UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ALEX LACERDA LEITE

EQUAÇÕES ABORDADAS NO ENSINO MÉDIO: ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS E MÉTODOS ALGÉBRICOS, GEOMÉTRICOS E COMPUTACIONAIS DE RESOLUÇÃO

VITÓRIA DA CONQUISTA - BA
2023

ALEX LACERDA LEITE

EQUAÇÕES ABORDADAS NO ENSINO MÉDIO: ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS E MÉTODOS ALGÉBRICOS, GEOMÉTRICOS E COMPUTACIONAIS DE RESOLUÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT - UESB como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Flaulles Boone Bergamaschi

VITÓRIA DA CONQUISTA - BA

2023

L55e Leite, Alex Lacerda.
Equações abordadas no ensino médio: alguns aspectos históricos e métodos algébricos, geométricos e computacionais de resolução. /Alex Lacerda Leite, 2023.
71f. il.
Orientador (a): Dr. Flaulles Boone Bergamaschi.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2023.
Inclui referências. 66- 58.
1.Matemática - Ensino Médio. 2. Equações. 3.Resoluções. I. Bergamaschi, Flaulles Boone. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - Ba. III. T.

CDD: 510.7

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção-CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

Alex Lacerda Leite

Equações abordadas no Ensino Médio: alguns aspectos históricos e métodos algébricos, geométricos e computacionais de resolução

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Flaulles Boone Bergamaschi - UESB

Prof.ª Dr.ª Clênia Andrade Oliveira de Melo - UESB

Prof.ª Dr.ª Antônia Jocivania Pinheiro - UFERSA

Vitória da Conquista - Ba

Aprovada em 01 de setembro de 2023

Documento assinado eletronicamente por **Antônia Jocivania Pinheiro**, **Usuário Externo**, em 02/09/2023, às 18:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

Documento assinado eletronicamente por **Flaulles Boone Bergamaschi**, **Professor Titular**, em 26/09/2023, às 08:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

Documento assinado eletronicamente por **Clênia Andrade Oliveira de Melo**, **Professor**, em 26/09/2023, às 18:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço a Deus por ter me concedido a vida, a disposição e a coragem para enfrentar desafios e superar as dificuldades.

Agradeço a meus pais por acreditarem no sucesso de todos os filhos numa época em que o acesso aos estudos era cheio de obstáculos. Minha eterna gratidão a meus pais Chico Leite (in memoriam) e minha mãe Raquel por tudo o que passaram em prol dos filhos, sempre com todo zelo, amor e carinho.

A minha esposa Tatiana, com quem há mais de 20 anos divido toda e qualquer alegria ou tristeza, sucesso ou decepção, e que é minha companheira de vida em todos os momentos. Obrigado por estar sempre ao meu lado e por toda a confiança e incentivo.

A minha filha Alícia, que me orgulha e realiza como pai. Perdoe os momentos de ausência, Você me inspira e me motiva.

A todos os meus irmãos, cunhadas e sobrinhos, com quem a minha vida está intensamente ligada.

Ao meu mestre, professor e orientador Dr. Flaulles Boone Bergamaschi que em momentos de dificuldade me fez acreditar que poderia prosseguir. Jamais poderei retribuir e serei a ele eternamente grato.

A todos que participaram e participam desse fantástico programa PROFMAT. Estão realizando o sonho quase impossível de professores de matemática pelo Brasil afora, possibilitando algo quase impensável anos atrás, que é fazer um curso de mestrado, crescendo profissionalmente e se realizando como pessoa.

A todos aqueles que participaram do PROFMAT – UESB, dedicando seu tempo a nos servir. Um agradecimento especial aos professores, que mudam vidas e criam esperanças.

E, finalmente, a meus colegas de curso. Crescemos juntos em meio a risadas, brincadeiras e momentos de angústia e ansiedade. Criamos uma família que espero permaneça sempre unida.

Meu muitíssimo obrigado a todos que participaram dessa caminhada.

A matemática pura é, à sua maneira, a poesia das ideias lógicas.

Albert Einstein

RESUMO

O presente trabalho mostra, através do estudo histórico das equações feito por meio de pesquisa bibliográfica, a contribuição dos egípcios, babilônios, gregos, hindus, árabes, chineses e europeus e como foram se consolidando os vários métodos para se resolver equações. Esse aspecto histórico das equações é importante no sentido em que permite uma aprendizagem significativa dos alunos e aumenta a amplitude de seu conhecimento ao ter contato com as várias técnicas de resolução. Ao longo do tempo os matemáticos foram desenvolvendo soluções para equações cada vez mais complexas. Uma das grandes contribuições foi dada pelo matemático francês Galois, que concentrou seus estudos nas relações entre as soluções de equações polinomiais. Outro aspecto desse trabalho é analisar o impacto das tecnologias, cada vez mais avançadas, nas metodologias de ensino de matemática atuais. Também propõe que estudo de equações de 3º e 4º graus, mesmo não estando entre os conteúdos a serem aplicados, podem ter um papel motivador para os alunos do Ensino Médio ao utilizar técnicas aprendidas no Ensino Médio e técnicas de dedução e investigação matemática. Combinar diferentes métodos é uma alternativa para estimular a aprendizagem matemática de equações no Ensino Médio, pois, enquanto os métodos algébricos desenvolvem um pensamento mais abstrato, analítico e simbólico, os métodos geométricos expandem as habilidades de interpretação espacial e reconhecimento de padrões e relações espaciais.

Palavras-chave: Matemática, equações, resoluções. Ensino Médio.

ABSTRACT

This work shows, through the historical study of equations carried out through bibliographical research, the contribution of the Egyptians, Babylonians, Greeks, Hindus, Arabs, Chinese and Europeans and how the various methods for solving equations were consolidated. This historical aspect of equations is important in the sense that it allows students to learn significantly and increases the breadth of their knowledge when they have contact with the various solving techniques. Over time, mathematicians developed solutions to increasingly complex equations. One of the great contributions was made by the French mathematician Galois, who focused his studies on the relationships between the solutions of polynomial equations. Another aspect of this work is to analyze the impact of increasingly advanced technologies on current mathematics teaching methodologies. It also proposes that the study of 3rd and 4th degree equations, even though they are not among the content to be applied, can have a motivating role for high school students by using techniques learned in high school and deduction and mathematical investigation techniques. Combining different methods is an alternative to stimulate mathematical learning of equations in high school, because, while algebraic methods develop more abstract, analytical and symbolic thinking, geometric methods expand the skills of spatial interpretation and recognition of patterns and spatial relationships.

Keywords: Mathematics, equations, resolutions. High school.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Ensino Médio nos últimos anos vem mostrando resultados péssimos quando se trata de analisar como os alunos estão indo nos exames de avaliação nacionais e internacionais, e isso é ainda mais grave quando são analisados o desempenho e as notas nas disciplinas de ciências exatas e, em específico, na matemática, que é tida desde sempre como vilã pela maioria deles.

Com o mundo cada vez mais dinâmico e rápido, com acesso cada vez maior às tecnologias, aumenta também a cada dia o desafio de incutir nos alunos do Ensino Fundamental a importância da matemática, tornando a tarefa de alfabetizar algebricamente um caminho cheio de obstáculos. É comum ouvir dos alunos, quando a álgebra é introduzida na sala de aula, que eles não sabem quais são suas utilizações em suas vidas, ou em termos matemáticos, quais são suas aplicações práticas.

Abordar o ensino de matemática no ensino médio sob a ótica da aplicação pode, então, romper com a ideia difundida entre muitos alunos de que a Matemática consiste apenas em decorar fórmulas e executar cálculos difíceis e sem utilidade prática e levá-los a perceber o potencial desta disciplina como instrumento científico indispensável para a compreensão e resolução de problemas do cotidiano, motivando-os para a aprendizagem e contribuindo no aumento dos índices de proficiência matemática.

De fato, de acordo com os principais indicadores de qualidade da educação, como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), o Brasil tem baixa proficiência em leitura, matemática e ciências, na comparação com os outros 79 países que participaram da avaliação. Especificamente, e segundo essa mesma avaliação, no ano de 2018, do total de estudantes brasileiros com 15 anos de idade, 68,1% não possuíam nível básico de matemática, não obtendo o mínimo de competência nesta matéria necessário para o exercício pleno da cidadania. Há então, segundo o INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), órgão vinculado ao Ministério da Educação (MEC), a necessidade de se buscar alternativas para mudar esse quadro, como ações que incluam, por exemplo, a implantação do ensino em tempo integral e o desenvolvimento de currículos envolvendo temas matemáticos capazes de subsidiar a interpretação e a solução de problemas ligados à prática cotidiana (BRASIL, 2019).

Esse mesmo PISA, que é uma iniciativa internacional de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, e de acordo com o relatório do PISA (2022) no Brasil, mais de um em cada três (36%) estudantes de 15 anos de idade tinha repetido uma série, pelo menos, uma vez (apud CNN, 2022). E, nesse contexto, a Matemática representa, para muitos alunos, um grande obstáculo a ser superado.

Quem enfrenta diariamente o desafio de ensinar matemática percebe que a distância entre o que é ensinado e o que realmente acontece na vida cotidiana é um dos maiores fatores para a aversão à Matemática (e também outras disciplinas). Por muitas vezes alunos tentam uma aprendizagem mecânica apenas porque lhe é exigido esse conhecimento no ENEM e nos vestibulares, mas não demonstram muito prazer nem curiosidade pela disciplina.

No Ensino Médio no Brasil, a situação se torna ainda mais complicada e, por conta disso, é relevante destacar o papel crucial dos professores que devem buscar motivar e estimular a curiosidade pela disciplina tornando-a mais atraente, investigadora e que seja pautada nos desdobramentos sociais e históricos, alicerçada na modelagem e resolução de problemas e entrelaçada entre os diversos assuntos. Conforme Leon (2011) mais de 75% dos problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas envolvem a resolução de sistemas lineares em alguns estágios e os livros de Ensino Médio que tratam do assunto não estão condizentes com as necessidades da realidade, por isso é essencial o conhecimento pleno das equações. Para Silva e Costa (2014),

> “Por mais que o professor já tenha ministrado uma aula diversas vezes, convém sempre procurar novos ângulos para tornar a aula mais atraente para o aluno e até mesmo para quebrar a monotonia de repetir os mesmos assuntos todo ano. A fim de preparar suas aulas de modo a dosar a apresentação que fará em sala, frequentemente o professor irá recorrer aos livros didáticos que, na maioria das vezes, são a sua única fonte de referência. É necessário que esses livros sejam confiáveis, objetivos e precisos. No entanto existem muitos que possuem falhas e deficiências.”

Dentre os problemas que os alunos mais temem no ensino matemático pode-se dizer que as equações ocupam uma posição importante, um conteúdo difícil de lidar, e no que diz respeito a resolução de equações, nota-se que é um tema que aflige e muito, os alunos de ensino médio em todo país. Para Bressan e Weber (2019) todo tipo de ensino deve estar imerso em constante evolução, pois este tem que se adaptar a sociedade que agora está inserida nas mais diversas formas de tecnologias. Uma boa forma de conseguir compreender melhor esse conteúdo matemático é, além de praticá-los com frequência, aplicá-los a situações do dia a dia. Quando estudamos equações (e funções) podemos, por exemplo, verificar qual a quantidade de combustível necessária para levar um carro de um lugar até outro, calcular tarifas de telefone, preço de táxi em função da distância percorrida e o salário de um vendedor que recebe comissão por suas vendas, além de um salário fixo, bem como analisar a trajetória oblíqua realizada por uma bola de futebol após ser chutada por um jogador.

Para Negromonte et al. (2019), são vários os recursos que facilitam a resolução de problemas matemáticos e que são adequados ao nível de dificuldade do problema dado a fim de auxiliar nas dificuldades que os alunos apresentam. Uma dessas ferramentas é a aplicação de fundamentos algébricos por meio de equações, onde são formuladas situações envolvendo valores desconhecidos. Para se beneficiar plenamente dessa ferramenta, é fundamental que o aluno tenha um domínio sólido dos conceitos algébricos, que é um aspecto abstrato da matemática e que é introduzido na vida do aluno ainda no Ensino Fundamental. Outro recurso que pode auxiliar os estudantes na resolução dos problemas matemáticos é a utilização de gráficos, onde é possível visualizar de forma clara e objetiva as informações presentes na questão. É importante que os alunos saibam como ler, interpretar e construir gráficos, pois com eles é possível mostrar o comportamento de uma função bem como encontrar informações importantes como interseções, máximos e mínimos, o que só é possível a partir do conhecimento de equações.

Outro aspecto importante no ensino de matemática é a utilização de softwares computacionais que surgem como uma ferramenta importante para a resolução de sistemas lineares, equações e funções, trazendo um enfoque tecnológico e uma dinâmica diferente para aulas, contribuindo, assim, para despertar maior interesse pela disciplina. O acesso cada vez mais fácil a computadores, calculadoras científicas e celulares tornaram a resolução de equações muito mais rápida e fácil, com resultados instantâneos, e o uso de ferramentas como GeoGebra possibilitam a resolução de equações bem mais complexas, inclusive com a possibilidade de visualização de seus resultados através de gráficos.

Esse trabalho busca demonstrar a importância do ensino das equações e da resolução de problemas durante o Ensino Médio em alguns dos seus aspectos, dada a sua relevância na compreensão desses conceitos matemáticos e sua conexão com aplicações do mundo real. E mostrar que conhecer a história e os diferentes métodos de resolução podem ser caminhos que levem a fortalecer a compreensão dos conceitos matemáticos e tornar a matemática mais tangível e interessante ao permitir aplicar seus conhecimentos em diversas situações da vida real, dentro e fora da escola.

Para analisar esses aspectos do ensino de equações foi feita uma abordagem metodológica pautada em estudos sobre o tema, de forma qualitativa e bibliográfica, englobando estudos de bases de dados científicos trazendo problemáticas existentes nessa disciplina no Ensino Médio. O presente trabalho está organizado em 7 capítulos correlacionados. Os capítulos 1 e 2 discorrem sobre as dificuldades encontradas durante a aplicação das equações e os diversos tipos dessas equações que fazem parte do conteúdo programático do Ensino Médio. O capítulo 3 apresenta os vários métodos de resolução que foram sendo desenvolvidos ao longo do tempo, envolvendo, também, os aspectos históricos. A seguir, o capítulo 4 traz um breve resumo da vida de Galois e de sua contribuição na resolução de polinômios. O capítulo 6 fala sobre o uso cada vez maior de computadores e de softwares educativos no estudo das equações. O capítulo 5 relata uma prática desenvolvida em sala de aula, apresentando, aos alunos do Ensino Médio as equações cúbicas e quárticas e, por fim, o capítulo 7 traz as considerações finais sobre esse trabalho.

1. DESAFIOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Para muitos, a construção da matemática é uma das maiores obras coletivas que a humanidade já produziu, mas talvez o rigor e exatidão de suas regras crie uma aversão em muitos alunos. É certo que a ciência moderna muito deve à matemática, pois, como disse Galileu Galilei, “o livro da natureza está escrito em caracteres matemáticos”. E essa engenhosidade da matemática se vê quando, por exemplo, suas equações se equilibram ao se descobrir o valor de suas incógnitas, trazendo um reconfortante prazer mesmo naqueles que não nutrem especial apreço pela disciplina.

Segundo Lara (2013, p.9) “A disciplina Matemática passa ser vista como meio privilegiado para o alcance da racionalidade, da inteligência do pensamento crítico e do desenvolvimento individual e social”. O uso de experiências, observações, comparações e explorações do concreto possibilitam ao aluno construir seu conhecimento, modificando situações, interpretando e buscando soluções, o que certamente irá auxiliar para uma aprendizagem sólida. No entanto, criou-se a convicção de que alunos com melhor desempenho em matemática são mais inteligentes que aqueles que não gostam de matemática, o que causa o sentimento de frustração e impotência em muitos deles e só piora a sua aprendizagem.

O ensino da matemática se faz tradicionalmente sem referência ao que os alunos já sabem, mesmo reconhecendo que os alunos podem aprender alguns conceitos sem o que façam necessariamente em sala de aula. Como também afirma D´Ambrósio (1991), “[...] há algo errado com a matemática que estamos ensinando. O conteúdo que tentamos passar adiante através dos sistemas escolares é obsoleto, desinteressante e inútil”.

No processo de aprendizagem matemática é importante considerar o conhecimento prévio, fazendo a contextualização, dos conteúdos associando-os a uma prática contínua de atividades supervisionadas pelo professor que, exercendo a função de mediador, precisa estar bem preparado e disposto a realizar um trabalho criativo que prenda a atenção do aluno (LARA, 2013).

Cada vez mais se faz necessário que o professor crie experiências que despertem o interesse dos alunos e estimule o seu raciocínio. Através da utilização de recursos que possam contribuir para a compreensão do conteúdo de maneira significativa, como jogos, experimentos, vídeos, entre outras atividades práticas. Ao usar esses recursos, o professor poderá criar atividades que envolvam as habilidades e competências matemáticas, ao mesmo tempo em que serão desenvolvidas habilidades de raciocínio lógico e construção de argumentos.

Para isso o professor de matemática deve utilizar metodologias de ensino e recursos didáticos variados, considerando o progresso alcançado pelos alunos e diversificando a forma de apresentar o conteúdo da disciplina. Nesse sentido, atividades interativas terão grande influência na aprendizagem, desenvolvendo percepções e raciocínio lógico e o gosto pela disciplina tornando-se essencial nesse processo de ensino aprendizagem. A repetição como é feita na escola monótona contraria a lei da novidade e a necessidade de constante estimulo (CESAR, 2012).

2. EQUAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

2.1 SIGNIFICADO DA PALAVRA EQUAÇÃO

Equação é uma igualdade que só se verifica para valores convenientes de certas quantidades que nela figuram, ou incógnitas. (“Equação”, [s.d.]) E, para Capelin e Nogueira (2013), equação é uma maneira de resolver situações nas quais surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade. A palavra — equação vem do latim equatione, equacionar, que quer dizer igualar, pesar, igualar em peso, remetendo à ideia de uma balança de dois pratos. E a origem primeira da palavra equação vem do árabe adala, que significa “ser igual a”, de novo a ideia de igualdade.

Por serem desconhecidos, esses valores são representados por letras. Por isso na língua portuguesa existe uma expressão muito usada: o x da questão. Ela é utilizada quando temos um problema dentro de uma determinada situação. Matematicamente, dizemos que esse x é o valor que não se conhece. Atualmente, chamamos o termo desconhecido de incógnita, que é uma palavra originária do latim incognitu, que também quer dizer “coisa desconhecida”. A incógnita é um símbolo que está ocupando o lugar de um elemento desconhecido em uma equação (DARRONQUI, 2014).

2.2 A IMPORTÂNCIA DAS EQUAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

As equações são ferramentas matemáticas fundamentais que permitem a resolução de problemas complexos. Elas são usadas em diversas áreas da ciência e da tecnologia, como engenharia, física, química e finanças, entre outras. Uma equação é uma sentença matemática aberta, ou seja, sentença matemática que possui ao menos uma incógnita, e que estabelece uma igualdade entre duas expressões matemáticas, variando desde uma simples equação linear até as mais complexas, como uma equação diferencial, que envolve derivadas de funções. Por exemplo, se considerarmos a seguinte frase: $x - 5 = 3$, se $x = 8$, a frase é verdadeira enquanto que para quaisquer outros valores atribuídos a x ela será falsa.

Equações podem ser usadas para modelar fenômenos complexos em diferentes áreas do conhecimento. Na física, por exemplo, as equações de movimento descrevem o comportamento de objetos em movimento, as equações de onda descrevem a propagação de ondas em meios materiais, na matemática financeira, são usadas para modelar o comportamento de investimentos e fluxos de caixa e na química seu uso está relacionado à descrição de reações químicas que ocorrem entre diferentes substâncias, apenas para citar algumas das inúmeras aplicações.

> “O conhecimento matemático é fundamental em uma grande diversidade de situações, por exemplo, na análise de diversos fenômenos, como instrumento para lidar com situações cotidianas ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento”. (BRASIL, 2002)

Elas permitem a modelagem matemática de fenômenos complexos, além de possibilitar a obtenção de soluções para problemas que seriam impossíveis de serem resolvidos de outra forma. No entanto, a resolução de equações pode ser uma tarefa desafiadora, principalmente quando os alunos avançam para o ensino médio sem as habilidades necessárias em matemática..

É importante lembrar que a utilização de equações nem sempre é uma tarefa simples. Algumas equações podem ser difíceis de serem resolvidas, exigindo conhecimentos avançados de matemática e uma abordagem sistemática para resolvê-las. Além disso, em alguns casos, pode ser necessário usar métodos numéricos para obter soluções aproximadas para equações que não possuem soluções exatas. A utilização de problemas para contextualizar conteúdos é um importante recurso durante o ensino de matemática porque favorece e desperta raciocínio ao exigir uma interpretação do que lhe é solicitado calcular, fomentando a curiosidade, a criatividade e aumento do interesse pela matemática. Permite também que o aluno encontre um caminho por vezes diferente do convencional e solucione o problema a partir de sua inventividade, geralmente gerando satisfação e apreço pela disciplina.

A resolução de problemas e a exploração-investigação matemática em sala de aula devem ser vistas como uma opção de construção de conhecimentos e como estratégia para desmistificar o conceito de que é uma matéria pronta e acabada, resumida a regras e fórmulas rígidas, o que a desqualifica como ciência e campo de pesquisa e permite que apenas alguns privilegiados tenham o “dom” de aprendê-la. Nesse sentido, a matemática escolar no ensino fundamental e médio deve buscar novas atitudes perante esta ciência e as novas relações entre quem aprende e o objeto de conhecimento a ser aprendido, estabelecendo claras ligações entre a resolução de problemas e a exploração-investigação matemática.

Nesse sentido, e dada a importância do uso dos problemas matemáticos no ensino, Lambdin e Walcott (2007, p. 3), se baseando nas escolas americanas, elaboraram um quadro identificando seis “fases” do ensino da matemática que foram implantadas no decorrer do século XX e suas características estão dispostas no Quadro 1:

1ª Fase: Exercício e prática;

2ª Fase: Aritmética significativa;

3ª Fase: Matemática Moderna;

4ª Fase: Volta às bases;

5ª Fase: Resolução de problemas;

6ª Fase: Padrões e responsabilidade.

Quadro 1 - Relações entre as Fases da Educação Matemática e as Teorias Psicológicas de Aprendizagem

Fases	Principais Teorias e Teóricos	Foco	Como atingir
Exercício e prática (aprox. 1920 – 1930)	Coneccionismo e Associacionismo (Thorndike)	Facilidade com cálculo.	• Rotina, memorização de fatos e algoritmos. • Quebrar todo o trabalho em séries de pequenos passos.
Aritmética significativa (aprox. 1930 – 1950s)	Teoria da Gestalt (Brownell, Wertheimer, van Engen, Fehr)	Compreensão de ideias e habilidades aritméticas. Aplicações da matemática em problemas do mundo real.	• Ênfase nas relações matemáticas. • Aprendizagem incidental. • Abordagem de atividade orientada.
Matemática Moderna (aprox. 1960 – 1970s)	Psicologia do desenvolvimento, teoria sociocultural (ex: Brunner, Piaget, Dienes)	Compreensão da estrutura da disciplina.	• Estudo das estruturas matemáticas. • Currículo em espiral. • Aprendizagem por descoberta.
Volta às bases (aprox. 1970s)	(Retorno ao) coneccionismo.	(Retorno à) preocupação com o desenvolvimento do conhecimento e das habilidades.	• (Retorno à) aprendizagem de fatos por exercício e prática.
Resolução de problemas (aprox. 1980s)	Construtivismo, psicologia cognitiva e teoria sociocultural (Vygotsky)	Resolução de problemas e processos de pensamento matemático.	• Retorno à aprendizagem por descoberta. • Aprendizagem através da resolução de problemas.
Padrões, avaliação, responsabilidade (aprox. 1990 até o presente)	Psicologia cognitiva, teoria sociocultural vs renovada ênfase na psicologia experimental. (NCBL[3])	Guerras matemáticas: preocupação com a alfabetização matemática dos indivíduos vs preocupação com a gestão dos sistemas educacionais.	• NSF[4] – desenvolvimento de currículos baseados em padrões e orientados ao estudante vs foco na preparação para os testes com expectativas específicas.

Fonte: Lambdin e Walcott (2007)

Segundo Lambdin e Walcott (2007, p5), cada uma das fases tem a sua importância porque cada uma delas está relacionada a um determinado momento em que a educação, em geral, passava por alterações fundamentais e radicais, mudando os rumos do ensino e, a cada época, usando novas práticas tidas como inovadoras no processo da educação matemática, sendo também aplicadas em outras partes ao redor do mundo.

2.3 RELAÇÃO ENTRE EQUAÇÕES E FUNÇÕES

Equações e funções são dois conceitos matemáticos estreitamente relacionados, sendo que as funções podem ser representadas por equações e essa relação está presente em quase todos os conteúdos do Ensino Médio. Se uma equação é uma sentença matemática que possui igualdade entre duas expressões algébricas que possuem uma ou mais incógnitas, uma função é uma relação matemática entre duas grandezas, que associa a cada elemento do domínio um único elemento do contradomínio. (TRICHES, 2022)

Uma função pode ser representada por meio de uma equação, que descreve a relação matemática entre as grandezas envolvidas. Por exemplo, a função $f(x) = 3x$ é uma equação que descreve uma função linear que triplica o valor da variável x para cada valor definido para y, onde $y = f(x)$. Por outro lado, é possível representar uma equação como uma função. Nesse outro exemplo, a equação $x - y = 3$ pode ser representada como uma função de x, isolando y em função de x e obtendo $y = x - 3$. Dessa forma, podemos escrever essa equação como uma função $f(x) = x - 3$.

Assim, as equações e as funções são conceitos interdependentes e complementares, e é importante entender a relação entre eles para entender a matemática como um todo. Em resumo, uma função é uma relação matemática entre duas grandezas, e uma equação é uma expressão matemática que estabelece uma igualdade entre duas expressões, podendo representar funções.

2.4. EQUAÇÕES ABORDADAS NO ENSINO MÉDIO

2.4.1 EQUAÇÕES LINEARES

Mesmo que não estejam inseridas como conteúdo programático do Ensino Fundamental II, sempre se faz necessário reforçar conceitos e dirimir dúvidas sobre a resolução de equações lineares quando os alunos chegam ao Ensino Médio, principalmente quando surgem na forma de problemas que exigem interpretação. Elas são um tópico fundamental no ensino médio, tanto em matemática quanto em física. De modo geral as equações lineares são expressões matemáticas que envolvem variáveis e coeficientes lineares, que podem ser resolvidas para encontrar o valor das variáveis desconhecidas. Quando relacionadas a funções lineares, admite a forma geral $y = ax + b$, onde a é o coeficiente angular (ou taxa de variação) e b é o termo constante.

O método mais comumente aplicado na resolução dessas equações é isolar a variável desconhecida e utilizar propriedades da igualdade e operações matemáticas em ambos os lados da equação. Quando uma equação representa uma função, isso é, relaciona dois conjuntos A e B, associando cada elemento do primeiro conjunto a um, e somente um, elemento do segundo conjunto, obtém-se o valor de uma variável dependente y em função do valor atribuído à variável independente x, resultando nos pares ordenados (x, y) que podem ser marcados num plano cartesiano e, a partir daí, fazer a sua representação gráfica, nesse caso uma reta, e interpretar o significado geométrico da equação, auxiliando em problemas que envolvem movimento e problemas de proporção, por exemplo.

Em resumo, equação linear é uma ferramenta fundamental para a compreensão da matemática e de muitas outras áreas da ciência. Os alunos que dominam as equações lineares no ensino médio estarão certamente mais bem preparados para avançar em cursos envolvendo ciências.

2.4.2 EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

As equações quadráticas são importantes porque muitos fenômenos naturais e problemas do mundo real podem ser modelados por equações desse tipo. Por exemplo, o movimento de um objeto em queda livre sob a ação da gravidade pode ser modelado por uma equação quadrática. No Ensino Médio, os alunos aprendem a resolver equações quadráticas usando diferentes métodos, entre eles, estão: a fatoração, completar quadrados e a fórmula de Bhaskara. Eles também aprendem a interpretar os resultados da equação, como o significado das raízes e dos coeficientes. As equações quadráticas também são frequentemente utilizadas em problemas de otimização, que envolvem encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função.

Para Silva (2019):

> “O conteúdo de equação de segundo grau é de extrema importância para o progresso na matemática e outras disciplinas como física, sendo necessária uma abordagem ampla e detalhada. Entretanto, podemos observar dificuldades na resolução de questões e na compreensão deste conteúdo. A temática é abordada inicialmente no 9° ano do ensino fundamental, ainda assim alunos do 3° ano apresentam dificuldades para sua aprendizagem” (SILVA, 2019, p 14).

Em resumo, o estudo das equações quadráticas no ensino médio é importante para a compreensão de conceitos fundamentais em matemática e para a aplicação desses conceitos em problemas do mundo real.

