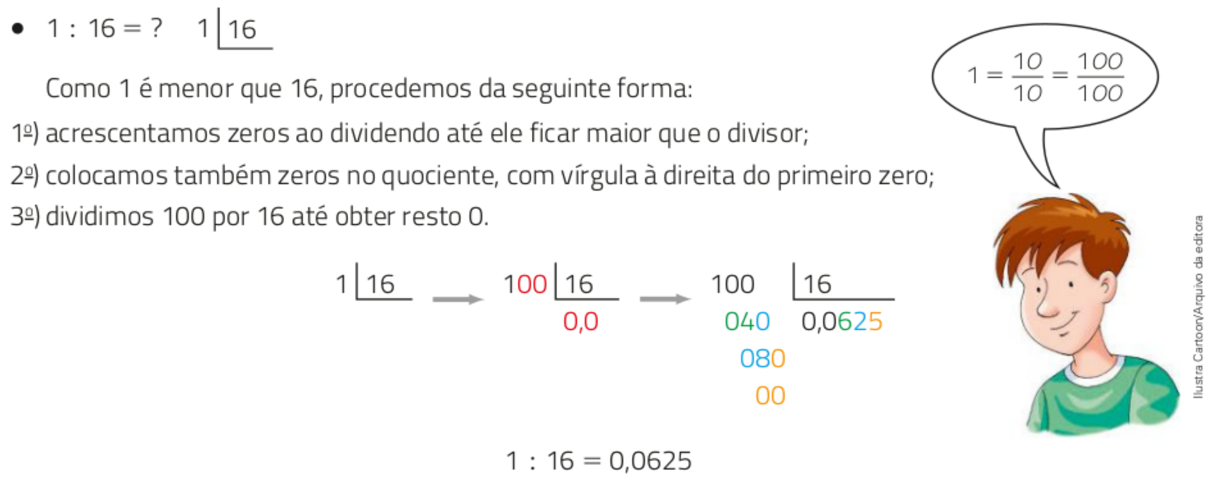
Fonte: Iezzi, Dolce e Machado [15] (2018, p. 261)

Não parece haver uma preocupação em explicar o algoritmo, o que nos leva a crer que, possivelmente, os autores assumem que o aluno já tem domínio do conteúdo. Há algumas seções dentro do capítulo de divisão que abordam situações específicas, como a divisão entre medidas mistas e problemas sobre partições (divisões em partes desiguais).

Ao iniciar o ensino das operações entre decimais, os autores optam por seccionar a operação $30 \div 8$ em duas partes, como podemos ver na Figura 2.19. A situação proposta em conjunto envolve dinheiro, o que facilita a compreensão na hora da transformação de unidades. Apesar do primeiro exemplo fornecer um bom esclarecimento sobre a operação, os seguintes não mantêm o mesmo modelo. Nestes casos, o processo é descrito em uma lista de passos cujas justificativas, por vezes, estão implícitas.

No exercício proposto na Figura 2.20, a colocação dos zeros no quociente não é justificada como uma transformação de unidades, não é explicitado que a vírgula é utilizada para separar a parte inteira da decimal e o processo da divisão é resumido no passo três.

Figura 2.20: Introdução a divisão entre decimais



Fonte: Iezzi, Dolce e Machado [15] (2018, p. 263)

Em alguns dos exemplos anteriores, estes passos são justificados, mas não há um exercício que apresente uma explicação completa sobre cada detalhe do procedimento, exceto pelo da Figura 2.19.

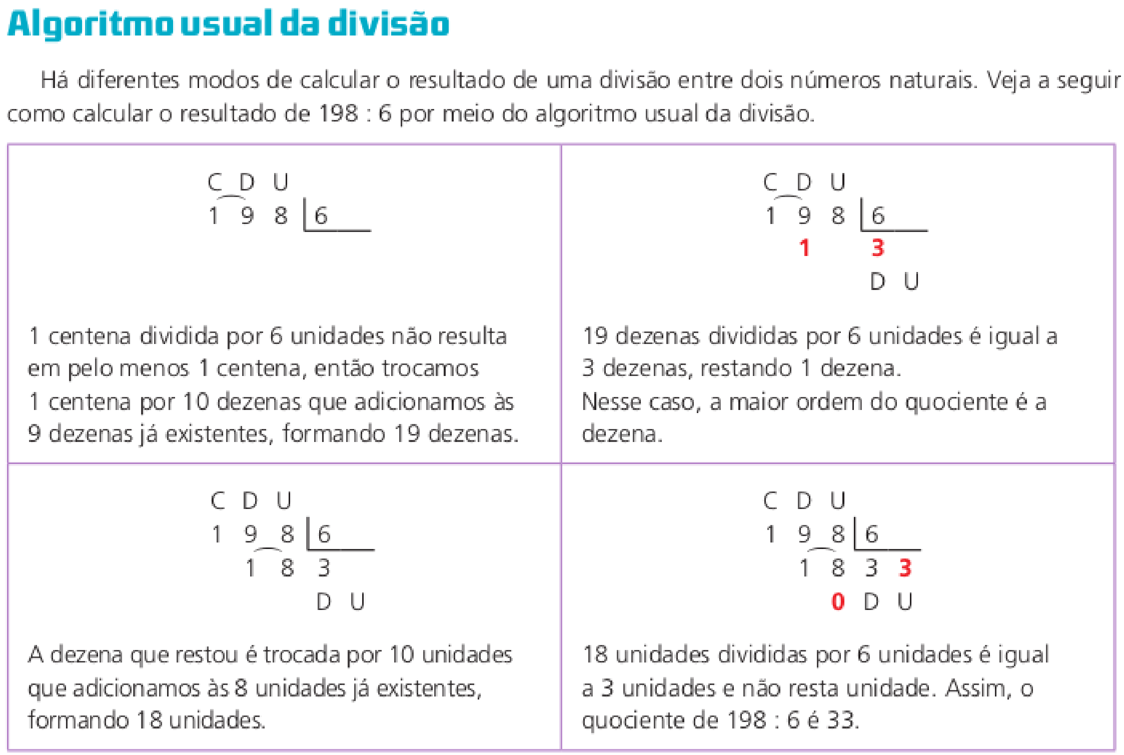
No livro de 7° ano, como esperado, são poucas as menções ao algoritmo da divisão. A operação é relembrada brevemente em dois capítulos, porém com foco na regra de sinais, já que o conteúdo trabalhado é o conjunto dos números inteiros.

Consideramos que a coleção "confia" que o conhecimento sobre o Algoritmo da Divisão foi consolidado nos anos iniciais do fundamental. Entretanto é importante lembrar que a BNCC recomenda o ensino deste tópico no sexto ano e, o livro analisado, não fornece material satisfatório para o mesmo.

2.4 Coleção 4: Trilhas da Matemática

A Coleção Trilhas da Matemática, cujo público alvo são os anos finais do Ensino Fundamental, foi escrita por Fausto Arnaud Sampaio. Nela, a primeira menção à divisão ocorre no Capítulo 4 do livro destinado ao 6° ano. A contextualização inicial é resolvida, primeiramente, utilizando desenhos. Junto, é feita uma explicação sobre as ideias associadas à divisão. O conteúdo é apresentado de forma resumida, destacando a relação fundamental da divisão, nomes dos seus termos, os tipos de divisão – exata e não exata – e por fim o algoritmo. A seção que apresenta o algoritmo usual da divisão, possui uma explicação atenta de seus processos, como podemos ver na Figura 2.21.

Figura 2.21: Introdução a divisão entre decimais



Algoritmo usual da divisão

Há diferentes modos de calcular o resultado de uma divisão entre dois números naturais. Veja a seguir como calcular o resultado de 198 : 6 por meio do algoritmo usual da divisão.

C D U 1 9 8 | 6 1 centena dividida por 6 unidades não resulta em pelo menos 1 centena, então trocamos 1 centena por 10 dezenas que adicionamos às 9 dezenas já existentes, formando 19 dezenas.	C D U 1 9 8 | 6 1 3 D U 19 dezenas divididas por 6 unidades é igual a 3 dezenas, restando 1 dezena. Nesse caso, a maior ordem do quociente é a dezena.
C D U 1 9 8 | 6 1 8 3 D U A dezena que restou é trocada por 10 unidades que adicionamos às 8 unidades já existentes, formando 18 unidades.	C D U 1 9 8 | 6 1 8 3 3 0 D U 18 unidades divididas por 6 unidades é igual a 3 unidades e não resta unidade. Assim, o quociente de 198 : 6 é 33.

Fonte: Sampaio [32] (2018, p. 57)

Em seguida, o autor ainda exibe mais dois exemplos e os resolve pelo algoritmo das estimativas e utilizando a multiplicação como operação inversa.

A divisão entre decimais é mostrada no Capítulo 15. A introdução é feita por meio de um problema motivador que utiliza dinheiro, porém não é explorada a ideia de trocas entre notas e moedas para uma melhor ilustração do conteúdo. A explicação segue o mesmo modelo da Figura 2.21, as transformações e colocação da vírgula são justificadas. O autor opta por separar os casos de divisão para os decimais em seções que exemplificam a divisão de dois naturais que resulta em decimais, divisão de um natural por um decimal e divisões entre decimais. Uma das explicações apresentadas pode ser vista na Figura 2.22.

Figura 2.22: Divisão de naturais que resulta em decimal

<table>
<tr>
<td>Dividindo as 21 unidades por 12, obtemos 1 unidade e sobram 9 unidades.
$$\begin{array}{r|l} 21 & 12 \\ \cline{2-2} 9 & 1 \end{array}$$</td>
<td>Trocamos as 9 unidades por 90 décimos. No quociente, escrevemos uma vírgula para separar a parte inteira da parte decimal.
$$\begin{array}{r|l} 21 & 12 \\ \cline{2-2} 90 & 1, \end{array}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Dividindo os 90 décimos por 12, obtemos 7 décimos e sobram 6 décimos.
$$\begin{array}{r|l} 21 & 12 \\ \cline{2-2} 90 & 1,7 \\ 6 & \end{array}$$</td>
<td>Trocamos os 6 décimos por 60 centésimos. E dividindo os 60 centésimos por 12, obtemos 5 centésimos e sobra 0 (zero) centésimo.
$$\begin{array}{r|l} 21 & 12 \\ \cline{2-2} 90 & 1,75 \\ 60 & \\ 0 & \end{array}$$</td>
</tr>
</table>

Fonte: Sampaio [32] (2018, p. 221)

O livro pertencente ao 7° ano relembra brevemente a divisão para os números inteiros, sem menções ao algoritmo, sendo esta a última vez que a coleção aborda o tema.

Consideramos que a coleção apresenta a divisão de maneira completa, explicando o algoritmo em ambos os conjuntos, decimais e racionais. Os exemplos são adequados e, por vezes, são apresentados métodos alternativos, o que ajuda a compreensão dos processos implícitos na operação.

2.5 Coleção 5: Matemática Essencial

Patricia Moreno Pataro e Rodrigo Balestri são os autores da coleção Matemática Essencial, concebida para os anos finais do Ensino Fundamental.

A introdução da divisão é feita no livro de 6° ano. Na Figura 2.23, há a contextualização apresentada pelo livro. Ela envolve a quantidade de ingressos vendidos para uma peça de teatro e sua arrecadação. O problema apresenta um alto nível de complexidade para um exercício introdutório, o que pode acabar gerando a necessidade de explicações adicionais. O uso de verbos como "arrecadar" pode fazer com que o foco da aula se torne compreender o problema e não resolvê-lo. Observamos ainda que não há uma explicação formalizada do algoritmo, os passos de sua resolução estão implícitos através das setas de sinalização no dividendo.

Figura 2.23: O problema do teatro

Divisão

Inaugurado em 1896, o Teatro Amazonas é considerado um dos mais luxuosos da América Latina e tem capacidade para 701 pessoas na plateia. Além de palco de inúmeras apresentações como óperas, peças de teatro, festivais, grupos de dança, bandas de música, corais e orquestras, o espaço também é uma referência cultural e histórica da cidade, sendo aberto à visitação do público.

Interior do Teatro Amazonas, em Manaus, no Amazonas, em 2014.

Supondo que uma peça exibida nesse teatro tenha arrecadado R$ 20 824,00 com a venda dos ingressos e que o preço de cada ingresso tenha sido de R$ 38,00, quantos ingressos foram vendidos?

Para responder a essa questão, dividimos a quantia arrecadada pelo preço de cada ingresso, isto é, calculamos 20 824 : 38.

$$
\begin{array}{rrrrrl|ll}
\text{dividendo} \rightarrow & \cancel{2}^{1} & ^{1}0 & 8 & 2 & 4 & \underline{3\;8} & \leftarrow \text{divisor} \\
 & - 1 & 9 & 0 & & & 5\;4\;8 & \leftarrow \text{quociente} \\
\cline{2-4}
 & 0 & 1 & 8 & 2 & & & \\
 & & -1 & 5 & 2 & & & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & 3 & 0 & 4 & & \\
 & & & -3 & 0 & 4 & & \\
\cline{4-6}
 & & & 0 & 0 & 0 & \leftarrow \text{resto} &
\end{array}
$$

Quando o resto é igual a zero, dizemos que a divisão é **exata**.

Assim, foram vendidos 548 ingressos.

Fonte: Pataro e Balestri [26] (2018, p. 65)

É importante destacar que o uso de problemas motivadores para a introdução de um conteúdo tem o objetivo de gerar discussões e investigações para a sua resolução. Ao fazer uso de contextualizações muito complexas ou sobre tópicos desconhecidos pelos discentes, perde-se uma oportunidade de debate sobre o tema. Devemos também nos atentar à linguagem utilizada na descrição dos exercícios, considerando o público que fará uso do material didático. Há uma preocupação no capítulo em abordar a relação fundamental da divisão e estabelecer a diferença entre divisão exata e não exata, com seções destinadas exclusivamente a estes tópicos.

Quando a abordagem da divisão entre decimais ocorre no Capítulo 10, há uma separação em dois casos: divisão de um número decimal por um número natural e divisão de um número natural por outro natural com quociente decimal, conforme podemos ver na Figura 2.24. Neste caso, na resolução do algoritmo, são explicadas as transformações de unidades e colocação da vírgula. Há uma boa variedade de exemplos entre os dois casos mencionados, porém é curioso não haver um tópico destinado à divisão entre decimais nesta seção.

Com o conteúdo apresentado no livro, o aluno poderia deduzir que a divisão entre dois números decimais pode ser feita transformando ambos os números em frações e realizando o procedimento entre frações, o que resulta em uma divisão entre naturais,

Figura 2.24: Divisão com quociente decimal

1º Dividimos 92 unidades por 8.

$$\begin{array}{rl} 92 & \underline{|8\ \ } \\ 12 & 11 \\ 4 & \end{array}$$

2º Transformamos 4 unidades em 40 décimos e colocamos uma vírgula no quociente para separar a parte inteira da parte decimal.

$$\begin{array}{rl} 92 & \underline{|8\ \ } \\ 12 & 11, \\ 40 & \end{array}$$

3º Dividimos 40 décimos por 8.

$$\begin{array}{rl} 92 & \underline{|8\ \ } \\ 12 & 11{,}5 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Assim, Regina pagou R$ 11,50 em cada ingresso.

Fonte: Pataro e Balestri [26] (2018, p. 203)

porém talvez esta não seja ainda uma ideia que surge naturalmente. Encontramos um exercício que necessita da compreensão deste tópico para ser solucionado, entretanto a orientação é de que a resolução seja feita por arredondamento.

Diferentemente dos livros de 7° ano analisados até agora, que apresentavam apenas uma revisão do conteúdo de divisão sem muitas explicações, o livro da coleção Matemática Essencial repete o ensino de divisão para o caso dos decimais. Desta vez, são apresentados e explicados os três casos usuais, e pela primeira vez a divisão entre decimais é abordada diretamente. Podemos ver como a divisão entre decimais foi contemplada na Figura 2.25.

Ao final do livro, a divisão é tratada novamente, porém com foco nos números inteiros, sem menções ao algoritmo. Consideramos que a coleção, apesar de mostrar boas explicações, tem uma maneira não usual de dividir o conteúdo entre suas obras. No livro destinado ao 6°, seria necessário haver mais explicações relacionadas a divisão entre naturais.

Figura 2.25: Divisão entre decimais

Para responder a essa questão, precisamos calcular 16,2 : 1,35, que pode ser efetuado da seguinte maneira:

- Multiplicamos o dividendo e o divisor pelo mesmo número, nesse caso, por 100, para eliminar a vírgula.

$$16{,}2 : 1{,}35 \rightarrow \underbrace{1620}_{16{,}2 \cdot 100} : \underbrace{135}_{1{,}35 \cdot 100}$$

- Agora, efetuamos o cálculo 1620 : 135.

$$\begin{array}{rl} 1620 & \underline{|135} \\ 270 & 12 \\ 0 & \end{array}$$

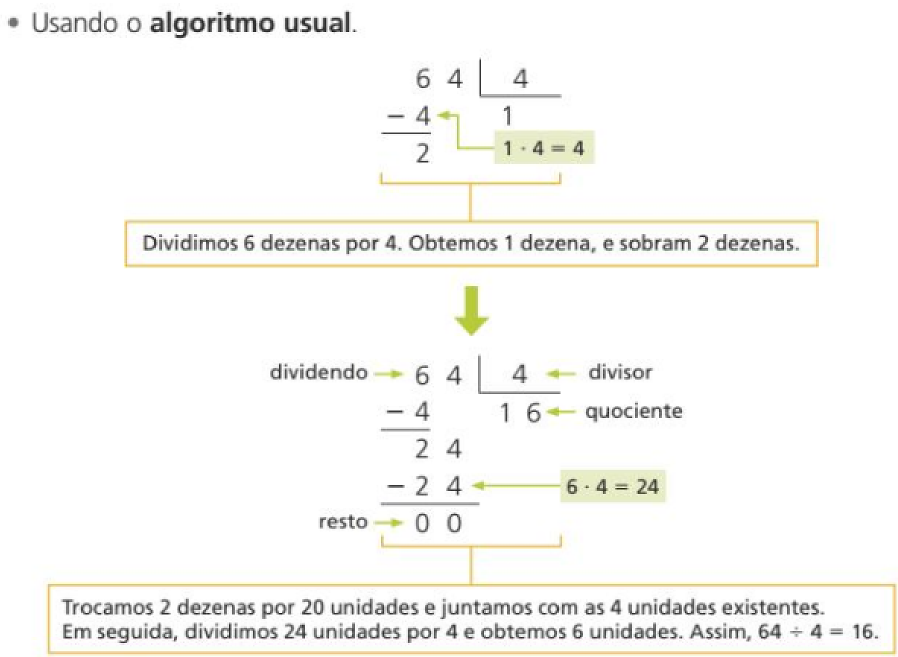
Fonte: Pataro e Balestri [27] (2018, p. 65)

2.6 Coleção 6: Matemática Realidade e Tecnologia

Esta coleção, também feita para os anos finais do Ensino Fundamental, foi escrita por Joamir Souza. Analisando o livro do 6° ano, observamos que a divisão entre naturais é apresentada com explicações mais detalhadas mesmo quando a operação tem baixo índice de complexidade. Os dois exemplos introdutórios, que implicitamente abordam as duas ideias associadas à divisão, justificam todos os passos do processo de dividir.

O livro apresenta a divisão para os números decimais em dois casos: "divisão entre naturais" e "divisão com números decimais", sendo que a segunda aborda também a divisão de um número decimal por um natural. As explicações apresentam justificativas de maneira semelhante ao que foi mostrado na Figura 2.26, entretanto não encontramos nenhum exemplo onde o zero aparece no quociente, seja de maneira intercalada ou não.

Figura 2.26: Divisão entre decimais

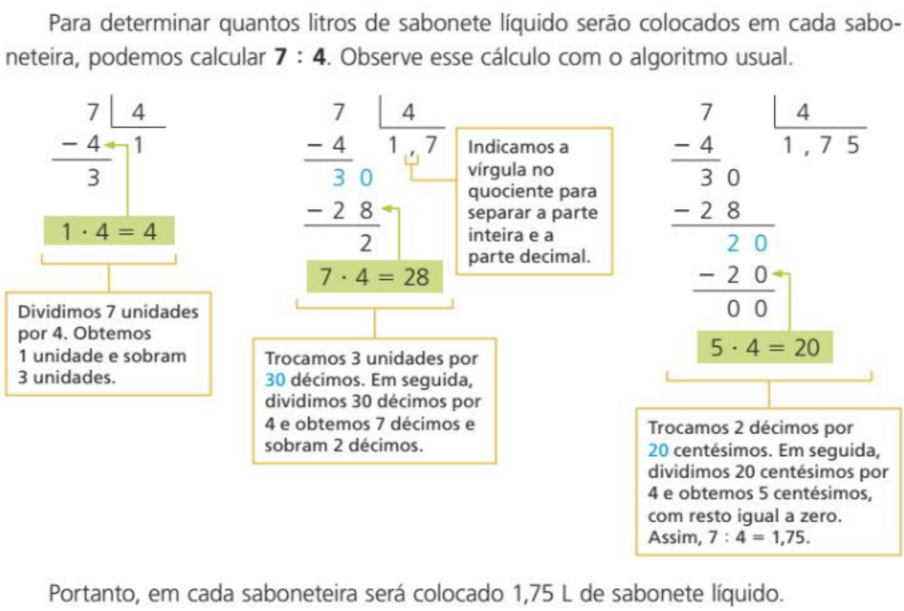


Fonte: Souza [45] (2018, p. 53)

A Figura 2.27 exibe um dos exemplos para a divisão de decimais. Observamos que cada operação e característica da realização do algoritmo é bem descrita, mesmo sem haver o quadro posicional. O uso de setas indicando qual o raciocínio utilizado em cada parte do processo de divisão facilitam a visualização para o aluno, fazendo com que ele possa ler o livro e compreender o conteúdo independentemente da presença do professor.

No livro de 7° ano, o tema da divisão entre decimais é retomado e ensinado novamente, com tópicos, estrutura e explicações semelhantes aos mostrados na Figura 2.27.

Figura 2.27: Divisão entre decimais


Para determinar quantos litros de sabonete líquido serão colocados em cada saboneteira, podemos calcular **7 : 4**. Observe esse cálculo com o algoritmo usual.

Portanto, em cada saboneteira será colocado 1,75 L de sabonete líquido.

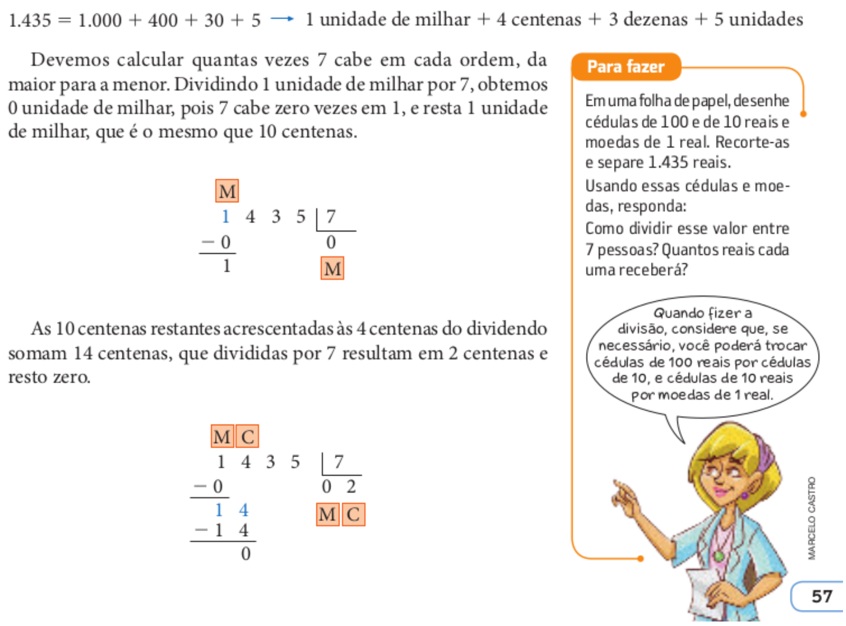
Fonte: Souza [45] (2018, p. 188)

Há também uma seção destinada à divisão de inteiros, porém o algoritmo não é abordado.

2.7 Coleção 7: Araribá

A coleção Araribá, idealizada para os anos finais do Ensino Fundamental, é uma obra coletiva concebida pela editora Moderna.

Figura 2.28: O algoritmo da divisão


1.435 = 1.000 + 400 + 30 + 5 → 1 unidade de milhar + 4 centenas + 3 dezenas + 5 unidades

Devemos calcular quantas vezes 7 cabe em cada ordem, da maior para a menor. Dividindo 1 unidade de milhar por 7, obtemos 0 unidade de milhar, pois 7 cabe zero vezes em 1, e resta 1 unidade de milhar, que é o mesmo que 10 centenas.

As 10 centenas restantes acrescentadas às 4 centenas do dividendo somam 14 centenas, que divididas por 7 resultam em 2 centenas e resto zero.

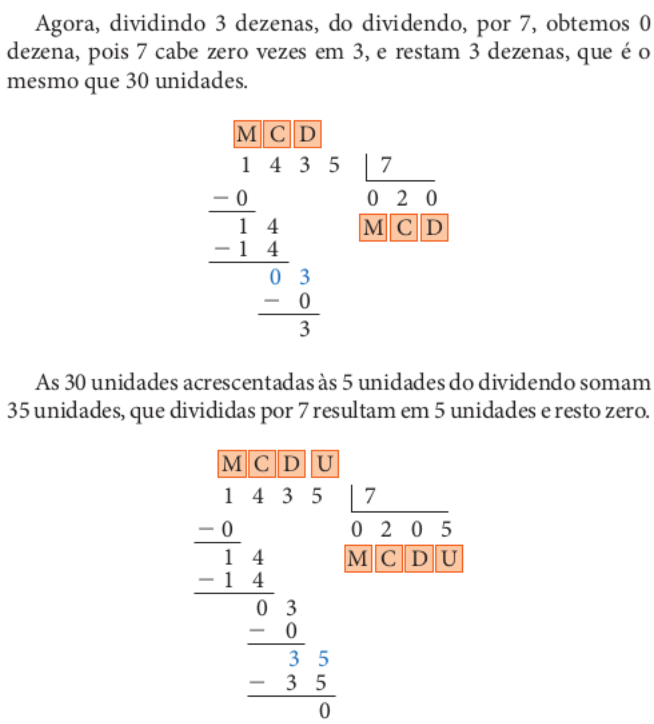
Fonte: Obra coletiva concebida pela editora Moderna [4] (2018, p. 57)

A primeira menção à divisão na coleção ocorre no livro de 6° ano. O tópico é abordado inicialmente por suas ideias associadas, com exemplos cujas respostas são apresentadas sem nenhuma preocupação em exibir os métodos usados para encontrá-las. Posteriormente é introduzido o conteúdo, contendo provavelmente a explicação mais detalhada e o exemplo mais abrangente que encontramos entre as coleções analisadas até o momento.

Antes de explicar o algoritmo, os autores decompõem o dividendo, lembrando o aluno do valor posicional de cada um dos algarismos que o formam. Apesar de acrescentar mais um passo ao longo processo do Algoritmo da Divisão, esta prática pode ajudar na sua compreensão. A explicação mencionada se encontra na Figura 2.28.

Notamos ainda que é sugerido como atividade extra o uso de cédulas de dinheiro para a simulação da divisão como uma maneira de observar como ocorre a transformação das unidades em meio ao Algoritmo da Divisão. Isso é importante pois naturaliza o processo de trocas das unidades em contextos reais. O exemplo escolhido ainda apresenta um caso de divisão que normalmente não encontramos em livros: zero intercalado no quociente. Como podemos ver na Figura 2.29, a explicação apresentada esclarece o tópico que poderia causar dúvidas aos alunos.

Figura 2.29: Justificando o zero intercalado no quociente



Agora, dividindo 3 dezenas, do dividendo, por 7, obtemos 0 dezena, pois 7 cabe zero vezes em 3, e restam 3 dezenas, que é o mesmo que 30 unidades.

As 30 unidades acrescentadas às 5 unidades do dividendo somam 35 unidades, que divididas por 7 resultam em 5 unidades e resto zero.

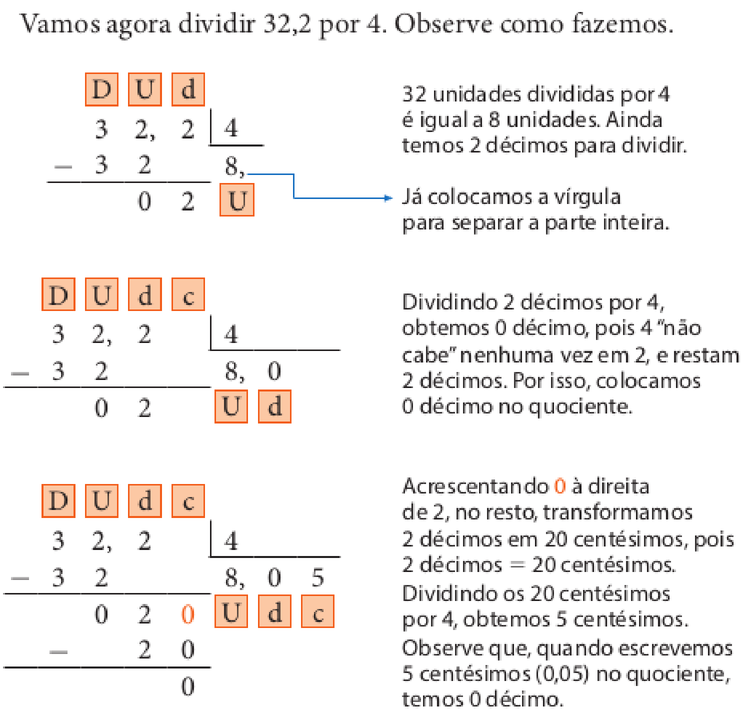
Fonte: Obra coletiva concebida pela editora Moderna [4] (2018, p. 58)

Em seguida, o algoritmo das estimativas é mostrado como uma alternativa ao algoritmo usual da divisão. Sua explicações são menos elaboradas que as mostradas nas figuras anteriores, mas ainda satisfatórias.

Para a divisão entre decimais, os autores apresentam os três casos usuais, divisão de naturais com quociente decimal, divisão entre um decimal e um natural e divisão entre decimais. Nestes casos, o algoritmo é explicado de maneira similar ao que observamos nas imagens anteriores.

Mais uma vez, os exemplos escolhidos fornecem explicações para partes do processo que geram dúvida nos alunos. Como podemos ver na Figura 2.30, a colocação da vírgula e do zero no quociente é justificada.

Figura 2.30: Divisão entre decimal e natural



Fonte: Obra coletiva concebida pela editora Moderna [4] (2018, p. 203)

Há algumas observações interessantes em meio aos exemplos. Em uma nota intitulada "Para descobrir" o livro incentiva o aluno a realizar, na calculadora, divisões pelos números 10, 100, 1000... O objetivo do exercício é investigar o padrão nos resultados. Em seguida, há um lembrete sobre a equivalência de frações, mencionando que o quociente não se altera ao dividirmos ou multiplicarmos dividendo e divisor por um mesmo número. Por fim, é mostrado o processo prático deste tipo de divisão, que consiste em igualar as casas decimais, remover a vírgula e dividir os números naturais formados. Apesar desta não ser a única coleção que apresenta esta informação, aqui a progressão destes conhecimentos flui naturalmente, através de perguntas que estimulam o raciocínio do aluno.

No livro atribuído ao 7° ano, a abordagem da divisão entre números inteiros não contempla o algoritmo, porém quando a operação é abordada no conjunto dos números racionais, o procedimento é explicado novamente.

Mesmo que brevemente, os autores tomam o cuidado de manter o uso do quadro posicional para auxiliar a compreensão das divisões apresentadas, já que, neste livro as explicações sobre as transformações de unidades não são feitas.

2.8 Coleção 8: Desafio Matemática e Matemática Compreensão e Prática

Faremos uma análise conjunta das coleções Desafio Matemática e Matemática Compreensão e Prática, atribuídas aos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental respectivamente, devido ao fato de ambas terem sido escritas pelo mesmo autor, Ênio Silveira.

Diferentemente das obras analisadas anteriormente, a coleção Desafio Matemática opta por introduzir a divisão no livro do 2° ano do Ensino Fundamental. A Unidade 11, uma das últimas, é inteiramente dedicada ao estudo da divisão. Inicialmente são introduzidas as ideias associadas à operação através de problemas motivadores que são resolvidos por meio de desenhos e um diálogo com o aluno, como podemos ver na Figura 2.31.

