UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - CETEC

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DECODIFICAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS EM AVALIAÇÕES: EXPLORANDO A LÓGICA MATEMÁTICA E ESTRATÉGIAS AFETIVAS

ANTONIO EL-CHAMI SILVA

CRUZ DAS ALMAS - BA

2023

ANTONIO EL-CHAMI SILVA

DECODIFICAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS EM AVALIAÇÕES: EXPLORANDO A LÓGICA MATEMÁTICA E ESTRATÉGIAS AFETIVAS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRB como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Andressa Lima de Souza da Cruz

Cruz das Almas - BA

2023

Decodificação de conceitos matemáticos em avaliações: explorando a lógica matemática e Estratégias Afetivas

Antonio El-Chami SIlva

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRB como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 07 de julho de 2023.

Banca Examinadora:

Prof.ª Drª. Andressa Lima de Souza (UFRB - Orientadora)

Prof.ª Drª. Maria Amélia de Pinho Barbosa Hohlenwerger (Membro externo)
UFRB

Prof.ª Dr.ª Rogelma Maria da Silva Ferreira (Membro interno)
UFRB

FICHA CATALOGRÁFICA

S586d	Silva, Antonio El Chami. Decodificação de conceitos matemáticos em avaliações: explorando a lógica matemática e estratégias afetivas / Antonio El Chami Silva._ Cruz das Almas, BA, 2023. 87f.; il. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT. Orientadora: Prof. Dra. Andressa Lima de Souza. 1.Matemática – Lógica simbólica e matemática. 2.Matemática – Avaliação. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título. CDD: 511.3

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB. Responsável pela Elaboração Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).

Dedico esta dissertação de mestrado a Deus, fonte de toda sabedoria e inspiração, que tem me guiado ao longo desta jornada acadêmica e a meu amado filho, que é minha maior motivação. Que este estudo possa ser um legado para ele, inspirando-o a buscar sempre o seu melhor e a valorizar a importância da educação em sua própria vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sua presença constante e por todas as bênçãos em minha vida. Sua sabedoria e amor incondicional foram fundamentais para fortalecer-me e dar-me forças para enfrentar os desafios e alcançar meus objetivos.

Quero expressar meu profundo agradecimento e gratidão à minha mãe, que perdi durante esse percurso. Sua presença e influência em minha vida foram inestimáveis, e sou eternamente grato por todo amor, dedicação e ensinamentos que ela me proporcionou. Mesmo ausente fisicamente, sua memória vive em meu coração, e agradeço por ter sido abençoado com uma mãe tão especial. Seu legado de amor, coragem e perseverança continuará a inspirar-me a ser a melhor versão de mim mesmo e a honrar sua memória em cada passo que dou. Obrigado, minha querida mãe, por tudo que você foi e sempre será para mim.

Gostaria de expressar minha gratidão ao meu pai, que partiu precocemente, mas que foi o primeiro a me levar para a escola. Obrigado por ter sido o primeiro a me mostrar o caminho da educação e por ter me deixado um legado de amor e determinação. Sua influência positiva continuará a moldar minha vida.

A minha amada esposa, você tem sido uma fonte constante de amor, apoio e inspiração. Sua compreensão, paciência com as ausências e encorajamento foram essenciais para a conclusão desta dissertação. Sua presença é meu porto seguro e sou grato por poder compartilhar essa conquista ao seu lado.

Ao meu amado filho, você é minha maior motivação. Sua alegria e sorriso contagiantes me impulsionaram a persistir nos momentos de dificuldade. Agradeço por ser a luz da minha vida e por me ensinar o verdadeiro significado do amor de pai.

Quero registrar meu agradecimento à minha irmã e sobrinha, duas pessoas extraordinárias que têm um lugar especial em meu coração. Sua presença constante em minha vida trouxe conforto, alegria e força nos momentos mais desafiadores. Agradeço por seu apoio, por compartilhar risos, lágrimas e memórias preciosas. Minha sobrinha, você é um raio de sol em nossas vidas. Vocês são presentes valiosos em minha vida, e sou grato por cada momento que passamos juntos. O amor, semelhanças, diferenças e a ligação que compartilhamos são inestimáveis, e minha gratidão por tê-las em minha família é infinita.

À minha família, expresso minha profunda gratidão. Seu apoio incondicional, paciência e encorajamento foram fundamentais para o meu sucesso. Vocês sempre estiveram ao meu lado, oferecendo seu amor e incentivo nos momentos de dúvida e cansaço. Sou eternamente grato por ter vocês em minha vida.

À minha orientadora, sou imensamente grato por sua orientação, conhecimento e apoio ao longo de todo o processo de pesquisa. Suas contribuições valiosas e sua orientação cuidadosa foram fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação. Agradeço por acreditar em meu potencial e por me desafiar a ir além dos meus limites acadêmicos.

Aos meus amigos e colegas, agradeço por estarem ao meu lado durante toda essa jornada. Seus encorajamentos, discussões enriquecedoras e trocas de experiências foram essenciais para o meu crescimento pessoal e profissional. Sou grato por poder contar com vocês e pela amizade sincera que compartilhamos.

Aos meus alunos, agradeço por me inspirarem diariamente. Suas perguntas, curiosidade e dedicação à aprendizagem são constantes motivações para o meu trabalho. Sou privilegiado por ter a oportunidade de compartilhar conhecimento e contribuir para o crescimento de cada um de vocês.

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta dissertação, meu sincero agradecimento. Seja através de palavras de encorajamento, ajuda prática ou apoio emocional, cada gesto foi importante e significativo para o meu sucesso. Sou grato por cada pessoa que cruzou o meu caminho e me ajudou a alcançar este marco em minha jornada acadêmica.

Que este agradecimento reflita minha profunda gratidão por todos que estiveram presentes e me apoiaram ao longo deste caminho. Sou abençoado por ter cada um de vocês em minha vida e sou grato por cada compartilhamento.

Muito obrigado a todos!

“Jamais considere seus estudos como uma obrigação,
mas como uma oportunidade invejável
para aprender
a conhecer a beleza libertadora do intelecto
para seu próprio prazer pessoal
e para proveito da comunidade
à qual seu futuro trabalho pertencer.” - Albert
Einstein(1933)

Resumo

Nesta dissertação de mestrado, apresentaremos estratégias para aprimorar a compreensão dos conceitos matemáticos durante as avaliações, por meio da introdução da Lógica Matemática aos estudantes de uma maneira afetiva, que vá além da disciplina em si. Abordaremos os modelos tradicionais de avaliação e destacaremos a diferença entre Avaliação Formativa e Somativa. Em seguida, examinaremos os principais exames nacionais que exercem influência sobre o ambiente escolar, incentivando os alunos a estabelecer metas alcançáveis. Propomos modelos de avaliação que auxiliam os estudantes a decodificar os conceitos matemáticos, compreender as questões de forma clara e identificar as abordagens adequadas para resolvê-las. Além disso, enfatizaremos a importância de uma abordagem afetiva na avaliação, buscando criar um ambiente estimulante que promova o engajamento dos estudantes. Para isso, propomos a introdução de jogos temáticos que abordem a matemática, a reflexão sobre o próprio processo de aprendizagem e o desenvolvimento de soluções criativas para os desafios matemáticos. Nosso objetivo é aprimorar a compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos, bem como melhorar o processo de avaliação na disciplina. Para alcançar isso, adotaremos estratégias práticas e apresentaremos exemplos de avaliação proposta. Também destacaremos os benefícios desta abordagem tanto para quem avalia quanto para quem é avaliado.

Palavras-chave: Avaliação, Decodificação, Lógica Matemática, Estratégias e Abordagem Afetiva.

Abstract

In this master's dissertation, we will present strategies to enhance the understanding of mathematical concepts during assessments, through the introduction of Mathematical Logic to students in an affective manner that goes beyond the discipline itself. We will address traditional models of assessment and highlight the difference between Formative and Summative Assessment. Next, we will examine the main national exams that exert influence on the school environment, encouraging students to set achievable goals. We propose assessment models that assist students in decoding mathematical concepts, understanding the questions clearly, and identifying appropriate approaches to solve them. Additionally, we will emphasize the importance of an affective approach in assessment, seeking to create a stimulating environment that promotes student engagement. To achieve this, we propose the introduction of thematic games that address mathematics, reflection on the learning process itself, and the development of creative solutions to mathematical challenges. Our goal is to enhance the understanding and application of mathematical concepts, as well as improve the assessment process in the discipline. To accomplish this, we will adopt practical strategies and present examples of proposed assessment. We will also highlight the benefits of this approach for both the assessor and the assessed.

Keywords: Assessment, Decoding, Mathematical Logic, Strategies, and Affective approach.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

Sumário

INTRODUÇÃO

A Matemática desempenha um papel fundamental em nosso cotidiano, e seu conhecimento é essencial em diversas áreas do saber. No entanto, muitos estudantes têm dificuldade em entender o que as questões estão solicitando, ou quais habilidades estão sendo avaliadas. Nesse sentido, é importante compreender como interpretar e, gradualmente, buscar fluência na linguagem matemática, a fim de melhorar a compreensão e a aplicação dos conceitos.

A Lógica Matemática desempenha um papel fundamental na resolução de problemas (POLYA, 2004), no desenvolvimento do raciocínio lógico e na compreensão dos conceitos matemáticos. Portanto, ela é um elemento essencial para a interpretação adequada das questões e a aplicação eficaz dos conceitos no contexto matemático.

As dificuldades em traduzir as questões das avaliações da linguagem matemática para o português, ou da língua materna para a álgebra, podem prejudicar o desempenho e o processo de aprendizagem dos estudantes (FONSECA, 2016). Quando eles não conseguem compreender adequadamente o que as perguntas solicitam, ou quais habilidades estão sob avaliação, é comum que apresentem respostas incorretas ou incompletas, o que resulta em uma avaliação imprecisa de seu conhecimento e habilidades matemáticas.

A prática docente mostra que esse obstáculo em decodificar conceitos matemáticos durante as avaliações têm impactos negativos no desempenho dos estudantes. Isso ocorre porque essa dificuldade impede que eles apliquem corretamente os conhecimentos compartilhados. Além disso, a falta de compreensão dos conceitos matemáticos pode levar a equívocos recorrentes e à dificuldade em avançar para níveis mais complexos de aprendizado, o que não contribui para a atuação do professor.

As avaliações são uma parte importante do processo de aprendizagem e desenvolvimento, seja em um contexto educacional ou profissional. No entanto, muitas vezes, elas podem ser percebidas como experiências estressantes e desgastantes para quem é avaliado. Para lidar com essa questão, uma abordagem dotada de mais afetividade pode evidenciar conexões entre aspectos do desenvolvimento infantil, a exemplo do que expõem os estudos de Hazin, Frade e Falcão (2010).

Filósofos como René Descartes, reconhecido também por suas contribuições no campo da Matemática, desenvolveram seu método com base em princípios fundamentais. Descartes destaca a importância de um rigoroso processo de raciocínio lógico. Seu primeiro princípio consiste na busca pela evidência, exigindo que qualquer afirmação seja apoiada por uma clara e distinta evidência antes de ser aceita como verdadeira. Esse requisito de evidência sólida contribui para estabelecer bases sólidas para o conhecimento.

Além disso, Descartes (2009) propõe, como segundo princípio, o de dividir as dificuldades em partes menores e mais gerenciáveis. Essa abordagem permite uma análise mais eficiente e uma resolução mais clara dos problemas. Ao decompor questões complexas em componentes mais simples, é possível compreendê-las e abordá-las de maneira melhor estruturada.

O terceiro princípio destacado por Descartes está relacionado à ordem do pensamento. Ele sugere que o processo de raciocínio comece pelos objetos mais simples e avance gradualmente para os mais complexos. Essa progressão lógica proporciona uma base sólida para o desenvolvimento do conhecimento, o que permite construir argumentos e conclusões de forma coerente.

Por fim, Descartes (2009) ressalta a importância de realizar enumerações abrangentes e revisões gerais. Essa prática contribui para garantir a integridade e a minúcia em todas as etapas do processo de raciocínio. Ao realizar revisões cuidadosas e completas, é possível evitar omissões e erros, fortalecendo assim a validade das conclusões alcançadas.

Esses princípios, presentes no método cartesiano, têm como objetivo promover um pensamento rigoroso e sistemático. Ao buscar evidências sólidas, dividir as dificuldades, seguir uma progressão lógica e realizar revisões minuciosas, é possível obter conclusões confiáveis e fundamentadas. A abordagem de Descartes é valiosa tanto para a Filosofia como para a Matemática, pois ressalta a importância do rigor e da precisão na busca pelo conhecimento.

A matemática pura requer um rigor, conforme Elon Lages Lima (2012). É preciso refletir sobre a necessidade de estabelecer bases sólidas para a demonstração de teoremas matemáticos. Segundo ele, para que um teorema seja adequadamente demonstrado, é imprescindível que todos os conceitos mencionados no enunciado estejam devidamente definidos.

Isso significa que cada termo utilizado na formulação do teorema deve ter uma definição clara e precisa, a fim de evitar ambiguidades e interpretações equivocadas. Essas hipóteses são essenciais para estabelecer os limites e as restrições sob as quais o teorema é válido. Além disso, Elon (2012) destaca a importância de explicitar as hipóteses ou condições que esses conceitos devem cumprir, como podemos observar a seguir:

> Todo mundo sabe que, para poder demonstrar um teorema, é necessário em primeiro lugar que todos os conceitos mencionados no enunciado tenham sido previamente definidos (ou façam parte de uma relação explícita de elementos primitivos, aceitos sem definição) e, em segundo lugar, que sejam declaradas explicitamente as hipóteses ou condições que tais conceitos devem cumprir. Por exemplo, no Teorema de Pitágoras os conceitos são: área, quadrado e triângulo. A hipótese é que o triângulo dado é retângulo. Seria inconcebível pretender provar que $a^2 = b^2 + c^2$, sem definir antes o que é um triângulo e (pior ainda) sem supor explicitamente que os lados b e c são perpendiculares. Mesmo porque a igualdade acima seria falsa sem esta hipótese. As afirmações acima feitas são óbvias e elementares (LIMA, 2012, p. 67).

