



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

IGOR LUIZ MESQUIARI

Como Resolver Problemas de Análise Combinatória com Ênfase em Modelos

Campinas
2023

IGOR LUIZ MESQUIARI

Como Resolver Problemas de Análise Combinatória com Ênfase em Modelos

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Universidade
Estadual de Campinas como parte dos requisitos
exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Roberto Andreani

Este trabalho corresponde à versão final da
Dissertação defendida pelo aluno Igor Luiz
Mesquiari e orientada pelo Prof. Dr.
Roberto Andreani.

CAMPINAS
2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M562c Mesquiari, Igor Luiz, 1981-
Como resolver problemas de análise combinatória com ênfase em modelos / Igor Luiz Mesquiari. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Roberto Andreani.

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise combinatória. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Modelos matemáticos. 4. Didática. I. Andreani, Roberto, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: How to solve combinatorial analysis problems with an emphasis on models

Palavras-chave em inglês:

Combinatorial analysis

Mathematics - Study and teaching

Mathematical models

Didactics

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestre

Banca examinadora:

Roberto Andreani [Orientador]

Claudina Izepe Rodrigues

Jamielli Tomaz Rodrigues

Data de defesa: 06-09-2023

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0008-0279-0663>

- Currículo Lattes do autor: <https://lattes.cnpq.br/0914719750557798>

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 06 de setembro de 2023
e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Prof(a). Dr(a). JAMIELLI TOMAZ PEREIRA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Dedico esta tese ao meu orientador, Dr. Roberto Andreani, e ao meu pai, Luiz Antonio Mesquiari, que foram fundamentais em minha jornada acadêmica. Seus conhecimentos, orientações e apoio incondicional foram essenciais para o meu crescimento e o sucesso neste trabalho.

Ao meu orientador, expresso minha profunda gratidão pela sua dedicação e comprometimento em me guiar ao longo deste processo. Sua sabedoria, experiência e paciência foram inestimáveis, proporcionando um ambiente propício para o desenvolvimento de minhas habilidades e aprimoramento de meus conhecimentos.

Ao meu pai, Luiz Antonio Mesquiari, agradeço por compartilhar comigo sua paixão pela matemática desde a minha infância. Suas conversas, discussões e exemplos práticos despertaram em mim o amor por essa ciência e moldaram o meu caminho acadêmico. Seu apoio inabalável e encorajamento constante foram um verdadeiro alicerce em minha jornada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Igor Luiz Mesquiari.

“A Matemática é a rainha das ciências e a chave para compreender os segredos do universo”.

(Carl Friedrich Gauss)

Resumo

Pretende-se com esta dissertação explorar uma forma mais didática de ensinar análise combinatória e destacar a importância dos modelos nessa fase de aprendizagem. A análise combinatória é um ramo fundamental da matemática, que estuda a contagem e a organização de elementos em conjuntos; contudo, muitos estudantes enfrentam dificuldades em compreender e aplicar os conceitos deste conteúdo.

O primeiro aspecto abordado nesta dissertação é a necessidade de uma abordagem didática clara e acessível para o ensino da análise combinatória. Serão apresentadas estratégias pedagógicas que auxiliam os alunos a compreender os princípios básicos, como a contagem simples, o princípio multiplicativo e o princípio aditivo. Além disso, serão discutidos métodos para facilitar a visualização e a resolução de problemas complexos por meio de diagramas, tabelas e representações gráficas.

Um ponto relevante desta dissertação é a exploração da importância dos modelos no ensino da análise combinatória. Os modelos são ferramentas poderosas que auxiliam os alunos a compreenderem os conceitos e a visualizarem as soluções dos problemas. Serão discutidos diferentes tipos de modelos, e como eles podem ser aplicados em diversos contextos de análise combinatória.

Além disso, se enfatizará a importância de relacionar a análise combinatória a situações do cotidiano e a outras áreas da matemática. Isso ajuda os alunos a perceberem a relevância e a aplicabilidade desses conceitos em diferentes campos, desde a teoria das probabilidades até a otimização de processos.

Por fim, espera-se fornecer um guia abrangente e prático para os professores de matemática, oferecendo estratégias eficazes e modelos inspiradores para o ensino da análise combinatória. Acredita-se que, ao adotar uma abordagem didática adequada e utilizar modelos apropriados, os professores poderão motivar e engajar os alunos, contribuindo para um melhor aprendizado e compreensão dessa disciplina desafiadora.

Palavras-chave: análise combinatória, ensino de matemática, modelos, estratégias didáticas, importância dos modelos.

Abstract

The aim of this thesis is to explore the most effective way of teaching combinatorial analysis and highlight the importance of models in this educational process. Combinatorial analysis is a fundamental branch of mathematics, which studies the counting and organization of elements into sets; however, many students face difficulties in understanding and applying the concepts of this content.

The first aspect addressed in this thesis is the need for a clear and accessible didactic approach for teaching combinatorial analysis. Pedagogical strategies will be presented that help students understand basic principles, such as simple counting, the multiplicative principle and the additive principle. In addition, methods will be discussed to facilitate the visualization and resolution of complex problems through diagrams, tables and graphical representations.

A relevant point of this thesis is the exploration of the importance of models in teaching combinatorics. Models are powerful tools that help students understand concepts and visualize problem solutions. Different types of models will be discussed, and how they can be applied in different contexts of combinatorics.

In addition, the importance of relating combinatorics to everyday situations and other areas of mathematics will be emphasized. This helps students realize the relevance and applicability of these concepts in different fields, from probability theory to process optimization.

Ultimately, it is expected to provide a comprehensive and practical guide for mathematics teachers, offering effective strategies and inspiring models for teaching combinatorics. It is believed that, by adopting an adequate didactic approach and using appropriate models, teachers will be able to motivate and engage students, contributing to a better learning and understanding of this challenging discipline.

Keywords: combinatorial analysis, mathematics teaching, models, teaching strategies, importance of models

Lista De Ilustrações

Figura 1 Exemplo Diagrama de Árvore	25
Figura 2 Exemplo Diagrama de Árvore 2	25
Figura 3 Diagrama de Árvore de Lanches e Sucos	29
Figura 4 Árvore Possibilidades de Modelos de Carros	30
Figura 5 Árvore de Possibilidades de Números Naturais.....	31
Figura 6 Árvore Possibilidades Letras.....	45
Figura 7 Permutações Circulares com 3 Elementos	53
Figura 8 Rotação do Anel.....	59

Lista de abreviaturas e siglas

UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
IMECC	Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
CCPG	Comissão Central de Pós-Graduação
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
An	Arranjo
Cn	Combinação
Pn	Permutação
AR	Arranjo com Repetição
CR	Combinação com Repetição
PC	Permutações Circulares
PIE	Princípio da Inclusão-Exclusão

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
2. A ANÁLISE COMBINATÓRIA	15
2.1. Primeiros Passos da Análise Combinatória	17
3. A IMPORTÂNCIA DA ESCOLHA DOS MODELOS NO ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA	20
4. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM	23
4.1. Diagrama de Árvore	24
4.2. Princípio Aditivo	25
4.3. Princípio Multiplicativo	26
4.4. Exemplos	28
5. COMBINAÇÕES, ARRANJOS E PERMUTAÇÕES	34
5.1. Permutações	35
5.1.1. Determinação do Número de Permutações	37
5.1.2. Exemplos	38
5.2. Arranjos	45
5.2.1. Determinação do Número de Arranjos	46
5.2.2. Exemplos	47
5.3. Combinações	48
5.3.1. Determinação do Número de Combinações	49
5.3.2. Exemplos	50
6. PERMUTAÇÕES CIRCULARES	53
6.1. Exemplos	55
7. ARRANJOS E PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÕES	60
7.1. Arranjos com Repetições	60
7.1.1. Exemplos	61

7.2. Permutações com Repetições.....	61
7.2.1. Exemplos.....	63
8. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES UNITÁRIOS E COMBINAÇÕES COM REPETIÇÕES.....	65
8.1. Combinações com Repetições.....	67
8.2. Exemplos.....	69
9. PRINCÍPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO.....	73
9.1. Como resolver problemas de Inclusão-Exclusão.....	75
9.2. Exemplos.....	76
10. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	80
REFERÊNCIAS.....	82

1. INTRODUÇÃO

Muito se fala sobre as dificuldades enfrentadas pelos professores para ensinar matemática no ensino médio seja em escolas públicas ou privadas. Tal fato é facilmente constatado a partir dos resultados obtidos pelos estudantes brasileiros em avaliações aplicadas pelo Governo¹ ou testes internacionais².

Mais do que apenas a metodologia aplicada, podemos citar que as dificuldades dos alunos estão na compreensão de conceitos básicos, falhas estas que se remetem a falta de uma base sólida no ensino fundamental, como, por exemplo, dificuldade de interpretação de problemas. Muitos alunos têm dificuldade em compreender as informações fornecidas e aplicar os conceitos aprendidos; e, também, a falta de prática aliada à necessidade de treinamento constante para desenvolvimentos de habilidades e assimilação dos conceitos apresentados, se tornam obstáculos para a aprendizagem.

Outro ponto relevante é a presumida falta de conexão da matemática com a vida real. Muitos estudantes não conseguem entender e aplicar os conceitos aprendidos em sala de aula à sua rotina, e isto porque os alunos veem a matemática como uma disciplina teórica, sem relevância prática com suas vidas cotidianas.

A consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental talvez sejam, entre os objetivos do ensino médio, os que mais amplamente têm se cumprido. O que não significa que isso ocorra da maneira mais apropriada. Isso se deve, em grande parte, à compreensão equivocada de que o ensino médio configura-se exclusivamente como preparatório e como possibilidade de acesso ao ensino superior. Com isso, houve ênfase cada vez maior no acúmulo de informações e pouca atenção para a sistematização e a significação desse conhecimento visando ao desenvolvimento. Que desperta

¹ Neste sentido, os resultados obtidos pelos alunos do Estado de São Paulo no Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) realizados em 2021 foram os mais baixos dos últimos 11 anos. No entendimento do Governo Estadual, o baixo desempenho deu-se em função das “perdas irreparáveis causadas pela pandemia e fechamento das escolas”. Para o ano de 2022, as provas foram aplicadas em novembro, no entanto, ainda não houve consolidação dos resultados. Disponível em <<https://saresp.fde.sp.gov.br/>> acessado em 11 de março de 2023.

² Os resultados obtidos pelos estudantes brasileiros no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) realizado em 2018 foi inferior à média dos estudantes dos países que fazem parte da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). No entanto, para o Governo brasileiro, houve um avanço no resultado alcançado em matemática. Disponível em <<portal.mec.gov.br>> acessado em 11 de março de 2023.

no aluno a consciência crítica e o torna socialmente responsável (BRASIL, pag. 33)

A matemática, acima de tudo, busca fornecer ferramentas para se entender o mundo em que vivemos, desenvolvendo-se a capacidade de raciocínio lógico e crítico, visando aprimorar as habilidades de resolução de problemas, comunicar ideias de forma mais clara e precisa. Fato é que alunos que recebem conteúdos matemáticos prontos tendem a apresentar dificuldade em realizar abstrações, sendo importante que o professor trabalhe o desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

Essa defasagem no ensino de matemática, no qual inclui-se a análise combinatória, pode ser atribuída a diversos fatores, dentre eles podemos citar a falta de abordagens pedagógicas inovadoras que despertem o interesse e a motivação dos alunos, tornando o ensino da matemática mais envolvente e significativo. Além disso, a carência de recursos didáticos adequados, a formação insuficiente dos professores nessa área específica e a falta de conexões entre a teoria e a aplicação prática também contribuem para essa dificuldade de aprendizado.

Diante desse cenário, torna-se fundamental investigar e desenvolver métodos mais eficazes para o ensino da matemática, métodos estes que tenham como objetivo, além de superar a defasagem no ensino, melhorar o desempenho dos alunos. Assim, esta dissertação de mestrado tem como objetivo preencher essa lacuna, explorando abordagens pedagógicas e estratégias de ensino que possam ajudar os estudantes a compreender e aplicar os conceitos de análise combinatória de maneira mais eficiente.

Esta pesquisa busca, então, contribuir para a melhoria do aprendizado de matemática no ensino médio, proporcionando aos alunos uma base sólida em análise combinatória a partir da apresentação de diferentes métodos de resolução de exercício. Espera-se que os métodos e exemplos apresentados possam beneficiar tanto os professores, ao fornecer orientações e recursos práticos para o ensino dessa área, quanto os alunos, ao facilitar sua aprendizagem e promover o desenvolvimento de habilidades matemáticas essenciais.

2. A ANÁLISE COMBINATÓRIA

Lidamos constantemente com eventos que requerem contagem, desde os mais corriqueiros, como contabilizar os dias do mês ou quanto tempo teremos que trabalhar para juntar o dinheiro necessário para comprar algo que seja de nosso interesse, ou mesmo determinar a melhor forma de distribuí-lo para o pagamento das despesas, em comum, todos necessitam tomadas de decisões coerentes, e para tal, a análise combinatória irá apresentar alguns métodos de contagem que irão auxiliar.

A análise combinatória se torna, assim, consequência do desenvolvimento de métodos que permitem contar, de forma indireta, o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

De forma usual, definimos análise combinatória como sendo o estudo das combinações, dos arranjos e das permutações. No entanto, mais do que apenas lidar com problemas de contagem e enumeração de objetos em conjuntos finitos (MORGADO et al, 2004), a análise combinatória é utilizada não apenas em situações cotidianas, mas, também, em diversas áreas da matemática, tais como teoria dos números, probabilidade e estatística e, fora dela, em engenharia, física e ciências da computação.

Os problemas de contagem aparecem em matemática e ciência da computação. Por exemplo, devemos contar as possibilidades favoráveis de um experimento e o total de possibilidades desse experimento para determinar a probabilidade dos eventos discretos. Precisamos contar o número de operações usado por um algoritmo para estudar seu tempo de complexidade (ROSEN, 2010, p.356)

Podemos dizer, assim, que a Análise Combinatória é a área da matemática que analisa estruturas e relações discretas. Para Morgado et al (2004, p.2):

Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória são:

1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um determinado conjunto finito que satisfazem certas condições.

2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito que satisfazem certas condições dadas.

As técnicas utilizadas para resolução de problemas na análise combinatória incluem o uso de princípios de contagem (multiplicativo e aditivo), e a utilização de modelos para combinações, arranjos e permutações. Mas, mais do que apenas utilizar fórmulas pré-definidas, os problemas de análise combinatória requerem a compreensão do cenário que se apresenta, seja ele uma situação de arranjo, combinação ou permutação. Para tanto, faz-se necessário treino e criatividade para sua elucidação, e esta tarefa, muitas vezes, é mais difícil que os cálculos em si. Assim, torna-se imprescindível que o professor conheça a realidade de seus alunos, utilizando exemplos aplicáveis a suas rotinas, preocupando-se não apenas com o resultado, mas com o processo utilizado para sua resolução (METZ, 2018, p.13).

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução (MORGADO et al, 2004, p. 3)

Para resolução dos problemas que envolvem análise combinatória, é fundamental que o professor tenha em mente a importância de seguir um roteiro. A seguir, como sugestão, apresentamos alguns pontos que devem ser observados:

1. Iniciar explicando os conceitos básicos de análise combinatória, tais como permutações, combinações, arranjos e também o de fatorial. É essencial que o professor se certifique que os alunos compreendam o significado desses conceitos e como são usados para contar o número de possibilidades;
2. Utilizar exemplos simples e cotidianos para ilustrar os conceitos básicos de análise combinatória. Por exemplo, pedir aos alunos contarem de quantas maneiras diferentes podem escolher um prato principal, um acompanhamento e uma bebida em

um restaurante, ou de quantas formas podem combinar as roupas: calças, blusas e sapatos.

3. Fazer exercícios práticos, sem o uso de fórmulas matemáticas. Por exemplo, peça-lhes para contar de quantas maneiras diferentes podem escolher uma equipe com 6 jogadores a partir de um grupo de 12 pessoas. Neste tópico, a utilização do diagrama de árvore poderá facilitar o entendimento por parte dos alunos.

4. Encorajar os alunos a desenvolverem sua intuição e a pensarem criativamente. Questioná-los como abordariam um problema de análise combinatória sem o uso de fórmulas matemáticas.