Do século XV ao XVII, muitos foram os grandes matemáticos que desenvolveram formas distintas de representação e resolução da equação polinomial do 2º grau e foram construindo os vários métodos para resolvê-las. No Capítulo 9 serão discutidos e demonstrados alguns desses métodos.

2.4.3 EQUAÇÕES CÚBICAS (E DE MAIOR GRAU)

No Ensino Médio atual as equações cúbicas (e as outras de maior grau) são pouco estudadas, em parte pelo tempo escasso que a carga horaria da disciplina oferece. Ainda assim, durante o estudo dos polinômios os alunos podem aprender a resolver equações cúbicas usando alguns métodos, como a fatoração, a redução de coeficientes e, eventualmente, com a fórmula de Cardano-Tartaglia.

As equações polinomiais de grau três (ou maior), mesmo que, como dito, ocasionalmente sejam abordadas no Ensino Médio, não vêm acompanhadas dessa interpretação geométrica e se limitam à utilização de teoremas e dispositivos para a determinação das raízes da equação, só havendo aprofundamento desse conteúdo em cursos mais avançados de matemática, após a conclusão da educação básica.

2.5. ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS DAS EQUAÇÕES

A história da Matemática, especialmente das equações, de uso rotineiro durante todas as fases da vida escolar, ajuda a entender o processo de evolução, as descobertas dos estudiosos matemáticos ao longo do tempo e a forma como ela também influenciou (e influencia) na formação do pensamento humano e na nossa relação com a natureza e com o mundo.

Machado (1993) afirma que a história da Matemática é essencial para a formação do professor, pois quando se estuda a história da Matemática, tem-se uma visão mais ampla da disciplina. E essa história pode ser apresentada na sala de aula em vários contextos, como quando discutimos problemas curiosos e enigmas para ilustrar o ensino de algum conteúdo, notadamente quando se refere a equações, estimulando o raciocínio em atividades que diferem das infindáveis sequências de exercícios e memorização de métodos e fórmulas. Nesse sentido, é imensa a importância da álgebra na busca de soluções de problemas corriqueiros do cotidiano, deduzindo seus conceitos e determinando quais fórmulas algébricas utilizar.

Nesse contexto, Pitzer e Fávaro (2017) colocam que os papiros são uma das provas matemáticas mais importantes do Antigo Egito, mostrando de forma escrita, a habilidade deste povo em épocas tão primitivas. Entre estes papiros, destacam-se o de Moscou, Berlin, Kahun e Rhind, todos eles são datados por volta de 2000 a 1600 a.C.. O Papiro de Rhind ou Ahmes, escrito por volta de 1650 a.C., é um dos mais importantes registros antigos já encontrados pois demonstra o conhecimento matemático existente naquela época e, com isso, possibilitando à geração atual entender a metodologia utilizada por eles. Nele estão contidos os primeiros indícios do uso de equações. Ele foi adquirido por Alexander Henry Rhind, na cidade de Luxor - Egito, em 1858 e também recebe o nome de Ahmes, um escriba que relata no papiro a solução de problemas relacionados à Matemática.

Segundo Boyer (1996), uma grande parte das informações que os papiros trazem eram usados de forma prática, tendo os cálculos como elementos principais, sempre associados à crescente atividade comercial e ao ensino, através de exercícios, enigmas e recreações matemáticas que, com o desenvolvimento da álgebra, seriam caracterizados hoje, em sua maioria, como equações do 1º grau. E para resolver esses problemas envolvendo equações lineares era utilizado o Método da Falsa Posição. Neste período a incógnita x era chamada de "aha" e o método consistia da escolha de um número arbitrário como valor para x. Um valor escolhido substituía essa incógnita e o valor encontrado era comparado com o resultado desejado. Ao final, determinava-se um fator de correção para obter o valor correto para a incógnita x, satisfazendo a equação original. Dois exemplos práticos do Método da Falsa Posição estão descritos no Anexo 1.

Em relação às equações polinomiais do 2º grau há poucos registros deixados pelos egípcios, mas os historiadores matemáticos imaginam que eles dominavam determinadas técnicas de solução para essas equações. Um dos exemplos é encontrado no Papiro de Berlim e essa certeza também é baseada no fato de que foi encontrado no Papiro de Kahun uma solução da equação que hoje é escrita como $x^2+y^2=k$, k é um número positivo, pelo método da falsa posição, que foi desenvolvido pelos egípcios para encontrar a resolução da equação do 1º grau (ARAÚJO, OLIVEIRA, CARNEIRO, 2021).

Historicamente, há poucos registros de equações de 2° grau e outros problemas matemáticos na civilização egípcia, entretanto há um papiro que data por volta de 1950 a.C., encontrado em Kahun, que contém o seguinte problema: “Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como 1: 3/4" (EVES, 2004, p. 74). Neste papiro aparece pela primeira vez a solução de uma equação do 2° grau. Na notação atual este problema poderia ser escrito da seguinte forma: “A soma de áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é igual ao quadruplo do lado do outro” (PEDROSO, 2010, p.2), cuja solução encontraremos no Anexo 2.

O método geométrico utilizado por Al-Khwarizmi (conhecido atualmente como método de completar quadrados) na resolução de equações do segundo grau, se utilizado em sala de aula, oportuniza uma aprendizagem mais significativa do conteúdo, pois exige que o aluno transite entre as representações algébricas e geométricas ao resolver a equação do segundo grau. Nesse contexto Duval afirma que: “A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação” (DUVAL, 2003, p.14).

Na Mesopotâmia, numa tábua de argila datada de, aproximadamente, 1.700 a.C. aparece um registro de resolução de equação quadrática, apresentando apenas a raiz positiva, cujo enunciado era assim concebido: “*Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870?” o que seria, em notação atual,* $x^2 - \mathrm{x} = 870$*.* (FRAGOSO, 2000). A engenhosa solução está descrita no Anexo 3.

Os gregos criaram sua base matemática em conceitos, axiomas e teoremas elaborados por eles mesmos, mas tinham dificuldades relacionadas aos números racionais e irracionais e da definição do infinito. Buscavam a resolução de problemas matemáticos através da geometria, inclusive para equações quadráticas, como mostrado no exemplo do Anexo 4.

A matemática grega refere-se à tradição matemática que se desenvolveu na Grécia Antiga, principalmente entre os séculos VI a.C. e IV a.C.. Os gregos fizeram contribuições significativas para o campo da matemática, estabelecendo as bases para o pensamento matemático rigoroso e influenciando o desenvolvimento da matemática ocidental. (ROSA, 2012)

Os primeiros matemáticos gregos, conhecidos como pré-socráticos, estavam interessados principalmente na geometria. Tales de Mileto, por exemplo, é conhecido por seu teorema sobre triângulos semelhantes. Pitágoras, fundador da escola pitagórica, foi o responsável pela descoberta de várias propriedades numéricas, incluindo o famoso teorema de Pitágoras. No entanto, foi com os matemáticos posteriores, como Euclides, que a matemática grega atingiu seu auge. Euclides é famoso por seu livro "Os Elementos", onde há proposições de resoluções geométricas de equações do 2º grau, que é considerado um dos trabalhos mais influentes em matemática de todos os tempos. Nesse livro, ele apresentou uma abordagem axiomática para a geometria, estabelecendo definições, axiomas e postulados, a partir dos quais deriva uma série de teoremas e provas. Os Elementos de Euclides tiveram um impacto duradouro no desenvolvimento da matemática durante séculos.

Além desses matemáticos, outros nomes importantes na matemática grega incluem Arquimedes, Herão de Alexandria, Diofanto e Eratóstenes. Cada um contribuiu para o desenvolvimento do pensamento matemático grego em sua época.

A matemática grega teve um impacto duradouro na matemática ocidental e suas ideias e métodos ainda são pensados e aplicados hoje. A abordagem rigorosa de Euclides para a geometria, com a construção progressiva de conclusões por meio do pensamento lógico-dedutivo na geração de provas influenciaram profundamente a matemática posterior, e muitos dos teoremas e resultados descobertos pelos matemáticos gregos ainda são considerados fundamentais.

De acordo com Fragoso (2000), a Matemática hindu teve grande contribuição na história das equações. Seus matemáticos de maior destaque foram Bhaskara de Akaria, que no, século XII, usou uma solução que se assemelha à usada nos tempos atuais, e Sridhara que, no mesmo período, determinou a regra que deu origem a fórmula que hoje usamos nas escolas de Ensino Médio, conhecida no Brasil como de Bhaskara. No Anexo 5 encontramos uma solução usada por Bhaskara para resolver um problema de ordem comercial e financeira, expressa em linguagem atual.

De acordo com Darela, Cardoso e Rosa (2011), os árabes contribuíram muito para a preservação do conhecimento ocidental, fato creditada aos califas al-Mansur, Harum al-Rachid e al-Mamum, que foram responsáveis, em seus reinados, pela tradução, do grego para o árabe, dos mais importantes escritos científicos conhecidos, entre eles O Almagesto, de Ptolomeu e Os Elementos, de Euclides.

Também de acordo com Fragoso (2000), Al-Mamum foi o fundador, no século IX, de um centro científico semelhante à famosa Biblioteca de Alexandria, denominado Casa da Sabedoria (Bait al-hikma), em Bagdá. Para esse local se dirigiram muitos brilhantes matemáticos como Mohamed ibn-Musa al-Khowarizmi, autor, entre outras, da obra Hisab al-jabr wa'Imuzabalah em 825, sendo traduzida como Ciência das equações, onde apresenta a equação (e a resolução) polinomial do 2º grau de forma retórica e com comprovação geométrica, que viria a ser o método de completar quadrados. Mesmo que em muitos casos só apresentasse a raiz positiva, diferia do modo de resolução dos gregos. No Anexo 6 temos a descrição, adaptado de NETO (2011), desse método usado por Al-Khowarizmi, de comprovar geometricamente as raízes de uma equação do 2º grau, que deu início a chamada álgebra geométrica.

A China também contribuiu na história da resolução das equações. Em 1303, o grande matemático chinês Chu Shih-chieh, apresentou um método para a resolução de equações quadráticas em sua obra Ssu-yüan yú-chien (Precioso espelho dos quatro elementos) em que se baseava em aproximações sucessivas, de grande precisão, denominada método fan-fan, que chega à raiz positiva da equação, técnica que foi redescoberta em 1819 pelo matemático inglês William George Horner, ficando conhecida como o método de Horner. (FRAGOSO, 2000) Um exemplo da aplicação desse método está descrito no Anexo 7.

O livro "Razão Áurea", de Mario Livio (2006), descreve com detalhes a história da equação do segundo grau, em várias épocas e por diversos pesquisadores, e as tentativas de encontrar uma solução definitiva para as equações do 3º grau. Por volta de 1700 a.C., os babilônios já sabiam resolver equações do 2º grau, mas foi somente no período renascentista, já no final do século XV, que a equação do 3º grau foi estudada de forma efetiva na Europa, gerando uma verdadeira batalha entre os matemáticos pela glória de apresentar um método absoluto de resolução.

Foi Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170-1250), um famoso matemático italiano, o primeiro a demonstrar, em sua obra *Flos*, de 1225, a regra de solução da equação do 3º grau ao resolver a equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Em 1.494, Frei Luca Pacioli, amigo do famoso artista Leonardo da Vinci, e utilizando a prensa móvel inventada por Guttemberg, imprimiu o livro *Summa de Aritmética e Geometria*, no qual afirmava não existir uma regra para resolver uma equação do tipo $x^3 - px = q$, que na época era lido como "cubo e coisas igual a número" e $x^3 = px + q$, lido como "cubo igual a coisas e número".

Outro importante matemático foi Scipione del Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, que, mesmo sem ter publicado, foi o primeiro a resolver a equação do 3º grau, por volta de 1526, e relatou sua descoberta a Annibale Della Nave, seu futuro genro, e a Antonio Maria Fiore (ou Antonio Fior), seu grande amigo, a quem confiou a regra. E, aproximadamente dez anos mais tarde, Nicolo Fontana de Brescia, mais conhecido como Tartaglia (o tartamudo), anuncia ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 - px = q$ (EVES, 2011, 302-303).

Possuindo a solução de Del Ferro, e convicto do blefe de Tartaglia, Fiore resolve desafiá-lo a resolver problemas de listas elaboradas e trocadas entre os competidores, algo que era comum na época e que era um grande evento para os cientistas da época, incluindo os matemáticos. Tartaglia astutamente deduziu que Fiore possuía uma solução para equação do 3º grau ao verificar que na lista que recebeu com exercícios elaborados pelo seu oponente só continha problemas desse assunto.

Para sua infelicidade, Fiore havia recebido apenas a solução de del Ferro, mas não a sua demonstração e Tartaglia resolve as equações do 3º grau a ele propostas, vencendo com facilidade a disputa.(EVES, 2011)

Girolamo Cardano (1501-1576), médico e cientista de grande reputação, rico e influente em sua época, usa seu poder de persuasão para convencer Tartaglia a lhe revelar a regra para resolver a equação do 3º grau, sob a forma de versos enigmáticos, mas sem demonstração, jurando solenemente que jamais a publicaria sob qualquer pretexto. Vale lembrar que, devido à falta de uma notação específica, nessa época os autores não podiam expressar nem demonstrar seus métodos resumidamente mediante fórmulas, como fazemos hoje em dia. Então, após muita insistência Cardano conseguiu que lhe fosse revelado o segredo da resolução das ditas equações.

A Revista do Professor de Matemática (RPM 25), no artigo “A Solução de Tartaglia para a Equação do Terceiro Grau” traz uma tradução para o português do professor César Polcino Milies (1994), do IME-USP:

1. Quando o cubo com a coisa em apreço
Se igualam a qualquer número discreto,
Acha dois outros diferentes nisso.

2. Depois terás isto por consenso
Que seu produto seja sempre igual
Ao cubo do terço da coisa certo.

3. Depois, o resíduo geral
Das raízes cúbicas subtraídas
Será tua coisa principal.

4. Na segunda destas operações,
Quando o cubo estiver sozinho,
Observarás estas outras reduções.

5. Do número farás dois, de tal forma
Que um e outro produzam exatamente
O cubo da terça parte da coisa.

6. Depois, por um preceito comum,
Toma o lado dos cubos juntos
E tal soma será teu conceito.

7. Depois, a terceira destas nossas contas
Se resolve como a segunda, se observas bem
Que suas naturezas são quase idênticas.

8. Isto eu achei, e não com passo tardo,
No mil quinhentos e trinta e quatro,
Com fundamentos bem firmes e rigorosos
Na cidade cingida pelo mar.