Elon em (LIMA, 2012), ao citar o Livro "O Homem que Calculava" de Malba Tahan[1], conta sua experiência de leitura. Por meio dos desafios apresentados no livro, a beleza envolvente dos problemas pode cativar os leitores e instigar seu interesse pela Matemática. As narrativas e enigmas matemáticos, na obra podem despertar a curiosidade e incentivar os leitores a se aventurarem no mundo dos problemas matemáticos, explorando a resolução criativa e o prazer de encontrar soluções, como no exemplo apresentado pelo autor:

> No primeiro problema, Beremiz e seu amigo, viajando sobre o mesmo camelo, chegam a um oásis, onde encontram três irmãos discutindo acaloradamente sobre como dividir uma herança de 35 camelos. Seu pai estipulara que a metade dessa herança caberia ao filho mais velho, um terço ao do meio e um nono ao mais moço. Como 35 não é divisível por 2, nem por 3, nem por 9, eles não sabiam como efetuar a partilha. Para espanto e preocupação do amigo, Beremiz entrega seu camelo aos 3 irmãos, a fim de facilitar a divisão. Os 36 camelos são repartidos, ficando o irmão mais velho com 18, o do meio com 12 e o mais moço com 4 camelos. Todos ficaram contentes porque esperavam antes receber 17 e meio, 11 e dois terços e 3 e oito nonos respectivamente. E o melhor: como $18 + 12 + 4 = 34$, sobraram 2 camelos, a saber, o que fora emprestado e mais um. Todo mundo saiu ganhando. Explicação: Um meio mais um terço mais um nono é igual a $\frac{17}{18}$, logo menor do que 1. Na partilha recomendada pelo velho árabe sobrava um resto, do que se aproveitaram Beremiz e seu amigo (LIMA, 2012, p. 46).

Ao apresentar soluções alternativas para os desafios propostos no livro de Malba Tahan, Elon Lages demonstra sua diversão com a obra. Ele explora diferentes abordagens e estratégias para resolver os problemas, revelando sua criatividade e entusiasmo pela arte de resolver desafios matemáticos. Ao fazer isso, ele ilustra como a matemática pode ser uma disciplina fascinante, capaz de despertar o interesse e a curiosidade dos leitores, além de promover o desenvolvimento do pensamento crítico e uso da capacidade lógica de encontrar soluções inovadoras.

Elon (2012) apresenta um problema interessante em que o personagem da questão

[1]Malba Tahan é o pseudônimo do escritor e matemático recifense, Júlio César de Mello e Souza.

demonstra a habilidade em analisar as respostas e usar a informação fornecida para chegar à resposta correta. Trata-se de uma aplicação interessante da lógica e da dedução para solucionar um desafio complexo:

> O último problema do livro se refere a 5 escravas de um poderoso califa. Três delas têm olhos azuis e nunca falam a verdade. As outras duas têm olhos negros e só dizem a verdade. As escravas se apresentaram com os rostos cobertos por véus e Beremiz foi desafiado a determinar a cor dos olhos de cada uma, tendo o direito a fazer três perguntas, não mais do que uma pergunta a cada escrava. Para facilitar as referências, chamaremos as 5 escravas de A, B, C, D e E. Beremiz começou perguntando à escrava A: "Qual a cor dos seus olhos?"Para seu desespero, ela respondeu em chinês, língua que ele não entendia, por isso protestou. Seu protesto não foi aceito, mas ficou decidido que as respostas seguintes seriam em árabe. Em seguida, ele perguntou a B: "Qual foi a resposta que A me deu?"B respondeu: "Que seus olhos eram azuis"Finalmente, Beremiz perguntou a C: "Quais as cores dos olhos de A e B?"A resposta de C foi: "A tem olhos pretos e B tem olhos azuis". Neste ponto, o homem que calculava concluiu: "A tem olhos pretos, B azuis, C pretos, D azuis e E azuis". Acertou e todos ficaram maravilhados. Explicação para a dedução de Beremiz: Em primeiro lugar, se perguntarmos a qualquer das cinco escravas qual a cor dos seus olhos, sua resposta só poderá ser "Negros", tenha ela olhos azuis ou negros, pois na primeira hipótese ela mentirá e na segunda dirá a verdade. Logo B mentiu e, portanto, seus olhos são azuis. Como C disse que os olhos de B eram azuis, C falou a verdade, logo seus olhos são negros. Também porque C fala a verdade, os olhos de A são negros. Como somente duas escravas têm olhos negros, segue-se que os olhos de D e E são azuis.(LIMA, 2012, p. 47)

No estudo da relação entre lógica e linguagem, como por exemplo, na Psicanálise, Lacan(1981) desconstrói, em certa medida, a Lógica Aristotélica[2]. Enquanto na Matemática, para a demonstração de um teorema, é exigido um rigor e submissão às leis universais, a experiência no campo analítico é completamente singular. Isso torna o uso da lógica paradoxal e complicado, de difícil manejo e entendimento, mesmo para especialistas dessa área, como observado em:

> Ao longo das idades, através da história humana, assistimos a progressos a propósito dos quais nos enganaríamos ao acreditar que são progressos das circunvoluções. São os progressos da ordem simbólica. Sigam a história de uma ciência como a Matemática. (...) O progresso da matemática não é um progresso da potência do pensamento humano. É no dia em que um senhor pensa em inventar um signo como este $\sqrt{}$, ou como este $\int$, que dá coisa boa. A Matemática é isso. Estamos numa posição de natureza diferente, mais difícil. Porque lidamos com um símbolo extremamente polivalente. Mas é apenas na medida em que chegarmos a formular adequadamente os símbolos da nossa ação que daremos um passo adiante (LACAN, 1981, p. 313).

Ao adicionar ao processo de avaliação elementos afetivos, como empatia, compreensão e apoio, ao processo de avaliação, é possível criar um ambiente mais positivo e acolhedor, que

[2] A Lógica Aristotélica é um sistema formal de raciocínio e inferência desenvolvido pelo filósofo grego Aristóteles no século IV a.C. É considerada uma das primeiras formas sistematizadas de lógica na história da filosofia ocidental. A lógica aristotélica se baseia na análise dos argumentos e na identificação de suas estruturas lógicas válidas(SOARES, 2023).

pode promover um engajamento maior dos avaliados, estimulando a reflexão, a autoavaliação e o crescimento pessoal. Isso se mostra deveras fundamental na contemporaneidade, de episódios de propagação do ódio na sociedade e de atos de violência contra e no ambiente escolar.

Da mesma forma, a Matemática desempenha um papel intenso na aplicação do potencial intelectual, na estrutura lógica do pensamento e na facilitação do desenvolvimento de habilidades dedutivas e intuitivas para escolhas e para a tomada de decisão. Sobretudo, em uma perspectiva de desenvolvimento histórico-cultural, em que o indivíduo pode ter uma evolução psíquica consequente, Vigotski[3] (2004) designa essas funções psicológicas superiores como subordinadas ao ambiente que permeia as experiências, constituindo a cultura de uma sociedade.

A aprendizagem é um processo mediado pela utilização e ação de instrumentos, linguagem, conceitos, símbolos e signos, por meio de uma decodificação e interação com outros indivíduos e com o meio social. De acordo com Vigotski(2010), esse processo deve ocorrer dentro da zona de desenvolvimento proximal (ZDP). Segundo o autor, a avaliação da aprendizagem não deve ser um fim em si mesma, mas um meio para promover o desenvolvimento contínuo do aluno. Ele argumentou que uma avaliação adequada deve considerar a ZDP do indivíduo, que representa a distância entre o nível de desenvolvimento atual e o potencial de desenvolvimento com o auxílio de um parceiro mais competente.

No ambiente escolar, é fundamental que o professor de Matemática desempenhe o papel de auxiliar na promoção da aprendizagem dos estudantes, de forma contextualizada com a realidade deles. É importante ressaltar que a avaliação não deve se limitar apenas a medir o conhecimento adquirido, mas também deve ter como objetivo compreender o processo de aprendizagem como um todo. Acrescentando a isso, a avaliação desempenha um papel crucial ao identificar as necessidades individuais de cada aluno e fornecer o suporte adequado para o avanço de suas habilidades e conhecimentos.

Nesse cenário, o objetivo desta dissertação é discutir modelos de avaliação que possam contribuir para a decodificação dos conceitos matemáticos durante as avaliações. Para isso, serão exploradas estratégias que auxiliem os estudantes a compreender as questões de forma mais clara, apresentando propostas de avaliações e exibindo os resultados de aplicações.

Além disso, abordaremos a importância de uma abordagem afetiva na avaliação, visando criar um ambiente acolhedor e estimulante que promova o engajamento dos estudantes, estimule

[3]O nome de Vigotski, Lev Semyonovich Vygotsky, pode ser encontrado de diferentes formas na literatura científica do ocidente, por seu nome, originalmente, ter sua grafia no alfabeto russo.

a reflexão sobre o próprio processo de aprendizagem e incentive o desenvolvimento de soluções criativas para os desafios matemáticos. Também exploraremos atividades lúdicas, como jogos, como uma forma de envolver os alunos. Ao discutir esses aspectos, nosso objetivo é contribuir para uma melhor compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos, bem como aprimorar o processo de avaliação na disciplina.

Diante do exposto, neste trabalho, discutiremos alguns modelos de avaliação e estratégias para decodificar conceitos matemáticos durante as avaliações, destacando a Lógica Matemática, sua simbologia e aplicações. Além disso, exploraremos como é possível realizar avaliações com maior ênfase na afetividade, apresentando estratégias práticas, um exemplo de avaliação proposta e os benefícios dessa abordagem, tanto para quem avalia como para quem é avaliado. Apresentaremos, também, os resultados de avaliações de Matemática aplicadas em uma turma do 3º ano do Ensino Médio, em nossa prática docente no ano de 2023.

1 AVALIAÇÃO

No contexto educacional, a avaliação desempenha um papel crucial no processo de aprendizagem. Ela não se limita apenas a atribuir notas e classificar alunos, mas também representa uma ferramenta poderosa para o diagnóstico e a qualificação da realidade educacional. Nesse sentido, Luckesi, renomado educador e pesquisador brasileiro, destaca que avaliar é, essencialmente, diagnosticar (LUCKESI, 2005). Segundo ele, o diagnóstico ocorre ao qualificar a realidade por meio de sua descrição, fundamentada em dados relevantes, e, em seguida, ao comparar essa realidade descrita com um critério predefinido de qualidade desejada, como o autor descreve:

> Avaliar é diagnosticar, e diagnosticar, no caso da avaliação, é o processo de qualificar a realidade por meio de sua descrição, com base em seus dados relevantes, e, a seguir, pela qualificação que é obtida pela comparação da realidade descrita com um critério, assumido como qualidade desejada (LUCKESI, 2005, p. 277).

No que se refere à Matemática, segundo Luckesi (2011), a avaliação deve ir além da mera verificação de respostas corretas, sendo essencial proporcionar ao aluno a oportunidade de compreender os conceitos matemáticos e sua aplicação prática. Dessa forma, a avaliação em Matemática se torna um meio para o estudante desenvolver sua capacidade de raciocínio lógico, aprimorar sua compreensão e buscar soluções criativas para os desafios apresentados.

No Brasil, uma das leis que orientam o ensino é a dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que destacam a importância da educação e das habilidades desenvolvidas no campo da Matemática. Segundo os PCN, é fundamental promover "(...) o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer deduções, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente"(BRASIL, 1997).

Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática, pretende-se contemplar a necessidade do seu ajustamento para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para ampliar as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Nesse sentido, o PCN traz as seguintes informações sobre avaliação:

> A avaliação é parte do processo de ensino e aprendizagem. Ela incide sobre uma grande variedade de aspectos relativos ao desempenho dos alunos, como aquisição de conceitos, domínio de procedimentos e desenvolvimento de atitudes. Mas, também devem ser avaliados aspectos como seleção e dimensionamento dos conteúdos, práticas pedagógicas, condições em que se processa o trabalho escolar e as próprias formas de avaliação (BRASIL, 1997, p. 19-20).

Em um cenário no qual as necessidades culturais, sociais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática. A possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é imprescindível, tanto para tirar conclusões e fazer argumentações como para o cidadão atuar como consumidor sensato, ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

Nesse sentido, um auxílio na compreensão dos conceitos é fundamental em uma perspectiva de avaliação formativa como parte do processo de ensino. Por vezes, os alunos demonstram dificuldades não só em sala de aula, mas isso acaba refletindo ao longo da vida cotidiana, profissional e acadêmica, como podemos observar em:

> Pois, uma vez que, a aprendizagem desta nova linguagem e de suas utilidades não ocorre, o aluno acaba gerando um sentimento de vergonha e antipatia pela matéria, na qual essa antipatia desenvolvida em sala de aula, ganha repercussão no lar, na sociedade e novamente nas escolas, aonde os novos discentes já chegam atemorizados com a disciplina antes mesmo de estudá-la e acabam por criar bloqueios em suas mentes, tornando o ensino da mesma ainda mais difícil de ser compreendido (SILVA, 2019, p. 37).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento elaborado pelo Ministério da Educação do Brasil (MEC) que estabelece os direitos e objetivos de aprendizagem que todos os estudantes devem alcançar em cada etapa da educação Infantil, ao Ensino Fundamental e ao Ensino Médio (BRASIL, Ministério da Educação, 2018). O documento da BNCC é composto por um conjunto de habilidades, competências e conhecimentos que devem ser trabalhados nas diversas áreas do conhecimento. No contexto da disciplina de Matemática, a BNCC define os conhecimentos, habilidades e competências essenciais que organizamos na Tabela 1.1.

Nº	Descrição
I	Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
II	Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
III	Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
IV	Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
V	Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
VI	Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
VII	Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
VIII	Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Tabela 1.1: Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental
Fonte:<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/a-area-de-matematica>

A proposta da BNCC é apresentar uma visão abrangente da Matemática, enfatizando não apenas a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também sua aplicação prática em situações cotidianas e na resolução de problemas. No Ensino Fundamental, destaca-se o compromisso com o letramento matemático. Além disso, o documento ressalta a importância da lógica matemática, do pensamento crítico e da capacidade de argumentação, competências específicas para essa etapa de ensino.

A BNCC também estimula o uso de metodologias ativas, recursos tecnológicos e estratégias de ensino que promovam a participação ativa dos estudantes, a construção colaborativa do conhecimento e a integração da Matemática com outras áreas do conhecimento (BRASIL, Ministério da Educação, 2018). A implementação da BNCC na Matemática busca assegurar uma formação sólida e abrangente nessa disciplina, preparando os estudantes para os desafios do mundo contemporâneo e contribuindo para o desenvolvimento das habilidades necessárias em suas vidas pessoais, acadêmicas e profissionais.

A decodificação envolve habilidades como a leitura atenta, a identificação das informações relevantes, a aplicação dos conhecimentos matemáticos e a elaboração de estratégias de soluções (WITTGENSTEIN, 1987). Dessa forma, a BNCC contribui para uma avaliação mais significativa e efetiva na disciplina de Matemática, estimulando o desenvolvimento da capacidade do raciocínio lógico, a resolução de problemas e a aplicação dos conceitos matemáticos a diferentes contextos.

