Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UM CAMINHO PARA MOTIVAÇÃO DE ESTUDOS DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Tiago Leitão Sobreira

Uberlândia-MG
2023

Tiago Leitão Sobreira

UM CAMINHO PARA MOTIVAÇÃO DE ESTUDOS DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática
Linha de pesquisa: Matemática Aplicada

Orientador(a): Fábio José Bertoloto

Uberlândia-MG
2023

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S677
2023

Sobreira, Tiago Leitão, 1997-
Um caminho para motivação de estudos de conteúdos matemáticos [recurso eletrônico] / Tiago Leitão Sobreira. - 2023.

Orientador: Fábio José Bertoloto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.444
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Bertoloto, Fábio José,1980-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

Agradecimentos

Obrigado a todos que me ouviram reclamar do sistema LaTeX e também àqueles que responderam minhas dúvidas, me deram suporte, dicas ou até fizeram parte dos comandos para mim.

Obrigado aos alunos que estudam ou já estudaram comigo, pois me cativam, desafiam meus conhecimentos e me incentivam a melhorar, além é claro de elogios e palavras de carinho.

Obrigado aos amigos que estiveram sempre juntos, seja para passar bons ou maus momentos, reclamar ou agradecer, presença indispensável e completamente imprevisível que é essencial em minha vida.

Obrigado as escolas que passei, pelas oportunidades de ensino e pessoas que conheci, mas fico feliz mesmo, por todos os problemas e paredes que enfrentei sem razão ou por erros do sistema ou instituição, é graças a ter passado por estes empecilhos e pensado neles de forma crítica que desenvolvi uma visão bem diferente do comum, me permitindo trilhar um caminho que posso chamar de meu.

Obrigado a família pelo carinho, ensinamentos e suporte que me deram, são coisas que fizeram parte da minha formação como pessoa e que levarei para sempre. Todo momento, experiência, sentimento, somam na força deste laço único insubstituível e cheio de amor.

Obrigado aos professores que tive até hoje, quanto ao meu desenvolvimento escolar, obrigado pela dedicação, esforço, paciência, segundas e terceiras chances. Quanto a minha formação como pessoa, as reflexões, os debates, exemplos e sementes de ideias que tive na convivência, são atalhos e pontes que sei que vão me levar a ainda mais perguntas e pensamentos construtivos.

Obrigado aos orientadores que tive, pessoas incríveis, estiveram dispostos a me ajudar, lidaram com minhas falhas e problemas e ainda assim continuaram me animando, me cobrando e me incentivando a ir em frente.

Obrigado a todos os envolvidos em minhas reflexões muitas vezes desconfortáveis, fico feliz pelas vezes que meu desgosto pela formalidade matemática não foi um impeditivo, mas sim combustível para mais diálogo de onde aprendi muito.

Obrigado!

SOBREIRA T. L. ***.Um Caminho para Motivação de Estudos de Conteúdos Matemáticos*****. 2023. 75p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar e apresentar métodos ou inspirações que poderiam responder a pergunta corriqueira feita por estudantes de matemática: "...mas, para que vou usar isso!?". Muitos alunos utilizam desta pergunta e, da falta de uma resposta satisfatória para ela, como motivo para descaso ou desinteresse do estudo de matemática. Buscamos, então, tentativas de amenizar, ou nos melhores casos, evitar esta situação. A finalidade é despertar a curiosidade de alunos e professores que acessem este conteúdo, além de apontar usos da matemática e formas de apresentá-los a outras pessoas com o intuito de incentivar seu estudo.

Palavras-chave: Atividades em sala de aula, Ensino fundamental, Ensino médio, Modelagem Matemática, Motivações de estudo.

SOBREIRA T. L. ***.A Way for Motivation of Mathematic Subjects*****. 2023. 75p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Abstract

This dissertation have as objective to study and present methods or inspirations that could answer the question ":.but in which case would I use it?". Many students use this doubt and the lack of a satisfactory answer for it as a reason to overlook or to get desinterested in math study. We seek then, attempts to ease or in best case scenario, avoid this situation. The finality is to arouse curiosity in some of the students and teachers who access this content, besides that, we aim to point out uses of math in ways to present them to others with the intention of encourage its study.

Keywords: Classroom activities, Elementary School, High School, Mathematical Modeling, Studying Motivations.

Sumário

Lista de Figuras . . . . . **iii**

Introdução **1**

1 Curiosidades sobre o mundo e aplicações matemáticas **3**

1.1 Aplicações com logaritmos e exponenciais 3

1.1.1 Função Exponencial 3

1.1.2 Função Logarítmica 5

1.2 Aplicações na Trigonometria 8

1.2.1 Circunferência da Terra: primeira medição 8

1.2.2 Altura de prédio, montanha, coisas grandes 9

1.3 Algumas aplicações relativas a Matrizes e Vetores 11

1.3.1 Autovetor como estabilidade de uma situação modelada a partir da operação por uma matriz 11

1.3.2 Produtos de matrizes na análise de etapas para a conexão entre elementos 15

1.4 Uma aplicação relativa a Geometria Analítica 16

1.5 Uma aplicação relativa a Geometria 17

1.5.1 Abelhas, bolhas, otimização e área 17

2 Sugestões de aulas e atividades **20**

2.1 Despoluição de um rio 20

2.1.1 Materiais necessários 20

2.1.2 Passo a passo da atividade 20

2.2 Temperatura de um bolo 21

2.2.1 Materiais necessários 21

2.2.2 Passo a passo da atividade 21

2.3 Hexágono otimizando área dado perímetros 22

2.3.1 Materiais necessários 22

2.3.2 Passo a passo da atividade 22

2.4 Volume de Cilindro e Música 22
2.4.1 Materiais necessários 23
2.4.2 Passo a passo da atividade 23
2.4.3 Desenvolvimento da atividade em sala de aula 23
2.5 Composição de função e caça ao tesouro 26
2.5.1 Materiais necessários 26
2.5.2 Passo a passo da atividade 27
2.5.3 Detalhes de como construir o mapa da atividade 27

3 Conclusão 29

A Conceitos e Resultados Matemáticos Utilizados 30
A.1 Aritmética e Álgebra 30
A.1.1 Conjuntos e Operações entre eles 30
A.1.2 Um estudo sobre funções 33
A.2 Geometria 44
A.2.1 Polígonos 44
A.2.2 Tesselação 45
A.2.3 Não polígonos 46
A.2.4 Poliedros 47
A.2.5 Corpos Redondos 48
A.3 Exemplos em Geometria Analítica 50
A.3.1 Encontrando Interseções entre Circunferências 52
A.4 Matrizes: Álgebra e Geometria 54
A.4.1 Vetores e operações entre eles 55
A.4.2 Matrizes e Operações entre elas 58

Referências Bibliográficas 63

Lista de Figuras

1.1 Tabela sobre municípios brasileiros. Fonte: Feito pelo autor via Excel . . . 7
1.2 Gráfico comparando a frequência dos primeiros dígitos . Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 7
1.3 Imagem ilustrando a situação. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 9
1.4 Teodolito caseiro feito para esse exemplo. Fonte: Arquivo pessoal do autor . . . 9
1.5 Primeira medição e sua representação em desenho. Fonte: Arquivo pessoal do autor . . . 10
1.6 Segunda medição e sua representação em desenho. Fonte: Arquivo pessoal do autor . . . 10
1.7 Desenho da situação completa. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 10
1.8 Desenho da situação completa. Fonte: Feita pelo Autor . . . 12
1.9 Desenho da situação inicial. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 13
1.10 Desenho da situação após um intervalo de tempo. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 13
1.11 Desenho da situação após dois intervalos de tempo. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 13
1.12 Desenho da situação após três intervalos de tempo. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 14
1.13 Desenho da situação após quatro intervalos de tempo. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 14
1.14 Desenho da situação completa. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 14
1.15 Imagens sobre os Hexágonos. Fonte: `https://www.cpt.com.br/cursos-criacaodeabelhas/artigos/defensividade-das-abelhas-dominio-da-colmeia-e-manuseio-dos-quadros-pelo-apicultor` 17
1.16 Passo a passo do formato de bolhas. Fonte: Arquivo pessoal do autor . . . 18
1.17 Imagens sobre os Hexágonos. Fonte: `https://jp-lugaresfantasticos.blogspot.com/2012/01/calcada-dos-gigantes-irlanda.html`. . . . 18
1.18 Plano tesselado por triângulos regulares. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 19
1.19 Plano tesselado por quadrados. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 19
1.20 Tentativas de tesselar o plano com pentágonos regulares. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 19
1.21 Plano tesselado por hexágonos regulares. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 19

2.1 Explicando com um modelo. Fonte: Arquivo pessoal do autor . . . 24
2.2 Alunos realizando a atividade. Fonte: Arquivo pessoal do autor . . . 24
2.3 Garrafas alinhadas. Fonte: Arquivo pessoal do autor . . . 25

2.4 Imagem do aplicativo aberto em sua tela inicial. Fonte: Arquivo pessoal do autor . . . 25
2.5 Imagens das páginas para instalar o aplicativo pelo celular ou computador. Fonte: Arquivo pessoal do autor . 26
2.6 Imagem de alguns detalhes técnicos do aplicativo. Fonte: Arquivo pessoal do autor . . . 26
2.7 Mapa UFU Santa Mônica. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 27
2.8 Mapa UFU Santa Mônica. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 27
2.9 Mapa UFU Santa Mônica. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 28

A.1 Diagrama de Venn que representa a situação Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 33
A.2 Exemplo sobre composição de funções Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 34
A.3 Função Constante Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 36
A.4 Função quadrática e sua inversa. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 39
A.5 Gráfico das funções Exponencial e Logarítmica, onde $0 < a < 1$. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 40
A.6 Gráfico dos casos 1 e 3. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 41
A.7 Ângulo Agudo, menor que 90°. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 41
A.8 Ângulo Reto, igual a 90°. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 41
A.9 Ângulo Obtuso, maior que 90° e menor que 180°. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 42
A.10 Ângulo Raso, igual a 180°. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 42
A.11 Constantes Trigonométricas. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 42
A.12 Gráficos das funções Seno e Cosseno. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 43
A.13 Gráfico da função tangente. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 44
A.14 Estudo numérico da função. Fonte: Feito pelo autor via Excel. . . . 46
A.15 Comprimento e Área de Circunferências Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 47
A.16 Alguns não polígonos. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 47
A.17 Prisma, Pirâmide, Paralelepípedo e Cubo, respectivamente. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 48
A.18 Cilindro, Cone e Esfera respectivamente. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 49
A.19 Ponto em $\mathbb{R}^2$. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 50
A.20 Distância entre pontos do plano. Fonte: feito pelo autor via GeoGebra. . . . 50
A.21 Circunferência de centro C e raio r Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 51
A.22 Translação de sistema de coordenadas. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 51
A.23 Rotação de sistema de coordenadas. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 52
A.24 Exemplo Numérico. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 52
A.25 Posições relativas entre duas circunferências. Fonte: feito pelo autor via GeoGebra. . . . 54
A.26 Eixos. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 55
A.27 Vetor. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 56
A.28 Soma e Subtração de Vetores. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra . . . 56
A.29 Multiplicação e divisão de Vetores para $k > 1$ além do oposto de um vetor. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra 58

Introdução

Que professor de matemática nunca ouviu a pergunta: "...mas para que vou usar isso!?"? Muitas pessoas só vão se dedicar a estudar algo se considerarem que podem tirar proveito daquilo em sua vida cotidiana. É um pensamento válido em parte, pois de fato esquecemos a maioria dos conteúdos que estudamos na escola, já que não há uma necessidade direta de manter estes conhecimentos frescos em mente e então deixamos de estudá-los. Infelizmente, ficar preso no raciocínio de só estudar se for útil no dia a dia, limita a capacidade de alguém desenvolver suas habilidades em uma área ou pode até mesmo desincentivar o estudo em geral. É difícil contestar que para a maioria, estudar é um processo chato, tedioso ou custoso. Ainda assim cada um precisa encontrar uma forma de superar estes obstáculos e seguir em frente caso tenha o desejo de melhorar, independente da área. Ao conviver e acompanhar o processo de crescimento pessoal, educacional e acadêmico dos alunos, reforcei em mim a ideia de que um professor tem como uma de suas funções ajudar até mesmos os desinteressados a passar por esta barreira do estudo. Refletindo a respeito de tudo isto, decidimos por buscar respostas para a infame pergunta. Analisamos modelagens matemáticas de diversas situações, desde aspectos corriqueiros, até outros que apenas poucos especialistas ou curiosos de fato farão uso. Criamos ainda, sugestões de aulas ou atividades de algumas das modelagens apresentadas. Para complementar, definimos as teorias utilizadas em cada situação, incluindo algumas de suas propriedades, de forma a possibilitar uma utilização desta dissertação como material didático simplificado, do conteúdo até a sugestão da aula.

Este trabalho tem dois objetivos principais: um focado em professores e outro em alunos. Quanto aos discentes, serão apresentadas utilidades práticas da matemática, possivelmente, mais próximas de seus interesses e também informações ou conceitos que possam ajudar a despertar a curiosidade ou desejo de entender mais. Para os docentes, serão propostas ideias de aula e caminhos para utilizarem na apresentação aos seus alunos.

No Capítulo 1, estão listadas possíveis respostas para a pergunta motivadora deste estudo. Com o intuito de facilitar uma pesquisa e ainda identificar para qual ano escolar cada resposta seria mais apropriada, elas foram divididas por tipo de conteúdo matemático, sendo eles: Logaritmos e Exponenciais, Trigonometria, Matrizes e Vetores, Geometria analítica e, por fim, Geometria. Todas são acompanhadas por uma modelagem matemática ou um exemplo que ajuda na compreensão.

Algo ainda mais lúdico ou próximo da prática é descrito no Capítulo 2, composto por cinco sugestões ou atividades para serem feitas com o propósito de consolidar as respostas dadas, anteriormente, ou ainda, de apresentar uma forma, possivelmente, diferente de interagir com a matemática. Algumas destas complementam as utilidades do primeiro capítulo, outras possuem conceitos de associação prática mais difícil, sendo que nestes casos, houveram tentativas de criar experiências interessantes em que é necessário colocá-los em prática.

No Apêndice, as teorias utilizadas nos capítulos são apresentadas do básico e desenvolvidas com suas propriedades, curiosidades e exemplos. Esta seção possui dois objetivos: ajudar leitores que desconhecem ou possuem dificuldade com a teoria necessária para as atividades e aplicações presentes neste documento; e iniciar uma "conversa" entre os leitores e uma matemática mais formal, que nem sempre é vista ou aprofundada na escola.

Este mesmo apêndice é dividido em quatro partes, uma para cada grupo das áreas da matemática que foram abordadas nesta dissertação. Funções, principalmente exponenciais, logarítmicas e trigonométricas estão no ramo de Aritmética e Álgebra. Na divisão de Geometria, falamos sobre área e perímetro de polígonos, além do volume de poliedros, tendo o foco no cilindro, um corpo redondo. Em seguida na subdivisão Geometria Analítica, detalhamos em especial, translação e rotação de um eixo de coordenadas, além de definirmos circunferências por meio de equações e encontrarmos interseções entre elas. Enfim, matrizes e suas operações foram definidas nos ramos de Álgebra e Geometria.

É importante notar que todos os ramos da matemática possuem interseções e, portanto, a divisão feita neste trabalho segue uma justificativa estética, buscando referenciar os capítulos iniciais, não representando de fato, uma divisão perfeita entre cada um deles.

CAPÍTULO 1

Curiosidades sobre o mundo e aplicações matemáticas

Neste Capítulo, são apresentadas algumas aplicações matemáticas seguidas de um breve texto que detalha um pouco mais sobre cada uma.

1.1 Aplicações com logaritmos e exponenciais

1.1.1 Função Exponencial

Para detalhes sobre a teoria envolvida, veja a Seção A.1.2.

Lei do Resfriamento de um corpo

Um objeto com uma temperatura diferente daquela do ambiente onde se encontra, irá aos poucos "regular" sua temperatura até que se torne a mesma do local. A fórmula a seguir descreve este processo com o passar do tempo:

$$D(t) = D_0 e^{-\alpha t},$$

onde:

$D(t)$ é a diferença de temperatura do corpo com o ambiente no instante t;
D_0 é a diferença de temperatura do corpo quando t=0, ou seja, $D_0 = D(0)$;
α é uma constante que depende do material que é constituída a superfície do objeto.

Por exemplo, qual será a diferença de temperatura de um corpo com o ambiente após quatro horas, sabendo que a diferença inicial era de 5 graus e a constante α é igual a $0,3$? Utilizando a fórmula descrita acima, temos:

$$D(t) = 5e^{-0,3*4},$$

$$D(t) \approx 1,5.$$

A diferença de temperatura será de aproximadamente 1,5°.

Na Seção 2.2.2 há uma sugestão de atividade em sala de aula utilizando da Lei do Resfriamento.

Meia vida/Datamento de Carbono

O tempo necessário para que metade do número de átomos de um isótopo radioativo se perca é chamado *meia-vida*. Por exemplo, um isótopo radioativo com 10 átomos e 1 minuto de meia-vida, terá apenas 5 átomos depois de um minuto. A fórmula a seguir expressa esta relação. Ela pode ser utilizada para melhor dosagem de remédios, para precisar idade de objetos antigos assim como os ossos de dinossauros ou até mesmo para mensurar a idade da Terra.

$$M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/p},$$

onde:

$M(t)$ é a quantidade de substância no momento t;
M_0 é a quantidade inicial da substância;
t é o tempo decorrido;
p é o tempo de meia vida da substância.

Por exemplo, um medicamento ingerido em 10 gramas e com sessenta minutos de meia vida, continua sendo útil para o corpo enquanto restar pelo menos 2 gramas dele. Com estas condições, após ser ingerido uma primeira vez, quando será necessário ingerir uma segunda dose? Utilizando a fórmula descrita acima, temos:

$$2 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{t/60}$$

$$\frac{2}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/60}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{10}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{t/60}$$

$$2,32 \approx \frac{t}{60}$$

$$139,2 \approx t$$

A segunda dose precisará ser ingerida depois de aproximadamente 2 horas e 19x minutos.

Curva de Aprendizagem

Ao lidar com um conteúdo desconhecido, a tendência é de que haja uma dificuldade maior de assimilar o que é estudado.

Depois de um tempo de envolvimento com o conteúdo, os conceitos e resultados vão ficando, aparentemente, mais fáceis de se compreender. Mas, após mais um período, as dificuldades podem retornar, devido a grande quantidade de recursos aprendidos que devem ser relacionados para a obtenção de novos resultados, podendo uma pessoa chegar, até mesmo, a um limite que a impossibilite de continuar, sendo talvez este um motivo externo ou interno ao indivíduo.

O que é comentado acima, pode valer para estudantes, trabalhadores e atletas em geral.

Algumas empresas estipulam o desempenho que um funcionário deva atingir com o tempo. Uma fórmula estipulada é a seguinte:

$$P(t) = M - N.e^{-kt},$$

onde:

$P(t)$ é a eficiência da pessoa;
t é o tempo de experiência;
M, N e k, são constantes positivas que dependem da natureza da atividade.