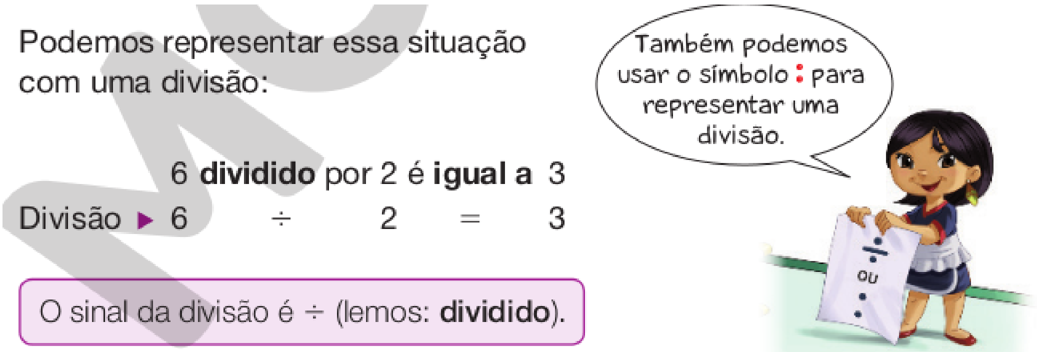
Figura 2.31: Introdução à divisão no 2° ano

Fonte: Silveira [39] (2021, p. 184)

Notamos que as atividades apresentadas pelo autor foram elaboradas de maneira que pudessem ser resolvidas por meio de desenhos, dentro do próprio livro. Após a introdução das ideias associadas à divisão, há duas seções que abordam o significado dos termos "metade" e "terço", utilizando novamente desenhos como estratégia de resolução das divisões.

O livro toma certo cuidado em explicar o significado do símbolo da divisão e suas variantes, a maneira como a operação normalmente é escrita e sua leitura, como podemos ver na Figura 2.32. Estes detalhes são importantes, pois apesar de "óbvios" e normalmente explicados pelo professor, eles não são enfatizados.

Figura 2.32: O símbolo de divisão



Fonte: Silveira [39] (2021, p. 184)

Já no livro de 3° ano, o conteúdo é seccionado ao decorrer da obra. Em meio ao estudo de multiplicação e tabuadas, são mostradas as ideias associadas a divisão e ao conceito de divisão exata e não exata. Posteriormente, a operação é abordada diretamente em outra unidade.

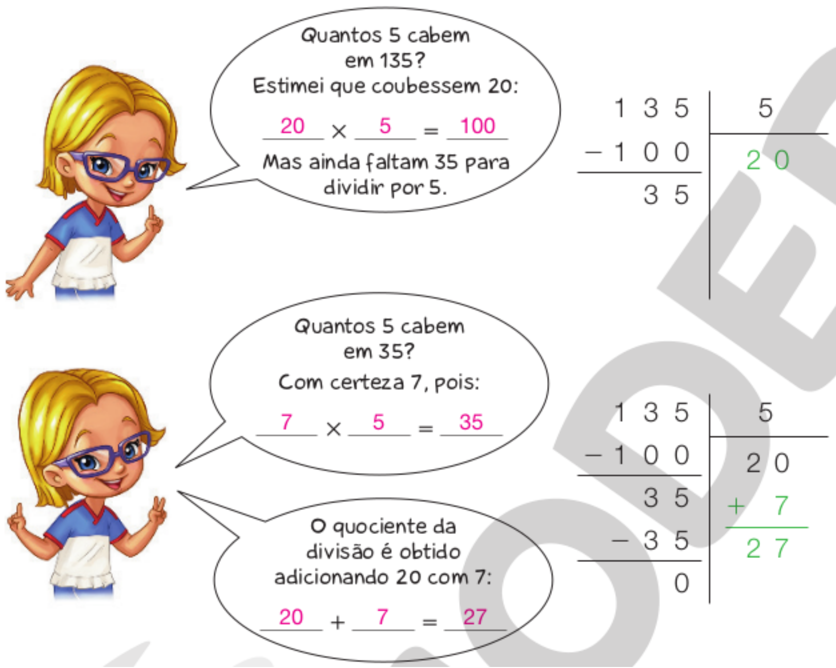
Figura 2.33: Divisão não exata

Fonte: Silveira [40] (2021, p. 175)

Em relação a introdução, os desenhos utilizados nos problemas motivadores são adequados e ajudam o aluno a compreender a solução dos exercícios. Pela primeira vez entre as coleções analisadas, os conceitos de divisão exata e não exata foram apresentados antes do algoritmo da divisão. Como podemos ver na Figura 2.33, a abordagem foi feita da maneira mais simples possível.

Ao falar sobre a operação de divisão de maneira direta, o livro nomeia seus termos e decide por introduzir o método das estimativas, conforme a Figura 2.34.

Figura 2.34: O método das estimativas



Fonte: Silveira [40] (2021, p. 203)

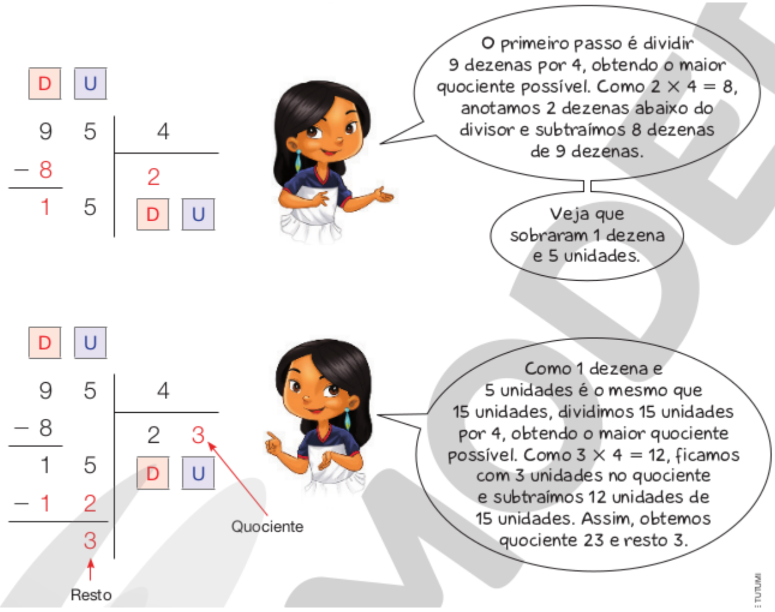
O algoritmo não é mostrado formalmente, mas a alternativa apresentada pode auxiliar o aluno a se habituar com sua estrutura.

Na obra destinada ao 4° ano, apresenta-se uma revisão dos conteúdos tratados nos livros anteriores antes da introdução do algoritmo. Percebe-se que o uso de desenhos para representar os problemas motivadores começa a diminuir, porém a estrutura das explicações permanece a mesma dos livros anteriores.

Para a primeira apresentação do Algoritmo da Divisão, vista na Figura 2.35, são sugeridos três problemas motivadores, cujo nível de complexidade é crescente, chegando a uma divisão com números de quatro algarismos. Além dos comentários dos personagens característicos do livro, o quadro posicional é utilizado para auxiliar as explicações.

No livro destinado ao 5° ano, a abordagem da divisão é dividida em duas categorias de acordo com a quantidade de algarismos do divisor, um ou dois. O exercício inicial é resolvido usando a decomposição do número e cálculo mental, como podemos ver na Figura 2.36, porém os problemas motivadores seguintes são resolvidos usando apenas o algoritmo usual.

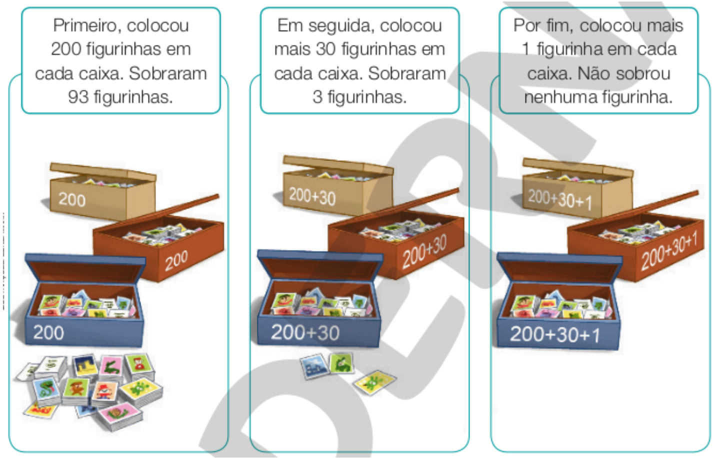
Figura 2.35: Algoritmo usual da divisão



Fonte: Silveira [41] (2021, p. 111)

Não há exemplos, neste, ou em nenhum livro da coleção, em que o zero figure no quociente, seja de forma intercalada ou não. Ao final da obra é abordada, brevemente, a divisão entre números decimais.

Figura 2.36: Dividindo através da decomposição



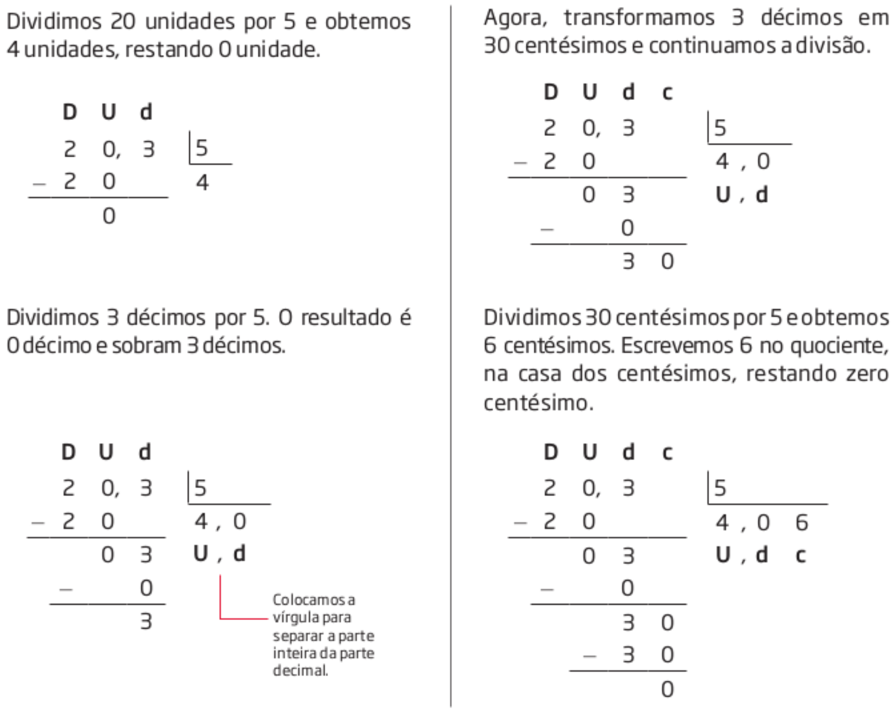
Fonte: Silveira [42] (2021, p. 114)

A primeira atividade mostra uma divisão entre naturais que resulta em um decimal e, em meio aos exercícios da unidade, há uma explicação sobre a divisão entre um decimal e um natural, entretanto não há menções sobre a divisão entre decimais. Ao final da unidade, há uma seção destinada à divisão por 10, 100 e 1000. Não encontramos nenhum título que explica a maneira prática de obter o resultado destas divisões através do posicionamento da vírgula, o que normalmente é esperado que os livros mostrem.

Em geral, a coleção apresenta exemplos objetivos e adequados em sua temática. As explicações são coerentes, porém além do uso de desenhos e do método das estimativas, as obras não apresentam diversidade ao resolver os problemas associados à divisão. A organização dos conteúdos relacionados a divisão, dentro dos livros e no decorrer da coleção não é usual e pode não favorecer a continuidade do raciocínio do aluno. A complexidade dos exemplos e exercícios no decorrer das três obras parece ser quase linear, ao mesmo tempo que a estrutura das explicações não varia.

Na coleção Matemática Compreensão e Prática, na obra destinada ao 6° ano, a divisão é tratada inicialmente para os números naturais. Através de três situações problema o autor relembra as ideias relacionadas à divisão, sua relação fundamental e os conceitos de divisão exata e não exata. O algoritmo é o método utilizado para solucionar os problemas motivadores, porém seu procedimento não é explicado. O autor reforça o incentivo à realização da divisão mentalmente, apresentando uma seção sobre cálculo mental através da decomposição do número.

Figura 2.37: Algoritmo usual da divisão

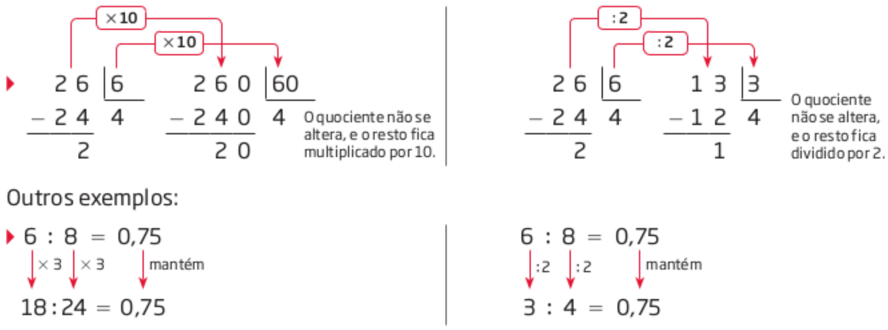


Fonte: Silveira [43] (2021, p. 173)

Ao discutir sobre a divisão para os decimais, o autor retoma as explicações acerca do algoritmo e mostra exemplos de divisão entre naturais que resulta em decimal e entre um decimal e um natural. Um dos exercícios mostra um cálculo onde o zero se mostra de forma intercalada tanto no quociente, quanto no dividendo. A explicação deste exemplo é feita em quatro etapas e justifica de maneira esclarecedora o posicionamento da vírgula e do zero no quociente, como podemos ver na Figura 2.37.

Na divisão entre decimais, é enfatizado que, ao multiplicarmos o dividendo e divisor pelo mesmo número, o quociente não se altera. Sendo assim, é ensinada a transformação da divisão de decimais em divisão de naturais e sua resolução através do algoritmo usual. O esclarecimento, que pode ser encontrado na Figura 2.38, possui um bom nível de detalhamento e tem uma organização que facilita a compreensão do aluno.

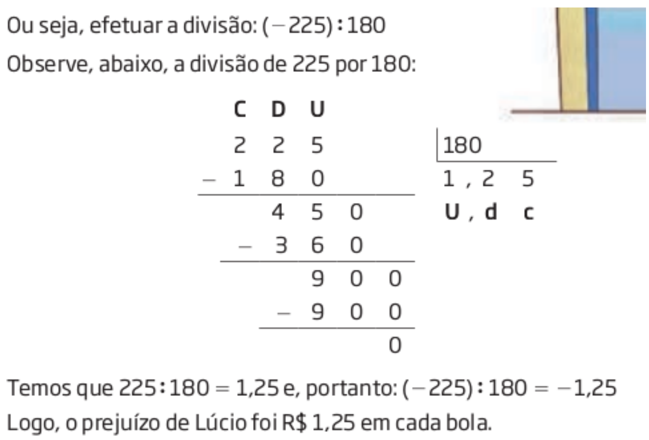
Figura 2.38: Propriedades da divisão



Fonte: Silveira [43] (2021, p. 174)

No livro de 7° ano, a divisão entre inteiros é tratada com ênfase na regra de sinais, como esperado, deixando o algoritmo de maneira implícita. Entretanto, ao abordar a divisão entre decimais, a obra resgata o uso do procedimento brevemente, como mostrado na Figura 2.39. Notamos que, apesar das explicações não serem exibidas, o uso do quadro posicional não foi abandonado, revelando sua importância para a compreensão do posicionamento da vírgula no quociente.

Figura 2.39: Propriedades da divisão



Fonte: Silveira [43] (2021, p. 174)

A coleção não difere muito das anteriores na organização de seus conteúdos e explicações fornecidas. Há uma melhora em relação à sequência dos tópicos de estudo, se compararmos com a coleção feita para os anos iniciais.

Não há uma expectativa de continuidade entre as coleções, mas é curioso perceber que o autor usa "÷" como símbolo da divisão nos livros destinados aos anos iniciais e ":" nos livros dos anos finais.

Ao analisarmos as coleções, mediante nossos critérios, apresentamos sob nossa perspectiva quais aspectos destas auxiliam a nossa prática em sala de aula. Não é nosso intuito compará-las, mas é importante nos atentarmos que algumas coleções são mais cuidadosas e detalhistas ao abordar o tema, conforme comentamos em nossas observações individuais sobre cada uma delas. Em geral, notamos que a maioria das coleções se preocupa em apresentar explicações sobre os processos que envolvem o algoritmo, algumas de maneira mais minuciosa que outras, entretanto sentimos uma carência de sugestões de métodos ou abordagens alternativas para o conteúdo. Por isso, optamos a seguir por pesquisar como os professores atuantes no ensino básico têm optado por abordar o tema, em busca de conhecer maneiras de ensinar a divisão que sejam diferentes daquelas encontradas nas coleções analisadas.

3 A abordagem da divisão em dissertações acadêmicas

Com o objetivo de expandir o conhecimento sobre as práticas e possibilidades para o ensino da Divisão Euclidiana, realizamos um estudo descritivo dos trabalhos que vêm sendo produzidos sobre o tema através de uma revisão sistemática de literatura acadêmica. Buscamos, com esta pesquisa, conhecer e compreender as visões, sugestões e incômodos de professores do ensino básico em relação ao tema.

Segundo Sampaio e Mancini (2007) [33] uma revisão sistemática é um tipo de pesquisa que utiliza como fonte de dados a literatura sobre determinado tema. Ela consiste em um resumo dos resultados encontrados através de métodos explícitos e sistematizados de busca, organização e síntese da informação selecionada.

O locus escolhido para a pesquisa bibliográfica foi o banco de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Como mencionado anteriormente, buscamos observar as experiências de professores atuantes. Por isso ao analisarmos as dissertações dos alunos do PROFMAT, que é um programa destinado exclusivamente a professores em exercício, atingiremos nosso objetivo. De forma a guiar a coleta de dados, destacamos a principal questão motivadora: Como abordar ou ensinar o Algoritmo da Divisão para alunos da Educação Básica? Selecionamos pesquisas cujo conteúdo seja relevante a esta indagação e consideramos ainda as questões: Como minimizar as dificuldades de compreensão da Divisão Euclidiana? Quais métodos alternativos podemos utilizar para esclarecer este conteúdo? Como propiciar engajamento no aprendizado?

O mapeamento das pesquisas foi feito através de fichamentos que consideraram o título, resumo, sumário, introdução e considerações finais dos trabalhos, e a coleta de dados foi organizada conforme os estudos descritos na citação:

> A fim de organizarmos as pesquisas encontradas para elaboração de tabelas-síntese que nos auxiliaram nas análises, levamos em consideração para a realização de um fichamento os seguintes elementos nas pesquisas mapeadas:
> a) Informações gerais: autor, título da pesquisa, orientador, ano, ins-

> tituição de origem, tipo de pesquisa (mestrado acadêmico, mestrado profissionalizante, doutorado).
> b) Informações específicas: foco temático, linhas de pesquisa, questões de pesquisa ou objetivos, metodologia, resultados e contribuições para área. (FERREIRA, DOS SANTOS E CURI [11], 2013, p.7).

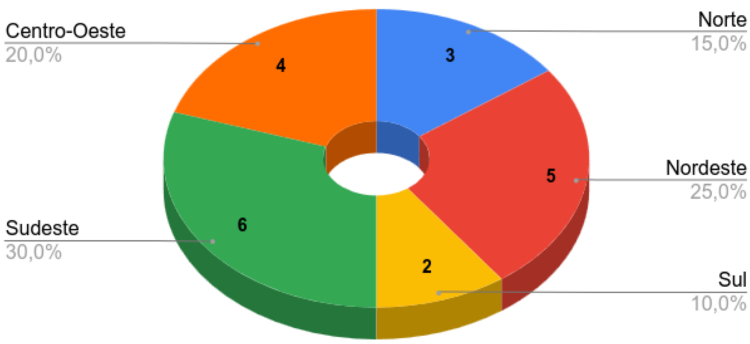
O repositório do PROFMAT carece de um sistema de busca avançado, permitindo apenas a busca por palavras-chaves que constam nos títulos dos trabalhos. Optamos por fazer a busca utilizando quatro palavras-chave que poderiam figurar nos títulos de dissertações que abordam o tema de interesse.

Foram utilizadas inicialmente as palavras-chave: "divisão" e "algoritmo" com o intuito de encontrar trabalhos específicos sobre o tema escolhido. Considerando as restrições do mecanismo de pesquisa, a busca foi feita também usando as chaves "jogos", "quatro operações" de maneira a obter uma variedade mais ampla de resultados e analisá-los individualmente em busca de trabalhos possam se adequar às questões de pesquisa. Não é de interesse desta análise ler todos os trabalhos na íntegra, queremos apenas encontrar textos relevantes ao tópico. Entretanto, a leitura foi necessária em alguns casos para verificar se a abordagem do tema era coerente com os objetivos de pesquisa.

3.1 Uma análise geral

A pesquisa compreende 20 trabalhos publicados entre janeiro de 2013 e agosto de 2022 que atendiam aos critérios estabelecidos, com o objetivo de refletir sobre as questões motivadoras. Apresentaremos nesta seção uma análise quantitativa dos resultados encontrados, buscando compreender as diferentes perspectivas apresentadas sobre o tema de pesquisa. Categorizamos os trabalhos encontrados por região geográfica, ano de publicação e metodologia de ensino preferida. O gráfico mostrado na Figura 3.1 apresenta um visão geral do corpus.

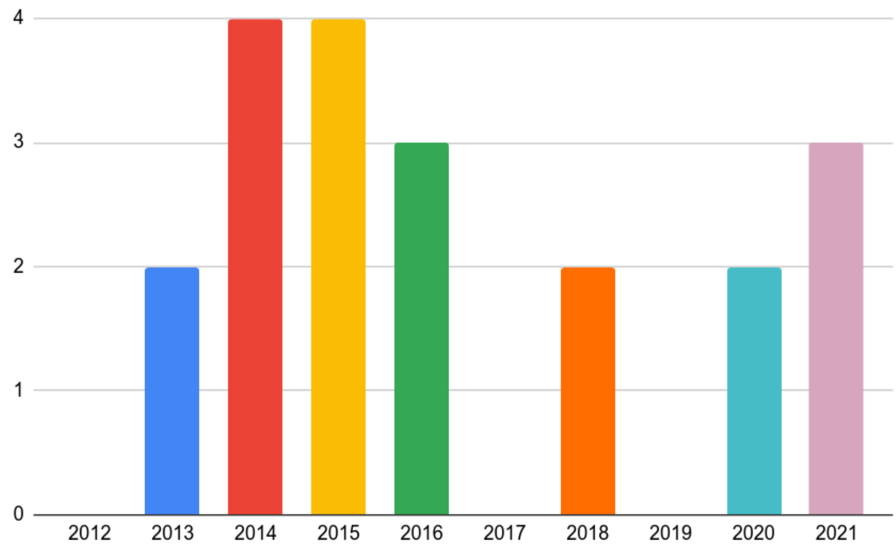
Figura 3.1: Dissertações por Região



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

O interesse no tema sofreu algumas oscilações nos últimos anos. Em 2014 e 2015 são observadas as maiores quantidades de trabalhos relacionados, conforme o gráfico mostrado na Figura 3.2. Dentre as 8 dissertações publicadas nestes anos, 6 têm como foco a Divisão Euclidiana e as restantes abordam o conteúdo como um tópico dentre as quatro operações básicas. De modo geral, 12 dos 20 trabalhos direcionam seus estudos diretamente à divisão e ao seu algoritmo. Apesar do objetivo principal da revisão ser buscar abordagens alternativas para o ensino do Algoritmo da Divisão, trabalhos que não tratam deste tópico unicamente também foram selecionados.

Figura 3.2: Dissertações por ano de publicação

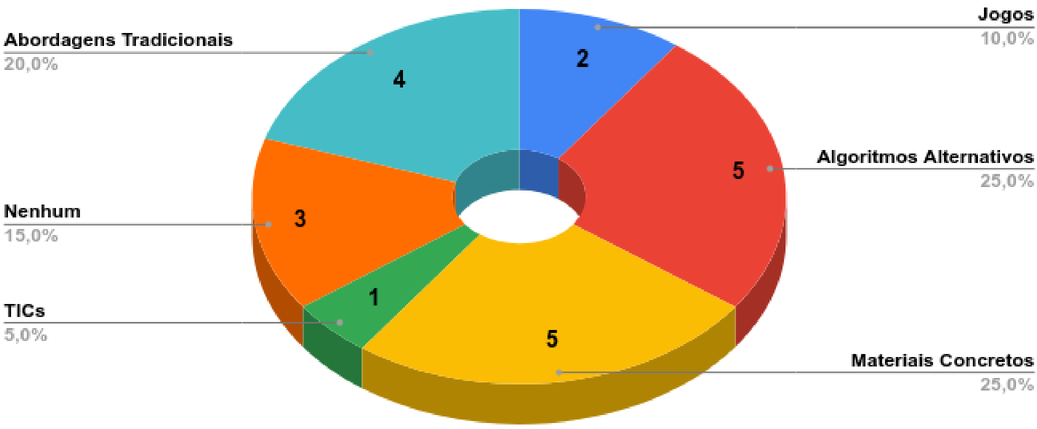


Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Um dos objetivos desta análise é refletir sobre as diferentes metodologias que estão sendo colocadas em prática no ensino deste conteúdo. Dentre as abordagens sugeridas pelos trabalhos analisados estão o uso de materiais concretos e jogos matemáticos, tecnologias de comunicação e informação (TICs), o ensino por meio de algoritmos alternativos e a abordagem tradicional. Para este estudo, caracterizamos como trabalhos de abordagem tradicional aqueles que sugerem metodologias não ativas ou que se dedicam a estudar o aspecto matemático puro do algoritmo, sem apresentar sugestões de sequências didáticas ou atividades.

O gráfico da Figura 3.3 mostra a ocorrência de cada uma das abordagens mencionadas. Alguns trabalhos podem ser classificados em mais de uma categoria por apresentarem sequências didáticas utilizando mais de uma das metodologias citadas. Estes foram classificados pela metodologia predominante. As dissertações categorizadas como "nenhum" discutem sobre os conhecimentos prévios, erros comuns e dificuldades apresentadas pelos alunos.

Figura 3.3: Dissertações por Metodologia



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Listaremos as pesquisas analisadas na Tabela 3.1 de acordo com as categorias que se encontram para futuras citações.

Tabela 3.1: Dissertações analisadas

Título	Autor
Os jogos como recursos didáticos para a melhoria da aprendizagem dos aprendentes nas aulas de matemática	João Dehon de Sousa [44]
Por que e como ensiná-lo? Múltiplos aspectos do algoritmo da divisão no ensino básico	Gerusa Fortes Pereira Dávila [10]
O ensino da divisão de números naturais, uma proposta personalizada.	Felipe Louback [22]
As quatro operações fundamentais da aritmérica: conhecimentos prévios dos alunos no início do 1° ano do ensino médio	João Luiz Schirlo [35]
O ensino das quatro operações para o sexto ano do ensino fudamental – teoria e prática	Rodrigo de Oliveira Mancebo [25]
As dificuldades dos alunos da EEM Virgílio Correia Lima em operações básicas com números naturais, inteiros e racionais	Francisco Rosiglei do Rêgo [29]
Algoritmo da divisão em quatro regras	Hilton Bruno Pereira Viana [48]
Materiais manipuláveis: uma intervenção em sala de aula para a divisão euclidiana	Valeria Rego Haddad [14]

Por que e como ensiná-lo? Múltiplos aspectos do algoritmo da divisão no ensino básico	Gerusa Fortes Pereira Dávila [10]
O ensino da divisão de números naturais, uma proposta personalizada.	Felipe Louback [22]
As quatro operações fundamentais da aritmérica: conhecimentos prévios dos alunos no início do 1° ano do ensino médio	João Luiz Schirlo [35]
O ensino das quatro operações para o sexto ano do ensino fudamental – teoria e prática	Rodrigo de Oliveira Mancebo [25]
As dificuldades dos alunos da EEM Virgílio Correia Lima em operações básicas com números naturais, inteiros e racionais	Francisco Rosiglei do Rêgo [29]
Algoritmo da divisão em quatro regras	Hilton Bruno Pereira Viana [48]
Materiais manipuláveis: uma intervenção em sala de aula para a divisão euclidiana	Valeria Rego Haddad [14]
Algoritmo da divisão de Euclides: uma nova proposta de ensino de matemática na educação básica	Charles James Leite Martins [23]
Revisitando os algoritmos para operações aritméticas fundamentais	Emmanuel Cristiano Lopes de Moraes [24]
Gelosia e divisão americana: uma experiência motivadora com esses algoritmos operatórios pouco explorados no ensino fundamental	Eduardo Castro Brittes [2]
Algoritmo da divisão de Euclides	Susiane Bezerra Caixeta [3]
Algoritmos utilizados para as quatro operações elementares	Gracielly da Silva Santana [38]
Aprendizagem da operação de divisão no ensino fundamental: estudo do nível de compreensão e capacidade de resoluções de problemas	Cláudio Marques da Silva [36]
Barras de Napier: uma aplicação para o estudo da multiplicação e da divisão	José Jorge do Rego Alfano [30]
Aprendizagem matemática da multiplicação e divisão: proposta de atividades para alunos do 6 ° ano	Aline Mazza Vizula [49]
Pensamento computacional e divisão euclidiana: possíveis conexões na aprendizagem	Fernanda Paula Wappler [51]
Os métodos históricos de multiplicação e divisão como recurso facilitador do ensino	Simey da Costa Negrão [5]
Métodos alternativos de cálculos na multiplicação e divisão: para além dos algoritmos usuais da aritmética	Eder Araujo da Silva [36]

Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

3.2 O que os estudos publicados sugerem?

Considerado que o objetivo desta pesquisa é desenvolver atividades com abordagens diferenciadas que auxiliam o ensino do Algoritmo da Divisão, é pertinente ressaltar as conclusões dos trabalhos que analisam os conhecimentos dos alunos em relação ao tema e suas sugestões de abordagem. Assim, analisamos os trabalhos por grupos definidos na Figura 3.3. Como já mencionado, algumas dissertações não possuem o Algoritmo da Divisão como foco, esta revisão se atenta apenas para os resultados apresentados sobre este tópico.

3.2.1 A divisão e o desempenho dos alunos

Classificadas como "nenhum" as dissertações intituladas "As quatro operações fundamentais da aritmética: conhecimentos prévios dos alunos no início do 1° ano do ensino médio" de Schirlo [35], "As dificuldades dos alunos da E.E.M. Virgílio Correia Lima em operações básicas com números naturais" de Rêgo [29] e "Aprendizagem da operação de divisão no ensino fundamental: estudo do nível de compreensão e capacidade de resoluções de problemas" de Siva [36], abordam respectivamente uma sondagem de conhecimentos prévios, as dificuldades de aprendizado e uma discussão sobre erros recorrentes na realização do Algoritmo da Divisão.

Schirlo [35] concluiu, em sua pesquisa, que os alunos não apresentaram conhecimentos prévios para resolver as operações solicitadas em sua pesquisa. As atividades propostas consistiam em exercícios diretos envolvendo a divisão entre números naturais, divisão com quociente decimal e divisão entre decimais. Além disso, ele ressalta as dificuldades percebidas nas divisões cujo quociente é um número que possui o zero intercalado, e ainda, em etapas do algoritmo que envolvem multiplicações, subtrações e na percepção da ordem de grandeza dos números envolvidos. Rêgo [29], diferentemente de Schirlo, analisou o desempenho de seus alunos utilizando atividades mistas entre cálculos diretos e situações problema. Seus resultados são similares, ele relata que as atividades que envolvem divisão possuem altos índices de erro, comparadas com as atividades das outras três operações básicas. Entretanto não há detalhamento sobre os tipos de erro observados, apenas dados quantitativos. Ambas as pesquisas foram feitas com alunos do 1° ano do Ensino Médio.