Segundo Lima (1987) de posse do método de resolução de Tartaglia, Cardano buscou e conseguiu encontrar uma demonstração explicando o método. Junto com seu discípulo, Ludovico Ferrarri, ele explica a regra de Tartaglia para solução de $x^3 - px = q$. Eles propõem a mudança $x = y - \frac{a}{3}$ em $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, o que permitia eliminar o termo em x^2 e, assim, resolver 13 tipos de equações do 3º grau, que hoje em dia são conhecidas como sendo uma só.

Pouco tempo depois Ferrari resolve a equação do 4º grau. Inicialmente respeitando o juramento feito a Tartaglia, em 1542, eles obtêm permissão de Della Nave, que tinha herdado as obras, para examinar os manuscritos de del Ferro. Convicto de que a resolução da equação de Tartaglia já existia cerca de 30 anos, inventada por del Ferro, Cardano quebrou a promessa feita a Niccolo Tartaglia e, no seu livro Ars Magna, de 1545, revelou a verdadeira autoria da solução, o matemático bolonhês Scipione del Ferro e fazendo, no livro, as devidas atribuições de mérito ao descobridor. Isso provocou a ira de Tartaglia, que no ano seguinte publica o livro Quesiti et Inventioni Diverse, no qual ataca duramente Cardano pela quebra do juramento e iniciando uma troca de panfletos ofensivos que durou mais de um ano, que culminou com um duelo científico com a derrota de Tartaglia, que morreu quase no esquecimento nove anos mais tarde. (UNIVESP, [s.d.])

A resolução de equações é uma área de estudo antiga e a história está repleta de diferentes métodos desenvolvidos ao longo do tempo. Esses são apenas alguns exemplos dos muitos métodos históricos desenvolvidos para resolver equações ao longo dos séculos. Embora alguns desses métodos sejam menos utilizados atualmente devido ao avanço da computação e ao desenvolvimento de métodos mais eficientes, eles desempenharam um papel importante no desenvolvimento da matemática e abriram caminho para as abordagens modernas de resolução de equações. No Capítulo 9 serão abordados alguns desses métodos.

2.6. EQUAÇÕES NO ENSINO MÉDIO ATUAL

No século XX, houve avanços significativos no campo da matemática e no desenvolvimento e aprimoramento de métodos para resolver equações aplicadas em diversas áreas da matemática, ciência e engenharia. O progresso contínuo na computação e no desenvolvimento de algoritmos continua a impulsionar novos métodos e abordagens para a resolução de equações no século XXI pois o contínuo avanço no uso de computadores cada vez mais potentes permite um aperfeiçoamento dos métodos numéricos de resolução de equações complexas.

A matemática ensinada no ensino médio atual abrange uma variedade de tópicos e conceitos que visam desenvolver habilidades matemáticas fundamentais e promover o pensamento lógico e analítico. Nesse contexto, o estudo das equações é uma parte fundamental do currículo de matemática. Os alunos aprendem a resolver equações de diferentes tipos e a aplicar métodos adequados para encontrar as soluções, bem como entender e até prever resultados, pois é enfatizado não apenas o processo de resolução, mas também a interpretação desses resultados, a verificação das soluções e a aplicação das equações em situações do mundo real. E esse processo de compreensão da Álgebra exige o entendimento das situações propostas e a manipulação de expressões algébricas, resolução de equações e inequações, sistemas de equações lineares, fatoração, operações com polinômios, exponentes, radicais e funções.

A seguir estão alguns dos principais tipos de equações abordados no ensino médio atual, já citadas no Capítulo 6, que, se aplicados, podem incentivar os alunos a pensar de forma mais crítica e analítica e a aplicar diferentes estratégias de resolução de problemas para encontrar soluções adequadas.

3. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

É importante buscar diferentes formas de abordar o tema para ajudar a desenvolver nos alunos habilidades matemáticas gerais. Ao aprender diferentes métodos de resolução de equações, os estudantes são expostos também a diferentes tipos de problemas matemáticos e desenvolvem algumas habilidades matemáticas, como raciocínio lógico, resolução de problemas e pensamento crítico, além de auxiliar no entendimento de vários conceitos matemáticos. Cada método de resolução de equações ensina conceitos matemáticos diferentes, o que ajuda os estudantes a entender melhor a teoria matemática por trás dos problemas.

Problemas diferentes podem exigir abordagens diversas e alguns métodos de resolução podem se mostrar mais eficientes para resolver determinados tipos de equações.

Todos os métodos de resolução e suas demonstrações tiveram a sua importância ao longo da história da matemática seja ele algébrico, gráfico, cartesiano ou geométrico e atualmente não podemos ficar resumido apenas a um método de resolução (AMARAL, 2000).

É de fundamental importância o ensino de várias maneiras de se resolver o mesmo problema mostrando sua aplicabilidade, pois diversifica os ângulos de visão do aluno e ampliam a assimilação do assunto (LIMA et al., 2006).

Para Vale (2013), a utilização de alguns desses métodos no trabalho em sala de aula também apresenta um caráter motivador e desperta o interesse do aluno pela matemática, fazendo com que ele perceba que a álgebra, a geometria e a aritmética são conteúdos que podem e devem ser trabalhados juntos. A seguir apresentamos alguns métodos de resolução de equações desenvolvidas ao longo do tempo, observando que alguns dos métodos usados na álgebra atual são os mesmos usados há alguns séculos ou até milênios, diferenciando apenas na notação com que são apresentados.

3.1 RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES

Mesmo que seja um conteúdo programático do 7º ano do Ensino Fundamental, sempre há uma real necessidade de se revisar conceitos e resoluções de problemas envolvendo essas equações quando o aluno chega ao 1º ano do Ensino Médio, principalmente quando são oriundos de escolas públicas.

Para Negromonte et al. (2019), os alunos podem usar uma variedade de ferramentas para resolver problemas matemáticos, mas os que mais se destacam são os princípios algébricos, que são apresentados como equações. É vital desenvolver várias etapas fundamentais para obter bons resultados ao resolver problemas usando equações, como:

- Entender o enunciado e interpretar o que se pede;
- Formular o problema a partir dos dados apresentados;
- Elaborar a equação adequada para aplicar;
- Resolver a equação isolando a incógnita;

- Verificar, através da equação, se o resultado obtido é o correto.

Para exemplificar, mostraremos um simples problema matemático que pode ser resolvido com o auxílio das equações aplicando os passos acima:

Ana, Bianca e Cláudia foram a uma lanchonete. Após tomarem sorvetes e comerem doces, receberam uma conta de R$ 67,00. Bianca pagou a metade do que Ana pagou e Cláudia R$ 3,00 a menos que o dobro do valor pago por Ana. Quanto pagou cada uma?

a) Dados do problema:

- Três amigas, A (Ana), B (Bianca) e C(Cláudia), dividindo uma conta de R$ 67,00 referente ao consumo de doces e sorvetes numa lanchonete:

- Os valores pagos foram: $A = x$, $B = \frac{x}{2}$ e $C = 2x - 3$

- A soma deles é 67.

b) Identificação da incógnita:

- É preciso descobrir quais são esses números cuja soma é 67 a partir do cálculo da incógnita x.

c) Identificando a operação:

A operação será adição, pois o problema afirma que a soma desses números é 67.

d) Montando e resolvendo a equação:

Agora somamos a sequência dos números e igualamos a 67.

$$x + \frac{x}{2} + 2x - 3 = 67$$

$$2x + x + 4x - 6 = 134$$

$$7x = 140$$

$$x = 20$$

e) Verificação se a resposta é correta:

Para verificar se a solução encontrada é verdadeira, podemos substituir o valor de "x" e comprovar a igualdade:

Descobrimos o valor de x, então $A = 20$, $B = \frac{20}{2} = 10$ e $C = 2.10 - 3 = 37$.

E, finalmente, temos que $A + B + C = 20 + 10 + 37 = 67$. Portanto, Ana pagou R$ 20,00. Bianca R$ 10,00 e Cláudia, R$ 37,00.

3.2 ALGUNS DOS DIVERSOS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Nesse tópico serão abordadas algumas estratégias que foram desenvolvidas ao longo do tempo para resolução de equações do 2º grau, ressaltando que muitas delas não são aplicadas durante o ensino médio mas podem ser usadas para ilustrar as aulas e despertar o raciocínio nos alunos.

3.2.1 MÉTODOS ALGÉBRICOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COMPLETAS:

A) MÉTODO CONVENCIONAL (OU FÓRMULA DE BHÁSKARA)

Para muitos autores a fórmula matemática que atualmente é aplicada para a resolução convencional de equações quadráticas é erroneamente chamada de fórmula de Bhaskara, já que foi enunciada pela primeira vez pelo matemático hindu Sridhara (850-950) em um de seus trabalhos, onde batizou de “Fórmula Geral para resolução de Equações do 2º Grau”, mas os manuscritos deixados por ele acabaram não sendo preservados. Vale ressaltar que essa fórmula resolutiva já previa que não havia quadrado de números negativos e que uma equação quadrática pode possuir uma ou duas raízes. O matemático indiana Bhaskara cita o procedimento: “Multiplique ambos os lados da equação por uma quantidade igual a quatro vezes o coeficiente do quadrado da incógnita; adicione a ambos os lados uma quantidade igual ao quadrado do coeficiente da incógnita; então extraia a raiz quadrada”. (PITOMBEIRA, 2004 p.25, apud VALE, 2013).

O desenvolvimento dessa fórmula passa por uma manipulação algébrica na equação para completar o quadrado da equação $ax^2 + bx + c = 0$, seguindo os seguintes passos:

1º passo: Multiplicar ambos os membros por $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

2º passo: Adicionar a ambos os membros b^2 para formar um trinômio quadrado perfeito:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$

3º Passo: Isolar o trinômio quadrado perfeito no 1º membro:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$$

4º Passo: Extrair a raiz quadrada em ambos os lados:

$$2\mathrm{ax} + \mathrm{b} = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

5º Passo: Isolar a incógnita x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Chegamos, então, à fórmula resolutiva da equação do 2º grau comumente utilizada no ensino fundamental e médio.

B) MÉTODO DA SEMI-SOMA E PRODUTO

Segundo BOYER (1999, apud VALE, 2013, p.29), os babilônios usavam o método da semi-soma e produto para resolver equações do tipo $x^2 - px = q$. Considerando a equação $ax^2 + bx + c = 0$, o método é dado pelos seguintes passos:

1º Passo: Dividir toda a equação por a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ (I)}$$

2º Passo: Fazer $s = -\frac{b}{2a}$ e $p = \frac{c}{a}$ (II)

3º Passo: Substituindo (II) em (I):

$$x^2 - 2sx + p = 0$$

4º Passo: Na sequência, soma-se $(-p)$ e depois, s^2 em ambos os lados. Então do lado esquerdo ficará com um quadrado perfeito. Tirando-se a raiz quadrada dos dois lados e isolando o x chegamos à fórmula reduzida:

$$x^2 - 2sx + p = 0$$
$$x^2 - 2sx = -p$$
$$x^2 - 2sx + s^2 = s^2 - p$$
$$(x-s)^2 = s^2 - p$$
$$x - s = \pm\sqrt{s^2 - p}$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{s} \pm \sqrt{s^2 - p}$$

Como ilustração, vamos resolver a equação $3x^2 - 17x + 10 = 0$

- Dividindo toda a equação por 3:

$$x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{10}{3} = 0$$

- Manipulando algebricamente:

$$x^2 - 2.\frac{17}{6}x + \frac{10}{3} = 0$$

- Temos, então:

$$s = \frac{17}{6} e\ p = \frac{10}{3}$$

- Aplicando na fórmula reduzida:

$$\mathrm{x} = \frac{17}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{6}\right)^2 - \frac{10}{3}} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{17}{6} \pm \sqrt{\frac{289}{36} - \frac{10}{3}} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{17}{6} \pm \sqrt{\frac{289}{36} - \frac{120}{36}} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{17}{6} \pm \frac{13}{6}$$

Logo, teremos como raízes:

$$x' = 5\ e\ x" = \frac{2}{3}$$

C) MÉTODO DE VIÈTE

Pouco difundido durante a educação básica, o método de Viète não é ensinado pelos professores e não consta nos materiais didáticos direcionados ao Ensino Médio. Porém, Amaral (2000) defende que o método de Viète deva ser aplicado como acessório para o ensino de equações do 2º grau pela abordagem alternativa através da inclusão de novas variáveis, chamadas incógnitas auxiliares. Segue o método:

1º Passo: Partindo da equação $ax^2 + bx + c = 0$, substituir x pela soma das variáveis auxiliares m e n:

$$x = m + n$$

2º Passo: Na equação, trocar x pela soma:

$$a(m+n)^2 + b(m+n) + c = 0$$

3º Passo: Desenvolver o produto notável e fazer o produto dos coeficientes a e b :

$a(m^2 + 2mn + n^2) + b\,(m+n) + c = 0 \Rightarrow am^2 + 2amn + an^2 + bm + bn + c = 0$

4º Passo: Reescrever a igualdade na forma de uma equação na incógnita n:

$$an^2 + (2am + b)n + am^2 + bm + c = 0$$

5º Passo: Fazer $m = -\frac{b}{2a}$ de modo a anular o coeficiente de n, tornando a equação incompleta do tipo $ax^2 + c = 0$, e depois manipular algebricamente a equação para isolar a incógnita n:

$an^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \Rightarrow an^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Rightarrow 4a^2n^2 + b^2 - 2b^2 + 4ac = 0 \Rightarrow 4a^2n^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow n^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow n = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

6º passo: Como $x = m + n$ e $m = -\frac{b}{2a}$, temos que:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Novamente como ilustração vamos resolver a equação $x^2 - 7x + 10 = 0$, usando o método de Viète:

- Substituindo x por $m + n$, desenvolvendo o produto notável, multiplicando o coeficiente e reescrevendo a equação na incógnita n:

$(m+n)^2 - 7(m+n) + 10 = 0 \Rightarrow m^2 + 2mn + n^2 - 7m - 7n + 10 = 0 \Rightarrow n^2 + (2m-7)n + m^2 - 7m + 10 = 0$

- Para anular o coeficiente de n usamos $m = \frac{7}{2}$

$n^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7.\frac{7}{2} + 10 = 0 \Rightarrow n^2 + \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 10 = 0 \Rightarrow n^2 - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow n^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow n = \pm\frac{3}{2}$

- E, sendo $x = m + n$, concluímos que:

$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

Logo, suas raízes são $x' = 5\ e\ x'' = 2$.