Outros

Outras aplicações muito comuns com funções exponenciais são estudos sobre aplicações financeiras, intervalos entre ingestão de remédios e crescimento populacional.

Não iremos detalhar essas últimas por terem modelagens matemáticas muito similares às anteriores. Muitas destas foram inspiradas e podem ser vistas com mais detalhes em [10].

1.1.2 Função Logarítmica

Para detalhes sobre a teoria envolvida, veja a Seção A.1.2.

Lei de Benford

Ao analisar uma lista com vários números de grande amplitude sobre algo natural, observa-se que o primeiro dígito mais comum em cada número é o dígito 1 e o menos comum é o 9. A quantidade de números que começam com o dígito 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 pode ser estimada utilizando a fórmula a seguir:

$$P(d) = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right),$$

onde:

$P(d)$ é a probabilidade de um número da amostra ter d como o primeiro dígito.

É utilizada como um indicativo de que um conjunto de dados pode estar correto ou com erros ou falsificações.

Na verdade, a fórmula $P(d)$ não vale apenas para o primeiro dígito, mas sim para quantos algarismos o número d tiver. Por exemplo: $P(125) = \log\left(1 + \frac{1}{125}\right)$ indica a probabilidade de os três primeiros dígitos de um número ser 1, 2 e 5 nesta ordem.

Em geral, é possível estimar a probabilidade de um número d aparecer como o segundo, terceiro ou outro dígito de n-ésima posição. Em expressão matemática:

$$P_n(d) = \sum_{k=10^{n-2}}^{10^{n-1}-1} \log\left(1 + \frac{1}{10k + d}\right).$$

Por exemplo, a probabilidade de 5 ser o segundo dígito pode ser calculada por meio de:

$$P_2(5) = \sum_{k=10^{2-2}}^{10^{2-1}-1} \log\left(1 + \frac{1}{10k + 5}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{15}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{25}\right) + \ldots + \log\left(1 + \frac{1}{95}\right) \approx 0,0967.$$

Com um exemplo da Lei de Benford, utilizando os dados encontrados em [6], os municípios de cada Estado do país foram separados de acordo com o primeiro dígito da quantidade de habitantes que possuem, conforme na tabela:

Estados \ Primeiro Dígito dos Municípios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total de Municípios
Acre	10	3	1	3	0	1	1	2	1	22
Alagoas	31	25	6	7	10	8	9	2	4	102
Amapá	6	3	0	0	3	2	1	0	1	16
Amazonas	19	16	10	7	3	1	2	1	3	62
Bahia	178	79	36	25	19	21	16	28	15	417
Ceará	63	44	18	12	10	11	15	8	3	184
Espirito Santo	33	14	14	3	4	1	2	4	3	78
Goiás	56	57	46	24	14	15	12	12	10	246
Maranhão	92	41	19	16	13	7	14	12	3	217
Mato Grosso	39	27	21	15	10	8	4	7	10	141
Mato Grosso do Sul	20	21	6	6	5	7	7	0	7	79
Minas Gerais	224	116	114	108	88	62	65	45	31	853
Pará	39	28	24	13	12	15	7	5	1	144
Paraíba	60	34	29	24	19	24	18	9	6	223
Paraná	124	59	56	46	40	23	19	20	12	399
Pernambuco	65	43	27	11	7	10	10	8	4	185
Piauí	39	24	28	46	30	26	12	12	7	224
Rio de Janeiro	35	21	9	7	6	3	3	4	4	92
Rio Grande do Norte	49	24	23	23	14	13	7	9	5	167
Rio Grande do Sul	110	126	81	51	40	39	25	17	8	497
Rondônia	18	10	5	5	5	4	2	2	1	52
Roraima	9	2	1	1	0	0	0	2	0	15
Santa Catarina	79	65	39	31	19	17	19	17	9	295
São Paulo	181	110	76	86	50	49	35	31	27	645
Sergipe	25	10	14	5	5	4	3	3	6	75
Tocantins	26	26	23	19	17	7	9	9	3	139
Distrito Federal	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Todos	1630	1028	727	594	443	378	317	269	184	5570

Figura 1.1: Tabela sobre municípios brasileiros. Fonte: Feito pelo autor via Excel

No gráfico que segue serão apresentado três conjuntos de dados: os de Minas Gerais (em vermelho), os do Brasil (em verde) e os valores esperados para a Lei de Benford (em preto).

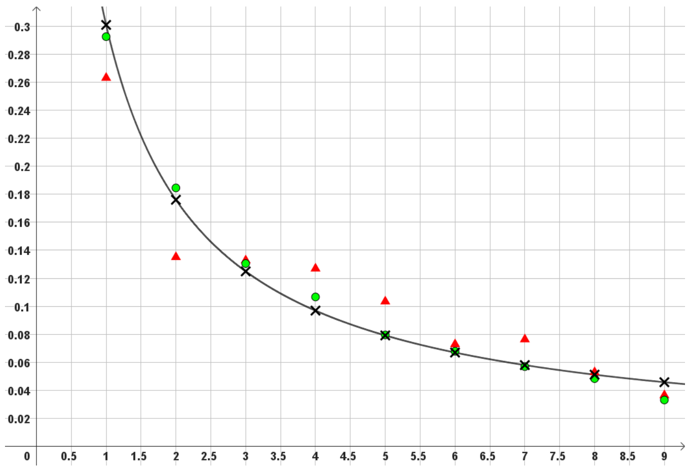

Figura 1.2: Gráfico comparando a frequência dos primeiros dígitos . Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Observe como a frequência dos municípios do Brasil se aproximam mais da Lei de Benford do que os de Minas Gerais. Este é um exemplo de que quanto maior a amplitude dos dados de uma amostra, mais precisos se expressam os resultados da Lei de Benford.

Outros

Outras aplicações muito comuns com funções logarítmicas são estudos sobre acústica, eventos sísmicos, pressão atmosférica e potencial hidrogeniônico (pH) de substâncias.

Não iremos detalhar essas últimas por serem temas comuns de exercícios de livros didáticos, além de surgirem, frequentemente, em provas como ENEM e vestibulares. Muitas destas foram inspiradas e podem ser vistas com mais detalhes em [10].

1.2 Aplicações na Trigonometria

Para detalhes sobre a teoria envolvida, veja a Seção A.1.2.

1.2.1 Circunferência da Terra: primeira medição

Por volta de 200 a.C., Eratóstenes teve uma ideia de como medir o comprimento da circunferência da Terra.

Ele sabia que durante o solstício de verão, na cidade de Siena (atual Assuão), o Sol estaria quase exatamente acima de objetos verticais retos ao solo, e que ao mesmo tempo em Alexandria isso não acontecia, gerando sombra em objetos verticais.

Para fazer o cálculo ele seguiu as seguintes etapas:

1. Obteve a distância entre as cidades, aproximadamente 794.808 metros. Este valor foi encontrado por um Bematistai, que andou de uma cidade à outra contando quantos passos deu.

   Observação: Bematistai é o nome de uma profissão criada por Alexandre, o Grande, cuja função era medir distâncias em passos. Para mais detalhes veja [13].

2. Sabendo a distância, Eratóstenes foi até Alexandria, fincou uma vareta no solo formando um ângulo reto com o chão e mediu o ângulo formado entre o topo dela e de sua sombra. O valor obtido foi próximo de 7,2°, que é $\frac{1}{50}$ de uma circunferência.

3. A situação encontrada por ele, pode ser analisada, por meio do Teorema de Tales, com a ajuda de uma representação como a que segue. Nesta imagem, segmento em vermelho representa a vareta fincada no solo de Alexandria:

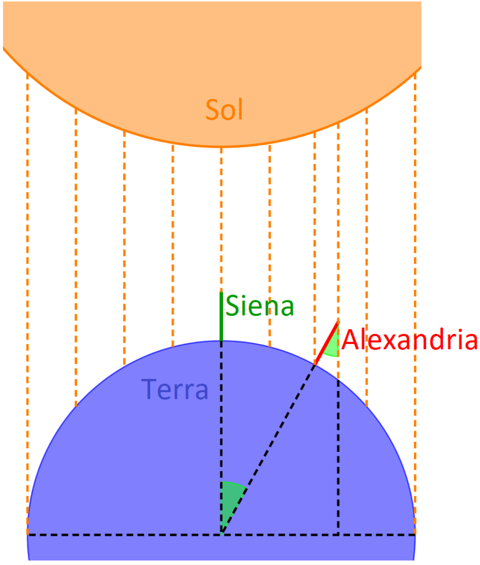

Figura 1.3: Imagem ilustrando a situação. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

4. Então para obter o comprimento da Terra ele multiplicou 50 por 794.808, chegando em um número próximo de 39.740.400 metros.

   O valor que é encontrado hoje em dia, com cálculos mais precisos, é de 40.074.784 metros.

1.2.2 Altura de prédio, montanha, coisas grandes

Muitas vezes, medir o comprimento de algo é simples, basta pegar uma régua ou ferramenta métrica e comparar tamanhos, mas infelizmente nem sempre é tão fácil. Por exemplo, como medir a altura do pico mais alto de uma montanha? Não é possível utilizar do mesmo método e ainda existe o complicador de não sabermos se o pico está no centro da montanha. Para este e outros tipo de medição, é possível utilizar uma ferramenta chamada *teodolito*, que mede o ângulo entre a superfície em que ele se encontra e o ponto desejado.

Para o que é descrito na sequência, foi construído um teodolito caseiro utilizando transferidor, barbante, palito, fita adesiva e um peso, no caso aqui uma borracha escolar. Uma imagem do mesmo é adicionada abaixo.

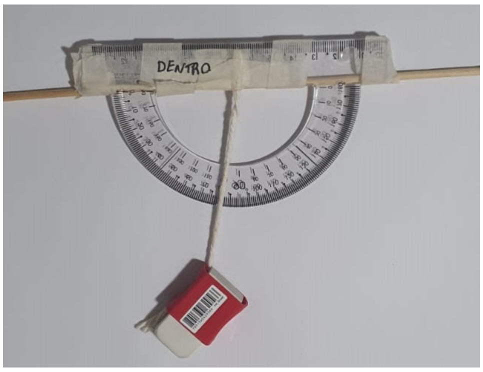

Figura 1.4: Teodolito caseiro feito para esse exemplo. Fonte: Arquivo pessoal do autor

Tendo a biblioteca da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) de exemplo e, o teodolito da figura acima como ferramenta, é possível medir sua altura a partir das etapas:

1. Ao Armar o teodolito a uma distância da biblioteca e apontar para o ponto mais alto, descobre-se o ângulo formado entre ela e o chão neste local.

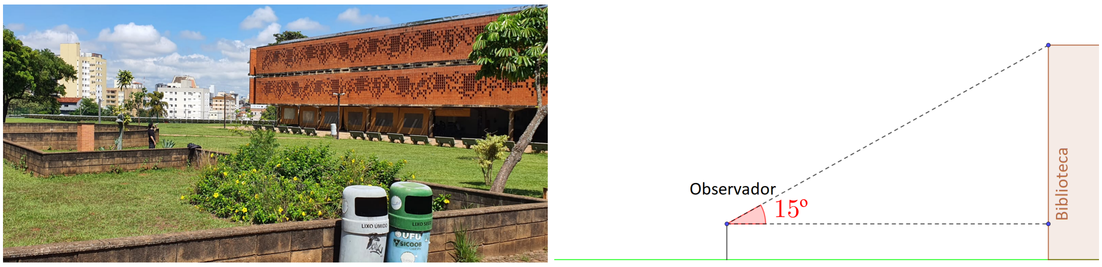

Figura 1.5: Primeira medição e sua representação em desenho. Fonte: Arquivo pessoal do autor

2. Ao afastar-se consideravelmente do primeiro ponto, arma-se o teodolito novamente e mede-se o ângulo formado agora, mais uma vez, mirando no mesmo ponto.

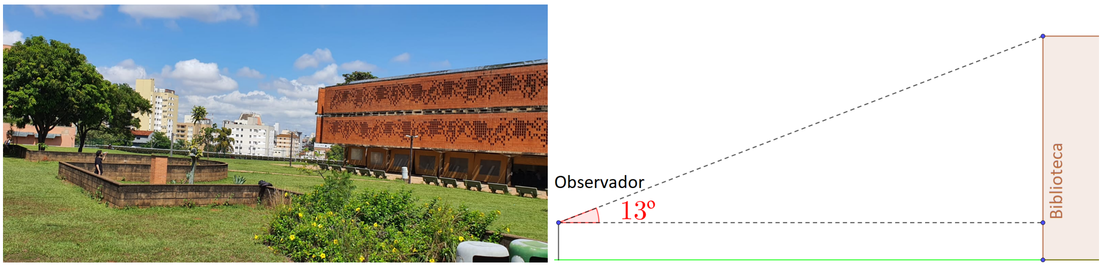

Figura 1.6: Segunda medição e sua representação em desenho. Fonte: Arquivo pessoal do autor

3. O desenho em uma folha da situação encontrada, será algo similar a:

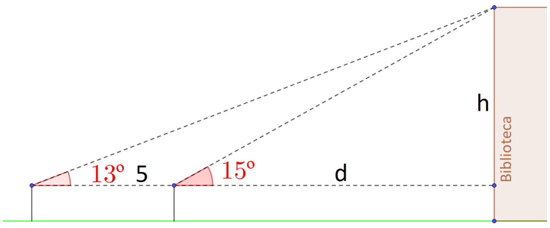

Figura 1.7: Desenho da situação completa. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

4. Utilizando a tangente dos dois ângulos encontrados, cria-se um sistema com duas incógnitas, d para a distância da primeira medição e h, para a altura da biblioteca. Ambas as medições são aferidas em metros.

$$\begin{cases} tg(15) = \dfrac{h}{d} \\ tg(13) = \dfrac{h}{d+5} \end{cases}$$

5. Ao resolver o sistema, aproximando com o auxílio de uma calculadora os valores de $tg(13)$ e $tg(15)$, encontra-se tanto o valor de d quanto de h.

$$\begin{cases} 0,2679 = \dfrac{h}{d} \\ 0,2309 = \dfrac{h}{d+5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{h}{0,2679} \\ 0,2309d + 1,1545 = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{h}{0,2679} \\ d = \dfrac{h-1,1545}{0,2309} \end{cases}$$

$$\frac{h}{0,2679} = \frac{h-1,1545}{0,2309}$$
$$0,2309h = 0,2679h - 0,3093$$
$$-0,037h = -0,3093$$
$$h = 8,3595$$

6. Adicione ao resultado de h, o valor da altura do olho do observador, neste caso, $1,58m$. Desta forma, o valor obtido para a altura da biblioteca é de $9,9395m$. Para comparações, a altura correta é $10,23m$, conforme dados fornecidos pela Prefeitura Universitária da UFU.

1.3 Algumas aplicações relativas a Matrizes e Vetores

Para detalhes sobre a teoria envolvida, veja as Seções A.4.1 e A.4.2 .

1.3.1 Autovetor como estabilidade de uma situação modelada a partir da operação por uma matriz

Ao analisar uma situação fechada onde há pelo menos duas populações que interagem entre si, é possível prever quando elas estabilizarão e qual a quantia de indivíduos em cada uma. A modelagem matemática que descreve este tipo de interação é

$$\begin{cases} C_P P_i + M_Q Q_i = P_{i+1} \\ C_Q Q_i + M_P P_i = Q_{i+1} \end{cases}$$

Que pode ser visto como o produto de matrizes:

$$\begin{pmatrix} C_P & M_Q \\ M_P & C_Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_i \\ Q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{i+1} \\ Q_{i+1} \end{pmatrix}$$

Dada uma população P, indicamos por P_i a população em um dado momento de tempo i;

Dada uma população Q, indicamos por Q_i a população em um dado momento de tempo i;

C_P é a porcentagem de P_i que continuam sendo P_i;

M_P é a porcentagem de P_i que deixa de ser P_i;

C_Q é a porcentagem de Q_i que continua sendo Q_i;

M_Q é a porcentagem de Q_i que deixa de ser Q_i.

A situação de equilíbrio é atingida no autovetor associado ao autovalor 1.

É fato que

$$P_i + Q_i = P_{i+1} + Q_{i+1}$$

e

$$C_P + M_P = M_Q + C_Q = 1.$$

Ou seja, a população total no instante i é a mesma do instante $i+1$. Além disso, $C_P + M_P = 1$ e $C_Q + M_Q = 1$, pois só existem as possibilidades de uma população P se tornar Q ou continuar P e vice-versa.

Por exemplo, para uma certa população, P_i poderia indicar a quantidade de infectados por um certo vírus e, Q_i a quantidade de saudáveis. Após um intervalo de tempo, passamos a ter P_{i+1} como a quantidade de doentes e, Q_{i+1} como a quantidade de saudáveis. A figura abaixo ilustra o que ocorre neste caso.

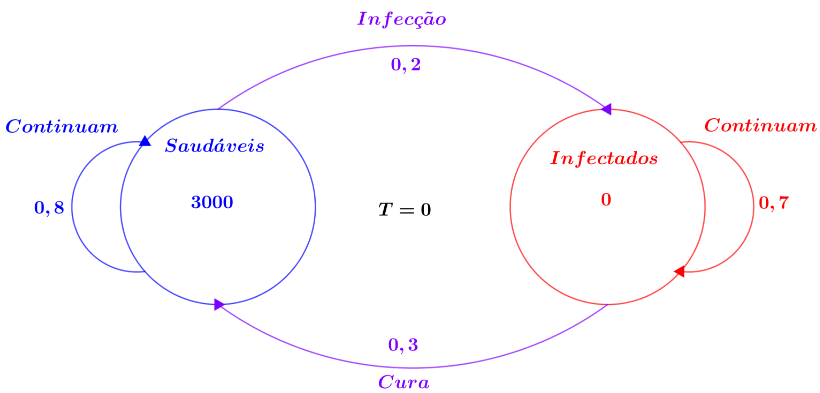

Figura 1.8: Desenho da situação completa. Fonte: Feita pelo Autor

Via GeoGebra, foi analisada essa mesma situação. Nas figuras abaixo, notamos que as populações tendem a um estado de equilíbrio. Nelas, os vetores são da forma (S, I), em que S é a população saudável e I é a população infectada. O vetor $\vec{u}$ representa as populações iniciais, $\vec{u'}$ representa as populações atuais e $\vec{w}$ representa a previsão de estabilidade das populações.

