



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Gilvandro Correia de Melo Júnior

# **Uma Proposta para o Ensino de Análise Combinatória Através da Teoria dos Grafos**

Campina Grande - PB

Agosto/2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Gilvandro Correia de Melo Júnior

## **Uma Proposta para o Ensino de Análise Combinatória Através da Teoria dos Grafos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida

Campina Grande - PB

Agosto/2023

M528

Melo Júnior, Gilvandro Correia de.

Uma proposta para o ensino de análise combinatória através da teoria dos grafos / Gilvandro Correia de Melo Júnior. - Campina Grande, 2023.

91 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação: Profa. Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida"

Referências.

1. Análise Combinatória. 2. Teoria dos Grafos. 3. Sequência Didática. 4. Educação Básica Brasileira. 5. Ensino de Matemática. I. Almeida, Deise Mara Barbosa de. II. Título.

CDU 519.1(043)

Gilvandro Correia de Melo Júnior

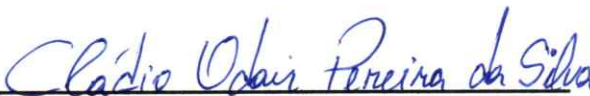
## Uma Proposta para o Ensino de Análise Combinatória Através da Teoria dos Grafos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 18 de agosto de 2023:



**Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida**  
Orientador



**Dr. Cladio Odair Pereira da Silva**  
Examinador externo - UEPB



**Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros**  
Examinador Interno - UFCG

Campina Grande - PB  
Agosto/2023

*Dedico este trabalho, a todos os professores que já tive em minha vida de estudante.*

# Agradecimentos

A Deus, pela vida, por possibilitar que eu cresça a cada dia, por iluminar e abençoar minha trajetória. Aos meus pais, Gilvandro Correia de Melo e Celma Maria Barbosa Melo, pelo apoio constante em todas as etapas da minha vida, por me ensinarem a lutar com determinação pelos meus objetivos.

A minha esposa, Sylvany Ribeiro Soares pelo companheirismo, pela compreensão nessa jornada de estudos do Profmat.

Aos meus filhos, Gabriel Ribeiro de Melo e Ana Júlia Ribeiro Melo, valiosos presentes de Deus em minha vida, por serem minha motivação para lutar sempre, os quais peço perdão pelos momentos que os privei de minha atenção, não dedicando a presença que eles mereciam.

Aos meus colegas de turma, André Macedo, Andresson Alquino, Benildo Virgínio, Carlos Gonzaga, Cláudio Teodista, Eli Azevedo, Érico Andrade, Erivan Barbosa, Gilmar Veríssimo, Idalice Santiago, João Evayr, Rafael Macedo e Wirander Rosa, Wellington Rodrigues. Por todo companheirismo que tivemos ao longo dessa jornada.

Ao corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática da UFCG, por realizarem um trabalho de excelência, contribuindo com o crescimento do nosso país.

Aos professores, Luiz Antônio e Cláudio Odair que se dispuseram a participar da banca examinadora do trabalho, dando grande contribuição para o mesmo.

A professora, Deise Mara Barbosa de Almeida, por ter me guiado na elaboração deste trabalho.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

# Resumo

Este trabalho faz uma abordagem sobre a Teoria dos Grafos, relacionando-a com problemas de Análise Combinatória. Para isso foi realizada uma pesquisa nos documentos norteadores da Educação Básica Brasileira que apontam para um ensino de matemática embasado na resolução de problemas, entre eles problemas de contagem. Neste sentido, formulamos uma sequência didática para ser aplicada em sala de aula, como forma de facilitar a prática do professor de matemática e, conseqüentemente melhorar a aprendizagem dos alunos no conteúdo de Análise Combinatória. A sequência contém problemas de contagem, que foram abordados usando conceitos e propriedades da Teoria dos Grafos, como a matriz de adjacência e os caminhos associados a um grafo, entre outros.

**Palavras-chave:** Teoria dos Grafos - Análise Combinatória - Sequência Didática



# Abstract

This work approaches Graph Theory, relating it to Combinatorial Analysis problems. For this, a research was carried out in the guiding documents of Brazilian Basic Education, which point to a teaching of mathematics, based on problem solving, including counting problems. In this sense, we formulated a didactic sequence to be applied in the classroom, as a way to facilitate the practice of mathematics teachers, and consequently improve students' learning in the content of Combinatorial Analysis. The sequence contains counting problems, which were addressed using concepts and properties from Graph Theory, such as the adjacency matrix and the paths associated with a graph, among others.

**Keywords:** Graph Theory - Combinatorial Analysis - Didactic Sequence

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Tabela com as estratégias para resolução de problemas - PCN's . . .	19
Figura 2 – Áreas do conhecimento na BNCC . . . . .	20
Figura 3 – Código alfanumérico da BNCC . . . . .	21
Figura 4 – Árvore da Vida . . . . .	23
Figura 5 – Tabuleiro do Jogo de Morris . . . . .	24
Figura 6 – Grafo do Tabuleiro do Jogo de Morris . . . . .	24
Figura 7 – Árvore genealógica da Dinastia dos Saxões, datada do século XII .	25
Figura 8 – Ilustração das Pontes Königsberg . . . . .	25
Figura 9 – Grafo do Problema das Sete Pontes de Königsberg . . . . .	26
Figura 10 – Diagrama de um grafo . . . . .	28
Figura 11 – Diagrama de um grafo com vértices e arestas . . . . .	28
Figura 12 – Grafo do Exemplo 2 . . . . .	29
Figura 13 – Grafo Simples . . . . .	29
Figura 14 – Contra-exemplo de grafo simples . . . . .	29
Figura 15 – Grafo completo . . . . .	30
Figura 16 – Contra-exemplo de grafo completo . . . . .	30
Figura 17 – Grafo que representa os estados da região Nordeste e suas fronteiras	31
Figura 18 – Grafo do Exemplo 6 . . . . .	31
Figura 19 – Passeios e Caminhos em um grafo . . . . .	34
Figura 20 – Passeio em um grafo . . . . .	35
Figura 21 – Caminho em um grafo . . . . .	35
Figura 22 – Grafo Conexo . . . . .	36
Figura 23 – Grafo Desconexo . . . . .	36
Figura 24 – Grafo do Exemplo 8 . . . . .	37
Figura 25 – Subgrafo $H_1$ do grafo $G$ . . . . .	37
Figura 26 – Subgrafo $H_2$ do grafo $G$ . . . . .	37
Figura 27 – Digrafo do Exemplo 9 . . . . .	38
Figura 28 – Árvore do exemplo 10 . . . . .	39
Figura 29 – Grafo do Exemplo 11 . . . . .	40
Figura 30 – Grafo do Exemplo 12 . . . . .	41
Figura 31 – Grafo do exemplo 13 . . . . .	43
Figura 32 – Arestas do grafo do exemplo 13 . . . . .	43
Figura 33 – Digrafo do exemplo 14 . . . . .	44
Figura 34 – Grafo do mapa da região Sudeste do Brasil . . . . .	45
Figura 35 – Ilustração do Exemplo 16 . . . . .	49

Figura 36 – Ilustração do Exemplo 17 . . . . .	49
Figura 37 – Regiões a serem coloridas do Exemplo 17 . . . . .	49
Figura 38 – Ilustração do Exemplo 22 . . . . .	53
Figura 39 – Resolução do exemplo 22 . . . . .	53
Figura 40 – Ilustração do Exemplo 23 . . . . .	55
Figura 41 – Sete pontos sobre um círculo . . . . .	59
Figura 42 – Triângulo $PQR$ inscrito no círculo do Exemplo 27 . . . . .	59
Figura 43 – Grafo do Problema 6.1 . . . . .	62
Figura 44 – Ilustração do Problema 6.2 . . . . .	63
Figura 45 – Grafo do Problema 6.2 . . . . .	63
Figura 46 – Grafo do Problema 6.2 removendo uma aresta . . . . .	64
Figura 47 – Grafo do Problema 6.2 com a remoção de duas arestas . . . . .	64
Figura 48 – Ilustração do Problema 6.3 . . . . .	64
Figura 49 – Grafo do problema 6.3 . . . . .	65
Figura 50 – Tetraedro do Problema 6.6 . . . . .	66
Figura 51 – Grafo do tetraedro do Problema 6.6 . . . . .	66
Figura 52 – Ilustração do Problema 6.7 . . . . .	67
Figura 53 – Ilustração do Problema 6.10 . . . . .	70
Figura 54 – Grafo do problema 6.10 . . . . .	70
Figura 55 – Ilustração do Exercício 7.2 . . . . .	75
Figura 56 – Ilustração do Exercício 7.4 . . . . .	78
Figura 57 – Grafo do Exercício 7.3a . . . . .	79
Figura 58 – Grafo do Exercício 7.3b . . . . .	79
Figura 59 – Cidades do Exercício 7.6 . . . . .	80
Figura 60 – Ilustração do exercício 7.7 . . . . .	81
Figura 61 – Grafo do Problema 7.1 . . . . .	86
Figura 62 – Ilustração do Exercício 7.4 . . . . .	87
Figura 63 – Grafo do Exercício 7.5a . . . . .	88
Figura 64 – Grafo do Exercício 7.5b . . . . .	88
Figura 65 – Vértices e arestas do grafo do Exercício 7.5b . . . . .	89
Figura 66 – Cidades do Exercício 7.6 . . . . .	89
Figura 67 – Ilustração do Exercício 7.7 . . . . .	90
Figura 68 – Grafo do Exercício 7.7 . . . . .	91
Figura 69 – Caminhos do grafo do Exercício 7.7 . . . . .	91
Figura 70 – Caminhos do grafo do Exercício 7.7 . . . . .	91

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Matriz de adjacência em forma de tabela . . . . .	41
Tabela 2 – Matriz de incidência em forma de tabela . . . . .	44

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>15</b>
1.1.1	Objetivo Geral	15
1.1.2	Objetivos Específicos	15
<b>1.2</b>	<b>Organização</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Grafos e Análise Combinatória na Nova BNCC</b>	<b>19</b>
2.1.1	O que é a BNCC?	19
2.1.2	Habilidades de Análise Combinatória na BNCC	21
<b>3</b>	<b>HISTÓRICO DA TEORIA DOS GRAFOS</b>	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>Origens da Teoria dos grafos</b>	<b>23</b>
<b>3.2</b>	<b>As Sete Pontes de Königsberg</b>	<b>25</b>
<b>3.3</b>	<b>A solução de Euler</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>GRAFOS: CONCEITOS E PROPRIEDADES</b>	<b>27</b>
<b>4.1</b>	<b>Grafos</b>	<b>27</b>
<b>4.2</b>	<b>Subgrafos</b>	<b>37</b>
<b>4.3</b>	<b>Digrafos</b>	<b>38</b>
<b>4.4</b>	<b>Árvores</b>	<b>39</b>
<b>4.5</b>	<b>Matrizes de um Grafo</b>	<b>40</b>
4.5.1	Matriz de Adjacência	40
4.5.2	Matriz de Incidência	42
<b>4.6</b>	<b>Coloração de Grafos</b>	<b>45</b>
<b>5</b>	<b>ANÁLISE COMBINATÓRIA: CONCEITOS E PROPRIEDADES</b>	<b>47</b>
<b>5.1</b>	<b>Princípio Aditivo da Contagem</b>	<b>47</b>
<b>5.2</b>	<b>Princípio Fundamental da Contagem</b>	<b>47</b>
<b>5.3</b>	<b>Permutações</b>	<b>50</b>
5.3.1	Fatorial	50
<b>5.4</b>	<b>Permutações Simples</b>	<b>50</b>
<b>5.5</b>	<b>Permutação com Repetição</b>	<b>52</b>
<b>5.6</b>	<b>Arranjos Simples</b>	<b>54</b>
<b>5.7</b>	<b>Combinações</b>	<b>56</b>

5.7.1	Fórmula do Número de Combinações Simples . . . . .	57
<b>6</b>	<b>TEORIA GRAFOS E PROBLEMAS DE CONTAGEM . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>7</b>	<b>SEQUÊNCIA DIDÁTICA . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>7.1</b>	<b>Descrição da Sequência Didática . . . . .</b>	<b>72</b>
7.1.1	Aula 1 : Conceitos Básicos da Teoria dos Grafos . . . . .	74
7.1.2	Aula 2 : Passeios, Caminhos e Conexidade . . . . .	75
7.1.3	Aula 3 : Grau e suas relações com vértices e arestas . . . . .	76
7.1.4	Aula 4 : Grafos Eulerianos . . . . .	77
7.1.5	Aula 5 : Matrizes e Grafos . . . . .	78
7.1.6	Aula 6 : Matriz, Grafos e Contagem . . . . .	79
7.1.7	Aula 7 : Avaliação da Aprendizagem . . . . .	80
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>82</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>83</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>85</b>
	<b>APÊNDICE A – SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA . . . . .</b>	<b>86</b>
A.0.1	Solução dos Exercícios . . . . .	87
	<b>ANEXOS . . . . .</b>	<b>93</b>

# 1 Introdução

É frequente em conversas entre professores de matemática relatos das dificuldades enfrentadas pelos mesmos em sala de aula, no ensino de Análise Combinatória em turmas do 2º ano do Ensino Médio. Donde surgiu a ideia de propor uma abordagem diferente para o ensino de Análise Combinatória, usando a Teoria dos Grafos na resolução de problemas de contagem. Tendo em vista que a Análise Combinatória é um dos principais conteúdos abordados no Ensino Médio e possui um grande leque de aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, como na estatística que usa da probabilidade como meio para tomada de decisão. Neste sentido, o trabalho apresenta uma proposta de uso da Teoria dos grafos, na resolução de problemas de contagem, já que essa teoria permite uma visualização diferente para vários tipos de problemas e consegue modelar problemas de diversas áreas.

"A teoria de grafos é, hoje, um campo de interesse crescente, cujas aplicações vão desde problemas de localização e de traçados de rotas para diversos tipos de serviços, ao projeto de processadores de eletrônicos, passando pelo planejamento de horários, pelo estudo da estrutura do DNA e pelo projeto de códigos, além dos problemas comparativamente mais simples como o da interligação elétrica e o da engenharia molecular."(NETTO; JURKIEWICZ, 2017).

Assim, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, apresentando as principais características e propriedades da Teoria dos Grafos, como os conceitos de grafo Euleriano, grau de um vértice, matriz de adjacência, matriz de incidência e os tipos diferentes de grafos. Dessa forma, permitindo a elaboração de uma sequência didática baseada na resolução de problemas de contagem via Teoria dos Grafos. Esta proposta de sequência didática, abrange as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos no conteúdo de Análise Combinatória, conforme prevê a Nova Base Comum Curricular (BNCC) . Espera-se que essa proposta de atividade, sirva como uma alternativa pedagógica eficaz, no intuito de melhorar o processo de ensino-aprendizagem nas aulas de matemática. Almeja-se também, que ela sirva como um material de divulgação e inserção da Teoria dos Grafos no Ensino Médio, abrindo caminho para a elaboração de outros trabalhos como este, gerando novas práticas pedagógicas, com o objetivo de melhorar a educação no nosso país.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo Geral

Apresentar a Teoria dos Grafos como uma alternativa para o ensino de Análise Combinatória. Propor uma sequência didática para que outros professores de matemática possam usar em sala de aula no Ensino Médio, dentro das diretrizes norteadoras que regulam esta etapa de ensino.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- ✓ Sugerir a implementação da Teoria dos Grafos no ensino de matemática.
- ✓ Melhorar o ensino de Análise Combinatória e conseqüentemente o ensino de matemática na Educação Básica.
- ✓ Analisar os documentos norteadores do Ensino Médio, para justificar a inserção da Teoria dos Grafos nessa etapa de ensino.
- ✓ Propor uma sequência didática que possa ser aplicada no Ensino Médio, utilizando a Teoria dos Grafos para abordar problemas de contagem.
- ✓ Resolver problemas de Análise Combinatória usando a Teoria dos Grafos.
- ✓ Mostrar como o uso da Teoria dos Grafos no Ensino Médio pode trazer vantagens pedagógicas para o processo de ensino-aprendizagem.

## 1.2 Organização

Este trabalho, está organizado em 8 capítulos. Como segue:

No Capítulo 1, temos a introdução do trabalho. Apresentando os objetivos e a organização estrutural do trabalho.

O Capítulo 2 trata do embasamento teórico onde foi feita uma análise nos documentos norteadores da educação básica, como a Nova Base Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's). Com o intuito de justificar, a nossa proposta de trabalho.

O Capítulo 3 trata de apresentar um pouco do contexto histórico da Teoria dos Grafos. Mostrando como a mesma teve origem e quem foi seu principal precursor.

Já o Capítulo 4, traz toda fundamentação teórica da Teoria dos Grafos, apresentando seus principais conceitos e propriedades.

No Capítulo 5, temos toda fundamentação teórica dos conceitos básicos de Análise Combinatória abordados no Ensino Médio.



O Capítulo 6 apresenta uma série de problemas matemáticos, que no Ensino Médio são abordados como problemas de Análise Combinatória e propõe a solução dos mesmos usando Teoria dos Grafos.

O Capítulo 7 traz todo o roteiro da sequência didática proposta no trabalho. Com a descrição das atividades, tempo para execução e sugestões para a avaliação.

E por fim, o Capítulo 8 traz as conclusões e considerações finais, acerca da elaboração deste trabalho.

## 2 O ensino de Análise Combinatória

A Análise Combinatória é um dos principais conteúdos de matemática abordados no Ensino Médio, tendo em vista sua grande aplicabilidade nas mais diversas áreas do conhecimento. No entanto, ensinar este conteúdo tem sido um grande desafio para os professores de matemática que atuam no Ensino Médio. É muito comum em eventos na área do Ensino da Matemática e especialmente em encontros como o PAPMEM<sup>1</sup> surgir o debate sobre como é difícil para os professores a missão de ensinar Análise Combinatória.

“A análise combinatória tem sido frequentemente indicada por professores do 2º grau como sendo a parte da matemática mais difícil de se ensinar. Apesar de ser repleta de problemas capazes de motivar os alunos, é considerada uma disciplina complicada, em que os alunos têm dificuldade em encontrar a fórmula correta de resolver o problema.” (MORGADO, 2020, p. 2)

Na maioria das salas de aula do nosso país, quando o professor de matemática começa a abordar conceitos e problemas de Análise Combinatória, surge um mundo de dúvidas e até mesmo um certo receio por parte dos alunos. Já que a maioria deles está acostumada a trabalhar com conteúdos que necessita da aplicação de algum tipo de algoritmo ou fórmula para resolver o problema proposto pelo professor. Neste sentido, fica evidente a importância de não fazer com que a Análise Combinatória se torne algo mecânico para simples aplicação de fórmulas.

"se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas." (MORGADO, 2020, p. 3)

Para que o ensino de Análise Combinatória não se torne uma simples aplicação de fórmulas ou exercícios padronizados, o professor pode usar como estratégia, a resolução de problemas. Tendo em vista, que o ensino através da resolução de problemas, se torna mais significativo e atraente para o aluno. Tornando-o um ser integrante e ativo no processo de ensino aprendizagem, desenvolvendo diferentes formas de abordar e solucionar um determinado problema.

---

<sup>1</sup> Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio. Desenvolvido pela SBM e pelo IMPA em regime de cooperação com várias universidades públicas do país.

"A resolução de problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos."(LUPINACCI; BOTIN, 2004)

A resolução de problemas é um dos caminhos mais indicados para melhorar o ensino de matemática, conforme nos mostram vários autores, entre eles (POLYA, 1978) e (DANTE, 1999) por exemplo. Porém, os documentos norteadores do ensino no Brasil, indicam e sugerem práticas de ensino que utilizam a resolução de problemas como uma alternativa eficaz para melhoria do ensino de matemática. Até o ano de 2017, quando entrou em vigor a nova BNCC<sup>2</sup>, o documento norteador que continha as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos em cada etapa de ensino, eram os PCN's<sup>3</sup>. Os PCN's de Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias também apontavam que os professores de matemática deveriam utilizar a resolução de problemas para facilitar o ensino aprendizagem de matemática.

"Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCN's privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado."(BRASIL, 2006, p. 129)

A Figura 1 apresenta uma tabela onde os PCN's indicam algumas estratégias que os professores de matemática devem adotar para trabalhar situações problemas nos mais diversos conteúdos, entre eles problemas de combinatória.

---

<sup>2</sup> Base Nacional Comum Curricular

<sup>3</sup> Parâmetros Curriculares Nacionais

Figura 1 – Tabela com as estratégias para resolução de problemas - PCN's

Investigação e compreensão	
Na área	Em Matemática
<b>Estratégias para enfrentamento de situações-problema</b>	
Identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções; por exemplo, em situações com uma diversidade de dados apresentados por meio de tabelas, gráficos, especificações técnicas, reconhecer as informações relevantes para uma dada questão que se busca resolver.</li> <li>• Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica.</li> <li>• Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas.</li> </ul>

Fonte: BRASIL, 2006, p. 115

A prática de usar a resolução de problemas, como estratégia para superar dificuldades no processo de ensino aprendizagem na disciplina de matemática, além de ser ressaltada por vários autores e pelos PCN's, como vimos anteriormente, está bem destacada na nova BNCC. Na próxima seção apresentaremos em detalhes como a nova BNCC aborda e apresenta as competências e habilidades a serem trabalhadas na área de matemática e suas tecnologias, em particular no conteúdo de Análise Combinatória.

## 2.1 Grafos e Análise Combinatória na Nova BNCC

### 2.1.1 O que é a BNCC?

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades de ensino da educação básica no Brasil (BRASIL, 2018). Ela surgiu a partir de uma série de debates e consultas públicas envolvendo profissionais de todas as etapas de ensino da educação básica e conta com a participação dos órgãos responsáveis por gerir a educação no nosso país, como Estados, Distrito Federal, Municípios e o Governo Federal. Este último com papel de mediação direta, através do MEC<sup>4</sup>.

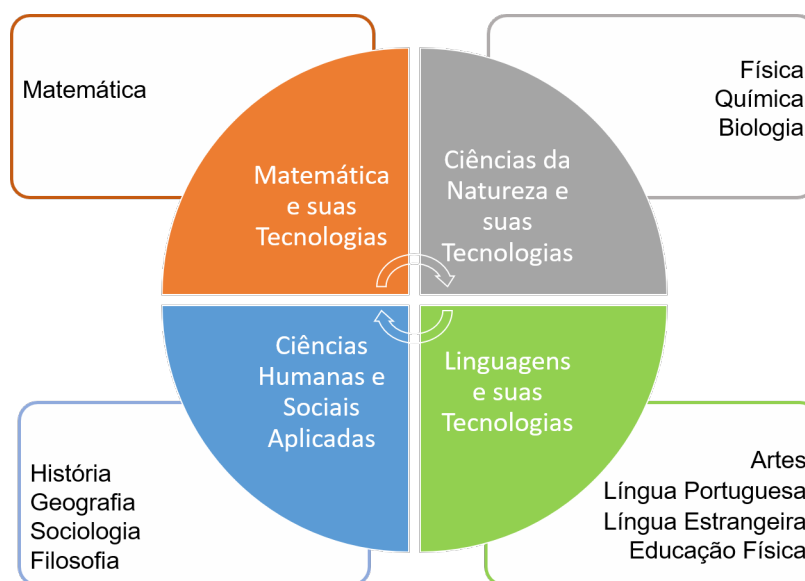
<sup>4</sup> Ministério da Educação e Cultura

Promulgada no ano de 2018 pelo MEC, a BNCC tem como um dos objetivos principais promover a melhoria da qualidade de ensino no país por meio de uma matriz de referência comum obrigatória para todas as etapas da educação básica. No trecho a seguir, o documento deixa claro sua intencionalidade.

"Nesse sentido, espera-se que a BNCC ajude a superar a fragmentação das políticas educacionais, enseje o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo e seja balizadora da qualidade da educação. Assim, para além da garantia de acesso e permanência na escola, é necessário que sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes, tarefa para a qual a BNCC é instrumento fundamental."(BRASIL, 2018, p. 8)

A implantação da BNCC, acarretou em uma série de mudanças nos currículos de toda a educação básica, essas mudanças foram mais profundas no Ensino Médio, última etapa da educação básica. Visando uma formação do aluno de forma integral, a BNCC instituiu uma nova divisão do currículo por áreas do conhecimento. Na Figura 2, temos um fluxograma com as áreas do conhecimento proposta na BNCC e seus respectivos componentes curriculares.

Figura 2 – Áreas do conhecimento na BNCC

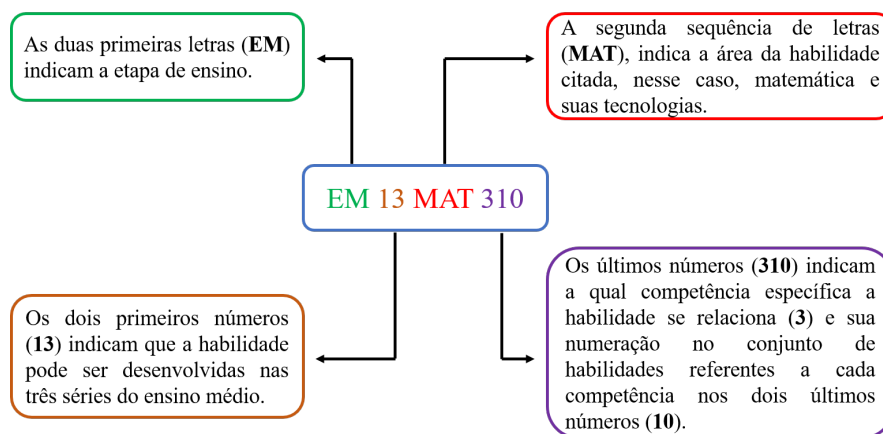


Fonte: Autor

Em relação a formação geral básica que os educandos devem adquirir em cada etapa de ensino, a BNCC propõe uma série de competências específicas a serem abordadas por cada área do conhecimento. E dentro de cada uma dessas competências, existem um conjunto de habilidades a serem trabalhadas e desenvolvidas pelos alunos nas três etapas da educação básica.

A BNCC, destaca cada habilidade a ser desenvolvida nas áreas do conhecimento com códigos alfanuméricos, nos quais estão descritos: a etapa de ensino, a série a ser trabalhada e habilidade desenvolvida.

Figura 3 – Código alfanumérico da BNCC



Fonte: Autor

Os códigos alfanuméricos, como o da Figura 3 que estão presentes na BNCC, servem como um guia para que os sistemas de ensino e profissionais da educação de modo geral, preparem seus currículos e suas estratégias de ensino, de modo que os educandos adquiram as habilidades descritas no código. Eles indicam: a etapa de ensino na qual a habilidade deve ser desenvolvida, qual competência geral a habilidade está ligada, como também em qual série a habilidade deve ser desenvolvida.

### 2.1.2 Habilidades de Análise Combinatória na BNCC

Em relação as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos do Ensino Médio na área de matemática e suas tecnologias, daremos relevância em particular as que apontam para o desenvolvimento de habilidades referentes ao conteúdo de Análise Combinatória. A competência 3 da BNCC para a área de matemática e suas tecnologias deixa bem explícito o que as habilidades trabalhadas nela, devem proporcionar ao aluno:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 523)

A competência 3 deixa claro que o aluno deve ser capaz de resolver problemas em diversos contextos e fazer análise dos resultados obtidos. Isto mostra a intenção da BNCC em formar alunos que consigam aplicar habilidades desenvolvidas na escola

no meio ao qual estão inseridos. Neste sentido, usar a Teoria dos Grafos como uma ferramenta a mais na resolução de problemas, pode aumentar as chances de sucesso na aprendizagem por parte dos alunos. A Teoria dos Grafos já foi sugerida como forma alternativa para melhorar o ensino de matemática bem antes da criação da BNCC. Os PCN's já apontavam para introdução da Teoria dos Grafos na educação básica. Como mostra o trecho:

"No Ensino Médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler."(BRASIL, 2006, p. 94).

Neste sentido, criar práticas pedagógicas que possibilitem a inserção da Teoria dos Grafos no Ensino Médio é de grande valia para o processo de ensino-aprendizagem. Tendo em vista que os problemas modelados pela Teoria dos Grafos se encaixam perfeitamente com as habilidades que os alunos devem desenvolver ao longo do Ensino Médio, destacamos aqui a habilidade (EM13MAT310).

"Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore."(BRASIL, 2018, p. 529)

Apesar de a BNCC, não fazer uma referência direta a Teoria dos Grafos, ela a menciona implicitamente, quando diz por exemplo que o aluno "deve recorrer a estratégias diversas como o uso de diagramas de árvore"(BRASIL, 2018). De fato, sabemos que as árvores são um tipo de grafo que podem modelar vários tipos de problemas de contagem. Este fato reforça mais ainda a importância de inserção de práticas pedagógicas que abordem conceitos da Teoria dos Grafos no Ensino Médio. Porém, é bom deixar claro que a BNCC não aponta para o uso de um tipo específico de grafo. Ela apenas o sugere, ou seja, isto indica que o professor pode recorrer a outras estratégias, justamente o que o nosso trabalho propõe.

## 3 Histórico da teoria dos Grafos

### 3.1 Origens da Teoria dos grafos

A Teoria dos Grafos é um tanto recente na história da matemática, quando a comparamos às demais áreas de estudo presentes na matemática. No entanto, há vários indícios em fontes históricas do uso da Teoria dos Grafos por povos e civilizações antigas, como por exemplo a *Árvore da Vida*, assírias (século VIII a.C.), como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Árvore da Vida



Fonte: SANTOS; MOTA, 2010, pág. 3

Além do exemplo da *Árvore da Vida*, citada anteriormente podemos elencar vários outros exemplos de documentos e manifestações culturais, onde podemos enxergar elementos da Teoria dos Grafos. O jogo de tabuleiro de Morris<sup>1</sup> ou Mill é um deles. O artefato mais antigo já encontrado de um tabuleiro do jogo de Morris, foi localizado no Egito, porém o registro mais antigo que encontramos em livros do jogo de Morris é datado do século XIII, no *Livros dos Jogos* de Afonso X (1221-1284) (MOTA, 2010). Na Figura 5, podemos ver uma ilustração do jogo de tabuleiro contida no Livros dos Jogos.

---

<sup>1</sup> O jogo de Morris consiste num tabuleiro que onde temos três quadrados concêntricos ligados por linhas que unem as partes médias dos quadrados internos às dos exteriores. Utilizam-se 9 peças brancas e 9 peças negras



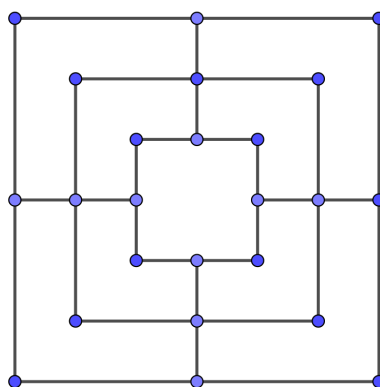
Figura 5 – Tabuleiro do Jogo de Morris



Fonte: SANTOS; MOTA, 2010, pág. 4

No tabuleiro do jogo de Morris (Figura 5), os vértices desta representação de grafos são as posições que as peças podem ocupar, já os caminhos que indicam como as peças podem ser movimentadas entre os vértices, são as arestas do grafo na notação moderna, como ilustra a Figura 6.

Figura 6 – Grafo do Tabuleiro do Jogo de Morris



Fonte: Autor

Outro objeto desenvolvido e utilizado por várias culturas distintas ao longo da história da humanidade, onde podemos visualizar traços da Teoria dos Grafos, são as árvores genealógicas. Elas tinham por objetivo, mostrar para gerações futuras a linhagem de ancestrais de um determinado povo ou família. Aliás, Árvores são um tipo de grafo que será estudado no Capítulo 3 deste trabalho. Na Figura 7, temos a árvore genealógica da Dinastia dos Saxões, datada do século XII.

Figura 7 – Árvore genealógica da Dinastia dos Saxões, datada do século XII

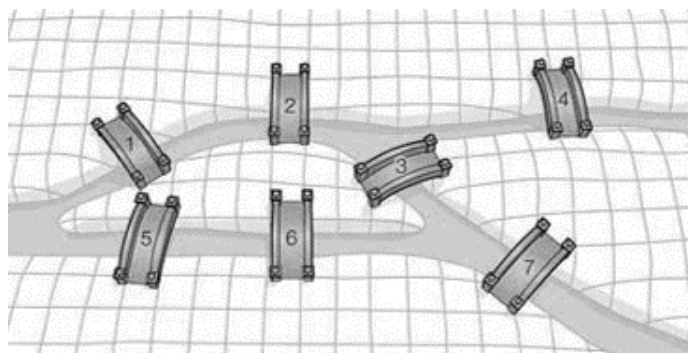


Fonte: SANTOS; MOTA, 2010, pág. 5

### 3.2 As Sete Pontes de Königsberg

No século XVIII, um enigma mobilizou uma pequena cidade localizada ao norte da Europa. Tratava-se do desafio das sete pontes de Königsberg, atual Kaliningrado, Rússia. Das Sete Pontes localizadas em Königsberg, seis delas interligavam duas ilhas às margens do Rio Pregel e uma que fazia a ligação entre as duas ilhas, como mostra a Figura 8.

Figura 8 – Ilustração das Pontes Königsberg



Fonte: Autor

O problema consistia na seguinte questão: seria possível fazer um passeio a pé pela cidade de forma a se passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto de partida?

A partir da resposta ao enigma surgiu a Teoria dos Grafos, criada em 1736 com base nos conceitos e ideias usados pelo matemático Leonhard Euler<sup>2</sup> a partir do problema das pontes de Königsberg.

### 3.3 A solução de Euler

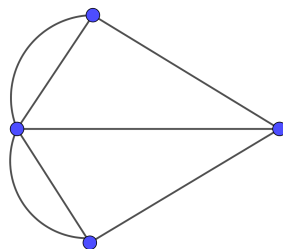
Quando não se conhece a Teoria dos Grafos é muito comum que as pessoas ao se depararem com o problema das sete pontes de Königsberg pela primeira vez, tentem resolvê-lo usando o método das tentativas, procurando achar um caminho possível ou usa-se outra lógica para tentar resolver o problema.

Sabemos que esses métodos não são os mais adequados para solucionar o problema, uma vez que hoje temos conhecimento que o mesmo não possui solução. Euler, foi um dos grandes matemáticos da história da humanidade, e usou todo seu talento matemático para provar que o problema das sete pontes de Königsberg não tinha solução, como veremos a seguir no Problema 2.1 (MOTA, 2010).

**Problema 3.1.** *Seria possível fazer um passeio a pé pela cidade (Königsberg) de forma a se passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto de partida?*

*Resolução:* Usando as definições e notações modernas que temos hoje em dia sobre a Teoria dos Grafos, o raciocínio usado por Euler, foi o seguinte: Considerando, cada região da Figura 8 como o vértice de um grafo e cada ponte como sendo uma aresta, obtemos o grafo da Figura 9. Daí, ao atravessar cada vértice, são gastos exatamente duas arestas, uma para entrar no ponto e outra para sair. Assim, para atravessar qualquer vértice, são gastas duas arestas, uma para entrar no vértice e outra para sair. Conclusão, cada vértice deve ter grau par de arestas. Acontece que o grafo das pontes de Königsberg tem vértices de grau ímpar e, portanto, o problema não possui solução.

Figura 9 – Grafo do Problema das Sete Pontes de Königsberg



Fonte: Autor

■

<sup>2</sup> Matemático suíço (1707 - 1783), que deu várias contribuições para o desenvolvimento da matemática, em áreas como a álgebra e a teoria dos números.

## 4 Grafos: Conceitos e Propriedades

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e propriedades, que serviram como embasamento teórico para o estudo da Teoria dos Grafos e suas aplicações em problemas que envolvam Análise Combinatória. No entanto, existem muitos conceitos e propriedades da Teoria dos Grafos que não abordaremos neste trabalho. Ao leitor que desejar se aprofundar mais no estudo da Teoria dos Grafos indicamos a leitura de (LOVASZ; PELIKAN; VESZTERGOMBI, 2013) e (NETO, 2016), que serviram como referência para elaboração desse capítulo.

### 4.1 Grafos

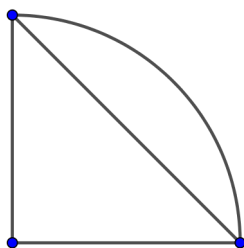
A Teoria dos Grafos faz parte de uma das áreas da matemática discreta que estuda e analisa as relações entre os objetos de um determinado conjunto.

**Definição 4.1.** *Um grafo  $G$  é um par  $(V, A)$  em que  $V$  é um conjunto finito e  $A$  consiste de dois pares não ordenados de  $V$ .*

Pela Definição 4.1 podemos afirmar que um grafo  $G$  é constituído de um conjunto  $V$  não-vazio cujos elementos são chamados de vértices (ou nós), e um conjunto  $A$  de pares não ordenados de elementos de  $V$ , chamados de arestas. Denotamos o grafo por  $G(V, A)$  ou simplesmente  $G$ . Para representar uma aresta que liga dois vértices  $v_i$  e  $v_j$  de um grafo  $G(V, A)$  denotamos essa aresta por  $a_{ij} = \{v_i, v_j\}$ . Os grafos também podem ser representados através de diagramas, onde os vértices são representados por pontos e cada aresta é representada por uma linha ligando os pares de vértices que a definem. No exemplo a seguir, temos dois grafos com as ilustrações de seus vértices e arestas em um diagrama.

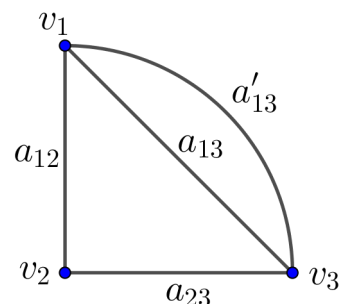
**Exemplo 1.** *Na Figura 10 temos um diagrama de um grafo  $G$ , onde  $n(V) = 3$  e  $n(A) = 4$ . E na Figura 11 temos o diagrama do grafo com a indicação de seus vértices e arestas.*

Figura 10 – Diagrama de um grafo



Fonte: Autor

Figura 11 – Diagrama de um grafo com vértices e arestas



Fonte: Autor

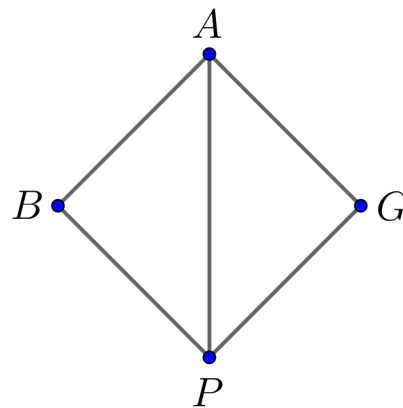
A Teoria dos Grafos possui uma vasta gama de aplicações, que vai desde as engenharias a áreas como saúde e ciências humanas.

"Grafos são muito úteis na representação de uma grande variedade de situações. É um tanto natural considerar o grafo cujo os nós são cidades e cujas arestas são estradas (ou ferrovias, ou linhas telefônicas) entre essas cidades. Podemos usar um grafo para descrever uma rede elétrica, digamos o circuito impresso sobre uma placa em seu computador. Na realidade grafos podem ser usados em qualquer situação onde uma relação entre certos objetos é definida." (LOVÁSZ, PELIKAM, VESZTERGOMBI, 2013, p.133)

No Exemplo 2, temos uma aplicação da Teoria dos Grafos nas relações pessoais entre um grupo de pessoas. Este mesmo raciocínio pode ser aplicado para estabelecer as relações entre uma pessoa e seus seguidores em uma rede social, o que permite empresas de tecnologia saber o alcance de uma informação ou de uma propaganda postada por uma pessoa em uma rede social.