Neste capítulo, discutiremos de forma abrangente os principais tipos de avaliação adotados em instituições educacionais, de escolas e colégios a universidades e faculdades, tanto no contexto brasileiro como em outros países.

1.1 Avaliações tradicionais

A avaliação formal tem sido historicamente utilizada para comparação, ranqueamento, quantificação, exame e verificação dos processos de aprendizagem (LUCKESI, 2005). Muitas vezes, a avaliação tradicional valoriza principalmente a memorização de informações, na qual os alunos são avaliados com base na capacidade de lembrar fatos e conceitos específicos.

Conforme destacado por Hoffman (2011) existe uma contradição evidente entre o discurso e a prática de alguns educadores no que diz respeito à avaliação. Essa contradição é particularmente notada na adoção de uma abordagem classificatória e autoritária, amplamente utilizada pela maioria. Essa postura pode ser explicada pela concepção de avaliação do educador, que é reflexo de sua história de vida como aluno e professor. Essa experiência pessoal influencia diretamente a forma como o educador compreende, aplica e percebe a avaliação, resultando em uma discrepância entre o discurso e a prática efetiva.

O estudo da Matemática geralmente gera sentimentos contraditórios entre professores, alunos e a comunidade acadêmica. "A matemática tem essa opacidade, sua beleza só se revela a quem a explora mais a fundo" (AVILA, 2022). Ela é reconhecida como uma área de conhecimento importante, com inúmeras aplicações práticas. No entanto, também pode ser percebida como um desafio, exigindo esforço e dedicação por parte de professores e estudantes.

A Matemática desempenha um papel fundamental como base e alicerce para a maioria das áreas de estudo. Ela fornece um suporte lógico essencial para diversas demonstrações lógicas teóricas e científicas (FASSARELLA, 2015). Ao utilizar conceitos matemáticos, é possível construir argumentos sólidos e realizar análises precisas em diferentes campos do conhecimento.

A avaliação formal na Matemática pode incluir questões que envolvam cálculos, resolução de problemas, interpretação de gráficos e tabelas, demonstração de teoremas e aplicação de conceitos em situações do mundo real. Além disso, é comum que essas avaliações sejam pontuadas e que as notas obtidas pelos alunos sejam utilizadas para fins de classificação, promoção de séries ou obtenção de diplomas e certificados. D'Ambrosio (2013) afirma que em vários países existe uma política cultural de aplicar testes padronizados para avaliar a aprendizagem, mesmo quando o currículo está desatualizado em relação ao mundo atual. Ele ressalta que esse problema não se restringe apenas ao Brasil.

Nesse sentido, Luckesi (2011) destaca que a avaliação deve ser um instrumento que possibilite a verificação e observação dos conteúdos compartilhados que os alunos aprenderam durante as aulas. Para isso, a decodificação dos conceitos e o entendimento do que está sendo solicitado são fundamentais. Obviamente, essa avaliação deve estar bem formulada, clara, sem ambiguidades e de acordo com os conteúdos trabalhados. A Figura 1.1 apresenta um exemplo de problema mal formulado, gerando uma resposta incorreta, porém coerente com o solicitado.

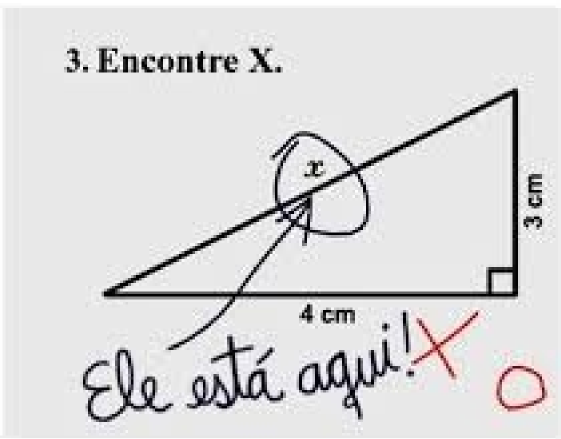


Figura 1.1: Encontre o X.

Fonte: (BITTENCOURT, 2009)

Por vezes, é possível observar alunos que sabem como realizar o cálculo solicitado nas questões, contudo, não conseguem interpretar a lógica matemática do problema para responder corretamente. Embora alguns teóricos defendam o erro como parte do processo de aprendizagem (VYGOTSKY, 2010), a avaliação e a metodologia tradicional geralmente não permitem a mensuração e o trabalho efetivo a partir desses obstáculos.

Desta forma, podemos observar a demonização e a aversão a vários conteúdos da Matemática que deveriam ser naturais e tranquilos em um processo contínuo de formação de conceitos e abstração da matéria para desenvolvimento na Matemática e suas diversas áreas de aplicação, contribuindo para que ela seja uma fonte inesgotável de desafios que estimulem o aprendizado em um ambiente favorável à busca pelo conhecimento concatenado.

1.2 Avaliação Formativa e Somativa

A avaliação formativa, de acordo com Luckesi (2011), pode ser aplicada de maneira contínua, buscando avaliar e corrigir rotas durante o percurso de ensino. Seu objetivo é acompanhar os estudantes durante as aulas, verificando o processo de ensino-aprendizagem de forma constante. Durante o processo de aprendizagem, é importante fornecer *feedback*[4] aos estudantes com o objetivo de avaliar e acompanhar seu progresso na aprendizagem.

Luckesi (2011) aponta que as avaliações somativas são usadas para avaliar o aprendizado do aluno, registrando as habilidades e o desempenho acadêmico na conclusão de um período pré-definido, geralmente no final de um projeto, unidade, curso, bimestre, semestre, programa ou ano letivo.

> Com a função classificatória, a avaliação constitui-se num instrumento estático e frenador do processo de crescimento; com a função diagnóstica, ao contrário, ela constitui-se num momento dialético do processo de avançar no desenvolvimento da ação, do crescimento para a autonomia, do crescimento para a competência etc. Como diagnóstica, ela será um momento dialético de "senso"do estágio em que se está e de sua distância em relação à perspectiva que está colocada como ponto a ser atingido à frente. A função classificatória subtrai da prática da avaliação aquilo que lhe é constitutivo: a obrigatoriedade da tomada de decisão quanto à ação, quando ela está avaliando uma ação (LUCKESI, 2005, p. 35).

A avaliação somativa pode ser realizada de várias maneiras, incluindo provas escritas, trabalhos práticos, apresentações orais, projetos, exames finais e outros métodos (HADJI,

[4]*feedback* é um termo que se refere ao retorno, resposta ou avaliação recebida sobre um determinado processo, desempenho ou resultado. É um mecanismo importante para fornecer informações que podem ser utilizadas para melhorar ou ajustar algo (VAZ; NASSER, 2021).

2001). Seu principal objetivo é medir o nível de domínio dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem definidos para o período de ensino. As notas ou pontuações obtidas na avaliação somativa geralmente são usadas para tomar decisões importantes, como a aprovação ou reprovação dos alunos, a classificação dos alunos em um ranking ou a seleção dos alunos para uma próxima etapa do processo de ensino.

Embora a avaliação somativa seja importante para avaliar o desempenho dos alunos, ela não oferece *feedback* aos alunos e professores para orientar o processo de aprendizagem. Por esse motivo, é importante equilibrar a avaliação somativa com outros processos de avaliação para garantir que os alunos tenham a oportunidade de receber *feedback* útil e melhorar continuamente seu desempenho.

Ao contrário da avaliação formal somativa, que ocorre no final de um período de ensino para medir o nível de compreensão de um aluno, a avaliação formativa é realizada de maneira contínua ao longo do processo de aprendizagem.

1.3 Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA)

No Brasil, existem algumas avaliações que são aplicadas nacionalmente. O Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA) é um recurso gratuito oferecido pelo governo brasileiro, por meio do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), vinculado ao MEC, que tem como objetivo avaliar e certificar as competências e habilidades de jovens e adultos que não tiveram a oportunidade de concluir seus estudos na idade adequada.

O ENCCEJA é composto por quatro provas objetivas que abrangem áreas como ciências naturais, matemática, língua portuguesa, língua estrangeira, artes, história, geografia e educação física. Além disso, os candidatos devem produzir uma redação.

O exame é oferecido em duas modalidades: uma para a certificação de conclusão do Ensino Fundamental, destinada a pessoas com pelo menos 15 anos de idade, e outra para a certificação do Ensino Médio, destinada a pessoas com pelo menos 18 anos de idade. A prova de matemática abrange todos os conteúdos das respectivas séries e é composta por trinta (30) questões objetivas, cada uma com quatro (04) alternativas. Como ilustrado no exemplo [5] na Figura 1.2 a seguir:

QUESTÃO 33

Um produto costuma ser vendido em uma loja por x reais. Numa segunda-feira, uma pessoa comprou seis desses produtos numa promoção do tipo "leve 3 e pague 2". No dia seguinte, esse mesmo produto foi ofertado numa nova promoção do tipo "leve 2 e pague 1". Se essa pessoa tivesse comprado a mesma quantidade de produtos na terça-feira, teria economizado em relação ao que pagou na segunda-feira.

A expressão que fornece o valor da economia feita por unidade comprada é

A) x

B) $\frac{5x}{6}$

C) $\frac{x}{2}$

D) $\frac{x}{6}$

Figura 1.2: ENCCEJA - 2018

Fonte: (INEP, s.d.).

Podemos propor um caminho possível para analisar o problema de forma estruturada, utilizando conceitos matemáticos para calcular e comparar os valores, a fim de chegar a uma conclusão sobre a economia realizada na terça-feira. Uma estratégia lógico-matemática para resolver essa questão seria a seguinte:

- Represente o valor original do produto como "x" reais.
- Na promoção de segunda-feira, a pessoa comprou 6 produtos e pagou por apenas 4 (leve 3 e pague 2).
- Calcule o valor pago na segunda-feira considerando a promoção. Seria equivalente a 4 vezes o valor original: 4x reais.
- Na terça-feira, a pessoa compraria a mesma quantidade de produtos (6), mas com a promoção "leve 2 e pague 1".

[5] Mais questões e gabaritos estão disponíveis em <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/encceja/provas-e-gabaritos> acesso em 10 de fevereiro de 2023.

- Calcule o valor que a pessoa pagaria na terça-feira considerando a nova promoção. Seria equivalente a 3 vezes o valor original: 3x reais.

- Compare os valores pagos na segunda-feira (4x reais) e na terça-feira (3x reais).

- Verifique a diferença entre os dois valores e determine se houve economia. Se a diferença for positiva, significa que a pessoa economizou na terça-feira em relação ao que pagou na segunda-feira.

  Supondo que o valor original por unidade seja “x” reais, e considerando a promoção “leve 3 e pague 2” na segunda-feira, o valor pago por unidade é dado por $\left(\frac{2}{3}\right)x$ reais.

  Na terça-feira, na promoção “leve 2 e pague 1”, o valor pago por unidade seria a metade do valor original, ou seja, $\left(\frac{1}{2}\right)x$ reais.

  A economia feita por unidade na terça-feira em relação à segunda-feira pode ser calculada subtraindo-se o valor pago na terça-feira do valor pago na segunda-feira:

  Economia por unidade $= \left(\frac{2}{3}\right)x - \left(\frac{1}{2}\right)x$

  Simplificando a expressão, obtemos:

  Economia por unidade $= \left(\frac{4}{6}\right)x - \left(\frac{3}{6}\right)x$

  Economia por unidade $= \left(\frac{1}{6}\right)x$

  Portanto, a expressão correta que fornece o valor da economia feita por unidade comprada é $\left(\frac{1}{6}\right)x$, em que “x” representa o valor original do produto por unidade.

Já o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que foi criado em 1998, é uma avaliação com proposta de aplicação anual pelo INEP. Atualmente, na disciplina de Matemática, o ENEM apresenta quarenta e cinco (45) questões objetivas abordando conteúdos do ensino médio, com o objetivo de avaliar o desempenho dos estudantes que concluíram ou estão concluindo o ensino médio no Brasil.

Além disso, o ENEM também é utilizado como meio de acesso a diversas instituições de Ensino Superior no país, bem como a programas do governo federal de acesso à educação, como o Programa Universidade para Todos (ProUni) e o Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior (FIES). O exame é composto por provas de múltipla escolha e uma redação, abrangendo áreas do conhecimento como linguagens, ciências humanas, matemática e ciências da natureza.

O ENEM é um tema frequente na cultura escolar, desde o Ensino Fundamental até o Médio. É relevante tanto para os estudantes que desejam ingressar no ensino superior quanto para as faculdades e universidades, que cada vez mais adotam o exame como critério de admissão, muitas vezes sendo a única opção disponível.

Existem, também, programas governamentais, como o FIES, que exigem que o candidato tenha realizado o Exame e alcançado um desempenho mínimo. Esse financiamento pode ser parcial ou total para o Ensino Superior em instituições privadas.

O ENEM abrange os conteúdos do Ensino Fundamental e Médio, proporcionando aos professores a oportunidade de despertar o interesse dos alunos por temas teóricos que, às vezes, podem parecer distantes da aplicação prática. Nesse sentido, os professores podem utilizar questões do ENEM como recurso para estimular a reflexão e a análise crítica dos estudantes.

É comum, ainda, a existência de pressão por parte das instituições de ensino secundário e algumas coordenações pedagógicas para a inclusão de questões do ENEM nas avaliações e na elaboração de simulados. Essa prática visa utilizar o desempenho dos alunos no exame como uma forma de propaganda de *marketing*, muitas vezes fazendo a exposição dos eventuais aprovados em instituições de nível superior em outdoor. Nossa preocupação é com aqueles que não conseguem aprovação, pois a política educacional deve ser para todos.

Busca-se facilitar o entendimento ao apresentar metodologias que possam aprimorar o processo de aprendizagem. A seguir, trazemos o exemplo 1.3.1, uma questão do ENEM que aborda o jogo de cartas conhecido como Paciência, evidenciando sua capacidade de estimular o raciocínio.

Exemplo 1.3.1. *Questão 150 (ENEM/2012) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas.*

A quantidade de cartas que forma o monte é:

a) 21.

b) 24.

c) 26.

d) 28.

e) 31.

Para resolver essa questão, as habilidades matemáticas necessárias incluem um raciocínio sequencial, sendo importante observar a sequência de formação das colunas de cartas, que segue um padrão de aumento progressivo. Também é necessário contar o número de cartas em cada coluna e somar essas quantidades para determinar a quantidade total de cartas nas colunas. E, para encontrar a quantidade de cartas que forma o monte, é preciso subtrair a quantidade total de cartas nas colunas (obtida na etapa anterior) do número total de cartas no baralho, que é fornecido como informação na questão.