5. Explicar que a aplicação do modelo da análise combinatória correto auxiliará na resolução de problemas complexos de contagem de maneira eficiente e precisa, evitando erros e obtendo resultados confiáveis. O modelo permitirá visualizar e organizar as diferentes possibilidades, identificar padrões e propriedades dos arranjos, combinações ou permutações, e, assim, será possível aplicar métodos específicos para calcular o número exato de configurações possíveis.

2.1. Primeiros Passos da Análise Combinatória

Os primeiros registros conhecidos de problemas de contagem são encontrados em textos antigos, como os Vedas da Índia³, que foram escritos por volta de 1500 a.C. O Registro mais antigo de análise combinatória surge no século VI a.C. para resolver problemas envolvendo a contagem de possibilidades, dentre elas a situação na qual, utilizando-se quatro essências, considerando haver 16 disponíveis, seria possível produzir 1.820 perfumes distintos (VAGHI, 2022, p. 84.).

Na Grécia antiga, o filósofo Pitágoras e seus seguidores estavam interessados em números e proporcionalidades; também em música e harmonia, e muitos de seus estudos envolveram a análise de padrões e combinações.

³ Por várias gerações os ensinamentos do povo Indiano eram passados de forma oral, através de versos conhecidos como Vedas. São nestes versos, conhecidos como *Sulba-sutras*, que temos os primeiros registros da matemática hindu, destacando-se elementos de geometria e a regra que conhecemos como “Teorema de Pitágoras”. Ademais, vale lembrar que a civilização hindu é responsável pelo sistema numérico decimal que utilizamos até hoje, que trouxe consigo a facilidade para resolver, por exemplo, operações aritméticas e com frações

O método pitagórico buscava descrever o mundo e o universo de forma harmoniosa, acreditando-se que os corpos celestes estavam dispostos de forma uniforme, e com proporções que corresponderiam ao intervalo da oitava musical. (VAGHI, 2022, p. 28).

No século XIII, o italiano Leonardo Fibonacci é considerado o matemático ocidental mais talentoso da idade Média. Foi através dele que se introduziu os algarismos indo-arábicos na Europa, bem como a famosa sequência de Fibonacci, que nada mais é do que uma sequência numérica em que cada termo é a soma dos dois números anteriores. Ele observou esta sequência na reprodução de coelhos, mas também está presente em muitos contextos diferentes, incluindo a natureza, a música e a arte, e é usada em muitos problemas de análise combinatória.

A França era em meados do século XVII considerada o centro da matemática. Dentre os nomes mais proeminentes, destacam-se René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

Blaise Pascal, em 1660, introduziu na comunidade científica o conceito de probabilidade e desenvolveu o "Triângulo de Pascal", que é uma matriz triangular de números, usada em muitos problemas de combinatória. Os elementos do triângulo de Pascal são combinações binomiais, que são os coeficientes que aparecem na expansão do binômio $(a+b)^n$.

A descoberta do triângulo de Pascal com sua fórmula é atribuída a Blaise Pascal, que o descreveu no século XVII, mas já era conhecido por muitos matemáticos que o precederam. No século IV a.C., o matemático grego Euclides mencionou o caso especial do teorema binomial para o caso do expoente 2, assim como no século III a.C., o matemático indiano Pingala já o havia estendido a ordens superiores.

No século X, o matemático indiano Halayudha em seu Meru-Prastara, e o matemático persa Al-Karaji usaram a indução matemática para fornecer provas do que seria chamado binômio de Newton, e do triângulo de Pascal.

Além disso, na Idade Média esses conhecimentos já faziam parte da matemática chinesa, muito mais avançada do que a europeia. Também fórmulas para permutações e combinações já haviam sido descobertas pelo judeu francês Levi Ben Gershon (1321). (VAGHI, 2022, p.196)

No século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler estudou a análise combinatória em relação à teoria dos números, e desenvolveu várias técnicas e fórmulas para

resolver problemas de contagem. Ele também é conhecido por ter feito contribuições importantes para a teoria dos grafos, área da matemática que lida com a representação de objetos e suas relações.

Outro matemático influente na história da análise combinatória foi Pierre-Simon Laplace, um cientista francês do século XVIII. Laplace introduziu o conceito de probabilidade e combinou-o com técnicas de contagem. Ele formulou a chamada "regra do produto", que permite calcular o número de possibilidades em sequências de eventos independentes. A regra do produto é amplamente utilizada em análises probabilísticas e estatísticas.

A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é, portanto, uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador, o número de todos os casos possíveis. (MORGADO et al, 2004, p.119 apud Pierre Simon Laplace Ensaio filosófico sobre as Probabilidades)

Desde então, a análise combinatória tem sido usada em muitas áreas da matemática, incluindo álgebra, análise, teoria dos números, geometria, probabilidade e estatística, e tem aplicações em muitas outras áreas, como ciência da computação, física, biologia e engenharia.

3. A IMPORTÂNCIA DA ESCOLHA DOS MODELOS NO ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é um ramo fundamental da matemática que estuda a contagem e a organização de elementos em conjuntos, desempenhando um papel crucial no desenvolvimento do raciocínio lógico, na resolução de problemas e na aplicação prática em diversas áreas do conhecimento, sendo relevante, no contexto educacional, apresentar e explorar os modelos da análise combinatória, pois eles facilitarão a compreensão dos conceitos e permitirão aos estudantes resolver problemas de forma mais eficiente.

A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem.

Por exemplo, a operação de adição é sempre introduzida em conexão com um problema de contagem: (MORGADO et al, 1991, p. 17)

Importante destacar que a análise combinatória lida com conceitos abstratos, como permutações, arranjos e combinações. E, essas ideias podem ser, eventualmente, de difícil compreensão pelos alunos sem uma explicação clara e exemplos adequados.

Diante disto, os modelos fornecerão representações visuais e concretas destes conceitos, tornando-os mais acessíveis e compreensíveis. Por exemplo, ao apresentar o conceito de permutação, o uso de um modelo simples, como fichas ou cartas, pode ilustrar as diferentes ordens em que os elementos podem ser organizados.

Desta forma, a análise combinatória irá envolver uma série de métodos e técnicas, tais como o princípio fundamental da contagem (PFC) – princípio da multiplicação e princípio da adição–, arranjo, permutação e combinação, dentre outros. E, todos estes conceitos podem se tornar confusos se não forem explicados de forma clara e, principalmente, relacionados a situações do cotidiano. Assim, a abordagem, pelo professor, de situações que conectam a

análise combinatória com problemas do mundo real irão ajudar os alunos a visualizar e compreender melhor esses métodos.

A prática será essencial para o aprendizado da análise combinatória, sendo fundamental a utilização de exemplos claros e fáceis, bem como exercícios bem estruturados que permitam que os estudantes possam aplicar os conceitos aprendidos e desenvolvam habilidades para resolução dos problemas.

Ou seja, uma abordagem didática clara e acessível torna-se fundamental para o ensino. É importante que os professores apresentem os conceitos gradualmente, utilizando uma linguagem simples e evitando terminologia matemática complexa. Além disso, o uso de recursos visuais, como diagramas e tabelas, pode auxiliar na compreensão dos alunos. Uma abordagem didática eficiente irá envolver a criação de um ambiente de aprendizagem ativo, que incentiva a participação dos alunos e a exploração de diferentes estratégias de resolução.

Assim, a utilização de modelos auxiliará os estudantes a visualizarem os problemas de análise combinatória, o que, por sua vez, ajudará na compreensão dos enunciados e na identificação de padrões. O uso de representações gráficas, como diagramas ou tabelas, torna possível organizar as possibilidades de forma clara e estruturada. Essa visualização facilitará a análise dos problemas e a identificação de estratégias para resolvê-los.

Os modelos fornecerão aos estudantes uma abordagem sistemática para a solução desses problemas, permitindo que identifiquem as informações relevantes, façam as contagens corretas e apliquem as fórmulas adequadas. Com eles, os estudantes podem visualizar as etapas do raciocínio e acompanhar o processo de resolução de forma mais simples e estruturada.

Além disto, estimularão a criatividade dos estudantes ao lidar com problemas de análise combinatória. Ao apresentar diferentes modelos e abordagens, é possível encorajar os estudantes a explorarem estratégias alternativas, a pensar fora da caixa e a encontrar soluções inovadoras. A variedade de modelos disponíveis permite que os estudantes desenvolvam uma visão mais ampla e flexível, tornando-se capazes de aplicar a análise combinatória em situações diversas.

Os modelos desempenharão um papel fundamental no ensino da análise combinatória, fornecendo aos estudantes uma melhor compreensão dos conceitos, permitindo a visualização e a representação dos problemas, facilitando a resolução de exercícios e estimulando a criatividade.

Portanto, torna-se importante incentivar a utilização de modelos no ensino da análise combinatória, visando aprimorar a aprendizagem e preparar os estudantes para os

desafios futuros. Sua utilização possibilitará uma base sólida para lidar com problemas mais complexos nesta disciplina, propiciando aos alunos desenvolverem habilidades de raciocínio lógico, pensamento crítico para resolução de problemas e também os preparando para enfrentar desafios futuros em suas trajetórias acadêmicas e profissionais.

4. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

A Teoria da Contagem pretende, de forma breve, transformar um grande problema em outros menores e similares que sejam mais fáceis de analisar: a análise combinatória torna capaz a quantificação de objetos de um dado conjunto, sem que haja a necessidade de elencar todos seus elementos.

Teoricamente, o princípio da contagem se baseia na ideia de que, se determinado acontecimento ocorre em n etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda, de k_2 maneiras diferentes e assim sucessivamente, então, o número total de T maneiras de o fato ocorrer é dado por:

$$T = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \dots k_n$$

Concluimos, assim, que, se um acontecimento, de acordo com o princípio fundamental da contagem, ocorre em duas situações sucessivas e independentes, o número de ocorrências possíveis deste acontecimento é dado pelo produto entre as quantidades de cada situação (METZ, 2018, p. 16)

Os princípios aditivo e multiplicativo são conceitos fundamentais na matemática elementar aplicada à contagem de eventos. São ferramentas importantes que permitem aos alunos resolverem problemas de probabilidade e combinatória de maneira eficiente e desenvolverem habilidades em raciocínio lógico e matemático.

Quando falamos em princípio da contagem, estamos falando de duas ferramentas importantes na matemática: princípio aditivo e princípio multiplicativo.

Como o nome já diz, o princípio da contagem consiste em somar ou multiplicar escolhas. Ao somarmos escolhas, estamos utilizando o princípio aditivo, e, obviamente, ao multiplicar as escolhas, estamos utilizando o princípio multiplicativo. (PETROLI, 2020, p. 147)

Santos (2007, p.56) enfatiza a importância da compreensão desses princípios em relação à resolução de problemas de contagem, no entanto, sua utilização para alguns problemas

pode tornar-se trabalhosa, e, para tal, a dedução da fórmula para sua resolução pode se tornar mais efetiva.

Muitos problemas de contagem podem ser resolvidos encontrando-se o número de maneiras de organizar um número específico de elementos distintos de um conjunto de determinado tamanho, em que a ordem desses elementos é relevante. Muitos outros problemas de contagem podem ser resolvidos encontrando-se o número de maneiras para escolher um número determinado de elementos a partir de um conjunto de determinado tamanho, em que a ordem dos elementos escolhidos não é relevante. (ROSEN, 2018, p. 376)

4.1. Diagrama de Árvore

Problemas de contagem poderão ser resolvidos utilizando-se o diagrama de árvore. Este diagrama consiste de uma raiz, de galhos que partirão desta raiz e, se houver, galhos adicionais sucessivos, terminando em folhas. Para utilizar as árvores na contagem, usamos os galhos para representar cada escolha possível. Por sua vez, representamos as saídas pelas folhas, que serão os finais dos galhos, sem que outros comecem a partir deles.

Note que para resolver um problema de contagem, o número de escolhas necessárias para alcançar uma folha pode variar:

Um diagrama em árvore é um dispositivo usado para enumerar todos os possíveis resultados de uma sequência de eventos, onde cada evento pode ocorrer em uma quantidade finita de maneiras. (LIPSCHUTZ e SEYMOUR, 2013, p.104)

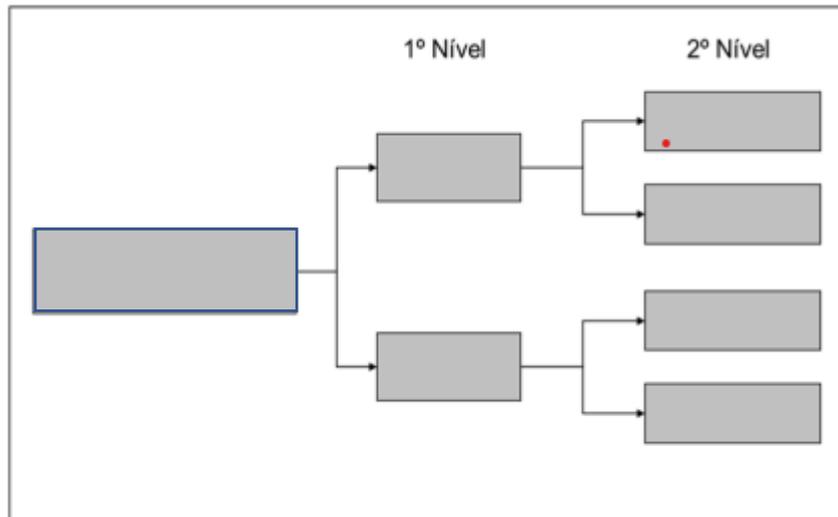


Figura 1 Exemplo Diagrama de Árvore

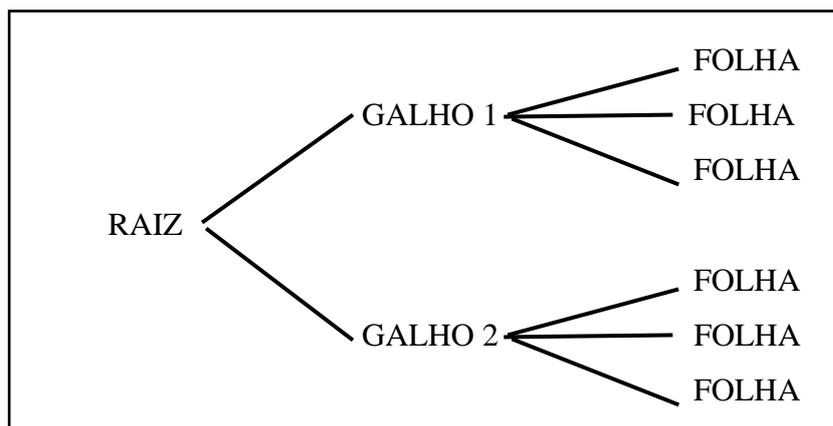


Figura 2 Exemplo Diagrama de Árvore 2

4.2. Princípio Aditivo

O princípio aditivo afirma que a contagem total de eventos que podem ocorrer em um conjunto de situações é igual à soma das contagens dos eventos individualmente.

Para Rosen (2010, p. 359):

Se uma tarefa puder ser realizada em uma das n_1 formas ou em uma das n_2 formas, em que nenhum dos elementos do conjunto das n_1 formas é o mesmo

que algum elemento do conjunto das n_2 formas, então há $n_1 + n_2$ formas de realizar a tarefa.

Ou seja, se existem n maneiras de realizar um evento A e m maneiras de realizar um evento B, existe, então, $n + m$ maneiras de realizar pelo menos um dos eventos. Por exemplo, se há 2 camisas azuis e 4 camisas verdes em um guarda-roupa, então há 6 camisas no total

Em outras palavras, o princípio aditivo permite somar as possibilidades de dois ou mais eventos independentes para se obter o número total de resultados possíveis.

Para Wagner (2015), quando tratamos de eventos não interferentes, o princípio aditivo é

"[...] a regra que estabelece que, se dois eventos têm possibilidades de ocorrência que não se interferem, a soma dos números de possibilidades de cada evento é o número total de possibilidades de ocorrência de pelo menos um dos eventos".