**Exemplo 2.** *Em uma reunião empresarial, estão presentes: Ana, Gabriel, Paulo e Bruno. Ana conhece Gabriel, que também conhece Paulo, Paulo conhece Ana e Bruno, que também é amigo de Ana. Podemos representar as relações de amizade entre os integrantes da reunião, através de um grafo, como mostra a Figura 12, onde cada vértice está representado pela letra inicial do nome do integrante da reunião.*

Figura 12 – Grafo do Exemplo 2



Fonte: Autor

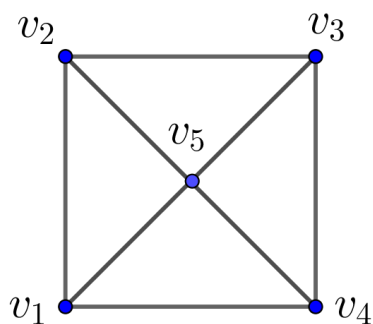
No grafo, cada vértice representa uma pessoa da reunião, e suas arestas indicam se as pessoas possuem relação de amizade ou não.

**Definição 4.2.** Um grafo  $G$  é simples se não possui laços e/ou arestas paralelas.

Um laço ou loop em um grafo é uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo. No Exemplo 3, apresentaremos um grafo simples e um contra-exemplo de grafo simples. Veja:

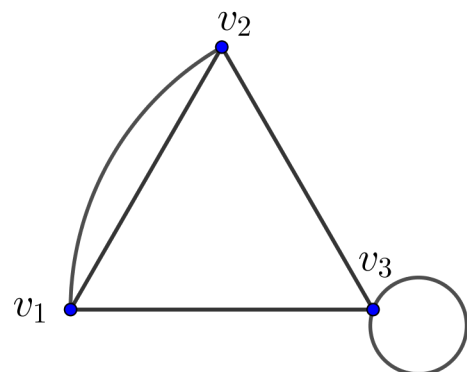
**Exemplo 3.** Na Figura 13, temos um grafo simples, visto que ele não possui laços e também não possui arestas paralelas. Porém, no grafo da Figura 14, o vértice  $v_3$  possui um laço e os vértices  $v_1$  e  $v_2$  possuem duas arestas paralelas os conectando, isso faz com que ele não seja um grafo simples.

Figura 13 – Grafo Simples



Fonte: Autor

Figura 14 – Contra-exemplo de grafo simples

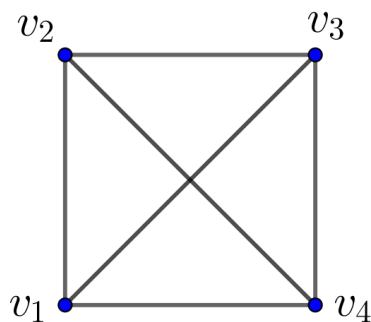


Fonte: Autor

**Definição 4.3.** Um grafo  $G$  é dito ser completo, quando há uma aresta entre cada par de seus vértices. Designamos estes grafos por  $K_n$ , onde o número de vértices, dado por  $n$  é a ordem do grafo.

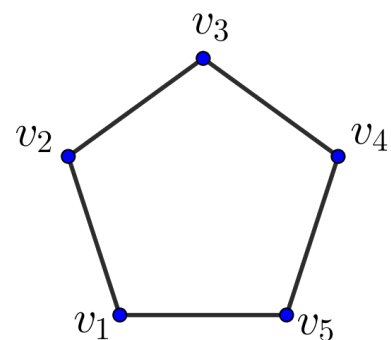
**Exemplo 4.** Observe que no grafo da Figura 15, temos um grafo onde todos os seus pares de vértices possui uma aresta os ligando, ou seja, temos um grafo completo. Já na Figura 16 temos um contra-exemplo de grafo completo. Note, que no grafo da Figura 16, não existem arestas  $\{v_1, v_3\}$ ,  $\{v_1, v_4\}$ ,  $\{v_2, v_4\}$ ,  $\{v_2, v_5\}$  e  $\{v_3, v_5\}$ , o que contradiz a definição de grafo completo.

Figura 15 – Grafo completo



Fonte: Autor

Figura 16 – Contra-exemplo de grafo completo



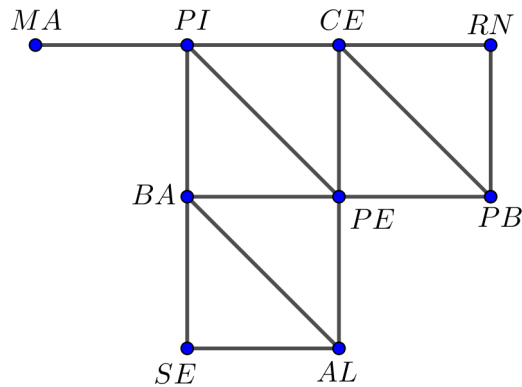
Fonte: Autor

Nas Definições 4.4 e 4.5 a seguir, apresentaremos os conceitos de Adjacência e Incidência, que estabelecem as relações entre vértices e arestas de um grafo. O conceito de adjacência e incidência serão de fundamental importância no elo proposto entre Análise Combinatória e Teoria dos Grafos, proposto neste trabalho.

**Definição 4.4.** Dois vértices  $v_i$  e  $v_j$  de um grafo  $G(V, A)$  são ditos adjacentes se existe uma aresta  $a_{ij} \in G$ , ligando  $v_i$  a  $v_j$ .

**Exemplo 5.** Consideremos o conjunto formado por todos os estados da região nordeste. E consideremos também o conjunto formado por todos os pares de estados da região nordeste que fazem fronteira um com o outro. Assim, tomando os estados como sendo os vértices de um grafo e as fronteiras entre eles como sendo as arestas. Obtemos o grafo da Figura 17. Logo, existem as arestas  $\{\text{Ceará, Pernambuco}\}$  e  $\{\text{Sergipe, Alagoas}\}$ . Porém,  $\{\text{Ceará, Alagoas}\}$  não é uma aresta de grafo. Isto, porque os estados não possuem fronteira.

Figura 17 – Grafo que representa os estados da região Nordeste e suas fronteiras



Fonte: Autor

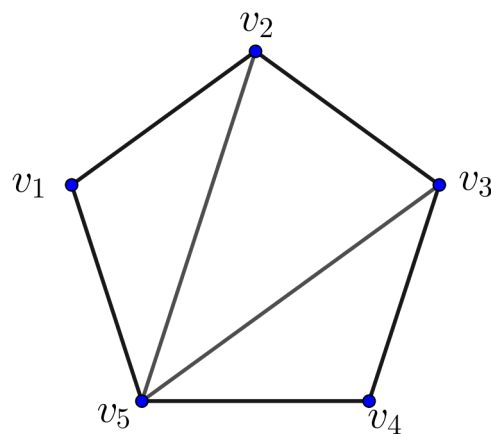
**Definição 4.5.** *Uma aresta é incidente a um vértice  $v$  em um grafo  $G(V, A)$ , se ela conecta  $v$  a outro vértice de  $G(V, A)$ .*

A partir da definição de incidência podemos apresentar outros resultados muito importantes da Teoria dos Grafos, que são a definição de grau de um vértice e as definições de Matriz de Adjacência e Matriz de Incidência, que serão apresentadas mais adiante.

**Definição 4.6.** *Dado um vértice  $v$  em um grafo  $G(V, A)$ , o grau de  $v$  é dado pelo número de arestas que incidem em  $v$ . Representamos o grau do vértice  $v$ , por  $d(v)$ .*

**Exemplo 6.** *No grafo da Figura 18, o grau do vértice  $v_2$  é 3, ou seja,  $d(v_2) = 3$ , pois incidem três arestas em  $v_2$ . Já o vértice  $v_4$  possui grau 2, tendo em vista que apenas duas arestas incidem nele.*

Figura 18 – Grafo do Exemplo 6



Fonte: Autor



**Teorema 4.1.** *Dado um grafo simples  $G(V, A)$  com  $n$  vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  e com  $m$  arestas. A soma dos graus dos vértices de  $G$  é igual ao dobro do número de arestas, ou seja:*

$$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + \dots + d(v_n) = 2 \cdot m. \quad (4.1)$$

*Demonstração.* Note que, se  $a_{12} = \{v_1, v_2\}$  é uma aresta de  $G$ , então  $a_{12}$  será contada duas vezes no primeiro membro da Equação (4.1), ou seja, contaremos ela uma vez na parcela  $d(v_1)$  e outra na parcela  $d(v_2)$ . Portanto, o primeiro membro da Equação (4.1) tem que ser igual a  $2 \cdot m$ , já que esse número conta o número de arestas de  $G$ , exatamente duas vezes. Logo, concluímos que:

$$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + \dots + d(v_n) = 2 \cdot m.$$

■

Do Teorema 4.1, decorre os Corolários 4.2 e 4.3, que apresentaremos a seguir com suas respectivas demonstrações.

**Corolário 4.2.** *Um grafo completo  $K_n$ , possui  $\binom{n}{2}$  arestas.*

*Demonstração.* No grafo  $K_n$  todos os vértices tem grau  $(n - 1)$ , uma vez que cada vértice está ligado a todos os  $n - 1$  vértices de  $G$ , com exceção dele mesmo. Como em um grafo completo todos os vértices possuem o mesmo grau  $k$ . Então, pelo Teorema 4.1, temos que:

$$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + \dots + d(v_n) = 2m \Rightarrow \underbrace{k + k + k + \dots + k}_{n \text{ vezes } k} = 2m \Rightarrow n \cdot k = 2m.$$

Assim, substituindo  $k$  por  $(n - 1)$ . Temos que:

$$n \cdot (n - 1) = 2m \Rightarrow m = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}.$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} &= \frac{n!}{2!(n-2)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{2 \cdot \cancel{(n-2)!}} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que  $m = \binom{n}{2}$ .

■

**Corolário 4.3** (Euler). *Em um grafo qualquer, o número de vértices que tem grau ímpar é sempre par.*

*Demonstração.* Vamos aplicar o Teorema 4.1, dividindo o somatório em duas parcelas, uma com os vértices de grau par e outra com os de grau ímpar.

$$\sum_{n=1}^n d(v_i) = \sum_{\text{grau par}} d(v_i) + \sum_{\text{grau ímpar}} d(v_i). \quad (4.2)$$

O lado esquerdo da Equação (4.2) é par, pelo Teorema 4.1 e a primeira parcela do lado direito da Equação 3.2 é par, pois é uma soma de números pares. Assim para a igualdade ser par, a segunda parcela da soma deve obrigatoriamente ser par, ou seja:

$$\sum_{\text{grau ímpar}} d(v_i) \text{ é um número par.}$$

Como cada  $d(v_i)$  na segunda parcela da Equação (4.2) é ímpar, temos que ter um número par de elementos para que a soma seja um número par. ■

Em alguns problemas que envolvem a Teoria dos Grafos, é necessário estabelecer algumas relações entre seus vértices. As principais relações que podemos estabelecer entre os vértices de um grafo são as definições de passeio, trajeto e caminho. Mais a diante, a partir da definição de caminho em um grafo, estabeleceremos outro conceito importante da Teoria dos Grafos, que é ideia de Subgrafo.

**Definição 4.7.** *Um passeio de comprimento  $k \geq 1$  em um grafo  $G$  é uma sequência*

$$P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$$

*de vértices (não necessariamente distintos) de  $G$ , tal que  $v_{i-1}$  é adjacente a  $v_i$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Um passeio  $P$  será dito fechado se  $v_0 = v_k$ .*

Na Definição 4.7, o comprimento de um passeio  $P$  é dado pelo número de arestas atravessadas por  $P$ .

**Definição 4.8.** *Dado um grafo  $G(V, A)$ , um caminho em  $G$  consiste de uma sequência finita alternada de vértices e arestas, começando e terminando por vértices, tal que cada aresta é incidente ao vértice que a precede e que a sucede e não há repetição de vértices. Em outras palavras, um caminho é um passeio onde não há repetição de vértices.*

**Definição 4.9.** Um ciclo em um grafo  $G$ , é um passeio fechado

$$(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_0)$$

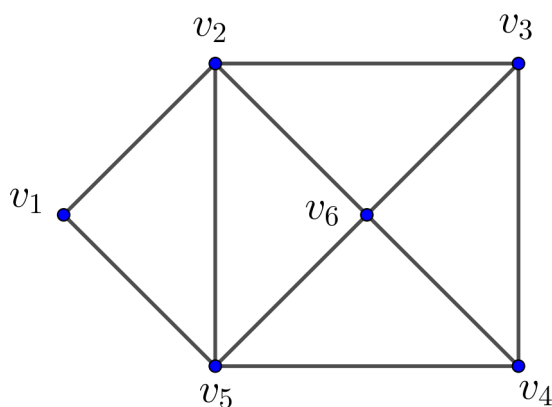
em  $G$ , de comprimento  $k \geq 3$  e tal que  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$  é um caminho.

A Definição 4.8 nos mostra que em um caminho não há repetição de vértices. Logo, podemos concluir que todo caminho em um grafo é um passeio, porém nem todo passeio é um caminho. No exemplo a seguir apresentaremos um caminho e um passeio em um grafo.

**Exemplo 7.** Dado o grafo  $G$ , da Figura 19, determine:

- a) um passeio de  $G$
- b) um caminho de  $G$

Figura 19 – Passeios e Caminhos em um grafo

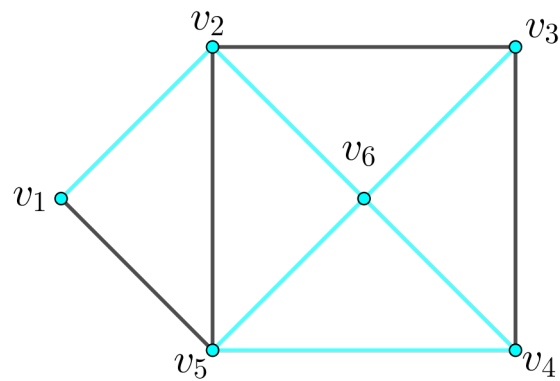


Fonte: Autor

*Resolução.* Pelas definições 3.5 e 3.6, temos que:

- a) Na Figura 20, temos um passeio do grafo da Figura 19. Esse passeio é dado pela sequência de vértices :  $P = (v_1, v_2, v_6, v_5, v_4, v_6, v_3)$ .

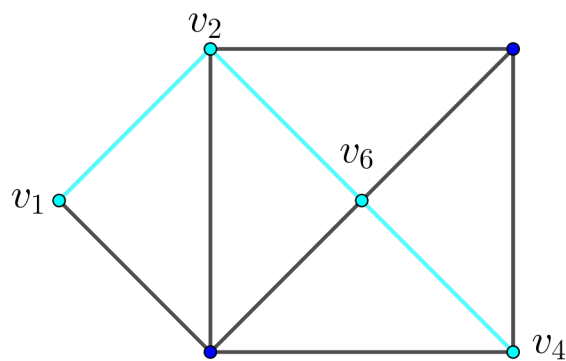
Figura 20 – Passeio em um grafo



Fonte: Autor

- b) Na Figura 21, temos um caminho do grafo da Figura 19. Esse caminho é dado pela sequência de vértices:  $(v_1, v_2, v_6, v_4)$ .

Figura 21 – Caminho em um grafo



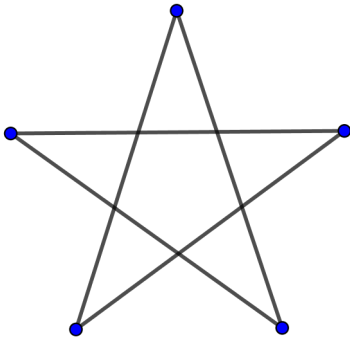
Fonte: Autor

■

**Definição 4.10.** Um grafo  $G(V, A)$  é dito ser conexo, se para quaisquer vértices distintos  $v_1$  e  $v_2$ , existir um caminho em  $G$  cujas extremidades são  $v_1$  e  $v_2$ . Caso contrário diremos que o grafo é desconexo.

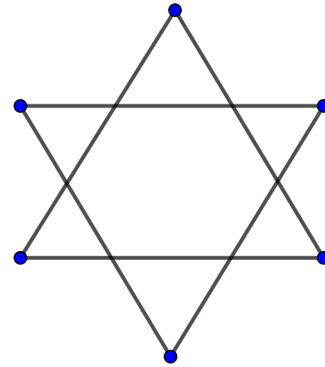
Na Figura 22 temos um exemplo de grafo conexo e na Figura 23, temos um grafo desconexo.

Figura 22 – Grafo Conexo



Fonte: Autor

Figura 23 – Grafo Desconexo



Fonte: Autor

Uma definição muito importante para Teoria dos grafos que está diretamente ligada a resolução do problema das Sete Pontes de Königsberg e ao conceito de passeio, é a definição de *Passeio Euleriano*, que apresentaremos a seguir.

**Definição 4.11.** *Um passeio Euleriano em um grafo conexo é um passeio fechado que usa cada aresta do grafo exatamente uma vez. Um grafo conexo é Euleriano se contiver um passeio Euleriano.*

**Lema 4.4.** *Se todo vértice de um grafo  $G$ , não necessariamente simples, possui grau maior ou igual a 2, então  $G$  contém um ciclo.*

*Demonstração.* Se  $G$  possui laços ou arestas paralelas, o resultado é imediato. Agora, suponha que  $G$  é um grafo simples. Assim, a partir de um vértice  $v_i$  qualquer iniciamos um passeio partindo para um vértice  $v_{i+1}$ , adjacente e diferente de  $v_{i-1}$  qualquer. Daí, como  $G$  possui um número finito de vértices, em algum momento deste passeio escolheremos um vértice já escolhido anteriormente, gerando um ciclo. ■

**Teorema 4.5.** (a) *Se um grafo conexo tem mais que dois vértices com grau ímpar, então ele não tem passeio euleriano.*

(b) *Se um grafo conexo tem exatamente dois vértices com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio euleriano tem que começar em um desses vértices e terminar no outro.*

(c) *Se um grafo conexo não tem vértices de grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio euleriano é fechado.*

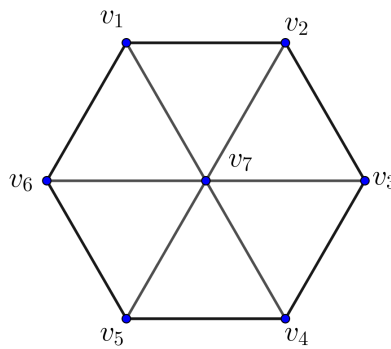
A demonstração do Teorema 4.5, pode ser encontrada em (LOVASZ; PELIKAN; VESZTERGOMBI, 2013).

## 4.2 Subgrafos

**Definição 4.12.** Um grafo  $H(V', A')$  é um subgrafo de um grafo  $G(V, A)$  se todos os vértices e todas as arestas de  $H$  pertencem a  $G$ , isto é,  $V' \subseteq V$  e  $A' \subseteq A$  e cada aresta de  $H$  possui as mesmas extremidades que em  $G$ . Denotamos um subgrafo através da mesma notação usada para conjuntos, isto é  $H \subset G$ .

**Exemplo 8.** Dado o grafo  $G$ , na Figura 24. Podemos determinar alguns de seus subgrafos.

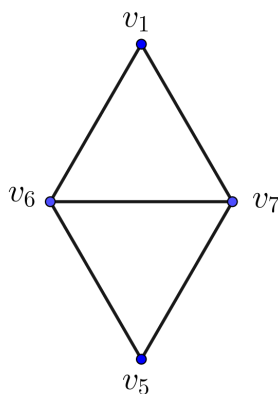
Figura 24 – Grafo do Exemplo 8



Fonte: Autor

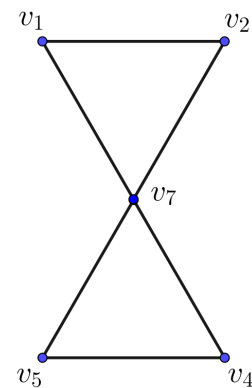
Os grafos  $H_1$  (Figura 25) e  $H_2$  (Figura 26), são subgrafos de  $G$ .