Silva [36] faz uma investigação mais meticulosa que os autores mencionados anteriormente. Sua pesquisa, feita com alunos de 6° ano e 7° ano, categoriza os erros mais frequentes observados em atividades de divisão direta e situações problema envolvendo esta operação. Ele detecta 8 tipos de erros: erro no cálculo mental, cálculos primitivos (quando o cálculo é feito por meio de desenhos do tipo traço ou bolinhas), invenção de valores distintos dos indicados nos enunciados, o uso de números do enunciado para fazer qualquer operação aleatória, erro de cálculo durante a operação de divisão, erro de compreensão do Algoritmo da Divisão, adição, subtração e multiplicação de dados indevidos e questões deixadas em branco. O autor conclui que os estudantes não conseguem efetuar o Algoritmo da Divisão devido a não compreenderem as transformações entre valores posicionais dos números do sistema decimal, principalmente quando as operações exigiam a colocação do zero no quociente. Ele comenta ainda que há também uma dificuldade de identificação do objetivo da questão, ou seja, na interpretação de texto e finaliza inferindo que, em geral, o nível de compreensão dos alunos sobre os problemas apresentados é baixo.

3.2.2 A abordagem tradicional revisitada

Entre as dissertações classificadas como de "abordagem tradicional", o trabalho de Martins [23] se limita a definir o Algoritmo da Divisão, demonstrar algumas de suas propriedades e apresentar aplicações. Caixeta [3] apresenta a divisão, suas características e sugere duas atividades contextualizadas, uma sobre o Calendário Gregoriano e outra sobre o problema dos três marinheiros, disponível no livro "O Homem que Calculava". Apesar dos problemas serem relevantes e estimularem o raciocínio lógico do aluno, a proposta é complexa para ser utilizada como problema motivador para a introdução do Algoritmo da Divisão.

Santana [38] apresenta, para a divisão, o algoritmo convencional, o método das estimativas e o método da decomposição. Consideramos estes "métodos" como abordagens tradicionais, por consistirem em explicações que apresentam pouca variação daquelas já encontradas nos livros didáticos. Por fim, o trabalho de Viana [48] define a divisão em quatro regras numa tentativa de simplificar a explicação do procedimento. A saber, as regras são: o divisor deve ser diferente de zero, o dividendo pode ser natural ou decimal e a divisão deve ser feita um algarismo por vez, da esquerda para a direita, no quociente serão inseridos espaços que representam a quantidade de algarismos que o dividendo possui – caso o dividendo seja decimal, coloca-se a vírgula entre os espaços – e o resto é o resultado subtração entre o dividendo e o produto entre o quociente e o divisor.

3.2.3 As tendências para a divisão: materiais concretos e referências históricas

Dentre as metodologias sugeridas pelos trabalhos analisados, observamos que o uso de materiais concretos é uma tendência. Louback [22] apresenta uma proposta de atividades utilizando material dourado para a compreensão do valor posicional dos números e realização de trocas de unidades e o uso de ovos de chocolate para encenar um problema motivador. Ainda, para a fixação do conteúdo, ele sugere um jogo conhecido como Trilha do Resto, concluindo que sua sequência é apenas uma otimização do processo de ensino da divisão.

Mancebo [25] realiza três testes para a verificação de conhecimentos dos alunos de 6° e 7° ano. Em dois deles, a divisão é feita em folha e papel, sendo que um dos exercícios é uma divisão direta e em outro há uma situação problema intermediando o cálculo. No terceiro teste, o material de Cuisenaire é usado para auxiliar o cálculo. Seus resultados indicam que os alunos apresentam dificuldades em divisões que incluem o zero no quociente e que houve um maior índice de erro na atividade que utilizava o material de Cuisenaire. Tal fato foi atribuído à falta de compreensão dos alunos sobre como fazer a transição do resultado encontrado para a folha de respostas.

As propostas de intervenção de Rego [14] utilizavam uma fita graduada de 1 a 100 e o material de Cuisenaire, ambos confeccionados pelo professor. Ela defende que a criação da fita numerada auxilia o aluno na compreensão da lógica por trás da operação de divisão, permitindo que o aluno consiga visualizar o resto e deduzir que ele é menor que o divisor. Em uma análise comparativa, ela observa que antes do uso do material, menos de 30% dos alunos compreendiam o Algoritmo da Divisão e, após a atividade, 58% dos alunos que não sabiam o algoritmo conseguiram realizá-lo com o auxílio do material.

A recomendação de Alfano [30] consiste no uso das *Barras de Napier* para auxiliar a realização da operação de divisão. Em suas considerações finais, ele pondera sobre o engajamento proporcionado pela proposta diferenciada e ainda comenta sobre a melhora da compreensão dos alunos em relação ao tema.

Por fim, Vizula [49] utiliza a tabela pitagórica, o material dourado, jogo das fichas de Jo Boaler e notas de dinheiro pedagógicas em uma sequência didática que visa revisar os conhecimentos relacionados à tabuada, reconhecer a representação retangular dos números, trabalhar as estratégias de cálculo mental e perceber a relação inversa entre multiplicação e divisão. Vizula conclui que a aplicação da sequência oportunizou o raciocínio lógico e pensamento crítico dos alunos, melhorando seus desempenhos, além de desconstruir algumas concepções comuns sobre a dificuldade e tradicionalismo envolvendo as aulas de Matemática.

Outra abordagem sugerida por muitos trabalhos foi o uso de algoritmos alternativos. Em geral, estas dissertações apresentam maneiras de realizar a divisão que diferem do Algoritmo da Divisão e suas variações mais comuns (método das subtrações sucessivas, decomposição).

Em sua dissertação, Silva [37] propõe o ensino da divisão pelo método das costuras e pelo método das subtrações sucessivas. Ele aborda ainda os métodos de multiplicação russo, chinês e árabe, o que pode ser útil para o aluno em alguma parte do processo da divisão. As conclusões do autor afirmam que utilizar referências históricas para justificar os métodos apresentados podem representar uma liberdade na hora da realização das operações. Ele afirma, por fim, que o volume de acertos nos cálculos de multiplicação aumentou após o ensino dos métodos alternativos, entretanto o mesmo não ocorreu em relação à divisão.

Negrão [5] descreve os métodos históricos da divisão hinduísta e egípcia, e, para a sua sequência ele elege o uso das *Barras de Napier* como estratégia. O material consiste em uma barra dividida em dez quadrados. Nestes são colocados os dez primeiros múltiplos naturais de um número, sendo que o algarismo das dezenas e unidades é separado pela diagonal de cada quadrado. Com esta fusão de referência histórica e material concreto, Negrão relata que seu trabalho possibilitou aos alunos compreender a construção dos métodos mencionados, adicionando contexto aos processos matemáticos aprendidos na escola. Por fim, ele considera seus resultados positivos e ressalta que o uso das *Barras de Napier* auxiliou os alunos na resolução dos exercícios propostos.

Brittes [2] foca seus estudos no método da *Gelosia*, (ou método americano). Similar as *Barras de Napier*, o método da Gelosia utiliza barras com os múltiplos convenientes dos números, unindo uma contextualização histórica a um material concreto. Em sua conclusão ele ressalta alguns resultados positivos da atividade: a queda da rejeição à disciplina de Matemática, uma melhoria no pensamento multiplicativo e um melhor desempenho geral nas atividades que foram realizadas utilizando o método proposto.

Ao revisitar algoritmos para as quatro operações básicas, Moraes [24] analisa e explica os procedimentos e contexto histórico relacionados ao método egípcio, o método da *Galé* (grego) para a divisão, além de compará-los ao Algoritmo de Euclides, método convencional. O objetivo de sua pesquisa consistia em expandir o conhecimento sobre o tema. Suas contribuições são interessantes devido ao nível de detalhamento de suas explicações em relação aos métodos.

Dávila [10] é a autora que apresenta uma maior variedade de métodos alternativos, sendo eles: o algoritmo egípcio, método das costuras, método italiano e o método de *Galeão*. Sua pesquisa, assim como a de Moraes, tinha o objetivo de agregar conhecimento e apresentar opções não convencionais ao ensino.

3.2.4 Jogos e tecnologia

Wappler [51], em sua dissertação, procura estabelecer conexões entre o pensamento computacional e a divisão euclidiana. Em um questionário diagnóstico foi detectado que os estudantes possuíam dificuldades em realizar a operação de divisão devido a falta de domínio da tabuada. Além disso, eles não conheciam o termo ou os pilares do PC (pensamento computacional). A sequência didática de intervenção possuía exercícios que seccionavam o processo de divisão em passos e pedia que os alunos descrevessem o que foi feito em cada etapa. Além disso, foi elaborado um jogo, o semáforo da divisão, para dinamizar o processo. As conclusões do trabalho mostraram uma evolução do conhecimento dos alunos em relação ao PC e na resolução de problemas de divisão euclidiana.

Rodrigues [31], por sua vez, defende o uso do jogo como uma metodologia que estimula o desenvolvimento dos processos psicológicos e interação social, além de proporcionar um maior interesse e motivação por parte dos discentes em relação à aula de Matemática. Para a divisão ele propõe os jogos batalha dos divisores e tabuleiro dos restos. O trabalho se propunha a analisar o incentivo que os jogos podem proporcionar ao ensino de Matemática, além de divulgar possibilidades de jogos disponíveis aos professores.

Sousa [44], por fim, apresenta para a divisão o jogo dos restos e diz que a métrica para analisar a efetividade dos resultados das propostas foi a taxa de aprovação dos alunos, que aumentou no ano em que as atividades foram realizadas.

3.2.5 Resultados importantes

Destacamos nesta subseção algumas considerações apresentadas nos estudos analisados que podem contribuir para este trabalho.

Em geral, as dissertações analisadas oferecem uma visão abrangente sobre diferentes abordagens testadas para o ensino da divisão. Comparando as sugestões apresentadas, podemos ver algumas interseções com os métodos presentes nos livros didáticos. Como os livros analisados são do ano de 2018 e o trabalhos variam suas publicações entre os anos de 2013 e 2022, é possível que o material didático esteja, aos poucos, se atentando para a necessidade de abordagens alternativas. Muitos dos trabalhos direcionam suas intervenções para as turmas de 6° ano, pois é neste nível de ensino que os problemas relacionados à divisão são mais evidentes ao professor. Todavia, devemos nos atentar para o fato de que esse problema atinge todos os níveis de ensino.

As pesquisas de Schirlo [35], Rego [29] e Silva [36] nos fornecem estudos de caso em que as dificuldades percebidas pelos alunos são similares, independente do ano de ensino em que estes se encontram. Além disso, os trabalhos são provenientes de regiões diversas (sul e nordeste), o que nos leva a pensar que o problema da dificuldade em relação ao Algoritmo da Divisão pode não ser local ou proveniente de um sistema de educação de uma região específica. Os comentários sobre erros relacionados à execução do algoritmo enfatizam que a colocação do zero no quociente e a compreensão do sistema decimal e valores posicionais dos algarismos dentro dos números são recorrentes. Apesar destes trabalhos não se proporem a explicar aos alunos os motivos de seus erros, eles apresentam um diagnóstico coerente com nossa observação pessoal.

O trabalho de Dávila admite duas conclusões importantes sobre o ensino do Algoritmo da Divisão e a formação de professores: o algoritmo não é consolidado quando ensinado em um momento em que a criança não internalizou as regras do sistema de numeração decimal e que a formação Matemática do professor polivalente (que leciona nos anos iniciais do fundamental) não é suficiente para que eles dominem o conteúdo que estão ensinando. Este fato é relevante, pois sugere que as dificuldades dos professores podem estar limitando suas capacidades de esclarecer dúvidas e fornecer explicações diversas sobre o conteúdo.

Dentre as opções de materiais concretos, o material dourado e as barras de Napier (ou barras de Cuisenaire) são as sugestões mais frequentes. Estes artifícios não são completamente desconhecidos, caracterizando um fenômeno do resgate de métodos utilizados no Ensino Fundamental I para possibilitar a compreensão da divisão para alunos no Ensino Fundamental II.

O uso de referências históricas acrescenta um contexto positivo e interessante, pois possibilita que o aluno veja a Matemática como uma maneira de resolver um problema real e não um conjunto de procedimentos abstratos sem utilidade. Entretanto, os métodos para a divisão de civilizações antigas, como o método de *Galeão*, egípcio e hinduísta são complexos e demandam uma concentração e organização maiores para a sua compreensão que o próprio Algoritmo da Divisão. A efetividade do ensino destes métodos está na ampliação de possibilidades de realização do cálculo, nas reflexões sobre o funcionamento dos métodos e nas contextualizações envolvidas.

O tabuleiro dos restos (ou trilha dos restos ou jogo dos restos), é uma sugestão frequente, mesmo entre as dissertações nas quais o uso de jogos não é a metodologia que prevalece. Este jogo é também uma sugestão encontrada em um dos livros didáticos analisados, podemos relembrá-lo na Figura 2.16.

As gerações de estudantes atuais cresceram em meio a tecnologia e jogos (normalmente eletrônicos), desta maneira é curioso perceber que há apenas três trabalhos que sugerem, predominantemente, o uso destas estratégias. Parece haver uma oportunidade pouco explorada dentro deste campo. A ideia de concatenar o pensamento computacional e o Algoritmo da Divisão, de Wappler, é interessante pois ambos possuem estruturas lógicas semelhantes. Entretanto, ao optar pelo método desplugado, ou seja, sem o uso de computadores ou recursos tecnológicos semelhantes, perdem-se oportunidades interessantes de ensino e imersão do aluno no ambiente das TICs, já que as gerações de alunos nascidas após o ano de 2010 possivelmente não possuem fluência em tecnologias fora dos ambientes de *smartphones*.

4 O jogo e o concreto na construção do conhecimento

É comum associar o tradicionalismo escolar, no qual o professor transmite o conhecimento através de aulas expositivas e o aluno o absorve sentado em sua carteira, à aula de Matemática. Naturalmente, para estudar Matemática é necessário concentração e silêncio, devido à necessidade de raciocínio exigida pelos conteúdos da disciplina. Entretanto, este método de ensino considera a premissa de que a sala de aula seja homogênea, possua alunos interessados e empenhados. Mesmo neste contexto, ainda é possível questionar sua eficiência

A realidade enfrentada pelo professor, normalmente, são alunos com características opostas às descritas: turmas heterogêneas, estudantes com defasagem escolar e desmotivados. Então, como podemos quebrar o tradicionalismo, sem se desfazer de suas particularidades necessárias para o aprendizado em Matemática? Como ensinar de maneira eficaz e mantendo o interesse dos alunos? Como despertar uma vontade genuína de buscar conhecimento? Neste capítulo, faremos uma breve discussão sobre algumas teorias que guiarão este trabalho.

Contrapondo o que se espera das aulas de Matemática, Piaget, em sua Teoria Construtivista, afirma que o conhecimento é adquirido através da interação entre sujeito e objeto. Desta maneira, apenas a transmissão de conhecimento partindo da fala do professor não é suficiente para que o aluno o adquira.

> A teoria de Piaget é entendida como uma teoria científica que explica os processos de aquisição de conhecimentos, e está baseada na interação do sujeito com o objeto de conhecimento. A teoria psicogenética visa descobrir como se organiza o conhecimento humano ao longo do desenvolvimento cognitivo. (GARCIA [34], 1997, p. 18)

Piaget afirma ainda que o desenvolvimento cognitivo de uma criança se dá por dois processos: assimilação e acomodação. A assimilação ocorre quando o indivíduo incorpora um novo dado ou conhecimento adquirido do meio a sua estrutura cognitiva, e a acomodação é o processo pelo qual ele integra e organiza o novo conhecimento as suas estruturas cognitivas já existentes.

> A assimilação e a acomodação são, portanto, os dois pólos de uma interação que se desenvolve entre o organismo [sujeito] e o meio [objeto], a qual constitui a condição indispensável de todo funcionamento biológico e intelectual. (PIAGET [28], 1979, p. 328)

Para o aprendizado de Matemática, mais especificamente, sabemos que apenas entrar em contato com um novo conceito não é suficiente para aprendê-lo. A assimilação pode ser até instantânea em alguns casos, mas a acomodação, o desenvolvimento da habilidade de resolver exercícios individualmente é algo que requer tempo. É necessário abstrair, praticar e aplicar para que este novo conhecimento seja considerado consolidado.

Considerando a necessidade de interação direta para a construção do conhecimento, tomamos como instrumento de ensino algo que seja atrativo e presente no ambiente social da criança: o jogo. Vygotsky reconhece que o "brinquedo" exerce grande influência no desenvolvimento da criança. Ele defende que, durante uma brincadeira, satisfazer uma regra se torna uma fonte de prazer. Podemos deduzir que esta experiência prazerosa não é uma sensação que ocorre exclusivamente nas crianças, mas também em adolescentes e adultos, já que estes indivíduos têm o costume de se imergir em situações de jogo.

> [...] as maiores aquisições de uma criança são conseguidas no brinquedo, aquisições que no futuro tornar-se-ão seu nível básico de ação real e moralidade. A subordinação estrita às regras é quase impossível na vida; no entanto, torna-se possível no brinquedo. [...] Assim, o brinquedo cria uma zona de desenvolvimento proximal da criança. No brinquedo, a criança sempre se comporta além do comportamento habitual de sua idade, além de seu comportamento diário; no brinquedo é como se ela fosse maior do que é na realidade. Como no foco de uma lente de aumento, o brinquedo contém todas as tendências do desenvolvimento sob forma condensada, sendo, ele mesmo, uma grande fonte de desenvolvimento. (Vygotsky [50], 1991, p. 67)

A Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), mencionada na citação, é o intervalo entre o nível de desenvolvimento real de uma criança, definido pela capacidade de resolver problemas individualmente, e o nível de desenvolvimento potencial, que é determinado pela capacidade de solucionar problemas em colaboração com outro indivíduo. Em outras palavras, a ZDP é a diferença entre o que a criança é capaz de fazer sozinha e o que ela pode fazer se contar com a ajuda de uma pessoa com mais conhecimento que ela, seja esta pessoa o professor ou até mesmo um colega de sala de aula. O aprendizado pode ocorrer então dentro da zona de desenvolvimento proximal, quando a criança ainda não adquiriu certas habilidades ou conhecimentos, mas os desenvolve utilizando seus conhecimentos prévios com o estímulo proporcionado pela colaboração com outros.

Assim, podemos usar o brinquedo ou jogo para situar o aluno na Zona de Desenvolvimento Proximal e explorar o seu potencial educativo. Apesar de não haver uma definição precisa sobre o que é o jogo, o consideraremos nesta dissertação como qualquer atividade definida por regras, que tenha um objetivo e que cause algum sentimento positivo. Logo, além das atividades tradicionalmente chamadas de jogos, podemos considerar como jogo também, por exemplo, os esportes e alguns tipos de brinquedos com propósitos educativos.

Kishimoto [21] considera que, em essência, todos os jogos são educativos e que, em qualquer tipo de jogo, a criança se educa. Em complemento, Grando [13] defende que o aspecto fictício criado pela situação de jogo representa uma evasão da realidade, permitindo que os jogadores atinjam um nível de abstração útil ao desenvolvimento cognitivo. Esta evasão da realidade é um aspecto útil do jogo quando tratamos das aulas de Matemática, que, com alguma regularidade, são marcadas pela aversão e desmotivação.

Quando pensamos nos aspectos positivos mais práticos do uso de jogos como metodologia de ensino, podemos relacioná-lo ao pensamento matemático. Grando [13] afirma que há objetivos cognitivos e afetivos no uso do jogo no ensino de Matemática. Entre os objetivos cognitivos temos: desenvolver a memória e cálculo mental, introduzir os alunos aos procedimentos utilizados em Matemática (tomadas de decisão, definições e regras), aprender a elaborar estratégias diversificadas e a julgar qual é a mais vantajosa, auxiliar na elaboração e compreensão da linguagem Matemática e acumular resultados cognitivos associados aos objetivos educativos do jogo. Os objetivos afetivos incluem motivar os alunos a assumirem uma conduta positiva em relação ao aprendizado, proporcionar uma situação de igualdade onde o aluno não se sinta em desvantagem entre os colegas que já assimilaram um conteúdo que ele ainda não conseguiu e estimular a autoconfiança.

O jogo, seja ele analógico ou digital, costuma ser associado a uma sensação agradável, positiva e à expectativa de diversão. Desconsiderando a defasagem de conteúdo e o aspecto cognitivo, Csikszentmihalyi [6] argumenta que o problema do ensino possivelmente é afetivo, emocional, motivacional e não intelectual. De fato, quando estamos em sala de aula, percebemos que os discentes estão frequentemente envolvidos em alguma atividade não relacionada ao ensino formal. Sejam os celulares, redes sociais, brincadeiras, desenhos ou até mesmo as conversas sobre o dia a dia, tudo parece ser mais interessante e engajador do que o professor a sua frente.

Considerando então os estudos de Vygotsky, Piaget, Grando e Kishimoto, queremos então explorar o potencial do jogo de maneira a contribuir para o ensino do Algoritmo da

Divisão, que vêm sendo, em nossa experiência, uma fonte de frustração para os alunos. Mas, como traduzir um tema tão técnico em uma atividade engajadora? Para construí-la, recorreremos ao estudo da gamificação.

A gamificação é a aplicação de mecânicas e técnicas presentes nos jogos em situações de não jogo, com o objetivo de estimular engajamento. Uma das causas do sucesso dos jogos em manter seus jogadores por horas engajados em apenas uma atividade consiste, de acordo com Csikszentmihalyi [6], no estado de *Flow*. De acordo com o psicólogo a experiência do *Flow* é o que você sente quando está fazendo algo tão agradável que você deseja continuar realizando a atividade por conta própria.

> Atingir o *Flow* – ou estar "na zona" – indica o estado de um jogador entre ansiedade e tédio, encontrando seu próprio nível motivacional nessa experiência. (ZICHERMANN E CUNNINGHAM [52], 2011, p.16)

No estado de *Flow*, a realização de uma certa tarefa não é percebida como uma obrigação, de maneira que não é necessário realizar um esforço desagradável para completá-la. Assim, as motivações para cumprir a atividade se desenvolvem naturalmente no sujeito, fazendo com que ele entre em um estado de profundo envolvimento.

Segundo Csikszentmihalyi [6], para atingir o *Flow*, é necessário que os desafios propostos sejam realizáveis, de acordo com as capacidades do sujeito. Caso a dificuldade seja desproporcional às competências do indivíduo, cria-se um estado de ansiedade e, caso contrário, a condição predominante é o tédio. Para mantê-lo é necessário estar sempre renovando o engajamento emocional do sujeito em relação a atividade por meio de novos desafios, com níveis de dificuldade progressivos e *feedbacks* imediatos.

O Algoritmo da Divisão é comumente apresentado no 6° ano de maneira abstrata e muitas vezes é tratado como uma habilidade já adquirida. Neste trabalho iremos propor atividades e jogos baseadas na Teoria Construtivista, procurando promover a interação do aluno com o objeto de conhecimento e imergindo-o em situações nas quais o aprendizado será estimulado através da Zona de Desenvolvimento Proximal. Aplicando os conceitos da gamificação, tentaremos nos aproveitar do estado de *Flow* para expor o aluno de maneira agradável ao conteúdo que ele necessita aprender e fazer com que ele mesmo desenvolva os conceitos necessários para seu aprendizado.

O jogo e a atividade com material concreto apresentados como produto deste trabalho têm o objetivo inicial de transformar o abstrato em concreto, através de um jogo com baralho e de uma atividade que usará o material dourado e dinheiro. Em especial, o jogo que criamos se apresenta em diferentes níveis, sendo o primeiro deles abrangendo apenas números naturais, para que a assimilação e a acomodação em relação as suas regras ocorram sem grandes dificuldades. Nos níveis posteriores, o grau de dificuldade é aumentado, com o objetivo de manter o estado de *Flow*. Mais detalhes serão apresentados posteriormente no Capítulo 6, intitulado Atividades e Jogos.

5 Atividade diagnóstica

Em nossa experiência docente lecionando no ensino público, observamos que a dificuldade dos alunos em relação à operação de divisão prejudica o desenvolvimento e aprendizado de conteúdos subsequentes de Matemática. Para concretizar e guiar os primeiros passos da proposta deste trabalho, foi feita uma avaliação diagnóstica. O documento, na íntegra, pode ser encontrado no Apêndice 8.

A avaliação diagnóstica é uma ferramenta utilizada pelo professor para a verificação do aprendizado dos prerrequisitos necessários para a construção do conhecimento de um novo conteúdo. Sendo assim, o objetivo da avaliação aplicada é investigar o nível de compreensão dos alunos em relação à operação de divisão. Mais especificamente, analisaremos alguns aspectos do aprendizado relacionado às habilidades EF04MA07, EF04MA13, EF05MA08 e EF06MA03, citadas na Tabela 2.1.

> Avaliar significa que se utilizará alguma forma de coletar dados – que não precisa ser necessariamente escrita – acerca do que o estudante está pensando, refletindo, analisando sobre determinado tema do conteúdo, para que se consiga perceber quanto ele aprendeu o grau de profundidade e de apropriação do conteúdo atingido. O padrão de qualidade a ser alcançado é uma expectativa, mediada pelas necessidades do curso, da sociedade, da qualidade desses conteúdos ao cotidiano do estudante, e não uma arbitrariedade de objetivos da disciplina. (TAVANO [46], 2021, p. 38)

Há inúmeros motivos que podem causar a defasagem de aprendizado, como a vulnerabilidade social, indisciplina em vários aspectos da vida do aluno, falta de motivação para os estudos, dentre outros. Não é objetivo deste trabalho discutir sobre estes fatores, porém é importante reconhecer sua existência e influência no processo de aprendizado dentro do ambiente escolar.

Neste capítulo faremos um relatório diagnóstico de cinco turmas de uma escola pública situada na região periférica de Ribeirão das Neves, no Estado de Minas Gerais, em três níveis de ensino diferentes. A saber, serão duas turmas de 6° ano, com 34 e 30 alunos, duas turmas de 9° ano com 34 e 20 alunos. E, por fim, uma turma de 1° ano do ensino médio com 23 alunos. As turmas apresentam discentes com perfis e situações de vida bastante heterogêneos.

Nos 6° anos há cerca de sete alunos ainda em processo de alfabetização. Para estes, há um professor de apoio dentro de sala que os auxilia na leitura de atividades e paralelamente trabalha a alfabetização e escrita em letra cursiva. Em geral, nas turmas deste nível os alunos sempre relatam dificuldades em relação às operações básicas e já apresentam sinais de aversão à Matemática, como relatar que não vão conseguir aprender a matéria, antes mesmo de tentar.

Os alunos dos 9° anos, que tiveram a experiência do 7° e 8° ano no ensino remoto, em maioria, apresentam defasagem em todos os conteúdos destes anos e nas operações básicas. Na turma que possui menos alunos, há uma situação de indisciplina generalizada. Possivelmente uma das consequências deste cenário, seja tanto a dificuldade dos professores de lecionar, quanto a dos alunos de compreender o conteúdo. Nesta turma é também onde se encontram os alunos com uma situação de vulnerabilidade social maior e que apresentam maior desinteresse nas aulas. Na outra turma, mesmo com a quantidade significativamente maior de alunos em sala, há um melhor desempenho, um menor índice de indisciplina e ainda um notável interesse pelas aulas de Matemática. É importante mencionar que, nesta turma, há uma aluna autista no 9° ano, que é acompanhada individualmente por um professor auxiliar.

No 1° ano, apesar do desafeto à Matemática ainda se mostrar presente, os alunos possuem um maior domínio do conteúdo, possivelmente por terem passado pelo ensino remoto, durante a pandemia de COVID-19, em anos onde a base do currículo matemático já estava consolidada. O perfil da turma é indisciplinado e o fato de haver apenas três aulas de Matemática por semana têm dificultado o desenvolvimento do conteúdo.

Desta maneira, aplicamos uma avaliação diagnóstica para verificar o nível de compreensão dos discentes em relação ao Algoritmo da Divisão. Os resultados desta atividade, inicialmente, seriam utilizados para a elaboração de uma aula de revisão que relembraria os processos nos quais os alunos apresentam dificuldade. Posteriormente foi apresentado um termo de consentimento e anuência, que pode ser visto em 8.5, para que pudéssemos utilizar os resultados desta atividade para esta análise.

A avaliação diagnóstica foi dividida em seis atividades que abrangiam conhecimentos considerados básicos para uma boa compreensão da divisão e seu algoritmo. O teste foi aplicado nas turmas descritas acima durante as aulas de Matemática. Foi oferecida uma recompensa em forma de pontuação na disciplina de Matemática para que eles fizessem a atividade, enfatizando que o erro não seria penalizado e a tentativa seria pontuada com nota máxima. Os resultados do teste e objetivos de cada exercício, bem como uma descrição do processo de aplicação da atividade, serão abordados neste capítulo. Além disso, observamos os erros cometidos pelos alunos e suas possíveis causas, sem revelar os motivos inerentes aos problemas, de maneira a propor uma explicação adequada para cada um deles.

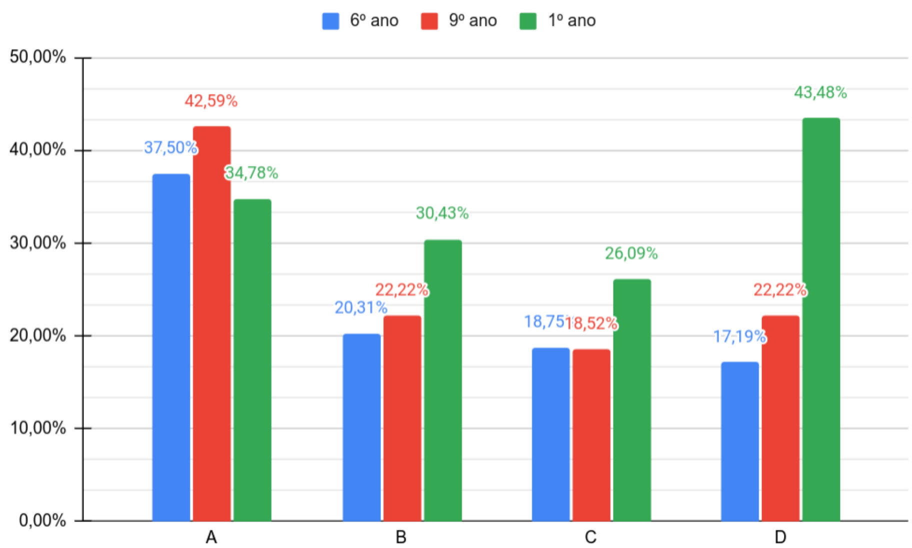
5.1 Atividade 1: o valor posicional dos números

A primeira atividade tem o objetivo de verificar a fluência dos estudantes em relação à decomposição numérica e valores posicionais dos números. Durante o processo de divisão, por vezes, é necessário realizar uma transformação de unidades. Este tópico gera dúvidas e causa erros durante o algoritmo, e sua compreensão é essencial para justificar a colocação de zeros e da vírgula no quociente. O enunciado da atividade é descrito a seguir.

Atividade 1: Dado o número 48 290, responda:
a) qual algarismo representa quantas centenas este número possui?
b) qual o valor posicional do número 9?
c) quantas unidades de milhar este número possui?
d) decomponha este número adicionando o valor posicional de cada algarismo.

Em quase todas as turmas, o item "a" apresentou um maior percentual de acertos, sendo que em geral os erros neste item são dos alunos que não o responderam. O desempenho cai nos itens seguintes, sendo que os itens "c" e "d" foram os que apresentaram um maior volume de erros. Os dados podem ser vistos no gráfico da Figura 5.1.

Figura 5.1: Atividade 1 – Percentual de acertos/item e ano de escolaridade



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Para o item "b", um erro muito comum foi a resposta "dezena", que indica que o aluno possivelmente entende que o 9 está localizado na casa das dezenas, mas talvez não associe que seu valor posicional é 9 dezenas, ou seja, 90. Para o item "c", duas respostas foram consideradas corretas, 8 ou 48. Os alunos que respondem 8, associam a pergunta ao quadro posicional, onde o 8 se encontra na casa das unidades de milhar. O aluno que responde 48 aparentemente dissocia o conceito de valor posicional do quadro posicional, compreendendo as transformações de unidades que podem ser necessárias no processo de divisão. Por fim, no item "d", muitos alunos desenharam o quadro posicional de maneira a conseguir identificar o valor posicional dos números para decompô-los.