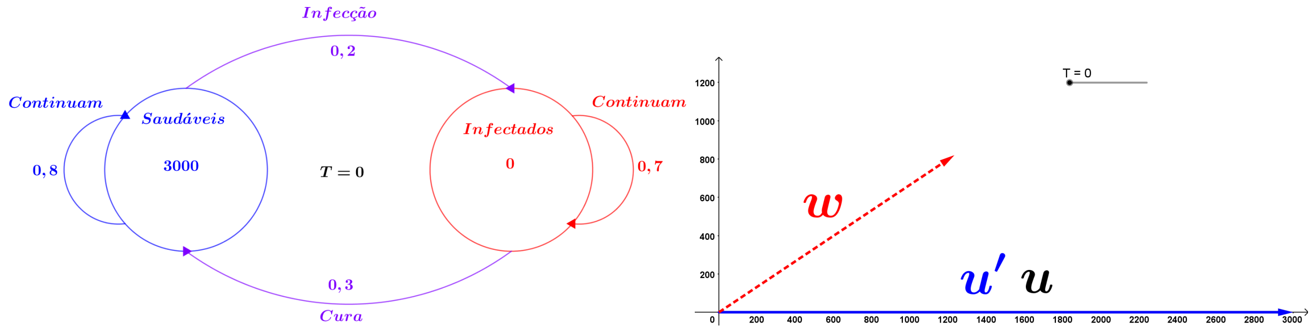

Figura 1.9: Desenho da situação inicial. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Após um intervalo de tempo, 600 dos saudáveis se tornaram infectados.

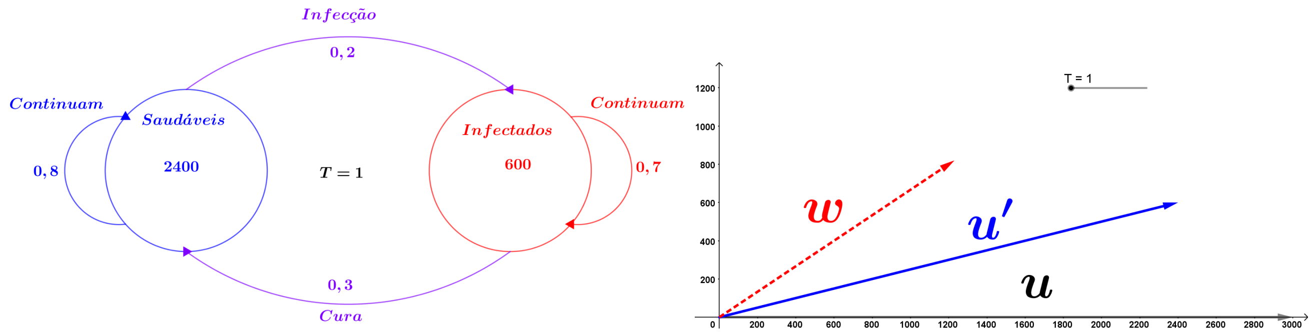

Figura 1.10: Desenho da situação após um intervalo de tempo. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Após um segundo intervalo de tempo, 480 dos saudáveis se tornaram infectados e 180 dos infectados se tornaram saudáveis, resultando na distribuição apresentada abaixo.

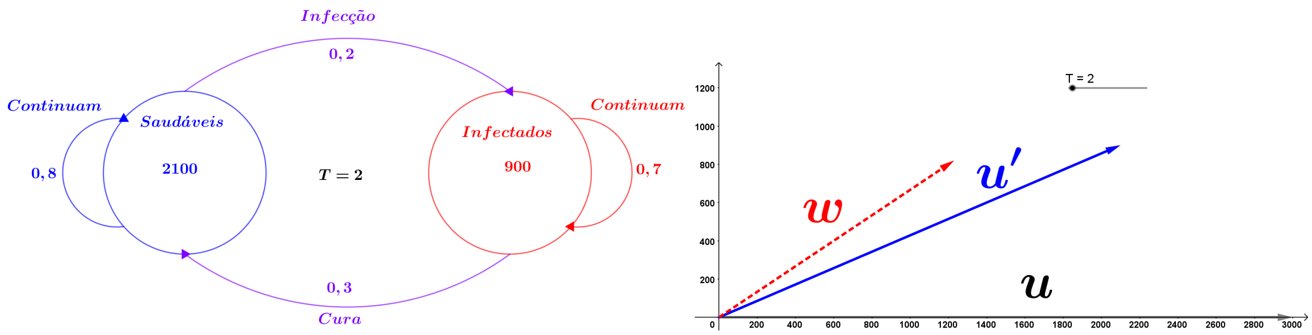

Figura 1.11: Desenho da situação após dois intervalos de tempo. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Após mais um intervalo de tempo, 420 dos saudáveis se tornaram infectados e 270 dos infectados se tornaram saudáveis, resultando na distribuição apresentada abaixo.

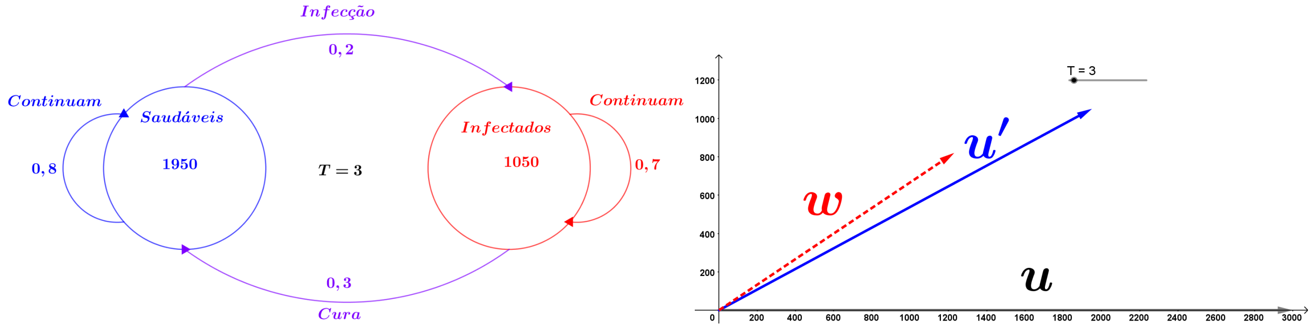

Figura 1.12: Desenho da situação após três intervalos de tempo. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Após outro intervalo de tempo, 390 dos saudáveis se tornaram infectados e 315 dos infectados se tornaram saudáveis, resultando na distribuição apresentada abaixo.

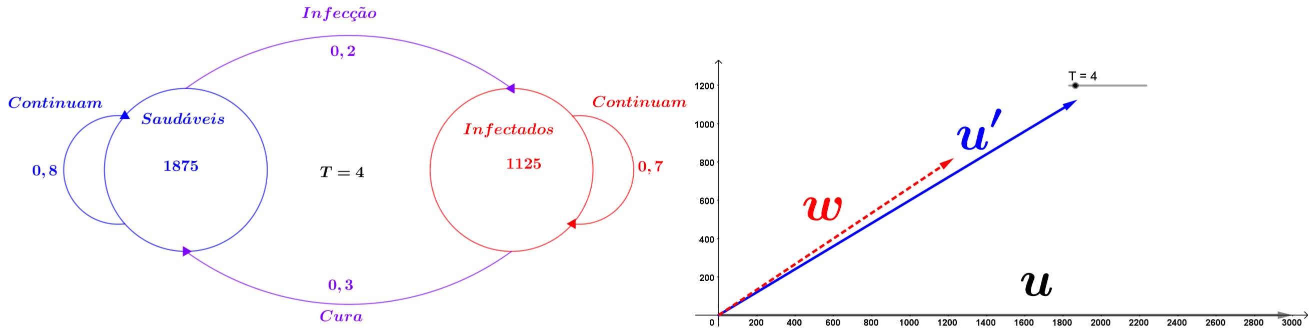

Figura 1.13: Desenho da situação após quatro intervalos de tempo. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Enfim, após varias outros intervalos de tempo, os valores se aproximam cada vez mais de 1800 saudáveis e 1200 infectados, até que se estabilizam nestes valores variando apenas uma casa decimal cada vez menor.

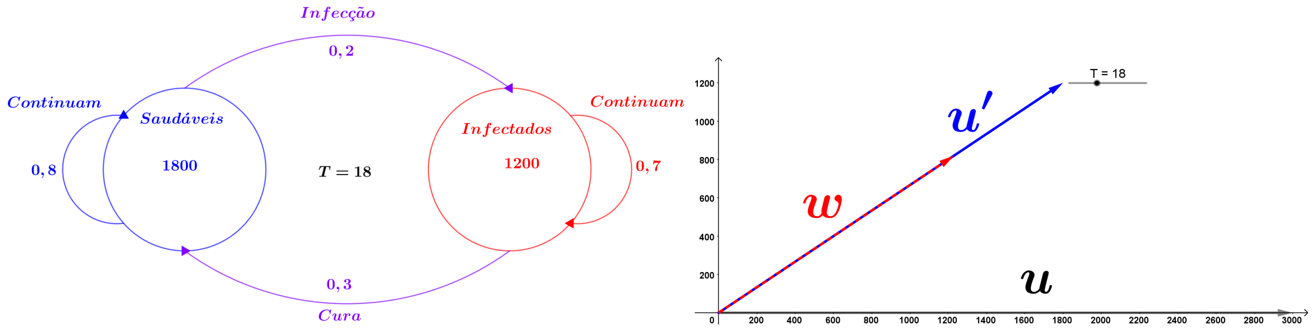

Figura 1.14: Desenho da situação completa. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Uma justificativa para o fato de situações deste tipo sempre tenderem a um equilíbrio, assim como autovetor associado ao autovalor 1 ser o ponto de equilíbrio, podem ser encontradas em [3, P. 72] e [7, P. 70]. Nestas referências são apresentados o conceito de Matriz de Markov, além de resultados e aplicações relacionados a este assunto.

A inspiração para esta modelagem foi encontrada em [15].

1.3.2 Produtos de matrizes na análise de etapas para a conexão entre elementos

É possível descrever as conexões entre elementos utilizando uma matriz. Uma vantagem clara de realizar esta representação é que sabendo apenas as conexões iniciais diretas, conseguimos informações sobre todas as conexões indiretas que poderiam ser feitas com quantos intermediários forem necessários. Denominamos estas como *matriz adjacência*, que em suas formas mais simples possuem apenas entradas 0 ou 1, são quadradas e simétricas. Veja por exemplo, a representação textual da conexão por telefone entre 5 pessoas.

- Aline tem o contato de Bruno;
- Bruno tem o contato de Aline, Carol e Diogo;
- Carol tem o contato de Bruno e Diogo;
- Diogo tem o contato de Bruno e Carol;
- Eduardo não tem o contato de ninguém.

É esperado, que todos possuam o próprio contato, já que conseguem falar consigo mesmo, mas para uma explicação um pouco melhor, assumiremos que eles não possuem uma forma de fazer um autocontato. Em forma de matriz, o número 1 na entrada a_{ij} significa que a pessoa i possui o contato da pessoa j. Observe esta representação:

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Aline & Bruno & Carol & Diogo & Eduardo \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ Aline \\ Bruno \\ Carol \\ Diogo \\ Eduardo \end{array}$$

Neste estado, conseguimos dizer quais pessoas possuem conexão direta uma com outra, mas se quisermos saber com quem é possível entrar em contato tendo apenas um intermediário, basta multiplicar esta matriz por ela mesma, obtendo:

$$C^2 = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} Aline & Bruno & Carol & Diogo & Eduardo \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} Aline \\ Bruno \\ Carol \\ Diogo \\ Eduardo \end{array} \end{array}$$

Agora, as entradas representam a quantidade de maneiras possíveis e distintas de, a partir da pessoa i e, tendo apenas uma delas como intermediária entrar, em contato com a pessoa j.

Esta ideia, de multiplicar a matriz por ela mesma pode ser repetida enquanto necessário, ou seja, a matriz C^n apresenta a quantidade de conexões distintas possíveis entre a pessoa i com n intermediários até entrar em contato com a pessoa j.

1.4 Uma aplicação relativa a Geometria Analítica

Para detalhes sobre a teoria envolvida, veja a Seção A.3.1.

A obtenção dos pontos de interseção entre circunferências tem grande uso nos dias atuais nos processos de locomoção, sendo utilizados pelos sistemas de navegação via satélite. No caso do Brasil, utiliza-se o GPS (*global position system*). Assim como pode ser encontrado em [14], outros sistemas conhecidos são o GLONASS (Rússia), o Galileo (União Europeia) e o Compass (China).

O funcionamento ocorre da seguinte maneira: um satélite S_1 emite um sinal em forma de uma circunferência que cresce até o momento em que ela intersecta um aparelho. Neste momento, a única informação obtida é que o aparelho está a uma distância R_1 de S_1. No mesmo instante um segundo satélite S_2, posicionado em outro local, também emite um sinal da mesma forma. Agora a informação é que o aparelho está em uma das duas interseções entre as circunferências centradas em S_1 e em S_2. Para completar o processo, um terceiro satélite S_3, distante dos outros dois, emite um sinal assim como eles. Enfim, a localização do aparelho é dada com precisão. O passo a passo é feito em [4].
No caso real, ao invés de circunferências os satélites emitem um sinal em forma de uma esfera, sendo também necessários quatro delas ao invés de apenas três. Abordamos aqui apenas o caso em duas dimensões ($\mathbb{R}^2$), simplificando o que de fato ocorre.

Para um pouco mais de detalhes em modelagens desse tipo de situação, ver [2].

1.5 Uma aplicação relativa a Geometria

1.5.1 Abelhas, bolhas, otimização e área

Para detalhes sobre a teoria envolvida, veja a Seção A.2.2.

Colmeias são construídas com favos de mel, todos com um formato hexagonal. Apesar disto, sua forma inicial, assim que feitos por abelhas, é circular.

Figura 1.15: Imagens sobre os Hexágonos.
Fonte: https://www.cpt.com.br/cursos-criacaodeabelhas/artigos/defensividade-das-abelhas-dominio-da-colmeia-e-manuseio-dos-quadros-pelo-apicultor

Bolhas possuem um comportamento parecido, inicialmente, possuem um formato esférico como uma bola. Conforme mais bolhas vão grudando umas nas outras, elas passam a exibir formatos diferentes, até que eventualmente se arranjam de forma hexagonal.

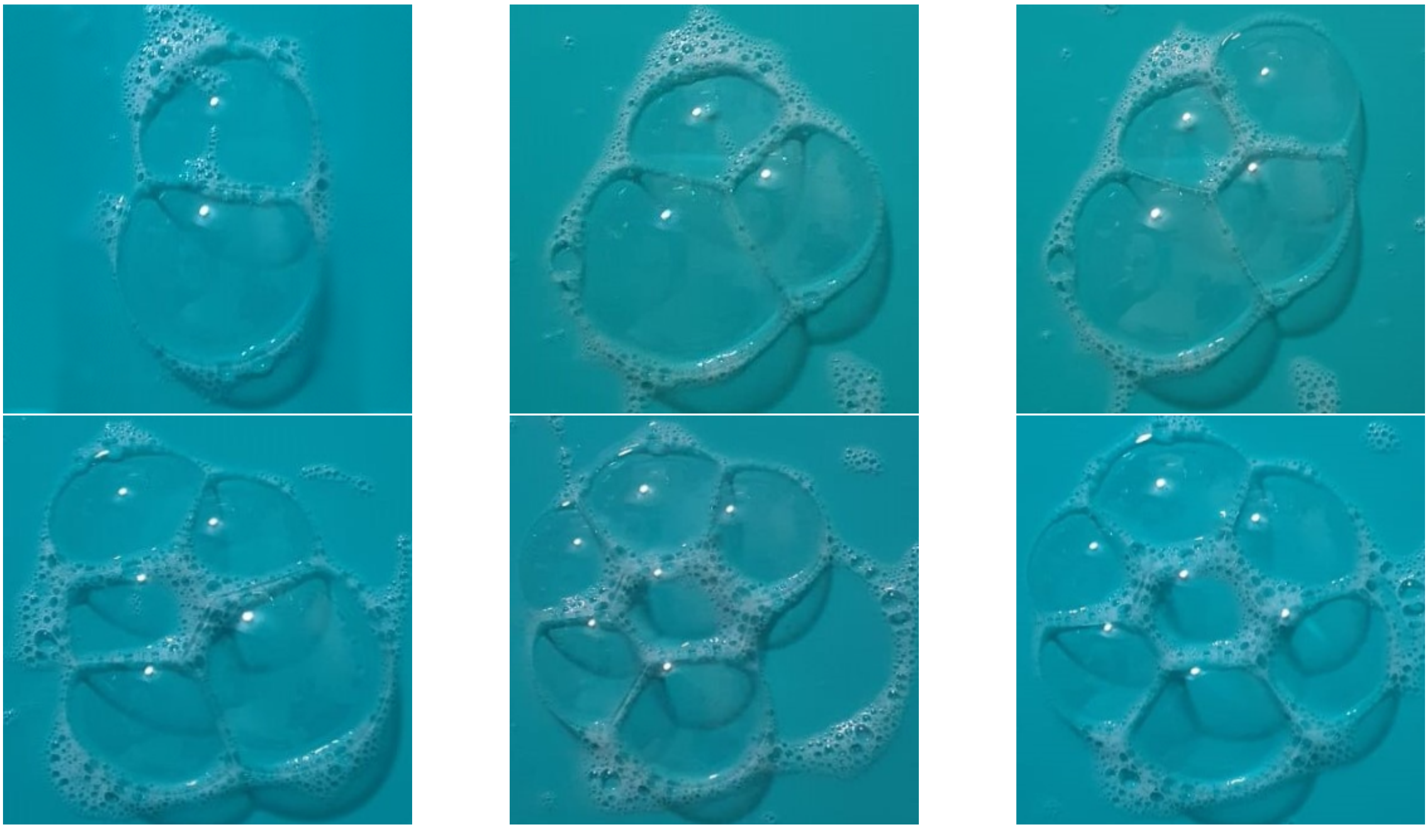

Figura 1.16: Passo a passo do formato de bolhas. Fonte: Arquivo pessoal do autor

É possível encontrar este padrão em outros locais, algumas rochas, formatos de células e estruturas moleculares. Um motivo para esta frequência é o fato do hexágono regular ser o polígono que preenche mais espaço, dada uma quantidade de traços.

Figura 1.17: Imagens sobre os Hexágonos. Fonte: https://jp-lugaresfantasticos.blogspot.com/2012/01/calcada-dos-gigantes-irlanda.html.

Estas, são situações reais que inspiraram questionamentos e estudos a respeito de formas geométricas, neste caso, mais especificamente, dado um mesmo barbante, arame ou linha, qual o polígono que formado por ele, possui a maior área. É possível formar vários polígonos desta forma, inclusive figuras geométricas que preenchem mais espaço do que um hexágono, que é a figura destacada na natureza, mas com nenhuma delas é possível preencher todo um espaço sem deixar pequenos vazios pelo caminho. Observe as imagens abaixo, com exemplos de triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos, respectivamente.