Uma estratégia lógica para resolver essa questão é analisar a quantidade de cartas em cada coluna e, em seguida, calcular a soma dessas quantidades. Observamos que a quantidade de cartas em cada coluna segue uma sequência crescente: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Podemos interpretar essa sequência como uma progressão aritmética (PA) [6] .

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, que é dada pela expressão $S = \frac{n}{2} \cdot (a + l)$, onde S é a soma dos termos, n é o número de termos, a é o primeiro termo e l é o último termo, podemos calcular a quantidade total de cartas nas colunas.

Nesse caso, temos que $n = 7$ (número de colunas), $a = 1$ (primeiro termo) e $l = 7$ (último termo).

$S = \frac{7}{2} \cdot (1 + 7) = \frac{7}{2} \cdot 8 = 28.$

Portanto, a soma das quantidades de cartas nas sete colunas é igual a 28.

Sabendo que o baralho possui um total de 52 cartas, podemos encontrar a quantidade de cartas que forma o monte subtraindo a soma das quantidades nas colunas do total de cartas do baralho:

Quantidade de cartas no monte é igual ao:

Total de cartas - Soma das quantidades nas colunas = 52 - 28 = 24.

Portanto, a quantidade de cartas que forma o monte é 24.

[6] Uma PA é uma sequência numérica em que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma, chamada de razão.

1.3.1 Teoria de Resposta ao Item (TRI)

O ENEM, a partir de 2009, passou a adotar a Teoria de Resposta ao Item (TRI). Nessa abordagem, uma base de dados é compilada, e um algoritmo é utilizado para avaliar os acertos e erros dos candidatos, levando em consideração a capacidade de discriminação das questões. A TRI permite distinguir os candidatos que têm a proficiência necessária daqueles que não a têm, levando em conta, também, o grau de dificuldade de cada questão, — que pode ser nomeado como fácil, médio ou difícil. Além disso, a TRI incorpora um mecanismo de controle de acertos aleatórios, conhecido informalmente como "chute".

> A Teoria de Resposta ao Item (TRI) não é propriamente uma teoria, e sim um modelo matemático que tem sido elaborado, de maneira mais intensa, desde os anos de 1950, embora suas raízes situem-se na década anterior. O avanço da informática e das máquinas de processamento (computadores) possibilitou, nos anos de 1980, o desenvolvimento de softwares apropriados para os cálculos que o modelo TRI exige (Pasquali e Primi, 2003). Tal teoria foi desenvolvida não para substituir a psicometria clássica, mas como evolução de seus princípios, complementando e avançando os recursos estatísticos de análise para itens e escalas (HUTZ; BANDEIRA; TRENTINI, 2015, p. 97).

No ano de 2012, o ENEM segundo o INEP apresentou os valores obtidos com o modelo TRI na Tabela 1.2 [7], que indicam a faixa de pontuação alcançada pelos participantes nas questões de Matemática e suas Tecnologias.

Ano de Edição	Nota Mínima	Nota Máxima
2012	277,20	955,20

Tabela 1.2: TRI do ENEM - Matemática e suas Tecnologias

Fonte: (INEP, 2017).

Na prática, o modelo funciona de maneira semelhante a um jogo de perguntas e respostas. Cada questão é avaliada individualmente, com base em sua dificuldade e na habilidade do estudante ao respondê-la. Se o candidato acerta uma questão difícil, por exemplo, isso pode indicar um nível de habilidade maior do que se acertasse apenas questões fáceis.

Tais informações podem ser úteis para compreender a dispersão das notas na prova, bem como para avaliar o nível de dificuldade e a variação de desempenho dos participantes ao longo do tempo. No entanto, é importante lembrar que as notas mínimas e máximas podem variar de ano para ano, conforme as características específicas da prova e dos participantes.

[7] No ano de 2012, mesmo que o candidato não tenha acertado nenhuma das 45 questões, ele obteve uma pontuação de 277,2 pontos, em vez de receber a pontuação zero, pela metodologia do TRI nesse ENEM.

Ao contrário dos modelos de avaliação tradicionais, que consideram apenas o número de acertos e erros do candidato, a TRI leva em conta a dificuldade de cada questão, bem como a capacidade do participante de respondê-las corretamente. Dessa forma, o modelo TRI é capaz de fornecer uma avaliação mais precisa do desempenho do estudante, permitindo que os resultados sejam comparados de forma mais justa e confiável.

Na prática, o TRI funciona de maneira semelhante a um jogo de perguntas e respostas. Cada questão é avaliada individualmente, com base em sua dificuldade e na habilidade do estudante para respondê-la. Se o candidato acerta uma questão difícil, por exemplo, isso indica que ele possui um nível de habilidade maior do que se tivesse acertado apenas questões fáceis.

O modelo TRI é amplamente utilizado no Brasil em avaliações educacionais, incluindo o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e a Prova Brasil, que faz parte do SAEB e tem como objetivo avaliar o desempenho dos estudantes em Língua Portuguesa e Matemática (INEP, 2023). Além do Brasil, essa metodologia também é adotada em diversos outros países, como Estados Unidos, Canadá, Reino Unido, Austrália, Nova Zelândia, China, Japão, Coreia do Sul e México (HAMBLETON; SWAMINATHAN; ROGERS, 2018).

A teoria apresenta um modelo de avaliação com mais mecanismos de justiça e confiabilidade do que os modelos tradicionais, pois leva em conta não apenas a capacidade do estudante e a dificuldade das questões, mas também a estatística de acertos de todos os candidatos. Também por isso, a TRI tem sido aplicada em diversas áreas, como Educação, Psicologia, Saúde e Negócios, bem como em muitos outros países além dos mencionados acima. A TRI é uma técnica de modelagem de dados poderosa, que tem contribuído significativamente para o desenvolvimento de testes mais precisos e eficazes em todo o mundo.

O conhecimento da avaliação com TRI pode capacitar os alunos a compreender melhor o ENEM, direcionar seus estudos de forma mais eficaz, gerenciar melhor seu tempo durante a prova, receber um *feedback* detalhado e reduzir a ansiedade. Tudo isso pode contribuir para um melhor desempenho no exame.

1.4 Avaliação e Afetividade

A avaliação matemática com afetividade é uma abordagem que reconhece a importância das emoções na aprendizagem. Essa abordagem considera que as emoções dos estudantes, como ansiedade ou medo, bem como a motivação e a autoestima, podem afetar sua capacidade de aprender e realizar avaliações (MARZAGÃO et al., 2021). Ao incorporar a afetividade na avaliação matemática, busca-se criar um ambiente de aprendizagem positivo e inclusivo, que incentive os estudantes a sentirem-se confiantes e seguros para se envolver e participar plenamente do processo de avaliação.

As práticas utilizadas na avaliação matemática com afetividade podem incluir um *feedback* construtivo e personalizado, que enfatize o progresso dos aprendentes e as áreas em que eles precisam melhorar (VAZ; NASSER, 2021), em vez de apenas pontuar o desempenho. Outrossim, devem ser usadas avaliações formativas regulares, que forneçam informações sobre o desempenho dos estudantes ao longo do tempo e possam ser usadas para adaptar o ensino às necessidades individuais deles. Desse modo, é possível promover a cooperação e a colaboração entre os estudantes, para que se apoiem mutuamente e construam uma comunidade de aprendizagem positiva.

Segundo Silva (2022), essa abordagem com mais afetividade é uma estratégia que busca incorporar elementos emocionais e empáticos ao processo de avaliação, considerando não apenas o desempenho e as metas alcançadas, mas também o bem-estar emocional dos envolvidos. Essas estratégias práticas podem trazer benefícios tanto para quem avalia como para quem é avaliado.

Ao iniciar a avaliação com uma comunicação clara e aberta, destacando a importância dos aspectos emocionais e afetivos no processo de avaliação, cria-se um ambiente de confiança, no qual os participantes ficam à vontade para compartilhar suas emoções e opiniões. Adicionalmente, é fundamental praticar a escuta ativa durante a avaliação, ou seja, ouvir com empatia e compreensão os sentimentos e preocupações dos envolvidos (SILVA, 2022). Essas práticas ajudam a identificar problemas emocionais ou situações de estresse que possam afetar o desempenho e criar um espaço para que as emoções sejam expressas e validadas.

Com os devidos cuidados éticos e responsabilidades, é importante ser flexível e adaptar a abordagem avaliativa segundo as necessidades individuais de cada um. Isso pode incluir a criação de planos de desenvolvimento personalizados, que forneçam suporte emocional adicional ou ajustem as metas de desempenho para acomodar situações específicas, como o deficit em alguma habilidade.

Paulo Freire, educador brasileiro, reconhece a importância da afetividade na educação e acredita que ela desempenha um papel fundamental no processo de aprendizagem. Freire (1996) defende que a relação entre educador e educando deve ser pautada pelo respeito, confiança, empatia e diálogo, criando um ambiente de afetividade que estimule o interesse, a motivação e a participação ativa dos estudantes.

Para Freire (1996), a afetividade não deve ser vista como algo separado do processo educacional, mas sim como uma dimensão intrínseca e indissociável. Ele defendeu que o desenvolvimento cognitivo e emocional dos estudantes está intimamente ligado, e que a afetividade é um elemento essencial para despertar o desejo de aprender, promover a autonomia e a construção de conhecimento significativo.

Além disso, Freire (1996) destaca a importância do diálogo na relação pedagógica, pois através do diálogo verdadeiro e respeitoso é possível estabelecer vínculos afetivos mais profundos e criar um ambiente de aprendizagem acolhedor e participativo. Ele propõe que o educador esteja atento às vivências e experiências dos estudantes, reconhecendo suas singularidades e estimulando a expressão de suas ideias e opiniões.

Notadamente, alguns estudantes relatam ansiedade nas avaliações. Nesse sentido, a avaliação matemática com afetividade pode fomentar um ambiente de aprendizagem inclusivo, com o professor oferecendo suporte aos estudantes, valorizando as emoções dos alunos e promovendo um processo de avaliação mais justo, equitativo e eficaz. A partir da proposta de atividades práticas, é possível obter gráficos ilustrativos com maior impacto emocional, como exemplificado na Figura 1.3. Os passos para traçar no *GeoGebra*[8] estão no Apêndice (C) e podem ser obtidos pelas equações:

$$f(x) = \sqrt{1 - (|x| - 1)^2} \tag{1.1}$$

$$g(x) = -3\sqrt{1 - \frac{|x|}{2}} \tag{1.2}$$

[8]GeoGebra é um software educacional gratuito que combina recursos de geometria, álgebra, cálculo, planilhas e gráficos em uma única plataforma com compartilhamento disponível na internet.

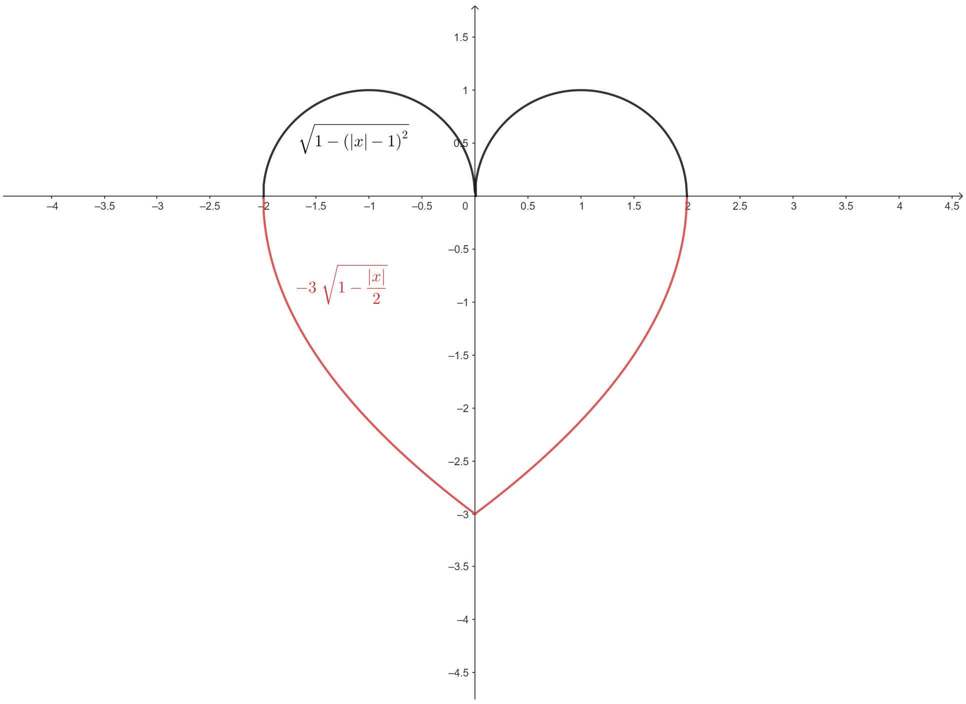


Figura 1.3: Coração

Fonte: Elaborado pelo Próprio Autor, 2023, Disponível em:
<https://www.geogebra.org/calculator/hanzmye3>.

1.4.1 Efeitos da ansiedade para avaliação

A ansiedade é geralmente vista como uma emoção negativa, associada a sintomas como preocupação, nervosismo e medo. No entanto, em certas circunstâncias, a ansiedade pode ter um efeito positivo e motivador, conhecido como ansiedade positiva ou eustress.

Embora seja uma resposta normal e saudável ao estresse, a ansiedade pode se tornar patológica e requerer intervenção profissional se for excessiva, podendo prejudicar a vida cotidiana e as atividades escolares.

> De fato, não existe uma determinante específica para os sintomas de estresse e sua ocorrência, dependerá da forma de interpretar e reagir da pessoa, que pode envolver componentes comportamentais, afetivos, cognitivos e fisiológicos, e da capacidade do seu organismo de atender às exigências do momento. Também é preciso acrescentar que o estresse não se processa apenas de maneira nociva ao organismo. Quando aumenta a eficiência do desempenho e apresenta grau adequado, é denominado eustress, vocábulo retirado do grego, no qual "eu" significa bom, uma resposta produtiva do organismo a um estímulo (VALLE, 2011, p. 49).

A ansiedade positiva pode ser definida como uma resposta emocional saudável e adaptativa a um estressor, que ajuda a motivar e aprimorar o desempenho. Por exemplo, antes de um teste importante, sentir um pouco de ansiedade pode ser benéfico para ajudar a aumentar a atenção e o foco, bem como para motivar o estudante a se preparar e estudar adequadamente.

Por outro lado, a ansiedade pode ter vários efeitos negativos na avaliação matemática. As possíveis consequências incluem: dificuldade de concentração, o que pode desviar a atenção do estudante da avaliação matemática, fazendo com que se preocupe excessivamente com a possibilidade de fracasso (em vez de focar na tarefa em si); e queda de desempenho, pois a ansiedade tende a prejudicar a memória e o raciocínio lógico.