O princípio aditivo poderá ser escrito, também, em termos de conjunto, de modo que se $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ são conjuntos finitos disjuntos, então o número de elementos da união desses conjuntos é a soma dos números de elementos nos conjuntos. Segundo Rosen (2010, p. 360):

[...] Para relacionar isto à nossa proposição da regra da soma, note que há $|A_i|$ maneiras para escolher um elemento de A_i para $i = 1, 2, \dots, m$. Sendo os conjuntos disjuntos, quando selecionamos um elemento de um dos conjuntos A_i , não podemos selecionar também um elemento de um conjunto diferente A_j . Consequentemente, pela regra da soma, por não existir elementos comuns em dois desses conjuntos, o número de maneiras de escolher um elemento de um dos conjuntos, que é o número de elementos da união é

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|.$$

4.3. Princípio Multiplicativo

Por sua vez, o princípio multiplicativo, também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem (PFC), demonstra que se existem n maneiras de realizar um evento A e m maneiras de realizar um evento B, então existem $n \cdot m$ maneiras de realizar ambos os eventos. Por exemplo, se há 2 camisas azuis e 4 calças pretas em um guarda-roupa, então há 8 combinações possíveis de uma camisa azul com uma calça preta.

Para Dante (2011, p. 277)

Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n , então o número de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$.

Bezerra (2018, p. 9) define como Princípio multiplicativo como:

Se uma tarefa (um evento, um acontecimento, etc) é composta de duas etapas sucessivas, sendo que:

- o número de possibilidades de realizar a 1ª etapa é n_1 ;
- o número de possibilidades de realizar a 2ª etapa é n_2 ,

então, o número total de possibilidades de executar a tarefa completa é dado pelo produto $n_1 \times n_2$.

O PFC pode ser generalizado e estendido para ações compostas de mais de duas etapas sucessivas. Ou seja, se uma ação é constituída de k etapas sucessivas ($k \geq 2$), sendo que a primeira pode ser realizada de n_1 maneiras, a segunda de n_2 maneiras, a terceira de n_3 maneiras, e assim por diante, até a última, que pode ser realizada de n_k maneiras, então o número de maneiras de realizar a ação é dado pelo produto $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots \cdot n_k$. Para Bezerra (2018, p.10)

Se uma tarefa compõe-se de k etapas sucessivas E_1, E_2, \dots, E_k e há:

- n_1 modos de executar a etapa E_1 ;
- n_2 modos de executar a etapa E_2 ;
- n_3 modos de executar a etapa E_3 ;

...

n_k modos de executar a etapa E_k ,

então, o número de possibilidades de executar a tarefa completa é dado pelo produto:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$$

Por fim, segundo Bezerra (2018, p. 11), para a resolução de problemas que envolvem o Princípio Multiplicativo é importante que se siga alguns passos:

- (1) Colocar-se no lugar da pessoa que deve executar a tarefa;
- (2) Dividir a tarefa em etapas mais simples;
- (3) Identificar as restrições em cada etapa.

4.4. Exemplos

Exemplo 1. Uma lanchonete oferece três tipos de lanches e quatro tipos de suco. Quantas são as opções para quem escolher um lanche e um suco?

Representando os três tipos de lanches por L_1, L_2, L_3 e os quatro tipos de sucos por S_1, S_2, S_3 e S_4 tem-se as seguintes opções de escolha:

Opção 1: $L_1 S_1$	opção 5: $L_2 S_1$	opção 9: $L_3 S_1$
Opção 2: $L_1 S_2$	opção 6: $L_2 S_2$	opção 10: $L_3 S_2$
Opção 3: $L_1 S_3$	opção 7: $L_2 S_3$	opção 11: $L_3 S_3$
Opção 4: $L_1 S_4$	opção 8: $L_2 S_4$	opção 12: $L_3 S_4$

Fazendo uma simples contagem obtém-se 12 opções para a escolha de um lanche e um suco.

A determinação dessas escolhas também pode ser feita através do esquema detalhado a seguir, conhecido como árvore de possibilidades (ou diagrama de árvore):

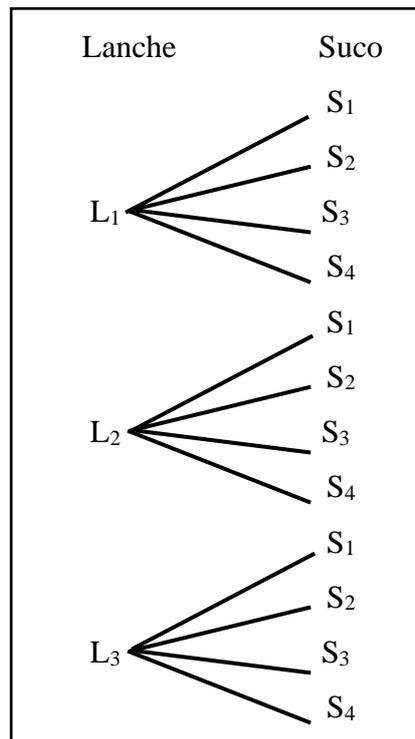


Figura 3 Diagrama de Árvore de Lanches e Sucos

Fazendo a contagem através das ramificações da árvore de possibilidades, obtém-se o número de opções para a escolha de um lanche e um suco.

Observemos que fazer uma opção neste caso representa uma ação constituída de duas etapas sucessivas: A primeira é a escolha do tipo de lanche (três possibilidades), e a segunda é a escolha do tipo de suco (quatro possibilidades). Para cada tipo de lanche escolhido há quatro maneiras de escolher o tipo de suco. Ou seja, a opção pode ser feita de $3 \cdot 4 = 12$ maneiras distintas.

Exemplo 2. Uma montadora fabrica três modelos de um carro, com dois tipos de motor e em três tonalidades de cor. Quantas opções de escolha terá uma pessoa que queira comprar esse carro?

Representaremos os três modelos, os dois tipos de motor e as três cores desse carro, respectivamente, por $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3$ e esquematizaremos a árvore de possibilidades.

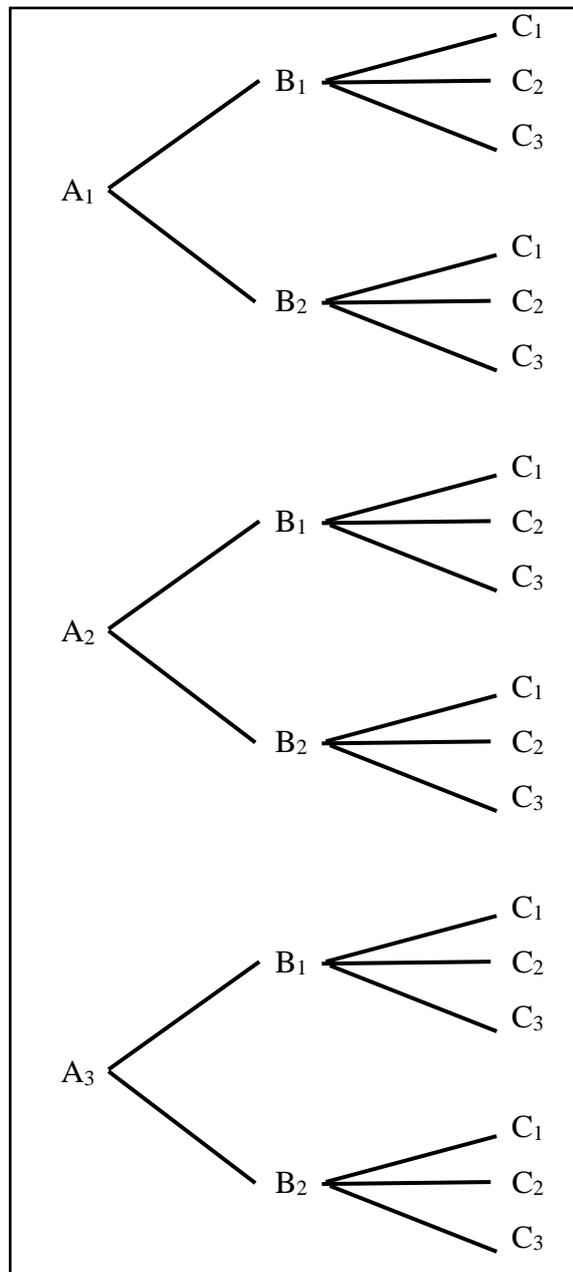


Figura 4 Árvore Possibilidades de Modelos de Carros

Fazendo a contagem através das ramificações da árvore de possibilidades, obtém-se 18 opções para a escolha deste carro da montadora.

Neste caso, fazer uma escolha representa uma ação constituída de três etapas sucessivas. O modelo pode ser A₁ ou A₂ ou A₃ (três possibilidades); para cada uma destas possibilidades, o motor pode ser escolhido de duas maneiras B₁ ou B₂. Para cada uma das

possibilidades anteriores, a cor pode ter três opções de escolha C_1 ou C_2 ou C_3 . Têm-se então $3.2.3 = 18$ opções para a escolha de um carro.

Exemplo 3. Calcule a quantidade de números naturais de três algarismos que começam por 4 ou 6, terminam por 8 ou 9 e tem um primo ímpar por algarismo das dezenas.

Esquematisando a árvore de possibilidades:

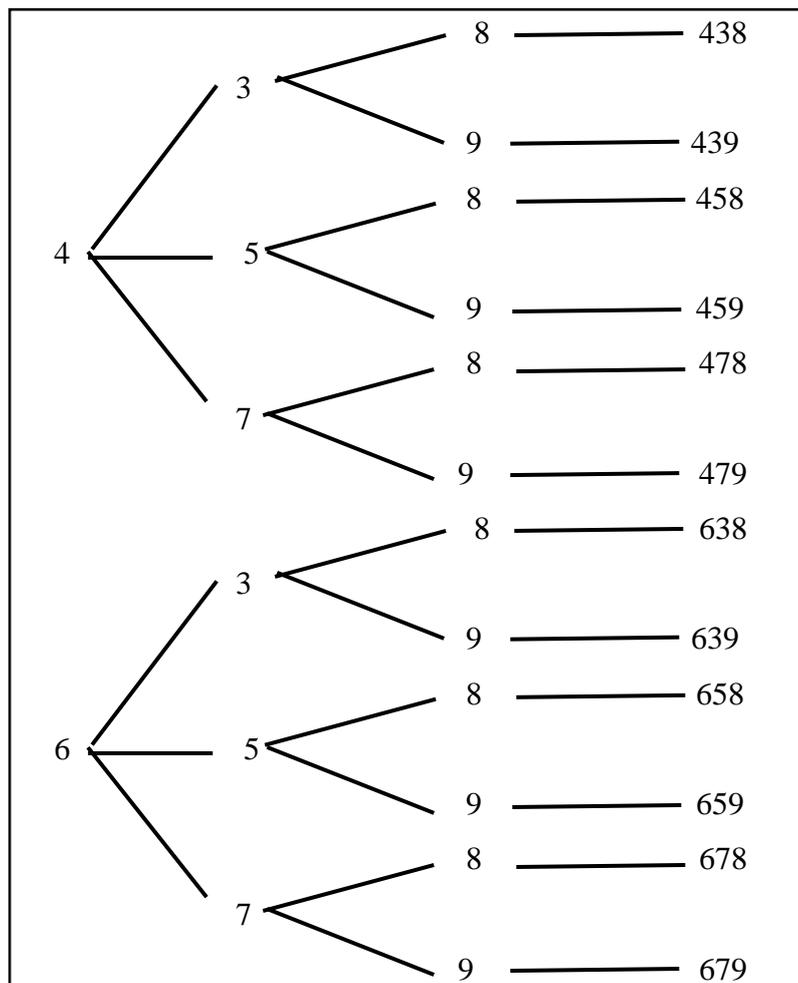


Figura 5 Árvore de Possibilidades de Números Naturais

Através das ramificações da árvore de possibilidades, verifica-se que podem ser obtidos 12 números nas condições descritas no enunciado.

Observemos que obter um dos números citados é uma ação composta de três etapas sucessivas: escolher o algarismo das centenas, o das dezenas e o das unidades.

O algarismo das centenas pode ser 4 ou 6 (duas possibilidades); para cada uma destas possibilidades, o algarismo das dezenas pode ser escolhido de três maneiras (3 ou 5 ou

7). Para cada uma das possibilidades anteriores, o algarismo das unidades tem duas opções de escolha (8 ou 9).

Tem-se então $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ números nas condições descritas no enunciado.

Exemplo 4. Mil candidatos participam de um concurso. De quantas maneiras podem ser obtidos os dois primeiros lugares?

Há 1000 estudantes para ocupar o primeiro lugar. Tendo um deles ocupado essa posição, restam 999 para ocupar o segundo lugar. Pelo PFC tem-se que os dois primeiros lugares podem ser obtidos de $1000 \cdot 999 = 999000$ maneiras distintas.

Exemplo 5. Três pessoas tomam um ônibus com oito lugares vagos. De quantos modos elas podem ocupar esses lugares?

Três dos oito lugares vagos devem ser escolhidos. Para a escolha do primeiro lugar tem-se 8 possibilidades. Uma vez feita esta escolha, o segundo lugar a ser escolhido terá 7 possibilidades. Restam 6 lugares para a última escolha (6 possibilidades). Portanto, pelo PFC tem-se $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ modos para as três pessoas ocuparem três dos oito lugares vagos.

Exemplo 6. De quantas maneiras distintas uma prova com cinco testes de múltipla escolha pode ser resolvida, se cada teste tem quatro alternativas?

Para cada um dos testes há 4 opções de escolha, e como são 5 testes, pelo PFC, conclui-se que esta prova pode ser resolvida de $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ maneiras.

Exemplo 7. Com os algarismos 2, 3, 6, 7 e 9:

- a) quantos números naturais de quatro algarismos podem ser formados?
- b) quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados?

a) Há 5 possibilidades para a escolha do algarismo das unidades de milhar, 5 possibilidades para a escolha do algarismo das centenas, 5 possibilidades para a escolha do algarismo das dezenas e outras 5 possibilidades para a escolha do algarismo das unidades.

Portanto, tem-se $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ possibilidades no total, ou seja, podem ser formados 625 números naturais de quatro algarismos com os algarismos 2, 3, 6, 7 e 9.

b) Como os algarismos devem ser distintos, uma vez escolhido um deles, o mesmo não poderá mais ser escolhido. Há 5 possibilidades para a escolha do algarismo das unidades de milhar. Uma vez realizada esta escolha, restam 4 algarismos, pois 1 algarismo já foi escolhido. Há, então, 4 possibilidades para a escolha do algarismo das centenas. Como dois algarismos já foram escolhidos, restam 3 possibilidades de escolha para o algarismo das dezenas. Após esta etapa restam apenas 2 algarismos para a escolha do algarismo das unidades (2 possibilidades).

Portanto, tem-se 5.4.3.2 possibilidades, isto é, podem ser formados 120 números naturais de quatro algarismos distintos.

Exemplo 8. Com os algarismos 0, 2, 3, 5, 6 e 8.

- a) quantos números naturais de quatro algarismos podem ser formados?
- b) quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados?

a) Há 5 possibilidades para as unidades de milhar (o algarismo 0 não é permitido, já que o número deverá ter 4 algarismos), 6 para as centenas, 6 para as dezenas e 6 para a unidades. Portanto, podem ser formados $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$ números.

b) Há 5 possibilidades para as unidades de milhar. Como o número deverá ter os quatro algarismos distintos, há 5 possibilidades para as centenas (o algarismo 0 é permitido. Na terceira etapa restam 4 algarismos para a escolha do algarismo das dezenas (4 possibilidades) e na última etapa restam 3 algarismos para a escolha dos algarismos da unidade (3 possibilidades).

Portanto, podem ser formados $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ números.

5. COMBINAÇÕES, ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

Os agrupamentos a seguir apresentados, combinação, arranjo e permutação, exigirão uma atenção especial dos alunos para identificar qual deverá ser utilizado. Será importante observar se a ordem dos elementos fará ou não diferença no resultado, pois é este o fato que vai determinar se trata-se de um arranjo ou de uma combinação.

Outro ponto importante a ser observado é a necessidade de perceber se em uma permutação há elementos repetidos, pois esta situação fará diferença na hora de resolvermos os problemas.

Desta forma, torna-se fundamental que o professor explore tais conceitos, devendo se concentrar não apenas na utilização de fórmulas, mas, também, na interpretação dos problemas. (METZ, 2018., p. 40)

Resumidamente, em linguagem matemática, as combinações são subconjuntos de um dado conjunto, de modo que, dado um conjunto com n elementos, denomina-se combinação dos n elementos, tomados p a p , a qualquer subconjunto com p desses elementos.