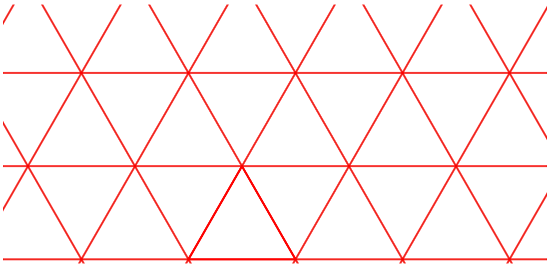

Figura 1.18: Plano tesselado por triângulos regulares. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

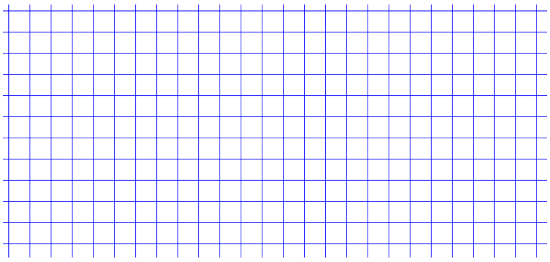

Figura 1.19: Plano tesselado por quadrados. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

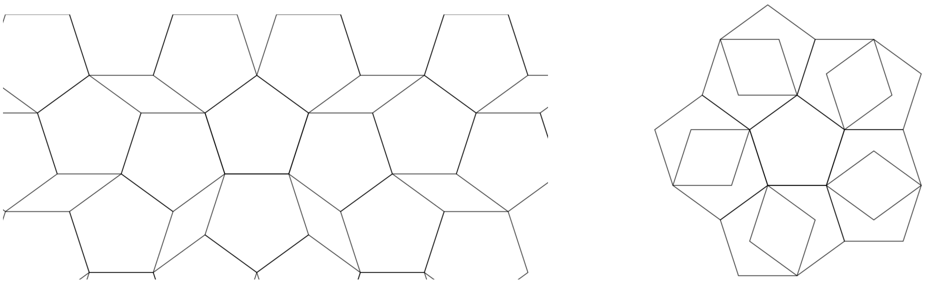

Figura 1.20: Tentativas de tesselar o plano com pentágonos regulares. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

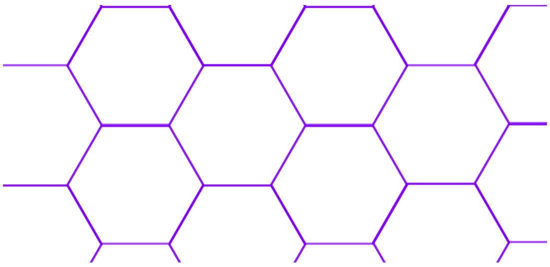

Figura 1.21: Plano tesselado por hexágonos regulares. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

É possível perceber que dos polígonos apresentados, o pentágono é o único que não foi capaz de tesselar o plano, a imagem utilizada representa duas tentativas que ainda assim resultam em falhas.

CAPÍTULO 2

Sugestões de aulas e atividades

Este Capítulo é composto de cinco sugestões de atividades para serem feitas em sala de aula. Damos destaque para a quarta, a qual descrevemos uma experiência em sala de aula.

2.1 Despoluição de um rio

2.1.1 Materiais necessários

1. Quadro e giz ou pincel;
2. Três recipientes com 1 litro de capacidade cada;
3. Um recipiente menor onde é possível mensurar 100ml;
4. Corante, pó de café ou qualquer meio de tingir a água de forma perceptiva.

2.1.2 Passo a passo da atividade

1. Preencha um dos recipientes maiores com 1 litro de água;
2. Preencha outro dos recipientes maiores com 900ml de água e 100ml da substância com cor;
3. Peça para que um ou mais alunos anotem no quadro os valores em ml de cada substância presente no recipiente misto, em cada etapa;
4. Com o recipiente menor, retire 100ml do recipiente misto e os jogue no recipiente maior que ficou vazio e preencha o recipiente misto com 100ml de água limpa;
5. Repita o último passo pelo menos 3 vezes, para o padrão começar a ficar perceptível.

É interessante perceber a existência de funções exponenciais que modelam os valores de água e corante no recipiente misto. Considerando que a mistura é homogênea e, n como a quantidade de vezes que se retirou água do recipiente misto, cada vez que 100ml é retirado, estamos removendo 10% de água e, consequentemente, 10% de corante. Com isso, no passo n, temos:

Água:

$$P_A(n) = 1000 - 100(1-0,1)^n.$$

Corante:

$$P_C(n) = 100.(1-0,1)^n.$$

2.2 Temperatura de um bolo

2.2.1 Materiais necessários

1. Quadro e giz ou pincel;

2. Um bolo.

2.2.2 Passo a passo da atividade

1. Após apresentar aos alunos a função exponencial e algumas de suas versões, dividir a turma, preferencialmente de 4 até 8 grupos e, dizer a eles que você trará um bolo na próxima aula;

2. Traga o bolo no dia da atividade;

3. No dia da atividade, possivelmente será divertido criar um cenário fictício. Deixe o bolo em um local inesperado, e em sala, peça que um dos grupos vá até o local esperado do bolo e o traga.

4. Para a surpresa deles, o bolo não estará lá, quando voltarem de mãos vazias, diga à turma:

5. "Eu trouxe um bolo para que todos comessem juntos. Como podem ver, o bolo "sumiu", erro meu!. Eu não deveria ter avisado todos vocês antes. Bem, eu sei quem foi, não vou dedurar o grupo comilão, mas darei a chance para que cada um de vocês descubra qual é.";

6. Então escreva no quadro, a formula da lei do resfriamento de um corpo, a temperatura do bolo quando saiu do forno, a temperatura dele no horário atual, a temperatura ambiente além de horários fictícios de quando o professor teria visto cada grupo entrando na sala onde estaria o bolo;

7. Avise a turma que uma temperatura segura para comer o bolo é de 50°C e que tem certeza que o primeiro grupo que teve acesso ao bolo nesta temperatura o comeu.

   Para obter a resposta, os grupos precisarão utilizar da Lei do Resfriamento que pode ser vista na Seção 1.1.1.

2.3 Hexágono otimizando área dado perímetros

Para a teoria do que é apresentado aqui, veja a Seção A.2.2.

2.3.1 Materiais necessários

1. Quadro e giz ou pincel;
2. Uma bacia;
3. Um mecanismo de soprar bolhas;
4. Imagens diversas sobre a atividade;
5. Se possível um computador com GeoGebra e um método de expor as imagens deste para a sala.

2.3.2 Passo a passo da atividade

1. Pedir que cada aluno escolha um polígono, para ao desenhar na lousa (ou no computador se presente), tentar preencher o máximo possível do quadro;
2. Faça uma breve discussão sobre o assunto, buscando entender como cada figura preenche a lousa de formas distintas e usando quantidades diferentes de tinta;
3. Pedir como dever de casa, que tragam planos completamente preenchidos por alguma forma geométrica. (Mosaicos são válidos);
4. Na aula que trouxerem as imagens, discutir qual delas melhor otimiza o gasto de tinta ao preencher todo o espaço que ocupa;
5. Na mesma aula, utilizar da bacia e de um sopra bolhas, para preencher ela de bolhas, reparando no formato que elas irão tomar;
6. Discutir por qual motivo as bolhas se comportaram de tal forma;
7. Encontrar uma justificativa no padrão das bolhas a partir de contas de área e perímetro de cada figura.

2.4 Volume de Cilindro e Música

Para a teoria do que é apresentado aqui, veja a Seção A.2.5.

2.4.1 Materiais necessários

1. Régua, lápis e papel;
2. 7 garrafas de vidro com formato cilíndrico;
3. Água;
4. Algo para dissolver na água caso necessário;
5. Uma vareta ou haste para tocar as garrafas;
6. Um medidor de volume em ml;
7. Afinador ou aplicativo com esta função.

2.4.2 Passo a passo da atividade

1. Se a base da garrafa for irregular, descubra quantos ml são necessários até o início da forma cilíndrica;
2. Em um ambiente silencioso, afine as garrafas. Bata nelas e procure a nota esperada no afinador. Para alterar o som produzido, acrescente água na garrafa. Se necessário, acrescente sal ou açúcar na água para alterar a nota atingida. O objetivo aqui é que todas as notas estejam na parte cilíndrica da garrafa;
3. Anote quantos ml são necessários para atingir cada uma das 7 notas;
4. Leve as garrafas para a sala de aula e divida os alunos em grupos;
5. Diga para cada grupo quantos ml são necessários para preencher a parte irregular e quanto é necessário para atingir a nota da garrafa que receberam;
6. Os alunos devem utilizar de régua, papel e lápis para descobrir o raio da parte cilíndrica da circunferência e então calcular a altura necessária para atingir o volume ideal;
7. Quando todas as garrafas estiverem afinadas, toque uma música simples ou chame algum aluno que saiba tocar.

2.4.3 Desenvolvimento da atividade em sala de aula

Uma atividade similar a esta, foi colocada em prática em uma escola da rede privada de ensino de Uberlândia - MG. Nesta versão as garrafas escolhidas não alcançavam a nota Dó, então, apenas as outras seis foram utilizadas. Desta forma músicas com este som não poderiam ser tocadas, contornamos a situação, alterando o tom das músicas que a utilizam, o resultado é uma música extremamente similar. A turma escolhida para a atividade era composta por seis alunos do 8º ano do ensino fundamental, mas neste dia, apenas cinco estavam presentes.

Todos foram para perto da mesa do professor, onde foi explicada a proposta da atividade, utilizando uma garrafa extra de modelo.

Figura 2.1: Explicando com um modelo. Fonte: Arquivo pessoal do autor

Os alunos foram separados em dois grupos, um com 3 e outro com 2. Cada um dos dois recebeu um tubo de papelão, uma calculadora para otimizar o tempo nos cálculos daquele momento em diante, e lhes foi pedido que calculassem o volume do objeto. O intuito nesta etapa era de familiarizar os estudantes com o que deveriam fazer na atividade. Este processo foi aproveitado para discutir erro de medidas utilizando a régua ou qualquer outro instrumento de mensuração, além de comparar os resultados dos grupos, e apontar a importância de pensar criticamente quanto ao resultado obtido no final das contas, já que o valor encontrado por um dos grupos era muito diferente do que seria esperado para o volume do objeto.

Em seguida, quatro garrafas, duas varetas, recipientes com água e celulares com o aplicativo **Tuneo** foram distribuídos entre os grupos. Eles deveriam encher as garrafas e bater nelas com as varetas até que o aplicativo de afinação no celular indicasse que alcançaram o som correto. Nesta etapa, um evento interessante aconteceu. Uma das garrafas estava com um som destoante, mesmo o aplicativo apontando o contrário. Ao serem colocadas todas lado a lado de forma que as notas fizessem uma escala crescente, ficou nítido que a quantidade de água nesta estava errada, o esperado é que a quantidade de água em cada garrafa também fosse crescente, mas esta era a única que fugia do padrão. Desta vez, focando em evitar qualquer tipo de ruído da sala de aula, a nota correta foi alcançada.

Figura 2.2: Alunos realizando a atividade. Fonte: Arquivo pessoal do autor

Enfim as garrafas foram posicionadas e tocadas. Dois dos alunos sugeriram músicas, mas nem um se interessou em tentar tocar inicialmente. Após alguns momentos, uma aluna se dispôs a tocar uma música. Ainda assim, segundo eles, foi uma experiência divertida.

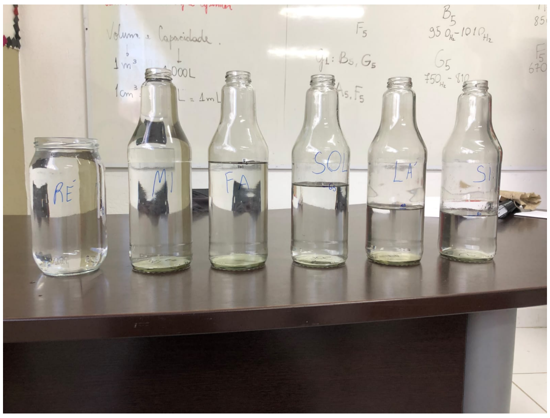

Figura 2.3: Garrafas alinhadas. Fonte: Arquivo pessoal do autor

Ao final, alguns questionamentos foram feitos para retomar os conteúdos e potencializar a apropriação feita destes pelos alunos, as respostas foram satisfatórias.

Algumas semanas depois, ainda era possível constatar que os alunos entendiam como realizar os cálculos e não apresentavam dificuldades quanto ao conteúdo.

Para mais detalhes sobre o aplicativo utilizado na atividade, seguem imagens dele e nas fontes do trabalho o link para seu download pode ser encontrado, clique aqui para um caminho mais rápido: [8]

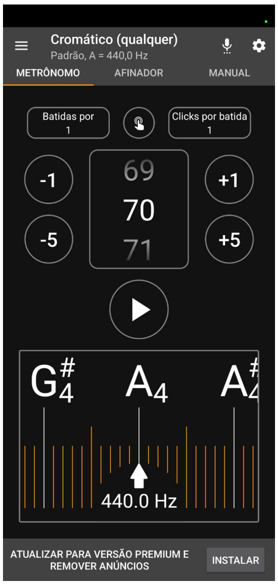

Figura 2.4: Imagem do aplicativo aberto em sua tela inicial. Fonte: Arquivo pessoal do autor

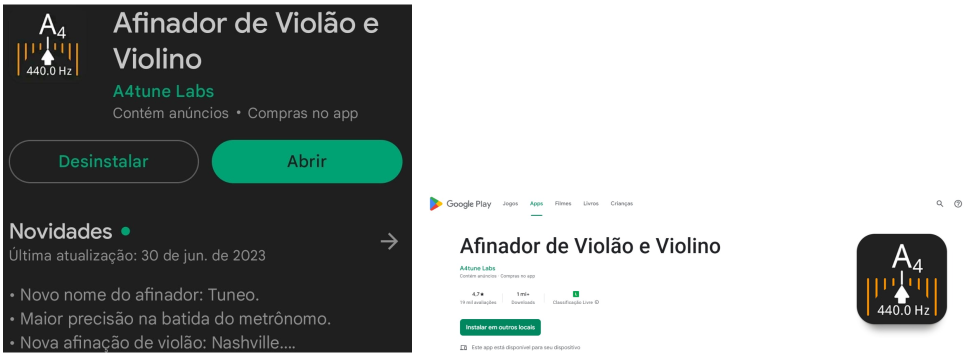

Figura 2.5: Imagens das páginas para instalar o aplicativo pelo celular ou computador. Fonte: Arquivo pessoal do autor

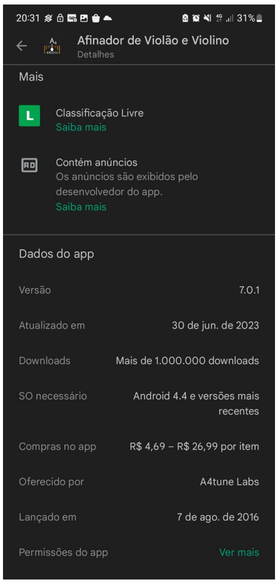

Figura 2.6: Imagem de alguns detalhes técnicos do aplicativo. Fonte: Arquivo pessoal do autor

2.5 Composição de função e caça ao tesouro

Para a teoria do que é apresentado aqui, veja a Seção A.1.2.

2.5.1 Materiais necessários

1. Régua, compasso, lápis e papel;
2. Um mapa simples da escola;
3. Algo que represente os tesouros da brincadeira;
4. Folhas com uma mapa feito a partir das instruções nesta seção.

2.5.2 Passo a passo da atividade

1. Com o mapa da escola em mãos, trace uma parábola que percorra espaços da escola que os alunos possam visitar durante as aulas;
2. Coloque em cada um destes locais, um tesouro da brincadeira;
3. Divida os alunos em grupos;
4. Distribua entre eles as folhas com instruções da atividade;
5. Talvez seja interessante que exista um fator de tempo na brincadeira, algo como o grupo que terminar primeiro ganha 1 ponto extra, ou algo similar e adequado;
6. Em sala de aula, farão as contas e desenhos necessários para descobrir onde se encontram cada um dos tesouros;
7. Para diminuir e tentar evitar confusões na escola, antes de irem buscar o tesouro, os alunos precisam confirmar com o professor se o raciocínio e contas realizados pelo grupo indicam de fato o local certo.

2.5.3 Detalhes de como construir o mapa da atividade

Este é o mapa quadriculado do Campus Santa Mônica da UFU:

Figura 2.7: Mapa UFU Santa Mônica. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Utilizando um software gráfico, encontre um foco e uma diretriz que definam uma parábola que "percorra" uma parte considerável do local onde os alunos poderiam ir.

Figura 2.8: Mapa UFU Santa Mônica. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

A partir deste ponto, ignorando paredes e deslocamentos verticais, e de forma a apenas escolher lugares igualmente distantes do ponto e de uma rua ou parede do local, alguém teve "t" tempo para esconder um tesouro. Neste caso, a partir do foco e seguindo a regra de escolher lugares igualmente distantes do foco e da Avenida João Naves de Ávila (Eixo X).

Figura 2.9: Mapa UFU Santa Mônica. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Traçada a parábola, escolha onde estarão os tesouros. Seria interessante fazer este mesmo processo duas ou três vezes, rotacionando o mapa ou trocando a parábola escolhida, pois assim será possível montar grupos que encontrarão respostas diferentes.

Feito isto, a folha que cada grupo receberá terá o mapa quadriculado, uma indicação do foco e a informação de qual é a rua relevante.

Para encontrar os tesouros, os alunos deverão traçar círculos de raio $s(t)$ a partir do foco, ao mesmo tempo que traçando linhas paralelas à rua relevante que distam $s(t)$ dela. Isto gera duas funções compostas: $x^2 + (y-b)^2 = s(t)^2$ e $y = -b - s(t)$, onde $s(t) = b + 2,5t$ é o deslocamento de quem escondeu os tesouros em t tempo e b é a ordenada do foco. Na figura acima $b = 2$ e o $2,5t$ utilizado em $s(t)$ é uma possível velocidade média de caminhada humana, conforme informado em [5].

CAPÍTULO 3

Conclusão

Buscar respostas para a pergunta motivadora do trabalho inicia um processo interno de pensamento e reflexão, que permite o questionamento de diversos conteúdos matemáticos ensinados, tanto sobre sua real utilidade, que as vezes pode parecer não existir, quanto do ponto de vista dos estudantes que se deparam com estas informações tendo uma bagagem acadêmica e emocional, muitas vezes menor que a dos professores para o mesmo tema. Ao empenhar parte de seu tempo neste assunto, uma pessoa com o desejo de ensinar enriquece seus conhecimentos matemáticos e interdisciplinares, sua criatividade e senso crítico, além disto, torna mais próxima e humana a relação entre eles e quem aprende.

As sugestões de aulas presentes na dissertação colocam alunos no papel de protagonistas das atividades, eles desenvolvem o processo e tem a possibilidade de perceber sozinhos a presença e utilidade da matemática em determinados ambientes. Este tipo de experiência torna o conhecimento algo mais rico, divertido ou interessante, além de gerar memórias envolvendo mais sentidos, e diferentes do padrão convencional de apenas resolver exercícios. Isto por sua vez, resulta em dois aspectos importantes para um momento de aprendizado, uma retenção mais eficaz do conteúdo e um interesse maior por parte de quem aprende.