As perguntas "O que é algarismo?", "O que é decomposição?", "O que é centena?", "É pra fazer o D - C - U (quadro posicional com dezena, centena e unidade)?", "O que é valor posicional?", feitas pelos alunos durante o exercício, nos levam a pensar alguns dos impasses enfrentados podem ser o vocabulário matemático e a insegurança em relação aos próprios conhecimentos. Em algumas das atividades das turmas de 9° ano foi observado que no item "d" alguns alunos tentaram decompor o número em fatores primos. Esta confusão causada pela palavra "decompor" pode ter ocorrido devido a memória recente dos alunos sobre o conteúdo estudado há menos tempo, o que pode revelar novamente um problema no vocabulário e na interpretação do contexto do exercício. O fenômeno foi observado no 9° ano devido ao conteúdo de simplificação de raízes, durante o qual os alunos têm contato com a palavra decomposição.

Além disso, identificamos também o que parece ser um problema de leitura e interpretação de texto. Em torno de 9% dos alunos parece não ter percebido que esta atividade necessitava de quatro respostas individuais, tratando-a como se fosse uma atividade de múltipla escolha e oferecendo como resposta a marcação de um dos itens. Não é possível excluir que o problema possa ser também o engajamento em relação a atividade. Devido ao fato de que o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) é a maneira de ingresso no Ensino Superior, nos últimos anos as escolas vêm adotando um modelo de avaliação fechado (ou seja, de múltipla escolha) para preparar os alunos. Entretanto, este modelo, em nossa percepção, é prejudicial a alunos do Ensino Fundamental, que ainda não possuem a interpretação de texto e habilidade de escrita bem consolidados, além disso, para a disciplina de Matemática em especial, ele não permite ao professor avaliar onde estão as dificuldades dos alunos, já que normalmente a resolução dos exercícios não é cobrada neste modelo.

Em relação aos erros desta atividade ressaltamos que a decomposição numérica é ensinada nos anos iniciais Ensino Fundamental com o objetivo de fazer com que o aluno compreenda a ordenação dos números e realize operações com eles. Apesar do conteúdo ser reforçado durante o ensino do sistema de numeração decimal, no 6° ano, seu potencial parece ser subestimado pelos professores. As dúvidas sobre a palavra algarismo são aceitáveis em alunos do 9° ano e 1° ano do Ensino Médio, pois durante as aulas de Matemática é mais comum que o professor use a palavra "número" ao invés de algarismo. Esta troca não é incorreta, pois quando estamos nos referindo a algum dos dez símbolos básicos do sistema decimal as duas palavras têm o mesmo significado. Entretanto a prática faz com que a palavra algarismo seja esquecida com o avançar dos anos escolares. Para o sexto ano, como a decomposição numérica deveria ser algo ensinado recentemente, os erros podem indicar que o conteúdo não foi ministrado ou não consolidado pelos alunos ou ainda está em fase de acomodação.

Estas dificuldades podem ser enfrentadas explicando novamente aos alunos conceitos que eles conhecem internamente, porém se sentem inseguros em aplicar. Inicialmente, devemos ressaltar que quando falamos a palavra "algarismo", nos referimos a um dos dez símbolos ou dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9) que são combinados para representar os números. E, quando falamos "número", estamos nos referindo ao valor representado pela reunião de uma certa quantidade de algarismos. Por exemplo, "48290" é um número, 4, 8, 2, 9 e 0 são os algarismos que o formam. Sabemos que alguns conceitos matemáticos podem ser desconhecidos, porém a interpretação de seus nomes pode nos dar pistas sobre seu significado. Se atentar à composição e sentido individual das palavras pode ser útil em certas situações. Ao realizar uma discussão sobre o significado da palavra "valor" e a palavra "posição", da qual posicional é derivada, os alunos podem descobrir o significado da expressão "valor posicional" com a ajuda desta interferência e sem a necessidade de uma explicação formal.

A decomposição numérica, tema de maior importância na Atividade 1, deve ser esclarecida utilizando o quadro posicional. O quadro é uma organização das ordens e classes (posições e valores) dos algarismos que formam o número. A Figura 5.2 mostra como o número pode ser decomposto dentro do quadro.

Apesar do quadro conter algumas informações que não são tão necessárias para nossos objetivos, ele fornece uma explicação completa para todas as perguntas deste item.

5.2 Atividade 2: os problemas de partição e medição

Os problemas de divisão são categorizados em dois tipos: os de partição e os de medição. O primeiro é associado à ideia de repartir igualmente, onde temos o valor de um todo e em quantas partes queremos dividi-lo para encontrar o valor que cada parte

Figura 5.2: Decompondo 49280 dentro do quadro posicional.

Classe	Classe das unidades de milhar		Classe das unidades simples		
	DEZENAS DE MILHAR	UNIDADES DE MILHAR	CENTENAS	DEZENAS	UNIDADES
Algarismos	4	8	2	9	0
Ordem	5ª	4ª	3ª	2ª	1ª
Valor posicional	40 000	8 000	200	90	0
Decomposição	40 000 + 8 000 + 200 + 90 + 0 = 48290				

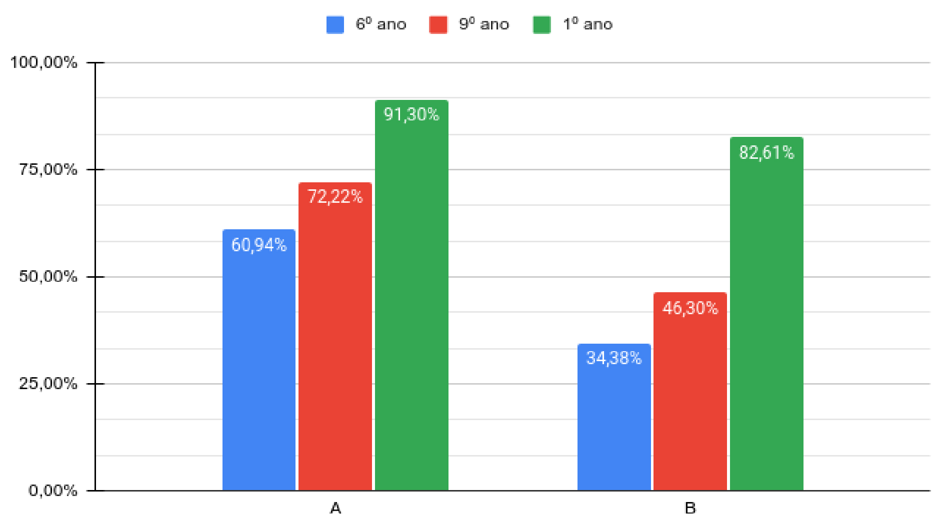
Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

receberá. O segundo se relaciona à ideia de quotas, onde sabemos o valor a ser dividido e a quantidade que cada parte receberá, encontrando como resultado da divisão a quantidade de partes envolvidas. O objetivo da atividade era verificar a compreensão destas ideias que podem surgir como questões motivadoras e de aplicação para o processo de divisão numérica.

> Atividade 2:
>
> a) Júlia comprou um conjunto com 27 canetas. Ela irá reparti-las igualmente entre suas filhas Ana, Raíssa e Caroline. Quantas canetas cada uma das três irmãs receberá?
>
> b) Danilo comprou um pacote com 47 bombons para colocar exatamente 3 deles em cada kit de lembrancinha do aniversário do filho. Qual o maior número de lembrancinhas que ele poderá montar?

O item "a" apresentou altos índices de acerto, como podemos ver no Gráfico 5.3.

Figura 5.3: Atividade 2 – Percentual de acertos por ano de escolaridade



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Como foi solicitado aos alunos que oferecessem uma justificativa para todas as respostas encontradas, nas turmas de 9° e 1° anos, muitos alunos "armaram" a operação de divisão e realizaram os cálculos. É interessante perceber que, em nenhum momento, foi especificado "o que seria" considerado como justificativa, porém uma quantidade expressiva dos alunos sentiu a necessidade de escrever a operação com todos os detalhes.

Alguns alunos se justificaram utilizando a multiplicação como operação inversa, o que acreditamos ter sido o raciocínio utilizado para chegar na resposta mesmo para aqueles que escreveram a operação com detalhes. Algumas atividades foram devolvidas sem justificativa, porém esta ocorrência não é considerada um erro, visto que o resultado deste item não necessita de cálculos expressos para ser encontrado quando o aluno tem domínio da tabuada e faz o cálculo mental.

Nos 6° anos há uma diversidade maior de métodos de cálculo. Percebemos, em aproximadamente 42% das atividades, o uso de métodos primitivos para auxiliar a resolução dos dois itens da atividade. Muitos alunos resolveram o exercício fazendo o uso de desenhos como palitinhos, bolinhas e caixinhas. Os métodos das subtrações sucessivas, das aproximações e o uso da multiplicação como inverso da divisão também se mostraram presentes nas resoluções, porém em menor proporção.

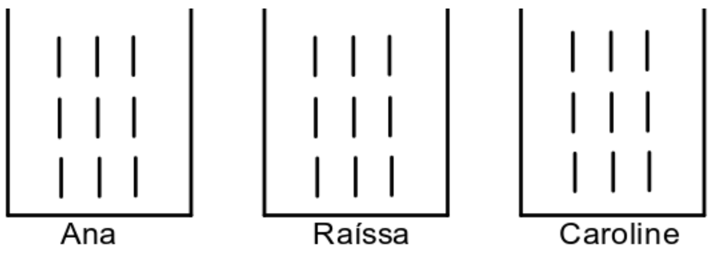
A taxa de respostas usando métodos primitivos no 9° e 1° ano é cerca de 23%. Percebemos que normalmente estas estratégias são utilizadas quando o aluno não consegue desenvolver o algoritmo, visto que em muitas atividades foram observadas ambas as tentativas.

Para o item "b" o índice de acertos caiu, porém o padrão de resolução permaneceu o mesmo, ou seja, o método utilizado para responder ao item "a" costumou ser o mesmo para o item "b". Nos casos em que métodos primitivos foram usados, podemos notar em algumas atividades que o aluno começou a perceber que à medida em que o número a ser dividido aumenta, mais ineficaz se torna a sua tática de resolução.

Observamos que, para os alunos, em geral, compreender as ideias associadas à divisão parece estar dissociado da compreensão do algoritmo, principalmente em alunos do 6° ano. Apesar de que nem todos os alunos que responderam a esta atividade tenham encontrado respostas corretas, seja por erros de cálculo ou falta de atenção, podemos inferir que uma boa parte compreende, em algum nível, as ideias relacionadas à divisão.

Para aqueles que não entendem, devido aos números serem pequenos, talvez seja pertinente utilizar métodos primitivos para a resolução do problema, já que nossa intenção aqui é apenas a compreensão do problema e associação dele a operação de divisão. Para o item "a", podemos desenhar três caixas e ir adicionando um risco (representado a caneta) uma a uma, até que tenham sido desenhados 27 riscos. A quantidade de riscos dentro de cada caixa é o resultado da divisão. Na Figura 5.4 ilustramos a sugestão.

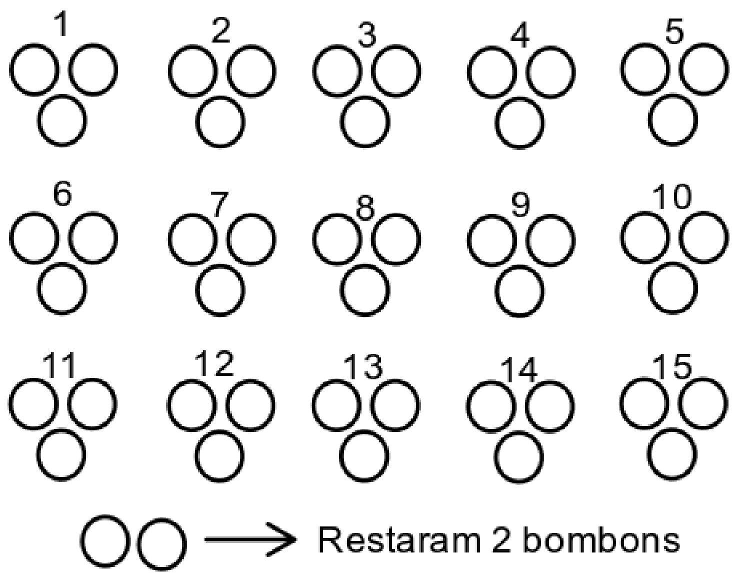
Figura 5.4: $27 \div 3$ utilizando o método dos desenhos



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Para o item "b" podemos dispor do mesmo recurso, agora desenhando grupinhos de três bolinhas para representar cada lembrancinha e repetindo o procedimento até que sejam totalizados 47 bombons. Na Figura 5.5 apresentamos uma maneira de realizar os desenhos. Depois, basta contar quantos grupos de três bombons foram desenhados. Assim, pelo desenho, é simples entender que 47 bombons são necessários para fazer 7 lembrancinhas e restam 2 bombons.

Figura 5.5: $47 \div 3$ utilizando o método dos desenhos



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

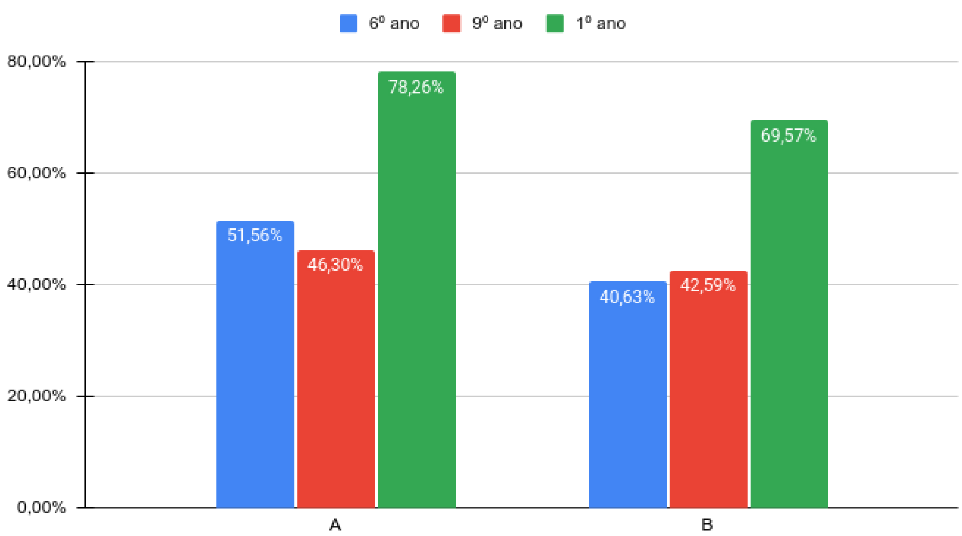
5.3 Atividade 3: a multiplicação como operação inversa da divisão

Esta atividade tem o intuito de verificar se os alunos percebem a multiplicação como operação inversa da divisão, o que também está incorporado no Algoritmo da Divisão. Quando efetuamos o algoritmo, precisamos realizar multiplicações. Este processo, por vezes, é automatizado, principalmente quando o divisor é um número de um algarismo e o aluno possui domínio da tabuada. Portanto, selecionamos operações de divisão em que, usualmente, a aplicação do algoritmo passa por algumas multiplicações não internalizadas.

Atividade 3: Encontre o quociente das divisões:
a) $60 \div 12 =$
b) $126 \div 21 =$

Uma pergunta recorrente durante a aplicação da atividade foi "O que é quociente?", o que nos indica novamente um problema em relação ao vocabulário matemático. Para este caso, foi esclarecido às turmas, após a mesma pergunta ser feita exaustivamente, que o quociente se tratava do resultado da divisão. Quando o esclarecimento foi feito, muitos alunos já tinham respondido à questão, o que nos leva a ponderar novamente sobre a as dificuldades de interpretação e, até mesmo, raciocínio lógico, dos alunos. Apesar de terem resolvido a atividade, muitos não haviam inferido que o quociente se tratava exatamente da resposta encontrada.

Figura 5.6: Atividade 3 – Percentual de acertos/item e ano de escolaridade



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

O percentual de acertos no item “a” tende a ser maior que o do item “b”, conforme o Gráfico 5.6, porém observamos que a variação é pequena. Como esperado, alguns alunos realizaram várias multiplicações com os divisores para encontrar o valor do dividendo. Nestes casos, tanto as multiplicações feitas com o algoritmo (de maneira usual) quanto aquelas que utilizam outros métodos foram registrados no campo destinado as respostas. Alguns alunos utilizaram ainda adições sucessivas do divisor para chegar a resposta. É esperado que, se o aluno resolve o item “a”, ele possui o conhecimento necessário para resolver o item “b”, já que a variação entre eles é apenas a quantidade de ordem dos dividendos. Porém, notamos uma certa rejeição ao exercício quando os números começam a sair da ordem das dezenas. Alguns discentes relataram que possuem dificuldade em resolver divisões com “números grandes”.

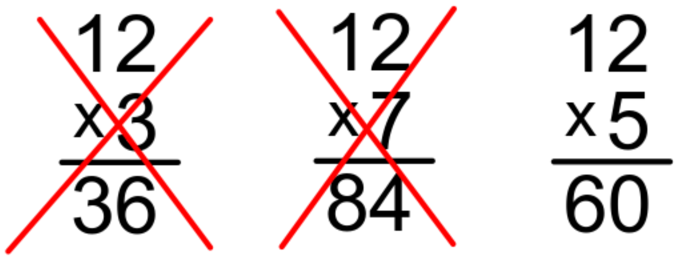
Seguindo a tendência da Atividade 2, alguns alunos insistiram no uso de métodos primitivos. Entretanto, ao perceber que seria um processo muito trabalhoso, alguns não completaram o cálculo. Cerca de 14% dos alunos do 6° ano insistiram nestas abordagens para a resolução da questão, enquanto que o percentual no 9° ano é 12% e nenhum no 1° ano.

A compreensão da multiplicação como operação inversa da divisão ainda parece ser um conceito pouco explorado, considerando as atividades analisadas. Detectamos curiosamente, que no 9° ano, os alunos apresentaram mais dificuldades de compreensão deste conceito, possivelmente por terem cursado o 7° e 8° ano no modelo remoto durante a pandemia do coronavírus e podem não ter conseguido assimilar o conhecimento.

Para a solução rápida desta atividade é necessário que o aluno tenha consolidado a ideia de que a divisão é o inverso da multiplicação. Os métodos primitivos, apesar de levarem à resposta correta, vão se tornando cada vez mais inviáveis com o crescer dos números. Neste caso, o procedimento mais provável é multiplicar o divisor por diversos números, até que se encontre o dividendo. Entretanto, o processo deve ser otimizado. Devemos exemplificar ao aluno que, quando multiplicamos o número 12, por exemplo, por um número qualquer x, o resultado terminará com o último algarismo do produto entre 2 e o último algarismo de x.

Desta maneira, devemos perguntar ao aluno: “Se o resultado que queremos obter termina em zero, por qual número devemos multiplicar o 2 para garantir isto?”. Após alguma reflexão, espera-se que os alunos percebam que é mais prudente testar multiplicações com números que terminam em 0 ou 5. Na Figura 5.7 colocamos um exemplo de como o esclarecimento pode ser conduzido.

Figura 5.7: Por quanto devemos multiplicar 12 para encontrar um número terminado em zero?



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

5.4 Atividade 4: o problema do zero intercalado no quociente

Como já apontado em algumas dissertações analisadas no Capítulo 4, a etapa de colocação do zero no quociente da divisão é a causadora de muitas incertezas e dúvidas durante a realização do Algoritmo da Divisão. As questões elaboradas têm o objetivo de verificar como os alunos percebem esta característica durante o processo de divisão.

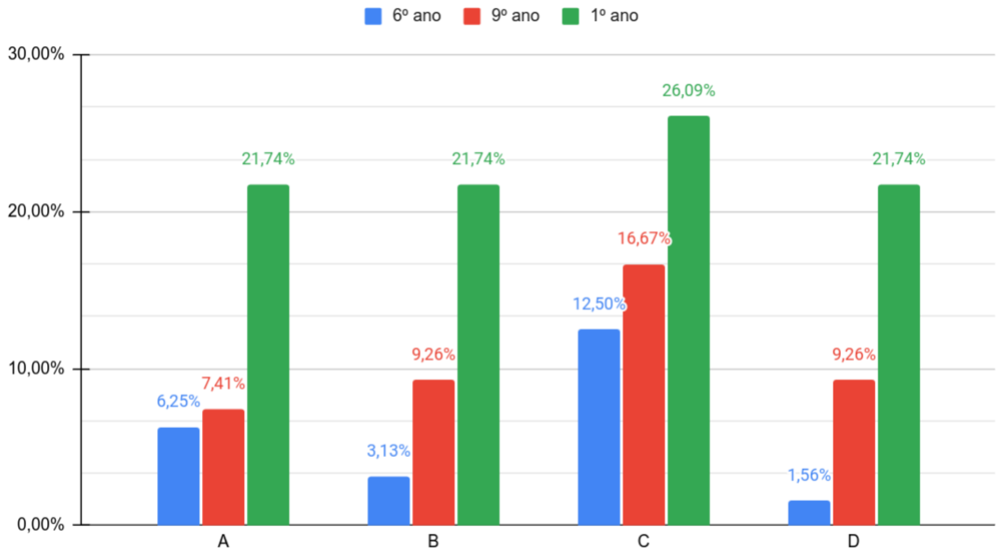
Atividade 4: Encontre o quociente das divisões.
a) $1414 \div 14 =$
b) $1417 \div 13 =$
c) $5105 \div 5 =$
d) $13026 \div 13 =$

O item "a", convenientemente escolhido como título deste trabalho, se disfarça como uma divisão simples, cujo quociente percebido pela maioria dos alunos que o erraram foi 11. No gráfico da Figura 5.8, podemos perceber que o índice de acertos para este item é baixo, se comparado às questões anteriores.

Ao encontrar no quociente 11 ao invés de 101, que é a resposta correta, interpretamos que o aluno possui algum conhecimento do algoritmo, porém ele ainda não compreende como se dá a colocação do zero no quociente. Ou seja, ele não associou concretamente o processo da divisão fazendo bom uso das transformações entre unidades e da multiplicação como operação inversa.

Durante a aplicação da atividade, um aluno, após encontrar 11 como resposta, comenta que esperava um resultado muito maior para o quociente, comprovando que, apesar de supostamente compreender o algoritmo e conseguir até mesmo fazer inferências

Figura 5.8: Atividade 4 – Percentual de acertos/item e ano de escolaridade



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

sobre o resultado encontrado, ele não consegue justificar o porquê de seu erro. Há algumas ocorrências de alunos que realizam a divisão, encontram o quociente incorreto, e realizam a multiplicação para conferir seu resultado. Percebemos que estes parecem notar que há algo errado no processo, porém ao manterem a resposta incorreta demonstram que não conhecem outra maneira de resolver o problema ou que julgam que podem ter realizado a multiplicação de forma incorreta.

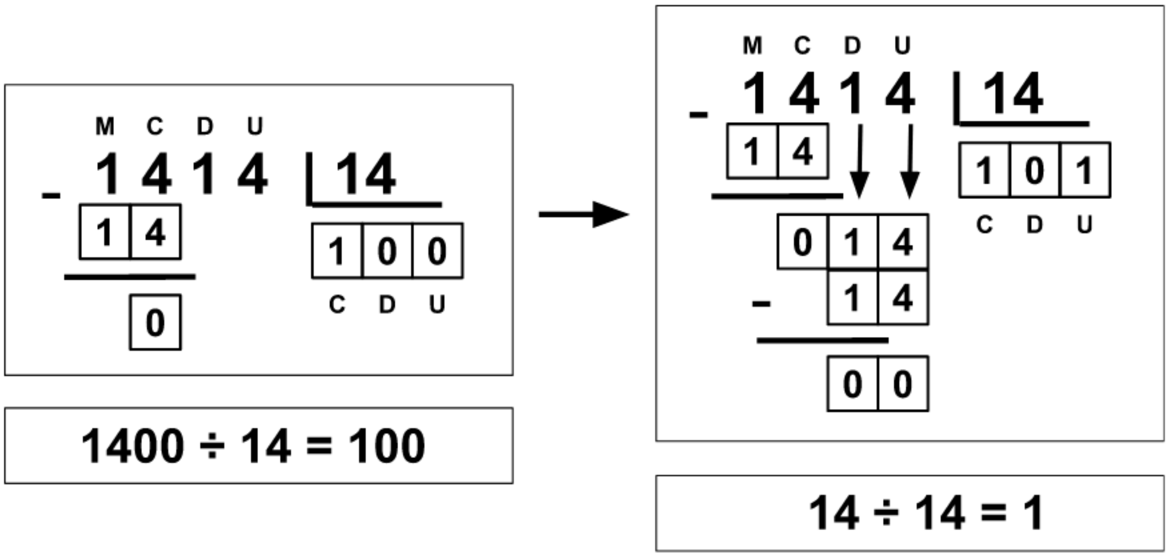
Os índices de acertos nos itens seguintes variam, porém ainda seguem baixos, sendo que o item "c" apresentou um maior percentual de acertos quando comparado aos outros. A causa deste fenômeno não é muito evidente, apesar de julgarmos que a falta de zeros no dividendo possa ser um fator que contribuiu para o resultado.

Em geral, os erros observados nas atividades respondidas foram o que se esperava: a ausência do zero no quociente. Há poucos casos em que a divisão foi feita completamente incorreta. Percebemos ainda que a taxa de acertos para os alunos do 1° ano é quase constante, levando a supor que o fato dessas turmas terem realizado os anos iniciais do Ensino Fundamental II de forma presencial possa ter contribuído para uma melhor consolidação deste conhecimento.

As divisões deste exercício são o que chamaremos de "divisões problemáticas", pois resultam em um quociente com o zero intercalado a outros algarismos. Desta maneira, quando estamos esclarecendo este tipo de divisão, escrever a ordem acima dos algarismos e relembrar qual o valor posicional de cada um deles pode ajudar a sanar algumas dúvidas. No caso do item "a", que perguntava o quociente de $1414 \div 14$, quando armamos a operação no dispositivo prático do algoritmo, o primeiro cálculo a ser realizado é $1400 \div 14$, que resulta em 100, porém quando o aluno não conhece as ordens e classes de cada algarismo dos números, ele acredita estar realizando $14 \div 14$.

A divisão seguinte é $10 \div 14$, entretanto, como o dividendo é menor que o divisor, temos que unir a dezena com as unidades restantes, obtendo $14 \div 14 = 1$. Na Figura 5.9 temos um exemplo de como realizar a explicação. O fato de escrevermos 100 no quociente inicialmente nos ajuda a compreender o zero intercalado entre os dois algarismos 1.

Figura 5.9: Explicando por que $1414 \div 14$ não é 11.

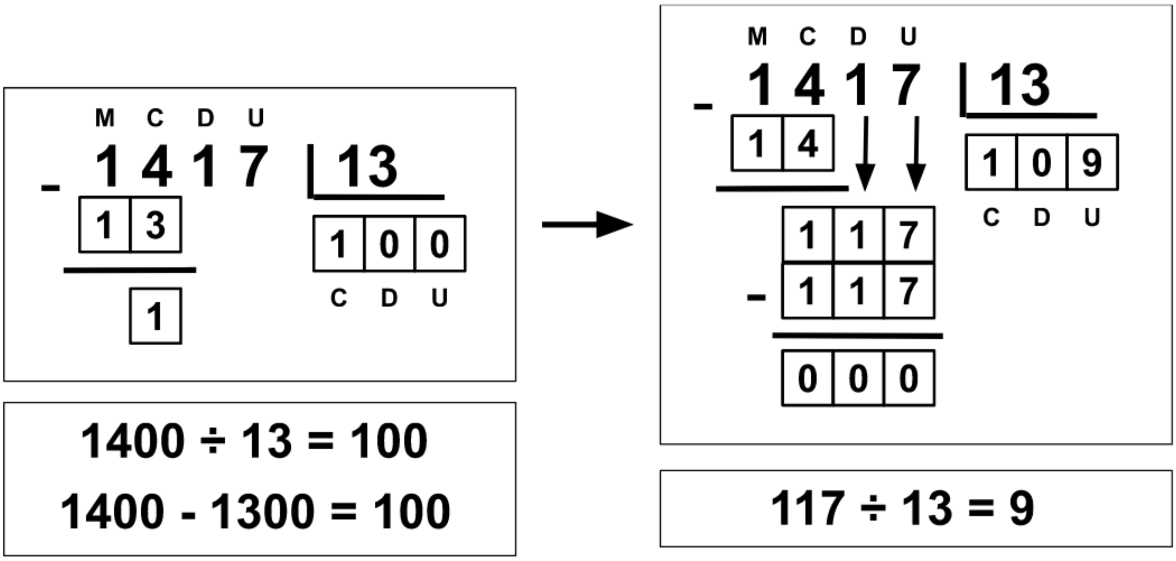


Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

A explicação do item "b" é análoga ao item "a", inicialmente fazemos $1400 \div 13$ que resulta também em 100, porém resta uma centena, pois $1400 - 1300 = 100$. Ao unirmos esta centena com as 10 unidades restantes, dentro do dispositivo prático, observamos que não é possível dividir 11 por 13. Assim, devemos juntar as 7 unidades restantes, obtendo 117. Ao fazermos $117 \div 13 = 9$ encontramos nosso quociente, como mostrado na Figura 5.10. É válido observar que, ao unirmos a centena restante (encontrada quando fazemos $1400 - 1300 = 100$), com a dezena, obtemos 110. É possível fazer $110 \div 13 = 8$ e restam $110 - 104 = 6$ unidades que, ao serem somadas às 7 unidades restantes, somam 13. Assim, $13 \div 13 = 1$ e o quociente se torna $100 + 8 + 1 = 109$, porém só é possível realizar este raciocínio fora do dispositivo prático.

Podemos seguir o mesmo modelo também para o item "c". No dispositivo prático, quando fazemos $5 \div 5$, estamos na verdade dividindo 5000 por 5 e encontrando 1000 como resultado. Quando vamos dividir a centena, no dispositivo prático, unimos-a com zero dezenas, criando a ilusão de que, anteriormente não podíamos dividir 1 por 5, mas agora como temos 10 a divisão é possível.

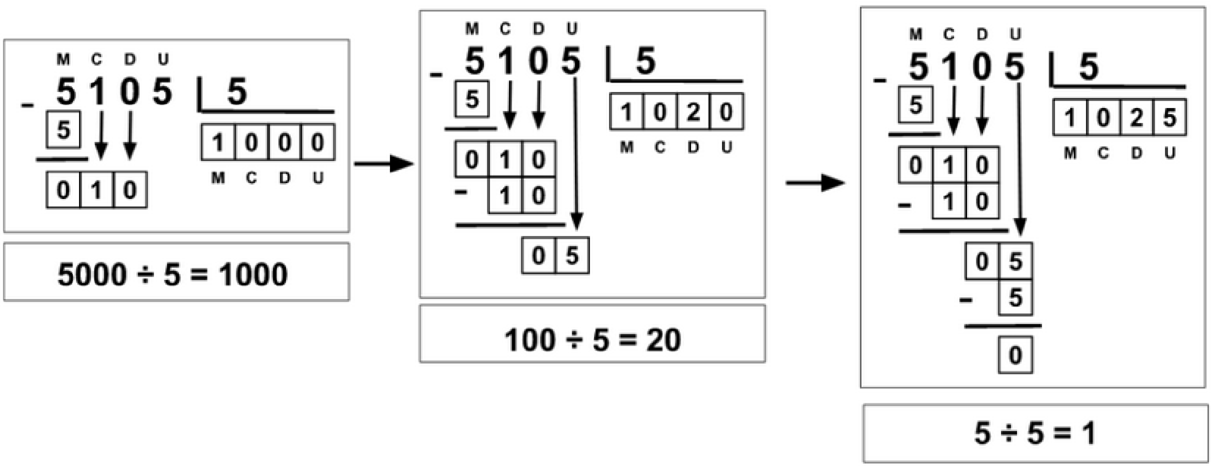
Figura 5.10: Explicando por que $1417 \div 13$ não é 19.



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Mas, com as ordens dos algarismos escritas acima, percebemos que esta união não faz diferença alguma. Desde o começo, já era possível realizar a divisão. Assim, $100 \div 5 = 20$. Como encontramos 20 dezenas, o 2 é o terceiro algarismo do número no quociente e não o segundo. Caso contrário estaríamos dizendo que $100 \div 5 = 200$. Por fim, restam 5 unidades, que quando divididas por 5, resultam em quociente 1. O esclarecimento pode ser visto na Figura 5.11.