Por sua vez, os arranjos são sequências de termos distintos, os quais são escolhidos entre os elementos de um dado conjunto com n elementos, denominando-se arranjo dos n elementos, tomados p a p , a qualquer sequência de elementos distintos com p desses elementos.

Notemos, por fim, que duas combinações são distintas quando possuem pelo menos um elemento distinto; e dois arranjos são distintos quando têm pelo menos um elemento distinto ou os mesmos elementos em ordens distintas.

A ordem dos elementos é fundamental nos arranjos, enquanto é indiferente nas combinações. Assim, é imprescindível que o estudante seja capaz de perceber esta sutil diferença entre estes conceitos, que se resume, em suma, na importância ou não da ordem.

As Combinações e os Arranjos de n elementos, tomados p a p , são representados, respectivamente, por $C_{n,p}$ e $A_{n,p}$:

Prova-se que uma combinação de n elementos, tomados p a p , é dada por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Por outro lado, permutando-se os p elementos de cada combinação, obtém-se $p!$ arranjos. Aplicando-se o PFC, temos o número total de arranjos de n elementos, tomados p a p . Portanto,

$$A_{n,p} = p! C_{n,p} = p! \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Isto é,

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Observemos, particularmente, que arranjar n elementos, tomados n a n , é permutar esses elementos. Ou seja, $A_{n,n} = P_n$.

Um conjunto com n elementos tem n subconjuntos unitários (que possuem um único elemento). Utilizando a fórmula das combinações deve-se ter, portanto, $C_{n,1} = n$, ou seja:

$$\frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = n$$

As fórmulas para o cálculo das combinações e arranjos de n elementos, tomados p a p , são definidas para n e p naturais, com $0 \leq p \leq n$. Em particular:

$$C_{n,0} = C_{n,n} = 1, C_{n,1} = n, A_{n,0} = 1, A_{n,1} = n, A_{n,n} = n! = P_n.$$

Trataremos, a seguir, sobre cada um destes agrupamentos.

5.1. Permutações

A resolução de certos problemas de contagem usando apenas o PFC pode ser, eventualmente, muito complicada. Para simplificar a busca pela solução destes problemas,

desenvolveram-se técnicas de contagem de determinados agrupamentos dos elementos de um dado conjunto.

Iniciaremos o estudo destas técnicas com o agrupamento chamado de Permutação. Vale lembrar que “permutar” é sinônimo de “trocar”, desta forma, intuitivamente, nos problemas de contagem devemos associar permutação à noção de embaralhar, de trocar os objetos de posição (DANTE, 2010).

Outro aspecto relevante é que a permutação aparecerá nos casos em que se utilizam todos os elementos apresentados em um dado problema, de modo que, a alteração da posição de um dado elemento formará outra permutação.

Qualquer disposição com um conjunto de n objetos em uma dada ordem é chamada de permutação dos objetos (tomados todos de uma vez). Uma disposição de quaisquer r ($r \leq n$) desses objetos em uma dada ordem é chamada de “ r -permutação” ou “permutação de n objetos tomados r por vez” (LIPSCHUTZ e SEYMOUR, 2013, p.100)

Uma permutação simples de n objetos distintos nada mais é do que uma das sequências ordenadas de n elementos em que os objetos podem ser colocados.

Neste sentido, diversos problemas de permutação envolvem a contagem de anagramas que podem ser formados a partir de dada palavra. Para criar um anagrama, você deve utilizar todas as letras da palavra original e pode permutá-las de diferentes maneiras para formar novas palavras. Em algumas situações, o anagrama formado será uma palavra diferente, mas, em outras, será apenas uma disposição das letras, sem que se formem palavras.

Anagrama é a quantidade de palavras formadas, com ou sem sentido, utilizando as letras de outra palavra. Por exemplo, com a palavra AMOR podemos formar os seguintes anagramas

- Iniciando com a letra A: AMOR AMRO AOMR AORM ARMO AROM
- Iniciando com a letra M: MAOR MARO MOAR MORA MRAO MROA
- Iniciando com a letra O: OAMR OARM OMAR OMRA ORAM ORMA
- Iniciando com a letra R: RAMO RAOM RMAO RMOA ROAM ROMA

Então concluímos que, com as letras da palavra AMOR, podemos obter 24 anagramas (METZ, 2018, p. 18).

5.1.1. Determinação do Número de Permutações

Em muitos problemas de contagem o que interessa é a quantidade de certos agrupamentos que podem ser formados com determinados elementos de um conjunto e não quais são esses agrupamentos. Em geral para determinar essa quantidade não é necessário que formemos uma por uma e, em seguida, as contemos. Em muitos casos, fazer isto é trabalhoso e até mesmo inviável.

Determinaremos, então, uma fórmula para calcular o número de permutações que podem ser formadas com n elementos distintos. Esse número é indicado por P_n .

Qualquer conjunto com n elementos pode ser colocado em correspondência um para um com o conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Podemos listar as permutações de qualquer conjunto de n elementos ao gerar permutações dos n menores números inteiros positivos e então colocar novamente esses inteiros com os elementos correspondentes. [...]

Em outras palavras, uma permutação do conjunto dos n menores números inteiros positivos precede (na ordem lexicográfica ou alfabética) uma segunda permutação se o número nesta permutação na primeira posição, em que as duas permutações discordam, é menor que o número naquela posição da segunda permutação. (ROSEN, 2018, p. 403)

De forma prática, vejamos o seguinte exemplo:

Sejam $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ os n elementos distintos. Formar uma permutação com estes elementos é uma ação composta de n etapas sucessivas:

1ª etapa: escolher o primeiro elemento da permutação. Há n possibilidades para esta etapa (a_1 ou a_2 ou a_3 ... ou a_n).

2ª etapa: escolher o segundo elemento da permutação. Observar que, para cada possibilidade da 1ª etapa tem-se $(n - 1)$ possibilidades nesta 2ª etapa.

Por exemplo, se o 1º elemento for a_5 , então o 2º elemento poderá ser a_1 ou a_2 ou a_3 ou a_4 ou a_6 ou a_7, \dots ou a_n .

3ª etapa: escolher o terceiro elemento da permutação. Do mesmo modo que na 2ª etapa, para cada par de elementos escolhidos anteriormente tem-se $(n - 2)$ possibilidades nesta 3ª etapa.

Por exemplo, se os elementos já escolhidos foram a_5a_2 , o 3º elemento poderá ser a_1 ou a_3 ou a_4 ou a_6 ou $a_7 \dots$ ou a_n .

E assim, procede-se sucessivamente até a n ésima etapa, quando se coloca o último elemento da permutação, havendo, portanto, uma única possibilidade para a escolha do último elemento.

Pelo PFC, conclui-se que podem ser formadas $n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1$ permutações distintas, ou seja, existem $n!$ permutações dos n elementos distintos.

Uma permutação, será, então, um arranjo ordenado de elementos distintos. Por exemplo, as permutações de 1, 2 e 3 são 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Esses agrupamentos ordenados, que se diferem pela ordem, recebem o nome de Permutações Simples. Indicando-se por P_n o número de permutações de n elementos:

$$P_n = n.(n-1).(n-2) \dots 3.2.1$$

Desta forma, observamos que a fórmula para calcular o número de permutações de n objetos é $n!$, onde $n!$ é o fatorial de n .

5.1.2. Exemplos

Exemplo 1. Escreva as permutações formadas com os algarismos 2, 3 e 6.

Para encontrar todas as permutações formadas pelos algarismos 2, 3 e 6, precisamos considerar todas as combinações possíveis desses três números. Vamos listar todas as permutações:

263

326

362

632

623

Estas são todas as possibilidades de rearranjo dos algarismos 2, 3 e 6. Cada uma dessas disposições representam uma permutação diferente.

Exemplo 2. Anagrama de uma palavra é qualquer palavra formada pelas mesmas letras dessa palavra, tendo ou não significado na linguagem comum. Ou seja, as permutações das letras de uma palavra formam seus anagramas. Quais os anagramas possíveis para a palavra UVA?

No caso da palavra “UVA”, existem três letras diferentes: U, V e A.

Para encontrar os anagramas da palavra “UVA”, podemos considerar todas as permutações possíveis dessas três letras. Vamos listar todas as permutações:

UVA

UAV

VUA

VAU

AVU

AUV

Essas serão, então, todas as possibilidades de rearranjo das letras U, V e A. E, cada uma dessas permutações é um anagrama da palavra “UVA”.

Exemplo 3. De quantas maneiras três pessoas (A, B e C) podem se posicionar em uma fila?

A permutação é uma disposição ordenada de objetos distintos. Nesse caso, temos três pessoas distintas: A, B e C.

Podemos pensar na fila como uma sequência ordenada de três espaços vazios, no qual cada espaço representará a posição que uma pessoa poderá ocupar. Iremos, então, calcular o número de permutações possíveis para preencher esses espaços.

Para a primeira posição da fila teremos três opções: A, B ou C. Após escolhermos a pessoa para a primeira posição, restam apenas duas pessoas para ocupar a segunda posição. E, finalmente, para a terceira posição, sobrarão apenas uma pessoa.

Portanto, o número total de permutações possíveis é calculado multiplicando o número de opções para cada posição.

Serão 3 opções para a primeira posição, 2 opções para a segunda posição e 1 para a terceira posição, de modo que o número de permutações possíveis será:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Assim, haverá 6 maneiras diferentes de três pessoas (A, B e C) se posicionarem em uma fila.

Exemplo 4. De quantas maneiras seis pessoas podem se posicionar em uma fila ?

Observando que cada fila formada pelas seis pessoas corresponde a uma permutação de seis elementos distintos, tem-se que a quantidade de filas que podem ser formadas é:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Exemplo 5. Determine o número de anagramas da palavra AMOR .

Como cada anagrama corresponde a uma permutação de quatro letras distintas (A, M, O e R), tem-se que o número de anagramas é :

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Exemplo 6. Com os algarismos 2, 3, 6, 7 e 8:

- a) Quantos números podem ser formados permutando-se estes cinco algarismos?
- b) Quantos dos números formados são ímpares?

c) E quantos são pares?

a) Como são 5 algarismos distintos tem-se que o número de permutações é :

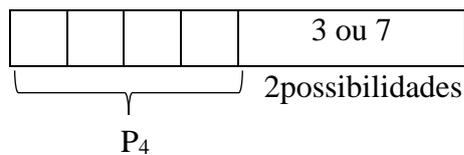
$$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

Ou seja, com os algarismos 2, 3, 6, 7 e 8 existem 120 números de 5 algarismos.

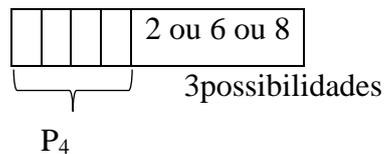
b) Para formar um número ímpar deve-se inicialmente escolher o algarismo das unidades, que neste caso pode ser o 3 ou o 7.

Para cada uma destas possibilidades, os outros quatro algarismos que sobraem poderão ser permutados nas outras quatro posições. Como são algarismos distintos, a quantidade de números ímpares que podem ser formados com os cinco algarismos dados é :

$$2.P_4 = 2.4! = 2.24 = 48$$



c) Analogamente, para formar um número par de cinco algarismos distintos com os algarismos 2, 3, 6, 7 e 8, tem-se o seguinte esquema:



Ou seja, a quantidade será:

$$3.P_4 = 3.24 = 72$$

Neste exemplo, podemos observar que com os resultados obtidos nos itens a e b, é possível calcular o do item c indiretamente.

Notemos que a soma das quantidades obtidas nos itens b e c é igual à quantidade do item a, já que a quantidade de números ímpares distintos adicionada à quantidade de números

pares distintos que podem ser obtidos com as permutações dos algarismos 2, 3, 6, 7 e 8, deverá ser igual ao total de números com cinco algarismos distintos que podem ser obtidos com as permutações destes cinco algarismos.

Ou seja, a quantidade de números pares distintos com 5 algarismos, que podem ser formados com as permutações dos 5 algarismos dados, pode ser obtida da seguinte maneira:

$$P_5 - 2.P_4 = 120 - 48 = 72.$$

Exemplo 7. Considere a palavra POLIEDROS .

- a) Quantos anagramas podem ser formados?
- b) Quantos anagramas terminam por EDROS?
- c) Quantos anagramas começam por POLI?
- d) Em quantos anagramas as letras P, O, L e I estão juntas e nesta ordem?
- e) Em quantos anagramas as letras P, O, L e I estão juntas?
- f) Quantos anagramas começam e terminam por consoante?
- g) Quantos anagramas começam e terminam por vogal?
- h) Quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?
- i) Quantos anagramas começam por consoante e terminam por vogal?
- j) Quantos anagramas começam por consoante ou terminam por vogal?

a) A palavra POLIEDROS tem 9 letras, com duas repetidas, logo a quantidade de anagramas é igual a $\frac{P_9}{2}$. Ou seja, esta palavra tem 181440 anagramas.

b) _ _ _ _ EDROS

Os anagramas que terminam em EDROS têm as 5 últimas posições ocupadas pelas letras E, D, R, O e S (nesta ordem), enquanto que as 4 posições iniciais devem ser ocupadas pelas letras P, O, L e I, em qualquer ordem. Logo, a quantidade de anagramas que terminam em EDROS é igual ao número de permutações das letras P, O, L, e I, ou seja, $P_4 = 24$. Isto significa que dos 362880 anagramas da palavra POLIEDROS, apenas 24 terminam em EDROS.

c) POLI_____

Analogamente, tem-se que a quantidade de anagramas que começam por POLI é igual ao número de permutações das letras E, D, R, O e S, ou seja, $P_5=120$.

d) As letras P, O, L e I, juntas e nesta ordem, podem ocupar, respectivamente, as seguintes posições:

1^a, 2^a, 3^a, 4^a ou 2^a, 3^a, 4^a, 5^a ou 3^a, 4^a, 5^a, 6^a ou 4^a, 5^a, 6^a, 7^a ou 5^a, 6^a, 7^a, 8^a ou 6^a, 7^a, 8^a, 9^a

Para cada uma destas 6 possibilidades de colocação das letras P, O, L e I, restarão 5 posições para serem colocadas as letras E, D, R, O e S (em qualquer ordem), ou seja, existem P_5 possibilidades de colocação destas 5 letras. Logo, pelo PFC, tem-se que a quantidade de anagramas é:

$$6.P_5 = 6.5! = 720$$

e) Neste caso, as letras P, O, L e I devem estar juntas e em qualquer ordem. Portanto, em cada uma das 6 possibilidades de ocupação destas 4 letras, é necessário permutá-las. Isto significa que existem $6.P_4$ possibilidades de ocupação destas letras. E analogamente ao item anterior, tem-se que a quantidade de anagramas em que as letras P, O, L e I estão juntas é:

$$6.P_4 . P_5 = 6.24.120 = 17280$$

f) A palavra POLIEDROS tem 5 consoantes e 4 vogais. Para começar o anagrama por consoante, há 5 possibilidades, e para terminar, há 4 possibilidades (pois uma consoante já foi escolhida). Após estas etapas há P_7 maneiras de se colocar as outras 7 letras nas 7 posições restantes, com duas letras repetidas. Logo, pelo PFC, o número destes anagramas é:

$$\frac{5.4.P_7}{2} = 10.5040 = 50400$$

Para resolvermos os itens g, h e i, consideremos inicialmente, que as duas vogais repetidas sejam distintas. Obtendo deste modo o número de anagramas, devemos em seguida dividir este valor por 2, pois, permutando-se as vogais O, o anagrama não se altera.

g) Analogamente, tem-se que o número de anagramas que começam e terminam por vogal é:

$$\frac{4.3.P_7}{2} = 6.5040 = 30240$$

h) Para começar o anagrama por vogal, há 4 possibilidades, e para terminar por consoante, há 5 possibilidades. Após estas etapas, há P_7 maneiras de se colocar as outras 7 letras nas 7 posições restantes. Logo, pelo PFC, o número destes anagramas é:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot P_7}{2} = 10 \cdot 5040 = 50400$$

i) Analogamente, tem-se que o número de anagramas que começam por consoante e terminam por vogal é:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot P_7}{2} = 10 \cdot 5040 = 50400$$

Observemos que este resultado é o mesmo do item anterior. Isto ocorre devido a simetria das duas questões.

j) Notemos inicialmente que um anagrama que começa por consoante ou termina por vogal pode ser dos seguintes tipos:

1º) começa por consoante e termina por vogal

2º) começa por consoante e termina por consoante

3º) começa por vogal e termina por vogal

Ou seja, é um anagrama que não é do tipo que começa por vogal e termina por consoante.