A conclusão obtida ao final desta pesquisa e das atividades colocadas em prática é clara: uma aula que apresenta aos estudantes um objetivo a buscar e que permite começar isto já na escola. É um processo engrandecedor para todos os envolvidos na atividade e, um complemento que, ao olhar de um aluno, pode valorizar e ressignificar o ato de estudar.

APÊNDICE A

Conceitos e Resultados Matemáticos Utilizados

Este Apêndice completa a dissertação com teorias relacionadas às aplicações, às sugestões de aula e às atividades.

A.1 Aritmética e Álgebra

A *Aritmética* é um ramo da matemática que trabalha com números por meio de operações, chamadas elementares, sendo elas adição, subtração, multiplicação e divisão.

A *Álgebra* é vista como um ramo da matemática que, de certa forma, generaliza a Aritmética. De fato, a *Algebra* trabalha com símbolos e variáveis, por meio de operações, para encontrar quantidades desconhecidas.

Nesta Seção, as variáveis serão conjuntos, sobre os quais trabalharemos com as operações: união, interseção e diferença (complementar de um conjunto em relação a outro ou ao universo). Também lidaremos com as funções vistas como variáveis, trabalhando com a operação composição entre elas.

A.1.1 Conjuntos e Operações entre eles

Definição A.1: Conjuntos

Conjunto é um modelo matemático para uma coleção de objetos, chamados elementos ou membros que possuem alguma propriedade em comum.

Em geral, utilizaremos letras maiúsculas $A, B, C, \ldots$ para conjuntos e letras minúsculas $a, b, c \ldots$ para seus elementos. Ainda, escrever $a \in A$ (a pertence a A) significa dizer que a é um elemento do conjunto A.

Exemplos iniciais que são frequentemente trabalhados no ensino pré-universidade são os seguintes conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$ (Naturais), $\mathbb{Z}$ (Inteiros), $\mathbb{Q}$ (Racionais), $\mathbb{I}$ (Irracionais), $\mathbb{R}$ (Reais) e $\mathbb{C}$ (complexos).

Observação A.1

Sejam A e B conjuntos, seguem alguns fatos:

1. Dizemos que A está contido em B e escrevemos $A \subset B$, se todo elemento de A é elemento de B.

2. Escrever $A = B$ significa que os elementos de A são elementos de B e vice-versa. Em símbolos,

$$A = B \Longleftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

   É comum utilizarmos o símbolo $\subseteq$ para dizer que um conjunto está contido ou é igual a outro conjunto. Por exemplo $A \subseteq B$ pode dizer que A está simplesmente contido (subconjunto próprio) ou é igual a B.

3. Denotamos por $\emptyset$ ou $\{\}$ o *conjunto vazio*, ou seja, um conjunto que não possui nenhum elemento e está contido em qualquer outro. É comum o erro de denotar o conjunto vazio por $\{\emptyset\}$. Porém, aqui estamos denotando um conjunto que tem o vazio por elemento.

4. Em uma dada situação é comum trabalharmos com o chamado *conjunto universo*, ou seja, um conjunto, denotado por U, que contém todos os outros conjuntos da situação.

5. Não há um consenso geral sobre zero (0) ser um número natural, ou não. Neste texto, vamos considerar 0 como um natural.

6. Escrevemos A^* para denotar A sem o zero (0), no caso de ocorrer $0 \in A$.

7. É possível ainda que apenas os números não negativos (positivos e zero) de um conjunto A satisfaçam uma definição, nestes casos, se escreve A_+. De forma semelhante A_- representa os números não positivos (negativos e zero) do conjunto.

   Enfim, se necessário apenas os números positivos de um conjunto A, utiliza-se o símbolo A_+^* e, no caso de números de negativos, utiliza-se A_-^*.

Definição A.2: União

Dados dois conjuntos A e B, denominamos A *união* com B o conjunto $C = A \cup B$ que satisfaz:

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Vale para esta operação, as seguintes propriedades:

1. Associativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
2. Reflexiva: $A \cup A = A$;
3. Comutativa: $A \cup B = B \cup A$;
4. $A \subseteq (A \cup B)$;
5. Elemento Neutro: $A \cup \emptyset = A$;
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$;
7. Distributiva quanto à interseção: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Definição A.3: Interseção

Dados dois conjuntos A e B, denominamos A *interseção* com B o conjunto $C = A \cap B$ que satisfaz:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ e } x \in B.$$

Vale para esta operação, as seguintes propriedades:

1. Associativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
2. Reflexiva: $A \cap A = A$;
3. Comutativa: $A \cap B = B \cap A$;
4. $(A \cap B) \subseteq A$;
5. Elemento Neutro: $A \cap U = A$;
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$;
7. Distributiva quanto à união: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
8. $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Definição A.4: Complementar

Dado um conjunto A, denominamos *complementar* de A o conjunto $A' = U \backslash A$ que satisfaz:

$$x \in A' \Longrightarrow x \notin A \text{ e } x \in U.$$

Em alguns textos, ao invés de A', utilizam A^c.

Vale para esta operação, as seguintes propriedades:

1. $A \setminus B \neq B \setminus A$;
2. $A \cup A' = U$;
3. $A \cap A' = \emptyset$;
4. $(A')' = A$;
5. $\emptyset \setminus A = \emptyset$;
6. $A \setminus \emptyset = A$;
7. $A \setminus A = \emptyset$;
8. $A \setminus U = \emptyset$;
9. $A \setminus A' = A$;
10. $A' \setminus A = A'$;
11. $U' = \emptyset$;
12. $\emptyset' = U$;
13. $A \setminus B = A \cap B'$;
14. $Se\ A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$;
15. $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$;
16. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Os itens (18) e (19) constituem as chamadas *Leis de De Morgan* para conjuntos.

Na sequência, veremos um exemplo em que conjuntos são relacionados por meio de um diagrama. Tal representação recebe o nome *Diagrama de Venn*.

Exemplo A.1: Um exemplo da importância do Diagrama de Venn

Um grupo de amigos foi ao shopping e deram uma pausa para comer em uma doceria. O diagrama de Venn abaixo mostra quantas pessoas pediu cada um dos lanches.

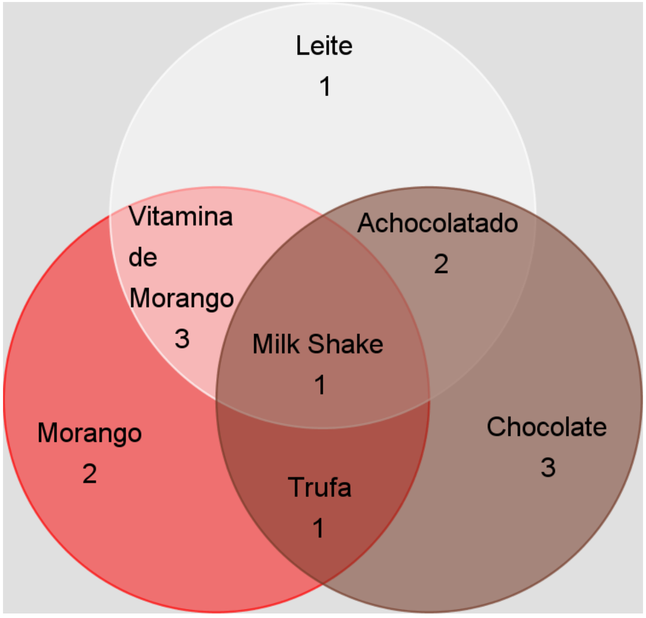

Figura A.1: Diagrama de Venn que representa a situação Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Agora, imagine expressar todas essas informações por meio de um texto. Com certeza não seria possível observar tão rapidamente, e com tanta clareza, os dados apresentados.

Observação A.2: Por que Diagrama de Venn?

O nome "Venn" para o diagrama é uma homenagem ao matemático inglês John Venn (1834-1923) que propôs tal estrutura em 1880. Na verdade, tal diagrama foi proposto anteriormente, pelo matemático suíço Leonhard Euler sendo, por este fato, o diagrama identificado não apenas como *Diagrama de Venn*, mas *Diagrama de Euler-Venn*.

A.1.2 Um estudo sobre funções

Definição A.5: Função

Uma função f é uma relação entre dois conjuntos X (Domínio) e Y (Contradomínio), obedecendo uma regra preestabelecida. Ela associa cada um dos elementos $x \in X$, a um único elemento $f(x) = y \in Y$. Um $y \in Y$, tal que $f(x) = y$ é denominado *imagem* de x. O conjunto

$$\{y \in Y : y = f(x), \text{ para algum } x \in X\}$$

é denominado *conjunto imagem de X por f*. Em símbolos:

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Definição A.6: Composição de funções

Dadas as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$, denominamos $(g \circ f)(x)$ ou $g(f(x))$, a função composta de g com $f: A \longrightarrow C$, onde $x \in A$, $f(x) \in B$ e $g(f(x)) \in C$.

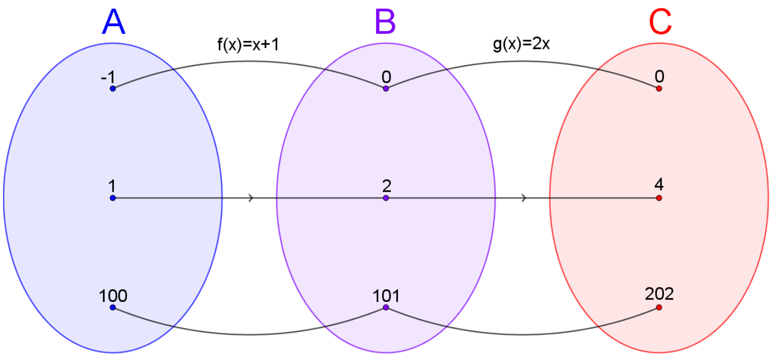

Figura A.2: Exemplo sobre composição de funções Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Para aplicações desta teoria, veja a Seção 2.5.

Algumas funções recebem um adjetivo especial dependendo do que elas satisfazem em relação aos respectivos Domínio, Contradomínio e Imagem.

Definição A.7: Injetora, Sobrejetora e Bijetora

Uma função $f: X \longrightarrow Y$ é denominada:

1. **Injetora**, se cada elemento do conjunto imagem é associado, por meio de f, a apenas um elemento do Domínio. Em símbolos:

$$\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \text{ou} \qquad \forall\ x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

2. **Sobrejetora**, se o contradomínio é igual ao conjunto imagem. Em símbolos:

$$\forall\ y \in Y, \exists\ x \in X\ /\ y = f(x).$$

3. **Bijetora**, se f é injetora e sobrejetora. Estas possuem a propriedade de serem inversíveis, ou seja, existe uma f^{-1} que satisfaz:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ e } f(f^{-1}(y)) = y.$$

Vale destacar, como veremos em exemplos abaixo, que o gráfico de uma função é sempre simétrico ao de sua inversa, em relação à reta identidade.

Definição A.8: Crescente ou Decrescente

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é *crescente* se para valores crescentes de x, os respectivos valores de y aumentam e, *decrescente* se, para valores crescentes de x, os respectivos valores de y diminuem.

Definição A.9: Monômios

Denominamos *monômio* um produto da forma ax^n, em que $n \in \mathbb{N}$, a é uma constante real e x é uma variável real.

Definição A.10: Função Polinomial

Uma função polinomial (ou polinômio) é uma função formada pela soma de monômios. Em símbolos:

$$f(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + ... + a_nx + a_{n+1};\ a_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Observação A.3

1. Dizemos que um número x_0 (aqui incluímos o conjunto dos complexos $\mathbb{C}$) é raiz de um polinômio como da Definição A.10, se $f(x_0) = 0$. Na verdade, tal conceito se estende para toda função real.

2. O maior valor de expoente n para o qual o coeficiente é não nulo é denominado *grau do polinômio*. Neste caso, o polinômio tem, no máximo, n raízes distintas. É possível decompor um polinômio como na Definição A.10 por meio de suas raízes da seguinte forma:

$$f(x) = a_1(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_j)^{k_j};\ x_i \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ k_1 + k_2 + ... + k_j = n,\ n \geq j \in \mathbb{N}.$$

   Este resultado pode ser encontrado em [9] e é denominado Teorema Fundamental da Álgebra.

Serão observadas aqui três famílias de funções polinomiais, as de grau 0, 1 e 2. Tais famílias podem ser vistas como casos particulares das funções polinomiais.

Definição A.11: Função Constante

Uma função polinomial de grau 0 é denominada *função constante*. Em símbolos, para algum $a \in \mathbb{R}$, vale:

$$f(x) = a, \forall x \in D_f(\textbf{Domínio de } f)$$

??

Esta função tem como propriedades importantes os fatos de: não ser injetora, ter o gráfico paralelo ao eixo x, e de interceptar o eixo y no ponto $(0, a)$.

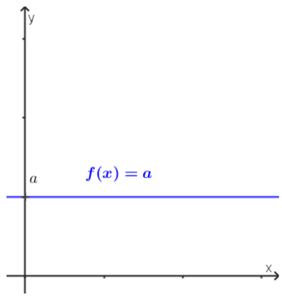

Figura A.3: Função Constante Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Definição A.12: Função Afim

Uma função polinomial de grau 1, é denominada função afim ou função de primeiro grau. Em símbolos:

$$f(x) = ax + b; a \in \mathbb{R}^*.$$

Se $b = 0$, então a função é denominada *linear*.

É interessante observar que uma função afim é sempre bijetora, cuja inversa é

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}.$$

Ademais, seu gráfico é uma reta, sendo uma função crescente quando $a > 0$ e, decrescente quando $a < 0$.

Intercepta os eixos x e y, respectivamente, nos pontos $(0, b)$ e $(-\frac{b}{a}, 0)$.

Um caso especial ocorre quando $a = 1$ e $b = 0$ e, neste caso, a função é denominada *identidade*.

Definição A.13: Função Quadrática

Uma função polinomial de grau 2, é denominada função quadrática ou função de segundo grau. Em símbolos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c; a \in \mathbb{R}^*.$$

Proposição A.1: Encontrando a Raiz de uma Função Quadrática

Dada uma função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, suas raízes são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Demonstração: Divida todos os termos da função $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ por a:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Some $\frac{b^2}{4a^2}$ em ambos os lados da equação para completar os quadrados envolvendo x:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Simplifique os três primeiros termos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}.$$

Subtraia $\frac{c}{a}$ dos dois lados da equação para isolar x:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Para simplificar a notação, utilizaremos $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Faça a raíz dos termos da equação:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \implies x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Subtraia $\frac{b}{2a}$ em ambos os lados da equação:

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

■

Observação A.4: Encontrando os valores de x associados

Restringindo o domínio de forma adequada, podemos encontrar duas funções inversas para a função quadrática

$$ax^2 + bx + c = f(x).$$

A partir desta equação, procedendo como feito para se encontrar as raízes, obtemos que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{f(x)}{a} + \frac{\Delta}{4a^2}.$$

É importante enfatizar que a fração $\frac{f(x)}{a} + \frac{\Delta}{4a^2}$ é sempre não negativa, já que é igual ao quadrado de um número real.

Prosseguindo,

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{f(x)}{a} + \frac{\Delta}{4a^2}}.$$

Isolando x obtemos a inversa:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{4af(x) + \Delta}{4a^2}}$$

Portanto,

$$x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{4af(x) + \Delta}{4a^2}}, \text{quando } x \leq -\frac{b}{2a}$$

e

$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{4af(x) + \Delta}{4a^2}}, \text{quando } x \geq -\frac{b}{2a}.$$

Isto é, existem duas funções inversas:

$$f^{(-1)}(x) = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{4ax + \Delta}{4a^2}}, \text{quando } x \leq -\frac{b}{2a}$$

e

$$f^{(-1)}(x) = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{4ax + \Delta}{4a^2}}, \text{quando } x \geq -\frac{b}{2a}.$$

Abaixo colocamos o exemplo gráfico de $f(x) = x^2 + 2$. As inversas são relacionadas com a função pela cor, conforme $x \geq 0$ (azul) e $x \leq 0$ (vermelho). Um fato a se destacar é a simetria em relação à reta identidade $y = x$.

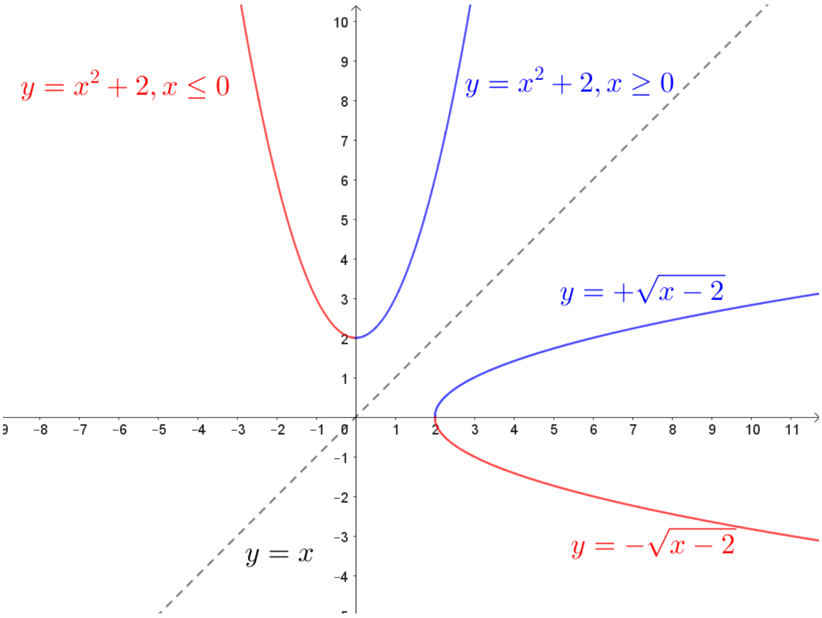

Figura A.4: Função quadrática e sua inversa. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Exemplo A.2

Dada $f(x) = ax^2+bx+c$, é útil, em disciplinas de exatas em graduações, utilizar $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, sendo x_1 e x_2 as raízes, caso existam. Por exemplo, $f(x) = 4x^2 - 36x + 56$ tem como raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 7$, podendo ser escrita como $f(x) = 4(x-2)(x-7)$. Este é um caso particular do T.F.A..

Definição A.14: Parábola

Dados um ponto F e uma reta d, denomanina-se *Parábola* o lugar geométrico (conjunto) dos pontos P que possuem a mesma distância de F e d. Em símbolos:

$$d(P;F) = d(P;d).$$

Esta curva é representada por uma equação quadrática. Denominamos F *foco* e d *diretriz* da parábola.

Definição A.15: Função Exponencial e Logarítmica

Dado $a \in \mathbb{R}_+^*$, tal que $a \neq 1$, uma função é denominada **exponencial** se sua lei de formação for expressa como

$$f(x) = a^x.$$

A inversa da exponencial é denominada **logarítmica** e sua lei de formação é expressa da seguinte forma:

$$g(x) = \log_a x.$$

Para aplicações desta teoria, veja as Seções 1.1.1 e 1.1.2.