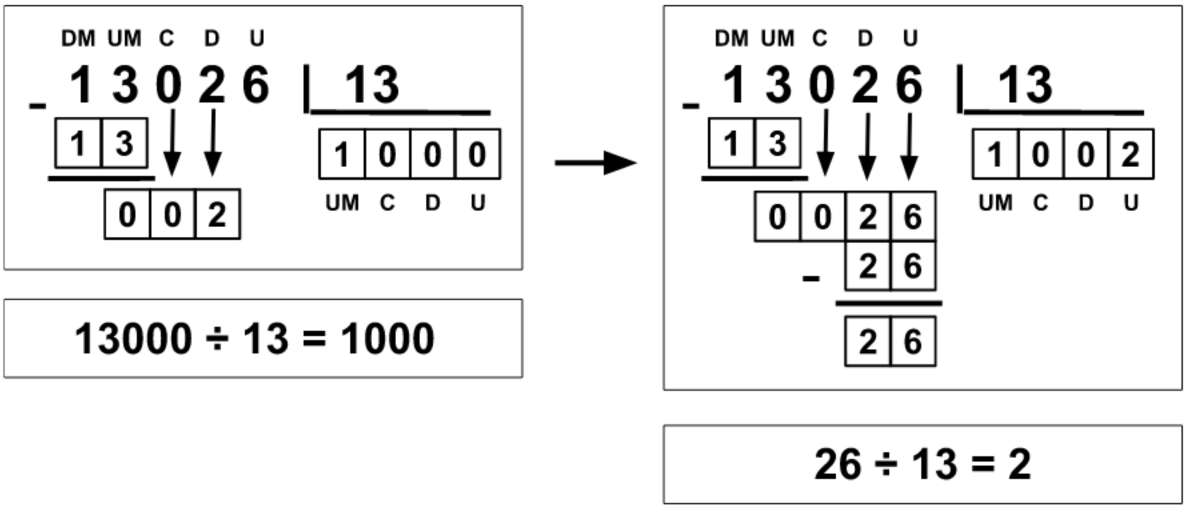
Figura 5.11: Explicando por que $5105 \div 5$ não é 125.



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Por mais que o item “d” pareça mais complexo, aplicando o raciocínio feito nos exercícios anteriores, acreditamos que ele se torna mais simples que os próprios. Iniciamos realizando $13000 \div 13 = 1000$, que dentro do dispositivo prático se mascara como $13 \div 13$. Para o próximo passo, realizamos a divisão de 0 centenas por 13, que resulta em 0 centenas, fazendo com que um zero apareça no quociente. As 2 dezenas não podem ser divididas por 13 dentro do dispositivo prático. Vale lembrar que, fora dele, é perfeitamente possível fazer $20 \div 13 = 1$ e restam 7 unidades. Ao unirmos 2 dezenas com 6 unidades, obtemos 26 e $26 \div 13 = 2$ unidades, portanto devemos colocar um zero na ordem das dezenas e 2 nas unidades. Formamos assim o quociente 1002, como mostrado na Figura 5.12.

Figura 5.12: Explicando por que $13026 \div 13$ não é 12 e nem 102.



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

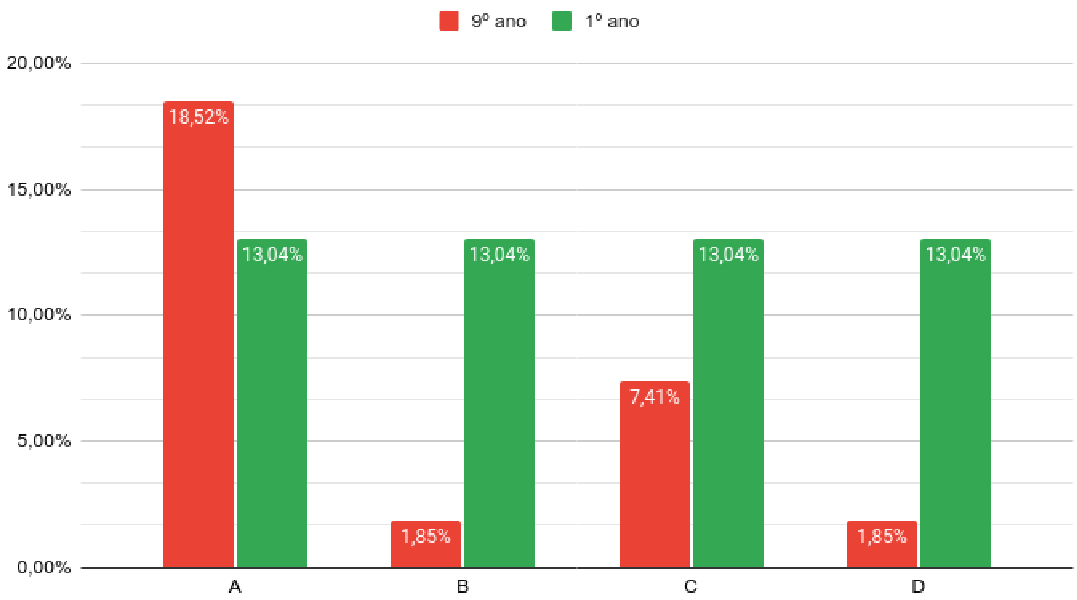
5.5 Atividade 5: divisões que envolvem números decimais

Esta atividade tinha o objetivo de verificar a compreensão do Algoritmo da Divisão quando há números decimais envolvidos, seja no divisor, dividendo ou quociente. Como as turmas de 6° ano não haviam tido contato com este tipo de divisão, eles foram instruídos a não responder esta parte da atividade.

Atividade 5: Encontre o quociente das divisões.
a) $15 \div 6 =$
b) $6 \div 15 =$
c) $1{,}5 \div 6 =$
d) $6 \div 0{,}15 =$

Os itens “a” e “b” testam a compreensão do aluno em relação ao momento de colocação da vírgula e do zero no quociente, sendo ambas divisões de números naturais que resultam em números decimais. Os itens “c” e “d” exigem que o aluno realize uma transformação numérica para igualar as casas decimais do dividendo e divisor, possibilitando assim a realização do algoritmo. O Gráfico 5.13 representa as taxas de acertos dos alunos.

Figura 5.13: Atividade 5 – Percentual de acertos/item e ano de escolaridade



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Um dos erros mais comuns nessa atividade foi a realização da divisão de forma incompleta, ou seja, o aluno terminou o algoritmo antes de observar o resto zero. Foi especificado, durante a aplicação, que não haviam divisões que resultavam em dízimas periódicas, portanto os alunos deveriam efetuar o cálculo sem a preocupação de encontrar quocientes extensos. Ainda, como esperado, a colocação incorreta ou ausência da vírgula no quociente foram também ocorrências frequentes. Durante a aplicação, as perguntas "Tem problema se sobrar?" e "É pra colocar decimal?" foram realizadas. Foi pedido para que o aluno resolvesse o exercício da maneira que ele achasse correto para que pudéssemos verificar se eles percebem que, para continuar a divisão, é necessário fazer algumas transformações numéricas e colocar a vírgula no quociente.

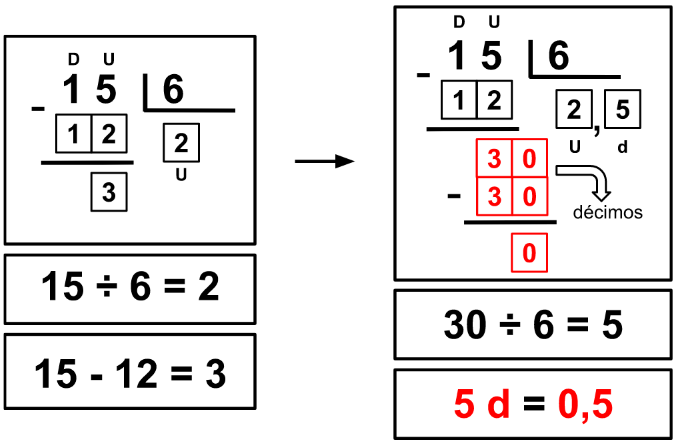
Há dois comentários dos alunos deixados na atividade que merecem ser mencionados e analisados. No item "b", um aluno comentou que sabia que seria necessário colocar um número ao lado do algarismo 6 para conseguir realizar a divisão, já que o dividendo era menor que o divisor, porém ele não sabia qual seria este número. Uma suposição pertinente é que este aluno, em algum momento de sua vida acadêmica, aprendeu a realizar este cálculo, porém se esqueceu devido à falta de prática.

Em relação aos itens "b" e "c" um aluno comentou que as respostas seriam iguais, já que apenas trocamos a ordem dos números. Este é um erro esperado quando o aluno está aprendendo o algoritmo de Euclides, entretanto foi observado no 1° ano do Ensino Médio.

Esta atividade apresenta as taxas mais baixas de acerto e mais respostas deixadas em branco. Apesar de ter sido pedido ao sexto ano que não resolvesse estes itens, um aluno resolveu corretamente o item “a”.

Ainda que divisões com decimais sejam comumente consideradas pelos alunos como mais complicadas, aqui tentaremos apresentar uma correção para os itens da Atividade 5 que esclarece as dúvidas relacionadas às vírgulas. No item “a”, iniciamos a divisão fazendo $15 \div 6 = 2$ e restam 3 unidades. Diferentemente das explicações dos itens da atividade anterior, nos deparamos aqui com um dividendo menor que o divisor. Precisamos aqui fazer uma troca de unidades, sabemos que 3 unidades é o mesmo que 30 décimos, pois $30 \cdot 0{,}1 = 3$. Por isso, colocamos no dispositivo prático um 0 ao lado direito do 3, ele simboliza esta troca. Agora, podemos fazer $30 \div 6 = 5$. Porém, como 30 refere-se a 30 décimos, naturalmente a resposta encontrada também é em décimos, ou seja $5 = 5$ décimos $= 0{,}5$. Assim, o quociente de $15 \div 6$ é 2,5. As letras em maiúsculo, D e U referem-se às dezenas e unidades, respectivamente. As letras em minúsculo, **d, c, m**, que aparecerão nesta e outras explicações, referem-se aos décimos, centésimos e milésimos, respectivamente.

Figura 5.14: Efetuando $15 \div 6$.

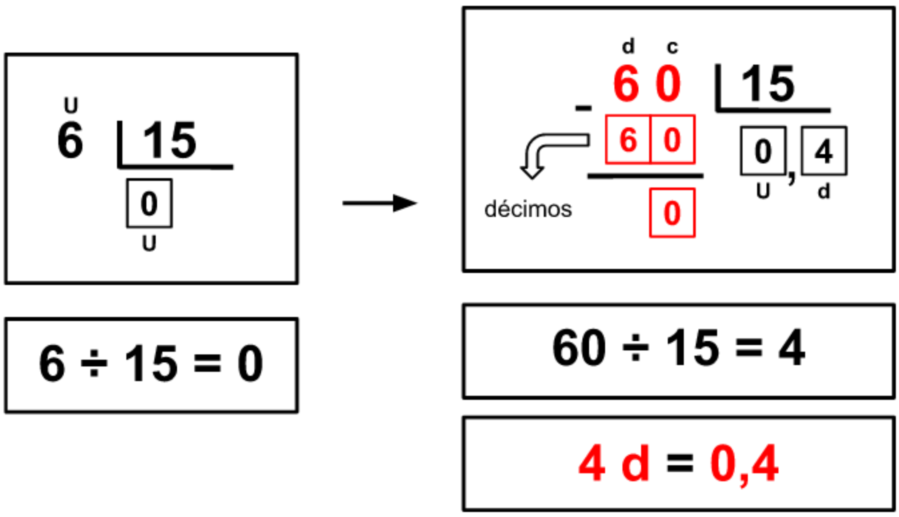


Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Na Figura 5.14 realizamos o processo no dispositivo prático, destacando em vermelho a troca de unidades. Para números que foram transformados em décimos, usaremos a cor vermelha e, posteriormente, para centésimos, a cor azul. Reparamos que podemos realizar $3 \div 6$ normalmente, porém devemos nos atentar que, como houve a troca de unidades para décimos, o resultado será encontrado em décimos. Por isso, colocamos ao final que 5d $= 0{,}5$.

No item seguinte, onde pede-se para realizar $6 \div 15$ iniciamos a discussão esclarecendo que, como o dividendo é menor que o divisor, $6 \div 15 = 0$ e restam 15 unidades. Ressaltamos aqui que o zero é o único quociente possível se optamos por uma divisão exata dentro do ordem das unidades simples. Para continuar, devemos então fazer a troca de unidades. Temos que 6 unidades correspondem a 60 décimos e $60 \div 15 = 4$. Porém, 4 não corresponde a 4 unidades simples. Como fizemos a transformação, obtemos 4 unidades de décimo, ou seja $4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$. Assim, nosso quociente é, na verdade, 0,4 e não 4, como podemos ver na Figura 5.15.

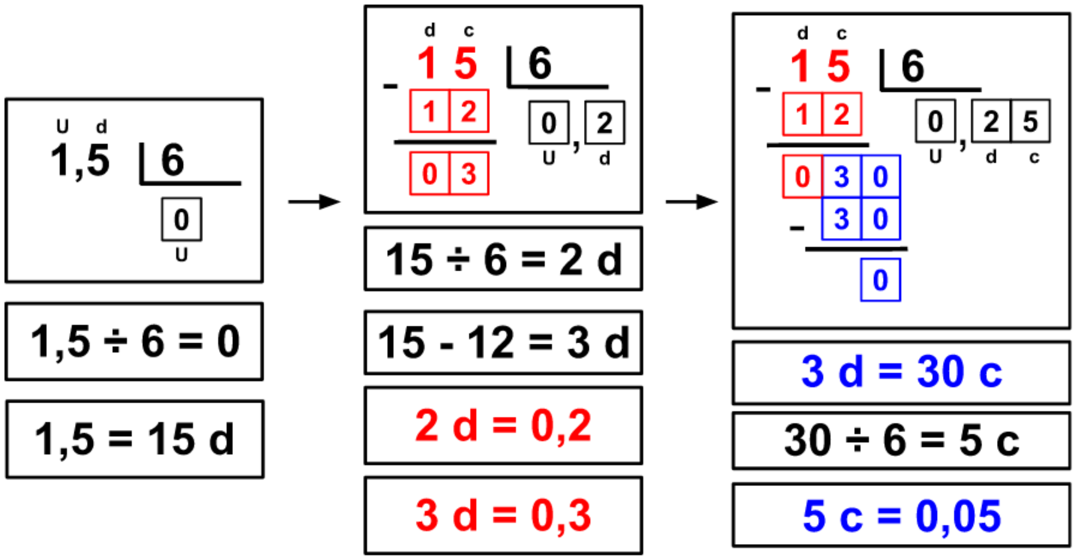
Figura 5.15: Efetuando $6 \div 15$



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

No item c, referente a divisão $1{,}5 \div 6$, observamos que, como o dividendo é menor que o divisor, encontramos novamente 0 unidades no quociente. Daí, podemos transformar 1,5 unidades em 15 décimos ($15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$) e realizando $15 \div 6$ encontramos 2 décimos e restam 3 décimos. Mas, 2 décimos = 0,2, portanto no quociente colocamos o zero e a vírgula para depois inserir o número 2. Como não é possível dividir 3 décimos por 6, trocamos para milésimo. Sabemos que $30 \cdot 0{,}01 = 0{,}3$. Observamos aqui que, em explicações introdutórias sobre estes tipos de divisão, explicar ao aluno a multiplicação que originou a troca de unidades pode gerar algum transtorno. Nestes casos, é importante apenas certificar-se que eles conhecem a ordenação entre décimos, centésimos e milésimos e enfatizar que, a cada troca de unidade, acrescentamos um zero à esquerda do número em questão. Continuando, $30 \div 6 = 5$, entretanto, o resultado encontrado está em centésimos. Assim, 5 centésimos $= 0{,}05$, e então devemos colocar o 5 no quociente de acordo com a unidade com a qual estamos trabalhando. Desta maneira, encontramos como quociente 0,25, como pode ser visto na Figura 5.16.

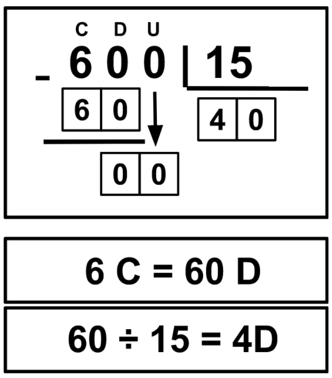
Figura 5.16: Quando o dividendo é um número decimal: efetuando $1{,}5 \div 6$.



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Apesar da transformação de unidades ter funcionado para esclarecer as divisões anteriores, para o item d, assumimos que ela pode causar mais dúvidas do que benefícios. Então, aqui usaremos um método diferente. Relembramos que, se multiplicarmos o dividendo e o divisor pelo mesmo número, o quociente não se altera. Nosso objetivo é encontrar o menor número que, quando multiplicado pelo divisor, faça com que ele se torne um número inteiro. Ora, $0{,}15 \cdot 100 = 15$. Mas como encontramos o valor 100? Basta observar que, quando multiplicamos um decimal por 10, a vírgula se desloca uma casa para a direita. Queríamos que ele aumentasse duas casas após a vírgula, assim é suficiente multiplicar por 100. Fazemos o mesmo com o divisor e obtemos a divisão equivalente $600 \div 15$.

Figura 5.17: Explicando porque $600 \div 15 = 40$ e não 4.



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Apesar desta não ser uma divisão problemática, mostramos na Figura 5.17 de onde surge o zero no quociente. Como, apenas dentro do dispositivo, não é possível dividir 6 por 15, transformamos 6 centenas em 60 dezenas. Desta forma $60 \div 15 = 4$, entretanto, estamos tratando aqui de 4 dezenas, portanto o quociente é 40.

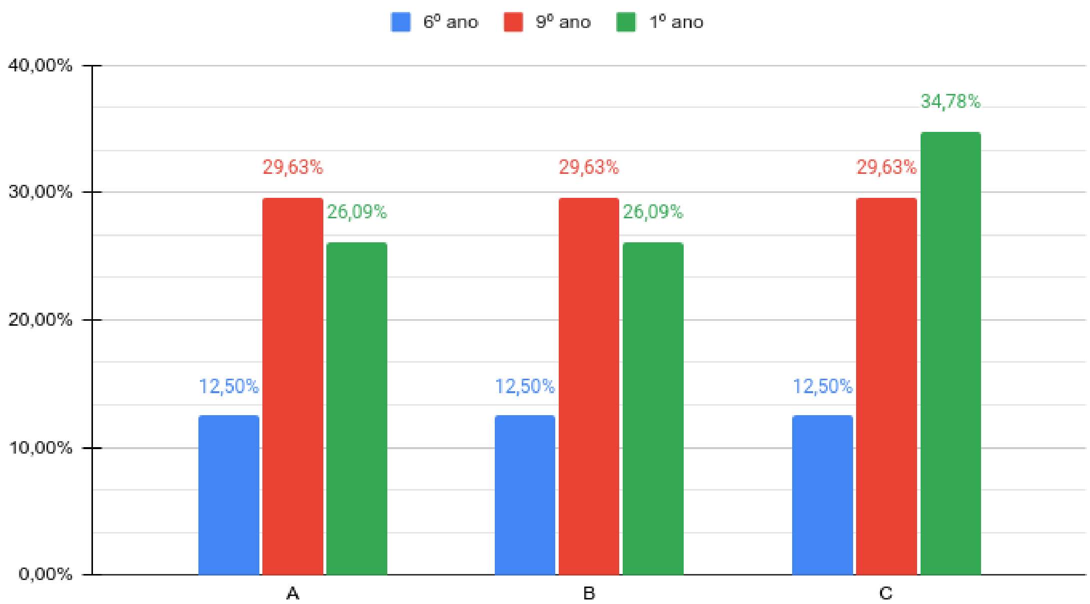
5.6 Atividade 6: os possíveis restos da divisão

Esta atividade verificava como os alunos percebem o resto da divisão, se eles compreendem o que é o resto e de que forma o associam ao divisor e dividendo.

Atividade 6: Determine o resto das divisões.
a) $1247 \div 3$
b) $1248 \div 3$
c) $1249 \div 3$

Como o enunciado pedia a determinação apenas do resto, era possível inferir, ao resolver qualquer um dos itens, o resto dos outros dois itens da atividade, porém nenhum dos alunos cogitou esta possibilidade. O percentual de acertos de cada turma pode ser verificado no gráfico da Figura 5.18.

Figura 5.18: Atividade 6 – Percentual de acertos/item e ano de escolaridade



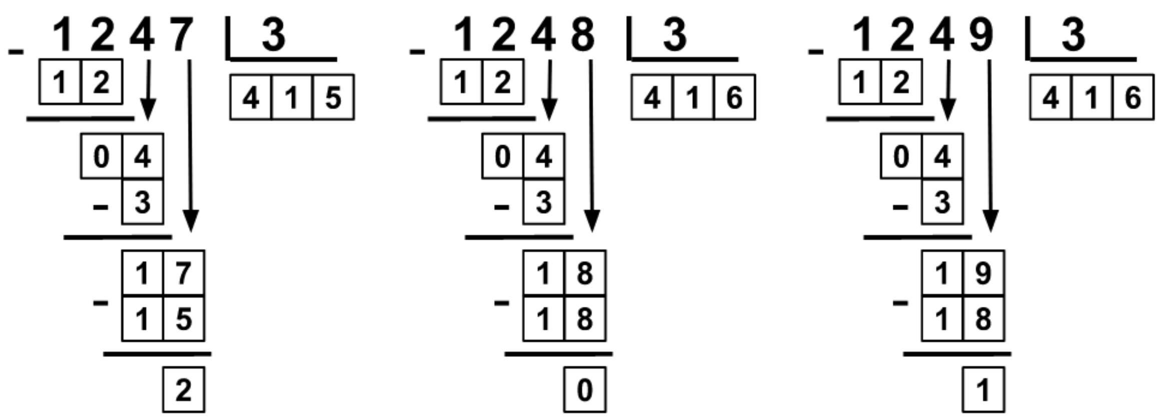
Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Todos que responderam à atividade realizaram as três divisões via Algoritmo da Divisão. Houve uma ocorrência em que o discente acertou os três itens, porém no item “b” ele justificou sua resposta pelo critério de divisibilidade por 3.

Espera-se que, se o aluno compreende o que significa o resto e tem algum conhecimento sobre o Algoritmo da Divisão, exceto para divisões problemáticas, ele resolverá os três itens corretamente. Este dado se verifica, pois 76% dos alunos que responderam corretamente pelo menos um dos itens, acertaram, na verdade, todos os três itens da atividade. Os 6° anos apresentaram maior dificuldade nesta atividade devido a quantidade de ordens que os números possuem e ainda pela limitação de tempo da aula.

Uma maneira interessante de resolver a questão é perceber que 1248 é divisível por 3, utilizando o critério de divisibilidade. E assim justificar que, como 1249 é uma unidade maior, seu resto na divisão por 3 deverá ser 1 e, por 1247 ser uma unidade menor, seu resto na divisão por 3 deverá ser 2. Mas, como nosso foco é o algoritmo, vamos realizar as divisões usando o dispositivo prático, conforme a Figura 5.19.

Figura 5.19: As possibilidades para o resto de uma divisão



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Para resolver $1247 \div 3$, inicialmente fazemos $12 \div 3 = 4$, que na verdade corresponde à divisão $1200 \div 3 = 400$. Depois, realizamos $4 \div 3 = 1$, que fora do dispositivo refere-se a dividir $40 \div 3 = 10$, e observamos que resta 1 dezena. Juntando esta dezena às 7 unidades restantes, fazemos $17 \div 3 = 5$ e encontramos o resto da divisão, que é igual a 2 unidades. Para as divisões seguintes, o raciocínio é análogo, se formos encontrar o resto apenas realizando a divisão. Por outro lado, nossa intenção ao colocar esta questão era que os alunos pensassem "Se 1247 deixa resto 2 na divisão por 3 e 1248 é uma unidade maior, logo ele deve deixar resto zero. Se 1249 é uma unidade maior que 1248 que deixou resto zero, seu respectivo resto deve ser 1".

Embora realizar todos os cálculos de maneira correta seja uma resposta louvável, se considerarmos os índices de acerto mostrados no Gráfico 5.18, nosso objetivo era verificar se os alunos compreendem quais são todos os restos possíveis de uma divisão.

6 Atividades e Jogos

Neste capítulo apresentaremos dois jogos e duas atividades com material lúdico para auxiliar o ensino do Algoritmo da Divisão. Nosso objetivo é trabalhar de maneira lúdica ou não tradicional com o processo de divisão e suas ideias implícitas para, posteriormente, realizar uma formalização do algoritmo.

As atividades sugeridas foram idealizadas para a aplicação em turmas de 6° ano do Ensino Fundamental. Elas têm o intuito de reintroduzir a divisão de maneira a reforçar os detalhes que auxiliam na compreensão do algoritmo. Cada uma das atividades sugeridas a seguir foi desenvolvida de maneira a confrontar as lacunas de aprendizagem observadas na Avaliação Diagnóstica, apresentada no Capítulo 5.

Considerando os trabalhos de Piaget e Vygotsky, ao elaborar nosso produto, optamos por priorizar atividades que envolvessem de alguma maneira materiais concretos e jogos. Com esta escolha, buscamos promover a interação dos alunos entre si e com o conteúdo de uma forma menos abstrata e estimulando o raciocínio lógico. Queremos nos beneficiar da Zona de Desenvolvimento Proximal e da sensação agradável, criada pelas situações de jogo e atividades lúdicas, para desvincular a aula de matemática da seriedade normalmente associada à ela e permitir aos discentes que se desenvolvam neste ambiente.

Utilizando os conceitos de gamificação de Csikszentmihalyi, criamos jogos que utilizam cartas de baralho originais. A ideia consiste em apresentar um desafio que seja tangível a qualquer aluno, porém cuja resposta não seja imediata. Este desafio é dividido em pequenas tarefas, que quando cumpridas deixam o aluno mais próximo de solucioná-lo. Optando por elaborar o jogo desta maneira, conseguiremos manter os alunos engajados e em estado de *Flow*, contribuindo para o aprendizado de uma maneira agradável.

6.1 Atividade 1: o jogo "A boca que rói"

O jogo "A boca que rói" foi idealizado com o intuito de fazer com que os alunos reflitam sobre os termos "divisor", "dividendo", "quociente" e "resto", ao mesmo tempo em que realizam cálculos mentais e desenvolvem suas habilidades de investigação. Seu nome é originado de um acróstico, como $a \div b$ deixa quociente q e resto r, as palavras que o formam se iniciam com estas letras. Além disso, o nome também é uma alusão ao papel do jogador que tem a função de sabotar o andamento do jogo em benefício próprio.

A seguir, explicaremos as regras e objetivos específicos da atividade. Chamaremos de "pacote", o conjunto de 5 cartas, sendo 4 que representam cada um dos termos da divisão e 1 sabotador.

Objetivo do jogo

Descobrir qual a divisão formada pelas cartas recebidas por cada um dos jogadores, ou seja, dizer explicitamente os números e quais suas posições dentro da operação de divisão: divisor, dividendo, quociente e resto.

Material utilizado

- Baralho de mímica, disponível na Seção 8.4.
- 1 pacote de cartas do baralho de divisão, disponível na Seção 8.3.
- Papel e caneta para anotações pessoais.

Como jogar

- São necessários 6 jogadores, sendo possível adaptar para 5 jogadores, como feito na aplicação, descrita na Subseção 6.5.1.
- 5 jogadores recebem uma carta. 4 cartas contém o Algoritmo da Divisão com apenas um de seus termos explícito e 1 carta não contém nenhum termo da divisão ou informação, apenas uma interrogação. Chamaremos esta carta de curinga ou sabotador.
- O sexto jogador é o mestre do jogo. Ele recebe uma carta especial contendo o gabarito e tem a função de monitorar o andamento do jogo e verificar os palpites dados pelos participantes.
- Após a distribuição das cartas e funções, o baralho de mímica é posicionado no centro da mesa.
- Em sua vez, cada jogador deverá retirar uma carta do baralho de mímica e realizá-la, os outros devem tentar descobrir qual a palavra contida na carta.
- Caso alguém acerte, o jogador que realizou a mímica ganha o direito de fazer uma das seguintes perguntas a qualquer um de seus adversários, exceto àquele que desvendou a mímica: "Qual o seu número?" ou "Qual a posição de seu número?".
- A resposta deverá ser sempre coerente com a carta em mãos e compartilhada em público. Se a pessoa escolhida possui a carta curinga, ela deverá fornecer uma

resposta a seu critério, podendo esta ser pensada intencionalmente para atrapalhar o jogo.

- O jogador poderá dar um palpite sobre a divisão do pacote de cartas ao final de uma rodada qualquer, mesmo que não seja seu turno. Entretanto a preferência sempre é do jogador cujo turno terminou.
- O palpite é conferido pelo mestre do jogo. Caso ele esteja errado, o jogo segue normalmente.
- Após descoberta a divisão, um novo pacote de cartas é distribuído e o vencedor se torna o novo mestre.
- O jogo termina após quantas rodadas o professor julgar pertinente.
- Para declarar um vencedor, uma sugestão é atribuir 1 ponto ao jogador toda vez que ele acertar uma mímica e cinco pontos para aquele que acertar a divisão. Caso algum jogador erre um palpite, retira-se dois pontos do mesmo. O vencedor, neste caso é aquele que possuir mais pontos ao final do jogo. Para esta versão, o responsável pela atribuição e anotação dos pontos é o mestre de cada rodada.

O jogo apresenta três versões, uma com divisões cujos termos são apenas números naturais e outra que inclui o conjunto dos racionais, eliminando a carta correspondente ao resto em cada pacote. Para a versão destinada aos números racionais, as mesmas regras se aplicam, mas a quantidade de jogadores passa a ser 5. Nela há dois níveis de dificuldade (por isso a "terceira versão"), sendo o primeiro o das "divisões diversas", no qual os quocientes, dividendos e divisores podem ser naturais ou decimais e o segundo o das "divisões problemáticas", em que os quocientes possuem zero intercalado. Ainda, nesta versão, os números estão descritos nas cartas de duas maneiras: em sua forma decimal e por sua quantidade de décimos. Assim, é possível estimular também a percepção das relações de equivalência entre números.

O jogo foi idealizado levando em consideração os estudos de Csikszentmihalyi [6] sobre gamificação. Observamos que, mesmo que o aluno não saiba dividir, é possível que ele vença, pois basta conseguir reunir todas as informações necessárias para "montar" a divisão. Esse aspecto contribui para que o desafio esteja à altura das habilidades do estudante do sexto ano. A mímica é um desafio simples, que a cada rodada fornece uma recompensa que deixa os jogadores mais próximos da vitória. Além disso, ela contribui para que o ambiente seja agradável e descontraído. O sabotador é um personagem complicador. Ao mesmo tempo que, para ele é mais difícil chegar à vitória, pois sua carta não apresenta nenhuma informação, poder mentir e bagunçar o jogo pode ser uma característica atrativa para os jogadores. À medida que os estudantes se familiarizam com o jogo e as partidas começam a terminar mais rapidamente, podemos introduzir novos níveis de dificuldade utilizando as cartas com decimais e divisões problemáticas, caso eles já tenham estudado os conteúdos.

Em meio ao jogo, esperamos que o desejo de vencer estimule os alunos a refletir sobre a operação de divisão e, à medida em que o jogo é repetido, eles possam desenvolver suas habilidades e conceitos relacionados à divisão durante o estado de *Flow*. Esperamos que o jogo se mostre como uma maneira alternativa e lúdica de inserir os alunos em um ambiente em que eles possam se sentir confortáveis e engajados, ao mesmo tempo em que estudam Matemática.

6.2 Atividade 2: o jogo "Copo D'água" em uma nova versão

O jogo "Copo D'água" pode não ser desconhecido para alguns. Originalmente, a dinâmica deste consiste em preparar, a partir de um baralho comum, uma seleção com conjuntos de 4 cartas com o mesmo número e uma carta curinga. A quantidade de conjuntos depende da quantidade de jogadores. As cartas são embaralhadas e distribuídas entre os jogadores. Em cada rodada, o jogador deve passar uma carta ao jogador lateral, aquele que obter nas suas mãos quarto cartas iguais e colocá-las sobre a mesa antes dos outros jogadores. No momento em que um jogador sinaliza que venceu, o jogo termina e todos devem abaixar suas cartas. É consagrado perdedor o último a colocar suas cartas sob a mesa, e este recebe a punição de beber um copo de água.