Figura 25 – Subgrafo  $H_1$  do grafo  $G$



Fonte: Autor

Figura 26 – Subgrafo  $H_2$  do grafo  $G$



Fonte: Autor

Tendo como base a Definição 4.12, podemos fazer algumas observações sobre o conceito de Subgrafo.

- i) Todo Grafo é subgrafo de si mesmo.

- ii) Um subgrafo de um subgrafo de um grafo  $G$  também é um subgrafo de  $G$ .
- iii) Uma aresta (e os vértices aos quais ela é incidente) de um grafo  $G$  é um subgrafo de  $G$ .

### 4.3 Digrafos

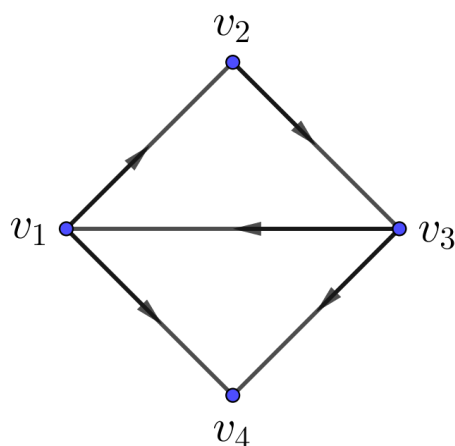
Em algumas aplicações as arestas de um grafo são definidas como pares ordenados de seus vértices. Nessas aplicações dizemos que o grafo é orientado ou direcionado, e o denominamos de Digrafo. Na Definição 4.13, apresentaremos o conceito de Digrafo.

**Definição 4.13.** Um digrafo (grafo direcionado)  $G(V, A)$  é constituído por um conjunto  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  não-vazio de objetos, chamados vértices (ou nós), um conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  de arestas ou arcos e uma aplicação  $\psi$  que associa cada aresta a um par ordenado de vértices.

Os digrafos são um tipo particular de grafo, logo podem ser representados através de um diagrama onde os vértices são representados por pontos e cada aresta  $a_{ij} = \{v_i, v_j\}$  é representada por uma linha ligando  $v_i$  a  $v_j$ . No entanto, no diagrama que representa um digrafo colocamos a orientação na aresta, com uma seta apontando para  $v_j$  ou para  $v_i$  dependendo da situação .

**Exemplo 9.** No digrafo abaixo, seus vértices são  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e suas arestas são  $A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_1, v_4)\}$  como mostra a Figura 27.

Figura 27 – Digrafo do Exemplo 9



Fonte: Autor

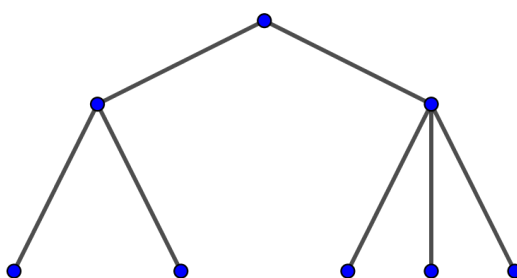
## 4.4 Árvores

Nesta secção falaremos um pouco sobre um tipo particular de grafos, as árvores. Elas pode modelar diversos tipos de situações problemas. A seguir apresentaremos a definição de árvore e alguns exemplos.

**Definição 4.14.** Um grafo  $G(V,A)$  é uma árvore, se for conexo e não possuir ciclos.

**Exemplo 10.** O grafo da Figura 28 é uma árvore. Note que, o grafo não possui ciclos, pois não é possível iniciar um passeio em um vértice e terminá-lo nele próprio.

Figura 28 – Árvore do exemplo 10



Fonte: Autor

Em uma árvore  $G$ , uma *folha* é um vértice cujo grau é 1. E um vértice cujo grau seja maior que 1 o denominamos de *nó*. A seguir apresentaremos dois importantes resultados, envolvendo o conceito de árvore.

**Lema 4.6.** Toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos duas folhas.

*Demonstração.* Seja  $G$  uma árvore com pelo menos dois vértices e considere, em  $G$ , um caminho  $C$  com o maior comprimento possível. Se  $C = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , afirmamos que  $v_1$  e  $v_n$  são folhas. De fato, se  $d(v_1) \geq 2$  então,  $v_1$  seria adjacente a  $v_2$  e a um outro vértice,  $v_0$  digamos. Como árvores não contêm ciclos, deve ser  $v_0 \neq v_3, \dots, v_n$ . Daí, o caminho  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$  teria comprimento maior do que o de  $C$ , o que é um absurdo. Logo,  $d(v_1) = 1$ . Analogamente,  $d(v_n) = 1$

■

**Teorema 4.7.** Toda árvore com  $n$  vértices, possui exatamente  $n - 1$  arestas.

*Demonstração.* Fazemos indução sobre  $n$ . Inicialmente, é claro que toda árvore com dois vértices tem exatamente uma aresta. Suponha, por hipótese de indução, que toda árvore com  $n > 1$  vértices tem exatamente  $n - 1$  arestas, e considere uma árvore  $G$  com  $n + 1$  vértices. Pelo Lema 4.6,  $G$  tem uma folha  $u$ ; portanto,  $G - \{u\}$  é uma árvore com  $n$  vértices. Por hipótese de indução, temos que  $G - \{u\}$  tem  $n - 1$  arestas. Mas,



como  $G$  tem exatamente uma aresta a mais que  $G - \{u\}$ , segue que  $G$  tem exatamente  $n$  arestas. ■

## 4.5 Matrizes de um Grafo

### 4.5.1 Matriz de Adjacência

A matriz de adjacência estabelece a relação de adjacência entre dois vértices distintos de um grafo. Assim, podemos afirmar que a matriz de adjacência, nos mostra se dois vértices de um grafo estão, ou não, conectados por uma aresta.

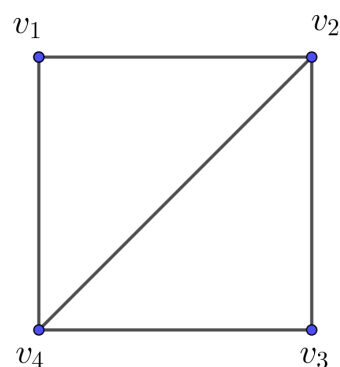
**Definição 4.15.** *Seja  $G(V, A)$  um grafo simples com  $n$  vértices. A matriz de adjacência  $A$  é uma matriz quadrada<sup>1</sup> de ordem  $n$  cujas entradas são:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ forem adjacentes} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como matrizes podem ser abordadas como tabelas, em algumas situações talvez seja mais interessante apresentar a matriz de adjacência como uma tabela. Pois, para um leitor que não possui conhecimento do conceito de matriz, usar uma tabela no lugar da matriz tornará mais simples seu entendimento.

**Exemplo 11.** *Dado o grafo  $G$  da Figura 29, determine sua matriz de adjacência.*

Figura 29 – Grafo do Exemplo 11



Fonte: Autor

*Resolução:* Sendo os vértices dispostos na ordem citada, temos que a matriz de adjacência de  $G$  é dada por:

<sup>1</sup> Uma matriz é dita quadrada se o número de linhas é igual ao número de colunas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que o elemento  $a_{42} = 1$ , pois os dois vértices são adjacentes, ou seja, existe uma aresta conectando  $v_2$  a  $v_4$ . Já o elemento  $a_{31} = 0$ , isso porque não existe uma aresta ligando  $v_1$  a  $v_3$ . Outra forma de apresentar a matriz de adjacência de  $G$ , seria dispondo seus elementos em uma tabela com  $n$  linhas e  $n$  colunas. Veja:

Tabela 1 – Matriz de adjacência em forma de tabela

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$v_1$	0	1	0	1
$v_2$	1	0	1	1
$v_3$	0	1	0	1
$v_4$	1	1	1	0

Fonte: Autor

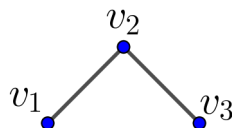
■

**Exemplo 12.** *Determine o grafo  $G$ , cuja matriz de adjacência é dada por:*

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Resolução:* Para resolver este exercício, temos que estabelecer a relação entre cada elemento  $a_{ij}$  da matriz com as arestas e vértices do grafo. Note que, o elemento  $a_{12} = 1$  indica uma aresta entre os vértices  $v_1$  e  $v_2$ . Daí, percebemos que o grafo possui  $a_{12} = \{v_1, v_2\}$ ,  $a_{32} = \{v_3, v_2\}$  como aresta e possui 3 vértices. Na Figura 30, temos a representação desse grafo.

Figura 30 – Grafo do Exemplo 12



Fonte: Autor

■

Podemos fazer algumas observações importantes sobre a matriz de adjacência de um grafo simples, a primeira delas é que os elementos da diagonal<sup>2</sup> principal da matriz são todos nulos. Pois, os elementos da diagonal principal da matriz de adjacência, relacionam o vértice com ele próprio, ou seja, não existe aresta ligando um vértice a ele mesmo. Outra observação, é que a matriz de adjacência é simétrica em relação a diagonal principal. O Teorema 4.8 apresentado a seguir, relaciona a quantidade de caminhos em um grafo com sua matriz de adjacência, o que nos permitirá resolver alguns problemas no Capítulo 6.

**Teorema 4.8.** *Seja um grafo  $G(V, A)$  com  $n$  vértices e conexo, considere  $A = [a_{ij}]$  sendo a matriz de adjacência relacionada ao grafo  $G$ . O número de caminhos,  $c_{ij}(k)$  que vão do vértice  $i$  ao vértice  $j$  de comprimento  $k > 0$  será a entrada da posição  $a_{ij}^k$  da matriz  $A^k$ , onde  $a_{ij}^k$  é o  $ij$ -ésimo da matriz  $A^k$ .*

*Demonstração.* Usando indução finita sobre  $k$ , temos:

Para  $k = 1$ , o resultado é verdadeiro, uma vez que só existe um único caminho de comprimento 1 entre os vértices  $v_i$  e  $v_j$  se existir uma aresta que os ligue e neste caso, por definição de matriz de adjacência

$$a_{ij} = 1 = C_{ij}(1).$$

Agora, suponhamos por indução, que o número de caminhos de comprimento  $k-1$  entre os vértices  $v_i$  ao  $v_j$ , é igual à entrada  $a_{ij}^{k-1}$  da matriz  $A^{k-1}$ . Note que,  $A^k = A^{k-1} \cdot A$ . Assim, para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , temos que

$$\begin{aligned} a_{ij}^k &= \sum_{c=1}^n a_{ic}^{k-1} \cdot a_{cj} \\ &= \sum_{c=1}^n c_{ic}(k-1) \cdot c_{cj}(1) \\ &= c_{ij}(k). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que o resultado é válido para todo  $k$  natural. ■

## 4.5.2 Matriz de Incidência

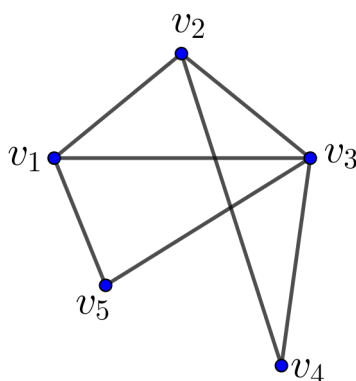
Nesta seção, apresentaremos o conceito de matriz de incidência para grafos não-orientados e para os digrafos.

<sup>2</sup> A diagonal principal de uma matriz é formada pelos termos  $a_{ij}$ , tais que  $i = j$ , ou seja, são os termos em que o número da linha é igual ao número da coluna.

**Definição 4.16.** A matriz de incidência  $B$  de um grafo não-orientado  $G$ , associa linhas aos vértices e colunas às arestas de  $G$ , de modo que se a aresta  $a_j$  é incidente ao vértice  $v_i$ , então o elemento da posição  $b_{ij}$  é 1, e será 0 caso contrário.

**Exemplo 13.** Dado o grafo da Figura 31. Determine sua matriz de incidência.

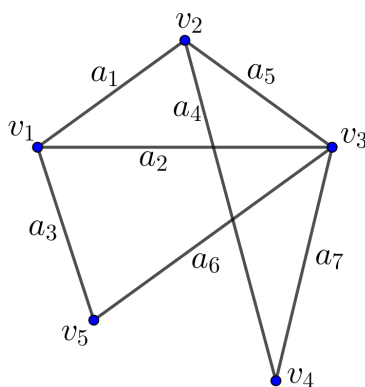
Figura 31 – Grafo do exemplo 13



Fonte: Autor

*Resolução:* Indicando as arestas do grafo, como mostra a Figura 32.

Figura 32 – Arestas do grafo do exemplo 13



Fonte: Autor

Podemos construir a matriz de incidência do grafo, dispondo a relação de incidência entre arestas e vértices do grafo, como mostra a Tabela 2.

Tabela 2 – Matriz de incidência em forma de tabela

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$v_1$	1	1	1	0	0	0	0
$v_2$	1	0	0	1	1	0	0
$v_3$	0	1	0	0	1	1	1
$v_4$	0	0	0	1	0	0	1
$v_4$	0	0	1	0	0	1	0

Fonte: Autor

Como o grafo possui, 5 vértices e 7 arestas a matriz de incidência deverá ter 5 linhas e 7 colunas, ou seja, será a matriz  $B_{5 \times 7}$ , tal que:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

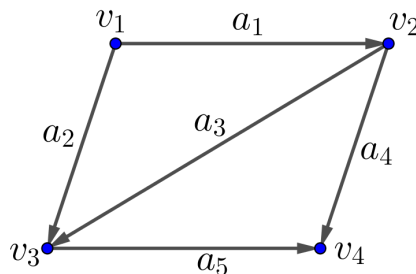
■

**Definição 4.17.** Dado um digrafo  $G$ , a matriz de incidência  $B_{n \times m}$ , onde  $n$  é o número de vértices e  $m$  é o número de arestas. É a matriz, tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ é o término de } a_j \\ 0, & \text{se a aresta } a_j \notin G \\ -1, & \text{se } v_i \text{ é a origem da aresta } j. \end{cases}$$

**Exemplo 14.** Dado o digrafo da Figura 33. Determine sua matriz de Incidência.

Figura 33 – Digrafo do exemplo 14



Fonte: Autor

*Resolução:* Aplicando a Definição 4.17, no digrafo. Obtemos, a matriz  $B_{5 \times 4}$  tal que

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que, o elemento  $b_{24} = -1$ , pois  $v_2$  é a origem da aresta  $a_4$ . já, o elemento  $b_{44} = 1$ , pois  $v_4$  é o término da aresta  $a_4$ .

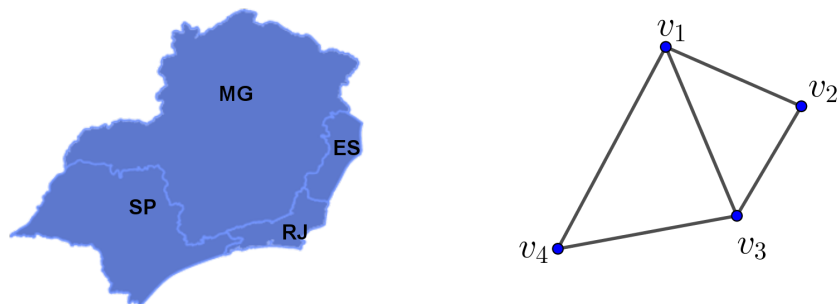
■

## 4.6 Coloração de Grafos

Existem uma grande variedade de problemas que podemos modelar utilizando a Teoria dos Grafos. Um deles, por exemplo, é a coloração de mapas. Os mapas geográficos podem ser enxergados e trabalhados como grafos. Em um mapa, as regiões fechadas que podem ser um estado, ou uma cidade, ou um país, são os vértices de um grafo, já as fronteiras entre essas regiões são as arestas do grafo.

Na Figura 34, temos o mapa da Região Sudeste do Brasil, junto com o grafo que o representa. Nele, cada estado está representado por um vértice do grafo, ou seja,  $v_1$  representa o estado de Minas Gerais,  $v_2$  representa o Espírito Santo,  $v_3$  representa o Rio de Janeiro e  $v_4$  representa o estado de São Paulo.

Figura 34 – Grafo do mapa da região Sudeste do Brasil



Fonte: Autor

Para colorir um mapa, devemos usar uma única cor para cada região e regiões com uma fronteira devem ter cores distintas. Assim, se desejássemos colorir um mapa como o da Figura 34, podemos abordar o problema, como sendo um problema de coloração de grafo. A seguir apresentaremos uma definição e um teorema que são resultados muito importantes para a coloração de grafos.

**Definição 4.18.** Um grafo  $G$  é dito planar, se a sua representação em diagrama não possui arestas que se cruzam.

A partir da Definição 4.18, apresentaremos um resultado muito importante para a coloração de grafos, conhecido como teorema das quatro cores.

**Teorema 4.9.** *Todo grafo planar com número de vértices  $n$ ,  $n \geq 4$ , pode ser colorido com quatro cores.*

Uma curiosidade a cerca do Teorema 4.9, é que ele foi demonstrado em 1976 pelos matemáticos Kenneth Appel<sup>3</sup> e Wolfgang Haken<sup>4</sup> com o auxílio de computadores, que foram usados intensamente na verificação de casos e contra-exemplos (LOVASZ; PELIKAN; VESZTERGOMBI, 2013). Como não é foco deste trabalho, não apresentaremos a demonstração deste teorema.

---

<sup>3</sup> Kenneth Ira Appel (1932 - 2013) foi um matemático estadunidense que, em 1976, colaborando com Wolfgang Haken na Universidade de Illinois, resolveu um dos mais famosos problemas na matemática: o teorema das quatro cores.

<sup>4</sup> Wolfgang Haken (1928-2022) foi um matemático alemão. Em 1976, com seu colega Kenneth Appel da Universidade de Illinois em Urbana-Champaign, resolveu um dos mais famosos problemas da matemática, o teorema das quatro cores.

## 5 Análise Combinatória: Conceitos e Propriedades

Neste capítulo apresentaremos os principais conceitos e propriedades de Análise Combinatória abordados no Ensino Médio. As definições, teoremas, proposições e demonstrações desse Capítulo, foram baseadas nas encontradas em (MORGADO, 2020) e (IRRACIEL; FERNÁNDEZ, 2012).

### 5.1 Princípio Aditivo da Contagem

O princípio aditivo é uma das técnicas mais simples usadas para resolver problemas de contagem. Porém, apesar de ser simples ele permite a solução de muitos tipos de problemas de contagem, inclusive se utilizado junto com outras técnicas que apresentaremos mais adiante. Antes de enunciar o princípio aditivo, definiremos  $|A|$  como o número de elementos de um conjunto  $A$ .

**Teorema 5.1** (Princípio Aditivo). *Dados os conjuntos finitos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  dois a dois disjuntos (isto é  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ ), temos que*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

**Exemplo 15.** *Suponha que tenha entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro e você só tenha dinheiro para assistir apenas um desses programas. Quantos são os programas que você pode fazer?*

*Resolução:* Como você só tem dinheiro para um evento, então você assiste ou ao filme 1, ou ao filme 2, ou ao filme 3, ou à peça 1 ou à peça 2. Portanto, pelo princípio aditivo, ao todo são 5 programas diferentes. ■

### 5.2 Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Fundamental da Contagem ou Multiplicativo, consiste em uma das mais importantes ferramentas usadas nos processos de contagem. Ele permite resolver uma gama vasta de problemas de Análise Combinatória. Vejamos a seguir seu enunciado e algumas aplicações.