Podemos observar as seguintes propriedades:

i) Caso $0 < a < 1$, o gráfico da função *exponencial* se aproxima do eixo das abscissas, para valores crescentes de x, ou, caso $a > 1$, se aproxima do eixo das abscissas para valores decrescentes de x. Vale destacar que em ambos os casos, o gráfico nunca toca o eixo x;

ii) O gráfico da função *exponencial* é crescente se $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$;

iii) O gráfico da função *exponencial* cruza o eixo y no ponto $(0, 1)$;

iv) Se $a = e$, a função *logarítmica* pode ser expressa como $f(x) = \ln x$ e é denominada função *logaritmo natural* ou *neperiano*;

v) Se $a = 10$, escrevemos apenas $log(x)$ ao invés de $log_{10}(x)$.

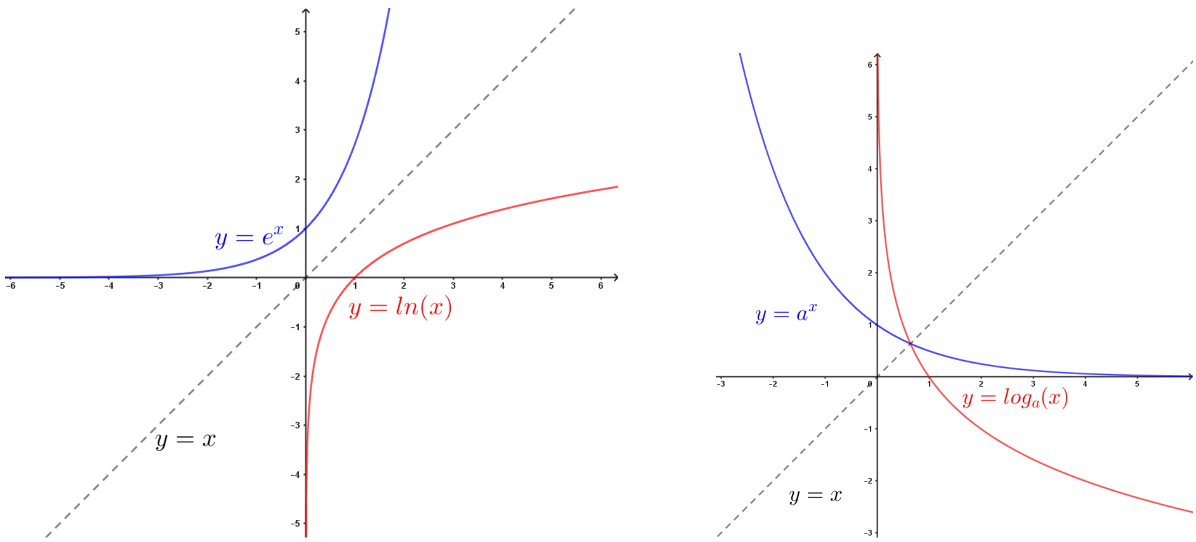

Figura A.5: Gráfico das funções Exponencial e Logarítmica, onde $0 < a < 1$. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Definição A.16: Interseções de Curvas

Dadas duas funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que um ponto (x, y) pertence à interseção entre seus gráficos, se satisfaz $y = f(x) = g(x)$. Escrevendo na forma de sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}.$$

Observação A.5: Interseções entre uma função exponencial e sua inversa

Dada uma função exponencial $f(x) = a^x$, a quantidade de interseções que terá com $f^{(-1)}(x) = \log_a x$ depende do valor de a. Em símbolos, a igualdade $a^x = \log_a x$ possui:

1. Três soluções se $0 < a < \dfrac{1}{e^e}$;
2. Uma solução se $\dfrac{1}{e^e} \leq a < 1$ ou $a = \sqrt[e]{e}$;
3. Duas soluções se $1 < a < \sqrt[e]{e}$;
4. Nenhuma solução se $\sqrt[e]{e} < a < +\infty$.

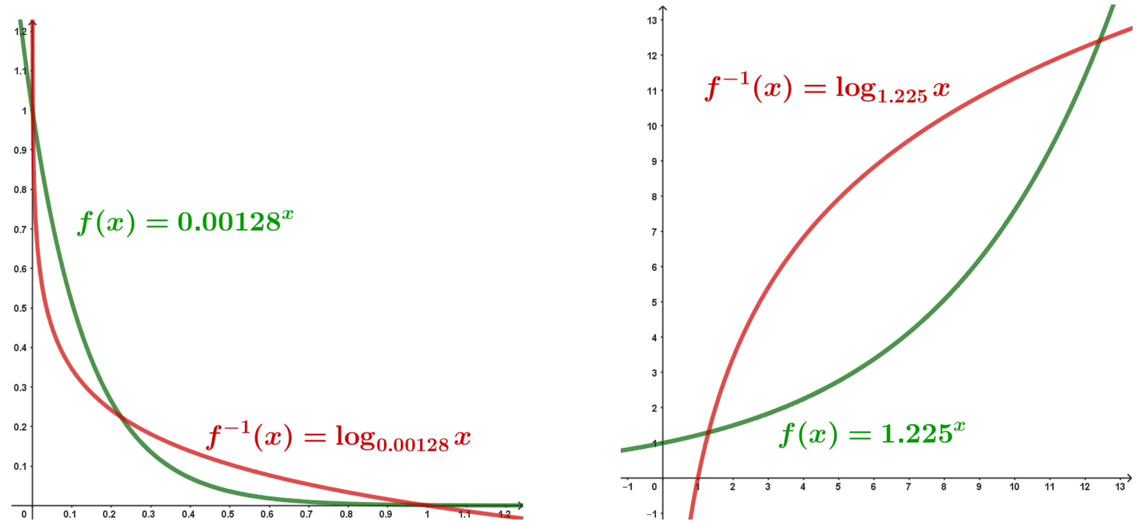

Figura A.6: Gráfico dos casos 1 e 3. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [1, Teorema 1.1].

Definição A.17: Ângulo

Dados três pontos A, B e O, as semirretas OA e OB de mesma origem O determinam duas regiões denominadas *ângulo*. As semirretas são os lados de cada ângulo e o ponto O é chamado *vértice*.

Em estudos de geometria, é comum utilizarmos sempre o ângulo visualmente menor.

Abaixo indicados os principais tipos de ângulo:

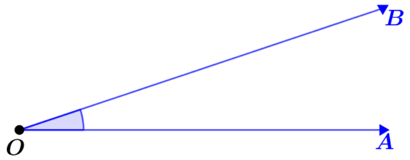

Figura A.7: Ângulo Agudo, menor que 90°. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

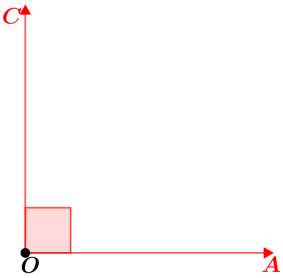

Figura A.8: Ângulo Reto, igual a 90°. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

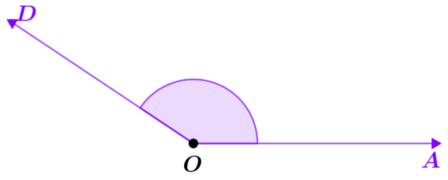

Figura A.9: Ângulo Obtuso, maior que 90° e menor que 180°.
Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

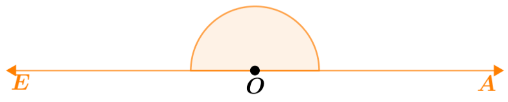

Figura A.10: Ângulo Raso, igual a 180°.
Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Definição A.18: Constantes trigonométricas

As constantes obtidas, por meio das razões das medidas de dois lados de um triângulo retângulo, são denominadas *constantes trigonométricas*.

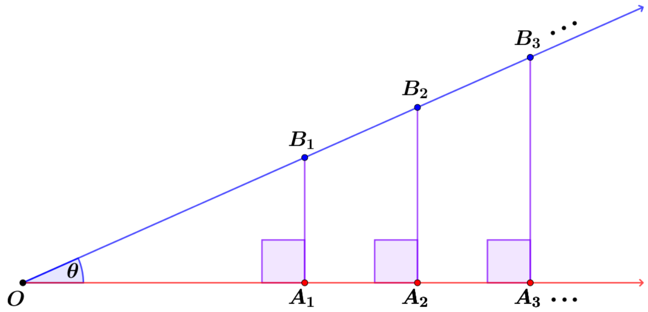

Figura A.11: Constantes Trigonométricas. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

A partir da figura acima, escrevemos as razões:

1. $\dfrac{A_1B_1}{OB1} = \dfrac{A_2B_2}{OB2} = \dfrac{A_3B_3}{OB3} =$ ... como **sen**(θ) e lemos *seno de* θ;
2. $\dfrac{OA_1}{OB1} = \dfrac{OA_2}{OB2} = \dfrac{OA_3}{OB3} =$ ... como **cos**(θ) e lemos como *cosseno de* θ;
3. $\dfrac{A_1B_1}{OA1} = \dfrac{A_2B_2}{OA2} = \dfrac{A_3B_3}{OA3} =$ ... como **tg**(θ) e lemos *tangente de* θ.

Para aplicações desta teoria, veja a Seção 1.2.

A partir das constantes acima, definimos as seguintes *funções trigonométricas*:

Definição A.19: Funções Seno e Cosseno

As funções seno e cosseno são caracterizadas como:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto \cos(\theta) \end{aligned}$$

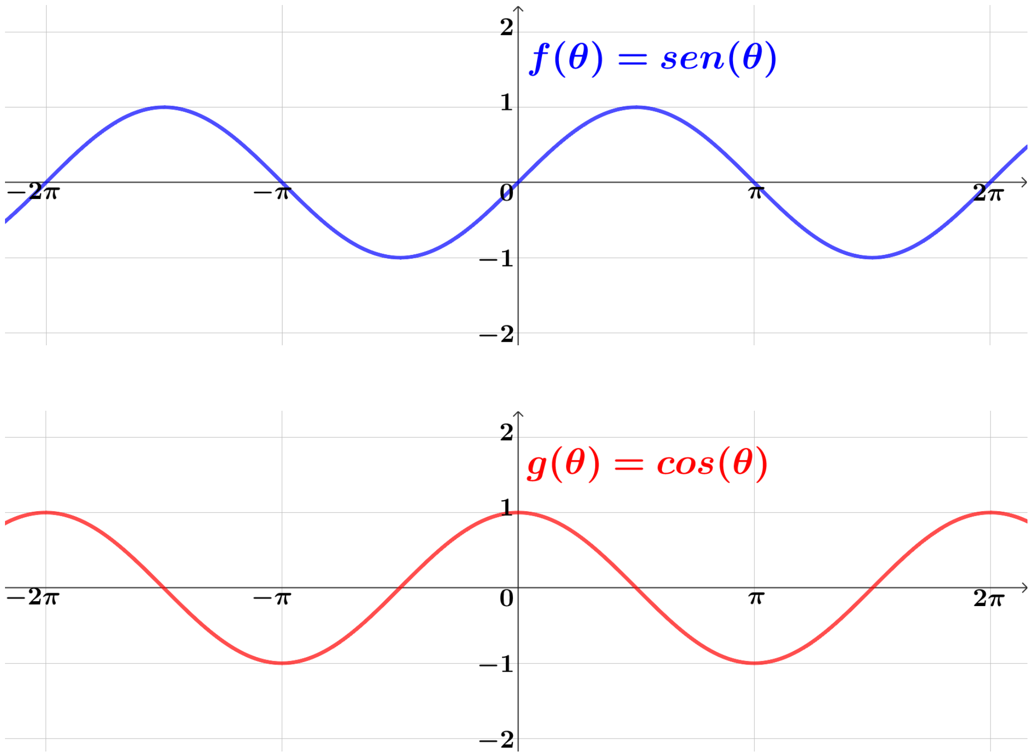

Figura A.12: Gráficos das funções Seno e Cosseno. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Podemos explicitar algumas propriedades:

1. Não são injetoras e, portanto, não são inversíveis;
2. São funções periódicas, ou seja, seu comportamento repete a cada intervalo de comprimento 2π;
3. A função seno se relaciona com a cosseno ao somar $\frac{\pi}{2}$ em x, ou seja, sen$(x+\frac{\pi}{2})$ =cos(x);
4. O gráfico da sen(x) cruza o eixo y no ponto $(0,0)$ e o eixo x nos pontos da forma $(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$;
5. Para qualquer valor de x se verifica a *relação fundamental da trigonometria*: sen$(x)^2$+cos$(x)^2 = 1$.

Definição A.20: Função Tangente

A função tangente é caracterizada como:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & tg(\theta), \end{array}$$

em que $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$.

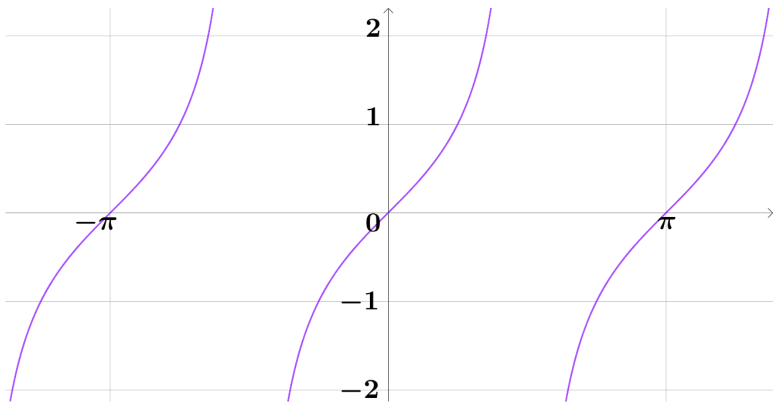

Figura A.13: Gráfico da função tangente. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

1. Não é injetora e portanto não é inversível;
2. É uma função periódica, ou seja, seu comportamento repete. No caso, se repete a cada intervalo de comprimento π;
3. O gráfico da tg(x) cruza o eixo y apenas em $(0,0)$ e o x nos pontos da forma $(k\pi, 0)$ e se aproxima das retas $x = \frac{k\pi}{2}$, mas nunca as toca;
4. A função tangente também é a razão da função seno pela função cosseno, ou seja, $\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$.

Observação A.6: Funções Trigonométricas podem ser invertíveis?

É possível restringir estas funções para que fiquem bijetoras e portanto invertíveis. Seguem as restrições mais usuais de cada uma:

1. **Seno e Cosseno**:
$$\begin{array}{rccc} f\colon & [0,2\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & \theta & \longmapsto & \text{sen}(\theta) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g\colon & [0,2\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & \theta & \longmapsto & \cos(\theta) \end{array}.$$
2. **Tangente**:
$$\begin{array}{rccc} h\colon & \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & \text{tg}(\theta) \end{array}.$$

A.2 Geometria

A.2.1 Polígonos

Polígono é uma figura plana com segmentos de reta que se conectam de forma fechada. Os segmentos são chamados de *lados*, a soma dos seus comprimentos de *perímetro*, os pontos de conexões entre os lados são denominados *vértices* e a região delimitada por eles de *área*.

Observação A.7: Classificação de Polígonos

Um Polígono é denominado:

1. **Convexo**: se qualquer segmento com extremidades em suas bordas, está contido em sua região interna;
2. **Equilátero**: se todos seus lados tiverem o mesmo comprimento;
3. **Regular**: se além de equilátero, todos seus ângulos tiverem a mesma medida.

A.2.2 Tesselação

Para aplicações desta teoria, veja a Seção 1.5.1.

Para atividades envolvendo esta teoria, veja a seção 2.3.

Tesselação é o processo de cobrir o plano com uma ou mais figuras geométricas, sem sobreposições ou espaços não preenchidos.

Dos polígonos regulares, o hexágono é aquele que otimiza a relação entre perímetro necessário e área preenchida, ou seja, ele tessela o plano minimizando o perímetro dos polígonos necessários para tal feito. Seguem os argumentos que justificam esta afirmação:

1. Seja qual for o polígono, tendo um perímetro fixo, sua versão regular é a que otimiza a área preenchida por ele;
2. Dado um perímetro fixo, quanto mais lados tiver um polígono, maior a área que ele preencherá;
3. Um polígono regular só irá preencher toda uma região sem deixar espaços vazios, se seu ângulo interno for um divisor de 360, ou seja, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 ou 360;
4. O ângulo interno de um polígono regular é dado pela fórmula $a_i = \dfrac{(n-2).180}{n}$. Segundo ela, apenas três polígonos satisfazem a regra descrita em (3): triângulos, quadrados e hexágonos.

O polígono que atende a todos estes detalhes, é o hexágono regular.

Observação A.8: A respeito do Item 3.

É possível relacionar a capacidade de um polígono regular preencher o plano sem deixar espaços com seu ângulo interno (a_i), e é possível observar uma relação que surge da divisão de uma volta completa por este valor:

$$\frac{360}{\frac{180(n-2)}{n}} = \frac{360n}{180(n-2)} = \frac{2n}{(n-2)},$$

segue abaixo um estudo de caso a caso da fração resultante:

n	2n/(n-2)
3	6
4	4
5	3,33333
6	3
7	2,8
8	2,66667
9	2,57143
10	2,5
11	2,44444
12	2,4
...	...

Figura A.14: Estudo numérico da função. Fonte: Feito pelo autor via Excel.

Utilizando da ideia de limites, um conceito matemático geralmente estudado no início de graduações na área de exatas, é fácil mostrar que, esta expressão obtida, tende a 2, mas nunca o alcança, pois isto significaria um polígono de dois lados, o que é impossível.

Observação A.9: A Matemática continua viva

Ao contrário do que é comum pensar, a matemática continua viva e ainda tem novidades para serem encontradas. Em março de 2023, o artigo que pode ser encontrado em [11] descreve a descoberta de um único ladrilho que sozinho tessela de forma aperiódica, ou seja, sem gerar padrões geométricos ou visuais. Até então, dois era o número mínimo de ladrilhos necessários para uma tesselação aperiódica. Esta descoberta não só reduziu o número mínimo para um, como também possibilitou provar que existem infinitos ladrilhos únicos com a mesma propriedade.

A.2.3 Não polígonos

Uma figura plana aberta ou fechada mas sendo composta não só de segmentos de reta é denominada *Não Polígono*. Destes, dois merecem ser citados aqui: elipses e circunferências.