A ansiedade pode, ainda, provocar um bloqueio (VALLE, 2011), impedindo que os estudantes processem informações matemáticas de maneira eficiente. Além disso, a ansiedade é capaz de minar a confiança dos estudantes em suas habilidades matemáticas, levando a uma espiral descendente em relação ao desempenho e à autoestima. Essa vivência pode incluir alguns sintomas físicos, como batimento cardíaco rápido e respiração acelerada, o que prejudica ainda mais a capacidade de concentração dos alunos na avaliação matemática.

Para minimizar esses efeitos, é importante que os estudantes aprendam técnicas de gerenciamento de ansiedade, como a respiração profunda, a meditação e a visualização positiva, já que a repetição e o treino prévio podem ser fundamentais para a aprendizagem na Matemática. Os educadores também podem ajudar a aliviar a ansiedade dos alunos, fornecendo-lhes informações claras sobre a avaliação e oferecendo suporte emocional.

2 LÓGICA MATEMÁTICA

A Lógica Matemática é uma área de estudo que se dedica à análise formal do raciocínio. Neste capítulo, iremos explorar, com base principalmente nas contribuições de Alencar (2002), os símbolos e regras utilizados para representar e manipular conceitos abstratos, tais como proposições, variáveis, quantificadores e conectivos lógicos na área da Lógica Matemática. Ademais, abordaremos a relação entre a Lógica Matemática e Conjuntos, destacando como esses dois campos se entrelaçam e se complementam.

Conforme Mortari (2001), a Lógica é a ciência que investiga os princípios e métodos de inferência, com o objetivo principal de determinar em quais condições certas coisas são consequências lógicas de outras, ou não. Em outras palavras, a lógica busca estabelecer relações de consequência lógica entre diferentes afirmações.

No contexto da Lógica Matemática, os PCN (BRASIL, 1997) destacam a importância de desenvolver habilidades de raciocínio lógico e capacidade de argumentação dos estudantes. Eles reconhecem a lógica como uma ferramenta fundamental para a construção de conhecimentos matemáticos sólidos e para o desenvolvimento do pensamento crítico. Introduzindo que:

> A Matemática desenvolveu-se seguindo caminhos diferentes nas diversas culturas. O modelo de Matemática hoje aceito, originou-se com a civilização grega, no período que vai aproximadamente de 700 a.C. a 300 d.C., abrigando sistemas formais, logicamente estruturados a partir de um conjunto de premissas e empregando regras de raciocínio preestabelecidas. A maturidade desses sistemas formais foi atingida no século XIX, com o surgimento da Teoria dos Conjuntos e o desenvolvimento da Lógica Matemática (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, 1998, p. 25).

Essa área de estudo pode ser dividida em dois ramos principais: a lógica proposicional e a lógica de predicados. Na lógica proposicional, estudam-se proposições simples e conectivos lógicos, como “e”, “ou”, “não” e “se...então”. Já na lógica de predicados, estudam-se predicados e quantificadores, como “para todo” e “existe”. Dessa forma, sobre o trabalho com a lógica matemática em sala de aula, de acordo com Menezes (2021), "O ensino da lógica faz com que o pensamento matemático se desenvolva de maneira correta a fim de chegar a conhecimentos válidos. O aprendizado da lógica auxilia os estudantes no raciocínio, na compreensão de conceitos básicos".

Na lógica proposicional, que lida com a análise de proposições e seus conectivos lógicos, podemos utilizar o exemplo das proposições p e q para ilustrar esse conceito. Suponhamos que p represente "hoje está ensolarado." e q represente "amanhã choverá". É possível combinar essas proposições usando o conectivo "e", denotado por $\wedge$, resultando em uma nova proposição composta $p \wedge q$, que significa "hoje está ensolarado e amanhã choverá".

A lógica de primeira ordem é uma área fundamental da lógica matemática, que possibilita a quantificação de variáveis e a análise das relações entre objetos matemáticos. Por exemplo, consideremos a afirmação "Para todo número real x, existe um número real y tal que $y = x^2$". Essa sentença pode ser formalizada na lógica de primeira ordem por meio do uso de quantificadores universais e existenciais.

Com diversas aplicações em diferentes campos, a lógica desempenha um papel fundamental na construção de provas matemáticas rigorosas e no desenvolvimento de novas teorias. Na ciência da computação, a lógica é empregada na construção e análise de algoritmos, além de ser utilizada para a verificação formal de sistemas de *software*. Na filosofia, a lógica se apresenta como uma ferramenta importante na análise e construção de argumentos. No campo do direito, a lógica é aplicada na análise e construção de argumentos jurídicos. Na linguística, a lógica é empregada na análise de linguagens formais e na construção de teorias sobre a estrutura da linguagem natural.

A Lógica Matemática também é uma ferramenta que pode ser usada para entender e modelar os processos mentais e comportamentais humanos, bem como para desenvolver modelos teóricos e técnicas de análise de dados. Na teoria da decisão (CUSINATO; JÚNIOR, 2005), por exemplo, podemos usar a lógica matemática para analisar as escolhas que as pessoas fazem e para desenvolver modelos de tomada de decisão. Isso pode ser útil para entender como as pessoas avaliam riscos, fazem escolhas e tomam decisões em diferentes contextos.

De acordo com Alencar (2002), as proposições são conjuntos de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo. Essas proposições têm a capacidade de transmitir pensamentos ao afirmar fatos ou expressar juízos que formulamos sobre entidades específicas.

A Lógica Matemática baseia-se em dois princípios fundamentais do pensamento. O primeiro é o Princípio da Não Contradição, que estabelece que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa. Por exemplo, a proposição "O céu é azul" não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

O segundo princípio é o Princípio do Terceiro Excluído, que afirma que toda proposição é necessariamente verdadeira ou falsa, sem possibilidade de um terceiro caso. Por exemplo, a proposição “Hoje é sexta-feira” é verdadeira ou falsa, não há uma terceira opção.

Definição 2.0.1. *Chama-se de valor lógico de uma proposição a verdade se a proposição é verdadeira e a falsidade se a proposição é falsa. Os valores lógicos verdade e falsidade de uma proposição são abreviados pelas letras V e F, respectivamente. Assim, os princípios da não contradição e do terceiro excluído afirmam que: toda proposição tem* ***exatamente*** *um dos valores V ou F.*

Exemplo 2.0.1. *De acordo com a Definição 2.0.1, a proposição “O Palmeiras tem Mundial” tem o valor lógico* ***Falsidade*** *(F).*

As proposições podem ser classificadas em simples ou atômicas e compostas ou moleculares.

Definição 2.0.2. *Chama-se proposição simples ou proposição atômica aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. As proposições simples são geralmente designadas pelas letras latinas minúsculas p, q, r, s, chamadas letras proposicionais. Por exemplo, as seguintes são proposições simples:*

- s: O Sol é uma estrela.
- a: Todos os triângulos têm três lados.
- b: A água ferve a 100°C.
- c: O número 23 é primo.
- d: O quadrado de um número positivo é sempre positivo.

Definição 2.0.3. *Chama-se proposição composta ou proposição molecular aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições.*

- $p \wedge q$: Carlos é alto e Pedro é magro.
- $r \vee s$: O número é par ou é múltiplo de 3.
- $\neg a$: Não é verdade que todos os triângulos são equiláteros.

- $(b \wedge \neg c) \Rightarrow d$: Se a água ferve a 100°C e o número não é primo, então o quadrado de um número positivo é sempre positivo.

Nesses exemplos, as proposições compostas são formadas pela combinação de proposições simples utilizando conectivos lógicos. O conectivo $\wedge$ representa a conjunção (e), $\vee$ representa a disjunção (ou) e $\neg$ representa a negação (não). Além disso, é possível utilizar parênteses para estabelecer a ordem das operações e a precedência dos conectivos.

Para o conceito de um argumento, segundo Alencar (2002) é uma sequência de proposições chamadas de premissas, seguidas por uma proposição chamada de conclusão. O argumento busca estabelecer a validade da conclusão com base na verdade das premissas e nas regras lógicas utilizadas na inferência.

Um aspecto fundamental no estudo da lógica matemática é a noção de validade de um argumento. Um argumento é considerado válido quando a conclusão é verdadeira, independentemente da veracidade das premissas. Essa definição é expressa na seguinte forma:

Definição 2.0.4. *Um argumento é válido se e somente se a conclusão é verdadeira sempre que todas as premissas são verdadeiras.*

Exemplo 2.0.2.

Premissa 1: Todos os estados do Nordeste brasileiro são conhecidos por suas belas praias.

Premissa 2: Bahia é um estado do Nordeste brasileiro.

Conclusão: Portanto, a Bahia é conhecida por suas belas praias.

No exemplo 2.0.2, se considerarmos as premissas verdadeiras, a conclusão também deve ser verdadeira. A premissa 1 afirma que todos os estados do Nordeste brasileiro são conhecidos por suas belas praias, e a premissa 2 estabelece que a Bahia é um estado do Nordeste brasileiro. Portanto, seguindo a lógica das premissas, podemos concluir que a Bahia também é conhecida por suas belas praias. Esse exemplo ilustra um argumento válido, pois a conclusão é verdadeira quando todas as premissas são verdadeiras.

Uma expressão booleana consiste em uma construção lógica que combina variáveis booleanas, que possuem apenas dois valores possíveis (verdadeiro ou falso), juntamente com operadores lógicos para formar uma afirmação com um valor de verdade. Os operadores lógicos mais comuns são a negação ($\neg$), a conjunção ($\wedge$), a disjunção ($\vee$) e a implicação ($\Rightarrow$).

Essas expressões podem ser simples, envolvendo apenas uma única variável booleana, como por exemplo “p”, ou podem se tornar mais complexas ao combinar múltiplas variáveis com os operadores lógicos, como em “p $\wedge$ q”, onde “p” e “q” são variáveis booleanas. A avaliação das expressões booleanas segue as regras da lógica proposicional, resultando em um valor de verdade, que pode ser verdadeiro (V) ou falso (F).

As expressões booleanas desempenham um papel fundamental em diversos campos, como lógica matemática, ciência da computação, circuitos digitais e algoritmos. Elas são essenciais para o desenvolvimento do raciocínio lógico e para a tomada de decisões em sistemas lógicos.

Uma tautologia é uma proposição ou sentença composta que é verdadeira em todas as circunstâncias (FILHO, 2002), independentemente dos valores de verdade atribuídos às suas partes constituintes. Em outras palavras, é uma afirmação que é sempre verdadeira, não importando as condições ou circunstâncias em que é avaliada. Na lógica formal e na matemática, a tautologia é uma expressão que pode ser deduzida de um conjunto de axiomas ou premissas usando apenas regras de inferência válidas. É uma forma de raciocínio válido em que a conclusão é uma verdade lógica garantida, dado que as premissas são verdadeiras podendo ser usada pelos alunos para argumentação de questões subjetivas para além da matemática.

Na Estatística, a Lógica Matemática é fundamental para análises rigorosas dos dados, estabelecendo relações de causa e efeito, identificando padrões, formulando modelos estatísticos e aplicando técnicas de inferência, estimativa e teste de hipóteses. Além disso, ela contribui para a interpretação correta dos resultados, garantindo a coerência e validade das conclusões e inferências baseadas nos dados.

2.1 Simbologia

Em uma proposta de decodificação e tradução da linguagem matemática, sempre que possível é interessante esclarecer e ofertar os significados dos símbolos. Nesse bojo, apresentamos aqui alguns dos símbolos mais comuns usados na matemática e seus respectivos significados:

$+$ é o símbolo de adição, usado para somar dois ou mais números.

$-$ é o símbolo de subtração, usado para subtrair um número de outro.

x é o símbolo de multiplicação, usado para multiplicar dois ou mais números.

$\div$ é o símbolo de divisão, usado para dividir um número por outro.

= é o símbolo de igualdade, usado para indicar que duas coisas são iguais.

< é o símbolo de menor que, usado para indicar que um número é menor que outro.

> é o símbolo de maior que, usado para indicar que um número é maior que outro.

$\leqslant$ é o símbolo de menor que ou igual a, usado para indicar que um número é menor ou igual a outro.

$\geq$ é o símbolo de maior que ou igual a, usado para indicar que um número é maior ou igual a outro.

$\surd$ é o símbolo de raiz quadrada, usado para encontrar a raiz quadrada de um número.

π é o símbolo da constante matemática pi, usado para representar a relação entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro.

% é o símbolo de porcentagem, usado para indicar uma fração de 100.

! é o símbolo de fatorial, usado para multiplicar um número por todos os seus inteiros positivos menores que ou iguais a ele.

$\wedge$ é o símbolo de exponenciação, usado para elevar um número a uma potência.

∞ é o símbolo de infinito, usado para representar algo sem fim ou sem limite.

Existem vários símbolos utilizados na lógica matemática, mas alguns são trabalhados mais comumente, tais como:

- Negação: $\neg$ *ou* $\sim$ (lido como "não")
- Negação disjunta: $\uparrow$ (lido como "não ou não") [9]
- Conjunção: $\wedge$ *ou* . (lido como "e")
- Disjunção: $\vee$ (lido como "ou")
- Disjunção exclusiva: $\veebar$ (lido como "ou" "ou")
- Condicional (Implicação): $\rightarrow$ (lido como "implica")
- Bicondicional (Equivalência): $\leftrightarrow$ (lido como "se e somente se")

Além desses símbolos, existem também alguns quantificadores que são universais como $\forall$ e existenciais $\exists$, que são usados para expressar proposições que se aplicam a todos os elementos de um conjunto (universal) ou a pelo menos um elemento desse conjunto (existencial), como pode-se observar no exemplo 2.1 a seguir:

[9]Segundo Alencar 2002, os símbolos $\uparrow$ e $\downarrow$ são chamados de conectivos de SCHEFFER

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = x^2 \tag{2.1}$$

Decodificando o exemplo 2.1 temos que:

“Para qualquer (ou para todo) número real x, existe um número real y tal que y é igual a x ao quadrado.”

Semelhante ao cálculo aritmético com números, as operações lógicas sobre proposições seguem as regras do cálculo proposicional.

Nesse sentido, a negação de uma proposição p é representada por "não p", e seu valor lógico é verdadeiro (V) quando p é falso e falso (F) quando p é verdadeiro. Portanto, “ não p” tem o valor lógico oposto ao de p. Simbolicamente, a negação de p é representada como $\neg p$.

A tabela verdade[1]0 (2.1) exibe o valor lógico da negação de uma proposição, definido da seguinte forma:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabela 2.1: Tabela verdade: (p, $\neg p$)

Em outras palavras, temos as seguintes igualdades: $\neg$V = F e $\neg$F = V.