Tendo em vista que desenvolvemos um baralho específico para o jogo "A boca que rói", queremos aqui sugerir uma adaptação do "Copo D'água" que permite adicionar mais uma utilidade para o recurso didático criado. O "novo" jogo tem o objetivo de incentivar a realização de cálculos mentais. Explicaremos a seguir o funcionamento da adaptação e como podemos aproveitar o baralho criado de várias maneiras.

Objetivo

Reunir em sua mão 4 cartas com números que formam uma divisão, ou seja, sendo uma carta referente a cada um dos termos da divisão: divisor, dividendo, quociente e resto.

Material utilizado

- Baralho do jogo "A boca que rói", descrito na Seção [6.1].

Como jogar

- Para uma atividade com n jogadores deve-se selecionar n pacotes do baralho do jogo “A boca que rói” e uma carta curinga.
- As cartas são embaralhadas e divididas entre os jogadores de modo que $n-1$ jogadores recebam 4 cartas e 1 jogador receba cinco.
- O jogador que tem 5 cartas começa passando uma de suas cartas para o próximo. Em sua vez, cada jogador deverá fazer o mesmo.
- A carta curinga funciona como um “castigo”. Quando o jogador recebê-la, ele não poderá passá-la adiante por uma rodada. Ele pode manter a carta por mais tempo, se desejar.
- O jogador que conseguir juntar em sua mão 4 cartas que formam uma divisão deverá colocar as cartas em cima da mesa, em silêncio, viradas para baixo, sinalizando que venceu o jogo.
- Todos os outros, assim que perceberem que alguém supostamente venceu o jogo, deverão fazer o mesmo, independente das cartas que tiverem em mãos.
- O jogador que colocar suas cartas na mesa por último perde.
- Por fim, as cartas do vencedor são reveladas e conferidas por todos.

Sobre a separação do baralho, é importante salientar que o jogo pode apresentar níveis de dificuldades diferentes dependendo não só das opções de trabalhar com naturais apenas ou racionais, mas também dos pacotes de cartas escolhidos. Deve-se observar ainda que devemos escolher pacotes de cartas com a mesma cor se não queremos que os estudantes se guiem apenas pelas cores das cartas e não por seu conteúdo.

6.3 Atividade 3: o valor posicional dentro dos números naturais

A dificuldade em relação à colocação do zero no quociente, apresentada pelo alunos na Atividade diagnóstica, pode estar relacionada a não compreensão do valor posicional de cada algarismo dentro de um número. Na atividade em questão trabalharemos a divisão junto a decomposição dos números utilizando o material dourado.

Duração

Cerca de duas aulas de 50 minutos.

Descrição da atividade

Em um primeiro momento o professor deverá dividir a turma preferencialmente em grupos de quatro alunos. A cada estudante será entregue uma folha de atividades diferente e uma caixa numerada. O número da caixa se refere à quantidade de divisórias que ela possui. As folhas de atividade podem ser encontradas no Apêndice e um kit do material dourado para recorte. A utilização do material em sua versão original, em madeira, é recomendada, porém como boa parte das escolas não disponibiliza este recurso, optamos por uma alternativa em papel.

Após o recorte das peças, o professor pode realizar uma discussão com a turma acerca do material, fazendo perguntas como "Quantas peças diferentes o material possui?", "Quantos 'cubinhos' há nas peças maiores?" ou "Quanto 'vale' cada peça?", de maneira a promover a familiarização com o material e relembrar os termos associados à decomposição dos números: "unidade", "dezena", "centena", "milhar", entre outros.

Figura 6.1: Trabalhando com material dourado - Atividade 1

O seu número é:	Sua caixa é a de número:
189	7

1. Represente seu número utilizando as peças do material dourado e cole-as no espaço abaixo:

Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Pede-se no Exercício 1, destacado na Figura 6.1, que o aluno represente o número localizado no cabeçalho da sua atividade utilizando o material dourado. É importante deixar que o aluno represente o número da maneira que achar conveniente, sem impor limitações como por exemplo o uso do mínimo de peças possível.

Figura 6.2: Trabalhando com material dourado - Atividade 2

2. Responda as perguntas observando as peças coladas no exercício anterior:

Quantas peças de 1 unidade você usou? ____
Quantas peças de 1 dezena você usou? ____
Quantas peças de 1 centena você usou? ____

Escreva a decomposição do seu número de acordo com a quantidade de peças usadas e o valor de cada uma delas.

Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Na Atividade 2, mostrada na Figura 6.2, é pedido que seja escrita a decomposição do número feita no exercício anterior. Através de algumas perguntas auxiliares, espera-se que o aluno faça a conexão entre sua escolha de peças e uma das maneiras de decompor o número. Queremos ainda, nesta atividade, que o aluno perceba o valor posicional dos algarismos que formam seu número e sua relação com a decomposição numérica.

O Exercício 3, mostrado na Figura 6.3, convida o aluno a pensar sobre a divisão, porém sem o uso do algoritmo. É pedido que ele represente o número usando o mínimo de peças possível e depois tente dividi-lo entre as divisórias da caixa. O professor deverá deixar que os alunos percebam que não é possível dividir as peças entre as divisória da caixa de maneira que cada divisória contenha a mesma quantidade de peças de cada tipo.

Figura 6.3: Trabalhando com material dourado - Atividade 3

3. Represente novamente o seu número, porém desta vez use o mínimo de peças possível do material dourado. Agora, tente dividir as peças entre as divisórias da caixa, de maneira que cada divisória possua a mesma quantidade de peças de cada tipo.

É possível realizar esta divisão com as peças que você possui? Por que?

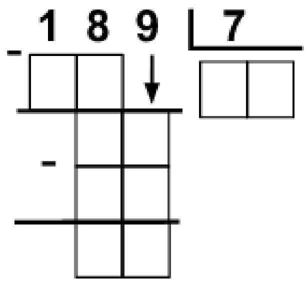
Se você trocar suas peças por outras de menor valor, será possível fazer a divisão? Descreva todas as trocas realizadas para que seja possível realizar a divisão.

Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Apesar das perguntas do exercício guiarem o aluno a uma possível solução, é interessante criar discussões sobre as diferentes trocas que podem ser feitas e quais suas vantagens. Por exemplo, é possível trocar a peça de centena por 10 peças de dezena ou 100 peças de unidade, porém há trocas que são mais vantajosas dependendo de qual divisão está sendo realizada.

Figura 6.4: Trabalhando com material dourado - Atividade 4

4. Efetue a divisão preenchendo cada quadrado com apenas um número. Qual a relação entre o exercício anterior e o cálculo que você realizou?



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

No último exercício, mostrado na Figura 6.4, é apresentada a divisão dentro do algoritmo, com espaços determinados para cada etapa do processo. O aluno deverá então tentar realizar a divisão, relacionando-a com os procedimentos feitos nos itens anteriores.

É recomendável que a atividade seja feita pelo menos duas vezes. Quando o aluno terminar sua folha de exercícios, ele receberá outra com um número diferente e repetirá todo o processo de resolução. Cada uma das atividades deixadas no Apêndice possui um nível de dificuldade diferente.

Avaliação

A avaliação nesta atividade será formativa. O professor poderá acompanhar o progresso do aluno à medida que ele realiza as atividades pedidas e observar se, quando o aluno receber a segunda folha de atividades, ele irá conseguir repetir o processo com mais facilidade.

6.4 Atividade 4: trabalhando com dinheiro

Quando se trata dos números racionais, uma ferramenta pouco explorada nos livros didáticos e artigos acadêmicos analisados é o uso do sistema monetário como contextualização. A familiaridade dos alunos com a conversão entre notas e moedas pode facilitar a compreensão de alguns aspectos relacionados à divisão de racionais. Esta atividade tem o objetivo de explorar didaticamente estas circunstâncias, buscando a construção de um pensamento que facilita a percepção do aluno em relação às trocas de unidades feitas no processo de divisão, e esclarece a ocorrência de zeros e vírgulas no quociente. A seguir descrevemos a atividade.

Duração

Cerca de duas aulas de 50 minutos.

Descrição da atividade

Para dar início ao exercício, a turma será dividida em grupos, preferencialmente de quatro pessoas. Uma folha de atividades e uma quantidade de dinheiro estabelecida pelo professor deverão ser entregues a cada grupo. Uma sugestão seria entregar cem reais, divididos em notas de vários tipos e de maneira que não seja possível realizar uma divisão igualitária do dinheiro entre os membros. A folha de atividades está localizada no Apêndice 8.2, onde também podemos encontrar notas de dinheiro para recorte. Outra alternativa é utilizar o brinquedo “Dinheirinho Falso” que consiste em réplicas das notas em tamanho real e pode ser encontrado para venda com alguma facilidade.

É esperado que os alunos estejam familiarizados com os valores das notas de dinheiro, entretanto, caso o professor queira, é possível realizar uma breve discussão antes da atividade. Perguntas como “Quantas notas de 10 reais são necessárias para obter o mesmo valor de uma nota de 50 reais?” ou “É possível obter tal quantia de dinheiro com os tipos de notas disponíveis?”. Para esta atividade não utilizaremos as notas de um real e duzentos reais, devido à dificuldade de encontrá-las no cotidiano. Por outro lado, o uso da moeda de um centavo se faz necessário para os momentos em que formos fazer a divisão entre decimais.

Na primeira atividade, que pode ser vista na Figura 6.5, pede-se que os alunos dividam o dinheiro entre o grupo e respondam às perguntas. O fato de não ser possível dividir o dinheiro igualmente pode causar alguma tensão, porém é importante ressaltar a relação desta situação com a operação de divisão.

Figura 6.5: Trabalhando com dinheiro - Atividade 1

1. Com seus colegas, divida a quantia em dinheiro fornecida pelo professor entre as 4 pessoas do grupo.

Com quantos reais você ficou?	Com quantas notas de cada tipo você ficou?	Escreva qual a quantia recebida por cada integrante de seu grupo.

Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Nem sempre as divisões realizadas entre números naturais serão exatas, e por isso faz-se necessária a transição para os números racionais. Além disso, é importante chamar a atenção dos discentes para a interpretação do comando, já que, em momento nenhum foi pedido que a divisão fosse em partes iguais. O sucesso na compreensão e resolução de problemas matemáticos envolve também um domínio do português e da habilidade de ler, interpretar e compreender textos. Ao descrever sua quantia no primeiro item e, posteriormente descrevê-la em função das notas, o aluno é apresentado a uma maneira de decompor o número obtido.

A segunda atividade, vista na Figura 6.6, convida o aluno a realizar trocas e operar com o dinheiro em jogo. Caso o aluno não possua dinheiro o suficiente para comprar um produto de outro colega, ele deverá vender o seu produto antes de realizar a compra. Desta maneira, se a quantia em mãos ainda não for suficiente, ele deverá pedir emprestado o dinheiro ao banco. O papel do banco é exercido pelo professor. Para esta atividade, o aluno poderá utilizar o recurso apenas uma vez.

Figura 6.6: Trabalhando com dinheiro - Atividade 2

2. Pegue uma carta localizada no centro da mesa. O produto obtido deverá ser vendido a um de seus colegas. Você deverá comprar também um produto, utilizando o dinheiro que possui. Caso precise dar troco, troque o dinheiro no banco (professor). Responda as perguntas.

Qual produto você escolheu comprar? Qual era o seu preço?

Quais notas você utilizou para pagar? Você recebeu troco?

Qual produto você vendeu? Você precisou trocar seu dinheiro no banco? Se sim, escreva quais notas você trocou.

Após ter comprado e vendido produtos, com quanto dinheiro você ficou? Escreva também quais notas e/ou moedas ficaram em sua mão.

Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Espera-se que os discentes necessitem realizar trocas entre notas e moedas durante o processo de compra e venda de produtos, trabalhando de forma intuitiva as operações de soma e subtração, e ainda as diferentes representações de um mesmo número.

Na terceira atividade, mostrada na Figura 6.7, os alunos deverão trabalhar em grupo para comprar uma mercadoria. Cada um deverá contribuir individualmente para a compra, sendo que, mais uma vez, não há nenhuma especificação sobre as quantias serem iguais ou um valor mínimo estipulado. Após unir as contribuições, os alunos deverão descobrir qual o valor do empréstimo necessário para finalizar a compra.

Figura 6.7: Trabalhando com dinheiro - Atividade 3

3. Cada grupo agora deve escolher uma mercadoria para comprar, dentre as apresentadas no quadro pelo professor. Para isso, cada aluno deverá contribuir com uma quantia de seu próprio dinheiro e ainda o grupo poderá pegar um empréstimo no banco.

Qual quantia foi escolhida para a contribuição de cada aluno do grupo?

Qual o valor do empréstimo feito pelo grupo?

Quais notas vocês receberam ao realizar o empréstimo?

Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

O professor deverá auxiliar os alunos sem interferir em suas escolhas, apenas reforçando as orientações de cada atividade. Na Atividade 4, mostrada na Figura 6.8, é pedido que a quantia restante seja dividida, desta vez igualmente, entre os membros do grupo.

Há uma diversidade de situações que podem decorrer da falta de especificidade nas orientações e, todas elas podem ser abraçadas e discutidas durante o exercício. Por exemplo, se certo grupo opta por doar todo o seu dinheiro no item anterior (mostrado na Figura 6.7), nesta atividade obteremos uma divisão cujo dividendo é zero. Apesar do objetivo principal do exercício estar relacionado à divisão de racionais, tal situação pode gerar uma discussão sobre a ocorrência do zero no dividendo, e servir de gancho para uma possível reflexão sobre a impossibilidade da divisão por zero.

Figura 6.8: Trabalhando com dinheiro - Atividade 4

4. Junte o dinheiro restante de todo o grupo e divida igualmente entre todos os membros. É possível realizar esta divisão sem trocar notas por outras de menor valor ou moedas?

5. Arme e efetue a divisão do dinheiro restante do grupo pela quantidade de membros utilizando o algoritmo da divisão.

Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Por fim, no último exercício, o algoritmo deverá ser montado e resolvido de maneira formal. As atividades anteriores servirão como um guia para a sua resolução. Caso o aluno não saiba como realizar a divisão, é possível utilizar o dinheiro como material auxiliar para a construção do conhecimento necessário para responder a questão.

6.5 Aplicando os jogos: um relato de experiência

Os jogos "A boca que rói" e "Copo D'água" foram aplicados em turmas de diferentes níveis de ensino para que pudéssemos observar seu desenvolvimento e possíveis impactos. Participaram da aplicação duas turmas do 6° ano do Ensino Fundamental, oriundos da escola estadual onde trabalho e um conjunto de alunos do 1° ano do Ensino Médio, estudantes de uma escola federal de Belo Horizonte. Maiores descrições das turmas serão feitas a seguir no relato de experiência da atividade.

6.5.1 "A boca que rói" desafia o 6° ano

A primeira aplicação da atividade ocorreu em uma escola da Rede Estadual de Minas Gerais, situada aos arredores da cidade de Ribeirão das Neves, dentro de uma comunidade com vulnerabilidade socioeconômica. Os alunos de duas turmas de 6° ano, as quais denominaremos Turma 1 e Turma 2 para esta análise, foram convidados a participar do jogo "A boca que rói", em sua versão com números naturais.

A Turma 1 possui alunos que são, em maioria, concentrados, participativos e apresentam dificuldade moderada de aprendizado. Em contrapartida, a Turma 2 possui alunos com um perfil mais hiperativo, com maior desinteresse nas aulas e defasagem de conhecimento em relação à disciplina de Matemática.

Na Turma 1, como a quantidade de alunos presentes era 20, optamos por desenvolver a atividade com 4 grupos de 5 alunos . Desta maneira, o jogo foi realizado sem a posição de mestre. Caso um aluno sinalizasse que queria dar um palpite, eu iria até a mesa do grupo para conferir. Na Turma 2 haviam 18 alunos, portanto ela foi dividida em três grupos de 6 alunos.

A atividade foi desenvolvida em duas aulas de 50 minutos, sendo a primeira quase que inteiramente utilizada para a familiarização dos alunos com a dinâmica e aprendizado das regras. A fim de que os discentes entendessem o jogo com mais facilidade, foi feita uma simulação da atividade no quadro, na qual todas as situações de jogo foram detalhadas. As regras e posições dos termos relacionados à divisão também foram escritos no quadro para consulta.

Optamos por não usar o sistema de pontuação, descrito na Seção 6.1, pois dado o tempo da aula e a organização das turmas, não seria possível jogar uma quantidade significativa de rodadas. A alternativa apresentada foi presentear o aluno vencedor de cada rodada do jogo com um pirulito. Ao final da aula, todos receberiam o doce como prêmio de participação.

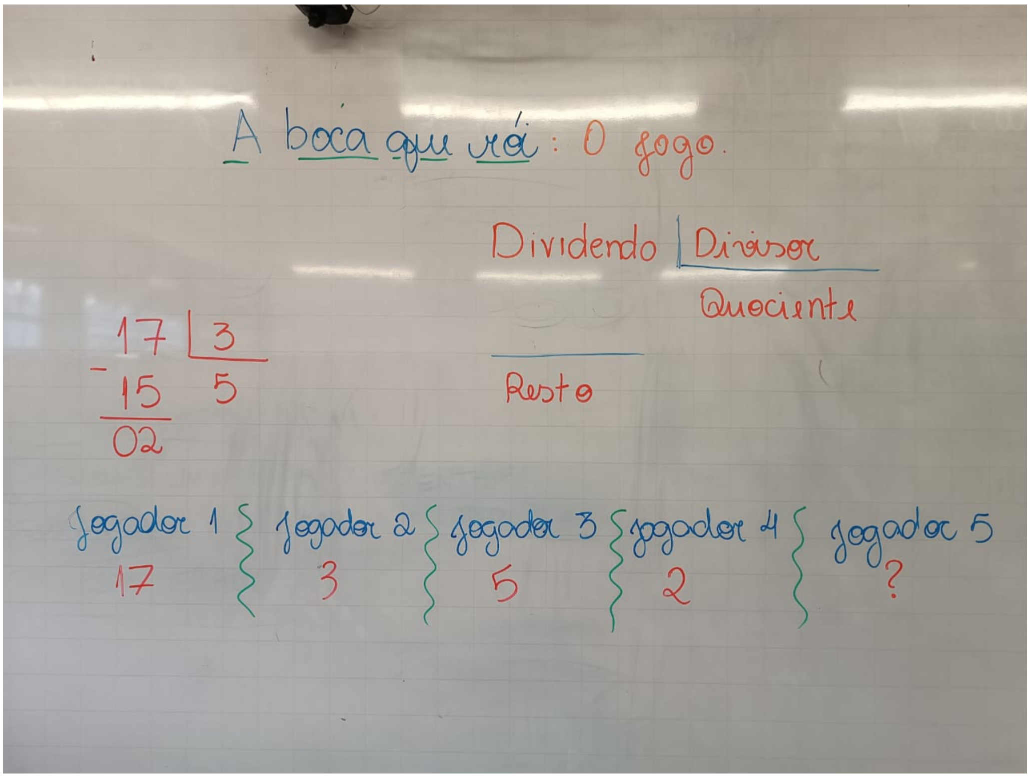
Em ambas as turmas os grupos foram escolhidos pelos próprios alunos e o critério usado por eles foi a afinidade, o que resultou em grupos com, predominantemente, alunos com bom ou mau desempenho escolar.

Os grupos que continham alunos com bom desempenho escolar, naturalmente, compreenderam com mais facilidade o jogo e, por dominarem parcialmente a operação de divisão, jogaram mais rodadas. Nos outros grupos, a atenção parece ter sido dedicada, em maior parte, ao processo de mímica. Estes também frequentemente se esqueciam das perguntas feitas e respostas dadas, apresentando dificuldades de foco e atenção no jogo.

A princípio os alunos sinalizaram que haviam compreendido como funcionava o jogo, entretanto, as dúvidas surgiram quando a prática começou. A dúvida mais frequente foi em relação ao posicionamento dos termos da divisão. Mesmo que a informação estivesse disponível para consulta, os alunos perguntavam qual era a posição do número que tinham em mãos. O quadro com as informações do jogo pode ser visto na Figura 6.9.

A Turma 1, exceto por alguns alunos que destoam de seu perfil, conseguiu jogar de maneira mais independente, apresentando dúvidas pontuais apenas sobre a nomenclatura dos termos da divisão. A ausência do jogador na posição de mestre não causou nenhum prejuízo à dinâmica do jogo, já que nesta turma os alunos têm a tendência de auxiliar os

Figura 6.9: Explicação do jogo no quadro



Fonte: Arquivo pessoal dos autores (2023)

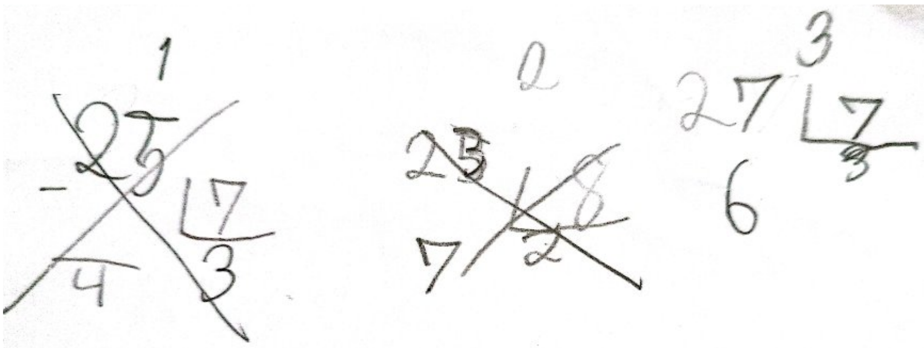
colegas nas atividades.

A Turma 2 apresentou dificuldades durante toda a dinâmica. O início do jogo foi conturbado e explicações precisaram ser realizadas novamente, grupo a grupo, para que a dinâmica tivesse seu ponto de partida. O aluno que ficava na posição de mestre na primeira rodada do jogo foi designado pela professora, assim o aluno que parecia ter compreendido melhor o jogo foi escolhido. Entretanto, a atenção da professora foi solicitada em cada situação do jogo. Percebe-se que, nesta turma, as maiores dificuldades estavam relacionadas ao comportamento dos alunos. A hiperatividade e dificuldade de concentração de alguns acabava por atrapalhar o jogo, fazendo com que os alunos entregassem informações em momentos inadequados.

Em ambas as turmas, ao receberem a carta curinga, os alunos tiveram dúvidas sobre o que responder quando perguntados, porém ocasionalmente a professora lembrava que eles poderiam responder como quisessem já que a carta não continha nenhuma informação. Apesar de começar o jogo com o curinga ser uma desvantagem, nota-se que os alunos que começam com essa carta curiosamente parecem não considerar isso como um obstáculo. Diferentemente do esperado, houveram muitos alunos que começaram com essa carta e tiveram facilidade de vencer o jogo.

Inicialmente, a estratégia utilizada pelos alunos era a de reunir todas as informações de posição e número para realizar um palpite, conforme a Figura 6.10, entretanto, logo eles perceberam que isso não era necessário. Foi permitido aos alunos que utilizassem uma folha para rascunhar. Alguns optaram por listar o nome do colega e o número ou posição da carta com a qual ele está. Outros optaram por anotar a divisão em forma de cálculo, já com os números em suas posições. Nota-se que estes, normalmente, conseguiam vencer a rodada com mais facilidade.

Figura 6.10: Anotações de um aluno do 6° ano (EF)



Fonte: Arquivo pessoal dos autores (2023)

Em grande maioria, as mímicas foram consideradas fáceis, o que contribuiu para que a parte Matemática ganhasse foco durante do jogo. Nota-se que os alunos com melhor desempenho, como esperado, tendem a ganhar o jogo, porém em alguns casos alunos com mau desempenho na disciplina de Matemática venceram.

Alunos com problemas de leitura não hesitaram em participar, o fato da carta da mímica possuir desenho os ajudou. Entretanto, tiveram dificuldades com as posições das cartas, já que não conseguiam ler as palavras.

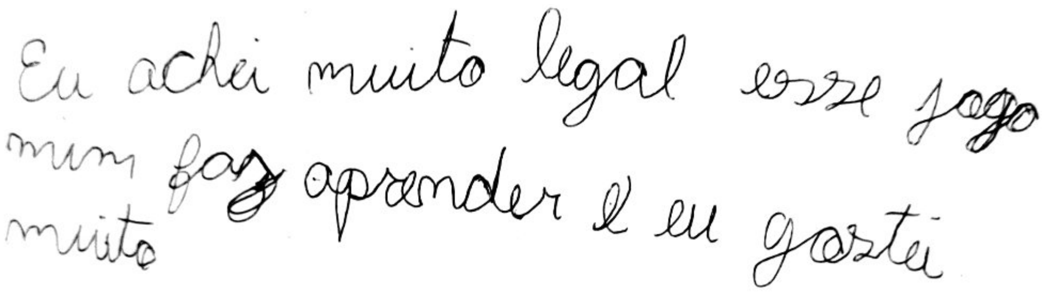
Apesar do começo da aplicação ter sido conturbado, a partir do momento em que a maioria dos alunos entendeu a dinâmica, o jogo se tornou prazeroso e despertou o espírito competitivo dos alunos. Na segunda aula, momento em que as regras e dinâmicas já estavam internalizadas, os discentes foram mais receptivos e se empenharam mais na atividade. Ao jogarem de maneira mais independente, sem a necessidade de solicitar ajuda da professora para mediar qualquer conflito ou dúvida, eles adquiriam mais autonomia e puderam se concentrar em seus papéis como jogadores.

As possíveis vantagens e empecilhos que envolviam a carta curinga começaram a ser percebidas apenas ao final da segunda aula em que o jogo foi aplicado. Por vezes, os alunos começaram a notar que não conseguiam ganhar o jogo pois alguma das informações que eles possuíam estava incorreta. Essa percepção normalmente acontecia durante o palpite.

Algumas vezes, alunos chamavam a professora para verificar se havia algo errado no jogo pois eles julgavam ter todas as informações para fazer um palpite. Porém ao realizarem o cálculo para conferência, reparavam que havia algo errado. Acredito que poucos alunos que tinham a carta curinga conseguiram atrapalhar o jogo de maneira intencional.

Antes do jogo, os alunos apresentavam resistência para realizar a operação de divisão, sempre reclamando que não conseguiam antes mesmo de tentar, porém durante a atividade eles perceberam a necessidade de fazê-la caso quisessem vencer o jogo. Na Figura 6.11 podemos ver um relato de um aluno sobre o jogo. Para aqueles que sabiam como realizar o cálculo, a atividade funcionou como uma verificação das suas habilidades. Para os que ainda não haviam consolidado o conteúdo, observamos que a atividade os incentivou a buscar maneiras diferentes de conferir seu cálculo. Como os alunos podiam utilizar rascunhos durante o jogo, alguns utilizaram a multiplicação para verificar seus palpites. Por outro lado, nos grupos em que todos os integrantes apresentavam dificuldades relacionadas ao conteúdo, o jogo terminava quando um aluno conseguia obter todas as informações possíveis para dar um palpite.

Figura 6.11: Opinião de um aluno do 6° ano (EF) sobre o jogo



Fonte: Arquivo pessoal dos autores (2023)

A maior contribuição no aprendizado dos alunos foi a familiarização com os nomes dos termos relacionados à divisão e suas posições. Como a atividade exigia que eles observassem o número e falassem sua posição com frequência, houve uma memorização não intencional do conteúdo. Curiosamente, as mímicas colaboraram para estimular a imaginação dos alunos, já que algumas das cartas não continham desenhos cuja mímica é fácil de fazer.

Cerca de um mês depois, uma nova aplicação do jogo foi realizada nas mesmas turmas. Desta vez, os alunos da Turma 1 foram separados em dois grupos de 5 pessoas e um grupo de 4 pessoas, os alunos da Turma 2 em dois grupos de 5 pessoas e um com 6 pessoas. O mesmo sistema de pirulitos como recompensa foi utilizado.

Nesta nova experiência, menos tempo foi gasto com a explicação das regras, fazendo com que os alunos pudessem jogar mais partidas. Percebemos que nas folhas de rascunho entregues aos alunos foram realizadas menos anotações, quando comparado às aplicações anteriores. A informação com os nomes dos termos da divisão deixada no quadro parece ter sido menos consultada. Alguns alunos que já estavam bem familiarizados com a dinâmica dominaram o jogo, ganhando repetidas vezes. Em outros momentos, considero que seria mais interessante escolher os grupos de maneira que os estudantes que demonstram mais facilidade com divisão se enfrentem, de maneira a aumentar o nível do desafio.

Uma diferença desta aplicação para as anteriores foi que, no grupo com 6 pessoas, os alunos jogaram com duas cartas coringa. Essa adaptação fez com que o nível de dificuldade aumentasse consideravelmente e o grupo só conseguisse jogar apenas duas partidas em toda a aula.

6.5.2 "A boca que rói" e "Copo D'água" encontram o 1° ano

A segunda aplicação ocorreu em uma escola federal, situada na região oeste de Belo Horizonte. Os alunos deste local passam por uma rigorosa e concorrida seleção para estudar na instituição, por isso são provenientes de várias localidades da cidade e é esperado que apresentem pouca defasagem de conhecimento. A atividade realizada contou com a participação de 11 alunos do 1° ano do Ensino Médio, escolhidos por uma professora de Matemática da instituição, dentre os que apresentavam alguma dificuldade em Matemática.

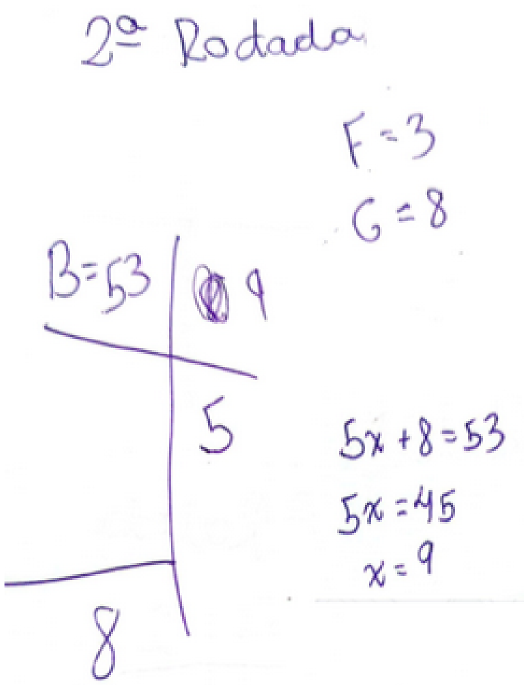
Começamos a atividade utilizando pacotes de cartas do jogo "A boca que rói" que apresentavam apenas números naturais. A turma foi dividida em dois grupos de cinco alunos, já que o 11° aluno ainda não havia chegado. Desta maneira, a posição de mestre e o sistema de pontuação foram descartados e o vencedor era conferido pelos professores pesquisadores. A recompensa para o vencedor de cada rodada era um pirulito ou uma bala de gelatina, à escolha do aluno.

A explicação do jogo seguiu de maneira semelhante àquela feita na aplicação anterior, com um detalhamento menor, considerando o nível de ensino dos alunos. A turma de 1° ano apresentou mais dúvidas sobre o funcionamento do jogo, quando comparada ao 6° ano. Este comportamento pode ser característico da idade e nível de maturidade dos alunos. Enquanto estudantes mais velhos tendem a refletir antes de realizar uma ação, os estudantes novos são mais impulsivos e costumam seguir seus instintos, optando por jogar mesmo sem ter entendido a dinâmica, esperando aprender na prática.

No começo da atividade, os alunos tentaram jogar sem pensar na divisão, apenas alocando os números em suas posições. Após cerca de três rodadas, alguns estudantes perceberam que são necessárias poucas informações para vencer o jogo, caso eles se dispusessem a realizar os cálculos.

Foi entregue uma folha em branco para que os alunos utilizassem como rascunho para organizar seus pensamentos. As estratégias de registro foram diversas. Haviam anotações em forma de listas, onde era escrito o nome do colega, o número e posição de sua respectiva carta, de maneira simplificada, com o algoritmo montado e os números em suas posições e ainda em forma de equações, como mostra a Figura 6.12.

Figura 6.12: Registro com equações de um aluno do 1° ano (EM)



Fonte: Arquivo pessoal dos autores (2023)

A dinâmica das mímicas proporcionou leveza e momentos de descontração durante o jogo. Entretanto, em alguns casos, ela tomou um tempo maior que o previsto, porém não foi um obstáculo suficiente para interromper o fluxo do jogo. Particularmente, esperava-se que esta característica do jogo fosse ter uma complexidade menor neste nível de ensino, mas percebemos que alunos mais novos tendem a ter uma imaginação mais aguçada, tanto para performar, quanto para palpitar, além de serem menos tímidos em geral.