É possível também falar sobre área e perímetro destas figuras, em especial, no caso da circunferência, temos:

Definição A.21: Medidas da Circunferência

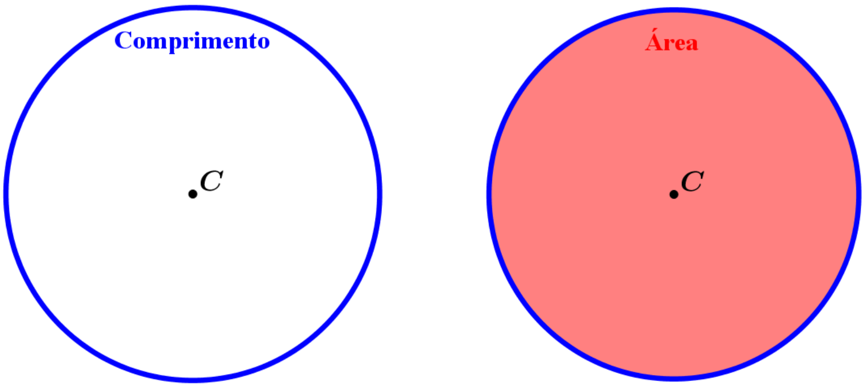

Figura A.15: Comprimento e Área de Circunferências Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

1. O **Comprimento** é descrito pela expressão $2\pi r$.
2. A **Área** é expressa por πr^2.

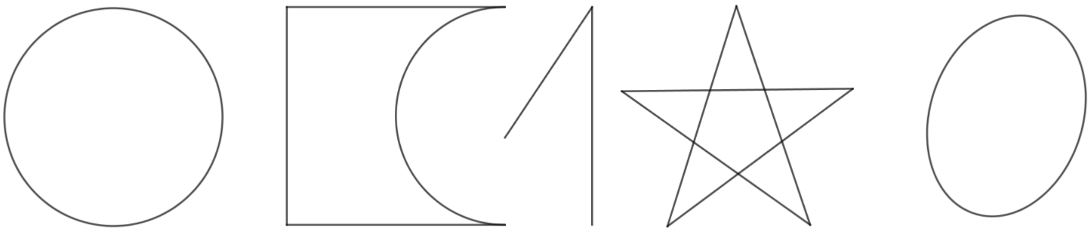

Figura A.16: Alguns não polígonos. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

A.2.4 Poliedros

Poliedro é um sólido de três dimensões, formado por *faces* (polígonos), *arestas* (lados dos polígonos que constituem as faces) e *vértices*. Para estas formas geométricas, definimos *área de superfície* e *volume*, sendo o primeiro a soma das áreas dos polígonos que constituem suas faces, já o segundo é o espaço delimitado no interior do poliedro.

Alguns poliedros importantes são: cubos, paralelepípedos, prismas e pirâmides.

Definição A.22: Poliedros

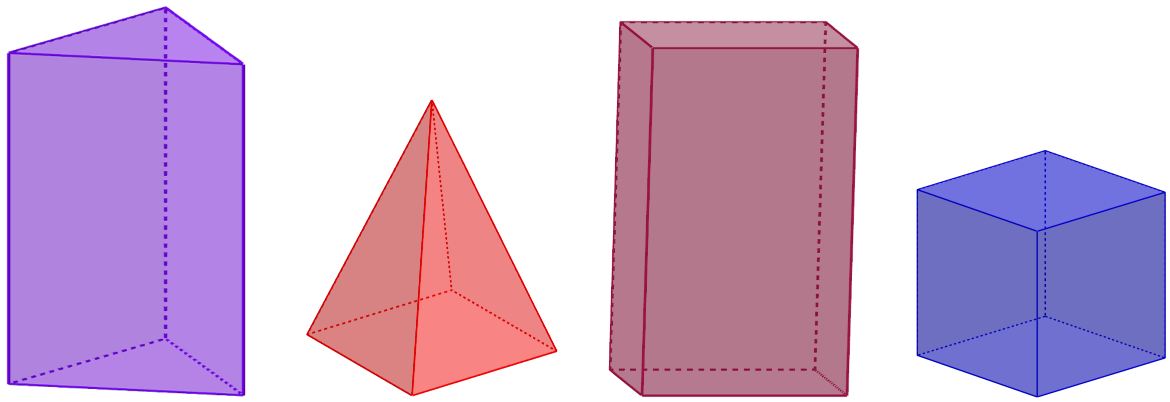

Figura A.17: Prisma, Pirâmide, Paralelepípedo e Cubo, respectivamente. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Um Sólido Geométrico é denominado:

1. **Prisma**: quando duas de suas faces são congruentes e paralelas, na figura, as faces de baixo e de cima, já as demais são paralelogramos.
2. **Pirâmide**: quando todos os segmentos de reta que saem de um polígono, chamado de base, se encontram em um único ponto, denominado de vértice.
3. **Paralelepípedo**: quando todos os polígonos que o compõem são paralelogramos.
4. **Cubo**: quando todas as suas faces são quadradas.

Utilizando como exemplo um cubo, o volume dele é calculado multiplicando a medida de suas três dimensões, ou seja, altura, largura e espessura. Observe que isto é o mesmo que calcular a área do polígono em sua base e depois multiplicar pelo valor da altura do sólido. Esta ideia pode ser estendida para todos os prismas, ao calcular seus volumes é comum escrever área da base (A_b) vezes altura (h), ou seja:

$$V = A_b h.$$

A.2.5 Corpos Redondos

Para atividades envolvendo esta teoria, veja a Seção 2.4.

Um sólido geométrico que possui pelo menos uma de suas faces curva ou arredondada é denominado um *corpo redondo*. Destes, destacamos três: *cilindros*, *cones* e *esferas*.

É possível estabelecer uma correlação entre os prismas e cilindros e entre as pirâmides e os cones. Para isto, basta associar o "polígono" da base destes poliedros a um círculo. Esta frase está matematicamente errada, mas é uma boa forma de visualizar e compreender as propriedades de um que podem ser estendidas a outro. Para as definições formais veja o que segue:

Definição A.23: Corpos Redondos

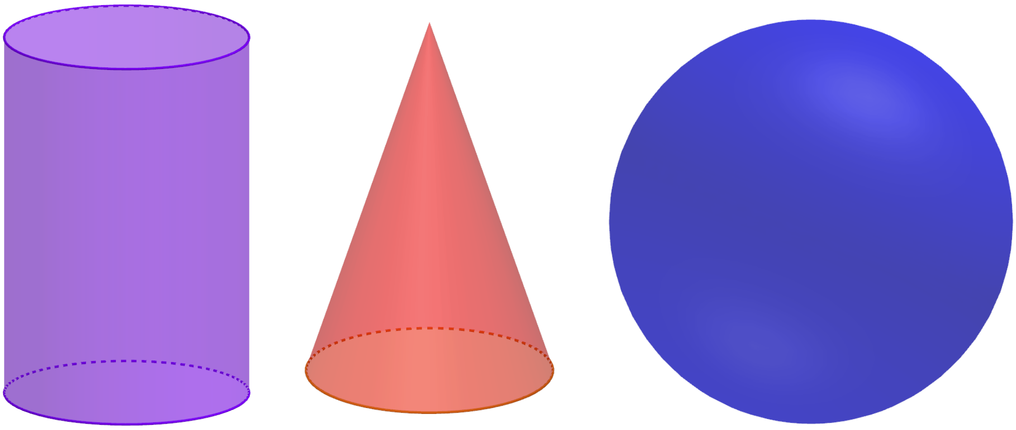

Figura A.18: Cilindro, Cone e Esfera respectivamente. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Um Corpo Redondo pode ser obtido a partir da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.

1. Rotacionar um paralelogramo em torno de um de seus lados resulta em um **Cilindro**.
2. Rotacionar um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos gera um **Cone**.
3. Rotacionar um círculo em torno de seu diâmetro forma uma **Esfera**.

O volume de um cilindro, é calculado de forma semelhante a de um prisma. Área da base vezes sua altura, a diferença neste caso, é que a figura da base é sempre uma circunferência de raio r e então escrevemos:

$$V = \pi r^2 h.$$

A.3 Exemplos em Geometria Analítica

Nesta Seção vamos considerar o plano $\mathbb{R}^2$. Segundo o sistema cartesiano, cada ponto possui duas coordenadas. Em símbolos, podemos escrever para um dado ponto $P = (x, y)$, em que x é denominado *abscissa* e y a *ordenada*.

O ponto específico $O = (0,0)$ é denominado *origem do sistema*.

Denominamos xy como sendo um sistema de coordenadas.

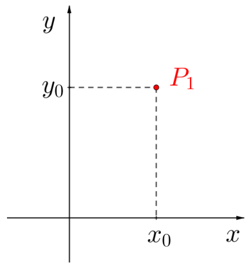

Figura A.19: Ponto em $\mathbb{R}^2$. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Definição A.24: Distância entre pontos

Dados dois pontos $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, definimos a distância entre eles como sendo

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}.$$

De fato, tal distância é obtida pelo Teorema de Pitágoras, conforme notamos a seguir:

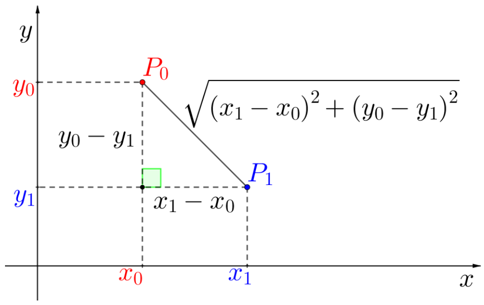

Figura A.20: Distância entre pontos do plano. Fonte: feito pelo autor via GeoGebra.

Definição A.25: Circunferência

Dado um número real $r > 0$ e um ponto $C = (x_0, y_0)$, o conjunto de todos os pontos $P = (x, y)$ que distam r de C é denominado *circunferência* de centro C e raio r.

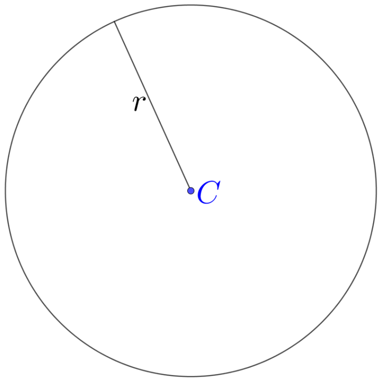

Figura A.21: Circunferência de centro C e raio r Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Em termos de equação, uma circunferência como na Definição A.25 pode ser expressa da seguinte maneira

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Definição A.26: Translação de um sistema de coordenadas

Dado um sistema de coordenadas xy e um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, podemos considerar um novo sistema de coordenadas $\tilde{x}\tilde{y}$, denominado *translação de xy segundo P_0*, conforme figura a seguir:

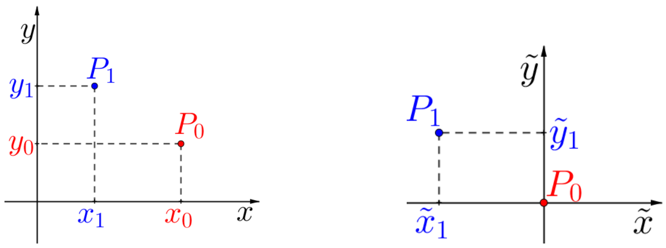

Figura A.22: Translação de sistema de coordenadas. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Neste caso, P_0 passa a ser a origem do novo sistema.

Na definição anterior, destacamos que se $P_1 = (x_1, y_1)$ no sistema xy, então no sistema $\tilde{x}\tilde{y}$ passa a ser representado como $P_1 = (\tilde{x_1}, \tilde{y_1})$, em que $\tilde{x}_1 = x_1 - x_0$ e $\tilde{y}_1 = y_1 - y_0$.

Definição A.27: Rotação de um sistema de coordenadas

Dado um sistema de coordenadas xy e um ângulo θ, podemos obter um novo sistema de coordenadas XY, denominado rotação de xy segundo P_0 como sendo o plano da figura que segue:

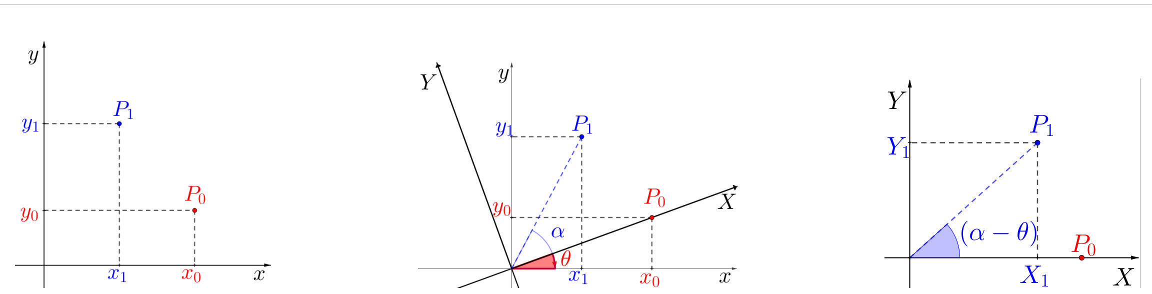

Figura A.23: Rotação de sistema de coordenadas. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Na definição anterior, destacamos que se $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ em xy, então no sistema XY passam a ser representados como $P_0 = (X_0, Y_0)$ e $P_1 = (X_1, Y_1)$, em que $X_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $Y_0 = 0$, $X_1 = x_0 \cos\alpha + y_0 \operatorname{sen}\alpha$ e $Y_1 = x_0 \operatorname{sen}\alpha - y_0 \cos\alpha$, ou ainda,

$$X_1 = r\cos\alpha\cos\theta + r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta \text{ e } Y_1 = r\operatorname{sen}\alpha\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\cos\alpha,$$

pois

$$X_1 = r\cos(\alpha-\theta) \qquad \text{e} \qquad Y_1 = r\operatorname{sen}(\alpha-\theta).$$

Exemplo A.3

Na figura a seguir, temos $P_0 = (\sqrt{3}, 1)$ e $P_1 = (1, \sqrt{3})$ no sistema xy. Após a rotação, os pontos passam a ser expressos em XY como $P_0 = (2, 0)$ e $P_1 = (\sqrt{3}, 1)$.

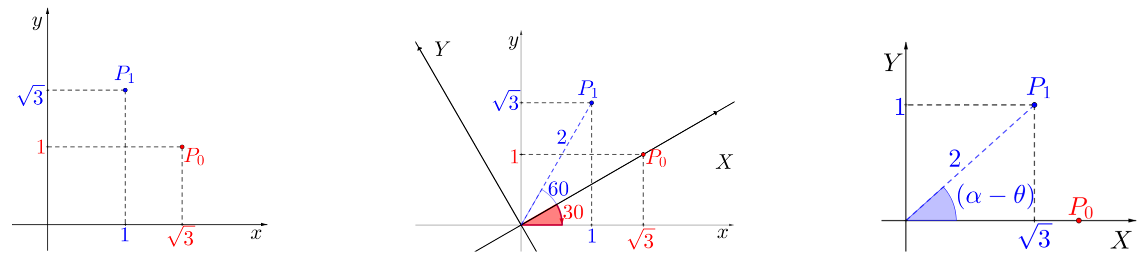

Figura A.24: Exemplo Numérico. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

A.3.1 Encontrando Interseções entre Circunferências

Para aplicações desta teoria, veja a Seção 1.4.

Dadas duas circunferências com centros (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e respectivos raios r e R, é fato que qualquer ponto $P = (x, y)$ na interseção das mesmas deve satisfazer:

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r^2 \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = R^2 \end{cases}.$$

Buscando os pontos de interseção, depois de muitos cálculos, é possível obter a seguinte equação do segundo grau em y:

$$ay^2 + by + c = 0,$$

em que

$$\begin{aligned}
a &= 4((y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2)\\
b &= -4((R^2 - r^2)(y_1 - y_2) + ((y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2)(y_1 + y_2))\\
c &= (R^2 - r^2 + y_2^2 - y_1^2)(R^2 - r^2 + y_1^2 - y_2^2) + 2(x_1 - x_2)^2(-r^2 - R^2 + y_1^2 + y_2^2)\\
&\quad - 4x_1x_2(x_1 + x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2
\end{aligned}$$

Foram feitas as contas e analisadas por muitas vezes, porém não se percebeu como estudar o sinal de Δ para se saber quantas interseções existem entre as duas circunferências consideradas. Ou mesmo, encontrar tais interseções, dado o número de constantes e variáveis que surgem.

A alternativa encontrada, inspirada pela observação em [12], foi considerar um sistema de coordenadas em que o centro de uma das circunferências está na origem e o centro da outra pertence ao eixo das abscissas de um novo sistema, que sempre pode ser obtido por meio de translação e rotação. Neste caso:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ (x - x_0)^2 + y^2 = R^2 \end{cases}.$$

Abrindo a expressão $(x - x_0)^2$ e subtraindo da primeira linha acima, a segunda, resulta que

$$x^2 - x^2 + y^2 - y^2 + 2xx_0 - x_0^2 = r^2 - R^2$$

Simplificando, obtemos $2xx_0 = r^2 - R^2 + x_0^2$, ou ainda,

$$x = \frac{r^2 - R^2 + x_0^2}{2x_0}. \tag{A.1}$$

Substituindo o valor de x encontrado na expressão da circunferência centrada na origem, obtém-se $\left(\frac{r^2 - R^2 + x_0^2}{2x_0}\right)^2 + y^2 = r^2$ e, por fim

$$
\begin{aligned}
y &= \pm\sqrt{r^2 - \left(\frac{(r^2 - R^2 + x_0^2)^2}{4x_0^2}\right)} \\
&= \pm\frac{\sqrt{4x_0^2r^2 - r^4 - R^4 - x_0^4 + 2R^2r^2 + 2R^2x_0^2 - 2r^2x_0^2}}{2x_0} \\
&= \pm\frac{1}{2x_0}\sqrt{(x_0 + r + R)(-x_0 + r + R)(-x_0 - r + R)(-x_0 + r - R)}
\end{aligned}
$$

A seguir estudamos as possíveis situações:

1. Se $x_0 > R + r$, então

   $(x_0 + r + R) > 0, (-x_0 + r + R) < 0, (-x_0 - r + R) < 0$ e $(-x_0 + r - R) < 0$.

   Portanto, $\nexists y \in \mathbb{R}$.

2. Se $x_0 = R + r$, então

   $(-x_0 + r + R) = 0$.

   Portanto, $y = 0$ e, da equação (A.1), obtemos $x = r$.

3. Se $R + r > x_0 > R - r$, então

   $(x_0 + r + R) > 0, (-x_0 + r + R) > 0, (-x_0 - r + R) < 0$ e $(-x_0 + r - R) < 0$.

   Portanto, y assume dois valores reais distintos, ou seja, há dois pontos de interseção.

4. Se $x_0 = R - r$, então

   $(-x_0 - r + R) = 0$.

   Portanto, $y = 0$ e, da equação (A.1), obtemos $x = -r$.

5. Se $x_0 < R - r$, então

   $(x_0 + r + R) > 0, (-x_0 + r + R) > 0, (-x_0 - r + R) > 0$ e $(-x_0 + r - R) < 0$.

   Portanto, $\nexists y \in \mathbb{R}$.

   As situações apresentadas são descritas, da esquerda para a direita, respectivamente, a seguir:

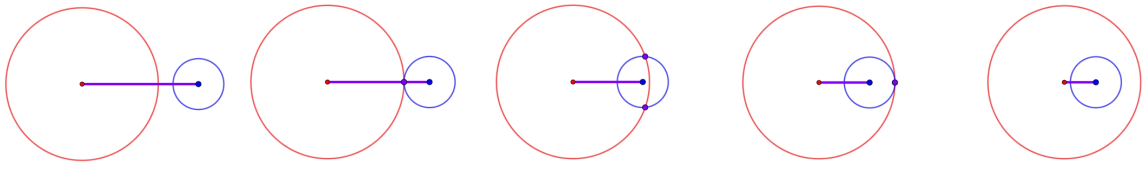

Figura A.25: Posições relativas entre duas circunferências. Fonte: feito pelo autor via GeoGebra.