Para resolver esta questão diretamente, deve-se adicionar as quantidades de anagramas dos três tipos.

Pode-se também obter o resultado indiretamente. Adicionando-se as quantidades dos quatro tipos possíveis, obtém-se o total de anagramas da palavra. Logo, subtraindo do total de anagramas da palavra, a quantidade de anagramas que começam por vogal e terminam por consoante, obtém-se a quantidade de anagramas que começam por consoante ou terminam por vogal. No caso, da palavra POLIEDROS, esta quantidade será:

$$P_9 - 4 \cdot 5 \cdot P_7 = 9 \cdot 8 \cdot 7! - 4 \cdot 5 \cdot 7! = 52 \cdot 7! = 362880$$

5.2. Arranjos

No t3pico anterior definimos que a permuta33o de n elementos 3 qualquer agrupamento ordenado destes n elementos. Para o estudo de arranjos, basicamente haver3 permuta33es (trocas) de alguns elementos do conjunto, e a ordem em que ser3o dispostos e selecionados dever3 ser considerada.

Consideramos arranjo uma sequ3ncia ordenada de elementos distintos escolhidos entre determinada quantidade existente, em que a ordem e a natureza dos elementos s3o relevantes. (METZ, 2018, p. 30)

Para melhor compreens3o deste conceito, observemos o problema abaixo:

Considerando as letras a, b, c e d, quantos agrupamentos ordenados diferentes com 2 letras distintas podem ser formados?

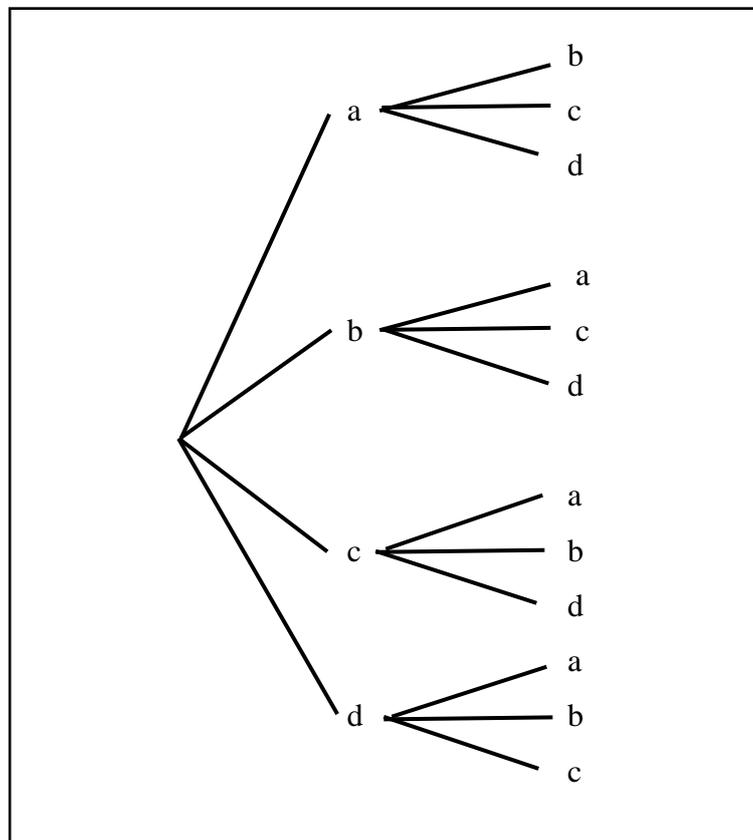


Figura 6 3rvore Possibilidades Letras

Observamos na imagem que na primeira posição serão 4 possibilidades, dado que temos quatro elementos disponíveis, por conseguinte, na segunda posição teremos apenas 3 elementos disponíveis e 3 possibilidades.

Pelo PFC, há no total $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades, ordenados na seguinte maneira:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Resumidamente, esses agrupamentos ordenados diferentes, formados com p dos n elementos dados são chamados de arranjo simples.

Vale ressaltar que é possível resolver os problemas utilizando tanto ao conceito de arranjo quanto ao princípio fundamental da contagem. No entanto, mais do que decorar uma fórmula e aplicá-la, é importante que o aluno seja capaz de compreender o que está sendo feito.

5.2.1. Determinação do Número de Arranjos

O número de arranjos de n elementos, tomados p a p , indica-se por $A_{n,p}$ (ou A_n^p).

Para determinar a quantidade de arranjos, formaremos uma sequência de p termos distintos, escolhidos entre os n elementos dados.

O 1º termo poderá ser qualquer um dos n elementos dados: Há, portanto, n possibilidades para o 1º termo.

Para cada uma destas possibilidades, o 2º termo da sequência poderá ser qualquer um dos $(n - 1)$ elementos restantes: Há, portanto, $(n - 1)$ possibilidades para o 2º termo.

Para cada par de elementos escolhidos, o 3º termo poderá ser qualquer um dos $(n - 2)$ elementos restantes: Há, portanto, $(n - 2)$ possibilidades para o 3º termo.

De forma sucessiva, tem-se que há $(n - (p - 1))$ possibilidades para o p termo.

Pelo PFC, conclui-se que o número de arranjos que podem ser formados é:

$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(p-1))}_{p \text{ fatores}}$$

Multiplicando e dividindo o segundo membro por $(n-p)!$, obtemos:

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(p-1)) \cdot (n-p)!}{(n-p)!}$$

Ou seja:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

5.2.2. Exemplos

Exemplo 1. Com 10 algarismos distintos, quantas senhas com 5 destes algarismos podem ser obtidas?

Trata-se de arranjar os 10 algarismos, 5 a 5. Isto é:

$$\begin{aligned} A_{10,5} &= \frac{10!}{(10-5)!} \\ A_{10,5} &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{(5)!} \\ A_{10,5} &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \\ A_{10,5} &= 30240 \end{aligned}$$

Exemplo 2. Sete amigos decidiram realizar uma disputa de xadrez para saber quem era o melhor enxadrista da turma. Sabendo que na disputa teremos primeiro, segundo e terceiro lugares, quantos são os pódios possíveis?

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{(4)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$A_{7,3} = 210$$

São 210 pódios possíveis

5.3. Combinações

Para Dante (2010, p. 286), “nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos”. Para ele, “combinações simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados.”

Já Metz (2018, p.35) lembra que “diferentemente do conceito de arranjo, o que importa na combinação simples é a natureza dos elementos, ou seja, a ordem dos elementos não interfere no resultado”

É possível considerar combinação como um arranjo de elementos que se repetem, sendo viável a resolução de questões de combinação utilizando-se o princípio multiplicativo.

Seja S um conjunto com n elementos. Uma combinação desses n elementos tomados r por vez é qualquer seleção de r dos elementos, onde a ordem não interessa. Tal seleção é chamada de r -combinação; é simplesmente um subconjunto de S com r elementos. (LIPSCHUTZ e SEYMOUR, 2013, p.102)

De forma corriqueira, para melhor elucidar o assunto, os livros didáticos trazem como exemplo a formação de comissões com 3 membros, a partir de um grupo de 5 pessoas, como veremos a seguir.

Representando estas pessoas por A, B, C, D e E, podem ser formadas seguintes comissões:

{A, B, C}, {A, B, D}, {A, B, E}, {A, C, D}, {A, C, E}, {A, D, E}, {B, C, D}, {B, C, E}, {B, D, E} e {C, D, E}.

Portanto, com 5 pessoas podem ser formadas 10 comissões de 3 membros.

Cada comissão é um agrupamento das 5 pessoas, tomadas três a três, no qual a ordem em que os elementos são citados não importa. Observemos, ainda, que as comissões {B,

D, E}, {B, E, D}, {D, B, E}, {D, E, B}, (E, B, D) e {E, D, B} são iguais, pois representam as mesmas três pessoas.

Façamos agora uma modificação no problema anterior:

Com 5 pessoas de quantas maneiras pode ser formada uma comissão de 3 membros: um presidente, um secretário e um tesoureiro?

Neste caso, importa a ordem em que os elementos são citados.

Por exemplo, as comissões {A, C, D} e {D, A, C} são distintas, já que, A como presidente, C como secretário e D como tesoureiro é uma comissão diferente da comissão em que D é presidente, A secretário e C tesoureiro.

Para cada comissão formada no problema anterior há agora, P_3 comissões distintas. Ou seja, com 5 pessoas podem ser formadas $10 \cdot P_3 = 10 \cdot 6 = 60$ comissões de 3 membros (sendo um presidente, um secretário e um tesoureiro).

Cada comissão é um agrupamento das 5 pessoas, tomadas 3 a 3, no qual importa a ordem em que os elementos são citados. Ou seja, cada comissão é um arranjo com 3 das 5 pessoas.

5.3.1. Determinação do Número de Combinações

O número de combinações de n elementos, tomados p a p , indica-se por $C_{n,p}$ ou C_n^p .

Para determinar o número de combinações lembremos de que com p elementos distintos obtêm-se $p!$ permutações.

Logo, para cada combinação há $p!$ arranjos dos n elementos tomados p a p , ou seja, $A_{n,p} = p! C_{n,p}$. E daí:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$

5.3.2. Exemplos

Exemplo 1. De quantas maneiras um estudante poderá escolher 8 questões numa prova com 10 questões?

Para obter o resultado deve-se calcular o número de combinações das 10 questões, tomadas 8 a 8:

$$C_{10,8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10!}{8!2!} = 45$$

Exemplo 2. Em um time de futebol quatro jogadores serão escolhidos para formar uma comissão.

- Quantas comissões podem ser formadas?
- Em quantas dessas comissões o goleiro poderá participar?
- Em quantas comissões o goleiro não participa?
- Em quantas o goleiro participa e o centroavante não?

a) O número de comissões será:

$$C_{11,4} = \frac{11!}{4!7!} = 330$$

b) Nas comissões em que o goleiro participar deve-se escolher os outros 3 jogadores dos 10 restantes. Logo, a quantidade dessas comissões será:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

c) O goleiro estando excluído das comissões, deve-se escolher os 4 jogadores entre os 10 restantes. Ou seja, a quantidade de tais comissões é:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!6!} = 210$$

Outro modo de resolver este item da questão é notar que, adicionando o número de comissões em que o goleiro participa ao número de comissões em que ele não participa, obtém-se

o número de comissões com 4 jogadores que podem ser formadas com um time de futebol. Representando por n o número de comissões em que o goleiro não participa, tem-se:

$$n + C_{10,3} = C_{11,4}$$

$$n = C_{11,4} - C_{10,3}$$

$$n = 330 - 120$$

$$n = 210$$

d) Nas comissões em que o goleiro deverá participar e o centroavante não, deve-se escolher 3 jogadores dentre os 9 restantes. Logo, a quantidade dessas comissões é:

$$C_{9,3} = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

Exemplo 3. Num órgão do governo trabalham 6 economistas e 9 contabilistas. Quantas comissões podem ser formadas com 3 economistas e 2 contabilistas?

Formar uma dessas comissões é uma ação composta de duas etapas sucessivas.

Há $C_{6,3}$ possibilidades para a escolha dos 3 economistas, e há $C_{9,2}$ possibilidades para a escolha dos 2 contabilistas. Para cada uma das $C_{6,3}$ possibilidades de escolher dos 3 economistas há $C_{9,2}$ para a escolha dos 2 contabilistas. Logo, pelo PFC, tem-se que a quantidade de comissões é:

$$C_{6,3} \cdot C_{9,2} = 20 \cdot 36 = 720$$

Exemplo 4. De quantas maneiras 6 alunos podem se distribuir em 10 carteiras enfileiradas?

Como importa a ordem em que os alunos se distribuem nas 10 carteiras, a quantidade de maneiras de fazer essa distribuição é:

$$A_{10,6} = \frac{10!}{4!} = 151200$$

Exemplo 5. Quantos números de quatro dígitos distintos podem ser formados com os algarismos 2,3,4,5,6,7,8 e 9?

Notemos que cada número é um arranjo dos 8 elementos tomados 4 a 4, já que, por exemplo, o número 2359 é diferente de 5392. Tem-se, então, que a quantidade desses números é:

$$A_{8,4} = \frac{8!}{4!} = 1680$$

Exemplo 6. A placa de um veículo é formada por três letras seguidas de quatro algarismos. Com 26 letras e os algarismos ímpares, quantas placas podem ser constituídas, de modo que as letras e os algarismos sejam todos distintos?

Formar uma dessas placas é uma ação composta de duas etapas sucessivas.

Na 1ª etapa, há $A_{26,3}$ possibilidades para a escolha das 3 letras; e na 2ª etapa, há $A_{5,4}$ possibilidades para a escolha dos 4 algarismos. Logo, pelo PFC, tem-se que, a quantidade de placas é:

$$A_{26,3} \cdot A_{5,4} = 15600 \cdot 120 = 1872000$$

Exemplo 7. Dispondo-se de 8 cores, de quantas maneiras podem ser pintadas as 5 regiões de um mapa do Brasil, com cores distintas, sendo uma região de cada cor?

Como importa a ordem colorida entre as regiões (sequências de 5 cores), trata-se de um problema de arranjos. Logo, o número de maneiras é:

$$A_{8,5} = \frac{8!}{3!} = 6720$$

6. PERMUTAÇÕES CIRCULARES

A permutação circular é um fascinante conceito matemático que trata da reorganização de elementos em uma sequência ordenada de forma circular. Para melhor entendimento vamos considerar o seguinte problema: de quantas maneiras 3 meninas podem formar uma roda de ciranda?

Representemos as meninas por A, B e C.

Há $P_3 = 6$ maneiras delas ficarem enfileiradas:

ABC, CAB, BCA, ACB, BAC e CBA

Imaginemos que antes elas permaneçam em fila e, em seguida, formem a roda de ciranda. Ocorre que as três primeiras (ABC, CAB e BCA) formam a mesma roda, e as três últimas (ACB, BAC e CBA) formam outra roda. Isto é fácil verificar através dos seguintes diagramas:

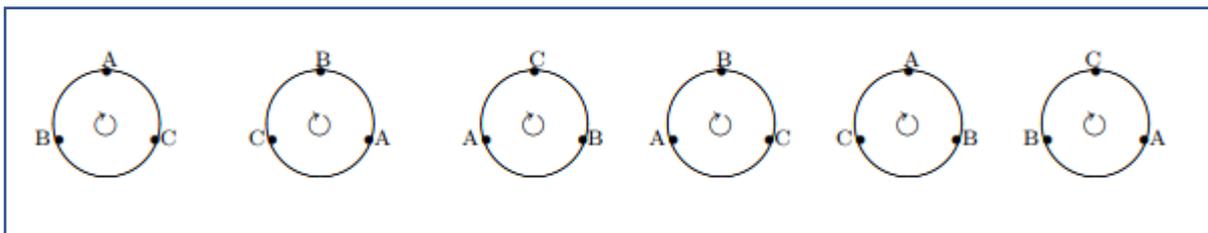


Figura 7 Permutações Circulares com 3 Elementos

Notemos que nas três primeiras figuras, olhando os círculos em sentido anti-horário, A precede B, que precede C, que precede A; portanto a posição relativa entre as meninas é a mesma. Nas três últimas figuras, A precede C, que precede B, que precede A; portanto, a posição relativa entre elas é a mesma.

Por outro lado, fazendo uma rotação de 120° , no sentido anti-horário no primeiro diagrama, obtém-se o segundo, e fazendo, em seguida, outra rotação de 120° , no mesmo sentido, obtém-se o terceiro. Ou seja, as três primeiras disposições são idênticas. Analogamente, tem-se que as três últimas disposições são idênticas. Logo, as três meninas podem formar apenas 2 rodas de ciranda.

As maneiras de se colocar n elementos distintos em n posições igualmente espaçadas em torno de um círculo são chamadas de Permutações Circulares e indicadas por $(PC)_n$. Segundo Bezerra (2018, p.48):

Chama-se Permutação Circular de n objetos distintos, qualquer disposição desses n objetos em torno de um círculo, colocados em lugares igualmente espaçados.