No trabalho de Vale (2013) encontramos vários outros métodos algébricos de resolução de equações quadráticas são encontrados na literatura, como o método do quadrado e da diferença e o método de Euler, que propõe calcular as raízes através de substituição de variáveis, montando um sistema de equações e calculando o determinante da matriz oriunda desse sistema. Mas esses, assim como o método diferencial (ou das coordenadas do vértice), método Fan-Fan (ou de Horner) e método da Transformação não fazem parte do conteúdo de ensino médio e não são, portanto, objeto de nosso estudo.

3.2.2 EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS COMPLETAS COM MÉTODOS NÃO ALGÉBRICOS:

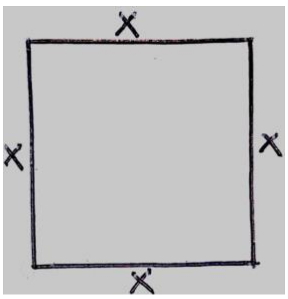
Das diversas formas de se resolver equações do 2º grau através de construções geométricas encontradas na literatura duas delas são facilmente aplicáveis em sala de aula do ensino médio como forma de mostrar aos alunos que existem relações entre a álgebra e a geometria na resolução dessas equações.

A) USANDO A GEOMETRIA PARA COMPLETAR QUADRADOS

Imenes, Jakubo e Lellis (1992) trazem a demonstração do matemático Al-Khowarizmi para a equação quadrática $x^2 + 8x = 33$ a partir do uso da geometria, com a desvantagem de não se obter a raiz negativa da equação**.**

Seguindo as orientações dos autores, pudemos repetir essa demonstração numa turma de ensino médio, mostrando a evolução das figuras por eles desenhadas. Partindo de um quadrado de lado x, como na Figura 1, temos que a sua área é determinada por x^2.

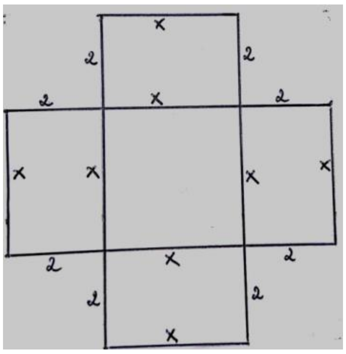
Figura 1 – Quadrado de lado $\boldsymbol{x}$



Fonte: o autor

Em cada um dos lados se desenhou retângulos com largura 2, com $2x$ sendo a área de cada quadrado, como na figura 2 abaixo. A área total da figura é $x^2 + 2x + 2x + 2x + 2x = x^2 + 8x$ que, pelo enunciado, tem valor igual a 33.

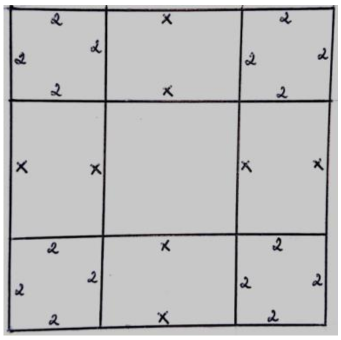
Figura 2 – Quadrado de lado $\boldsymbol{x}$ ligados a retângulos de comprimento x e largura $\mathbf{2}$



Fonte: o autor

Completando o quadrado maior com quatro pequenos quadrados de $2x2$, como vemos na figura 3, cada um deles terá área igual a 4, e então a área do quadrado maior será de $33 + (4.4) = 33 + 16 = 49$, ou seja, terá seu lado medindo 7 e, portanto, a medida x será igual a 3.

Figura 3 – Completando com pequenos quadrados de $\mathbf{2x2}$



Fonte: o autor

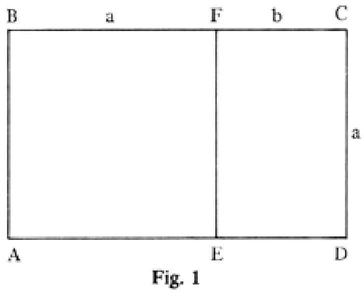
Esse tipo de demonstração pode despertar a curiosidade dos alunos ao envolver dois conteúdos matemáticos diferentes e a correlação entre eles, como também possibilita dar certa ludicidade ao estudo das equações. Deve-se destacar que apenas as raízes positivas eram consideradas, já que nessa época os números negativos ainda não eram conhecidos.

B) RETÂNGULOS ÁUREOS

A proporção áurea (ou número de ouro), apresentada pelo matemático Fibonacci em 1202 através da Sequencia de Fibonacci, é uma constante irracional cujo valor aproximado (1,61803398875) é representado pela letra grega φ (phi). Ela é relacionada a vários fenômenos naturais, desde conchas e cascos de caramujos até nas espirais da flor do girassol ou na quantidade de pétalas da margarida, passando por diversos outras estruturas dos seres vivos.

A RPM 05 (Revista do Professor de Matemática) traz a definição do retângulo áureo como "... qualquer retângulo ABCD com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como ABFE, o retângulo restante, CDEF, será semelhante ao retângulo original", como mostrado na figura 4 abaixo:

Figura 4: Retângulo Áureo



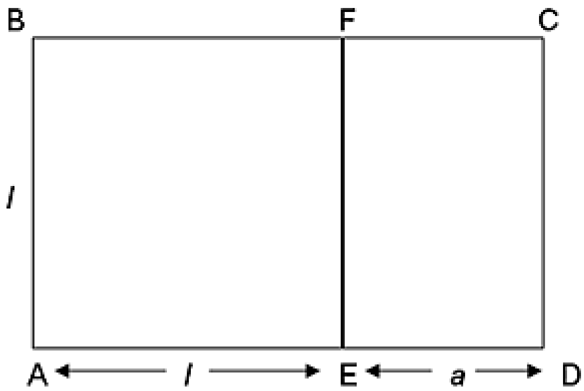
Fonte: RPM nº 5 (1985)

E segue dizendo, que se $a + b$ e a são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição acima se traduz na relação:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Então, partindo de um retângulo áureo ABCD, como na figura 5, aplicamos a relação:

Figura 5 - Retângulo Áureo



Fonte: https://www.passeiweb.com/geometria_razao_aurea/

Base do retângulo maior: $l + a$

Altura do retângulo maior: l

Base do retângulo menor: l

Altura do retângulo menor: a

Substituindo na relação:

$$\frac{l+a}{l} = \frac{l}{a} \Rightarrow a^2 + la = l^2 \Rightarrow a^2 + la - l^2 = 0$$

Calculando a medida de a em função de l:

$$a = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 - 4.1.(-l^2)}}{2.1} \Rightarrow a = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} \Rightarrow \ a = \frac{-l \pm \sqrt{5l^2}}{2} \Rightarrow \ a = \frac{-l \pm l\sqrt{5}}{2}$$

E, desprezando o valor negativo, chegamos à conclusão que $a = \frac{l(-1+\sqrt{5})}{2}$ e que $l + a = l + \frac{l(-1+\sqrt{5})}{2} = \frac{2l + l(-1+\sqrt{5})}{2} = \frac{l(1+\sqrt{5})}{2}$

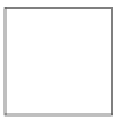
Ao final, provamos a veracidade da relação, chamando de R a razão áurea:

$$R = \frac{l+a}{l} = \frac{\frac{l(1+\sqrt{5})}{2}}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

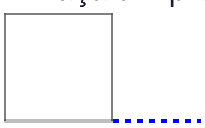
$$R = \frac{l}{a} = \frac{l}{\frac{l(-1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{2}{(-1+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

Por fim, foi feita a demonstração da construção de um retângulo áureo a partir das seguintes instruções:

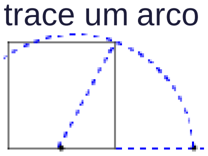
1. Desenhe um quadrado:



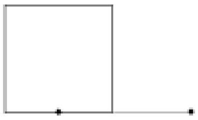
2. Faça um prolongamento da base desse quadrado.



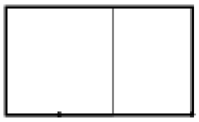
3. Coloque a ponta seca de um compasso sobre o ponto médio do lado prolongado e a ponta com grafite no vértice superior direito do quadrado. Com essa medida trace um arco de circunferência até o prolongamento da base feito anteriormente.



4. Marque o ponto de intersecção, que será usado para definir o lado maior do retângulo e apague as linhas de construção.



4. Completando o retângulo obtemos um retângulo áureo.



3.3. RELAÇÕES DE GIRARD

Albert Girard, um matemático belga que viveu de 1590 a 1633, estabeleceu relações entre as raízes e os produtos de uma equação de segundo grau. Numerosos matemáticos continentais desenvolveram estudos até o final do século XVIII com o objetivo de estabelecer relações entre as raízes e coeficientes de uma equação quadrática, mas sempre tinham como barreira a presença dos números negativos, não aceitos na época. O que só foi resolvido utilizando-se o método de Girard, que ficou conhecido como Relações de Girard.

Essas relações formam um conjunto de equações relacionando as raízes e os coeficientes da equação polinomial estudada, possibilitando assim determinar essas raízes. A quantidade de equações deste conjunto depende do grau do polinômio em estudo e, nesse caso, analisaremos sua aplicação em equações do segundo e terceiro graus.

3.3.1 APLICAÇÃO EM EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU:

Uma equação do segundo grau na variável x e com coeficientes reais é da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a, b \; e \; c$ são números reais, com $a \neq 0$, sendo:

a o coeficiente de x^2

b o coeficiente de x

c o coeficiente ou termo independente.

Podemos, então, com base na fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, calcular:

a) Soma das raízes:

$$S = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Logo, $x' + x" = -\frac{b}{a}$.

b) Produtos das raízes:

$$P = (\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}).(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}) = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{\mathrm{b}^2 - \mathrm{b}^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Logo, $x'.x" = \frac{c}{a}$.

Uma outra forma de apresentar as Relações de Girard aplicadas a uma equação quadrática é através da decomposição em fatores do 1º grau. Assim, temos:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x")$$

Dividindo todos os termos por a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x')(x - x")$$

Desenvolvendo o produto no 2º membro:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - \ (x' + x'') + (x'.\ x'')$$

E, pela igualdade de polinômios:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$x'.x'' = \frac{c}{a}$$

Podemos, como exemplo, aplicar a relação de Girard na seguinte equação:

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

Soma das raízes: $S = -\frac{b}{a} = -(-9) = 9\ e\ P = \frac{c}{a} = 14$.

Com um pouco de dedução, já desenvolvida pela prática de tentativa e erro, é razoável esperar que o aluno defina as raízes como 2 e 7.

Também podemos usar esse método para determinar as raízes de uma equação do 2º grau, com $a \neq 1$. Vejamos a seguir: utilizando soma e produto.
Sejam x'e x''duas raízes racionais de uma equação, ambas com o mesmo denominador, iremos reduzir a soma e produto de frações em soma e produto de inteiros.

$$x' = \frac{b}{a} \text{ e } x'' = \frac{c}{a}$$

$$x' + x'' = \frac{b+c}{a} \text{ e } x' + x'' = \frac{b.c}{a}$$

Em seguida escrevemos a soma S e o produto P como frações de forma que o denominador de P seja o quadrado do denominador de S, ou seja:

$$S = \frac{S\prime}{a} \text{ e } P = \frac{P\prime}{a^2}$$

Por fim, determinamos os números inteiros a e b com soma S' e produto P'. Então, $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$ têm soma S e produto P.

Como exemplo, iremos determinar as raízes da equação $3x^2 - 8x - 60 = 0$. Temos que $S = \frac{8}{3}$ e $P = -\frac{60}{3} = -\frac{180}{9}$ e, assim, $S' = 8$ e $P' = -180$.

Logo, determinamos que $b = -10$ e $c = 18$ e determinamos as raízes da equação:

$$x' = \frac{-10}{3} \text{ e } x'' = \frac{18}{3} = 6$$

3.3.2 APLICAÇÃO EM EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU:

Infelizmente a carga horária da disciplina de Matemática está sendo reduzida ao longo do tempo. Com a implementação do Novo Ensino Médio que está em curso estão previstas apenas duas aulas semanais para desenvolver o conteúdo, o que gera um grave problema, que é definir o que é mais (ou menos) importante e necessário para minimizar as dificuldades que os alunos terão nas séries seguintes ou quando ingressarem num curso superior. E alguns conteúdos estão sendo deixados de lado como, por exemplo, as equações de 3º grau durante o estudo dos polinômios. Ainda assim é necessário demonstrar as Relações de Girard, pois a decomposição de tais equações permite determinar expressões matemáticas relacionando as suas raízes. A partir da equação do 3º grau definida por $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ fazemos a decomposição em fatores de 1º grau:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x')(x - x'')(x - x''')$$

Dividindo todos os termos por a:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x')(x - x'')(x - x''')$$

Desenvolvendo o produto no 2º membro:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x' + x'' + x''')x^2 + (x'x'' + x'x''' + x''x''')x - x'x''x'''$$

E, pela igualdade de polinômios:

$$x' + x'' + x''' = -\frac{b}{a}$$

$$x'x'' + x'x''' + x''x''' = \frac{c}{a}$$

$$x'x''x''' = -\frac{d}{a}$$

Dada a equação $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$, podemos montar um sistema de equações a partir das operações entre suas raízes:

$$\begin{cases} x' + x'' + x''' = -(-2) = 2 \\ x'x'' + x'x'' + x''x''' = -13 \\ x'x''x''' = -(-10) = 10 \end{cases}$$

Manipulando algebricamente, isolando os termos e substituindo nas equações encontraremos as raízes da equação. Então, como as Relações de Girard relacionam as raízes de uma equação polinomial com os coeficientes dos termos do polinômio, elas são usadas para calcular as raízes de equações polinomiais de grau maior ou igual a 2, bem como para compor equações com raízes predeterminadas.

3.4 O ALGORITMO DE BRIOT-RUFFINI

É comum durante o ensino médio que, ao se deparar com equações cúbicas, os alunos tentem deduzir uma das raízes usando tentativa e erro para, a partir daí, reduzi-la para uma equação quadrática e encontrar as outras duas raízes. Durante o estudo dos polinômios, mais especificamente na divisão entre dois polinômios, obtemos um quociente e um resto da divisão. Isto é, se dividirmos $P(x)$ por $D(x)$ (o divisor), vamos obter dois novos polinômios $Q(x)$(o quociente) e $R(x)$ (o resto), de modo que :

$$P(x) = D(x).Q(x) + R(x)$$

Quando esse divisor é um binômio, da forma $x - a$, pode ser usado um dispositivo muito prático e fácil de ser aplicado na divisão, chamado algoritmo de Briot-Ruffini.