A.4 Matrizes: Álgebra e Geometria

Aqui vamos trabalhar com os conceitos de direção e sentido. Vale destacar que dentro de uma direção há sempre dois sentidos. Caminhar sobre uma direção significa seguir paralelamente a uma reta dada. As direções mais comuns de serem trabalhadas são a horizontal e a vertical, que estão representadas na figura abaixo:

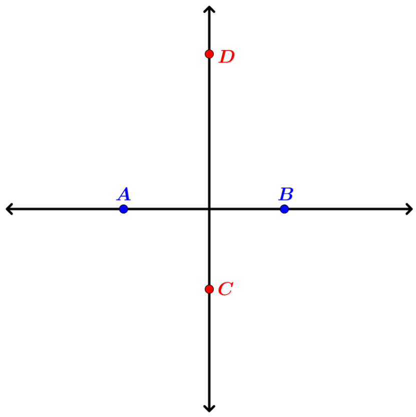

Figura A.26: Eixos. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Na horizontal, os sentidos são ir para direita (de A para B) e ir para esquerda (de B para A). Na vertical, os sentidos são ir para cima (de C para D) e ir para baixo (de D para C).

Uma reta com um sentido definido é chamada *eixo*. Por isso, falamos em eixos x e y. Na figura acima, o eixo x é a reta horizontal com sentido para a direita e, o eixo y é a reta vertical com sentido para cima.

A.4.1 Vetores e operações entre eles

Para aplicações desta teoria, veja a Seção 1.3.

Definição A.28: Vetores

Dados dois pontos A e B em $\mathbb{R}^2$, um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é um objeto geométrico com norma (comprimento), direção e sentido.

É representado por um segmento orientado com origem em A e extremidade em B.

Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, então escrevemos

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

No caso, se considerarmos $O = (0,0)$ (origem do sistema) e $P = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, então podemos representar $\vec{v}$ por meio do ponto P, ou seja,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} = P = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

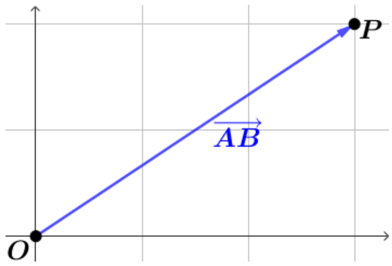

Figura A.27: Vetor. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Dado um vetor $\overrightarrow{AB}$, seu *oposto* é o vetor $\overrightarrow{BA}$, também denotado por $-\overrightarrow{AB}$. No caso, eles têm mesma norma, direção, mas sentidos opostos. Em geral, dado um vetor $\vec{u}$, denotamos seu oposto por $-\vec{u}$. Quando $A = B$, então $\overrightarrow{AB}$ representa o vetor nulo, denotado por $\vec{0}$.

Definição A.29: Adição e Subtração

Dados dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, indicamos por $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ e denominamos $\vec{u}$ mais $\vec{v}$, o vetor obtido da soma das coordenadas correspondentes.

Da mesma forma, indicamos por $\vec{s} = \vec{u} - \vec{v}$ e denominamos $\vec{u}$ menos $\vec{v}$, o vetor obtido da subtração das coordenadas correspondentes. Em símbolos:

$$\vec{a} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ e } \vec{s} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Note que $\vec{u} - \vec{v}$ é o mesmo que somar $\vec{u}$ com o oposto de $\vec{v}$.

Geometricamente, a soma e a subtração da definição anterior são obtidas por meio da chamada *Regra do Paralelogramo*, como vemos abaixo:

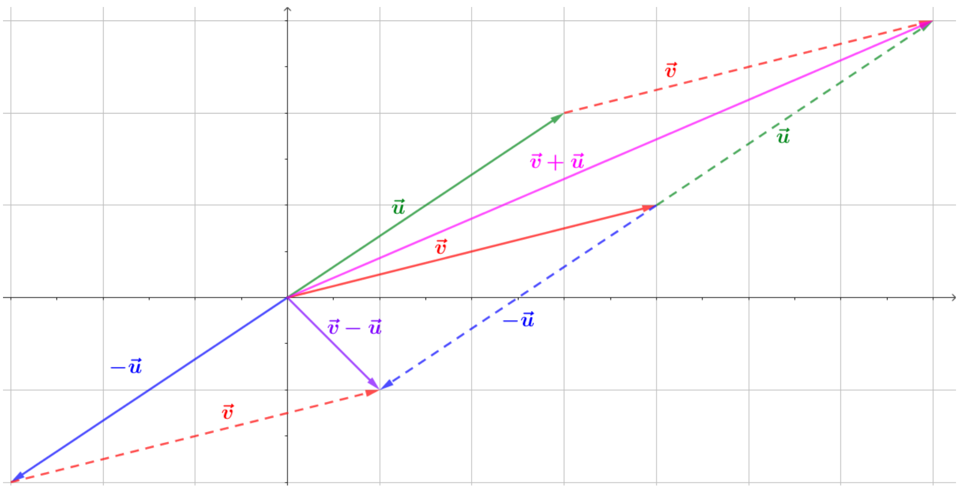

Figura A.28: Soma e Subtração de Vetores. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores e, $k \in \mathbb{R}$, valem, para a operação de adição, as seguintes propriedades:

1. Associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;

2. Comutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;

3. Elemento Neutro: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$;

4. Inverso aditivo: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$;

5. É interessante notar que o vetor $\vec{v}-\vec{u}$ pode ser representado com origem na extremidade de $\vec{u}$ e extremidade coincidente com a de $\vec{v}$.

Definição A.30: Multiplicação e Divisão por uma Constante

Dados o vetor $\vec{u}=(x,y)$ e uma constante real k, indicamos por $\vec{m}=k\vec{u}$ e denominamos $\vec{u}$ multiplicado por k, um múltiplo do vetor $\vec{u}$. Note que se $k\neq 0$, esta operação é o mesmo que dividir $\vec{u}$ por $\frac{1}{k}$. Em símbolos:

$$\vec{m}=(kx,ky).$$

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e a constante real k, valem para esta operação, as seguintes propriedades:

1. Elemento Neutro $1\vec{u}=\vec{u}$;

2. $0\vec{u}=\vec{0}$;

3. Distributiva quanto multiplicação por escalar: $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$;

4. Dado $\vec{u}=(x,y)$, indicamos por $||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2}$ e denominamos *norma* de $\vec{u}$, a constante que determina o comprimento deste vetor. Podemos afirmar que para $k\in\mathbb{R}$ vale $||k\vec{u}||=|k|||\vec{u}||$;

5. Dado $\vec{u}$, indicamos por $\vec{v}=(\frac{1}{||\vec{u}||})\vec{u}$ e denominamos *versor* de $\vec{u}$, o vetor de comprimento unitário e múltiplo de $\vec{u}$, obtido desta operação;

6. Se $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$ e $\vec{u}=k\vec{v}$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

   Na figura que segue, vemos algumas situações da multiplicação por escalar em que $k>1$ e, na última situação, $-\vec{u}=(-1)\vec{u}$. Ainda, o vetor original $\vec{u}$ está representado com uma largura ampliada para destacar as situações em que um de seus múltiplos está, em parte, sobre ele.

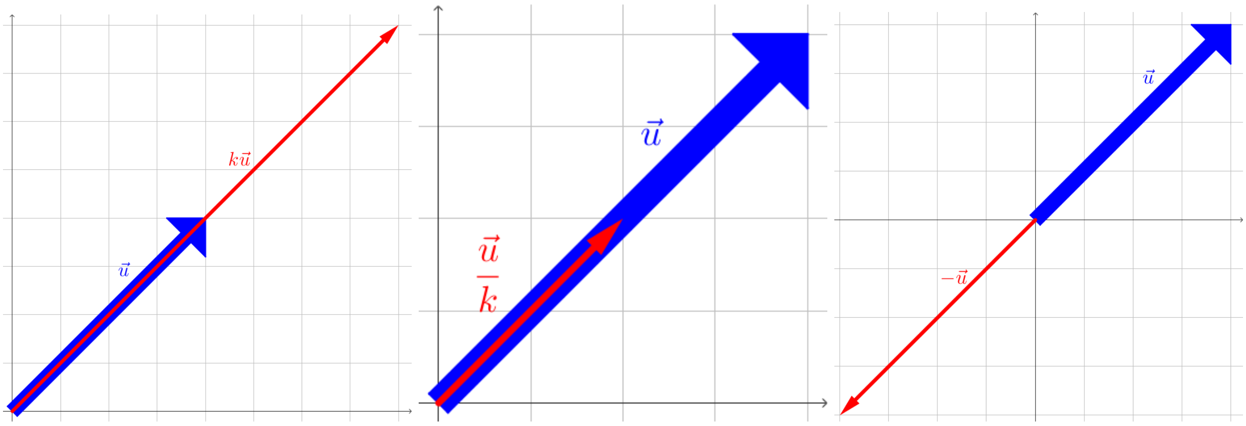

Figura A.29: Multiplicação e divisão de Vetores para $k > 1$ além do oposto de um vetor. Fonte: Feito pelo autor via GeoGebra

A definição seguinte é de extrema importância em um curso de Geometria Analítica.

Definição A.31: Produto Interno

Dados dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, indicamos por $w = \vec{u}.\vec{v}$ ou $w = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e denominamos $\vec{u}$ escalar $\vec{v}$, o número obtido ao somar o produto das coordenadas correspondentes. Em símbolos:

$$w = x_1.x_2 + y_1.y_2.$$

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e a constante real k, valem para esta operação, as seguintes propriedades:

1. Comutativa: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$;
2. $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$;
3. Se $\vec{u}.\vec{v} = 0$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais;
4. $(k\vec{u}.\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$.

A.4.2 Matrizes e Operações entre elas

Para aplicações desta teoria, veja a Seção 1.3.

Definição A.32: Matrizes

Matriz é uma tabela de elementos, agrupados em m linhas e n colunas, que representa um objeto matemático ou uma propriedade deste. Cada elemento pode ser identificado a partir da linha e coluna de onde está localizado. Em símbolos:

$$M_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

em que os elementos pertencem ao conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) e $m, n \in \mathbb{N}$. No caso, dizemos que a matriz tem *ordem* mxn e lemos m por n.

Se $m = n$, M_{mxm} é denominada *matriz quadrada de ordem* m.

Ainda, caso todos seus elementos sejam iguais a 0, M_{mxn} é chamada de *matriz nula* e é denotada por 0_{mxn}.

Um vetor pode ser visto como uma matriz M_{mx1}, e dada uma matriz M_{mxn} é possível correlacionar cada uma de suas colunas a um vetor $(a_1, a_2, ..., a_m)$.

Por praticidade abordaremos matrizes M_{3x3}, restringindo sua escrita para

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Apesar disto, tudo o que segue se aplica para m linhas e n colunas.

Definição A.33: Adição e Subtração

Dadas duas matrizes $M = M_{3x3}$ e $N = N_{3x3}$, denominamos M mais N a matriz $A = M + N$ obtida da adição dos elementos correspondentes. Da mesma forma, denominamos M menos N a matriz $S = M - N$ obtida da subtração dos elementos correspondentes. Em símbolos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Dadas matrizes $3x3$ M, N e P valem para a operação de adição, as seguintes propriedades:

1. Associativa: $(M+N)+P = M+(N+P)$;
2. Comutativa: $M+N = N+M$;
3. Elemento Neutro: $M+0_{3x3} = M$;
4. Inverso aditivo: $M+(-M) = 0_{3x3}$.

Definição A.34: Multiplicação e Divisão por uma Constante

Dadas uma matriz M e uma constante real k, denominamos M multiplicada por k a matriz $P = k.M$. Note que esta operação é na verdade uma divisão de M por $\frac{1}{k}$. Em símbolos:

$$P = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix} = k. \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Dadas as matrizes M, N e a constante real k, valem para esta operação, as seguintes propriedades:

1. Elemento Neutro $1.M$=M;
2. $0.M = 0_{mxn}$;
3. Distributiva quanto ao produto por constante: $k.(M+N) = k.M + k.N$.

Definição A.35: Multiplicação por outra matriz

Dada uma matriz M_{mxn} é possível multiplicá-la por outra N_{ixj}, desde que $n = i$, denominamos o produto entre M e N a matriz $P_{mxj} = M_{mxn}.N_{ixj}$ que satisfaz:

$$\begin{pmatrix} a_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21}+a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12}+a_{12}.b_{22}+a_{13}.b_{32} & a_{11}.b_{13}+a_{12}.b_{23}+a_{13}.b_{33} \\ a_{21}.b_{11}+a_{22}.b_{21}+a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12}+a_{22}.b_{22}+a_{23}.b_{32} & a_{21}.b_{13}+a_{22}.b_{23}+a_{23}.b_{33} \\ a_{31}.b_{11}+a_{32}.b_{21}+a_{33}.b_{31} & a_{31}.b_{12}+a_{32}.b_{22}+a_{33}.b_{32} & a_{31}.b_{13}+a_{32}.b_{23}+a_{33}.b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Dadas matrizes $3x3$ M, N e P e a constante real k, valem para esta operação, as seguintes propriedades:

1. Associativa: $(M.N).P = M.(N.P)$;

2. Elemento neutro: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é denominada *matriz identidade* e satisfaz $M.I = I.M = M$;

3. Se $M.N = N.M = I$ então M é dita inversível e $N = M^{-1}$ é dita a inversa de M;

4. $(kM.N) = (M.k.N) = k.(M.N)$;

5. Distributiva quanto ao produto por matriz: $M.(N + P) = M.N + M.P$.

Definição A.36: Determinante

Dadas as matrizes quadradas M, N e A de ordens 3, 2 e 1, respectivamente, seus determinantes são obtidos da seguinte forma:

$$|M| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33});$$

$$|N| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21};$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}.$$

Dadas as matrizes M, N, P e a constante real k, valem para esta operação, as seguintes propriedades:

1. Se pelo menos duas linhas ou duas colunas forem múltiplas entre si, $|M| = 0$;

2. Trocar duas linhas ou duas colunas entre si torna o novo determinante oposto ao original;

3. $|kM_{3x3}| = k^3|M_{3x3}|$ e $|kN_{2x2}| = k^2|N_{2x2}|$;

4. Dadas M_{mxm} e P_{mxm}, então $|M.P| = |M|.|P|$;

5. Se $|M| \neq 0$, então M é inversível.

Definição A.37: Transposta

Dada uma matriz M denominamos transposta de M a matriz M^t obtida ao trocar os elementos a_{ij} pelos

a_{ji}, ou seja, trocar linhas por colunas. Em símbolos:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dadas as matrizes M, N e a constante real k, valem para esta operação, as seguintes propriedades:

1. Denominamos M uma matriz simétrica se $M^t = M$;
2. $(M+N)^t = M^t + N^t$;
3. $kM^t = (kM)^t$;
4. Reflexiva: $(M^t)^t = M$.

Definição A.38: Autovalores e Autovetores

Dada uma matriz M, a variável λ é denominada autovalor de M se existir um $\vec{u} \neq \vec{0}$ tal que $M.\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Neste caso, $\vec{u}$ é denominado autovetor de M relativo ao autovalor λ.

Observação A.10: Obtendo Autovalores e Autovetores

Dada uma matriz M, para obter seus autovalores, é necessário resolver a seguinte equação:

$$|M - \lambda I| = 0.$$

Na próxima igualdade, substituindo λ pelos valores encontrados (no caso de dois valores, serão duas igualdades, uma para cada λ), é possível obter os autovetores a partir da relação entre as coordenadas x e y de um vetor:

$$(M - \lambda I).\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Referências Bibliográficas

[1] BILAN, Nikola Koceić e JELIĆ, Ivan. "**On the intersections of the exponential and logarithmic curves**". Em: ***Annales Mathematicae et Informaticae*** (2014) (citado na página 41).

[2] COSTA, Ueslei Ferreira, BORGES, Jennifer Cristina e NOGUEIRA, Atônio Carlos. "**A Geometria do Globo Terrestre**". Em: ***Anais da SEMAT***. UFU-FAMAT. 2012 (citado na página 16).

[3] FRALEIGH, John B. e BEAUREGARD, Raymond A. ***Linear Algebra***. David Pallai, 1991 (citado na página 14).

[4] GISGEOGRAPHY. ***How GPS Receivers Work – Trilateration vs Triangulation***. URL: https://gisgeography.com/trilateration-triangulation-gps/ (acesso em 17/08/2022) (citado na página 16).

[5] GOOGLE. ***Humano/Velocidade***. URL: https://www.google.com/search?q=velocidade+media+de+uma+pessoa&oq=velocidade+media++de+&aqs=chrome.1.69i57j0i51219.6470j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8#kpfb-stage=1&kpfb-tattr=&kpfb-kpid=mb_pe0qZ036D4rc1sQPyN278AI_1&kpfb-ftype=2&kpfb-ftag=0 (acesso em 09/07/2023) (citado na página 28).

[6] IBGE. ***Site do IBGE com informações sobre habitantes por município do Brasil***. URL: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html (acesso em 30/05/2023) (citado na página 6).

[7] KEMENY, John G. e SNELL, James Laurie. ***Finite Markov Chains***. Atual, 1976 (citado na página 14).

[8] LABS, A4tune. ***Afinador de Violão e Violino***. URL: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.a4tune (acesso em 03/07/2023) (citado na página 25).

[9] NETO, Alcides Lins. ***Funções de uma variável complexa***. 3ª ed. IMPA, 2012 (citado na página 35).

[10] SILVA, Ricardo José Aguiar. "**CONTEXTO E APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS NO ENSINO MÉDIO: Uma Abordagem Interdisciplinar**". Dissertação de Mestrado. UENF - Universidade Estadual Do Norte Fluminense, 2015 (citado nas páginas 5, 8).

[11] SMITH, David et al. ***An aperiodic monotile***. URL: arXiv:2303.10798 (acesso em 20/06/2023) (citado na página 46).

[12] WEISSTEIN, E. W. ***MathWorld–A Wolfram Web Resource***. URL: https://mathworld.wolfram.com/Circle-CircleIntersection.html (acesso em 17/08/2022) (citado na página 53).

[13] WIKIPEDIA. ***Site oficial do WIkipédia sobre Bematistai***. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Bematist (acesso em 17/08/2022) (citado na página 8).

[14] WIKIPEDIA. ***Site oficial do WIkipédia sobre GPS***. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System (acesso em 17/08/2022) (citado na página 16).

[15] ZACH STAR. ***The Applications of Matrices | What I wish my teachers told me way earlier***. URL: https://www.youtube.com/watch?v=rowWM-MijXU&ab_channel=ZachStar/ (acesso em 21/06/2023) (citado na página 14).