Duas permutações circulares são ditas indistinguíveis quando uma pode ser obtida da outra por meio de uma rotação. Permutações circulares indistinguíveis são contadas como uma só.

Para determinar o número das Permutações Circulares de n elementos, observamos que enquanto nas permutações de n elementos o que importa são as posições (na sequência) destes elementos, nas Permutações Circulares o que importa são as posições relativas entre esses elementos. Isto significa que disposições circulares, cujos respectivos elementos mantêm as posições relativas, são idênticas; já que, através de rotações convenientes, todas coincidem.

Consideremos então uma das permutações circulares de n elementos distintos. Através de n rotações circulares $\left(\text{de } \frac{360^\circ}{n}\right)$, no mesmo sentido, seus elementos manterão as posições relativas em cada uma das n disposições. Pode-se, então, afirmar que para cada permutação circular há n permutações que mantêm as posições relativas de seus elementos. Como há P_n permutações, tem-se que $n(PC)_n = P_n$. Logo, $(PC)_n = \frac{n!}{n}$. E daí,

$$(PC)_n = (n - 1)!$$

Pode-se também determinar o número de permutações circulares da seguinte maneira:

Há 1 possibilidade de se colocar o primeiro elemento num círculo;

Há 1 possibilidade de se colocar o segundo elemento num círculo;

Há 2 possibilidades de se colocar o terceiro elemento num círculo;

Há 3 possibilidades de se colocar o quarto elemento num círculo;

(...)

Há $(n - 1)$ possibilidades de se colocar o n elemento num círculo.

Como trata-se de uma ação composta de n etapas sucessivas, pelo PFC, tem-se que o número de permutações circulares de n elementos é:

$$(PC)_n = 1.1.2.3. \dots (n - 1) = (n - 1)!$$

No exemplo dado (3 meninas formando uma roda de ciranda), tem-se:

$$(PC)_3 = (3 - 1)! = 2! = 2$$

6.1.Exemplos

Exemplo 1. De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar-se ao redor de uma mesa circular?

Como o que importa são as posições relativas entre as 5 pessoas, a quantidade de maneiras é:

$$(PC)_5 = 4! = 24$$

Exemplo 2. Uma caixa d'água tem o formato de um prisma hexagonal. Com 10 cores de quantas maneiras podem ser pintadas suas faces laterais, sendo uma face de cada cor?

Para a escolha das 6 cores há C_{10}^6 possibilidades (pois não importa a ordem de escolha das cores). Uma vez escolhida as 6 cores, há $(PC)_6$ possibilidades de colorir essas faces. Logo, pelo PFC, o número de maneiras é:

$$C_{10}^6 \cdot (PC)_6 = \frac{10!}{6! 4!} 5! = 25200$$

Exemplo 3. De quantas maneiras podem ser coloridas as 5 pás da hélice de um helicóptero, sendo uma pá de cada com, com 8 cores distintas.

Inicialmente, podemos escolher 5 das opções de cores. Isto pode ser feito combinando as 8 cores, tomadas 5 a 5, ou seja, de $C_8^5 = 56$ modos.

Escolhidas as cores, as pás podem ser coloridas de $(PC)_5=24$ maneiras.

Aplicando-se o PFC, obtemos $56 \cdot 24 = 1344$.

Concluimos, então, que as pás da hélice podem ser coloridas de 1344 maneiras diferentes.

Exemplo 4. Um lustre tem 8 bocais de lâmpadas, igualmente espaçados e dispostos no formato octogonal. Sabendo-se que a haste é flexível, podendo girar de 360° . De quantos modos 8 lâmpadas de cores distintas podem ser dispostas neste lustre?

Observamos que se trata de Permutações Circulares, pois os bocais estando dispostos nos vértices de um polígono regular, pertencem ao círculo circunscrito a esse polígono.

Portanto, as 8 lâmpadas podem ser dispostas de $(PC)_8 = 7! = 5040$ maneiras.

Exemplo 5. De quantas maneiras quatro estudantes, três professoras e duas coordenadoras pedagógicas podem sentar-se em torno de uma mesa circular, para uma reunião, com a condição de que as coordenadoras não fiquem juntas?

Sem a restrição, eles poderiam se sentar de $(PC)_9 = 8!$ maneiras.

Por outro lado, as coordenadoras ficam juntas em $P_2 \cdot (PC)_8 = 2! \cdot 7!$, pois as duas juntas podem ser consideradas como uma só pessoa. O fator P_2 é devido ao fato de ambas poderem trocar de posição entre si. Logo, as coordenadoras não ficam juntas em $8! - 2 \cdot 7! = 6 \cdot 7! = 30240$ disposições.

Exemplo 6. Quantos tipos de pirâmides quadradas regulares do mesmo tamanho podem ser confeccionadas com cartolina, sabendo-se que suas faces devem ser coloridas com 5 cores distintas, sendo cada face de uma cor?

Inicialmente, temos 5 opções de escolha de uma cor para colorir a base da pirâmide. Em seguida, para colorir as faces laterais são 4 opções de cor. Por outro lado, observamos que uma pirâmide já colorida pode se rotacionada de 90° em 90° em torno da reta que contém sua altura, sem alterar as posições relativas entre suas faces laterais. Isto é, o número de modos de colorir as faces laterais da pirâmide é dado pelas Permutações Circulares das 4 cores restantes: $(PC)_4 = 3! = 6$.

Aplicando-se o PFC, conclui-se que o número de pirâmides que podem ser confeccionadas, nas condições do enunciado, é $5 \cdot 6 = 30$.

Exemplo 7. De quantos modos 8 casais podem se posicionar em uma roda gigante com 8 bancos duplos?

Estando, inicialmente, os casais já posicionados nos bancos, podemos permutá-los nesses bancos de $(PC)_8 = 7!$ modos. Por outro lado, os cônjuges de cada casal podem mudar de posição entre si de duas maneiras. Como são 8 casais, tem-se 2^8 modos.

Aplicando-se o PFC, conclui-se que o número de modos que os 8 casais podem se posicionar na roda gigante é de $2^8 \cdot 7! = 256 \cdot 5040 = 1290240$.

Exemplo 8. De quantas maneiras 4 meninos e 4 meninas podem formar uma roda de ciranda, de modo que as crianças de mesmo sexo não fiquem juntas?

Como os meninos deverão estar separados dos meninos, eles ficarão (meninos e meninas) intercalados.

Pensemos, então, em grupos de 4 pares de menino com menina. Esses grupos podem ser formados do seguinte modo:

- a primeira menina terá quatro opções (4 meninos) de escolha;
- a segunda menina terá três opções de escolha;
- a terceira menina terá duas opções
- a quarta menina, uma opção.

Isto é, o número de grupos com 4 pares de menino com menina é $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

Por outro lado, formando uma roda de ciranda com cada grupo de 4 pares, tem-se:

- o primeiro par pode ser colocado na roda de 1 modo;
- o segundo par pode ser colocado na roda de 1 modo;
- o terceiro par pode ser colocado na roda de 2 modos;
- o quarto par pode ser colocado na roda de 3 modos.

Ou seja, com cada grupo de 4 pares de menino e menina, podem ser formadas

$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6$ modos de ciranda.

Aplicando-se o PFC, concluímos que o número de rodas de ciranda que podem ser formadas com 4 meninos e 4 meninas, de modo que as crianças de mesmo sexo fiquem separadas é, $6 \cdot 24 = 144$.

Exemplo 9. De quantas maneiras 5 casais podem formar uma roda de ciranda, de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher e que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

Indiquemos os 5 casais, respectivamente, por $H_1M_1, H_2M_2, H_3M_3, H_4M_4, H_5M_5$.

Enfileirando-se esses casais de acordo com o posicionamento determinado pelo enunciado, teríamos dois tipos de filas. Um com os homens à esquerda de suas mulheres e o outro, com as mulheres à esquerda de seus homens, conforme abaixo representados.

$$\begin{array}{c} H_1M_1, H_2M_2, H_3M_3, H_4M_4, H_5M_5 \\ M_1H_1, M_2H_2, M_3H_3, M_4H_4, M_5H_5. \end{array}$$

Com cada um dos dois tipos de fila retilínea, podem ser formadas $(PC)_5 = 24$ rodas de ciranda.

Portanto, o número de rodas de ciranda que podem ser formadas com 5 casais, de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher e que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas, é $2 \cdot (24) = 48$.

Exemplo 10. Quantos tipos de anéis, adornados com 6 pedras preciosas distintas, igualmente espaçadas, podem ser confeccionados?

Como as pedras estão em círculo, teríamos $(PC)_6 = 5! = 120$ tipos de anéis.

Por outro lado, considerando-se as representações de dois tipos de anéis (figura abaixo) e, girando-se um deles de 180° em torno do diâmetro de extremidades A e D, obtém-se o outro. Ou seja, é necessário dividir o valor encontrado (120) por 2.

Conclui-se, então, que o número de tipos de anéis é $\frac{120}{2} = 60$.

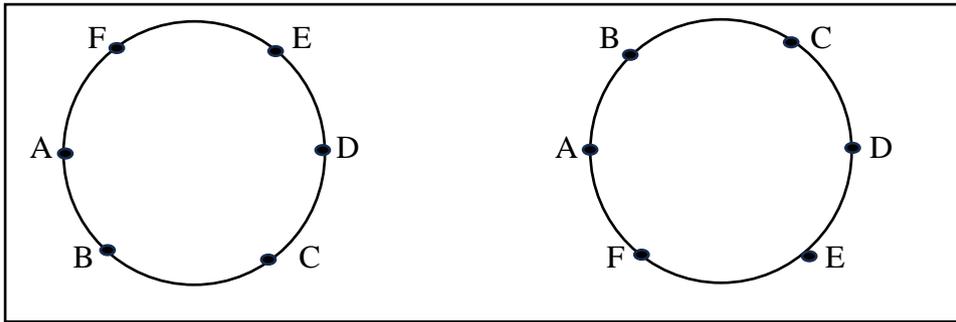


Figura 8 Rotação do Anel

Na figura, A, B, C, D, E e F representam as pedras preciosas

7. ARRANJOS E PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÕES

7.1. Arranjos com Repetições

Consideremos a seguinte questão: quantos números de três dígitos podem ser formados com os algarismos ímpares?

Esta é uma questão na qual importa a ordem de escolha dos elementos, e não há a necessidade que esses elementos sejam todos distintos. Por exemplo, os números 529, 373 e 555 têm os três dígitos ímpares.

A quantidade de números que podem ser formados é: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ (pois trata-se de um problema de três etapas com 5 possibilidades em cada uma).

Casos como este, onde importa a ordem entre os elementos, podendo haver repetição dos mesmos, são chamados de arranjos com repetição. Na linguagem matemática os arranjos com repetição são sequências cujos termos são escolhidos entre os elementos de um dado conjunto.

Dado um conjunto com n elementos, denomina-se arranjo com repetição dos n elementos, tomados p a p , a qualquer sequência com p desses elementos.

O número de arranjos com repetição de n elementos, tomados p a p , indica-se por $(AR)_{n,p}$ ou $(AR)_n^p$.

Para determinar este número, formemos uma sequência de p termos escolhidos entre os elementos dados.

Como pode haver repetições de elementos, há, portanto, n possibilidades de escolha para cada um dos termos da sequência.

Formar uma dessas sequências é uma ação composta de p etapas sucessivas. E como pode haver repetição de elementos, há n possibilidades de escolha para cada um dos termos da sequência. Logo, pelo PFC, a quantidade de arranjos com repetição de n elementos, tomados p a p , é: $\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{p \text{ fatores}}$. Ou seja:

$$(AR)_{n,p} = n^p, n, p \in \mathbb{N}$$

7.1.1. Exemplos

Exemplo 1. Quantas senhas eletrônicas de três letras podem ser formadas com as 20 primeiras letras de nosso alfabeto?

Como não há restrição das senhas serem formadas por letras distintas, tem-se que a quantidade dessas senhas, é:

$$(AR)_{20,3} = 20^3 = 8000$$

Exemplo 2. Lançando-se um dado três vezes, quantos tipos de sequências podem ser obtidas?

Há 6 possibilidades (1,2,3,4,5 ou 6) para cada um dos 3 lançamentos; logo, o número de sequências é:

$$(AR)_{6,3} = 6^3 = 216.$$

Exemplo 3. Seis sinaleiros estão alinhados, e cada um tem três bandeiras: uma amarela, uma verde e uma vermelha. Os seis sinaleiros levantam simultaneamente uma bandeira, transmitindo-se assim um sinal. Quantos sinais podem ser transmitidos?

Há 3 possibilidades para cada um dos 6 sinaleiros. Logo, o número de sinais é:

$$(AR)_{3,6} = 3^6 = 729$$

7.2. Permutações com Repetições

Quando precisamos permutar n objetos em n posições, porém existem objetos repetidos, a permutação se dará de maneira diferente. E, neste tópico, perceberemos a influência que repetições trazem na contagem geral do número de anagramas em determinados problemas.

Para analisar o número de permutações que podem ser formadas com elementos entre os quais há repetições, apresentamos a seguinte situação:

A palavra OVO tem apenas 3 anagramas: OVO, OOV e VOO. Se as letras O e O fossem distintas (O_1 e O_2 , por exemplo), cada um dos três anagramas geraria dois anagramas distintos. Já vimos que o número de anagramas de uma palavra com 3 letras distintas é $P_3 = 3! = 6$. Agora estamos observando que se entre as três letras, duas são repetidas, este número fica dividido por $2!$ (que é o número de permutações das duas letras se elas fossem distintas). Indica-se o número de permutações de 3 elementos, sendo 2 repetidos, por P_3^2 . Tem-se:

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$

Consideremos agora o seguinte exemplo:

Quantos números de 5 dígitos podem ser formados com as permutações dos algarismos do número 467999?

Cada permutação dos 6 algarismos geraria $3!$ permutações se os algarismos 9,9 e 9 fossem distintos. Logo, a quantidade de números que podem ser formados com as permutações dos algarismos do número 467999, é igual ao número de permutações obtidas se os três 9 fossem distintos, dividido por $3!$. Logo, essa quantidade é:

$$P_6^3 = \frac{6!}{3!} = 120$$

Se, no exemplo anterior, trocássemos o algarismo 6 pelo 4, as permutações anteriores ficariam reduzidas pela metade. Notemos, por exemplo, que os números 467999 e 647999 ficariam iguais a 447999. Logo, o número de permutações ficaria dividido por $2!$. Indica-se o número de permutações de 6 elementos, sendo 3 repetidos de um tipo e 2 repetidos de outro, por $P_6^{3,2}$. Tem-se, então:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

Utilizando raciocínio análogo ao dos exemplos anteriores, pode-se obter o número de permutações, generalizando para n elementos, dos quais:

n_1 são repetidos de um tipo
 n_2 são repetidos de outro tipo
 n_3 são repetidos de outro tipo
 \vdots
 n_r são repetidos de um tipo

O número de permutações com repetição nessas condições é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}, \text{ onde } n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n .$$

Notemos, particularmente, que, se $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_r = 1$, então $P_n^{1, 1, 1, \dots, 1} = n!$, que é o número de permutações de n elementos distintos.

7.2.1. Exemplos

Exemplo 1. Obter o número de anagramas da palavra TARTARUGA:

A palavra TARTARUGA tem 9 letras, sendo 3A, 2T, 2R, 1U e 1G: T₁ A₁ R₁ T₂ A₂ R₂ U₁ G₁ A₃ .

O número de anagramas é:

$$P_9^{3, 2, 2} = \frac{9!}{3! 2! 2!} = 15120$$

Exemplo 2. Quantos anagramas da palavra PARANAPIACABA começam por BA e terminam por CA?

Como as "sílabas" BA e CA devem permanecer fixas, respectivamente, no início e no final de cada anagrama, devem-se permutar as letras P, A, R, A, N, A, P, I, A que permanecem no meio de BA e CA. Logo, o número de anagramas é:

$$P_9^{4,2} = \frac{9!}{4! 2!} = 7560$$

Exemplo 3. Uma urna contém 4 bolas amarelas, 3 brancas e 2 verdes. Extraíndo-as uma a uma sem reposição, quantas disposições distintas podem ser obtidas?