Passado o momento inicial, no qual os alunos ainda estavam aprendendo a jogar, foi introduzido um novo detalhe à dinâmica. Como os alunos estavam realizando palpites sem refletir sobre o cálculo que deviam realizar, ficou estabelecido que, se um aluno errasse o palpite ele perderia um dos doces que havia recebido. Esse detalhe aumentou o empenho em relação à atividade. Consideramos esta prática inadequada para a aplicação do jogo com crianças, porém como ela teve o resultado esperado para adolescentes, reparamos que, apesar de não implementado, o sistema de pontuações poderia funcionar, devido à competitividade exibida pelos alunos.

Quando percebemos que os alunos se familiarizaram com o jogo, a turma foi redividida em três grupos de quatro alunos, sendo que um professor pesquisador completou o grupo para que isto fosse possível. Assim, foram introduzidos pacotes de cartas que continham números racionais. O uso de números racionais dificultou os cálculos para alguns alunos, mas em contrapartida, o jogo se tornou mais fácil de vencer, pois eram necessárias menos informações para descobrir a divisão.

Percebemos nesta parte do jogo algumas dificuldades em relação aos números e o processo de divisão. Nas cartas, a nomenclatura dos números estava especificada em décimos ou unidades, como pode ser visto no kit do jogo 8.3. Notamos que, se a resposta de uma pergunta era "75 décimos", havia um questionamento se o número era 0,75 ou 7,5. Ainda, além da realização do cálculo da divisão de maneira incorreta, em certas ocasiões os discentes se mostravam confusos entre as posições do quociente e divisor.

Em um dos pacotes de cartas fornecido a um dos grupos, havia a seguinte divisão $14{,}14 \div 14 = 1{,}01$. O jogo, para este conjunto, foi rápido e forneceu um vencedor no primeiro palpite. Entretanto, este, relatou uma dúvida em relação ao quociente, comentando que não tinha certeza se era 1,01 ou 1,1.

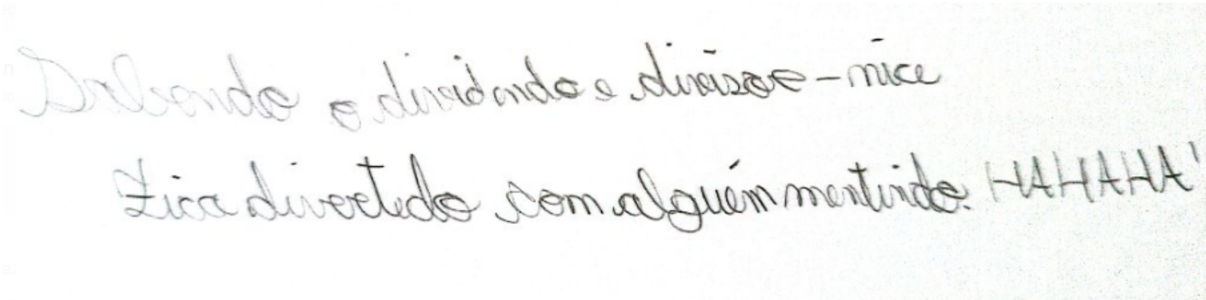
A posição do curinga ainda não parece ter sido executada em todo o seu potencial, visto que muitas vezes os alunos não sabiam qual a mentira conveniente deveria ser contada. Por isso, consideramos realizar um ajuste nas cartas de números decimais, colocando possibilidades de mentira que causarão algum transtorno no jogo. Entretanto, a ideia não foi colocada em prática pois, em alguns casos ela fornece uma vantagem que não é interessante pedagogicamente.

Assim como no 6° ano, o jogo parece ter sido bem sucedido para a fixação os nomes das posições dos termos da divisão e para o treinamento de seus cálculos. Alguns alunos apresentaram dificuldades na divisão em ambas as versões, porém eles utilizaram como estratégias a operação inversa, multiplicação, e equações de 1° grau. Entretanto, quando foram introduzidos os números racionais, dúvidas relacionadas às vírgulas se apresentaram.

Em geral, o jogo se mostrou divertido e interativo, possibilitando aos alunos um momento em que o aprendizado se tornou mais leve e positivo, conforme o relato da Figura 6.13.

Por fim, mantendo-se os grupos, iniciamos a última atividade: o jogo "copo d'água". Ao perceber que muitos alunos não conheciam o jogo original, realizamos uma breve explicação de seu funcionamento. Foram entregues aos grupos 4 pacotes de cartas de mesma

Figura 6.13: Relato de um aluno do 1° ano (EM)



Fonte: Arquivo pessoal dos autores (2023)

cor com divisões apenas dentro do conjunto dos naturais, e um curinga, embaralhados e distribuídos um a um aos alunos.

O jogo apresenta alta complexidade, visto que há várias possibilidades de divisão para montagem e nenhuma diferenciação entre os pacotes de cartas. Desta maneira, ao receber suas cartas os alunos precisaram pensar nas possibilidades de combinações mais promissoras, o que fez com que os jogos se tornassem mais longos e silenciosos. Como os pacotes de cartas eram os mesmos utilizados anteriormente, alguns alunos se lembraram das divisões, o que facilitou suas vitórias. Nesta atividade, percebemos que as dúvidas que houveram estavam relacionadas mais à mecânica do jogo do que à Matemática.

O "Copo D'água" cumpre sua função em fazer os alunos refletirem sobre as diferentes possibilidades de divisor, quociente e resto para uma divisão, intensificando a fixação da realização de cálculos. Normalmente, os alunos consideraram o maior número como sendo o dividendo. Esta estratégia se mostra eficiente visto que há poucos pacotes de cartas em que o dividendo é um número menor que vinte. Em versões futuras do jogo, consideramos conveniente acrescentar mais pacotes com dividendos menores que vinte e também maiores que cem.

A aplicação do jogo no 1° ano foi feita de maneira que o nível de dificuldade das atividades foi crescente, o que se mostrou adequado para não causar frustrações nos jogos que continham decimais e no "Copo D'água". A atividade não obteve êxito em solucionar dúvidas relacionadas às vírgulas e posicionamento do zero no quociente, entretanto este é um problema que será priorizado pelos exercícios com material concreto, descritos nas Atividades das seções 6.3 e 6.4.

7 Considerações Finais

O tema deste trabalho surgiu através de uma insatisfação relacionada tanto ao ensino de divisão, quanto ao desempenho e aversão dos alunos em relação ao conteúdo. Durante a pesquisa procuramos analisar o problema por diferentes perspectivas.

Ao analisar como alguns livros didáticos abordam o conteúdo, percebemos que existe uma tendência a segmentar o ensino da divisão entre os anos finais do Ensino Fundamental I, nos quais a opção é por ensinar o Algoritmo para divisões de números naturais, e os anos iniciais do Ensino Fundamental II, nos quais aborda-se com maior detalhamento o algoritmo para divisões entre números decimais. Adiantar o ensino do algoritmo para o Ensino Fundamental I, além de contrariar a recomendação da BNCC, pode causar prejuízos caso o estudante não tenha consolidado as outras três operações básicas. Por outro lado, observamos que os textos apresentados em livros didáticos destinados ao 3°, 4° e 5° parecem se preocupar mais em fornecer diferentes abordagens e explicações para o ensino da divisão e em justificar com maior detalhamento possível cada um dos passos do processo.

Metade dos livros destinados ao 6° ano se preocupa em explicar o algoritmo e seus procedimentos, enquanto o restante assume esse conhecimento como consolidado e apresenta exemplos resolvidos dos cálculos de divisão. Esperávamos que, como este é o ano em que o algoritmo deve ser ensinado, todos os livros se preocupassem em fornecer textos que explicassem o conteúdo. Como grande parte dos autores não estende suas obras ao Ensino Fundamental I, encerramos esta parte da análise nos perguntando se eles consideram prudente deixar o ensino do algoritmo, considerado complicado, a professores sem formação específica em Matemática.

Todos os livros examinados se atentam a explicar o algoritmo para divisões de números racionais, cada um a sua maneira e com as especificidades detalhadas no Capítulo 2 deste trabalho. Quanto aos livros do 7° ano, na maioria das obras o algoritmo é considerado consolidado e é dedicada uma maior atenção às regras de sinais que envolvem operações com números positivos e negativos.

Procurando por novos pontos de vista em relação ao assunto, buscamos analisar dissertações de mestrado escritas por professores atuantes no Ensino Básico, participantes do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Confirmamos assim que a necessidade de apresentar o tópico por diferentes abordagens e metodologias não era específica apenas aos estudantes com os quais trabalhamos. Os estudos analisados evidenciam as dificuldades e aflições dos alunos não só em relação à divisão como um todo, mas também em relação a certas partes dos processos que envolvem o algoritmo. Entre as metodologias sugeridas que podem auxiliar o ensino estão o uso de referências históricas, a investigação de métodos de divisão utilizados por outras civilizações, uso de tecnologia, jogos e material concreto.

Acreditamos que, abordar o tema por meio de referências históricas pode ajudar o estudante a atribuir significado à Matemática que está sendo ensinada. Ao compreender como a operação se tornou necessária e foi construída por povos antigos, é possível criar um vínculo menos abstrato com o conteúdo. Os métodos que utilizam materiais concretos contribuem para uma melhor compreensão dos processos que envolvem o algoritmo, atribuindo-lhes justificativas tangíveis. O uso de jogos e tecnologia são atrativos devido ao seu apelo emocional. Considerando que os estudantes assimilam estas atividades como prazerosas, ao uni-las com os conteúdos a serem ensinados, podemos proporcionar um aprendizado menos marcado por negatividade e aversões.

Para a construção das atividades que tentariam amenizar os obstáculos encontrados pelos alunos, inicialmente optamos por estudar algumas teorias de ensino que poderiam contribuir para a elaboração de uma atividade que causaria algum impacto no ensino de divisão. Como os estudos de Piaget [28] e Vygotsky [50] revelam que o conhecimento pode ser construído através da interação entre o sujeito e o meio, optamos pela concepção de atividades que priorizassem o material concreto e a interação, não só com o meio, mas também entre diferentes sujeitos. Kishimoto [21] e Grando [13] defendem o aspecto educativo e afetivo do uso de jogos e seus benefícios ao ensino, como o estímulo da memória e desenvolvimento do raciocínio lógico e sua associação a sentimentos agradáveis e expectativa de diversão. Assim, consideramos o uso de jogos como um alternativa viável para o ensino de divisão, objetivando diminuir a aversão inerente ao conteúdo e utilizando todos os seus benefícios para consolidar os aspectos da teoria. Por fim, usamos os conceitos de gamificação e os estudos do estado de *Flow* de Csikszentmihalyi [6] para conceber uma atividade na qual os alunos pudessem se engajar e se manter motivados.

O último passo, percorrido antes da construção das atividades, consistiu em um estudo de caso das dúvidas em relação à divisão dos alunos com os quais trabalhamos, feito através de uma avaliação diagnóstica. Concluímos que uma parte considerável dos alunos não apresenta conhecimento consolidado sobre a decomposição numérica, nomes dos termos da divisão e divisões entre decimais. Os estudantes participantes são capazes – em maioria – de realizar divisões simples, com dividendos com no máximo 3 algarismos, porém se confundem quando são confrontados com divisões longas e números maiores. A associação da multiplicação como operação inversa da divisão parece ser ainda um território pouco explorado, o que consequentemente dificulta o ensino do algoritmo. Entre aqueles que conseguem realizar divisões, surgem ainda dúvidas sobre os procedimentos implícitos do Algoritmo que envolvem a colocação da vírgula, transformação de unidades e divisões que apresentam zero intercalado a outros números no quociente.

Em relação aos pontos que causam mais dúvidas nos alunos, a colocação da vírgula e o zero intercalado no quociente, é importante observar que os livros didáticos analisados são eficientes em fornecer justificativas para o primeiro problema, mas carecem de explicações que sanam as dúvidas em relação ao segundo.

As três atividades construídas tinham o objetivo de promover o contato do aluno com o conteúdo em um ambiente que possibilitasse o aprendizado, mas que, ao mesmo tempo, o dissociasse da seriedade das aulas expositivas com as quais eles estão acostumados. O jogo "A boca que rói", em seu primeiro nível, se mostrou uma alternativa para a consolidação dos nomes dos termos da divisão e suas posições dentro do algoritmo. Durante do jogo, pudemos perceber que os estudantes que nem sempre conseguiam resolver as divisões, procuravam maneiras alternativas de encontrar as informações necessárias para vencer quando descobriam que a realização dos cálculos poderia fazê-los chegar à vitória antes dos colegas. Ainda, era possível perceber que os alunos que não conheciam o Algoritmo, buscavam ajuda com os colegas que sabiam, com o intuito de aprender e aumentar suas chances de vencer o jogo. Apesar da competitividade envolvida, os estudantes se mostraram solícitos com os colegas em defasagem. As versões mais difíceis, níveis 2 e 3, aplicadas ao Ensino Médio, geraram questionamentos importantes sobre o processo de divisão, porém contribuíram apenas para o treinamento da execução do algoritmo, não sanando dúvidas em relação ao processo. A nova versão do jogo "Copo D'água", em nossos testes, parece estimular o cálculo mental. Ainda, quando confrontados com diversas possibilidades de divisores, dividendos, quocientes e restos, os alunos são incentivados a pensar em diferentes possibilidades de divisões e construir estratégias para descobrir quais cartas manter em mãos e quais descartar.

As atividades com os materiais concretos, dourado e dinheiro, que abordam o valor posicional dos algarismos dentro dos números, possuem o objetivo de, além de detalhar o Algoritmo da Divisão de maneira compreensível e palpável aos alunos, esclarecer as dúvidas relacionadas ao zero intercalado no quociente e colocação da vírgula, reveladas na Atividade Diagnóstica 5. Apesar de não ter sido possível aplicá-las, suas construções foram o que possibilitou uma mudança na maneira com que decidimos explicar a divisão. Consideramos esta atividade importante e pretendemos aplicá-la no futuro, principalmente quando a divisão entre decimais for introduzida nas turmas de 6° ano em questão.

Como relato pessoal, apesar de ter o costume de trabalhar com materiais concretos e com explicações alternativas, por muito tempo sempre tentei explicar minuciosamente os processos por trás de cada passo da realização do Algoritmo da Divisão. Entretanto, por muitas vezes, era encarada com o olhar de incompreensão e dúvida dos alunos. Durante o trabalho, como em vários momentos trabalhei com conteúdos que tinham a divisão como prerrequisito, pude testar diferentes esclarecimentos para o algoritmo.

Em particular, o método que tem funcionado com meus alunos é o da decomposição. Após a utilização do jogo "A boca que rói" para consolidar o nome dos termos de refletir sobre seus papéis e posições dentro do algoritmo, quando nos defrontamos com divisões que eles não conseguem resolver, decompomos os números, dividimos cada parte separadamente e somamos os resultados. Por exemplo, $124 \div 3$ é separado em $100 \div 3$, $20 \div 3$ e $4 \div 3$, de modo que, ao fazermos $100 \div 3$, encontramos 33 e resta 1 unidade. Esta unidade é acrescentada à divisão seguinte, assim temos $20 + 1 = 21$ e fazemos $21 \div 3 = 7$. Por fim, resta fazer $4 \div 3$, na qual encontramos 1 e resta 1 unidade. Daí, para encontrar o resultado da divisão, somamos os quocientes descobertos $33 + 7 + 1 = 41$ e o resto da divisão é 1. Quando a divisão ainda parece muito difícil, é sempre possível decompor ainda mais o número, por exemplo não precisamos realizar $100 \div 3$, podemos dividi-lo em 2 partes de 50 ou ainda três de 30 e uma de 10. Este método, apesar de trabalhoso, permite que eles consigam encontrar um resultado para o cálculo e, à medida que as divisões de números menores começam a se tornar triviais, espero que a necessidade de realizar o algoritmo com números maiores surja naturalmente. Futuramente, tentarei estender o método para os números decimais, por exemplo, o resto 1 não pode ser dividido por 3, mas se o transformarmos em 10 décimos ou 100 centésimos, podemos continuar a divisão.

Como pudemos observar neste trabalho, há diversas abordagens possíveis para o ensino de divisão. Procuramos elaborar atividades que auxiliam na compreensão da divisão de maneira menos abstrata e que estimulam a realização da operação diversas vezes, visando a familiarização do aluno com a mesma e o desenvolvimento de cálculos mentais. O ensino da divisão parece ainda ser um processo longo, mas esperamos que o trabalho contribua com ideias diferentes para a abordagem do conteúdo.

8 Apêndice

8.1 Atividade diagnóstica

ALUNO (A):		
ATIVIDADE DIAGNÓSTICA SOBRE DIVISÃO	TURMA:	DATA: ___ /___ /____

ATIVIDADE 1

Dado o número 48 290, responda:

a) qual algarismo representa quantas centenas este número possui?

b) qual o valor posicional do número 9?

c) quantas unidades de milhar este número possui?

d) decomponha este número adicionando o valor posicional de cada algarismo.

ATIVIDADE 2

a) Júlia comprou um conjunto com 27 canetas. Ela irá reparti-las igualmente entre suas filhas Ana, Raissa e Caroline. Quantas canetas cada uma das três irmãs receberá?

b) Danilo comprou um pacote com 47 bombons para colocar exatamente 3 deles em cada kit de lembrancinha do aniversário do filho. Qual o maior número de lembrancinhas que ele poderá montar?

ATIVIDADE 3: Encontre o quociente das divisões.

a) $60 \div 12 =$

b) $126 \div 21 =$

ATIVIDADE 4: Encontre o quociente das divisões.

a) $1414 \div 14 =$

c) $1417 \div 13 =$

b) $5105 \div 5 =$

d) $13026 \div 13 =$

ATIVIDADE 5: Encontre o quociente das divisões.

a) $15 \div 6 =$

c) $1,5 \div 6 =$

b) $6 \div 15 =$

d) $6 \div 0,15 =$

ATIVIDADE 6: Determine o resto das divisões.

a) $1247 \div 3$

b) $1248 \div 3$

c) $1249 \div 3$

8.2 Atividade com material concreto

Escola:		**Professor(a):** Luana
Nome:		**Turma:** 6º ano
Data: __ /__ /___	**Disciplina:** Matemática	**Atividades de intervenção: Decomposição e Divisão**

O seu número é:	Sua caixa é a de número:
189	7

1. Represente seu número utilizando as peças do material dourado e cole-as no espaço abaixo:

2. Responda as perguntas observando as peças coladas no exercício anterior:

Quantas peças de 1 unidade você usou? ____
Quantas peças de 1 dezena você usou? ____
Quantas peças de 1 centena você usou? ____

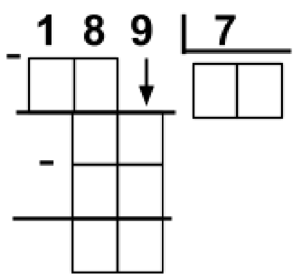
Escreva a decomposição do seu número de acordo com a quantidade de peças usadas e o valor de cada uma delas.

3. Represente novamente o seu número, porém desta vez use o mínimo de peças possível do material dourado. Agora, tente dividir as peças entre as divisórias da caixa, de maneira que cada divisória possua a mesma quantidade de peças de cada tipo.

É possível realizar esta divisão com as peças que você possui? Por que?

Se você trocar suas peças por outras de menor valor, será possível fazer a divisão? Descreva todas as trocas realizadas para que seja possível realizar a divisão.

4. Efetue a divisão preenchendo cada quadrado com apenas um número. O resultado que você encontrou realizando esta divisão corresponde ao obtido na prática? Por que?



Escola:		**Professor(a):** Luana
Nome:		**Turma:** 6º ano
Data: __ /__ /___	**Disciplina:** Matemática	**Atividades de intervenção: Decomposição e Divisão**

O seu número é:	Sua caixa é a de número:
432	4

1. Represente seu número utilizando as peças do material dourado e cole-as no espaço abaixo:

2. Responda as perguntas observando as peças coladas no exercício anterior:

Quantas peças de 1 unidade você usou? ____
Quantas peças de 1 dezena você usou? ____
Quantas peças de 1 centena você usou? ____

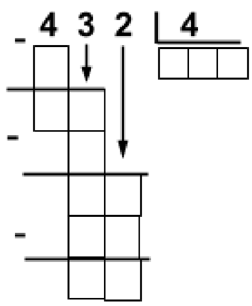
Escreva a decomposição do seu número de acordo com a quantidade de peças usadas e o valor de cada uma delas.

3. Represente novamente o seu número, porém desta vez use o mínimo de peças possível do material dourado. Agora, tente dividir as peças entre as divisórias da caixa, de maneira que cada divisória possua a mesma quantidade de peças de cada tipo.

É possível realizar esta divisão com as peças que você possui? Por que?

Se você trocar suas peças por outras de menor valor, será possível fazer a divisão? Descreva todas as trocas realizadas para que seja possível realizar a divisão.

4. Efetue a divisão preenchendo cada quadrado com apenas um número.



Escola:		**Professor(a):** Luana
Nome:		**Turma:** 6º ano
Data: __ /__ /___	**Disciplina:** Matemática	**Atividades de intervenção: Decomposição e Divisão**

O seu número é:	Sua caixa é a de número:
505	5

1. Represente seu número utilizando as peças do material dourado e cole-as no espaço abaixo:

2. Responda as perguntas observando as peças coladas no exercício anterior:

Quantas peças de 1 unidade você usou? ____
Quantas peças de 1 dezena você usou? ____
Quantas peças de 1 centena você usou? ____

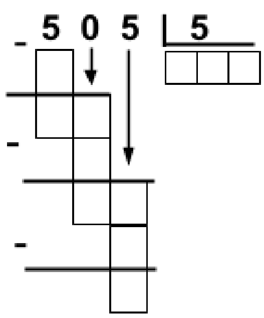
Escreva a decomposição do seu número de acordo com a quantidade de peças usadas e o valor de cada uma delas.

3. Represente novamente o seu número, porém desta vez use o mínimo de peças possível do material dourado. Agora, tente dividir as peças entre as divisórias da caixa, de maneira que cada divisória possua a mesma quantidade de peças de cada tipo.

É possível realizar esta divisão com as peças que você possui? Por que?

Se você trocar suas peças por outras de menor valor, será possível fazer a divisão? Descreva todas as trocas realizadas para que seja possível realizar a divisão.

4. Efetue a divisão preenchendo cada quadrado com apenas um número.



Escola:		**Professor(a):** Luana
Nome:		**Turma:** 6º ano
Data: __ /__ /___	**Disciplina:** Matemática	**Atividades de intervenção: Decomposição e Divisão**

O seu número é:	**Sua caixa é a de número:**
720	6

1. Represente seu número utilizando as peças do material dourado e cole-as no espaço abaixo:

2. Responda as perguntas observando as peças coladas no exercício anterior:

Quantas peças de 1 unidade você usou? ____
Quantas peças de 1 dezena você usou? ____
Quantas peças de 1 centena você usou? ____

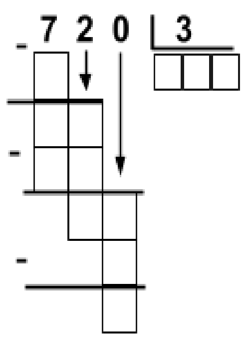
Escreva a decomposição do seu número de acordo com a quantidade de peças usadas e o valor de cada uma delas.

3. Represente novamente o seu número, porém desta vez use o mínimo de peças possível do material dourado. Agora, tente dividir as peças entre as divisórias da caixa, de maneira que cada divisória possua a mesma quantidade de peças de cada tipo.

É possível realizar esta divisão com as peças que você possui? Por que?

Se você trocar suas peças por outras de menor valor, será possível fazer a divisão? Descreva todas as trocas realizadas para que seja possível realizar a divisão.

4. Efetue a divisão preenchendo cada quadrado com apenas um número.
O exercício anterior te ajudou a realizar o cálculo?



Escola:		**Professor(a):** Luana
Nome:		**Turma:** 6º ano
Data: __ /__ /___	**Disciplina:** Matemática	**Atividades de intervenção: Decomposição e Divisão**

1. Com seus colegas, divida a quantia em dinheiro fornecida pelo professor entre as 4 pessoas do grupo.

Com quantos reais você ficou?	Com quantas notas de cada tipo você ficou?	Escreva qual a quantia recebida por cada integrante de seu grupo.

2. Pegue uma carta localizada no centro da mesa. O produto obtido deverá ser vendido a um de seus colegas. Você deverá comprar também um produto, utilizando o dinheiro que possui. Caso precise dar troco, troque o dinheiro no banco.

Qual produto você escolheu comprar? Qual era o seu preço?

Quais notas você utilizou para pagar? Você recebeu troco?

Qual produto você vendeu? Você precisou trocar seu dinheiro no banco? Se sim, escreva quais notas você trocou.

Após ter comprado e vendido produtos, com quanto dinheiro você ficou? Escreva também quais notas e/ou moedas ficaram em sua mão.

3. Cada grupo agora deve escolher uma mercadoria para comprar, dentre as apresentadas no quadro pelo professor. Para isso, cada aluno deverá contribuir com uma quantia de seu próprio dinheiro e ainda o grupo poderá pegar um empréstimo no banco.

Qual quantia foi escolhida para a contribuição de cada aluno do grupo?

Qual o valor do empréstimo feito pelo grupo?

Quais notas vocês receberam ao realizar o empréstimo?

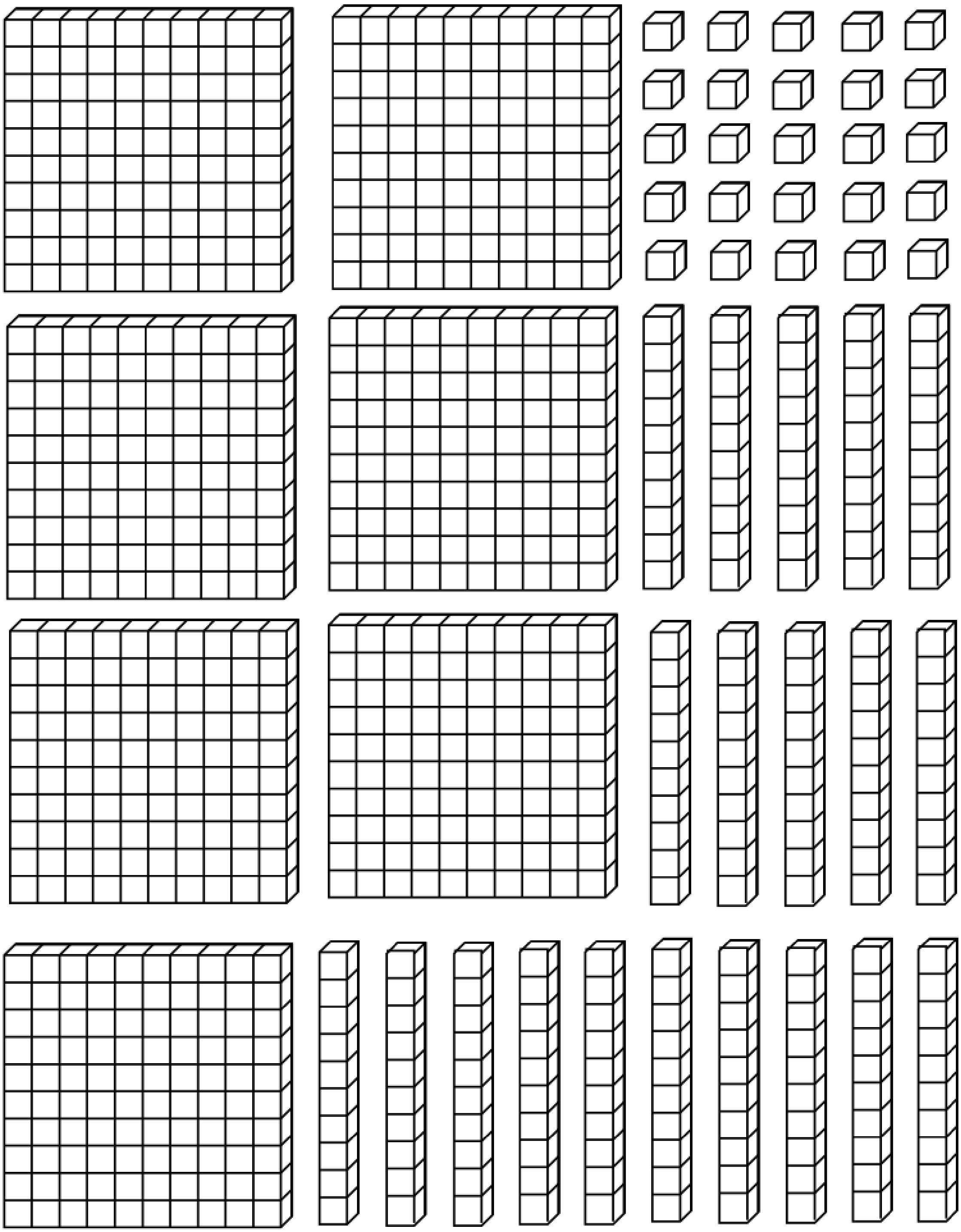
4. Junte o dinheiro restante de todo o grupo e divida igualmente entre todos os membros. É possível realizar esta divisão sem trocar notas por outras de menor valor ou moedas?

5. Arme e efetue a divisão do dinheiro restante do grupo pela quantidade de membros utilizando o algoritmo da divisão.

Recurso 1: Dinheiro para impressão

Disponível em https://escolinha.org/atividades/dinheirinho-para-imprimir/ Acesso 20/04/23.

Recurso 2: Material dourado para impressão



Disponível em http://materialesprofes.blogspot.com/2015/03/bloques-de-base-10-en-colores-y-sin.html

Acesso 20/04/23.

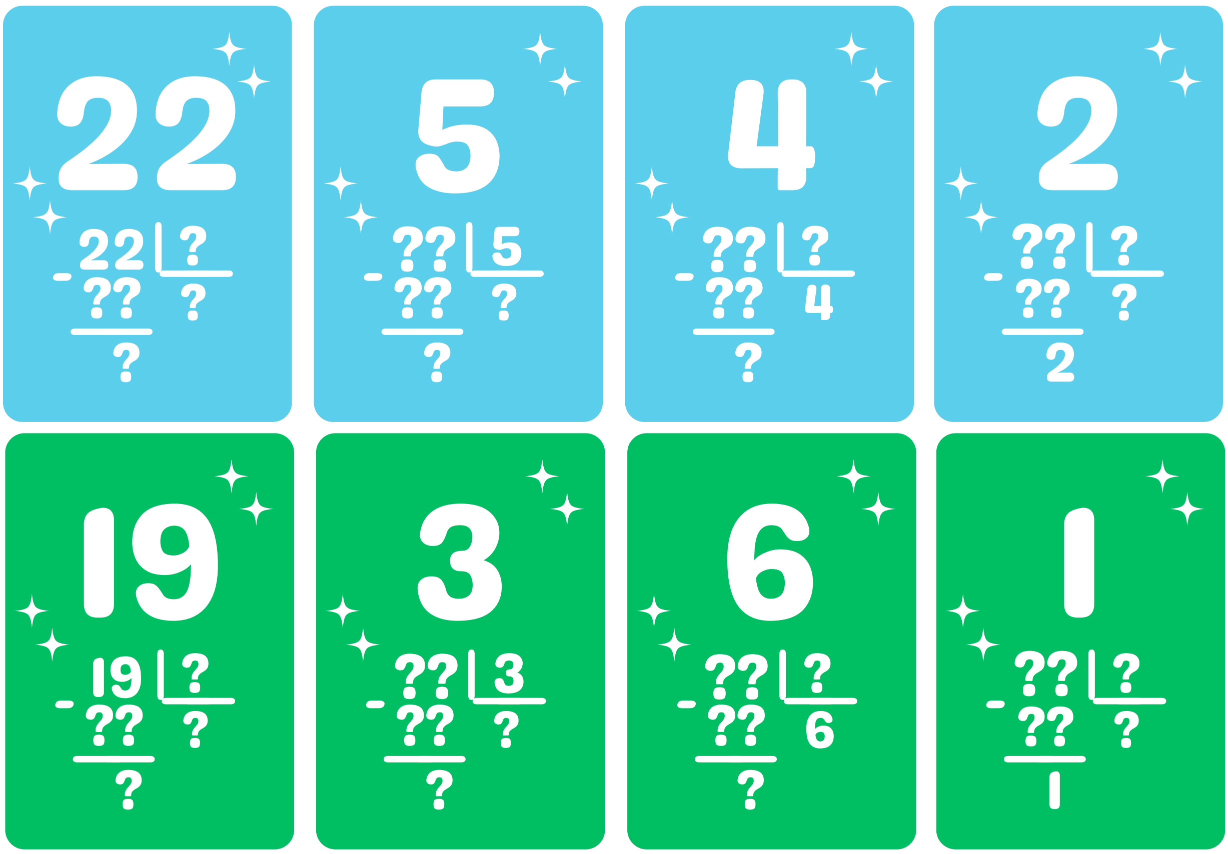
8.3 Baralho do jogo “A boca que rói”

REGRAS DO JOGO

- São necessários 5 jogadores e 1 mestre para jogar.
- Escolha um conjunto de 4 cartas que formam uma divisão e 1 carta curinga.
- Dê a 1 pessoa (mestre) a carta gabarito do conjunto.
- Embaralhe as cartas escolhidas e distribua entre as 5 pessoas que jogarão.
- Coloque o baralho de mímica no centro da mesa.
- Sorteie uma pessoa para começar. Esta pessoa deverá escolher uma carta do baralho de mímica e fazê-la para que os outros jogadores tentem adivinhar o que está escrito na carta.
- Se alguém acertar a mímica, a pessoa que está fazendo-a pode fazer uma pergunta a qualquer membro do grupo, exceto o que acertou.
- Há apenas 2 perguntas possíveis: "Qual o seu número?" e "Qual a posição do seu número?", sendo que esta segunda pergunta só pode ter como resposta as palavras: dividendo, divisor, quociente ou resto.
- Quando alguém souber qual a divisão, esta pessoa deverá pausar o jogo - sempre após uma mímica - e realizar um palpite, de maneira que todos possam ouvir. O mestre do jogo verificará se o palpite está correto.
- Caso haja disputa para quem fará o palpite primeiro, a preferência de palpite é sempre da pessoa que está fazendo a mímica na rodada.
- O vencedor é aquele que descobrir a divisão.