De maneira simples, resolveremos a equação $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. É bastante óbvio e fácil de perceber que umas das raízes da equação é o 1. Então, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini reduzimos a equação cúbica a uma equação quadrática, processo que é detalhado nos livros de ensino médio:

1. Inicialmente desenhamos dois segmentos de reta, um na horizontal e outro na vertical.

2. Escrevemos a raiz da equação que foi deduzida no lado esquerdo do segmento vertical e os coeficientes da equação do lado direito. Repetimos o coeficiente na linha de baixo.

1	1	-3	-13	15
	1			

3. Multiplicamos o primeiro coeficiente pela raiz do polinômio, e, em seguida, e, em seguida, somamos o resultado pelo próximo coeficiente localizado acima da linha horizontal, processo que será repetido até o último coeficiente.

a) $1.1 - 3 = -2$

b) $1.(-2) - 13 = -15$

c) $1.(-15) + 15 = 0$

Cuja representação fica assim:

1	1	-3	-13	15
	1	-2	-15	0

Portanto, temos que:

$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x-1)(x^2 - 2x - 15) = 0$ e, ao resolver a equação quadrática, teremos $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x-5)(x-1)(x+3) = 0$, encontrando, como solução, $S = \{-3,1,5\}$.

Para ilustrar a importância desse algoritmo de Briot-Ruffini temos, no Anexo 8, a resolução da questão 1 do ENQ (Exame Nacional de Qualificação) 2022-1 do curso PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), em que ele foi aplicado com sucesso na obtenção do resultado correto.

4. GALOIS E A RESOLUBILIDADE DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

4.1 UM RESUMO DA HISTÓRIA DE GALOIS

Galois teve uma vida tão intensa quanto efêmera. Segundo Eves (2011), Évariste Galois (1811-1832), pode ser considerado como um meteoro, que riscou o firmamento matemático com brilho intenso e matinal, para depois, súbita e pateticamente, extinguir-se em morte prematura, deixando material de valor extraordinário para ser trabalhado pelos matemáticos das gerações futuras. O livro “A equação que ninguém conseguia resolver” de Mario Livio (2006) faz um relato bastante minucioso da vida difícil e dramática de Galois, retratado na figura 6 a seguir, que, talvez em parte por não conseguir expressar com toda clareza as suas ideias, não conseguiu atingir o reconhecimento pelos matemáticos da época, inclusive tendo sido recusado na principal universidade de Paris, a Ecole Polytechnique, tendo apenas estudado na Ecole Normale.

Figura 6 - Evariste Galois

Fonte: https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Evariste_galois.jpg

Sua paixão por política (e o fato de ser republicano) também contribuiu para que ele encontrasse muitos obstáculos na carreira acadêmica, levando-o à expulsão da Ecole Normale após escrever um manifesto a um jornal com críticas ao seu diretor. Ele se juntou a um grupo de estudantes opositores da monarquia em protestos e reuniões subversivas que culminaram em sua prisão. Durante essa época ele se apaixonou pela filha do médico da prisão, Stephanie-Felice du Motel, e após ser libertado morreu em um duelo de pistolas supostamente contra Perscheux d'Herbinville, episódio ainda hoje cercado de incertezas. As razões do duelo ainda permanecem obscuras, mas parece provável que tenha algo a ver com Stephanie.

Passou sua última noite ás claras, escrevendo três cartas, sendo que na maior delas, endereçada ao grande amigo Auguste Chevalier, apresenta um resumo da hoje conhecida como Teoria de Galois, descrevendo nesse manuscrito as linhas gerais de sua descoberta, que teve seu início de produção durante a sua adolescência, quando este, passou a construir uma teoria com aplicações principalmente voltadas à teoria das equações algébricas.

A teoria de Galois é uma teoria matemática que lida com a relação entre as raízes de um polinômio e as operações que podem ser realizadas sobre essas raízes. A ideia central dessa teoria é que as raízes de um polinômio podem ser organizadas em grupos que correspondem a diferentes formas de reorganizar essas raízes usando operações matemáticas. Esses grupos são chamados de grupos de Galois. A teoria de Galois é especialmente útil para entender as propriedades das raízes de polinômios de grau superior a dois. A teoria permite determinar se um polinômio pode ser resolvido por radicais, isto é, se suas raízes podem ser expressas em termos de adições, subtrações, multiplicações, divisões e radiciações.

Certamente esse não é um assunto ensinado no ensino médio e acessível apenas aos poucos que se dedicam a ele, mas um dos maiores impactos dessa teoria está no fato de provar a impossibilidade de resolução por meio de radicais de equações gerais de grau maior ou igual a cinco. E, nessa busca por uma solução matemática que explicasse esse problema da resolubilidade de equações algébricas, Galois pensou num conjunto das permutações das raízes da equação, o que o levou ao conceito inédito de “grupos”.

É relevante destacar o trabalho de Evariste Galois, o estudo da insolubilidade das equações e a criação do "Grupo de Galois", que mudou a forma de operar com equações e permitiu investigar se um polinômio qualquer pode ter suas soluções encontradas por meio ou não de radicais, alternando as formas de resolver os problemas propostos através de equações de graus variados (SOUZA, 2017).

4.2 PERMUTAÇÃO DE GRUPO DA TEORIA DE GALOIS NUMA EQUAÇÃO QUADRÁTICA

Dado um polinômio do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, as suas raízes podem ser compartilhadas com outras equações algébricas. A teoria de Galois, concebida por Évariste Galois no século XIX, tem como ideia central a compreensão de que permutar (ou rearranjar) as raízes de uma equação algébrica não afeta suas propriedades. Um pré-requisito importante é que a solução em questão tenha coeficientes racionais, ou seja, seus coeficientes são números racionais. Essas permutações, quando consideradas em conjunto, formam um grupo matemático conhecido como o "grupo de Galois" e é uma ferramenta fundamental para entender a solubilidade de equações polinomiais, desempenhando um papel crucial em muitas áreas da matemática, incluindo a teoria dos números, a álgebra linear e a geometria algébrica.

Como exemplo, dada a equação $x^2 - 6x + 4 = 0$, temos:

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 16 \Rightarrow \Delta = 20$$

$$\mathrm{x} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \mathrm{x} = 3 \pm \sqrt{5}$$

Logo, suas raízes são $\mathrm{x}' = \mathrm{p} = 3 + \sqrt{5}$ e $\mathrm{x}'' = \mathrm{q} = 3 - \sqrt{5}$ e as equações algébricas satisfeitas por p e q são do tipo:

$p + q = 6$

$p.q = 4$

Ainda segundo Ferreira, Martins e Nunes (2012), fica evidente que se permutarmos p e q em ambas dessas equações elas continuarão verdadeiras, ou seja, $q + p = 6$ e também $q.p = 4$. Logo, os grupos de Galois do polinômio $x^2 - 6x + 4 = 0$ consistem das duas permutações: a permutação identidade, a qual deixa p e q inalterado, e a permutação de transposição, a qual alterna p e q. Uma discussão similar aplica-se a qualquer polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$ onde a, b e c são números racionais:

• Se o polinômio tem somente uma raiz, como por exemplo, $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, então o grupo de Galois é trivial; isto é, ele contém unicamente uma permutação idêntica.

• Se ele tem duas raízes racionais, como por exemplo, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, então o grupo de Galois é novamente racional.

• Se ele tem duas raízes irracionais (incluindo o caso onde as raízes são complexas), então o grupo de Galois contém novamente duas permutações, justamente como no primeiro exemplo acima.

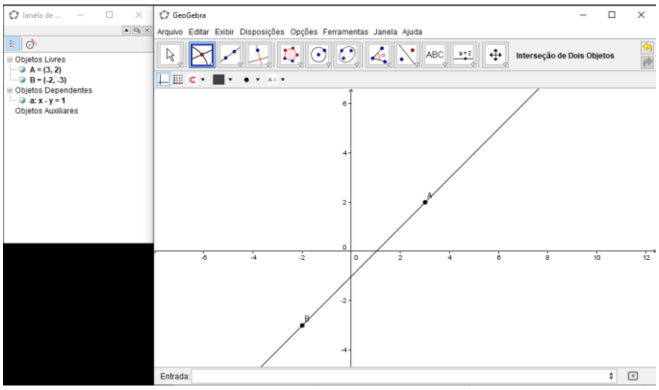
5. USO DO COMPUTADOR NA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

Existem diversos métodos computacionais para a resolução de equações que são amplamente utilizados na prática. Esses métodos permitem encontrar soluções numéricas ou geométricas para equações de diferentes tipos e níveis de complexidade. Entre eles podemos citar o GeoGebra, que é uma poderosa ferramenta matemática que pode ser utilizada para resolver equações de maneira computacional. Ele é hoje muito utilizado (inclusive no ensino médio) por ser um software matemático interativo que permite realizar cálculos, criar gráficos e resolver equações combinando recursos de geometria, álgebra e cálculo.

Devido à limitação que a estrutura da escola impunha, realizamos apenas demonstração simples para ilustrar como o uso dessa tecnologia permite construir e manipular, na tela do computador, gráficos e outros objetos matemáticos, proporcionando dinamismo e interatividade nas aulas. Esses gráficos estão dispostos na sequência das figuras 7, 8 e 9, a seguir:

a) Gráfico da função $f(x) = x - 1$

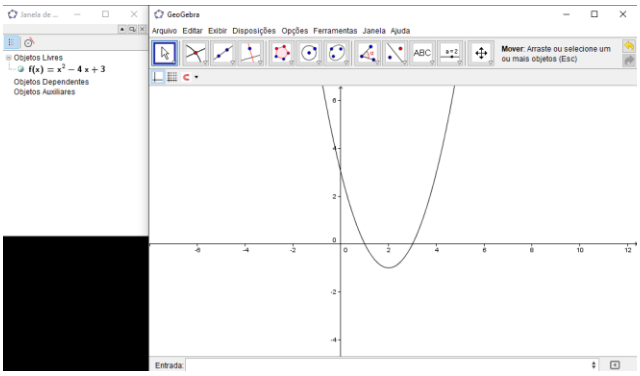
Figura 7



Fonte: o autor

b) Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$

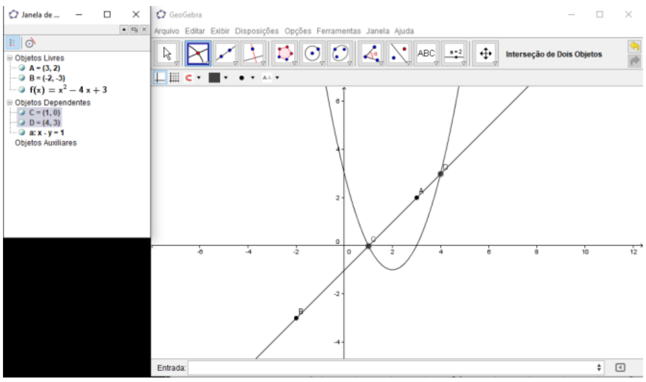
Figura 8



Fonte: o autor

c) Intersecção entre os dois gráficos a e b

Figura 9



Fonte: o autor

Infelizmente, é verdade que muitas escolas públicas enfrentam restrições de recursos e infraestrutura, incluindo a falta de laboratórios de informática adequados e, com isso, dificultando o uso do GeoGebra ou de outras ferramentas computacionais nas salas de aula. No entanto, existem alternativas viáveis que podem ser exploradas para contornar essa limitação como o uso de dispositivos móveis (smartphones ou tablets) que podem ser usados para acessar o GeoGebra, computadores portáteis (se houver disponibilidade na escola) ou mesmo uma versão offline chamada "GeoGebra Classic", que pode ser instalada em um computador sem a necessidade de conexão com a internet. É importante destacar que a falta de recursos tecnológicos não deve impedir o ensino e a aprendizagem de matemática. O uso de recursos alternativos e estratégias criativas podem proporcionar um ambiente de ensino enriquecedor, mesmo em escolas com recursos limitados como geralmente são as escolas públicas.

6. EXPERIMENTANDO EQUAÇÕES CÚBICAS E QUÁRTICAS NO ENSINO MÉDIO

Para a realização desse trabalho foram selecionados 11 alunos, com idades entre 14 e 18 anos, da 1ª, 2ª e 3ª séries do turno matutino do Colégio Estadual Marieta Pereira dos Santos (Foto 1), localizado no município de Tremedal-BA. Inicialmente, equações de 3º e 4º graus foram apresentadas aos alunos através de uma lista (Anexo 9), que, sem as devidas explicações, buscaram formas de abordar o problema e encontrar soluções para algumas delas. Como o trabalho envolveu alunos de todas as séries do Ensino Médio, só trabalhamos com equações que tivessem raízes inteiras.

Mesmo que a Educação Básica não contemple o estudo das equações de grau maior que 2 e os livros didáticos, pelo menos em sua maioria, não abordem equações de ordem superior, o estudo dessas equações de 3º e 4º graus podem ter um papel motivador para os alunos ao utilizar técnicas aprendidas no Ensino Médio e técnicas de dedução e investigação matemática.

Foto 1 - Entrada do Colégio Estadual Marieta Pereira dos Santos

Fonte: O Autor

Numa segunda etapa foi sugerido que buscassem, através de tentativas, encontrar uma das raízes e, aplicando Briot-Ruffini, reduzir o seu grau até chegar a uma equação quadrática, já que eles já dominavam os métodos de resolução. Para tornar a tarefa mais fácil foi apresentado o Teorema das Raízes Racionais, temos que, se número racional escrito em sua forma irredutível, $\frac{p}{q}$ e, logo, $mdc(p,q) = 1$, é raiz da equação $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, onde $a_{n,\ldots,}, a_0$ são números inteiros e $a_n \neq 0$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Fizemos o seguinte exemplo para ilustrar:

Para determinar as raízes da equação $3x^2 + 22x + 5x - 14 = 0$ testamos para ver se se possuía alguma raiz racional. Como $a_3 = 3$, $a_2 = 22$, $a_1 = 5$ e $a_0 = -14$, para que $\frac{p}{q}$, com p, q primos entre si, então é necessário que p seja divisor de a_0 e q seja divisor de a_3. Então, $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7\}$ e $q \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Assim, teremos que $\frac{p}{q} = \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{3}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 7, \pm\frac{7}{3}\right\}$, e começaram a testar os valores:

$f(1) = 3.1^3 + 22.1^2 + 5.1 - 14 = 3 + 22 + 5 - 14 = 16 \neq 0$

$f(-1) = 3.(-1)^3 + 22.(-1)^2 + 5.(-1) - 14 = -3 + 22 - 5 - 14 = 0$

Seria possível testar os outros valores, mas como encontraram uma das raízes, usaram Briot-Ruffini para dividir a equação por $x + 1$ e determinaram as demais, que eram -7 e $2/3$, após resolver a equação quadrática $3x^2 + 19x - 14 = 0$.