Teorema 2.1.1. *Seja p uma proposição. Então, a negação da negação de p é equivalente a p.*

Demonstração. Suponhamos que p seja verdadeira. Vamos mostrar que a negação da negação de p também é verdadeira.

A negação de p é falsa, pois estamos assumindo que p é verdadeira. Portanto, a negação da negação de p é verdadeira.

Agora, suponhamos que p seja falsa. Vamos mostrar que a negação da negação de p também é falsa.

A negação de p é verdadeira, pois estamos assumindo que p é falsa. Portanto, a negação da negação de p é falsa.

Em ambos os casos, chegamos à conclusão de que a negação da negação de p é equivalente a p. □

[10]Tabela verdade é uma representação tabular que mostra todas as possíveis combinações de valor lógico da proposição.

Retomando a definição de tautologia em Lógica Matemática vejamos o seguinte exemplo:

$$(p \vee \neg p), \tag{2.2}$$

onde p é uma variável proposicional e $\vee$ representa a disjunção (ou).

Para demonstrar que essa fórmula é uma tautologia, podemos construir a tabela verdade (2.2) para todas as combinações possíveis dos valores de verdade de p:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Tabela 2.2: Tabela verdade: $(p \vee \neg p)$

Observamos que, em todas as linhas da tabela verdade, a coluna correspondente a $p \vee \neg p$ é sempre verdadeira (V). Portanto, podemos concluir que a fórmula $(p \vee \neg p)$ é uma tautologia.

Teorema 2.1.2. *Sejam p e q duas proposições. A conjunção de p com a negação de q é equivalente à negação da disjunção de $\neg p$ com q.*

Demonstração. Vamos verificar a equivalência das duas expressões $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$ utilizando a tabela verdade (2.3).

p	$\neg p$	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$(p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$
V	F	V	F	F	V	F	**V**
V	F	F	V	V	F	V	**V**
F	V	V	F	F	V	F	**V**
F	V	F	V	F	V	F	**V**

Tabela 2.3: Tabela verdade: $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$

Podemos notar que conforme o Teorema 2.1.2, as duas colunas $p \wedge \neg q$ e $\neg(\neg p \vee q)$ são correspondentes, ou seja, às expressões têm os mesmos valores de verdade para todas as combinações possíveis de valores de verdade de p e q. Portanto, podemos concluir que a conjunção de p com a negação de q é equivalente à negação da disjunção de $\neg p$ com q, o que caracteriza uma tautologia. □

2.2 Conjuntos e Lógica Matemática

Os conjuntos desempenham um papel fundamental na matemática e são amplamente utilizados em diversas áreas do conhecimento. Um conjunto pode ser definido como uma coleção de objetos distintos, chamados de elementos.

Na teoria dos conjuntos, desenvolvida por Cantor (2007), um conjunto é representado por meio de uma lista de seus elementos entre chaves. Por exemplo, o conjunto $A = \{1,2,3\}$ é composto pelos números inteiros positivos de 1 a 3.

Os conjuntos desempenham um papel crucial na matemática e possuem uma forte relação com a lógica matemática. Segundo Gerônimo (2008), um conjunto é uma coleção de objetos distintos, chamados de elementos, que são considerados em conjunto como uma única entidade.

Um dos aspectos mais importantes dessa relação é a aplicação da lógica matemática para analisar as propriedades dos conjuntos e descrever suas operações. Por exemplo, a lógica matemática permite definir operações como união, interseção e complemento de conjuntos e estabelecer propriedades relacionadas a essas operações.

Além disso, a lógica matemática é utilizada para expressar propriedades dos conjuntos através de proposições lógicas. Por exemplo, podemos utilizar a lógica matemática para afirmar que "para todo elemento x pertencente ao conjunto A, x também pertence ao conjunto B".

Essa relação entre conjuntos e lógica matemática é fundamental para a construção de teorias matemáticas rigorosas e é amplamente aplicada em diversos campos da matemática, como álgebra, análise e teoria dos números. Nesse contexto, vejamos alguns exemplos que ilustram essa interação:

Exemplo 2.2.1. *Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,3,4\}$. Para determinar os elementos do conjunto interseção $A \cap B$, devemos encontrar os elementos que pertencem à interseção entre A e B, ou seja, os elementos que são comuns a ambos os conjuntos. Neste caso, $A \cap B = \{2,3\}$.*

Exemplo 2.2.2. *A negação da proposição: "Para todo x no conjunto A, x não pertence ao conjunto B", pode ser expressa como: "Existe um x no conjunto A tal que x pertence ao conjunto B".*

A simbologia correspondente é:

$$\forall x \in A, \neg(x \in B)$$

E sua negação:

$$\exists x \in A : x \in B$$

Exemplo 2.2.3. *Sejam os conjuntos* $A = \{1,2,3\}$ *e* $B = \{2,3,4\}$. *Note que a proposição "Para todo x, se x pertence a A ou B, então x pertence a* $A \cup B$*" é verdadeira. Para qualquer elemento x que pertence a A ou B, esse elemento também pertencerá à união dos conjuntos A e B, ou seja,* $A \cup B$. *Podemos expressar essa relação simbolicamente da seguinte forma:*

$$\forall x, (x \in A \vee x \in B) \rightarrow x \in (A \cup B)$$

O Diagrama de Venn é uma ferramenta utilizada na Teoria dos Conjuntos e na Lógica Matemática, tendo sido desenvolvida por John Venn no século XIX. Ele oferece uma representação gráfica para analisar as relações entre conjuntos. O modelo propõe que qualquer conjunto ou coleção de conjuntos pode ser representado por diagramas de Venn, nos quais os conjuntos são representados por regiões fechadas delimitadas por linhas. Esses diagramas permitem visualizar de forma clara e intuitiva as interseções, uniões e complementos entre os conjuntos. Como exemplo, considere três conjuntos: A, B e C. Podemos representá-los usando um diagrama de Venn, conforme ilustrado na Figura 2.1.

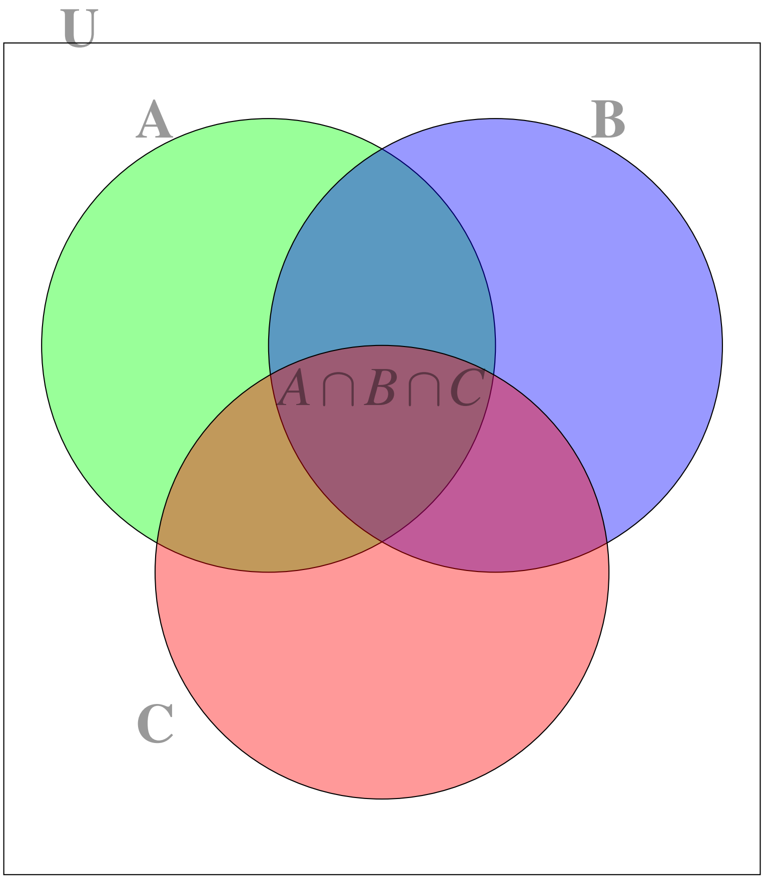


Figura 2.1: Diagrama de Venn representando três conjuntos: A, B e C.

Fonte: Elaborado pelo Próprio Autor, 2023.

No diagrama, as regiões A, B e C representam os conjuntos, e as regiões sobrepostas ilustram suas interseções e diferenças. A área fora dos três conjuntos representa o complemento deles, simbolizado por $(A \cup B \cup C)^c$. Os diagramas de Venn oferecem uma forma concisa e visual de compreender as relações entre conjuntos, tornando-os valiosos em diversas aplicações matemáticas, estatísticas, de ciência da computação e lógicas, entre outras aplicações.

2.2.1 Relações e Operações com Conjuntos

Relação de Pertinência

A relação de pertinência é representada pelo símbolo $\in$ e indica que um elemento faz parte de um conjunto. Por exemplo:

$$x \in A$$

Isso significa que o elemento x pertence ao conjunto A.

Relação de Inclusão

A relação de inclusão é representada pelo símbolo $\subseteq$ e indica que um conjunto está contido em outro conjunto. Por exemplo:

$$A \subseteq B$$

Isso significa que todos os elementos de A também estão presentes em B.

Operações com Conjuntos

Existem várias operações que podem ser realizadas com conjuntos. As principais operações são:

- União: A união de dois conjuntos A e B é representada pelo símbolo $\cup$ e consiste em todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos. Por exemplo:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

- Interseção: A interseção de dois conjuntos A e B é representada pelo símbolo $\cap$ e consiste em todos os elementos que pertencem a ambos os conjuntos. Por exemplo:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

- Diferença: A diferença entre dois conjuntos A e B é representada pelo símbolo $\setminus$ e consiste em todos os elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Por exemplo:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

- Complementar: O complementar de um conjunto A em relação a um conjunto universo U é representado pelo símbolo A^c ou $\overline{A}$ e consiste em todos os elementos que pertencem a U e não pertencem a A. Por exemplo:

$$A^c = \{x : x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

Propriedades de Conjuntos

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Vamos provar as seguintes propriedades:

Comutatividade da União

$$A \cup B = B \cup A$$

Para provar a comutatividade da união, vamos mostrar que um conjunto está contido no outro. Suponhamos que $x \in A \cup B$. Isso significa que x pertence a pelo menos um dos conjuntos A ou B. Portanto, $x \in B \cup A$. Agora, suponhamos que $y \in B \cup A$. Isso implica que y pertence a pelo menos um dos conjuntos B ou A. Logo, $y \in A \cup B$. Portanto, concluímos que $A \cup B = B \cup A$.

Comutatividade da Interseção

$$A \cap B = B \cap A$$

Da mesma forma, para provar a comutatividade da interseção, vamos mostrar que um conjunto está contido no outro. Suponha $x \in A \cap B$. Isso significa que x pertence tanto a A quanto a B. Portanto, $x \in B \cap A$. Agora, suponha $y \in B \cap A$. Isso implica que y pertence tanto a B quanto a A. Logo, $y \in A \cap B$. Portanto, concluímos que $A \cap B = B \cap A$.

Distributividade da União em relação à Interseção

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Para provar a distributividade da união em relação à interseção, vamos mostrar que um conjunto está contido no outro. Suponhamos que $x \in A \cup (B \cap C)$. Isso significa que x pertence a A ou pertence tanto a B quanto a C. Portanto, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, ou seja, $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Agora, suponha $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Isso implica que y pertence tanto a $A \cup B$ quanto a $A \cup C$. Logo, y pertence a A ou pertence tanto a B quanto a C, o que implica que $y \in A \cup (B \cap C)$, ou seja, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. Portanto, concluímos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Distributividade da Interseção em relação à União

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Da mesma forma, para provar a distributividade da interseção em relação à união, vamos mostrar que um conjunto está contido no outro. Suponhamos que $x \in A \cap (B \cup C)$. Isso significa que x pertence tanto a A quanto a $B \cup C$. Portanto, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, ou seja, $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Agora, suponhamos que $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Isso implica que y pertence a A e y pertence a B ou y pertence a A e y pertence a C, daí temos que, y pertence a A e y pertence a B ou y pertence a C. Logo, y pertence a A e y pertence a $B \cup C$, o que implica y pertence a A e $y \in B \cup C$, logo, temos que $y \in A \cap (B \cup C)$, ou seja, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Portanto, concluímos que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Leis de Morgan

Se A e B são subconjuntos de um conjunto S, então valem as seguintes leis:

A Primeira lei de De Morgan: A negação da união de dois conjuntos é igual à interseção das negações de cada conjunto. Em símbolos, para os conjuntos A e B, temos:

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

A Segunda lei de De Morgan: A negação da interseção de dois conjuntos é igual à união das negações de cada conjunto. Em símbolos, para os conjuntos A e B, temos:

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$

Para provar essas leis, podemos mostrar que um conjunto está contido no outro. A demonstração é análoga às propriedades anteriores. Essas leis fornecem uma forma conveniente de expressar a negação de uma operação de conjunto em termos de outras operações. Elas são úteis para simplificar expressões lógicas e estabelecer equivalências entre diferentes formas de representar conjuntos.

3 JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Os jogos têm sido usados como ferramentas de ensino na matemática há séculos. Acredita-se que o uso de jogos no ensino da matemática remonta à Grécia Antiga, como o jogo de tabuleiro chamado de “Jogo Real de Ur” (SANTOS, 2012) que é datado de cerca de 2600 a.C. Na época, os jogos como esse eram usados para ensinar habilidades matemáticas básicas, como contar e calcular.

Figura 3.1: Jogo Real de Ur.
Fonte: (LORENZONI; AL., 2022)

No entanto, o uso sistemático e mais formal dos jogos como estratégia de ensino na matemática começou a ganhar destaque no século XX. O matemático húngaro Zoltan Dienes, por exemplo, desenvolveu materiais educativos baseados em jogos para auxiliar no ensino de conceitos matemáticos abstratos (DALCIN; SILVA, 2019). A partir daí, o uso de jogos como uma abordagem pedagógica no ensino da matemática foi ampliado e aprofundado.

Atualmente, com o avanço da tecnologia e o surgimento de jogos digitais, aplicativos e plataformas online, os jogos na matemática têm se tornado cada vez mais sofisticados e acessíveis.

Um exemplo notável é o xadrez, que ganhou versões online e se tornou uma ferramenta valiosa para o ensino de estratégias matemáticas, além de promover o desenvolvimento do pensamento lógico e da tomada de decisões.

Outro exemplo é o Sudoku[11], um quebra-cabeça numérico que se popularizou na era digital, oferecendo uma abordagem lúdica e interativa para o ensino de padrões, raciocínio dedutivo e resolução de problemas matemáticos. Esses jogos proporcionam aos estudantes uma experiência de aprendizado envolvente e estimulante, permitindo que eles explorem conceitos matemáticos de forma prática e divertida.