**Teorema 5.2** (Princípio Fundamental da Contagem). *Se um evento  $A$  pode ocorrer de  $m$  maneiras diferentes e se, para cada uma das  $m$  maneiras possíveis de ocorrências de  $A$ , um segundo evento  $B$  pode ocorrer de  $n$  maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer os eventos  $A$  e  $B$  simultaneamente é dado por  $m \cdot n$ .*

*Demonstração.* Sejam  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$  as  $m$  maneiras de ocorrência do evento  $A$  e  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  as  $n$  maneiras de ocorrência do evento  $B$ . Assim, podemos considerar cada possibilidade como sendo um par ordenado  $(a_i, b_j)$ . Onde  $a_i$  representa o número de maneiras de ocorrer o evento  $A$  e  $b_j$  representa o número de maneiras de ocorrer o evento  $B$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Daí, fixando o primeiro termo do par ordenado  $a_1$  e variando o segundo termo de  $b_1$  até  $b_n$  e repetindo-se o processo para cada  $a_i$ , temos:

$$m \text{ linhas} \left\{ \begin{array}{ll} (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \dots, (a_1, b_n) & \longrightarrow n \text{ pares} \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), \dots, (a_2, b_n) & \longrightarrow n \text{ pares} \\ (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), \dots, (a_3, b_n) & \longrightarrow n \text{ pares} \\ \vdots & \vdots \\ (a_n, b_1), (a_n, b_2), (a_n, b_3), \dots, (a_n, b_n) & \longrightarrow n \text{ pares} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Portanto, se somarmos todas as possibilidades, temos que a cada linha, gera  $n$  pares diferentes e como temos  $m$  linhas, obtemos:

$$\underbrace{n + n + n + \dots + n}_{m \text{ vezes}} = m \cdot n.$$

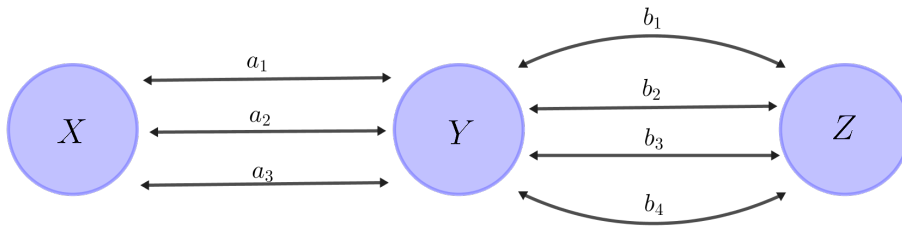
Logo, concluímos que há  $m \cdot n$  maneiras de ocorrer os eventos  $A$  e  $B$  simultaneamente. ■

Agora, vejamos alguns exemplos com aplicações do Princípio Fundamental da Contagem.

**Exemplo 16.** *Três bairros  $X, Y$  e  $Z$  de uma cidade, estão interligados de modo que, entre  $X$  e  $Y$  existem 3 rodovias e entre  $Y$  e  $Z$  existem 4 rodovias. Um ciclista deseja deslocar-se de  $X$  até  $Z$  passando por  $Y$ . De quantas maneiras distintas o ciclista pode deslocar-se de  $X$  até  $Z$ ?*

*Resolução:* Sejam  $a_1, a_2$  e  $a_3$  os caminhos entre os bairros  $X$  e  $Y$  e sejam  $b_1, b_2, b_3$  e  $b_4$  os caminhos entre  $Y$  e  $Z$ , como mostra a Figura 35.

Figura 35 – Ilustração do Exemplo 16



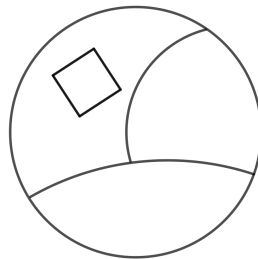
Fonte: Autor

Assim, o ciclista deve tomar as seguintes decisões:  $d_1$  escolher uma rodovia entre  $X$  e  $Y$  e  $d_2$  escolher uma rodovia entre  $Y$  e  $Z$ . Daí, temos que  $d_1 = 3$  e  $d_2 = 4$ . Logo, pelo Teorema 5.2, concluímos que o número de maneiras do ciclista deslocar-se de  $X$  até  $Z$  passando por  $Y$  é  $3 \cdot 4 = 12$ .

■

**Exemplo 17.** Um aluno dispõe de quatro cores distintas para pintar cada região da Figura 36 de uma cor, de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes. De quantas maneiras distintas o aluno pode colorir a figura?

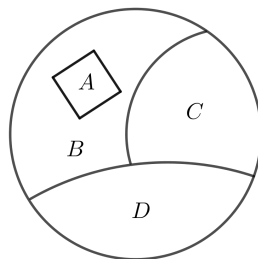
Figura 36 – Ilustração do Exemplo 17



Fonte: Autor

*Resolução:* Sejam  $A, B, C$  e  $D$  as regiões a serem coloridas, como mostra a Figura 37.

Figura 37 – Regiões a serem coloridas do Exemplo 17



Fonte: Autor

Assim, ao escolhermos uma cor para a região  $A$ , a mesma não pode ser usada em  $B$ , ou seja, temos 4 possibilidades para colorir  $A$  e 3 para  $B$ . Agora note que para colorir  $C$ , podemos usar a mesma cor que foi usada em  $A$ , mas não podemos colorir com a que foi usada em  $B$ , logo temos 3 possibilidades para colorir  $C$ . E finalmente para colorir  $D$ , não podemos usar as cores que foram aplicadas em  $B$  e  $C$ , ou seja, sobram apenas duas cores para colorir  $D$ . Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos  $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 72$  formas de colorir a figura. ■

## 5.3 Permutações

### 5.3.1 Fatorial

Um resultado muito importante e bastante usado na Análise Combinatória, é a definição de Fatorial de um número. Esse conceito permite resolver uma grande variedade de problemas. Além disso, o Fatorial aparecerá em outros mecanismos usados em Análise Combinatória, que serão estudados mais adiantes.

**Definição 5.1.** *Seja  $n$  um número inteiro não negativo. Definimos como o fatorial de  $n$ , o número dado por:*

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 1, & \text{se } n = 1 \\ n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

O fatorial de um número inteiro não negativo está diretamente associado ao número de permutações simples que podemos realizar com uma certa quantidade de objetos. Na definição abaixo, apresentaremos esse conceito.

## 5.4 Permutações Simples

**Definição 5.2.** *Dado um conjunto  $M$  com  $n$  elementos todos distintos, as permutações simples dos elementos de  $M$  são todos os agrupamentos ordenados que podemos fazer com os  $n$  elementos de  $M$ .*

**Teorema 5.3.** *Seja o conjunto  $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ , o número de permutações simples dos elementos do conjunto  $M$ , que indicamos por  $P_n$  é dado por:*

$$P_n = n!.$$

*Demonstração.* Usando o Teorema 5.3, podemos dividir a contagem do número de permutações simples em  $n$  etapas. Como uma permutação é um agrupamento ordenado dos  $n$  elementos de  $M$ , para a primeira posição desse agrupamento, temos  $n$  possibilidades. Para a segunda posição do agrupamento, temos  $n - 1$  possibilidades. Escolhidos os dois primeiros elementos do agrupamento, temos  $n - 2$  possibilidades para a escolha do terceiro elemento, e assim, por diante. Logo, pelo Teorema 5.3, temos que o número de permutações simples dos  $n$  elementos de  $M$  é

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

■

A partir da Definição 5.2, podemos explorar e resolver vários problemas de Análise Combinatória. Nos exemplos a seguir veremos algumas aplicações dessa definição.

**Exemplo 18.** *De quantas formas podem um grupo de 4 pessoas, ficar em fila indiana?*

*Resolução:* Note que podemos alocar a primeira pessoa em 4 posições. Fazendo isso, sobram 3 posições pra segunda pessoa e, conseqüentemente, 2 para terceira pessoa e 1 para a quarta pessoa. Usando o princípio fundamental da contagem temos que

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24.$$

Portanto, temos 24 possibilidades.

■

**Exemplo 19.** *Quantos são os anagramas da palavra **GRAFO**?*

*Resolução:* A palavra **GRAFO** é formada por 5 letras, todas distintas. Para calcular a quantidade de anagramas dessa palavra, basta pensarmos que temos 5 elementos para permutá-los entre si. Assim temos:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Portanto, a palavra **GRAFO** possui 120 anagramas.

■

Nos Exemplos 18 e 19, foi aplicada a definição de permutação simples, onde os elementos a serem permutados eram todos distintos. Porém, nem sempre vamos trabalhar com elementos todos distintos. Para calcular o número de permutações em um conjunto de objetos, onde existem elementos repetidos, usaremos o mecanismo chamado, Permutação com Repetição.

## 5.5 Permutação com Repetição

**Teorema 5.4.** *Dados  $n$  objetos, dos quais  $\alpha$  objetos são iguais a  $a$ ,  $\beta$  são iguais a  $b$ ,  $\dots$ ,  $\lambda$  iguais a  $l$  com  $\alpha + \beta + \dots + \lambda = n$ . O número de permutações dos  $n$  objetos é dado por:*

$$P_n^{\alpha, \beta, \dots, \lambda} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!}.$$

**Exemplo 20.** *Em um torneio de futsal um time obteve 5 vitórias, 3 empates e 2 derrotas, nas 10 partidas disputadas. De quantas maneiras distintas esses resultados podem ter ocorrido?*

*Resolução:* Como foram disputadas 10 partidas, havendo 5 vitórias, 2 empates e 3 derrotas, temos 10 objetos para permutar onde existem repetição nas vitórias, empates e derrotas. Logo, temos

$$P_{10}^{2,3,5} = \frac{10!}{2!3!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 6 \cdot 5!} = 2520.$$

Portanto, existem 2520 maneiras de se compor os resultados. ■

**Exemplo 21.** *Quantos são os anagramas da palavra **ENSINO**?*

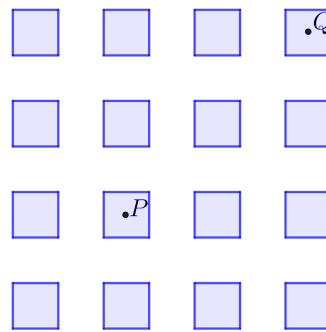
*Resolução:* A palavra ensino possui 6 letras com a letra N se repetindo 2 vezes. Assim a quantidade de anagramas que podemos formar é dada por  $P_6^2$ , ou seja,

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 360.$$

Portanto, a palavra ensino possui 360 anagramas. ■

**Exemplo 22.** *Uma cidade é formada por 16 quarteirões dispostos segundo a Figura 38. Uma pessoa sai do ponto  $P$  e dirige-se para o ponto  $Q$  pelo caminho mais curto, isto é, movendo-se da esquerda para a direita, ou de baixo para cima. Nessas condições, quantos caminhos diferentes ela poderá fazer o percurso?*

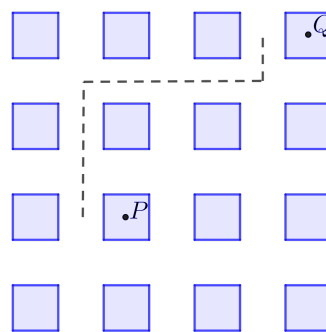
Figura 38 – Ilustração do Exemplo 22



Fonte: Autor

*Resolução:* Se definimos movimentos para cima como  $C$  e movimentos para direita como  $D$ . Um dos caminhos possíveis seria  $CCDD$ , como ilustrado na Figura 39.

Figura 39 – Resolução do exemplo 22



Fonte: Autor

Note que independente do caminho escolhido, a pessoa vai fazer 3 movimentos para cima e dois para direita. Portanto, devemos calcular  $P_5^{2,3}$ .

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot \cancel{3!}} = 10.$$

Logo, temos 10 caminhos possíveis entre  $P$  e  $Q$ .



## 5.6 Arranjos Simples

**Definição 5.3.** Consideremos  $n$  objetos e  $p$  um número inteiro positivo, tal que  $0 < p \leq n$ . Um arranjo simples de classe  $p$  dos  $n$  objetos dados é uma seleção de  $p$  objetos distintos dentre estes que diferem entre si pela ordem de colocação ou pela natureza de cada um, isto é, o que importa é quem participa ou o lugar que ocupa. Denotaremos por  $A_{n,p}$  ou  $A_p^n$  o número de arranjos simples de classe  $p$  de  $n$  objetos.

**Proposição 5.5.** Seja  $n \geq 1$ . O número de arranjos simples de classe  $p$  de  $n$  objetos  $O = \{o_1, o_2, o_3, \dots, o_n\}$  é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

*Demonstração.* Demonstraremos a Proposição 5.5, usando o Princípio da Indução Finita sobre  $n$ . Para  $n = 1$  a fórmula é verdadeira, pois  $p \leq n$ .

$$A_1^p = A_1^1 = \frac{1!}{(1-p)!} = \frac{1!}{(1-1)!} = \frac{1}{1} = 1.$$

Agora provaremos que para  $n \geq 2$ , é válido que:

$$A_p^n = n \cdot A_{p-1}^{n-1}. \quad (5.2)$$

De fato,

$$\begin{aligned} n \cdot A_{p-1}^{n-1} &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-(p-1))!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1-p+1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!} \end{aligned}$$

Agora definimos o conjunto  $A_i$  como sendo os arranjos simples de classe  $p-1$  dos  $n-1$  objetos  $\{o_1, o_2, o_3, \dots, o_n\}$ . Note que  $|A_i| = A_{p-1}^{n-1}$ , para cada um dos  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Daí, para obtermos um arranjo simples de classe  $p$  dos  $n$  objetos, basta fixar o objeto inicial  $o_i$  e tomar um elemento conjunto  $A_i$ , que é um arranjo de classe  $p-1$  objetos restantes. Assim pelo princípio aditivo, temos:

$$A_p^n = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = n \cdot A_{p-1}^{n-1}$$

Como a Equação (5.2) é verdadeira  $\forall n \geq 2$ , podemos aplicá-la para  $n-1$ , obtendo:

$$A_{p-1}^{n-1} = (n-1) \cdot A_{p-2}^{n-2}.$$

Donde vem que

$$A_p^n = n \cdot (n - 1) \cdot A_{p-2}^{n-2}.$$

Logo, se aplicarmos esse argumento sucessivamente, obtemos que

$$\begin{aligned} A_p^n &= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-(p-2))A_{p-(p-1)}^{n-(p-1)} \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-p+2)A_1^{n-p+1}. \end{aligned}$$

Como  $A_1^{n-p+1} = n - p + 1$ , temos pela igualdade anterior que

$$\begin{aligned} A_p^n &= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-p+2)(n-p+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-p+2)(n-p+1)(n-p)\cdots 1}{(n-p)\cdots 1} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!}. \end{aligned}$$

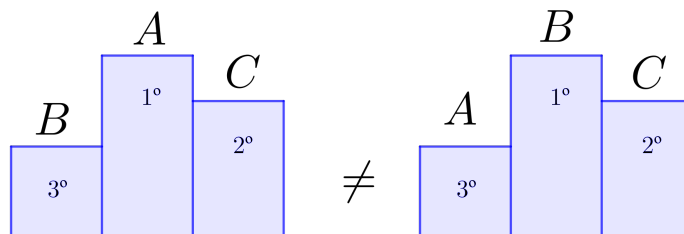
Como queríamos demonstrar. ■

Nos exemplos a seguir, apresentaremos alguns problemas que são resolvidos usando essa técnica de contagem.

**Exemplo 23.** *Participam de uma corrida de carros 15 pilotos. São premiados em um pódio os três primeiros colocados na corrida. De quantas formas o pódio dessa corrida pode ser formado?*

*Resolução:* Suponhamos que entre esses 15 pilotos, tivéssemos os pilotos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Note que o pódio muda de configuração se alterarmos a ordem dos pilotos, ou seja, o resultado da corrida é diferente, como mostra a Figura 40.

Figura 40 – Ilustração do Exemplo 23



Fonte: Autor

Logo, teremos arranjos de 15 objetos (pilotos) de classe 3. Daí, usando a fórmula do número de arranjos simples, temos:



$$\begin{aligned}
 A_3^{15} &= \frac{15!}{(15-3)!} \\
 &= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!} \\
 &= 15 \cdot 14 \cdot 13 \\
 &= 2730.
 \end{aligned}$$

Portanto, existem 2730 pódios possíveis para essa corrida. ■

**Exemplo 24.** De quantos modos, 3 pessoas podem se sentar em 7 cadeiras que estão em fila?

*Resolução:* Note que, temos 7 cadeiras para alocar as três pessoas, ou seja, temos que calcular:

$$\begin{aligned}
 A_3^7 &= \frac{7!}{(7-3)!} \\
 &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} \\
 &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \\
 &= 210.
 \end{aligned}$$

Portanto, existem 210 modos diferentes das 3 pessoas se sentarem nas 7 cadeiras. ■

## 5.7 Combinações

Uma das principais técnicas de contagem abordadas pelo currículo de Matemática no Ensino Médio é a Combinação Simples, tendo em vista a vasta gama de problemas que essa técnica permite resolver. Nessa secção apresentaremos os principais conceitos e definições dessa técnica de contagem.

**Definição 5.4.** Consideremos  $n$  objetos e  $p$  um número inteiro positivo tal que  $0 < p \leq n$ . Uma combinação simples de classe  $p$  dos  $n$  objetos distintos entre estes que diferem entre si apenas pela natureza de cada um, isto é, o que importa é simplesmente quem participa no grupo selecionado. Denotaremos por  $\binom{n}{p}$  ou por  $C_{n,p}$  o número de combinações simples de classe  $p$  de  $n$  objetos.

**Exemplo 25.** O conjunto  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  possui 4 subconjuntos de 3 elementos, ou seja, existem 4 combinações simples dos elementos de  $A$ , tomados 3 a 3. Essas combinações são:  $\{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\{a_1, a_2, a_4\}$ ,  $\{a_1, a_3, a_4\}$  e  $\{a_2, a_3, a_4\}$ .

### 5.7.1 Fórmula do Número de Combinações Simples

**Proposição 5.6.** *Seja  $n \geq 1$ . O número de combinações simples de classe  $p$  de  $n$  objetos  $O = \{o_1, o_2, o_3, \dots, o_n\}$  é dada por:*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

*Demonstração.* As ideias de combinação simples e arranjos simples estão estreitamente relacionadas. Com efeito, para cada combinação simples formada por  $p$  objetos distintos de  $O$  podemos gerar todos os arranjos simples de classe  $p$  formados por estes  $p$  objetos.

Para isso, basta fazer todas as permutações possíveis, obtendo  $p!$  arranjos simples diferentes com esses  $p$  objetos, ou seja, para cada combinação simples de classe  $p$  formada com  $p$  objetos diferentes de  $O$  podemos fazer  $p!$  arranjos simples diferentes de classe  $p$  com estes mesmos objetos. Logo, no total teremos a seguinte relação

$$p! \cdot \binom{n}{p} = A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Donde segue que,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

■

O raciocínio usado na demonstração da Proposição 5.6, é frequentemente usado em obras voltadas para o Ensino Médio, no intuito de demonstrar ou justificar o número de combinações simples que podemos obter de  $n$  objetos com classe  $p$  de uma forma diferente. Iremos reescrever a Proposição 5.6 de uma outra maneira usando a teoria dos conjuntos, o que vai nos permitir demonstra-lá usando o princípio da indução finita. Veja:

**Proposição 5.7.** *Seja  $O = \{o_1, o_2, o_3, \dots, o_n\}$  um conjunto com  $n$  elementos, com  $n \geq 1$ . O número de subconjuntos de  $O$  com  $p$  elementos, onde  $0 \leq p \leq n$  é dado por:*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

*Demonstração.* Para provar esta proposição, usaremos indução finita sobre  $n$ . Seja

$$P(n) : \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \forall n \geq 1.$$

Onde  $\binom{n}{p}$  é o número de subconjuntos de  $O = \{o_1, o_2, o_3, \dots, o_n\}$  com  $p$  elementos.