Na primeira equação de 3º grau apresentada para resolução e com o termo independente igual a zero, o índice de acertos foi total, já que trabalharam em grupo e facilmente perceberam que, colocando o x em evidência e reduzindo o grau, chegariam à solução:

$x^3 - 7x^2 + 12x = 0$

$x(x^2 - 7x + 12) = 0$

E, resolvendo a equação chegaram à solução $S = \{0,3,4\}$

Já na segunda equação, $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ também de grau 3, inicialmente tentaram apenas isolar o x^3 e resolver o restante (equação quadrática). Esse erro gerou uma boa discussão, até que uma aluna do 2º ano buscou uma maneira singular de resolução, separando uma equação de grau 2 e igualando a zero, e logo depois verificando se esses valores também anulavam a parte restante da equação e, por fim, pela soma e produto das raízes determinou a terceira raiz. Veja a seguir:

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

Primeiro ela pensou na equação $x^2 - x - 2 = 0$, que havíamos resolvido numa aula imediatamente anterior e manipulou algebricamente para chegar até ela:

$x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 2x^2 - x + 4 - 4 + 2 = 0$

$x^3 - 3x^2 + 4 + (x^2 - x - 2) = 0$

Resolvendo a equação quadrática, obteve -1 e 2 como raízes e verificou que ambos os valores também anulavam a outra parte da equação. E então, usando as relações de Girard, estudadas anteriormente, determinou a terceira raiz:

$-1 + 2 + x''' = 2$

$x''' = 1$

E, para confirmar que 1 é raiz da equação e que $S = \{-1,1,2\}$:

$(-1).2.x''' = -2$

$x''' = 1$

Mesmo que tenhamos usado apenas equações com raízes inteiras a solução mostrou engenhosidade e criatividade e trouxe um grande sentimento de satisfação para os alunos, mesmo conscientes de que essa solução resolveu apenas essa equação específica.

A seguir, os alunos passaram a usar o dispositivo prático de Briot-Ruffini. Eles dividiram a tarefa de encontrar uma ou mais raízes por tentativa e depois, usando o dispositivo, reduziram equações de grau 4 até o grau 2, que foram por eles resolvidas.

A terceira questão apresentada foi uma equação do 4º grau, mas com termo independente nulo. Novamente colocaram o x em evidência e buscaram a solução, determinando uma raiz por tentativa e calculando as outras duas:

$x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 12x = 0$

$x(x^3 - 5x^2 - 8x + 12) = 0$

Observaram que 1 era raiz da equação e aplicaram Briot-Ruffini:

1	1	-5	-8	12
	1	-4	-12	0

Por fim, resolvendo a equação quadrática $x^2 - 4x - 12 = 0,$ concluíram que $S = \{-2,0,1,6\}$.

A quarta e última equação estudada foi também de 4º grau. Os alunos também buscaram raízes óbvias e reduziram novamente usando Briot-Ruffini. Como já estavam mais habituados a resolver essas questões rapidamente encontraram as raízes. Segue a equação:

$x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120 = 0$

Determinaram que 2 é raiz da equação. Então:

2	1	2	-25	-26	120
	1	4	-17	-60	0

Chegando à equação $x^3 + 4x^2 - 17x - 60 = 0,$ novamente descobriram que 4 era uma das soluções e fizeram:

4	1	4	-17	-60
	1	8	15	0

Ao final, resolveram a equação quadrática $x^2 + 8x + 15 = 0$ e chegaram à solução $S = \{-5 - 3, 2, 4\}$.

No Ensino Médio, como já foi dito, o foco geralmente está nas equações de primeiro e segundo graus, e as equações de terceiro e quarto graus podem ser abordadas de maneira mais teórica, a fim de desenvolver uma compreensão geral dos polinômios e suas propriedades. Nesse caso, optamos por abster de usar as fórmulas de Cardano-Tartaglia e de Ferrari por serem bastante extensas e complexas, sendo muito difíceis de serem aplicadas manualmente em sala de aula e tornando sua aplicação prática menos comum em comparação com as equações de grau inferior, e utilizar apenas as relações de Girard e o dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Porém, de uma forma geral (e devido ao pouco tempo utilizado por ser um assunto que não faz parte do conteúdo programático do ensino médio), essa atividade experimental mostrou a viabilidade de se incluir, mesmo que de forma mais superficial, a resolução de equações de grau 3 e 4 durante o estudo dos polinômios no ensino médio de forma que os alunos, motivados, sejam estimulados a buscar alternativas na busca da solução e, desse modo, preparando-os para estudos mais avançados em matemática, onde essas fórmulas podem ser mais relevantes.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

É uma tendência atual no ensino da matemática, notadamente nas escolas públicas, que a interdisciplinaridade seja aplicada com a justificativa de que é uma exigência para o bom desempenho dos alunos no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio). Junta-se a isso a orientação de se utilizar a resolução de problemas como metodologia para o processo de ensino-aprendizagem, sempre buscando conectar a realidade vivida pelos alunos com os conceitos matemáticos aplicados em sala de aula, vinculando o estudo de equações à resolução de situações-problema reais e cotidianos de maneira que esse aprendizado e desenvolvimento do pensamento algébrico auxiliem na compreensão dos outros diversos conceitos estudados durante o ensino médio.

Mas o que observamos em sala de aula, mesmo durante os anos de ensino fundamental II (6º ao 9º ano) é o uso excessivo de regras e procedimentos automáticos, totalmente desinteressantes para os alunos, com a apresentação de cálculos rotineiros e uso de fórmulas que não desenvolvem criatividade e autonomia em matemática. É fácil encontrar alunos que chegam ao ensino médio e, ao resolver equações, aplicam métodos ou fórmulas e encontram o resultado esperado, porém sem saber o significado desse resultado e muito menos o que ele representa. Apenas se limitam a “calcular o valor de x", e em sua maioria, sequer sabem que a terminologia "raiz" ou "zero" é usada para descrever as soluções de uma equação porque se relaciona com os pontos de cruzamento da função correspondente com o eixo x em um gráfico.

É notório que há muito a ser questionado sobre as dificuldades no ensino da matemática na educação básica e, em busca de soluções para esse problema educacional, descobrir caminhos que podem ser percorridos de forma a tornar a matemática uma disciplina agradável e estimulante. É preciso despertar nos alunos a importância da matemática na construção do conhecimento e mostrar como ela pode ser prazerosa se abordada de maneira correta, eliminando a ideia distorcida de que a aprendizagem matemática segrega, na escola, os bons e os maus alunos.

E é nesse sentido que caminha esse trabalho, iniciando com o preceito de que a história da matemática desempenha um papel estimulante na aprendizagem dessa disciplina. Ao explorar as origens, desenvolvimentos e aplicações dos conceitos matemáticos ao longo do tempo, os alunos são envolvidos em uma narrativa histórica que desperta seu interesse e curiosidade, oferecendo uma perspectiva mais ampla sobre os conceitos matemáticos ao mostrar como eles foram abordados e incorporados ao longo do tempo e como evoluíram para as formas que conhecemos atualmente, criando uma compreensão mais profunda e uma percepção de que a matemática não é apenas um conjunto de fórmulas e procedimentos, mas sim uma disciplina viva e em constante evolução. E essa relação entre a matemática e a história, com as contribuições de famosos matemáticos, levam a exemplos concretos de como a matemática tem sido essencial para o avanço de diversas áreas científicas e tecnológicas, acompanhando a evolução da humanidade.

Outra vertente desse trabalho é abordar alguns dos diferentes métodos de resolução de equação, principalmente algébricos, geométricos e computacionais (geralmente muito limitados pela falta de equipamentos nas escolas públicas), pois podem possibilitar uma compreensão mais abrangente dos conceitos matemáticos envolvidos através da visualização e manipulação de símbolos algébricos, facilitando a construção de um entendimento sólido e uma conexão entre teoria abstrata e aplicação prática. A utilização de diferentes métodos também oferece aos alunos distintas maneiras de abordagem na resolução dos problemas, flexibilizando a escolha de estratégias para resolver um determinado problema, desenvolvendo assim suas habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas.

Combinar diferentes métodos é uma alternativa para estimular a aprendizagem matemática de equações no Ensino Médio: enquanto os métodos algébricos desenvolvem um pensamento mais abstrato, analítico e simbólico, os métodos geométricos expandem as habilidades de interpretação espacial e reconhecimento de padrões e relações espaciais. O desenvolvimento dessas habilidades complementares contribui para uma compreensão mais profunda e abrangente da matemática, já que contemplam tanto alunos que preferem uma abordagem mais lógica e sequencial quanto aqueles que tem uma tendência mais visual e espacial. Ao incorporar ambas as abordagens e aumentar a possibilidade de aprendizagem, os professores podem atender às necessidades de uma variedade de alunos e promover uma aprendizagem mais inclusiva e envolvente.

ANEXO 1

Método da Falsa Posição

Seja um problema do tipo “uma quantidade somada ao seu terço resulta em 20”, que seria uma equação linear do tipo:

$$x + \frac{x}{3} = 20$$

De início, e para eliminar a fração, poderíamos pensar em $x = 3$

$$3 + \frac{3}{3} = 4$$

Como chegamos ao resultado 4 e queríamos o 20, que é o quíntuplo de 4, o fator de ajuste seria $3x5 = 15$, obtendo o resultado da incógnita $x = 15$ (ou “aha”).

O problema 25 do papiro Rhind, consiste na determinação de uma quantidade sabendo que esta quantidade e sua metade somam 16, o que equivale, na notação atual, a

$$x + \frac{x}{2} = 16$$

Utilizando o método da falsa posição e novamente escolhendo inicialmente um valor qualquer para x ("aha") para eliminar a fração, podemos pensar em $x = 2$. Com este valor computa-se a expressão

$$2 + \frac{2}{2} = 3$$

Podemos perceber, então, que o fator de correção deverá ser $\frac{16}{3}$, já que seu produto por 3 resulta em 16:

$$3.\frac{16}{3} = 16$$

Logo, o valor correto de "aha", ou x, deve ser $\frac{32}{3}$ ou seja, $2.\frac{16}{3}$.

.

ANEXO 2

Resolução da equação quadrática do Papiro de Kahun

Enunciado: “Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como $1{:}\frac{3}{4}$ “o que, na notação atual, seria algo como “A soma de áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é igual ao quadruplo do lado do outro”

Pela representação algébrica atual, teríamos que:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 3x = 4y \end{cases}$$

Utilizando o método da falsa posição, inicialmente iremos supor que $x = 4$ e $y = 3$, o que tornaria a segunda sentença verdadeira, e substituiríamos na primeira:

$$4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

Como o resultado não foi o desejado fica claro que o par ordenado $(4{,}3)$ não é a solução do problema, mas é o quarto do valor procurado. Sendo assim, e multiplicando todos os membros por $4,$ teremos:

$$4(4^2 + 3^2) = 4.25$$

$$4.4^2 + 4.3^2 = 100$$

E, como $4 = 2^2$:

$$2^2.4^2 + 2^2.3^2 = 100$$

$$(2.4)^2 + (2.3)^2 = 100$$

$$8^2 + 6^2 = 100$$

Portanto, chegamos ao par ordenado $(8{,}6)$, que é solução do sistema de equações.

ANEXO 3

Solução da equação enunciada na tábua de argila encontrada na Mesopotânia

"*Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870?"*

Em notação atual:

$x^2 - x = 870$

a) Tomando a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplicando por ela mesma:

$$0{,}5.0{,}5 = 0{,}25$$

b) Somando o resultado a 870 *obtém-se um quadrado perfeito:*

$$870 + 0{,}25 = 870{,}25 = 29{,}5^2$$

c) Somando esse valor à metade de 1:

$$29{,}5 + 0{,}5 = 30$$

E esse é o valor do lado procurado.

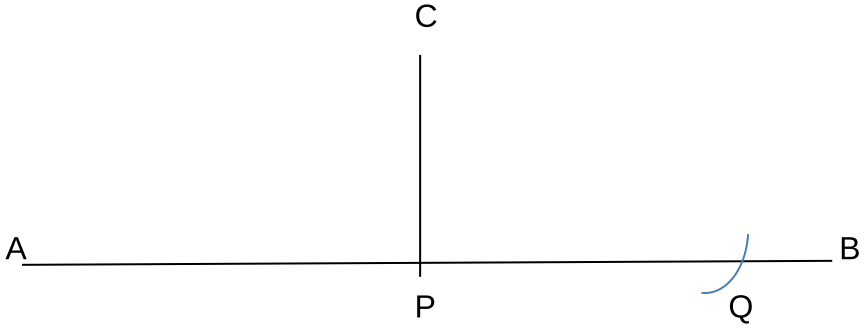
ANEXO 4

Solução grega para a equação do 2º grau: $\mathbf{x^2 - 10x + 9 = 0}$

a) Trace o segmento $AB = 10$

b) Chamando P o ponto médio entre A e B , trace o segmento $PC = 3$, perpendicular a AB . Esse segmento PCdeve medir 3 unidades (*raiz quadrada de* 9).

c) Com centro em C e raio PB, trace um arco de circunferência que corta AB no ponto Q, de forma que $PB = CQ$. A raiz desejada será dada pelo comprimento AQ.



Considerando o triângulo retângulo PCQ e sabendo-se que $PC = 3$ e $CQ = 5$, temos pelo Teorema de Pitágoras:

$$CQ^2 = PC^2 + PQ^2$$

$$5^2 = 3^2 + PQ^2$$

$$PQ^2 = 25 - 9$$

$$PQ^2 = 16$$

$$PQ = 4$$

E, portanto:

$$AQ = AP + PQ$$

$$AQ = 5 + 4$$

$$AQ = 9,$$

que corresponde à raiz positiva da equação.

ANEXO 5

Solução de Bhaskara para o problema:

"Um capital de 100 foi emprestado a uma certa taxa de juro ao ano. Após 1 ano, o capital foi retirado e o juro obtido foi aplicado durante mais 1 ano. Se o juro total foi de 75, qual foi a taxa ao ano?"

a) Se a taxa de juros foi de $x\%$ ao ano num empréstimo de 100 reais, então no primeiro ano o capital rendeu $\left(\frac{x}{100}\right).100 = x$.

b) Como no 2º ano o capital foi retirado, a taxa de juros incidiu apenas sobre os juros obtidos no ano anterior:

$$\left(\frac{x}{100}\right).x = \frac{x^2}{100}$$

c) Somando os juros obtidos, temos:

$x + \frac{x^2}{100} = 75$ ou $x^2 + 100x - 7500 = 0$

O enunciado da solução dizia, também em linguagem atual: "Eleve a metade do capital (coeficiente de x) ao quadrado, acrescente o resultado ao produto dos juros totais (termo independente) pelo capital, extraia a raiz quadrada e diminua a metade do capital, o que leva à solução procurada".