Os jogos podem ser uma ferramenta muito útil e eficaz no ensino da matemática, pois proporcionam uma maneira divertida e envolvente de aprender conceitos matemáticos e praticar habilidades. Além disso, os jogos podem ajudar a aumentar a motivação, a autoestima e a confiança dos alunos em relação à matemática, tornando-a mais acessível e menos intimidante.

> A utilização de jogos é uma promissora metodologia de ensino para a Matemática, pois procura resgatar do lúdico as noções, princípios e procedimentos matemáticos. O jogo, entendido como resolução de problemas, pode motivar e desafiar crianças, jovens e adultos e envolvê-los significativamente nas atividades, e, nesse sentido, os jogadores podem elaborar, investigar ou adquirir conteúdos matemáticos (BARBOSA, 2017, p. 7).

Bem como também, têm potencial para serem usados no ensino da matemática para aprendizagem de conceitos básicos de modo mais envolvente. Jogos simples de contar, adicionar, subtrair e multiplicar podem ajudar os estudantes a desenvolver um entendimento fundamental desses conceitos matemáticos. Além disso, jogos que envolvem a aplicação de habilidades matemáticas mais avançadas, como frações, geometria e álgebra, oferecem uma oportunidade para os alunos praticarem e aprimorarem suas habilidades. Portanto, ao utilizar jogos em sala de aula, os estudantes podem desfrutar de uma experiência divertida enquanto fortalecem seu conhecimento e confiança em matemática.

A proposta de utilizar jogos como ferramenta para resolver problemas matemáticos proporciona aos alunos o desenvolvimento da habilidade de pensamento crítico e a aplicação de conceitos matemáticos em situações do mundo real. Além disso, ao promover a colaboração em jogos em equipe, é possível aprimorar habilidades sociais e de trabalho em grupo, ao mesmo tempo em que a compreensão dos alunos sobre os conceitos é aprofundada. Jogos que envolvem a criação de padrões, quebra-cabeças e construções podem criar um ambiente estimulante para a

[11] Sudoku é um quebra-cabeça lógico e numérico que é composto por uma grade 9x9, dividida em nove blocos 3x3. O objetivo do jogo é preencher cada célula vazia da grade com um número de 1 a 9, de forma que cada linha, coluna e bloco 3x3 contenha os números, sem repetições.

criatividade e favorecer a compreensão dos alunos.

3.1 Gamificação

A gamificação do ensino é uma abordagem que usa elementos de jogos em ambientes de aprendizagem para engajar e motivar os estudantes. Isso envolve o uso de técnicas de design de jogos, como pontuação, recompensas, desafios e competições para criar uma experiência de aprendizagem mais atraente e interativa.

> *Gamification (gamificação)* tem como base a ação de se pensar como em um jogo, utilizando as sistemáticas e mecânicas do ato de jogar em um contexto fora de jogo. Vianna et al. (2013) consideram que gamificação abrange a utilização de mecanismos de jogos para a resolução de problemas e para a motivação e o engajamento de um determinado público. Para os autores isso não significa, necessariamente, a participação em um jogo, mas a utilização dos elementos mais eficientes como mecânicas, dinâmicas e estética para reproduzir os mesmos benefícios alcançados com o ato de jogar. Segundo Zichermann e Cunningham (2011), a gamificação explora os níveis de engajamento do indivíduo para a resolução de problemas. Do ponto de vista emocional, Hamari, Koivisto, Sarsa (2014) compreendem que gamificação é um processo de melhoria de serviços, objetos ou ambientes com base em experiências de elementos de jogos e comportamento dos indivíduos (SILVA et al., 2014, p. 13,*grifo nosso*).

Essa metodologia ativa de ensino pode ser aplicada em diversos contextos, desde a educação básica até a formação profissional. Ela pode ser usada para ensinar uma variedade de assuntos, como história, matemática, ciências, línguas e habilidades sociais. Além disso, a gamificação pode ser implementada tanto em sala de aula como em plataformas de ensino à distância (*online*).

Os benefícios da gamificação do ensino incluem um aumento no envolvimento e motivação dos estudantes, melhorias no desempenho acadêmico e uma maior retenção de conhecimento (SILVA et al., 2014). A gamificação também pode ajudar a desenvolver habilidades importantes, como pensamento crítico, resolução de questões problemas e colaboração em equipe, principalmente pela dificuldade de alguns alunos de se motivarem para estudar matemática.

No entanto, é importante lembrar que a gamificação do ensino não é uma solução mágica para todos os desafios educacionais. Ela deve ser usada como parte de uma abordagem mais ampla de ensino e aprendizagem, com objetivos claros e cuidadosa seleção de técnicas de gamificação para se adequar às necessidades dos estudantes e do currículo promovendo uma matemática mais atrativa e significativa.

3.2 Proposta de Jogo

O jogo de quebra-cabeças lógicos (ROSEN, 2009) pode ser aplicado em uma variedade de séries, dependendo do nível de complexidade dos quebra-cabeças e da capacidade dos alunos de entender e trabalhar com símbolos lógicos.

No Ensino Fundamental I, o jogo pode ser adaptado para crianças mais jovens, apresentando quebra-cabeças lógicos mais simples e símbolos lógicos básicos. Isso permite que os alunos comecem a se familiarizar com a lógica e desenvolvam habilidades de raciocínio.

No Ensino Fundamental II, os quebra-cabeças podem ser um pouco mais desafiadores, envolvendo sequências lógicas mais complexas e símbolos lógicos adicionais. Nessa série, os alunos têm a oportunidade de aprimorar suas habilidades de pensamento lógico e resolução de problemas.

No Ensino Médio, o jogo pode ser usado como uma ferramenta de revisão ou aprofundamento dos conceitos de lógica matemática. Os quebra-cabeças podem ser mais avançados e exigir um raciocínio lógico mais sofisticado por parte dos alunos.

No Ensino Superior, o jogo pode ser aplicado como uma atividade complementar em disciplinas de matemática, lógica ou ciência da computação. Nesse contexto, os quebra-cabeças podem ser desafiadores e envolver conceitos avançados, como lógica proposicional, álgebra booleana ou lógica de predicados.

Apresentamos a seguir uma proposta de aplicação dos Quebra-Cabeças Lógicos.

Título: Quebra-Cabeças Lógicos

Objetivo:

O objetivo do jogo é resolver quebra-cabeças lógicos, combinando símbolos matemáticos para formar sequências lógicas corretas.

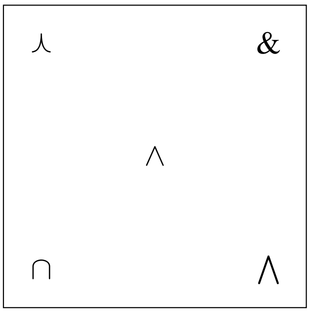
Materiais necessários:

- Cartas com símbolos lógicos (por exemplo: $\wedge$, $\vee$, $\veebar$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\oplus$);

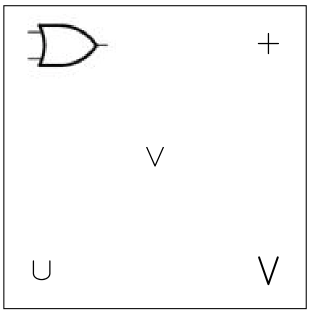
Cartas com símbolos lógicos

- $\wedge$ (conjunção)
- $\vee$ (disjunção)
- $\veebar$ (disjunção exclusiva)
- $\rightarrow$ (implicação)
- $\leftrightarrow$ (equivalência)
- $\neg$ (negação)
- $\oplus$ (ou exclusivo)

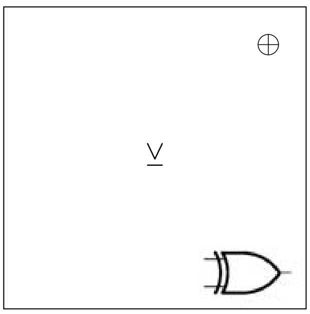
$\wedge$ (conjunção)



$\vee$ (disjunção)



$\veebar$ (disjunção exclusiva)



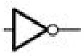
$\rightarrow$ (implicação)

➔		♠
	$\rightarrow$	
$\Longrightarrow$		$\longmapsto$

$\leftrightarrow$ (equivalência)

$\longleftrightarrow$		$\heartsuit$
	$\leftrightarrow$	
$\Longleftrightarrow$		$\rightleftarrows$

$\neg$ (negação)

$\sim$		♣
	$\neg$	
		~

$\oplus$ (ou exclusivo)

$\veebar$		$\lozenge$
	$\oplus$	

- Cartões com quebra-cabeças lógicos;

Exemplos:

Cartão 1

$\mathbf{A} \lor \mathbf{B}$

Cartão 2

$\mathbf{C} \to \mathbf{D}$

Cartão 3

$\neg\, \mathbf{E} \land \mathbf{F}$

- Folhas de papel e lápis para anotações.

Instruções:

1. Distribuir os cartões com quebra-cabeças lógicos para os alunos;
2. Cada cartão terá uma sequência parcial de símbolos lógicos e um espaço em branco;
3. Os alunos devem preencher o espaço em branco com o símbolo lógico correto que completa a sequência de forma lógica;
4. Os alunos podem discutir entre si ou trabalhar individualmente para encontrar a solução;
5. Após um tempo determinado, os alunos devem apresentar suas respostas;
6. Verificar as respostas corretas em conjunto com a turma, explicando a lógica por trás de cada símbolo utilizado;
7. Os alunos devem receber pontuação no jogo para cada resposta correta;
8. O jogo pode ser repetido com diferentes cartões e níveis de dificuldade para aprofundar o conhecimento dos símbolos lógicos.

Exemplo 1:

Suponhamos que estamos resolvendo um quebra-cabeça para descobrir em qual cidade da Bahia cada pessoa vive. Existem duas pessoas: Ana (A) e Bruno (B). As cidades possíveis são Cruz das Almas (C) e Feira de Santana (F). Sabendo que eles vivem em cidades diferentes e com base nas pistas simbólicas fornecidas, precisamos determinar onde cada pessoa vive.

Pistas:

Cartão 1

A = C ? A = F.

Cartão 2

B = C.

Uma solução possível:

Decodificando os símbolos matemáticos e usando a tabela verdade e os símbolos de lógica matemática, podemos criar uma tabela para representar todas as possibilidades:

Ana	Bruno

Agora, preenchendo a tabela de acordo com as pistas:

1. A = C ($\veebar$) A = F.

2. ($\neg$) B = C.

Ana	Bruno
F	$\cancel{C}$
C	F

Assim, a solução do quebra-cabeça é:

- Ana vive em Cruz das Almas (A = C).

- Bruno vive em Feira de Santana (B = F).

Os jogos no ensino da matemática proporcionam uma abordagem lúdica e envolvente para o aprendizado, impulsionando o desenvolvimento do pensamento crítico, raciocínio lógico e habilidades sociais. A gamificação do ensino potencializa esses benefícios ao incorporar elementos de jogos em ambientes de aprendizagem, tornando a matemática mais acessível e interessante para os alunos. Além disso, os jogos auxiliam na preparação dos estudantes para os desafios do mundo atual, promovendo uma base de conhecimentos matemáticos.

4 APLICAÇÃO NA PRÁTICA DOCENTE

Com o objetivo de esclarecer dúvidas relacionadas às questões abordadas pelos alunos em sala de aula, foi realizado um compartilhamento de conteúdos de lógica matemática para os estudantes do 3º ano do ensino médio em um colégio da rede estadual do Estado da Bahia, situado na cidade de Feira de Santana, durante o ano de 2023. O autor deste texto, que também exerce a função de professor responsável, ministrou uma aula com a duração total de uma hora e quarenta minutos, conforme estabelecido no plano de aula apresentado no Apêndice D.

Durante a aula, o objetivo principal foi proporcionar aos alunos uma compreensão engajadora dos conceitos básicos da lógica matemática. Para alcançar esse objetivo, foram utilizados recursos visuais, como cores, símbolos e desenhos, a fim de facilitar a compreensão dos conceitos apresentados. Além disso, foram estabelecidas conexões entre a lógica matemática e situações do cotidiano dos alunos, visando demonstrar a relevância desses conceitos em suas vidas diárias.

A aula foi planejada de forma a promover a interação e o trabalho em equipe, por meio de atividades lúdicas e práticas. Durante aproximadamente 40 minutos, os alunos participaram de uma atividade que envolvia a aplicação dos princípios lógicos. Por exemplo, foram propostos enigmas e quebra-cabeças com pistas e desafios, incentivando os estudantes a resolverem em grupos. Essa abordagem estimulou a criatividade, a colaboração e a troca de ideias entre os alunos.

Após a atividade lúdica, houve uma discussão em grupo, com duração de 20 minutos, para que os alunos pudessem compartilhar suas soluções e explicar o raciocínio por trás delas. Essa etapa foi fundamental para incentivar a expressão de opiniões, promover o debate e refletir sobre como a lógica matemática pode ser aplicada em diferentes contextos, influenciando as tomadas de decisões.

Em seguida, os alunos tiveram 25 minutos para realizar uma prática individual com exercícios de lógica matemática adaptados para atividades afetivas. Durante esse período, o professor circulou pela sala, oferecendo suporte e esclarecendo dúvidas, a fim de garantir que os alunos pudessem aplicar os conceitos aprendidos de forma independente.

Ao final da aula, foi feita uma breve conclusão, com duração de 10 minutos, reunindo toda a turma. Nesse momento, foram destacados os principais pontos aprendidos e reforçada a relevância dos conceitos abordados. O professor expressou seu agradecimento pela participação e empenho dos alunos ao longo da aula, encorajando-os a continuar explorando a lógica matemática e sua aplicação no dia a dia.

A atividade diagnóstica aplicada que teve como objetivo avaliar o nível de compreensão dos estudantes em relação aos conteúdos de Lógica Matemática, após uma socialização dos mesmos de forma transdisciplinar e interdisciplinar. A atividade consistiu em uma série de questões que abrangem os principais conceitos e habilidades desenvolvidos nesse estudo, como proposições, conectivos lógicos, tabelas-verdade e argumentação lógica.

4.1 Atividade diagnóstica

Na aula anterior, foi realizada a seguinte avaliação diagnóstica:

Título da atividade: Avaliação Diagnóstica de Lógica no Ensino Médio

Objetivo: Avaliar o nível de compreensão dos alunos em relação aos conceitos de lógica aplicados aos conteúdos do ensino médio de matemática.

Instruções:

Leia atentamente cada questão e selecione a resposta correta. Marque a opção escolhida em cada questão. Ao finalizar, revise suas respostas antes de entregar a atividade.