NÚMEROS NATURAIS

A BOCA QUE RÓI - NÍVEL 1



35

35 | ?
- ?? ?
?

4

?? | 4
- ?? ?
?

8

?? | ?
- ?? 8
?

3

?? | ?
- ?? ?
3

29

29 | ?
- ?? ?
?

6

?? | 6
- ?? ?
?

4

?? | ?
- ?? 4
?

5

?? | ?
- ?? ?
5

25

25 | ?
- ?? ?
?

7

?? | 7
- ?? ?
?

3

?? | ?
- ?? 3
?

4

?? | ?
- ?? ?
4

12

12 | ?
- ?? ?
?

2

?? | 2
- ?? ?
?

6

?? | ?
- ?? 6
?

0

?? | ?
- ?? ?
0

24

24 | ?
-?? ?
?

9

?? | 9
-?? ?
?

2

?? | ?
-?? 2
?

6

?? | ?
-?? ?
6

47

47 | ?
-?? ?
?

8

?? | 8
-?? ?
?

5

?? | ?
-?? 5
?

7

?? | ?
-?? ?
7

9

09 | ?
-?? ?
?

2

?? | 2
-?? ?
?

4

?? | ?
-?? 4
?

1

?? | ?
-?? ?
1

44

44 | ?
-?? ?
?

5

?? | 5
-?? ?
?

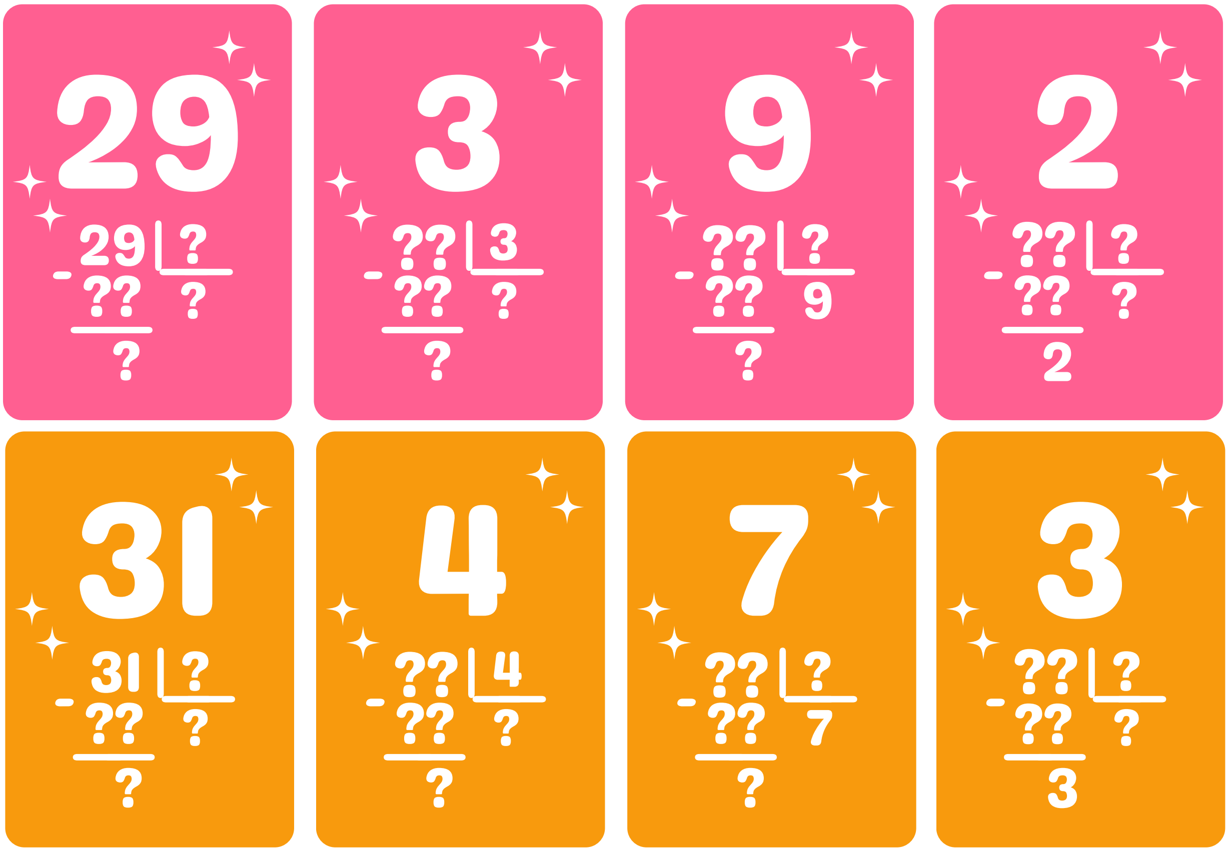
8

?? | ?
-?? 8
?

4

?? | ?
-?? ?
4

41 41 | ? - ?? ? ?	6 ?? | 6 - ?? ? ?	6 ?? | ? - ?? 6 ?	5 ?? | ? - ?? ? 5
27 27 | ? - ?? ? ?	7 ?? | 7 - ?? ? ?	3 ?? | ? - ?? 3 ?	6 ?? | ? - ?? ? 6
23 23 | ? - ?? ? ?	8 ?? | 8 - ?? ? ?	2 ?? | ? - ?? 2 ?	7 ?? | ? - ?? ? 7
53 53 | ? - ?? ? ?	9 ?? | 9 - ?? ? ?	5 ?? | ? - ?? 5 ?	8 ?? | ? - ?? ? 8



NÚMEROS DECIMAIS

A BOCA QUE RÓI - NÍVEL 2

84 décimos 8,4 ⌊? ?	3 unidades ? ⌊3 ?	28 décimos ? ⌊? 2,8	 ??????
75 décimos 7,5 ⌊? ?	15 décimos ? ⌊1,5 ?	5 unidades ? ⌊? 5	 ??????
6 unidades 6 ⌊? ?	5 unidades ? ⌊5 ?	12 décimos ? ⌊? 1,2	 ??????
9 unidades 9 ⌊? ?	4 unidades ? ⌊4 ?	225 décimos ? ⌊? 2,25	 ??????

10 unidades 10 ⌊? ?	4 unidades ? ⌊4 ?	25 décimos ? ⌊? 2,5	 ??????
13 unidades 13 ⌊? ?	2 unidades ? ⌊2 ?	65 décimos ? ⌊? 6,5	 ??????
6 unidades 6 ⌊? ?	8 unidades ? ⌊8 ?	7,5 décimos ? ⌊? 0,75	 ??????
26 décimos 2,6 ⌊? ?	4 décimos ? ⌊0,4 ?	65 décimos ? ⌊? 6,5	 ??????

3
unidades
3 | ?
?

5
unidades
? | 5
?

6
décimos
? | ?
0,6


??????

7
unidades
7 | ?
?

10
unidades
? | 10
?

7
décimos
? | ?
0,7


??????

1,8
décimos
0,18 | ?
?

9
unidades
? | 9
?

0,2
décimos
? | ?
0,02


??????

4
unidades
4 | ?
?

8
unidades
? | 8
?

5
décimos
? | ?
0,5


??????

75
décimos
7,5 | ?
?

3
unidades
? | 3
?

25
décimos
? | ?
2,5

??????

13
décimos
1,3 | ?
?

4
unidades
? | 4
?

3,25
décimos
? | ?
0,325

??????

27
décimos
2,7 | ?
?

2
unidades
? | 2
?

13,5
décimos
? | ?
1,35

??????

34
décimos
3,4 | ?
?

5
unidades
? | 5
?

6,8
décimos
? | ?
0,68

??????

45
décimos

4,5 | ?
?

9
unidades

? | 9
?

5
décimos

? | ?
0,5

??????

68
décimos

6,8 | ?
?

8
unidades

? | 8
?

8,5
décimos

? | ?
0,85

??????

DIVISÕES PROBLEMÁTICAS

A BOCA QUE RÓI - NÍVEL 3

1414 unidades 1414 | ? ?	14 unidades ? | 14 ?	101 unidades ? | ? 101	 ??????
10,5 décimos 1,05 | ? ?	15 unidades ? | 15 ?	0,7 décimos ? | ? 0,07	 ??????
6,4 décimos 0,64 | ? ?	16 unidades ? | 15 ?	0,4 décimos ? | ? 0,04	 ??????
32,4 décimos 3,24 | ? ?	36 unidades ? | 36 ?	0,9 décimos ? | ? 0,09	 ??????

1435
unidades
1435 | ?
?

7
unidades
? | 7
?

205
unidades
? | ?
205

??????

1232
unidades
1232 | ?
?

4
unidades
? | 4
?

308
unidades
? | ?
308

??????

3208
unidades
1435 | ?
?

8
unidades
? | 8
?

401
unidades
? | ?
401

??????

1005
unidades
1005 | ?
?

3
unidades
? | 3
?

335
unidades
? | ?
335

??????

2109
unidades

2109 | ?
?

3
unidades

? | 3
?

703
unidades

? | ?
703

??????

180,9
décimos

18,09 | ?
?

9
unidades

? | 4
?

20,1
décimos

? | ?
2,01

??????

152
décimos

15,2 | ?
?

5
unidades

? | 5
?

30,4
décimos

? | ?
3,04

??????

8002
unidades

8002 | ?
?

2
unidades

? | 2
?

4001
unidades

? | ?
4001

??????

22 | 5
- 20 4
2
Gabarito

19 | 3
- 18 6
1
Gabarito

35 | 4
- 32 8
3
Gabarito

29 | 6
- 24 4
5
Gabarito

25 | 7
- 21 3
4
Gabarito

12 | 2
- 12 6
0
Gabarito

24 | 9
- 18 2
6
Gabarito

47 | 8
- 40 5
7
Gabarito

09 | 2
- 08 4
1
Gabarito

44 | 5
- 40 8
4
Gabarito

41 | 6
- 36 6
5
Gabarito

27 | 7
- 21 3
6
Gabarito

23 | 8
- 16 2
7
Gabarito

53 | 9
- 45 5
8
Gabarito

29 | 3
- 27 9
2
Gabarito

31 | 4
- 28 7
3
Gabarito

8,4 | 3
2,8
Gabarito

7,5 | 1,5
5
Gabarito

6 | 5
1,2
Gabarito

9 | 4
2,25
Gabarito

10 | 4 2,5 Gabarito	13 | 2 6,5 Gabarito	6 | 8 0,75 Gabarito	2,6 | 4 6,5 Gabarito	3 | 5 0,6 Gabarito
7 | 10 0,7 Gabarito	0,18 | 9 0,02 Gabarito	4 | 8 0,5 Gabarito	7,5 | 3 2,5 Gabarito	1,3 | 4 0,325 Gabarito

2,7 | 2 1,35 Gabarito	3,4 | 4 0,68 Gabarito	4,5 | 9 0,5 Gabarito	6,8 | 8 0,85 Gabarito	1,3 | 4 0,325 Gabarito
1414 | 14 101 Gabarito	1,05 | 15 0,07 Gabarito	0,64 | 16 0,04 Gabarito	3,24 | 36 0,09 Gabarito	1435 | 7 205 Gabarito

1232 | 4
308
Gabarito

3208 | 8
401
Gabarito

1005 | 3
335
Gabarito

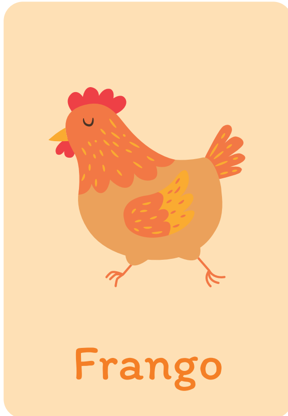
2109 | 3
703
Gabarito

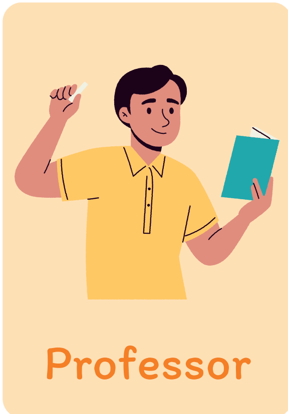
18,09 | 9
2,01
Gabarito

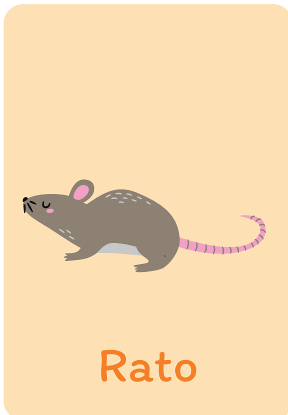
15,2 | 5
3,04
Gabarito

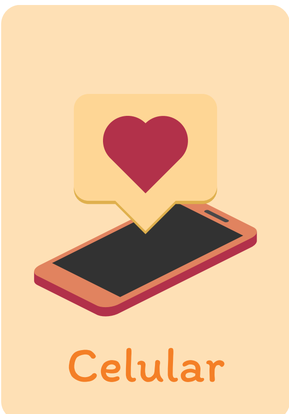
8002 | 2
4001
Gabarito

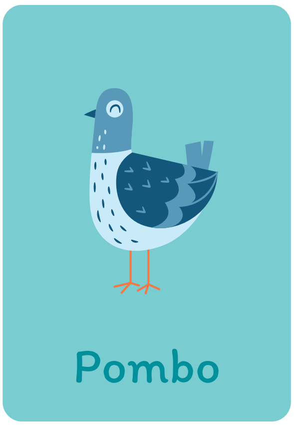
8.4 Baralho de mímica

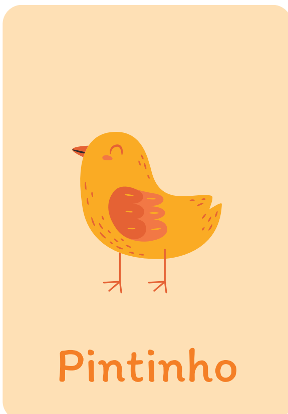


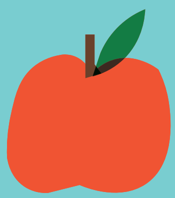










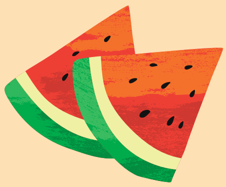


Maçã

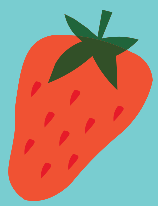
Estátua

Escova de dentes

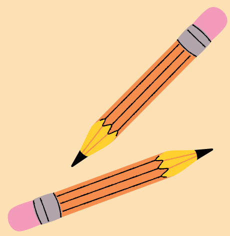
Frio



Melancia



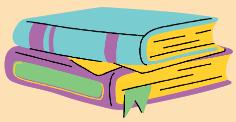
Morango



Lápis

Relógio

Tesoura

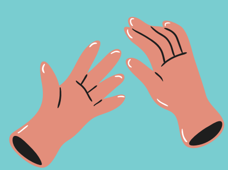


Livro

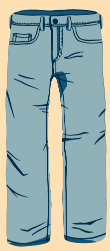
Sapato

Notebook

Mochila

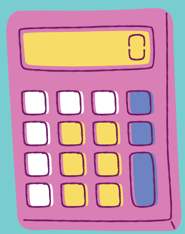


Luvas



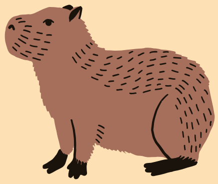
Calça

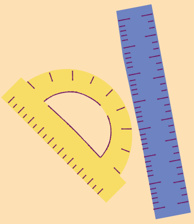
Camisa


Calculadora


Meia


Chave


Capivara


Régua


Coroa


Globo

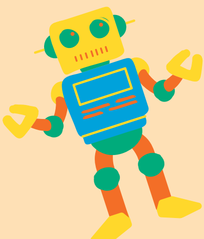

Dança

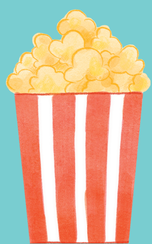

Calor


Folha


Bola


Futebol


Robô


Pipoca


Fogo


Árvore

Cogumelo

Chapéu

Casa

Flor

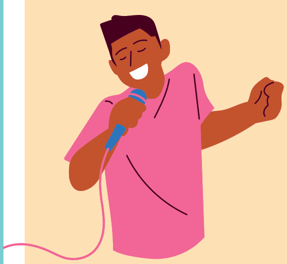
Abóbora

Lâmpada

Água

Bolo

Médico(a)



Cantor

Natação

Banho

Lavar louça

Dormir

Abraço

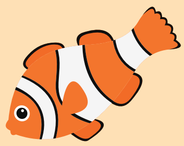
Igreja

Música

Ginástica

Piloto

Sorvete



Peixe

Pensar

Canetinha

Foto

Avião

Desenhar

Beber

Violão

Chorar

Cachorro

Comer

Escada

8.5 Termo de consentimento: avaliação diagnóstica

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

A professora de matemática da E.E. Carmélia Gonçalves Loff, Luana França Evangelista, convida o(a) aluno(a) ____ a participar da pesquisa da sua dissertação de mestrado do PROFMAT no CEFET-MG, intitulada “Por que 1414 dividido por 14 não é 11? Abordagens lúdicas para o ensino de divisão” (título provisório).

Objetivo da pesquisa: diagnosticar e classificar os tipos de dificuldades relacionadas à operação de divisão apresentadas pelos alunos na resolução de alguns exercícios propostos em sala de aula, a fim de propor uma intervenção pedagógica para amenizar a defasagem de conhecimentos.

Algumas explicações:

a) Caso seja autorizada a participação do(a) aluno(a) sob sua responsabilidade nesta pesquisa, a atividade diagnóstica realizada durante a aula de matemática do dia 19/10/2022 será analisada pela pesquisadora. Os resultados da análise serão publicados na dissertação de mestrado de forma anônima.
b) O responsável poderá entrar em contato com a professora/pesquisadora atravéz do e-mail institucional **luana.evangelista@educacao.gov.mg.br** para esclarecer eventuais dúvidas antes, durante ou depois do encerramento da pesquisa.
c) A participação nesta pesquisa é voluntária e, se o(a) aluno(a) e/ou o(a) senhor(a) não quiserem mais fazer parte da pesquisa, poderão desistir a qualquer momento e solicitar que lhes devolvam este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido assinado, sem nenhum prejuízo.
d) As informações relacionadas à pesquisa serão conhecidas apenas pela pesquisadora e a participação do(a) aluno(a) é anônima (para que sua identidade seja preservada), mantendo sigilo e privacidade.
e) O material obtido – atividade realizada pelo aluno – será utilizado unicamente para esta pesquisa e será guardado por, no máximo, um ano após o seu término.

(   ) Autorizo   (   ) Não autorizo

que a atividade realizada pelo aluno(a) seja analisada e os dados obtidos sejam publicados com os resultados da pesquisa, na dissertação de mestrado, congressos, eventos científicos ou palestras.

Eu li este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e concordo com a participação do(a) menor sob minha responsabilidade na pesquisa.

Ribeirão das Neves, MG, ____ de novembro de 2022

Nome do responsável:____

____
Assinatura do responsável

____
Luana França Evangelista

8.6 Termo de consentimento: jogos

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Convidamos o estudante ________________________________, da [redacted] a participar da pesquisa de dissertação de mestrado do PROFMAT no CEFET-MG da professora Luana França Evangelista.

A atividade de pesquisa consiste em um **conjunto de atividades e jogos educativos** que investigam o conhecimento dos alunos em relação ao tema da Divisão Euclidiana e um **questionário** de opinião e satisfação. A atividade será realizada em sala de aula, durante as aulas de Matemática. A professora irá observar o comportamento e desempenho dos alunos diante da atividade e fazer uma análise descritiva.

Caso seja autorizada a participação do(a) aluno(a) sob sua responsabilidade nesta pesquisa, os resultados da análise serão publicados na dissertação de mestrado de forma anônima. A participação do estudante é voluntária.

O responsável poderá entrar em contato com a professora/pesquisadora atravéz do e-mail institucional luana.evangelista@educacao.gov.mg.br para esclarecer eventuais dúvidas antes, durante ou depois do encerramento da pesquisa. O material obtido – atividade realizada pelo aluno – será utilizado unicamente para esta pesquisa e será guardado por, no máximo, um ano após o seu término.

Eu li este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e concordo com a participação do(a) menor sob minha responsabilidade na pesquisa.

Ribeirão das Neves, MG, ____ de abril de 2022

____

Assinatura do responsável

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Convidamos o estudante ________________________________, [redacted] a participar da pesquisa de dissertação de mestrado do PROFMAT no CEFET-MG da professora Luana França Evangelista.

A atividade de pesquisa consiste em um **conjunto de jogos educativos** que investigam o conhecimento dos alunos em relação ao tema da Divisão Euclidiana. A atividade será realizada em sala de aula, durante as aulas de Matemática. A professora irá observar o comportamento e desempenho dos alunos diante da atividade e fazer uma análise descritiva.

Caso seja autorizada a participação do(a) aluno(a) sob sua responsabilidade nesta pesquisa, os resultados da análise serão publicados na dissertação de mestrado de forma anônima. A participação do estudante é voluntária.

O responsável poderá entrar em contato com a professora/pesquisadora atravéz do e-mail institucional luana.evangelista@educacao.gov.mg.br para esclarecer eventuais dúvidas antes, durante ou depois do encerramento da pesquisa. O material obtido – atividade realizada pelo aluno – será utilizado unicamente para esta pesquisa e será guardado por, no máximo, um ano após o seu término.

Eu li este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e concordo com a participação do(a) menor sob minha responsabilidade na pesquisa.

Belo Horizonte, MG, ____ de abril de 2022

____

Assinatura do responsável

Referências

1 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. Acesso em: 27 setembro de 2022. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

2 BRITTES, E. C. *Gelosia e divisão americana: uma experiência motivadora com esses algoritmos operatórios pouco explorados no Ensino Fundamental*. 31 ago. 2016. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2983&id2=95522>.

3 CAIXETA, S. B. *Algoritmo da divisão de Euclides*. 25 mai. 2016. Diss. (Mestrado) – Universidade de Brasília (UNB). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2575&id2=95377>.

4 COLETIVA, O. *Araribá mais: matemática 6° ano*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2018. P. 388. ISBN 978-85-16-11278-3.

5 COSTA NEGRÃO, S. DA. *Os métodos históricos de multiplicação e divisão como recurso facilitador do ensino*. 10 jun. 2021. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Pará (UFPA). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6150&id2=171053317>.

6 CSIKSZENTMIHALYI, M. *Applications of Flow in Human Development and Education*. 1. ed. Claremont, Califoria: Springer, 2014. P. 475. ISBN 978-94-017-9093-2.

7 DANTE, L. R. *Ápis Matemática, 4° ano: ensino fundamental, anos iniciais*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017. P. 300. ISBN 978-85-08-18775-8.

8 DANTE, L. R. *Ápis Matemática, 5° ano: ensino fundamental, anos iniciais*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018. P. 396. ISBN 978-85-08-18778-2.

9 DANTE, L. R. *Teláris matemática, 6° ano: ensino fundamental, anos finais*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018. P. 396. ISBN 978-85-08-19114-7.

10 DÁVILA, G. F. P. *Por que e como ensiná-lo? Múltiplos aspectos do algoritmo da divisão no Ensino Básico*. 15 abr. 2013. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal Fluminense (UFF). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=383&id2=42423>.

11 FERREIRA FERNANDA APARECIDA, C. A. B. D. S. E. E. C. Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica. *Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana*, p. 14, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2235>.

12 FONTES SALVADOR, H. H. DE. *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. 1. ed. Santa Catarina, 2012. P. 58.

13 GRANDO, R. C. O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática. *Campinas, SP*, p. 175, 1995. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/1582104>.

14 HADDAD, V. R. *Materiais manipuláveis: uma intervenção em sala de aula para a divisão euclidiana*. 24 fev. 2015. Diss. (Mestrado) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1721&id2=1497>.

15 IEZZI, G.; MACHADO, A.; DOLCE, O. *Matemática e realidade 6° ano*. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2018. P. 500. ISBN 978-85-5769-200-8.

16 JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática, 3° ano: componente curricular matemática: ensino fundamental, anos iniciais*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018. P. 292. ISBN 978-85-96-01283-6.

17 JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática, 4° ano: componente curricular matemática: ensino fundamental, anos iniciais*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018. P. 308.

18 JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática, 5° ano componente curricular matemática: ensino fundamental: anos finais*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018. P. 324. ISBN 978-85-96-01286-7.

19 JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática: 3° ano: ensino fundamental: anos finais*. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018. P. 300. ISBN 978-85-08-18774-4.

20 JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática: 6° ano: ensino fundamental: anos finais*. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018. P. 372. ISBN 978-85-96-01914-9.

21 KISHIMOTO, T. M. *O jogo e a educação infantil*. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1998.

22 LOUBACK, F. *O ensino da divisão de números naturais, uma proposta personalizada*. 22 jan. 2014. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal Fluminense (UFF). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1623&id2=36052>.

23 MARTINS, C. J. L. *Algoritmo da divisão de Euclides: uma nova proposta de ensino de Matemática na educação básica*. 9 abr. 2015. Diss. (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista (UNESP). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2155&id2=278>.

24 MORAES, E. C. L. DE. *Revisitando os algoritmos para operações aritméticas fundamentais*. 6 ago. 2015. Diss. (Mestrado) – Universidade de Brasília (UNB). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2009&id2=77646>.

25 OLIVEIRA MANCEBO, R. DE. *O ensino das quatro operações para o sexto ano do Ensino Fundamental – teoria e prática*. 22 jan. 2014. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal Fluminense (UFF). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1109&id2=27306>.

26 PATARO, P. M.; BALESTRI, R. *Matemática essencial 6° ano: ensino fundamental, anos finais*. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018. P. 372. ISBN 978-85-474-0161-0.

27 PATARO, P. M.; BALESTRI, R. *Matemática essencial 7° ano: ensino fundamental, anos finais*. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018. P. 356. ISBN 978-85-474-0163-4.

28 PIAGET, J. *A construção real da criança*. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1979. P. 396.

29 RÊGO, F. R. DO. *As dificuldades dos alunos da EEM Virgílio Correia Lima em ções básicas com números naturais, inteiros e racionais*. 21 jun. 2014. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri (UFCA). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1178&id2=608>.

30 REGO ALFANO, J. J. DO. *Barras de Napier: uma aplicação para o estudo da multiplicação e da divisão*. 22 out. 2020. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia (UFBA). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5707&id2=170131534>.

31 RODRIGUES, G. S. *Uma proposta de aplicação de jogos matemáticos no Ensino Básico*. 15 jun. 2018. Diss. (Mestrado) – Universidade de Brasília (UNB). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4009&id2=160270124>.

32 SAMPAIO, F. A. *Trilhas da matemática, 6° ano: ensino fundamental, anos finais*. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2018. P. 380. ISBN 978-85-472-3666-3.

33 SAMPAIO RF E MANCINI, M. *Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica - Brazilian Journal of Physical Therapy*. 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1413-35552007000100013>. Acesso em: 3 set. 2022.

34 SANTOS GARCIA, S. M. DOS. A construção do conhecimento segundo Jean Piaget, 1997. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/download/7833/4940>.

35 SCHIRLO, J. L. *As quatro operações fundamentais da aritmética: conhecimentos prévios dos alunos no início do 1° ano do Ensino Médio*. 18 ago. 2014. Diss. (Mestrado) – Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1401&id2=777>.

36 SILVA, C. M. DA. *Aprendizagem da operação de divisão no Ensino Fundamental: estudo do nível de compreensão e capacidade de resoluções de problemas*. 26 out. 2018. Diss. (Mestrado) – Instituto Federal do Piauí (IFPI). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4270&id2=161001232>.

37 SILVA, E. A. DA. *Métodos alternativos de cálculos na multiplicação e divisão: para além dos algoritmos usuais da aritmética*. 16 mar. 2021. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Pará (UFPA). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6021&id2=171052176>.

38 SILVA SANTANA, G. DA. *Algoritmos utilizados para as quatro operações elementares*. 26 set. 2016. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás (UFG). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2852&id2=94621>.

39 SILVEIRA, Ê. *Coleção desafio matemática : manual do professor : 2° ano*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2021. P. 300. ISBN 978-65-5779-854-6.

40 SILVEIRA, Ê. *Coleção desafio matemática : manual do professor : 3° ano*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2021. P. 316. ISBN 978-65-5779-861-4.

41 SILVEIRA, Ê. *Coleção desafio matemática : manual do professor : 4° ano*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2021. P. 284. ISBN 978-65-5779-868-3.

42 SILVEIRA, Ê. *Coleção desafio matemática : manual do professor : 5° ano*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2021. P. 316. ISBN 978-65-5779-875-1.

43 SILVEIRA, Ê. *Matemática: compreensão e prática 6° ano*. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018. P. 340. ISBN 978-85-16-11368-1.

44 SOUSA, J. D. DE. *Os jogos como recursos didáticos para a melhoria da aprendizagem dos aprendentes nas aulas de Matemática*. 6 jul. 2013. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=645&id2=29806>.

45 SOUZA, J. R. DE. *Matemática realidade & tecnologia: 7 ° ano: ensino fundamental: anos finais*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018. P. 372. ISBN 978-85-96-0995-8.

46 TAVANO, P. T. *Práticas de Avaliação*. 1. ed. São Paulo: Editora Senac, 2021. P. 184.

47 TOLEDO, M. *Didática de matemática: como dois e dois: a construção da matemática*. 1. ed. São Paulo: FTD, 1997. P. 165. ISBN 85-322-3548-4.

48 VIANA, H. B. P. *Algoritmo da divisão em quatro regras*. 8 mai. 2015. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Amapá (UNIFAP). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1829&id2=694>.

49 VIZULA, A. M. *Aprendizagem matemática da multiplicação e divisão: proposta de atividades para alunos do 6º ano*. 3 abr. 2020. Diss. (Mestrado) – Universidade Estadual do Norte Fluminense (UENF). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5443&id2=170460015>.

50 VYGOTSKI, L. S. *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. 4. ed. São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda, 1991. P. 90.

51 WAPPLER, F. P. *Pensamento computacional e divisão euclidiana: possíveis conexões na aprendizagem*. 13 dez. 2021. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6519&id2=171055619>.

52 ZICHERMANN GABE E CUNNINGHAM, C. *Gamification by Design: Implementing Game Mechanics in Web and Mobile Apps*. 1. ed. Sebastopol, CA: O'Reilly Media, Inc., 2011. P. 210. ISBN 978-1-449-39767-8.