*Caso base:*  $P(1)$  é verdadeira pois, se  $n = 1$ , então temos que  $O = \{o_1\}$  e  $p = 0$  ou  $p = 1$ . Ora, se  $p = 0$  o conjunto  $O$  terá um único subconjunto com 0 elementos que é o  $\emptyset$ . E se  $p = 1$ , o conjunto possui um único subconjunto com 1 elemento, que é ele próprio. E temos que

$$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = \frac{1}{1} = 1 \text{ e } \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} = \frac{1}{1} = 1.$$

*Passo de indução:* Agora suponha que  $P(n)$  seja válida para conjuntos com  $n - 1$  elementos e  $0 \leq p \leq n - 1$ . Seja  $O$  um conjunto com  $n$  elementos e  $0 \leq p \leq n - 1$ . Agora sejam:  $r$  igual ao número de subconjuntos de  $O$  com  $p$  elementos, mas que o elemento  $o_n$  não faz parte de nenhum desses subconjuntos e  $s$  igual ao número de subconjuntos de  $O$  que contém  $p$  elementos, entre eles o elemento  $o_n$ . Daí, perceba que

$$\binom{n}{p} = r + s.$$

Como  $r$  é o número de subconjuntos de  $p$  elementos de  $\{o_1, o_2, o_3, \dots, o_{n-1}\}$ . Pela hipótese de indução, temos que

$$r = \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}.$$

Agora note que, o número de subconjuntos de  $O$  que contém  $o_n$  são formados pela união de subconjuntos com  $p - 1$  elementos de  $\{o_1, o_2, o_3, \dots, o_{n-1}\}$  unidos com  $\{o_n\}$ . Assim pela hipótese de indução, temos que

$$s = \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!}.$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} r + s &= \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} \\ &= \frac{(n-1)!}{p!(n-(p+1))!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!} \cdot (n-p) + \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!} \cdot p \\ &= \cancel{(n-p+p)} \cdot \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!}. \end{aligned}$$

Logo,  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  para todo  $n \geq 1$  e com  $1 \leq p \leq n$ , como queríamos demonstrar. ■

**Exemplo 26.** Em uma sala de aula há 23 alunos. A escola está selecionando em cada sala de aula 2 alunos para serem os representantes de cada turma. De quantos modos a dupla de representantes dessa sala pode ser formada?

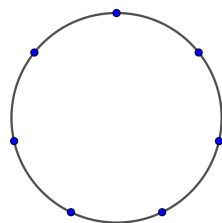
*Resolução:* Temos 23 alunos para escolher dois, ou seja, devemos contar todas as duplas que dá pra formar com os 23 alunos. Assim temos:

$$\begin{aligned} \binom{23}{2} &= \frac{23!}{2!(23-2)!} \\ &= \frac{23 \cdot 22 \cdot 21!}{2 \cdot 21!} \\ &= 253. \end{aligned}$$

Portanto, podemos formar 253 duplas diferentes para representante de sala. ■

**Exemplo 27.** Na Figura 41, temos 7 pontos marcados sobre uma circunferência. Quantos triângulos existem com vértices nesses pontos?

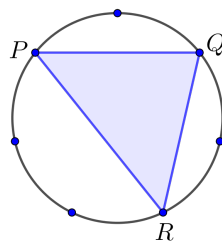
Figura 41 – Sete pontos sobre um círculo



Fonte: Autor

*Resolução:* Note que, se traçarmos o triângulo  $PQR$  e o triângulo  $RPQ$  (Figura 42) estamos traçando o mesmo triângulo, ou seja, a ordem dos pontos escolhidos não gera outro triângulo.

Figura 42 – Triângulo  $PQR$  inscrito no círculo do Exemplo 27



Fonte: Autor

Logo, temos um problema de combinação simples. Assim, temos 7 pontos para escolhermos 3. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \binom{7}{3} &= \frac{7!}{3!(7-3)!} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{6 \cdot \cancel{4!}} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \\ &= 35. \end{aligned}$$

Logo, podemos construir 35 triângulos com vértices nesses pontos. ■

É comum que alunos, quando estão trabalhando com problemas de contagem pela primeira vez, façam confusão com a técnica de contagem adequada para resolver um determinado problema. Nos exemplos a seguir apresentaremos problemas que podem ajudar na diferenciação das técnicas a serem empregadas na resolução dos problemas de contagem.

Um exemplo interessante, que pode tirar a dúvida dos alunos é o seguinte:

**Exemplo 28.** *Suponha que em uma prateleira de supermercado, estejam disponíveis as frutas: abacaxi, banana, manga e caju. Se um cliente escolher três frutas para fazer uma salada, independente dele escolher (manga - abacaxi - caju) ou (abacaxi - manga - caju) a salada será a mesma, ou seja, a ordem em que ele escolhe as frutas não interfere no tipo da salada. Assim, o cliente poderia escolher de  $\binom{4}{3}$ . Porém, se o cliente desejasse fazer um ranking com suas três frutas preferidas, a ordem da escolha mudaria o resultado. Pois, (1º manga - 2º abacaxi - 3º caju) é diferente de 1º abacaxi - 2º manga - 3º caju). Logo, ele poderia fazer isto de  $A_3^4$ .*

Uma relação muito importante da Análise Combinatória, que decorre da fórmula do número de combinações simples de  $n$  objetos de classe  $p$ , é a relação de Stifel<sup>1</sup> que apresentaremos a seguir.

**Proposição 5.8.** *Para todo  $n \geq 2$ , tem-se que*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}. \quad (5.3)$$

<sup>1</sup> Michael Stifel, matemático alemão (1486 - 1567) realizou diversas pesquisas nas áreas de Aritmética e Álgebra.

*Demonstração.* Desenvolvendo as duas parcelas do segundo membro da Equação (5.3), temos que:

$$\begin{aligned}
 &= \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \\
 &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{p!(n-(p+1))!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!} \cdot (n-p) + \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!} \cdot p \\
 &= \cancel{(n-p+p)} \cdot \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!} \\
 &= \frac{n!}{p!(n-p)!}.
 \end{aligned}$$

Daí, concluímos que

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

■

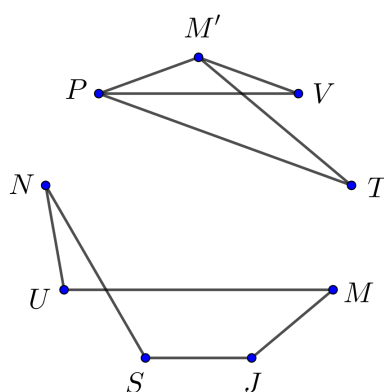
## 6 Teoria Grafos e Problemas de Contagem

Neste capítulo, apresentaremos alguns problemas que no Ensino Médio são abordados como problemas de contagem e apresentaremos suas soluções, usando conceitos e propriedades da Teoria dos Grafos. O nosso objetivo é aumentar o leque de ferramentas, que podem ser usadas na resolução de problemas de contagem. Com isto, aumentando as possibilidades de aprendizagem dos alunos nos conteúdos de Análise Combinatória. Os problemas trabalhados neste Capítulo, foram retirados de (CANGURU, 2014), (BRASIL, 2011) e (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012) os demais foram elaborados pelo autor.

**Problema 6.1.** *Imagine que seria possível viajar entre os seguintes planetas: Terra - Mercúrio, Plutão - Vênus, Terra - Plutão, Plutão - Mercúrio, Mercúrio - Vênus, Urano - Netuno, Netuno - Saturno, Saturno - Júpiter, Júpiter - Marte e Marte - Urano. Sendo assim, será possível viajar da Terra para Marte?*

*Solução:* Construindo um grafo, onde seus vértices representam os planetas e a existência de viagens entres os planetas como sendo as arestas do grafo, obtemos o grafo da Figura 43. Onde os vértices estão indicados pelas letras iniciais dos planetas (como Marte e Mercúrio iniciam com a mesma letra, fizemos Marte =  $M$  e Mercúrio= $M'$ ).

Figura 43 – Grafo do Problema 6.1

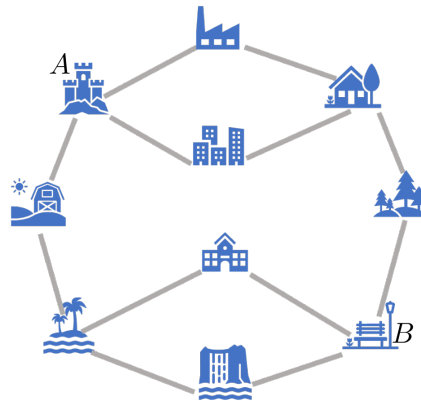


Fonte: Autor

Traçadas as arestas do grafo, como mostra a Figura 43, o problema está praticamente resolvido. Pois, não é possível realizar um passeio saindo do vértice  $T$  ao vértice  $M$ . Portanto, concluímos que não é possível viajar da Terra para Marte nesta situação. ■

**Problema 6.2.** Em uma determinada cidade, há 10 bairros e 12 estradas que conectam esses bairros, como mostra a Figura 44. Em cada estrada existe um posto de fiscalização rodoviária, que pode abrir ou fechar a estrada. Qual é o menor número de estradas que devem ser fechadas pela fiscalização rodoviária, de forma que seja impossível ir do bairro A para o Bairro B ou de B para A?

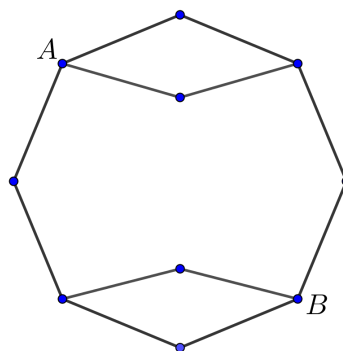
Figura 44 – Ilustração do Problema 6.2



Fonte: Autor

*Solução:* Se considerarmos os bairros da cidade como vértices de um grafo e as rodovias como as aresta, obtemos o grafo da Figura 45.

Figura 45 – Grafo do Problema 6.2

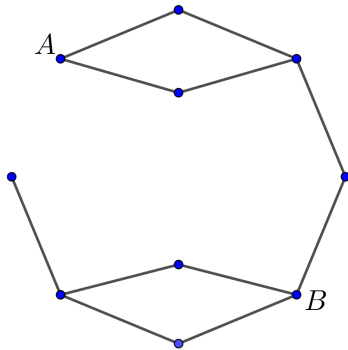


Fonte: Autor

Note, que o grafo da Figura 45 é conexo, pois para quaisquer dois vértices desse grafo, existe um caminho entre eles. Como queremos determinar o menor número de estradas pra que não seja, possível ir do bairro A ao bairro B, devemos remover arestas do grafo de modo que ele se torne desconexo.

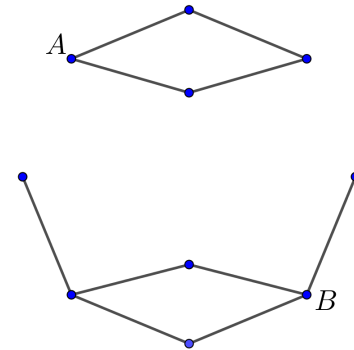


Figura 46 – Grafo do Problema 6.2 removendo uma aresta



Fonte: Autor

Figura 47 – Grafo do Problema 6.2 com a remoção de duas arestas



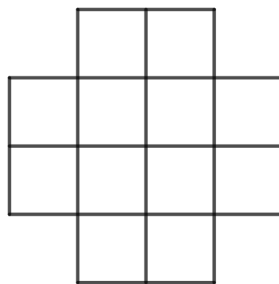
Fonte: Autor

Se removermos uma aresta como mostra Figura 46, o grafo ainda continua conexo. Porém, se removermos duas arestas do grafo como mostra a Figura 47, obtemos um grafo desconexo, onde não existe um caminho possível ligando os bairros  $A$  e  $B$ . Portanto, concluímos que a fiscalização rodoviária deve bloquear duas estradas.



**Problema 6.3.** Na Figura 48, temos um tabuleiro de xadrez diferente. Ele foi obtido retirando os quadrados dos cantos de um tabuleiro  $4 \times 4$ . É possível mover uma peça de xadrez (torre) neste tabuleiro de modo que, ela inicie e termine no mesmo quadrado e passe por cada um dos outros quadrados uma única vez?

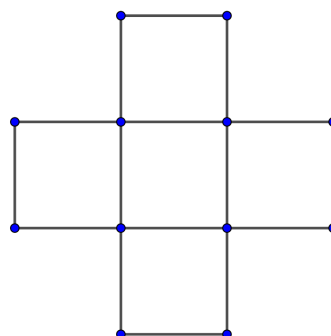
Figura 48 – Ilustração do Problema 6.3



Fonte: Autor

*Solução:* Considerando cada quadrado do tabuleiro com sendo os vértices de um grafo, e os lados adjacentes entre eles como sendo as arestas, obtemos o grafo representado na Figura 49. Antes de fazer qualquer tentativa para resolver o problema, basta analisar os graus dos vértices do grafo. Note que todos possuem grau par. Portanto, trata-se de um grafo Euleriano, o que torna possível a peça de xadrez percorrer todos os quadrados do tabuleiro sem passar duas vezes no mesmo quadrado.

Figura 49 – Grafo do problema 6.3



Fonte: Autor

**Problema 6.4.** *Em uma determinada cidade existem 100 bairros. De cada um desses bairros, saem 4 estradas. Quantas são as estradas que existem nessa cidade?*

*Solução:* Tomando os bairros como sendo vértices de um grafo e as estradas como as arestas, o objetivo do problema passa a ser descobrir o número de arestas desse grafo. No Capítulo 4, vimos que em um grafo a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas, pelo Teorema 4.1. Assim, como saem 4 estradas de cada bairro, temos que o grau de cada um dos 100 vértices do grafo é 4. Portanto, se  $m$  é o número de arestas do grafo, temos

$$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + \cdots + d(v_{100}) = 2m. \quad (6.1)$$

Daí, como o primeiro membro da Equação (6.1) é igual a  $4 \cdot 100$ , temos que

$$4 \cdot 100 = 2m \Rightarrow 400 = 2m \Rightarrow m = 200.$$

Logo, existem 200 estradas na cidade.

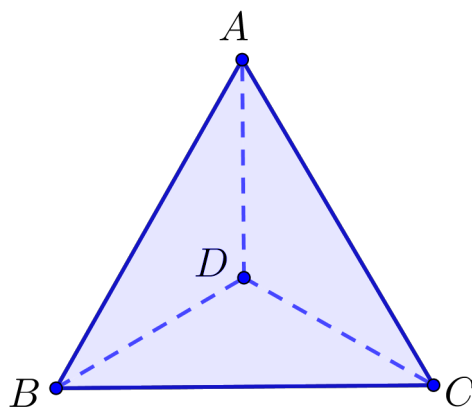
**Problema 6.5.** *Em uma reunião, estão presentes 30 pessoas. Seria possível que 9 delas tenham 3 conhecidos cada (na reunião), 11 tenham 4 conhecidos e 10 delas tenham 5 conhecidos?*

*Solução:* Podemos representar a situação descrita no problema com um grafo, onde cada uma das 30 pessoas são os vértices do grafo e relação entre elas (conhecidos ou não conhecidos) são as arestas. Assim, 9 vértices do grafo teriam grau 3, 11 vértices teriam grau 4 e 10 vértices teriam grau 5. Daí, teríamos 19 vértices todos com grau ímpar, o que contradiz o Corolário 4.3. Portanto, a situação descrita no problema é impossível de acontecer.



**Problema 6.6.** Na Figura 50, temos um tetraedro regular<sup>1</sup> de lado 1. Quantos são os caminhos de comprimento 3, que ligam o vértice  $A$  ao vértice  $B$  do tetraedro?

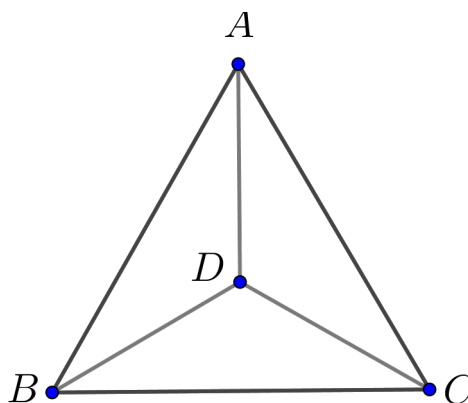
Figura 50 – Tetraedro do Problema 6.6



Fonte: Autor

*Solução:* Para determinar o número de caminhos de comprimento 3 que ligam os vértices  $A$  e  $B$  do poliedro, podemos analisar caso a caso na Figura 50, ou realizar essa contagem de forma mais simples aplicando o Teorema 4.8 na matriz de adjacência do grafo correspondente ao tetraedro. Seja  $G$  o grafo do tetraedro, sua representação em diagrama é dada pela Figura 51, onde o vértice  $v_1 = A$ ,  $v_2 = B$ ,  $v_3 = C$  e  $v_4 = D$ .

Figura 51 – Grafo do tetraedro do Problema 6.6



Fonte: Autor

A matriz de adjacência de  $G$  é dada por:

<sup>1</sup> Um poliedro é dito regular se todas as suas faces são polígonos regulares.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, pelo Teorema 4.8 o número de caminhos de comprimento 3, que ligam o vértice  $A$  ao  $B$  é dado pelo elemento  $a_{12}^3$  ou pelo elemento  $a_{21}^3$  da matriz  $A^3$ , ou seja, pelo elemento da 1ª linha e da 2ª coluna da matriz  $A^3$ . A matriz  $A^3$  é dada por:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

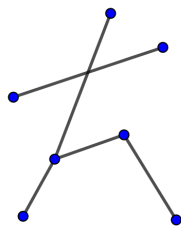
Portanto, o elemento  $a_{21}^3 = 7$  corresponde a quantidade de caminhos de comprimento 3 que ligam os vértices  $A$  e  $B$ . ■

No problema 6.6, podemos estender o raciocínio para um caminho de comprimento  $n$  ( $n$  natural) e, assim, generalizar a solução do problema para um caminho de comprimento qualquer. Porém, teríamos que calcular potências de matrizes com expoentes muito grandes o que torna o procedimento trabalhoso.

No próximo problema, apresentaremos uma questão da Olimpíada Canguru de Matemática. Ela foi retirada de (CANGURU, 2014). Em olimpíadas, como a Canguru de Matemática e a OBMEP os alunos são desafiados com vários tipos de problemas, entre eles os de contagem. Nesse sentido, conhecer e deter conceitos e propriedades da Teoria dos grafos pode aumentar as chances de êxito por parte dos alunos nessas competições de matemática.