Após as retiradas obtém-se uma sequência de 9 bolas coloridas, sendo 4 amarelas, 3 brancas e 2 verdes. Tem-se, então, que o número de sequências que podem ser obtidas é:

$$P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4! 3! 2!} = 1260$$

Exemplo 4. De quantas maneiras pode ser formada uma fila com 3 alemães, 3 ingleses e 3 franceses, considerando que os cidadãos de mesma nacionalidade são indistinguíveis?

O número de maneiras de formar uma fila com 9 pessoas, sendo 3 de cada uma das três nacionalidades e considerando indistinguíveis os cidadãos de mesma nacionalidade é:

$$P_9^{3,3,3} = \frac{9!}{3! 3! 3!} = 1680$$

Exemplo 5. Enfileirando-se os 4 cavalos (2 brancos e 2 pretos) e as torres (2 brancas e 2 pretas) de um jogo de xadrez, quantas disposições distintas podem ser obtidas?

Deve ser formada uma fileira com 8 peças, sendo duas de cada tipo (duas torres brancas e duas pretas, 2 cavalos brancos e 2 pretos). A quantidade de fileiras é o número de permutações com repetição de 8 elementos, sendo 2 de cada tipo. Logo, o número é:

$$P_8^{2,2,2,2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! 2! 2! 2!} = 2520$$

8. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES UNITÁRIOS E COMBINAÇÕES COM REPETIÇÕES

As equações e inequações lineares são expressões matemáticas que descrevem relações lineares entre variáveis. Os coeficientes unitários, por sua vez, são aqueles em que os coeficientes das variáveis são iguais a 1. Pretende-se, neste capítulo, contar o número de soluções inteiras não-negativas de equações, como:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = m$$

Onde x_i para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e m são inteiros. Estas notações serão usadas também para inequações, do tipo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq m$$

Para melhor compreensão, apresentamos o seguinte exemplo:

De quantas maneiras podemos distribuir 4 balas iguais entre três crianças? Para resolver esse problema temos que calcular o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

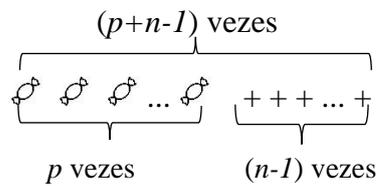
Inicialmente, podemos listar todas as soluções e contá-las. A tabela abaixo mostra que a equação possui 15 soluções inteiras e não negativas, onde x_1, x_2 e x_3 representa cada criança, e o sinal “+”, separa, de forma ilustrativa, a quantidade de balas que cada uma delas receberá.

x_1	x_2	x_3	Representação
4	0	0	♂ ♂ ♂ ♂ ++
3	1	0	♂ ♂ ♂ + ♂ +
3	0	1	♂ ♂ ♂ ++ ♂
2	2	0	♂ ♂ + ♂ ♂ +
2	1	1	♂ ♂ + ♂ + ♂
2	0	2	♂ ♂ ++ ♂ ♂
1	3	0	♂ + ♂ ♂ ♂ +
1	2	1	♂ + ♂ ♂ + ♂
1	1	2	♂ + ♂ + ♂ ♂
1	0	3	♂ ++ ♂ ♂ ♂
0	4	0	+ ♂ ♂ ♂ ♂ +
0	3	1	+ ♂ ♂ ♂ + ♂
0	2	2	+ ♂ ♂ + ♂ ♂
0	1	3	+ ♂ + ♂ ♂ ♂
0	0	4	++ ♂ ♂ ♂ ♂

A tabela acima ilustra uma forma prática para resolver este tipo de problema, considerando novamente a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, sendo que cada uma das soluções possíveis está ali representada. Novamente, notemos que cada sinal “+” tem a função de separar as quantidades relativas para x_1 , x_2 e x_3 .

Também é possível observar o seguinte: todas as soluções representadas são as permutações com elementos repetidos de ♂ ♂ ♂ ♂ ++, sendo 4 do tipo “♂” e 2 do tipo “+”. Assim, o número de permutações é igual a $\frac{6!}{4!2!} = 15$, que confere com a listagem que fizemos.

Generalizando este resultado para obter o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$, tem-se:



Ou seja, trata-se de determinar as permutações com elementos repetidos:

$$P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!}$$

E será este, então, o número de permutações com elementos repetidos.

Deste modo, esse tipo de problema, aplicado em diferentes situações, pode ser resolvido usando a ideia de permutações com repetições.

8.1. Combinações com Repetições

De modo a tornar mais fácil o entendimento sobre combinações com repetições, apresentamos o seguinte exemplo:

Em uma padaria existem 4 tipos de pães disponíveis: pão francês, pão de forma, pão integral e pão de centeio. Se um cliente deseja escolher 2 pães para levar para casa, podendo ser do mesmo tipo. De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher seus pães?

Inicialmente, definimos cada opção de pães disponível como A, B, C e D, sendo:

A = Quantidade de pães franceses,

B = Quantidade de pães de forma,

C = Quantidade de pães integrais,

D = Quantidade de pães de centeio.

Todas as possibilidades para escolha dos pães, que totalizam 10, são:

AA BB CC DD
 AB BC CD
 AC BD
 AD

Neste exemplo, constatamos que o número de possibilidades é maior do que $C_4^2 = 6$ pois, quando consideramos as combinações simples de 4 pães, tomados 2 a 2, não é possível selecionar o mesmo mais de uma vez.

Se consideramos apenas as combinações simples, no caso do exemplo, as possibilidades seriam:

AB BC CD
 AC BD
 AD

A ideia para resolver este tipo de problema é a mesma que demonstramos anteriormente em equações lineares, onde podemos estender e colocar em um modelo.

Desta forma, concluímos que $(CR)_n^p$ é o número total de maneiras para selecionar p elementos dentre os n elementos distintos, de modo que cada elemento poderá ser tomado p vezes. E, com isso, este será o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$, que é dado por $\frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!}$.

Portanto, esta expressão poderá ser adaptada em um modelo de combinação com repetições, na seguinte fórmula:

$$(CR)_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!}$$

Ao unir estes dois conceitos, exploraremos como as combinações com repetições podem ser aplicadas na resolução de equações e inequações lineares com coeficientes unitários. Analisaremos problemas práticos que envolvem a contagem de soluções para essas equações e inequações.

Concluimos, assim, que combinações com repetições, trata-se de uma ferramenta matemática poderosa usada para lidar com conjuntos de dados que contêm elementos repetidos. Ao contrário das combinações simples, em que cada elemento é usado apenas uma vez, as combinações com repetições permitem que elementos sejam selecionados várias vezes, possibilitando uma análise mais abrangente e uma exploração mais profunda dos dados.

8.2. Exemplos

Exemplo 1. Uma papelaria oferece sete opções de cores diferentes para um determinado tipo de canetas. Se um cliente pretende comprar exatamente quatro canetas, de quantas maneiras distintas poderá fazer essa compra, levando em consideração que todas as canetas compradas podem ser da mesma cor ou não?

Para resolução deste problema precisamos considerar que estamos escolhendo 4 cores, e que não necessariamente serão distintas, dentre 7 opções de cores.

Com este dado, percebemos que pode ser resolvido utilizando combinações com repetições, isto é, utilizando a fórmula: $(CR)_n^p$.

Consideremos:

$n = 7 \rightarrow$ número de cores

$p = 4 \rightarrow$ número de cores a escolher

Como $(CR)_n^p = C_{p+n-1}^p$, temos:

$$(CR)_7^4 = C_{4+7-1}^4 = C_{10}^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$$

Exemplo 2. Em uma sorveteria há cinco opções de sorvetes e quatro de coberturas. De quantos modos é possível escolher um sorvete com dois sabores e três tipos de cobertura?

Dos 5 tipos de sorvetes, é possível escolher dois sabores, não necessariamente distintos.

Esta situação pode ser resolvida utilizando combinações com repetições, ou seja, a fórmula: $(CR)_n^p$.

Temos:

$n = 5 \rightarrow$ tipos de sorvetes

$p = 2 \rightarrow$ tipos de sorvetes a escolher

Como $(CR)_n^p = C_{p+n-1}^p$, obtemos

$$(CR)_5^2 = C_{5+2-1}^2 = C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$$

Logo, existem 15 formas de se escolher os sorvetes.

Analogamente, dos 4 tipos de coberturas, devem ser escolhidos 3 tipos, não necessariamente diferentes.

Mais uma vez, pode-se utilizar combinações com repetições, aplicando-se a fórmula: $(CR)_n^p$

Consideremos:

$n = 4 \rightarrow$ tipos de coberturas

$p = 3 \rightarrow$ tipos de coberturas a escolher

Obtemos, então:

$$(CR)_4^3 = (C)_{4+3-1}^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

Logo, existem 20 formas de se escolher as coberturas.

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, teremos:

15 (escolhas de sorvetes) \cdot 20 (escolhas de coberturas) = 300 possibilidades.

Exemplo 3. De quantas maneiras podem ser distribuídas oito maçãs para duas pessoas?

Primeiramente, definimos as pessoas como a e b .

O total de distribuições é igual ao número de soluções inteiras e não negativas da equação $a + b = 8$.

Portanto, temos:

$$(CR)_8^2 = C_{8+2-1}^2 = \frac{9!}{8! \cdot 1!} = 9$$

Logo, existem nove formas de distribuir oito maçãs entre duas pessoas.

Exemplo 4. Quantas são as soluções inteiras e não negativas da inequação $x + y + z \leq 3$?

As soluções inteiras e não negativas da inequação $x + y + z \leq 3$ são dadas pelas soluções da equação:

$$x + y + z = 0$$

$$x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 2$$

$$x + y + z = 3.$$

Para obtermos o número de soluções das equações listadas acima, podemos recorrer a combinações com repetições $(CR)_n^p$, de modo que:

$$(CR)_3^0 \text{ soluções da equação } x + y + z = 0$$

$$(CR)_3^1 \text{ soluções da equação } x + y + z = 1$$

$$(CR)_3^2 \text{ soluções da equação } x + y + z = 2$$

$$(CR)_3^3 \text{ soluções da equação } x + y + z = 3$$

Logo, o número de soluções da inequação é dada pela soma:

$$\begin{aligned} (CR)_3^0 + (CR)_3^1 + (CR)_3^2 + (CR)_3^3 &= C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + C_5^3 = \frac{2!}{2! \cdot 0!} + \frac{3!}{2! \cdot 1!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \\ &1 + 3 + 6 + 10 = 20 \end{aligned}$$

Portanto, a inequação $x + y + z \leq 3$ possui 20 soluções inteiras não -negativas.

Exemplo 5. De quantas maneiras podem ser distribuídas 10 balas iguais para 3 crianças, sabendo que cada criança receberá pelo menos uma bala?

Consideremos a equação $x + y + z = 10$, com $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$.

Onde x , y e z representam as crianças,

Já sabemos contar soluções inteiras com as variáveis sendo maiores ou iguais a zero.

Para a resolução desta questão devemos transformá-la em um problema que sabemos resolver, bastando realizar a mudança de coordenadas:

$$x = 1 + r$$

$$y = 1 + s$$

$$z = 1 + t$$

Com isso, obtemos a equação, cujo número de soluções sabemos calcular:

$$r + s + t = 7$$

O número de soluções da equação $r + s + t = 7$ pode ser obtido através de $(CR)_7^3$.

Ou seja, $(CR)_7^3 = C_{3+7-1}^3 = \frac{9!}{6!3!} = 84$.

Portanto, temos 84 soluções para o problema, isto é, as 10 balas podem ser distribuídas de 84 maneiras para 3 crianças.

9. PRINCÍPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO

O Princípio da Inclusão-Exclusão (PIE) é uma generalização do Princípio Aditivo, usado para contar elementos que pertencem a uma ou mais categorias, levando em consideração a sobreposição entre essas categorias.

Este princípio é baseado na ideia de soma e subtração. Ao se resolver um problema de contagem, o PIE ajudará a evitar a contagem duplicada ou a omissão de elementos, fornecendo uma abordagem sistemática para lidar com problemas combinatórios complexos.

Suponha que uma tarefa possa ser realizada de n_1 ou n_2 maneiras, mas que algumas das maneiras do conjunto n_1 para realizar as tarefas são as mesmas de algumas das do n_2 . Neste caso, não podemos usar a regra da soma para contar o número de maneiras de realizar a tarefa. Adicionar o número de maneiras de realizar as tarefas nessas duas formas leva a uma contagem excessiva, porque as maneiras de realizar a tarefa naquelas formas que são idênticas serão contadas duas vezes. Para contar corretamente o número de maneiras para realizar as duas tarefas, somamos o número total de maneiras para realizá-la, e, então, subtraímos o número de maneiras de realizar a tarefa que pertence aos dois grupos. Esta técnica é chamada de princípio da inclusão-exclusão. Em alguns casos, este princípio também pode ser chamado de princípio da subtração para contagem (ROSEN, 2010, p. 363)

Supondo que temos um conjunto de elementos e necessitamos contar quantos elementos pertencem a pelo menos uma das categorias. Em primeiro lugar, adicionaremos o número de elementos em cada categoria individualmente; em seguida, subtraímos o número de elementos que pertencem à interseção de duas categorias, já que estes elementos foram contados duas vezes. Além disso, se houver mais categorias, devemos adicionar novamente o número de elementos que pertencem à interseção de três categorias e continuar esse processo até abranger todas as possibilidades.

É dizer, a ideia principal do PIE é que, para contar o número de elementos em uma união de conjuntos, devemos somar o número de elementos em cada conjunto individualmente. No entanto, como alguns elementos podem pertencer a mais de um conjunto, precisamos subtrair o número de elementos que foram contados mais de uma vez.

É possível descrever este Princípio em termos de conjuntos. Consideremos A_1 e A_2 como sendo os conjuntos. Neste cenário, há $|A_1|$ maneiras de selecionar um elemento do conjunto A_1 e $|A_2|$ maneiras de selecionar um elemento do conjunto A_2 .

O número de maneiras de escolher um elemento do conjunto A_1 ou do conjunto A_2 , será o número de maneiras de escolher um elemento da união desses conjuntos. Ou seja, será a soma do número de elementos de A_1 com o número de elementos de A_2 , menos o número de elementos que pertencem aos dois conjuntos. Visto que existem $|A_1 \cup A_2|$ maneiras de escolher um elemento de A_1 ou de A_2 e $|A_1 \cap A_2|$ maneiras de selecionar um elemento comum aos dois conjuntos, temos que:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Para Morgado et al (2004, p. 56):

O Princípio da Inclusão-Exclusão é uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos. Na sua versão mais simples, ele afirma que

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

No qual $|A|$ representa o número de elementos em um conjunto, “ \cup ” a união de conjuntos e “ \cap ” a intersecção de conjunto.

Lipschutz e Lipson, (2013, p. 104) afirmam que:

[...] para encontrar o número $n(A \cup B)$ de elementos na união de A com B , somamos $n(A)$ e $n(B)$ e, então, subtraímos $n(A \cap B)$; ou seja, “incluímos” $n(A)$ e $n(B)$ e “excluimos” $n(A \cap B)$. Isso segue do fato de que, quando somamos $n(A)$ e $n(B)$, contamos os elementos de $(A \cap B)$ duas vezes. O princípio acima vale para qualquer número de conjuntos. Primeiro o estabelecemos para três conjuntos.

Para quaisquer conjuntos finitos A , B e C temos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Ou seja, “incluímos” $n(A)$, $n(B)$ e $n(C)$, “excluimos” $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$ e $n(B \cap C)$, e finalmente “incluímos” $n(A \cap B \cap C)$.

Por fim, para achar o tamanho de uma união quando tratamos de 3 conjuntos distintos, A, B e C, somamos os tamanhos dos conjuntos individuais (inclusão), subtraímos os tamanhos de todas as intersecções duas a duas (exclusão), somamos os tamanhos de todas as intersecções, três a três (inclusão), e assim por diante.