Sendo 100 o capital, 50 a sua metade e 75 os juros totais, temos a expressão:

$$x = \sqrt{50^2 + 75.100} - 50$$

$$x = \sqrt{2500 + 7500} - 50$$

$$x = \sqrt{10000} - 50$$

$$x = 100 - 50$$

$$x = 50,$$

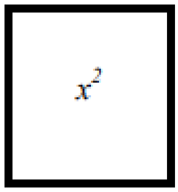
que é a solução do problema.

ANEXO 6

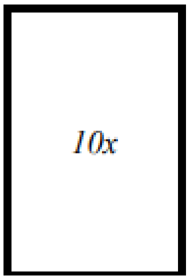
Método usado por Al-Khowarizmi

a) Tomemos a equação $x^2 + 10x = 39$.

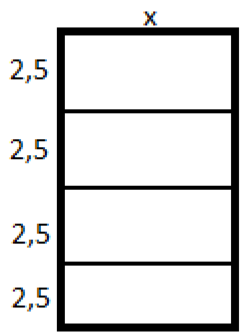
b) Desenhamos um quadrado de lado x cuja área equivale a x^2



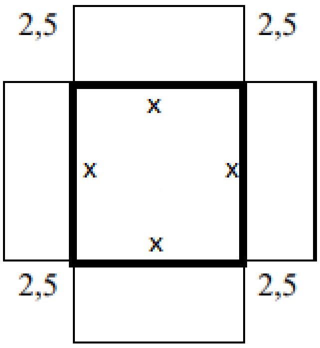
c) Desenhamos um retângulo de lados medindo 10 e x, cuja área mede $10x$



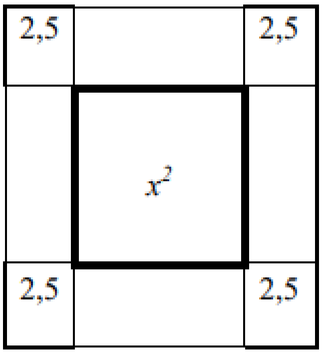
d) Divide-se esse retângulo em quatro retângulos de áreas iguais



e) Conecta-se cada um desses retângulos a um dos lados do quadrado



f) Formamos uma figura cuja área é dada por $x^2 + 4.2{,}5x = x^2 + 10x$. Como no enunciado temos que $x^2 + 10x = 39$ temos a área dessa figura igual a 39. E, completando o quadrado:



g) A área desse quadrado completo é igual é igual a $39 + 4.(2{,}5)^2 = 39 + 4.6{,}25 = 39 + 25 = 64$. Logo, se um quadrado tem área igual a 64 é porque seu lado mede 8 e:

$$2{,}5 + x + 2{,}5 = 8$$

$$x = 3$$

Encontramos, então, a raiz positiva da equação.

ANEXO 7

Método fan-fan ou de Horner.

a) Tomemos a equação $x^2 + 84x - 1256 = 0$

b) A raiz positiva da equação está no intervalo entre 12 e 13. A transformação fan-fan é feita tomando $y = x - 12$ e, logo, $x = y + 12$. Substituindo teremos:

$(y + 12)^2 + 84(y + 12) - 1256 = 0$

$y^2 + 24y + 144 + 84y + 1008 - 1256 = 0$

$y^2 + 108y = 104$, que possui a raiz positiva entre 0 e 1.

c) Identificando y^2 com y, podemos obter um valor aproximado da raiz:

$$x = 12 + \frac{104}{109}$$

$x \cong 12{,}954128$

d) O princípio do método consistia em repetir o processo a partir desse novo resultado até chegar a um número que não mais se modificasse. Nesse caso em questão após a primeira transformação já alcançaríamos o valor desejado, já que, com a aproximação de dois dígitos, a raiz positiva da equação $x^2 + 84x - 1256 = 0$ é $12{,}95$.

ANEXO 8

Uso do dispositivo de Briot-Ruffini:

PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ENQ – 2022.1 – Gabarito

Questão 01 [1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,25; (c)=0,75]

As equações $x^4 + bx^2 + c = 0$ e $x^3 + x^2 - 37x + 35 = 0$ possuem duas raízes distintas comuns.

(a) Determine as raízes da segunda equação.

(b) Mostre que se α é raiz da primeira equação então $-\alpha$ também o é.

(c) Determine todos os possíveis valores de b e c na primeira equação.

Respostas:

1) a) Se $x^3+x^2-37x+35=0$, então, usando Briott-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & -37 & 35 \\ \hline & 1 & 2 & -35 & 0 \end{array}$$

$x^3+x^2-37x+35=$
$(x-1)(x-5).(x+7)=0$

$x^2+2x-35=0$
$S=-2$ | $x'=5$
$P=-35$ | $x''=-7$

As raízes são $\{-7, 1, 5\}$

b) Na equação $x^4+bx^2+c=0$, tomemos $x^2=y$ e, logo,
$x^4+bx^2+c=y^2+by+c=0$

c) i) Se as raízes comuns forem $\{1,5\}$
$f(x)=x^4+bx^2+c=0$
$f(1)=1+b+c=0$
$f(5)=625+25b+c=0$

$\begin{cases} b+c=-1 \\ 25b+c=-625 \end{cases}$ $\begin{cases} -b-c=1 \\ 25b+c=-625 \end{cases}$ $24b=-624$

$b=-\frac{624}{24}$ $\boxed{b=-26}$

$-26+c=-1$ $\boxed{c=25}$

ii) Se as raízes comuns forem $\{-7,1\}$
$f(x)=x^4+bx^2+c=0$
$f(1)=1+b+c=0$
$f(-7)=2401+49b+c=0$

$\begin{cases} b+c=-1 \\ 49b+c=-2401 \end{cases}$ $\begin{cases} -b-c=1 \\ 49b+c=-2401 \end{cases}$ $48b=-2400$

$b=-\frac{2400}{48}$ $\boxed{b=-50}$

$-50+c=-1$ $\boxed{c=49}$

iii) Se as raízes comuns forem $\{-7,5\}$
$f(x)=x^4+bx^2+c=0$
$f(5)=625+25b+c=0$
$f(-7)=2401+49b+c=0$

$\begin{cases} 25b+c=-625 \\ 49b+c=-2401 \end{cases}$ $\begin{cases} -25b-c=625 \\ 49b+c=-2401 \end{cases}$ $24b=-1776$

$b=-\frac{1776}{24}$ $\boxed{b=74}$

$-74+c=-1$ $\boxed{c=73}$

b) Se $b=-26$ e $c=25$, teremos:
$y^2-26y+25=0$
$S=26$ | $y'=1$
$P=25$ | $y''=25$
Logo, $x^2=\pm1$ e $x=\pm1$ e $x^2=25$ e $x=\pm5$

Se $b=-50$ e $c=49$, teremos:
$y^2-50x+49=0$
$S=50$ | $y'=1$
$P=49$ | $y''=49$
Logo, $x^2=1$ e $x=\pm1$ e $x^2=49$ e $x=\pm7$

Se $b=-74$ e $c=73$, teremos:
$y^2-74x+73=0$
$S=74$ | $y'=1$
$P=73$ | $y''=73$
Logo, $x^2=1$ e $x=\pm1$ e $x^2=73$ e $x=\pm\sqrt{73}$

Então, se α é raiz da equação, então $-\alpha$ também o é.

ANEXO 9

Equações de 3º e 4º graus apresentadas a alunos do ensino médio

Exercícios:

Questão 1: Qual a maior das raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$?

a) 2. b) 4. c) 0. d) 3. e) 1.

Questão 2: Se a, b e c são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, então $a^2 + b^2 + c^2$ vale:

a) 9. b) 14. c) 1. d) 6. e) 5

Questão 3: O polinômio $P(x) = x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 12x$ tem todas as raízes inteiras. Então a diferença entre a maior e a menor dessas raízes vale:

a) 4. b) 5. c) 6. d) 2. e) 8.

Questão 4: Seja a equação polinomial $x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120 = 0$. Podemos afirmar que a soma entre o produto das duas menores e das duas maiores raízes resulta em:

a) 23. b) 35. c) 42 d) 33. e) 21

REFERÊNCIAS

AMARAL, J. T.. **Método de Viéte para resolução de equação do segundo grau.** Revista do Professor de Matemática, [s.l.], n. 13, p.18-20, 2000.

ARAÚJO M.N., OLIVEIRA R.P.de, CARNEIRO R.S., **Uma breve história da equação do 2º grau**, UFNT, Araguaína-TO, 2021.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

BRASIL. **Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/83191-pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil Acesso em 20/09/2023..

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmentros Curriculares Nacionais**. Ciência da Natureza, Matemática e Tecnologia.Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRESSAN, G; WEBER, Elenice S. **Equações Lineares no Ensino Médio: uma proposta didática por meio da Resolução de Problemas**, **REMAT**, Bento Gonçalves, RS, Brasil, v. 5, n. 2, p. 82-95, 2019.

CAPELIN, L.A.S., NOGUEIRA, C.M.I., **Análise de erros em matemática: e se fizéssemos do erro um "meio" e não o fim**: **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor**. Cadernos PDE, Versão On-line, Paraná, 2013, p. 9. ISBN 978-85-8015-076-6.

CÉSAR, M., **Interagir para Aprender: A escola INCLUSIVA e as práticas pedagógicas em matemática.** In Fernandes & J.F. MATOS (Eds). Universidade de Madeira Lisboa, 2012.

CNN, 2021, Educação brasileira está em último lugar em ranking de competitividade. **Relatório PISA,** Disponivel em: https://www.cnnbrasil.com.br/nacional/educacao-brasileira-esta-em-ultimo-lugar-em-ranking-de-competitividade/#:~:text=O%20país%20teve%20um%20baixo,de%20apenas%202%2C6%25. Acesso em 20/01/2023.

DARELA, E; CARDOSO, M.C.;ROSA, R, da C., **História da Matemática - Livro didático**, 3. ed., UnisulVirtual – Palhoça, SC, 2011.

D´AMBRÓSIO, U. **Matemática, ensino e educação: uma proposta global**. São Paulo: Temas & Debates, 1991.

DARRONQUI, L. C. **Produção didático-pedagógica: elementos da história da matemática como estratégia pedagógica no ensino da função polinomial do primeiro grau.** Maringá: Universidade Estadual de Maringá- UEM, 2014. ISBN 978-85-8015-079-7.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33

Equação. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/equacao/>. Acesso em: 02/06/2023.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2011.

FERREIRA, E. A.,MARTINS, E. W. S., NUNES, H. S., **Introdução à Teoria de Galois e Extensão de Corpos;** Dissertação apresentada ao Colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá. Macapá-AP, 2012.

FRAGOSO, W. da C. Uma abordagem histórica da equação do 2ºGrau. In: **Revista Do Professor De Matemática.** [s.d.], n. 43, 01 dez. 2000.

IMENES, L, M. P; ,JAKUBO, J.; e LELLIS, M. C. T.,**Equação do segundo grau**. 17ª ed. São Paulo,1992.

LAMBDIN, D. V.; WALCOTT, C. **Changes through the Years: Connections between Psychological Learning Theories and the School Mathematics Curriculum**. In: MARTIN, W. G. et al. (Eds.). The Learning of Mathematics. Reston, VA: NCTM, 2007. p. 3 - 25.

LARA, I. C. M. de. **Jogando com a Matemática de 5a à 8a series**. 3A ed Rêspel, São Paulo, 2013.

LEON, J.S. **Álgebra linear com aplicações**. Tradução de: Sergio Gilberto Tabuada 8 ed. Dartmouth: University os Massachusetts, 1943, rio de janeiro: LTC, 2011.

LIMA, E.L., **A equação do 3º grau**, Matemática Universitária, nº5, junho/1987, p.12-14. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n05_Artigo01.pdf. Acesso em 28/12/2022.

LIVIO, M., **Razão Áurea: a história de fi, um número surpreendente,** tradução de Marco Shinobu Matsumura, Rio de Janeiro, Record, 2006.

MACHADO, N. J. Matemática e Língua Materna. Tese de doutorado, São Paulo, Cortez, 1993.

MILIES, C. P. **A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau**, RPM, nº 25, 1994.

NETO, J.de C.L., **Uma análise da história das equações do 2° grau nos livros didáticos**, UFPB/CCEN, Itaporanga – PB, 2011.

NEGROMONTE, M. A. O. et al. **A importância do uso das equações na resolução de problemas matemáticos**. Anais VI CONEDU.Campina Grande: Realize Editora, 2019. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/58513. Acesso em: 28/01/2023.

PEDROSO, H. A. **Uma breve história da equação do 2º grau**. Revista Eletrônica de Matemática, v.2, p.1-13, 2010.

PITZER, L. C. FÁVERO, J. D. **A História do Papiro de Rhind**. Revista Maiêutica, Indaial, 2017, v. 5, n. 1, p. 79-86.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan.1985.n. 5.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan.1994.n. 25.

ROSA, C. A. de P., **História da ciência : da antiguidade ao renascimento científico.** ─ 2. ed. ─ Brasília : FUNAG, 2012. Disponível em: https://funag.gov.br/loja/download/1019-Historia_da_Ciencia_-_Vol.I_-_DaAntiguidade_ao_Renascimento_CientIfico.pdf. Acesso em 19/09/2023.

SILVA, A. de A., COSTA, G. M. da P. **Equações do Primeiro Grau: Uma proposta de aula baseada na análise de livros**, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2014.

SILVA, J.B. de A., **Equações de 2° grau: sua história e abordagens didáticas**, UFPB/CCEN, João Pessoa, PB, 2019.

SOUZA, M. A. de. **Introdução A Teoria De Galois.** Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia), Curso de Matemática Licenciatura junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande- FURG, Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil ,Dezembro, 2017, 70 f.

TRICHES, F., **Pré-cálculo: Um Livro Colaborativo**, UFSC – SC, 2022. Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/PreCalculo/livro/livro.pdf. Acesso em 19/09/2023.

UNIVESP. **Univesp | Cardano e Tartaglia**. Disponível em:<https://apps.univesp.br/cardano-e-tartaglia/>. Acesso em 19/09/2023.

VALE, A. F. A. **As diferentes estratégias de resolução da equação do segundo grau,** Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró, para obtenção do título de Mestre em Matemática. 2013. Disponível em: https://ppgmat.ufersa.edu.br/wp-content/uploads/sites/58/2016/02/Dissertação-Alberton-Fagno.pdf. Acesso em 08/01/2023.