**Problema 6.7.** *Uma criança quer adicionar alguns segmentos na Figura 52, de modo que cada um dos sete pontos tenha o mesmo número de ligações com os demais. Pelo menos quantos segmentos ela deve adicionar na figura?*

Figura 52 – Ilustração do Problema 6.7



Fonte: Autor

*Solução:* Na Figura 52, temos um grafo com 7 vértices e 5 arestas. Como o problema pede para adicionarmos arestas (segmentos de reta) de modo que cada vértice (ponto) tenha o mesmo número de ligações com os demais, basta adicionar uma quantidade de arestas no grafo, de modo que todos vértices tenham o mesmo grau. No entanto, sabemos que o número de vértices de grau ímpar em um grafo deve ser par, pelo Corolário 4.3. Logo, todos os vértices do grafo devem possuir o mesmo grau par. Mas observe que o maior grau no grafo é 3. Portanto, todos os vértices do grafo devem possuir grau no mínimo igual a 4. Daí, o número  $m$  de arestas do grafo deve ser no mínimo  $\frac{4 \cdot 7}{2} = 14$ , mas como o grafo já possui 5 arestas, devemos traçar pelo menos mais 9 ao grafo. ■

**Problema 6.8.** *Um grupo de escoteiros realizou um acampamento que durou 6 noites. Em cada uma das noites, dois dos integrantes do grupo vigiavam o acampamento. Cada escoteiro ficou de guarda três vezes e nunca com o mesmo colega. Quantos eram os integrantes desse grupo de escoteiros?*

*Solução:* Tomando cada integrante do grupo de escoteiros como um vértice de um grafo e cada par de escoteiros que fizeram a vigia do acampamento juntos, como sendo as aresta do grafo, temos que esse grafo possui 6 arestas e  $n$  vértices, cada um deles com grau 3, pois cada escoteiro do grupo ficou de vigília três vezes. Assim, a soma dos graus de todos os vértices do grafo é dada por  $3 \cdot n$ . Porém, sabemos que pelo Teorema 4.1, a soma dos graus é o dobro do número de arestas. Logo

$$3n = 2 \cdot 6 \Rightarrow 3n = 12 \Rightarrow n = 4.$$

Portanto, concluímos que o número de integrantes do grupo de escoteiros é igual a 4. ■

**Problema 6.9.** *Num grupo de 20 pessoas, algumas pessoas trocam apertos de mão.*

- a) *Se contarmos quantos apertos de mão cada pessoa deu e somamos todos esses números, é possível que o resultado seja ímpar?*
- b) *É possível que num grupo de 99 pessoas cada pessoa tenha dado exatamente 3 apertos de mão?*

*Solução:*

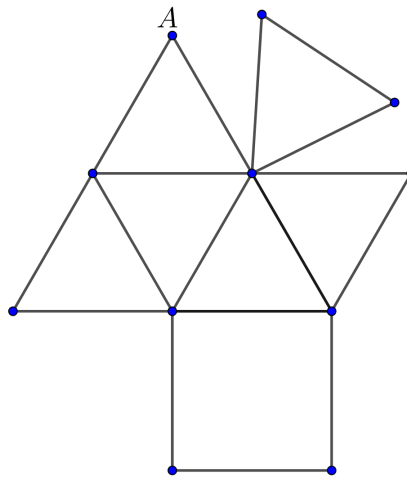
- a) Se tomarmos cada pessoa desse grupo como sendo um vértice de um grafo e cada aperto de mãos trocados por dois participantes como sendo as arestas do grafo, temos que, o número de aperto de mãos dado por cada pessoa, será o grau do vértice que ela representa. Daí, se somarmos o número de apertos de mãos que cada pessoa deu (somarmos os graus de todos os vértices do grafo) teremos um número par, pelo Teorema 4.1. Portanto não é possível que o resultado seja ímpar.
- b) Como temos 99 pessoas no grupo, se cada uma apertasse a mão de alguém 3 vezes, teríamos um total de  $3 \cdot 99 = 297$  apertos de mão. Porém, pelo Teorema 4.1 o total deve ser par, pois cada aperto de mão entre duas pessoas foi contado duas vezes. Mas, 297 é um número ímpar, o que torna a situação impossível.

■

O problema 6.10 foi retirado de (BRASIL, 2011). O problema corresponde a questão 178 do caderno cinza. Uma observação importante acerca dessa questão, é que ela foi proposta aos alunos que fizeram o ENEM 2011 sem em nenhum momento ser mencionado o termo grafo. A questão é proposta como uma questão de contagem. Porém, se analisarmos o enunciado do problema, percebemos claramente ideias e conceitos de Teoria dos Grafos na questão. A própria figura (Figura 53) é um diagrama de um grafo e ao tentar descobrir a melhor rota para solucionar a questão, estamos trabalhando com caminhos e graus dos vértices de um grafo. Isso reforça a proposta do nosso trabalho, que é inserir e usar conceitos e propriedades da Teoria dos Grafos em problemas de Análise Combinatória.

**Problema 6.10.** *Um caminhão precisa recolher o lixo das ruas de um certo bairro. Por questões econômicas e ambientais, a empresa IMJ, responsável pela coleta, planeja as rotas de recolhimento, de modo que o caminhão percorra a menor distância possível, passando em cada rua exatamente uma vez, entrando e saindo de cada ponto. Quando isso não é possível, busca-se repetir o menor número possível de ruas na rota. Na Figura 53, temos um esquema no qual os pontos representam esquinas, e as linhas representam as ruas.*

Figura 53 – Ilustração do Problema 6.10

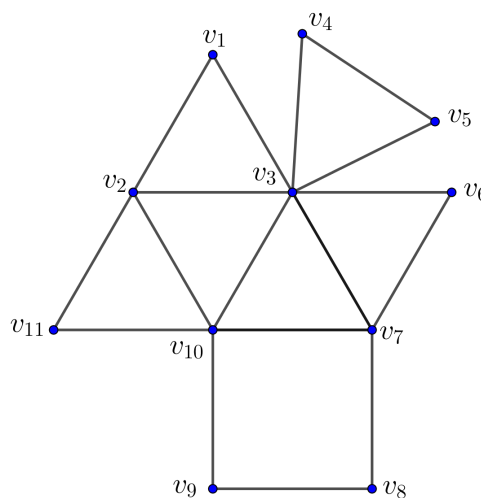


Fonte: BRASIL, 2011, pág. 30

Considere que cada rua mede 150m de comprimento e que a rota do caminhão comece e termine no ponto A, passando por todas as ruas do esquema. A empresa conseguiu encontrar a melhor rota de recolhimento de lixo, na qual o caminhão percorre uma distância igual a?

*Solução:* Podemos fazer uma analogia desse problema, com o Problema 3.1, o Problema das Pontes de Königsberg. Pois, para solucionar o problema devemos determinar uma rota (caminho) no qual o caminhão não passe duas vezes na mesma estrada (se possível), ou seja, um caminho no qual não há repetição de arestas no grafo que representa o problema.

Figura 54 – Grafo do problema 6.10



Fonte: Autor

Sendo  $G$  o grafo da Figura 54, onde o vértice  $v_1$  corresponde ao ponto  $A$  da Figura 53, temos que  $G$  não é um grafo Euleriano, pois os vértices  $v_{10}$ ,  $v_3$  e  $v_7$  possuem grau ímpar ( $d(v_{10}) = 5$ ,  $d(v_3) = 7$  e  $d(v_7) = 3$ ), pelo Teorema 4.5. Logo, não existe um caminho em  $G$  que comece e termine em  $v_1$  sem repetição de arestas. Assim o caminhão será obrigado a passar duas vezes em uma mesma estrada. Daí, um caminho possível (rota) seria:  $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_3 \rightarrow v_6 \rightarrow v_7 \rightarrow v_3 \rightarrow v_{10} \rightarrow v_7 \rightarrow v_8 \rightarrow v_9 \rightarrow v_{10} \rightarrow v_2 \rightarrow v_{11} \rightarrow v_{10} \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$ . Observe que nesse passeio a aresta  $\{v_3, v_{10}\}$  foi percorrida duas vezes. Portanto, o caminhão deve percorrer 18 ruas, onde cada uma mede  $150m$ , ou seja, ele vai percorrer  $18 \cdot 150m = 2700m$ .

■



## 7 Sequência Didática

Neste Capítulo, apresentaremos uma proposta de Sequência Didática que possa ser usada por professores de matemática, mais especificamente para aqueles que estejam ministrando aulas em turmas do Ensino Médio. Sabemos que muitos professores procuram constantemente estratégias de ensino que possam atuar como facilitadoras de sua prática e, conseqüentemente, favorecer a aprendizagem de seus alunos. Neste sentido as sequências didáticas são uma ferramenta educacional de grande auxílio para professores das mais diversas áreas e etapas de ensino. Elas são “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos”. (ZABALA, 1998)

Desse modo, apresentaremos mais adiante toda conjuntura da nossa sequência didática. Esperamos que ela sirva para instigar e ajudar professores que almejam melhorar sua prática de ensino e, conseqüentemente, a aprendizagem de seus alunos. A sequência didática, poderá ser aplicada depois que o professor apresentar para sua turma, as técnicas de contagem que já estão presentes no currículo escolar, como o princípio fundamental da contagem, os arranjos e as combinações. Para as primeiras aulas da sequência didática, indicamos ao professor, a apresentação dos conceitos e propriedades básicas da Teoria dos Grafos, que se encontram no Capítulo 4 deste trabalho.

### 7.1 Descrição da Sequência Didática

**Título:** Usando Teoria dos Grafos em Problemas de Contagem

**Professor:** Gilvandro Correia de Melo Jr.

**Turma:** 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> Séries do Ensino Médio

**Duração:** 14 horas - aulas

**Área do Conhecimento:** Matemática e Suas Tecnologias

**Componente Curricular:** Matemática

**Campo \ Eixo:** Álgebra e Contagem

**Objeto de Conhecimento:** Análise Combinatória

**Habilidades Trabalhadas:**

- ✓ **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.
- ✓ **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
- ✓ **(EM13MAT106)** Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

**Objetivos:**

- ✓ Apresentar aos alunos a Teoria dos Grafos, através de situações problemas.
- ✓ Sugerir problemas de contagem e resolvê-los usando conceitos e propriedades da Teoria dos Grafos.
- ✓ Conseguir representar uma situação problema através de um grafo.
- ✓ Resolver e elaborar problemas de contagem.
- ✓ Reconhecer a Teoria dos grafos como uma ferramenta para resolução de problemas de contagem.
- ✓ Analisar e interpretar o grafo de uma situação problema.
- ✓ Reconhecer um grafo Euleriano e aplicar o seu conceito na resolução de problemas.
- ✓ Usar a definição de grau de um vértice e o teorema da soma dos graus de um grafo para resolver situações problema.
- ✓ Reconhecer e analisar problemas que envolvam passeios e caminhos em grafo.

**Recursos:**

- ✓ Quadro branco e lápis;
- ✓ Projetor Multímedia ou Tv;
- ✓ Computador de mesa ou Notebook;
- ✓ Impressora para impressão das atividades.

**7.1.1 Aula 1 : Conceitos Básicos da Teoria dos Grafos**

- ✓ **Tempo Estimado:** 2 aulas de 50 minutos cada.
- ✓ **Desenvolvimento das Atividades:**

**1º Momento :** Na primeira parte da aula, sugerimos que o professor apresente um problema que introduza o conceito de grafo e seus elementos básicos como vértices e arestas. Para isso, o professor pode expor no quadro ou em uma tela (projektor multimídia ou tv) o problema abaixo.

**Problema 7.1.** *Alan, Bruno, Carla, Diego e Ester se encontraram numa festa e apertaram as mãos, exatamente uma vez, de todas as pessoas que elas já conheciam neste grupo. Alan deu um aperto de mão, Bruno deu dois, Carla deu três e Diego deu quatro apertos de mãos. Quantos foram os apertos de mão dados por Ester?*

**2º Momento:** O professor pode reservar um tempo entre 15 e 20 minutos para que os alunos possam pensar e discutir as possíveis soluções para o problema.

**3º Momento:** Pedir para os alunos de forma individual ou em grupo apresentem seus resultados, compartilhando com os demais colegas suas possíveis soluções para o problema.

**4º Momento:** Após os alunos apresentarem suas soluções, sugerimos que o professor apresente a solução do problema usando grafos.

- ✓ **Resultados Esperados:**

Espera-se que os alunos se apropriem dos conceitos básicos de grafos a partir do problema proposto. E com isso consigam aplicar esses conceitos em problemas posteriores.

### 7.1.2 Aula 2 : Passeios, Caminhos e Conexidade

✓ **Tempo Estimado:** 2 aulas de 50 minutos cada.

✓ **Desenvolvimento das Atividades:**

**1º Momento :** Na primeira parte da aula, sugerimos que o professor apresente um problema no qual seja possível trabalhar os conceitos de: passeios, caminhos e conexidade em um grafo. Para isso, o professor pode expor no quadro ou em uma tela (projeter multimídia ou tv) o Problema 6.2.

**2º Momento:** O professor pode reservar um tempo entre 15 e 20 minutos para que os alunos possam pensar e discutir as possíveis soluções para o problema.

**3º Momento:** Pedir para os alunos de forma individual ou em grupo apresentem seus resultados, compartilhando com os demais colegas suas possíveis soluções para o problema.

**4º Momento:** Após os alunos apresentarem suas soluções, sugerimos que o professor apresente a solução do problema usando os conceitos de passeio, caminho e conexidade em um grafo.

✓ **Resultados Esperados:**

Espera-se que os alunos se apropriem dos conceitos de passeio, caminho e conexidade em um grafo a partir do problema proposto. E com isso consigam solucionar o problema usando grafos. Além disso, almeja-se que o aluno utilize esses conceitos para resolver outras situações problemas.

✓ **Avaliação:** Para avaliar os alunos após as duas primeiras aulas dessa sequência didática, sugerimos ao professor a aplicação do exercício apresentado a seguir.

**Exercício 7.2.** *A formiguinha da OBMEP está no ponto A e quer ir até o doce que está no ponto B. Ela anda sobre as linhas da figura e faz um caminho com o menor comprimento possível. Quantos são esses caminhos de menor comprimento?*

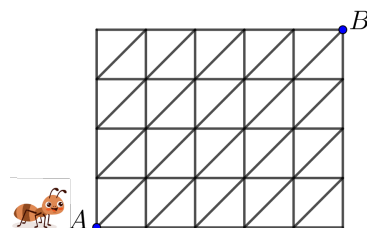


Figura 55 – Ilustração do Exercício 7.2

O Exercício 7.2, foi retirado de (OBMEP, 2019a).

### 7.1.3 Aula 3 : Grau e suas relações com vértices e arestas

✓ **Tempo Estimado:** 2 aulas de 50 minutos cada.

✓ **Desenvolvimento das Atividades:**

**1º Momento :** Na primeira parte da aula, sugerimos que o professor apresente um problema que introduza os conceitos de grau de um vértice e apresente o Teorema 4.1 e o Corolário 4.3. Para isso, o professor pode expor no quadro ou em uma tela (projektor multimídia ou tv) o problema abaixo.

**Problema 7.3.** *Em uma determinada localidade existem 70 postes de iluminação. De cada um desses postes saem 5 fios para os demais, todos de comprimento igual a 35m. A companhia elétrica que administra os postes, deseja trocar todos os fios da localidade. Quantos metros de fio a companhia deve comprar?*

**2º Momento:** O professor pode reservar um tempo entre 15 e 20 minutos para que os alunos possam pensar e discutir as possíveis soluções para o problema.

**3º Momento:** Pedir para os alunos de forma individual ou em grupo apresentem seus resultados, compartilhando com os demais colegas suas possíveis soluções para o problema.

**4º Momento:** Após os alunos apresentarem suas soluções, sugerimos que o professor apresente a solução do problema usando os conceitos abordados na aula.

✓ **Resultados Esperados:**

Espera-se que os alunos se apropriem do conceito de grau de vértice e consiga aplicar de maneira correta o Teorema 4.1 e o Corolário 4.3 a partir do problema proposto, já que a apropriação desses conceitos permitirá aos alunos resolver diversos outros problemas.

### 7.1.4 Aula 4 : Grafos Eulerianos

✓ **Tempo Estimado:** 2 aulas de 50 minutos cada.

✓ **Desenvolvimento das Atividades:**

**1º Momento :** Na primeira etapa da aula, sugerimos que o professor apresente um problema, que a partir dele possa ser desenvolvidos os conceitos de Grafos Eulerianos e Passeios Eulerianos. Para isso, o professor pode expor no quadro ou em uma tela (projeter multimídia ou tv) a questão 178 do caderno cinza do ENEM 2011 (Problema 6.10).

**2º Momento:** Da mesma forma que nas outras aulas, sugerimos ao professor que reserve um tempo entre 15 e 20 minutos para que os alunos possam pensar e discutir as possíveis soluções para o problema.

**3º Momento:** Pedir para os alunos de forma individual ou em grupo apresentem seus resultados, compartilhando com os demais colegas suas possíveis soluções para o problema.

**4º Momento:** Após os alunos apresentarem suas soluções, sugerimos que o professor apresente a solução do problema usando os conceitos de grafo Euleriano e passeio Euleriano.

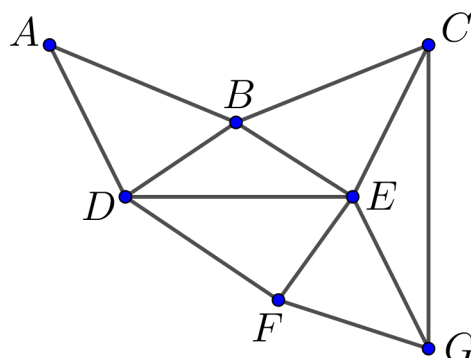
✓ **Resultados Esperados:**

Espera-se que a partir dos conceitos de Passeios Eulerianos e Grafos Eulerianos apresentados na aula, o aluno consiga resolver e identificar problemas que não possuem solução. Como é o caso do Problema das Pontes de Königsberg.

✓ **Avaliação:** Como forma de avaliar seus alunos, o professor pode passar como atividade, o seguinte exercício:

**Exercício 7.4.** *Um caminhão de coleta seletiva de lixo, deseja passar por todos os bairros de uma cidade, sem passar por uma mesma rua mais de uma vez para reduzir custos com combustíveis. Na Figura 56, temos um esquema, onde cada ponto representa um bairro e os segmentos de reta representam as ruas que ligam os bairros dessa cidade. Quantas são as rotas que o caminho pode fazer, obedecendo o critério estabelecido?*

Figura 56 – Ilustração do Exercício 7.4



Fonte: Autor

### 7.1.5 Aula 5 : Matrizes e Grafos

✓ **Tempo Estimado:** 2 aulas de 50 minutos cada.

✓ **Desenvolvimento das Atividades:**

**1º Momento :** Na fase inicial da aula 5, o professor deve apresentar um grafo para a turma e explicar os conceitos de Matriz de Adjacência e Matriz de Incidência de um grafo.

**2º Momento:** Sugerimos ao professor, que ele apresente alguns grafos aos alunos. E em seguida solicite que eles construam a matrizes de adjacência dos grafos. Caso o professor ache viável, ele pode dividir a turma em grupos e solicitar que cada grupo construa a matriz de adjacência de um grafo diferente.

**3º Momento:** Pedir para os alunos de forma individual ou em grupo apresentem seus resultados, compartilhando com os demais colegas suas possíveis soluções para o problema.

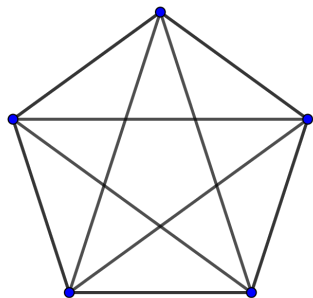
✓ **Resultados Esperados:**

Espera-se que os alunos consigam se apropriar dos conceitos de matriz de adjacência e matriz de incidência de um grafo. Anceia-se também, que os alunos possam identificar algumas características da matriz de adjacência de um grafo, como sua simetria.

✓ **Avaliação:** Como forma de avaliar seus alunos, o professor pode passar como atividade os seguintes exercícios.

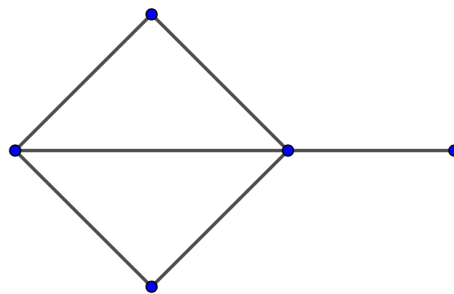
**Exercício 7.5.** *Determine a matriz de Adjacência e Incidência dos grafos abaixo.*

Figura 57 – Grafo do Exercício 7.3a



Fonte: Autor

Figura 58 – Grafo do Exercício 7.3b



Fonte: Autor

### 7.1.6 Aula 6 : Matriz, Grafos e Contagem

✓ **Tempo Estimado:** 2 aulas de 50 minutos cada.

✓ **Desenvolvimento das Atividades:**

**1º Momento :** Na 6ª aula dessa sequência didática, sugerimos ao professor, que comece a aula apresentando a turma o Problema 6.6.

**2º Momento:** Sugerimos ao professor, reservar um tempo entre 15 e 20 minutos para que os alunos possam pensar e discutir as possíveis soluções para o problema.

**3º Momento:** O professor pode pedir para os alunos, de forma individual ou em grupo, apresentarem seus resultados, compartilhando com os demais colegas as possíveis soluções para o problema. Com isso, socializando as ideias e raciocínios usados para resolver o problema com toda turma.