A ideia é que, quando somamos todos os tamanhos dos conjuntos individuais, somamos demais, porque alguns elementos podem estar em mais de um conjunto. Assim, para compensar, subtraímos os tamanhos das intersecções duas a duas; mas então estamos subtraindo em demasia. Corrigimos somando os tamanhos das intersecções triplas, mas isso causa um excesso, o que nos obriga a subtrair novamente. Surpreendentemente, no final, tudo está perfeitamente equilibrado (SCHEINERMAN, 2016, p. 149)

9.1. Como resolver problemas de Inclusão-Exclusão

Para tornar a resolução de problemas de Inclusão-Exclusão mais fácil, apresentaremos um passo a passo que poderá ser utilizado para resolver os exercícios:

- 1) Determinar as categorias relevantes para o problema e atribuir um nome a cada uma delas. Por exemplo, se estamos contando elementos em um conjunto universal U, podemos ter as categorias $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$.
- 2) Calcular o número de elementos em cada categoria individualmente e representar por $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$.
- 3) Considerar as intersecções das categorias duas a duas; determinar o número de elementos de cada intersecção de duas categorias, representado por $|A \cap B|, |A \cap C|$ e $|B \cap C|$.
- 4) Obter as intersecções de três categorias, representando por $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ e assim por diante, dependendo do número de categorias.

- 5) Aplicar o Princípio utilizando a fórmula do PIE para contar o número total de elementos.
A fórmula geral é $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

O Princípio da Inclusão-Exclusão, para n categorias, pode ser expresso da seguinte maneira:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + (-1)^{(n+1)} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

9.2.Exemplos

Exemplo 1. Quantos são os anagramas da palavra LIVROS em que L ocupa o primeiro lugar ou V ocupa o segundo lugar ou R ocupa o sexto lugar?

1. Definir as categorias:

A_1 = conjunto de todos os anagramas da palavra LIVROS que começam com a letra L;

A_2 = conjunto de todos os anagramas da palavra LIVROS tendo a letra V na segunda posição;

A_3 = conjunto de todos os anagramas da palavra LIVROS, tendo a letra R na sexta posição;

$A_1 \cap A_2$ = conjunto de todos os anagramas da palavra LIVROS, tendo as letras L na primeira posição e V na segunda posição;

$A_1 \cap A_3$ = conjunto de todos os anagramas da palavra LIVROS, tendo as letras L na primeira posição e R na sexta posição;

$A_2 \cap A_3$ = conjunto de todos os anagramas da palavra LIVROS, tendo as letras V na segunda posição e R na sexta posição;

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ = conjunto de todos os anagramas da palavra LIVROS, tendo as letras L na primeira posição, V na segunda posição e R na sexta posição.

2. Calcular o número de elementos em cada conjunto: note que, para $i = 1, 2, 3$, cada elemento de A_i é uma permutação de 6 letras com uma delas fixas, ou seja, permutar cinco letras. Portanto, $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = P_5 = 120$.
3. Considerar as interseções de dois conjuntos, o número de anagramas da palavra LIVROS com duas letras fixas é igual a permutação de quatro letras. Portanto, $n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap A_3) = n(A_2 \cap A_3) = P_4 = 24$.
4. Considerar a interseção dos três conjuntos e determinar o total de anagramas da palavra LIVROS com 3 letras fixas. Portanto, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P_3 = 6$.
5. Aplicar o princípio de inclusão e exclusão:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3 \cdot 120 - 3 \cdot 24 + 6 = 294$$

Portanto, o número de anagramas da palavra LIVROS em que L ocupa o primeiro lugar ou V ocupa o segundo lugar ou R ocupa o sexto lugar são 294.

Exemplo 2. Em uma escola os alunos podem optar por diferentes atividades físicas, sendo elas, natação, atletismo e futebol. 65 alunos praticam natação, 45 atletismo, 42 jogam futebol, 20 praticam tanto natação quanto atletismo, 25 praticam natação e jogam futebol, 15 atletismo e futebol e 8 praticam as três atividades físicas. Encontre o número de alunos que praticam pelo menos uma, dentre tais atividades físicas

1. Definir as categorias: Natação (N), Atletismo (A) e Futebol (F).
2. Calcular o número de elementos em cada categoria: $|N| = 65$, $|A| = 45$, $|F| = 42$.
3. Considerar as interseções de duas categorias: $|N \cap A| = 20$, $|N \cap F| = 25$ e $|A \cap F| = 15$.
4. Considerar a interseção das três categorias: $|N \cap A \cap F| = 8$.
5. Aplicar o princípio de inclusão e exclusão.

$$|N \cup A \cup F| = |N| + |A| + |F| - |N \cap A| - |N \cap F| - |A \cap F| + |N \cap A \cap F| = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100.$$

Assim, 100 pessoas praticam pelo menos uma dessas atividades físicas.

Exemplo 3. Em uma festa, há n pessoas, sendo que 30 gostam de ouvir música, 25 de dançar e 20 de cantar. Além disso, sabe-se que 12 pessoas gostam de ouvir música e dançar, 8 de dançar e cantar, 5 de ouvir música e cantar, e nenhuma dessas pessoas gostam das três modalidades de diversões simultaneamente. Quantas pessoas gostam pelo menos de um desses entretenimento?

1. Definir as categorias: Música (M), Dança (D) e Canto (C).
 2. Obter o número de elementos em cada categoria: $|M| = 30$, $|D| = 25$, $|C| = 20$.
 3. Considerar as interseções de duas categorias: $|M \cap D| = 12$, $|D \cap C| = 8$, $|M \cap C| = 5$.
 4. Considerar a interseção das três categorias: $|M \cup D \cup C| = 0$.
 5. Aplicar o princípio de inclusão e exclusão :
- $$|M \cup D \cup C| = |M| + |D| + |C| - |M \cap D| - |D \cap C| - |M \cap C| + |M \cap D \cap C| = 30 + 25 + 20 - 12 - 8 - 5 + 0 = 50.$$

Portanto, 50 pessoas gostam, pelo menos, de uma dessas atividades.

Exemplo 4. Quantos são os números inteiros entre 1 e 6300 que não são divisíveis por 2, 3 ou 7?

1. Definir as categorias: Seja A o conjunto dos múltiplos de 2, B o conjunto dos múltiplos de 3 e C o conjunto dos múltiplos de 7.
2. Obter o número de elementos em cada categoria:

$$n(A) = 6300/2 = 3150 \text{ múltiplos de } 2$$

$$n(B) = 6300/3 = 2100 \text{ múltiplos de } 3$$

$$n(C) = 6300/7 = 900 \text{ múltiplos de } 7$$
3. Considerar as interseções de duas categorias:

$$n(A \cap B) = 6300/6 = 1050 \text{ múltiplos de } 2 \text{ e } 3$$

$$n(A \cap C) = 6300/14 = 450 \text{ múltiplos de } 2 \text{ e } 7$$

$$n(B \cap C) = 6300/21 = 300 \text{ múltiplos de } 3 \text{ e } 7$$
4. Considerar a interseção das três categorias:

$$n(A \cap B \cap C) = 6300/42 = 150 \text{ múltiplos de } 2, 3 \text{ e } 7$$
5. Aplicar o Princípio de Inclusão-Exclusão:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 3150 + 2100 + 900 - 1050 - 450 - 300 + 150 = 4500.$$

Portanto, o número de inteiro entre 1 e 6300 que não são divisíveis por 2, 3 ou 7 é dado por: $6300 - 4500$. Isto é, 1800.

Exemplo 5. De quantos modos 5 casais podem sentar-se ao redor de uma mesa circular com número exato de cadeiras de tal forma que marido e mulher não fiquem juntos?

Indiquemos por $A_1 = \{\text{disposições em que o primeiro casal fica junto}\}$, $A_2 = \{\text{disposições em que o 2º casal fica junto}\}$, ..., $A_5 = \{\text{disposições em que o 5º casal fica junto}\}$.

Observemos que o número de permutações circulares em que os cônjuges de determinado casal ficam juntos, ao redor da mesa, funciona como se ambos fossem uma única pessoa. Ou seja, permutações circulares com 9 elementos. Mas, o casal fica junto, com um dos cônjuges à direita do outro, ou vice-versa. Tem-se, então, $2(PC)_9$. Ou seja, $(2 \cdot 8!)$ para cada casal.

Como são 5 casais, podemos escrever $C_{5,1} (2 \cdot 8!)$

Fixando-se dois casais ao redor da mesa, digamos A_1 e A_2 , tem-se permutações circulares com 8 elementos, ou seja, $(PC)_8$. Considerando as permutações dos cônjuges em cada um dos dois casais fixados, o número de permutações circulares, neste caso, é dado por $2 \cdot 2(PC)_8$

Isto é, $4 \cdot 7!$ para cada dupla de casais. Como são $C_{5,2}$ duplas de casais, podemos escrever $C_{5,2} \cdot (2^2 \cdot 7!)$.

Analogamente, considerando as triplas, quádruplas e quántuplas de casais, podemos escrever os números de permutações circulares de cada caso, respectivamente,

$$C_{5,3} (2^3 \cdot 6!), C_{5,4} (2^4 \cdot 5!) \text{ e } C_{5,5} (2^5 \cdot 4!).$$

Por outro lado, o número de permutações circulares nas quais pelo menos um dos casais permanece juntos é indicado por $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$.

Aplicando-se o Princípio da Inclusão-Exclusão, este número será dado por:

$$C_{5,1} (2^1 \cdot 8!) - C_{5,2} (2^2 \cdot 7!) + C_{5,3} (2^3 \cdot 6!) + C_{5,4} (2^4 \cdot 5!) + C_{5,5} (2^5 \cdot 4!) = 250368$$

Logo, o resultado do problema é igual a este valor, subtraído do número total de permutações circulares com 10 elementos (5 casais). Isto é:

$$9! - 250368 = 112512$$

10. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise combinatória desempenha um papel crucial no estudo e na resolução de problemas relacionados à contagem de agrupamentos de elementos de determinados conjuntos. Ao longo deste trabalho, exploramos os modelos e os princípios fundamentais dessa área da matemática, destacando sua importância e aplicabilidade em diversos exemplos e como o ensino efetivo pode ser uma ferramenta valiosa para o desenvolvimento do pensamento lógico e da habilidade para resolver problemas dos estudantes.

Durante a pesquisa, ficou claro que os modelos de análise combinatória são ferramentas poderosas para lidar com problemas complexos de contagem. Através da aplicação destes modelos, podemos determinar o número de possibilidades, arranjos e combinações em uma variedade de cenários, desde arranjos simples até problemas de combinações com repetições. Esses modelos nos permitem abordar problemas de maneira sistemática, tornando o processo de contagem mais eficiente e preciso.

Além disso, ao compreender os princípios fundamentais da análise combinatória, como o Princípios Fundamentais da Contagem (aditivo e multiplicativo), desenvolvemos uma base sólida para a resolução de problemas mais complexos. Esses princípios servem como diretrizes essenciais, permitindo-nos decompor problemas complexos em etapas mais simples, facilitando a contagem de possibilidades.

A análise combinatória vai além da matemática pura. Seu impacto é amplamente sentido em várias áreas de Conhecimento, incluindo estatística, ciência da computação, economia e engenharia. Em estatística, por exemplo, a análise combinatória é fundamental para o cálculo de probabilidades e para a análise de experimentos aleatórios. Na ciência da computação, as fórmulas de análise combinatória são aplicadas em algoritmos de busca, classificação e análise de dados. Em economia, elas ajudam a calcular diferentes cenários de investimento e risco. E na engenharia, a análise combinatória é essencial para o projeto e a otimização de sistemas complexos.

Em conclusão, os modelos de análise combinatória são ferramentas indispensáveis no estudo e na resolução de problemas relacionados à contagem e à combinação de elementos. Eles fornecem uma estrutura sistemática para a contagem eficiente e precisa de possibilidades, permitindo-nos abordar problemas complexos de forma organizada.

A análise combinatória é um campo essencial para pesquisadores, profissionais e estudantes que desejam desenvolver soluções inovadoras e precisas para problemas do mundo

real. Compreender os princípios fundamentais dessa área da matemática nos capacita a resolver problemas em diversas áreas do conhecimento.

Em suma, este estudo reforçou a importância do ensino da Análise Combinatória e a relevância dos modelos na promoção de uma aprendizagem significativa e eficaz. Os modelos têm o potencial de auxiliar os alunos na compreensão dos conceitos combinatórios, na resolução de problemas desafiadores e no desenvolvimento de habilidades matemáticas essenciais. Ao adotar abordagens inovadoras e eficazes, podemos proporcionar aos estudantes as ferramentas necessárias para enfrentar desafios futuros, relacionados à Análise Combinatória e a outras áreas da Matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, E. M. S. A ludicidade e o ensino de matemática: Uma prática possível. Papirus, Campinas, 2001.

ASSIS, O. et al. Jogar e aprender matemática. IBD, Campinas, FE/UNICAMP, 2010.

BECKER, F. O que é construtivismo. Série Idéias 20 (1994), 87–93.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Brasil no Pisa 2018 [recurso eletrônico]. – Brasília : Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2020. 185.

CALDEIRA, A. M. A. Ensino de Ciências E Matemática, II: Temas Sobre A Formação De Conceitos. SciELO - Editora UNESP. Edição do Kindle.

D' AMBROSIO, B. A evolução da resolução de problemas no currículo matemático. Seminário em Resolução de Problemas (2008). http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo1.pdf.

D' AMBROSIO, U. Educação Matemática: da teoria à prática, 10 ed. Papirus Editora, Campinas, 2003.

DANTE, L. R. Didática da resolução de problemas de matemática, 1a. a 5a. series: para estudantes do curso de Magisterio e professores do 1o. grau. Ática, 2003.

FELLER, W. Introdução à Teoria das Probabilidades e Aplicações. Editora Edgard Blucher, São Paulo, 1976.

GRANDO, R. C. O jogo e a matemática no contexto da sala de aula, 2 ed. Paulus, São Paulo, 2008.

JOHNSON, N. L., and KOTZ, S. Urn Models and Their Application, An Approach to Modern Discrete Probability Theory. John Wiley & Sons, Canadá, 1977.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., and MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio (Coleção do professor de matemática), 6 ed., vol. 2. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., and MORGADO, A. C. Temas e Problemas Elementares (Coleção do professor de matemática), 2 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., and MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio (Coleção do professor de matemática), 1 ed., vol. 4. SBM, Rio de Janeiro, 2010.
125

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., and MORGADO, A. C. Temas e Problemas (Coleção do professor de matemática), 3 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2010.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., and MORGADO, A. C. Temas e Problemas Elementares (Coleção PROFMAT), 3 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. Matemática discreta [recurso eletrônico]; tradução técnica: Adonai Schlup Sant'anna. 3. ed. Porto Alegre : Bookman, 2013.

MENEZES, Rodrigo. Combinando sua aprovação (p. 8). Edição do Kindle

METZ, Lauro Igor. Análise combinatória e probabilidade (livro eletrônico) Editora Intersaberes, 1ª edição. 2018. Curitiba- PR

MORGADO, A. C., and CARVALHO, P. C. P. Matemática Discreta (Coleção PROFMAT), 1 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2014.

MORGADO, A. C., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., CARVALHO, B. P., and FERNANDEZ, P. Análise Combinatória e Probabilidade. SBM, Rio de Janeiro, 2004.

MORGADO, A. C., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., CARVALHO, B. P., and FERNANDEZ, P. Análise Combinatória e Probabilidade, com as soluções dos exercícios (Coleção do professor de matemática), 9 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar - Combinatória (Coleção do Professor de Matemática), 1 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

PETROLI, Thamara. Matemática discreta (recurso eletrônico). Editora Contentus, 2020. Curitiba – PR

RIBEIRO, J. Matemática: ciência, linguagem e tecnologia. Volume 2 Ensino Médio, 1 ed. Scipione, São Paulo, 2011.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. Revista Eletrônica de Educação 6, 1 (2012), pg 309.

ROSEN, K. H. Matemática Discreta E Suas Aplicações. Grupo A, 2010. E-book. ISBN 9788563308399. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788563308399/>.

SANTOS, J. A., FRANÇA, K. V., and SANTOS, L. Dificuldades na aprendizagem de Matemática. São Paulo, 2007.

SANTOS, J. P. O., and ESTRADA, E. L. Problemas Resolvidos de Combinatória, 1 ed. Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2007.

SANTOS, J. P. O., MELLO, M. P., and MURARI, I. Introdução à Análise Combinatória, 4 ed. Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2007.

SCHEINERMAN E. R.. Matemática discreta: Uma introdução. Editora Cengage Learning.
2016

VAGHI, F. V. R. Historica Matematica: Uma história da matemática e dos matemáticos. 1. Ed.
Edição do kindle. 2022. E-book