**4º Momento:** Após os alunos apresentarem suas ideias e/ou soluções do problema, sugerimos que o professor apresente a solução do problema usando os conceitos de matriz de adjacência de um grafo .

✓ **Resultados Esperados:**

Espera-se que a partir dos conceitos matrizes de adjacência de um grafo, apresentados na aula, o aluno consiga identificar e resolver problemas onde possam ser aplicados esses conceitos.



### 7.1.7 Aula 7 : Avaliação da Aprendizagem

✓ **Tempo Estimado:** 2 aulas de 50 minutos cada.

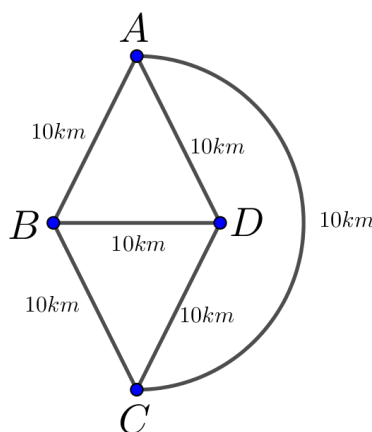
✓ **Desenvolvimento das Atividades:**

A 7ª aula dessa sequência didática, é voltada para a avaliação da aprendizagem. Sugerimos ao professor que escolha de quatro a cinco problemas e elabore uma atividade, onde ele possa avaliar o desempenho dos alunos, a respeito dos temas abordados nas seis aulas anteriores. A atividade deve abordar problemas de contagem, que possam ser modelados por conceitos e propriedades da Teoria dos Grafos.

✓ **Sugestões de Atividade para Avaliação:**

**Exercício 7.6.** *Quatro Cidades A, B, C e D são conectadas por estradas, como mostra a Figura 59.*

Figura 59 – Cidades do Exercício 7.6

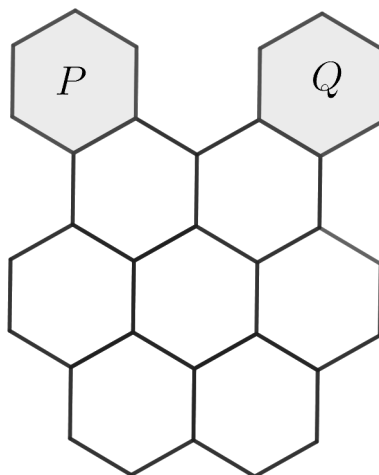


Fonte: Autor

*Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A e possuem exatamente 50km?*

**Exercício 7.7.** *Numa plataforma constituída por hexágonos, como mostra a Figura 60, uma pessoa move-se do hexágono P para o hexágono Q. Em cada passo, ela pode passar de um hexágono para outro apenas se estes tiverem uma lado em comum. Quantos percursos diferentes existem de P para Q passando por cada um dos hexágonos brancos exatamente uma vez?*

Figura 60 – Ilustração do exercício 7.7



Fonte: Autor

**Exercício 7.8.** *Em uma determinada cidade existem 15 telefones. Estes telefones, podem ser ligados por fios de modo que cada um deles fique interligado a exatamente cinco outros?*

As soluções dos problemas e exercícios propostos na sequência didática, estão disponíveis nos Anexos deste trabalho.

## 8 Conclusões

A busca por práticas pedagógicas, que melhorem o processo de ensino-aprendizagem nas aulas de matemática é um dos desafios enfrentados pelos professores nos dias atuais. Em particular, no ensino-aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória. Nesse sentido, sugerimos que a Teoria dos Grafos, pode ser uma alternativa eficaz para melhorar o ensino de Análise Combinatória, e conseqüentemente, a aprendizagem dos alunos na disciplina de matemática.

Tendo em vista que a exploração da Teoria dos Grafos nas aulas de matemática no Ensino Médio possibilita uma abordagem de novos conceitos, como também, a discussão de diferentes estratégias para a solução de problemas contagem. O estudo dos grafos, além de facilitar a visualização de alguns problemas, torna possível a abordagem de problemas, como os das Sete Pontes de Königsberg, despertando nos alunos a curiosidade pelo problema, e pelo seu contexto histórico, mas também ajudando na interpretação e resolução de problemas similares.

Verifica-se também que o trabalho desenvolvido, possibilita ao leitor uma iniciação aos estudos da Teoria dos Grafos, apresentando uma variedade de questões (problemas), relacionadas a diversos tópicos desta teoria, como caminhos Eulerianos, grau de um vértice, contagem de arestas, coloração de mapas entre outros. Fazendo uso desses conceitos na resolução de problemas de contagem, aumenta-se as chances de uma aprendizagem mais significativa.

Constata-se, ainda que o emprego da Teoria dos Grafos na resolução de problemas de contagem está bem alinhado com as competências e habilidades as serem desenvolvidas pelos alunos segundo a BNCC. Assim, esperamos que a sequência didática proposta neste trabalho sirva como um instrumento pedagógico que influencie na prática de outros professores, ajudando no processo de ensino-aprendizagem nas aulas de matemática e, conseqüentemente, ajude no desenvolvimento da educação básica, que é um dos objetivos do Mestrado Profissional em Matemática - Profmat.

## Referências

- BRASIL. *Exame Nacional do Ensino Médio*. 2011. Disponível em: <[https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/ppl/2011/PPL\\_ENEM\\_2011\\_06\\_CINZA.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/ppl/2011/PPL_ENEM_2011_06_CINZA.pdf)>. Acesso em: 11 jun 2023. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 69.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: [s.n.], 2018. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 22.
- CANGURU, M. *Olimpíada Canguru de Matemática*. 2014. Disponível em: <<https://www.mat.uc.pt/canguru/Arqprovas/2014/provaJunior14.pdf>>. Acesso em: 03 jun 2023. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 67.
- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de matemática*. Rio de Janeiro: Ática, 1999. Citado na página 18.
- FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos: A experiência Russa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. Citado na página 62.
- IRRACIEL, K.; FERNÁNDEZ, A. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 47.
- LOVASZ, L.; PELIKAN, J.; VESZTERGOMBI, K. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 27, 36 e 46.
- LUPINACCI, M.; BOTIN, M. L. M. *Resolução de Problemas no Ensino de Matemática*. Recife: Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004. Citado na página 18.
- MORGADO, A. C. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 2020. Citado na página 47.
- MOTA, J. C. S. B. *História da matemática: Teoria de grafos. Faculdade de Ciências do Porto*. 2010. Disponível em: <[https://www.academia.edu/6342431/Teoria\\_de\\_Grafos\\_-\\_História](https://www.academia.edu/6342431/Teoria_de_Grafos_-_História)>. Acesso em: 26 mar 2023. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 26.
- NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: Combinatória*. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Citado na página 27.
- NETTO, P. O. B.; JURKIEWICZ, S. *Grafos: introdução e prática*. São Paulo: Blucher, 2017. Citado na página 14.
- OBMEP. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. 2019. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/1F2iOxFkDwazxPCb2FbbXZbjKfvQ7F2Db/view>>. Acesso em: 20 jun 2023. Citado na página 76.
- OBMEP. *Solução da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. 2019. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/1dySo2Z2S7RkX9L5Rs9GPdIZDVzm3yCeR/view>>. Acesso em: 20 jun 2023. Citado na página 87.

---

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. Citado na página 18.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: ArtMed, 1998. Citado na página 72.

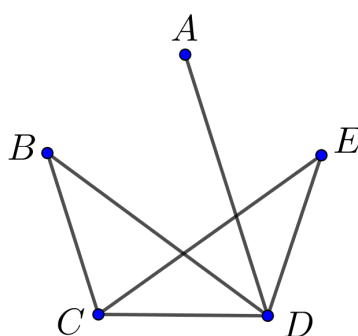
# Apêndices

## APÊNDICE A – Soluções dos Problemas e Exercícios Propostos na Sequência Didática

**Problema 7.1.** *Alan, Bruno, Carla, Diego e Ester se encontraram numa festa e apertaram as mãos, exatamente uma vez, de todas as pessoas que elas já conheciam neste grupo. Alan deu um aperto de mão, Bruno deu dois, Carla deu três e Diego deu quatro apertos de mãos. Quantos foram os apertos de mão dados por Ester?*

*Solução:* Para resolver este problema, podemos construir um grafo, onde associamos cada pessoa a um vértice e os apertos de mãos trocados entre essas pessoas, as arestas do grafo. Assim, sejam:  $A$ -Alan,  $B$ -Bruno,  $C$ -Carla,  $D$ -Diego e  $E$ -Ester. Diego, apertou a mão de todas as outras quatro pessoas, ou seja, no grafo o vértice  $D$  deve estar ligado a todos os outros vértices, da mesma forma, o vértice  $C$  que representa Carla deve estar ligado a todos os outros vértices, exceto ao vértice  $A$  que representa Alan que apertou apenas a mão de Diego. Note, que com isso os vértices  $B$  e  $E$  devem estar ambos conectados aos vértices  $C$  e  $D$ , satisfazendo assim, as condições do problema. Assim, se construindo o grafo da Figura 61, concluímos que Ester, apertou a mão de duas pessoas, Carla e Diego.

Figura 61 – Grafo do Problema 7.1



Fonte: Autor



**Problema 7.3.** *Em uma determinada localidade existem 70 postes de iluminação. De cada um desses postes saem 5 fios para os demais, todos de comprimento igual a 35m. A companhia elétrica que administra os postes, deseja trocar todos os fios da localidade. Quantos metros de fio a companhia deve comprar?*

*Solução:* Tomando cada poste da cidade, como um vértice, e cada fio como sendo a aresta de um grafo, o problema passa a ser, descobrir quantas arestas esse grafo possui. Como de cada poste saem 5 fios, temos que o grau de cada um dos 70 vértices é 5. Assim, pelo Teorema 4.1, se  $m$  é o número de arestas do grafo, temos que

$$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + \cdots + d(v_{70}) = 2m. \quad (\text{A.1})$$

Daí, como o primeiro membro da Equação (A.1) é igual a  $5 \cdot 70$ , temos que

$$5 \cdot 70 = 2m \Rightarrow 350 = 2m \Rightarrow m = 175.$$

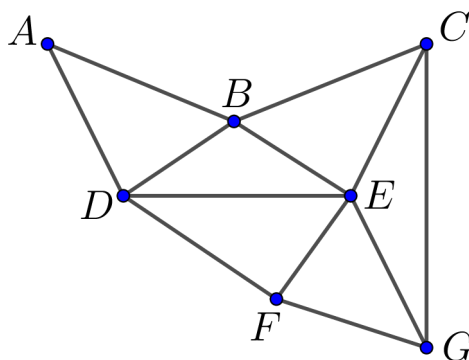
Portanto, a empresa deve comprar 175 fios. E como cada um desses fios mede 35m, temos que  $175 \cdot 35m = 6125m$ . Logo a empresa deve comprar 6125m de fio. ■

### A.0.1 Solução dos Exercícios

**Exercício 7.2.** A solução do Exercício 7.2, está disponível na página 5 de (OBMEP, 2019b).

**Exercício 7.4.** *Um caminhão de coleta seletiva de lixo, deseja passar por todos os bairros de uma cidade, sem passar por uma mesma rua mais de uma vez para reduzir custos com combustíveis. Na Figura 62, temos um esquema, onde cada ponto representa um bairro e os segmentos de reta representam as ruas que ligam os bairros dessa cidade. Quantas são as rotas que o caminho pode fazer, obedecendo o critério estabelecido?*

Figura 62 – Ilustração do Exercício 7.4



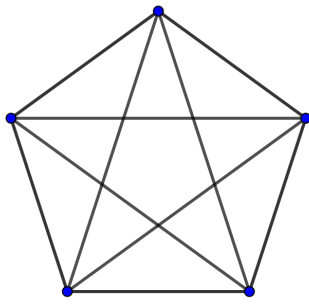
Fonte: Autor



*Solução:* Tomando o esquema da Figura 62, como um grafo. Note que, como o caminhão deve passar em cada rua (aresta) uma única vez, o grafo deve possuir um passeio Euleriano. Ora, pelo Teorema 4.5, um grafo possui um passeio Euleriano, se possuir no máximo dois vértices de grau ímpar. Porém, o grafo da Figura 62, possui quatro vértices de grau ímpar,  $C, E, F$  e  $G$ . Portanto, não existe nenhuma rota possível para o caminhão, obedecendo os critérios da empresa. ■

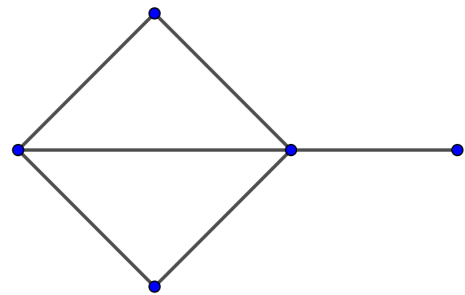
**Exercício 7.5.** *Determine a matriz de adjacência do grafo da Figura A.0.1 e a matriz de incidência do grafo da Figura 64.*

Figura 63 – Grafo do Exercício 7.5a



Fonte: Autor

Figura 64 – Grafo do Exercício 7.5b



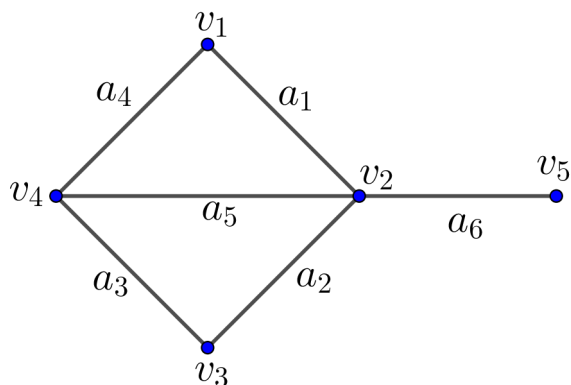
Fonte: Autor

*Resolução:* Aplicando a definição de matriz de adjacência no grafo da Figura A.0.1a. Obtemos, a matriz  $A_{5 \times 5}$ , tal que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, iremos determinar a matriz de incidência do grafo da Figura 64b. Denominando os vértices e arestas do grafo, como mostra a Figura 65.

Figura 65 – Vértices e arestas do grafo do Exercício 7.5b



Fonte: Autor

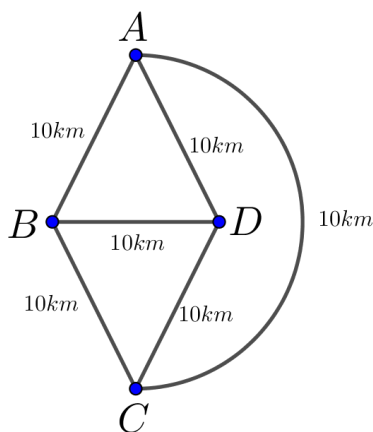
E aplicando a definição de matriz de incidência. Obtemos a matriz  $B_{5 \times 6}$ , tal que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

**Exercício 7.6.** Quatro Cidades  $A, B, C$  e  $D$  são conectadas por estradas, como mostra a Figura 66.

Figura 66 – Cidades do Exercício 7.6



Fonte: Autor

Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade  $A$  e possuem exatamente 50km?

*Solução:* Considerando as cidades da Figura 66, como vértices de um grafo  $G$ , e as estradas como sendo as arestas. O grafo  $G$ , possui a seguinte matriz de adjacência

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como todas as estradas têm um comprimento de  $10km$ , encontrar a quantidade de percursos que iniciam e terminam em  $A$  com exatamente  $50km$  é equivalente a encontrar no grafo  $G$ , o número de caminhos de comprimento 5, com vértice inicial e final em  $A$ . Assim, o elemento  $m_{11}$  da matriz  $M^5$  nos fornece esse número, pelo Teorema 4.8. A matriz  $M^5$ , é dada por

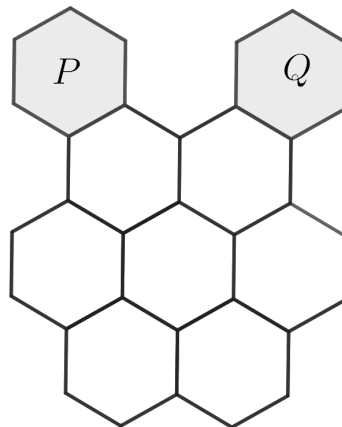
$$M^5 = \begin{bmatrix} 60 & 61 & 61 & 61 \\ 61 & 60 & 61 & 61 \\ 61 & 61 & 60 & 61 \\ 61 & 61 & 61 & 60 \end{bmatrix}.$$

Portanto, como  $m_{11} = 60$ , concluímos que existem 60 percursos de  $50km$ , que iniciam e terminam no vértice  $A$ .

■

**Exercício 7.7.** *Numa plataforma constituída por hexágonos, como mostra a Figura 67, uma pessoa move-se do hexágono  $P$  para o hexágono  $Q$ . Em cada passo, ela pode passar de um hexágono para outro apenas se estes tiverem uma lado em comum. Quantos percursos diferentes existem de  $P$  para  $Q$  passando por cada um dos hexágonos brancos exatamente uma vez?*

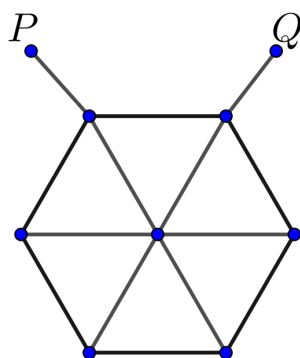
Figura 67 – Ilustração do Exercício 7.7



Fonte: Autor

*Solução:* Considere cada hexágono da Figura 67, como sendo o vértice de um grafo, e a existência de lados comuns entre os eles, como sendo as arestas do grafo. Assim, obtemos o grafo da Figura 68.

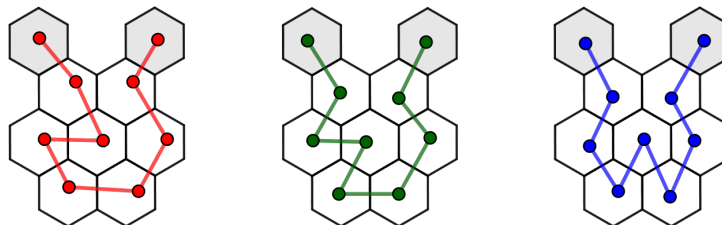
Figura 68 – Grafo do Exercício 7.7



Fonte: Autor

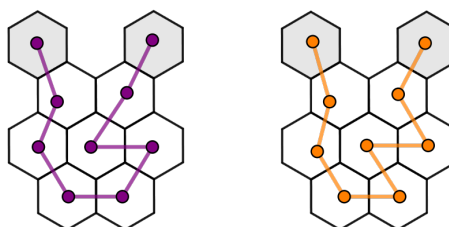
Assim, a quantidade de percursos entre  $P$  e  $Q$ , passando por cada hexágono uma única vez, pode ser modelada de acordo com os caminhos descritos nas Figuras 69 e 70.

Figura 69 – Caminhos do grafo do Exercício 7.7



Fonte: Autor

Figura 70 – Caminhos do grafo do Exercício 7.7



Fonte: Autor

Portanto, existem 5 caminhos possíveis para ir de  $P$  até  $Q$ , passando por cada hexágono uma única vez.



**Exercício 7.8.** *Em uma determinada cidade existem 15 telefones. Estes telefones, podem ser ligados por fios de modo que cada um deles fique interligado a exatamente cinco outros?*

*Resolução:* Suponhamos que seja possível realizar a situação descrita no problema. Assim, se considerarmos o grafo, no qual os vértices representam os telefones e as arestas os fios. O grafo, terá 15 vértices, cada um com grau 5. Daí, a soma dos graus de todos os vértices será  $15 \cdot 5 = 75$ , o que é um absurdo, pois pelo Teorema 4.1, a soma dos graus de todos os vértices de um grafo é par. Logo, a situação é impossível de acontecer. ■

# Anexos