Questões:

1 - Qual das seguintes opções representa corretamente a negação da proposição "Todo número par é divisível por 2"?

a) Todo número par não é divisível por 2.

b) Algum número par é divisível por 2.

c) Nem todo número par é divisível por 2.

d) Alguns números pares são divisíveis por 2.

2 - Considere as seguintes proposições:

p: Se chove, então a rua está molhada.

q: A rua está molhada.

Qual a conclusão correta que pode ser obtida se ambas as proposições forem verdadeiras?

a) Chove.

b) Não chove.

c) Não podemos concluir se chove ou não.

d) A conclusão pode ser determinada apenas com essas informações.

3 - Em uma turma com 30 alunos, 15 estudam Matemática e 20 estudam Física. Quantos alunos estudam pelo menos uma das duas disciplinas?

a) 5 alunos.

b) 10 alunos.

c) 20 alunos.

d) 30 alunos.

4 - Qual das seguintes afirmações é equivalente à expressão lógica $\neg(p \wedge q)$?

a) ¬ p ∨ ¬ q

b) p ∨ q

c) p ∨ ¬ q

d) ¬ p ∧ ¬ q

5 - Uma condicional é uma proposição composta que assume a forma "Se p, então q". Se a hipótese é falsa, qual é o valor lógico da condicional?

a) Verdadeiro.

b) Falso.

c) Indeterminado.

d) A condicional não pode ser determinada apenas com essa informação.

Observações:

Essa atividade avaliativa diagnóstica tem como objetivo avaliar o nível de compreensão dos alunos em relação aos conceitos de lógica aplicados aos conteúdos do ensino médio de matemática.

4.1.1 Resultados obtidos

A seguir, na Tabela 4.1 estão apresentados os dados tabulados referentes a um total de cinco (5) questões. Esses dados indicam o número de acertos e erros para cada uma das questões. Essa tabela representa os resultados obtidos na Avaliação Diagnóstica de Lógica aplicada a uma turma do 3º ano do Ensino Médio.

Questão	**Acertos**	**Erros**
1	10	20
2	8	22
3	5	25
4	2	28
5	6	24
Total	**31**	**119**

Tabela 4.1: Avaliação Diagnóstica de Lógica

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor, dados coletados em 2023.

Com base nos dados apresentados na tabela da Avaliação Diagnóstica de Lógica, podemos utilizar algumas ferramentas estatísticas para melhorar a análise. Vamos calcular a porcentagem de acertos e erros em relação ao total de respostas para cada questão:

Questão	Porcentagem de Acertos	Porcentagem de Erros
1	33.33%	66.67%
2	26.67%	73.33%
3	16.67%	83.33%
4	6.67%	93.33%
5	20.00%	80.00%

Tabela 4.2: Porcentagem de Acertos e Erros por questão

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor, dados coletados em 2023.

Além disso, podemos calcular a porcentagem de acertos e erros em relação ao total de respostas da avaliação:

Resultado	Porcentagem
Acertos	20.67%
Erros	79.33%

Tabela 4.3: Porcentagem total de Acertos e Erros

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor, dados coletados em 2023.

Essa análise estatística permite uma visão mais detalhada dos resultados da Avaliação Diagnóstica de Lógica. Podemos observar a porcentagem de acertos e erros para cada questão individualmente, bem como a porcentagem total de acertos e erros em relação ao total de respostas da avaliação. Essas informações podem ser úteis para identificar os pontos fortes e fracos dos alunos e direcionar esforços de melhoria no processo de aprendizagem.

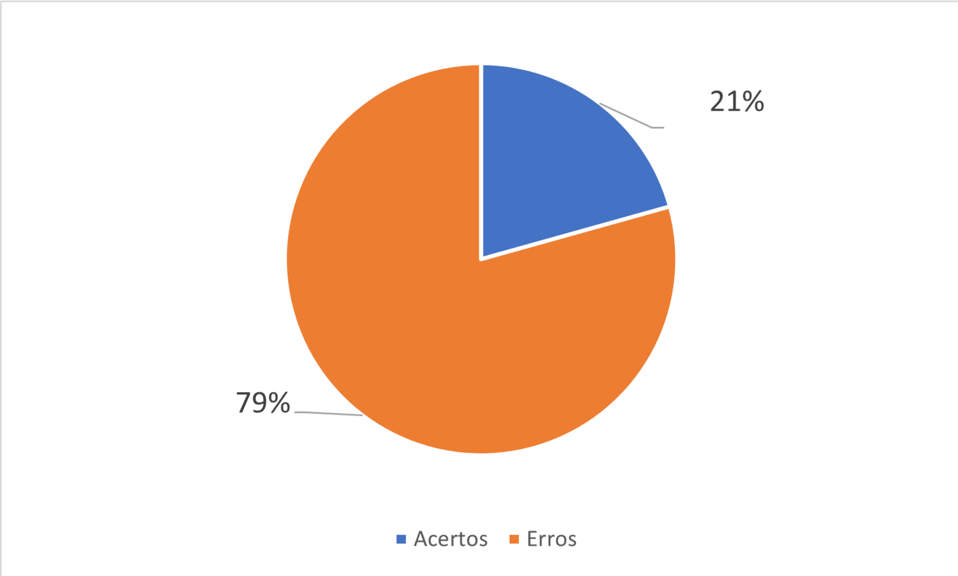


Figura 4.1: Gráfico resultado da atividade diagnóstico

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor, dados coletados em 2023.

A atividade diagnóstica permite ao professor obter uma visão inicial do nível de conhecimento e habilidades dos alunos, como é possível observar no gráfico da Figura 4.1. Isso ajuda o professor a planejar e adaptar sua abordagem de ensino de acordo com as necessidades e lacunas identificadas.

Ao receber um *feedback* (OCDE, 2018) sobre suas respostas na atividade diagnóstica, os alunos podem identificar seus pontos fortes e áreas que precisam ser aprimoradas. Esse *feedback* construtivo auxilia no desenvolvimento de suas habilidades metacognitivas, permitindo que eles entendam melhor seu próprio processo de aprendizagem e implementem estratégias para melhorar.

Na análise dos resultados da atividade diagnóstica, o professor pôde identificar quais conceitos ou habilidades específicas os alunos estão enfrentando dificuldades. Isso possibilita uma intervenção pedagógica direcionada, focando nas áreas que precisam ser reforçadas ou revisadas e uma abordagem mais personalizada.

4.2 Atividade proposta

Adaptamos aqui, uma avaliação com uma abordagem afetiva com a mesma turma de alunos do 3º ano do ensino médio, do Colégio da rede Estadual do Estado da Bahia, localizado na cidade de Feira de Santana. O objetivo dessa avaliação era aprimorar a compreensão dos estudantes em relação aos conteúdos de lógica matemática, por meio de uma socialização transdisciplinar e interdisciplinar.

Ao trabalharmos com um feedback construtivo, fornecemos um elogio pelo esforço de identificar os erros, seguido de uma explicação clara sobre a lógica envolvida na proposição. O feedback destaca o ponto de melhoria e fornece uma orientação sobre como refletir sobre a relação entre as afirmações e as implicações lógicas corretas. O feedback também encoraja o aluno a continuar praticando e reforça que ele está progredindo.

A atividade consistiu em uma série de questões elaboradas, abrangendo os principais conceitos e habilidades desenvolvidos no estudo da lógica matemática. Com o devido suporte do professor antes, durante e após a avaliação os alunos foram desafiados a aplicar seus conhecimentos em proposições, conectivos lógicos, tabelas-verdade e argumentação lógica. Essa abordagem permitiu que os estudantes não apenas que compreendessem os fundamentos teóricos, mas também aplicassem esses conhecimentos de maneira prática e contextualizada.

4.2.1 Atividade Avaliativa com Afetividade - Habilidades em Lógica Matemática no Ensino Médio

Objetivo: Avaliar o nível de compreensão dos alunos em relação aos conceitos de lógica matemática aplicados aos conteúdos do ensino médio de matemática, promovendo uma abordagem afetiva para incentivar o engajamento e a motivação dos estudantes.

Instruções:

Leia cada questão com atenção. Responda às questões de acordo com seu conhecimento e raciocínio lógico. Demonstre seus cálculos e justificativas, quando necessário. Sinta-se à vontade para expressar suas dúvidas e emoções durante a realização da atividade.

Questões:

1 - Considere as seguintes proposições:

- P: Se chove, então a rua está molhada.
- Q: A rua está molhada.

Qual a conclusão correta que pode ser obtida se ambas as proposições forem verdadeiras?

a) Está chovendo.

b) Não está chovendo.

c) Podemos concluir se está chovendo ou não.

d) A conclusão não pode ser determinada apenas com essas informações.

Decodificação: Se as duas proposições forem verdadeiras, podemos concluir algo sobre o estado do tempo?

2 - Ana afirma: "Se eu estudar para a prova de matemática, então vou obter uma nota alta". Se Ana estudou e obteve uma nota alta, qual conclusão podemos fazer sobre a veracidade da afirmação de Ana? Explique seu raciocínio.

Sugestão de resposta: Analise a implicação lógica proposta por Ana e explique se a evidência apresentada confirma ou não a veracidade da afirmação

3. Analise a expressão lógica: $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

Sugestão de resposta: Decodifique cada símbolo e explique o significado da conjunção lógica $\wedge$. Analise as possíveis combinações de valores lógicos e determine o valor lógico da expressão.

4 - Suponha que João afirma: "Vou estudar matemática ou vou tirar uma nota alta na prova". Se João estudou matemática e não tirou uma nota alta na prova, podemos concluir que a afirmação de João foi verdadeira?

Decodificação: Devemos analisar a veracidade da afirmação de João com base nos conectivos utilizados.

5 - Na tabela-verdade abaixo, preencha os valores lógicos para as proposições p, q e r, e determine o valor lógico da expressão lógica (p ∧ q) ∨ ¬ r.

p	q	r	(p ∧ q) ∨ ¬ r
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Decodificação: Preencha os valores lógicos na tabela de acordo com as combinações possíveis para as proposições p, q e r e determine o valor lógico da expressão $(p \wedge q) \vee \neg r$ para cada caso.

Lembre-se de que, além das respostas corretas, valorizamos seu esforço, dedicação e participação. Boa atividade!

4.2.2 Resultados obtidos na Atividade Avaliativa com Afetividade

Apresentamos aqui os dados Tabela 4.4 com acertos e erros considerados dos trinta alunos em uma Atividade Avaliativa com Afetividade no Ensino Médio:

Questão	**Acertos**	**Erros**
1	25	5
2	23	7
3	14	16
4	24	6
5	9	21
Total	**95**	**55**

Tabela 4.4: Atividade Avaliativa com Afetividade
Fonte: Elaborado pelo próprio Autor, dados coletados em 2023.

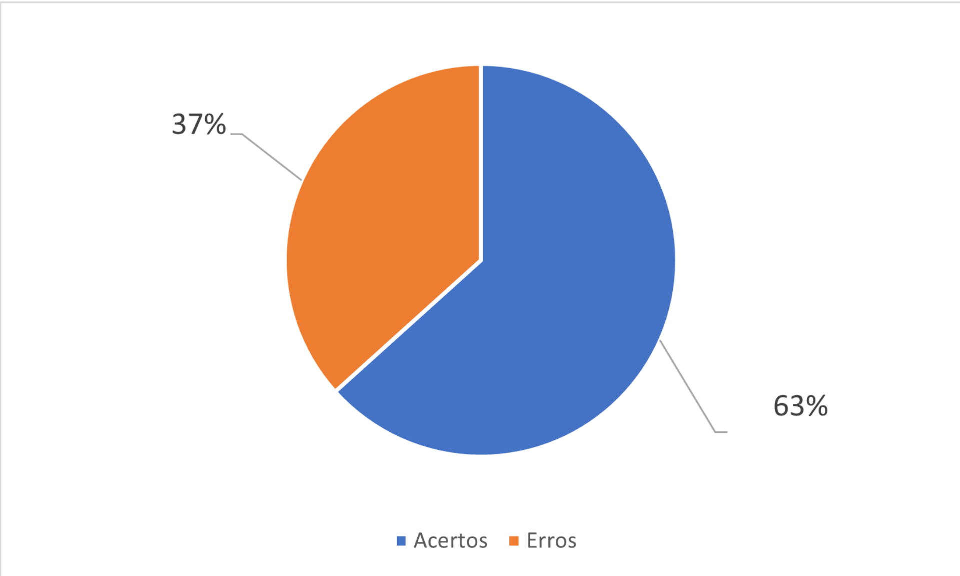


Figura 4.2: Gráfico resultado da atividade proposta

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor, dados coletados em 2023.

Como podemos observar no gráfico apresentado na Figura 4.2, a atividade que envolveu a decodificação e sugestões nas questões permitiu ao professor avaliar o nível de compreensão dos alunos em relação aos conceitos de Lógica Matemática aplicada aos conteúdos do ensino médio. Além disso, houve uma melhoria significativa nos resultados obtidos por meio de uma abordagem afetiva durante a aplicação, a qual tornou o momento de avaliação parte integrante do processo de aprendizagem, proporcionando uma experiência mais enriquecedora para os alunos.

A atividade ofertou aos alunos a oportunidade de aplicar e praticar os conceitos de lógica matemática compartilhados em sala de aula. Isso promove a compreensão dos princípios lógicos e sua capacidade de utilizar esses conceitos em diferentes contextos.

Além disso, desafiou os alunos a raciocinar logicamente, identificar padrões e fazer conexões entre diferentes proposições. Isso promove o desenvolvimento do pensamento crítico e da habilidade de argumentação baseada em evidências.A utilização de situações práticas e exemplos relevantes para o cotidiano dos estudantes pode tornar a atividade mais atrativa e estimulante.

Ao responder às questões, os alunos têm a oportunidade de exercitar sua autonomia na resolução de problemas lógicos. Além disso, ao revisar suas próprias respostas, e também com o *Feedback* construtivo, eles podem identificar erros e áreas que precisam ser aprimoradas, promovendo a autorreflexão e a autorregulação do aprendizado.

A atividade foi conduzida com uma abordagem afetiva, na qual foram utilizados elementos como um *feedback* construtivo, reconhecimento e valorização dos resultados alcançados pelos alunos. Além disso, o ambiente em sala de aula foi caracterizado por um apoio emocional do professor e uma ampla variedade de recursos, o que contribuiu para despertar um maior interesse e engajamento dos alunos.

A avaliação adotada nessa abordagem foi além dos resultados e conceitos, abrangendo também atitudes, habilidades e fatores metacognitivos, como a autorregulação e o processo de aprendizagem. Durante a atividade, foram estabelecidas conexões e aplicações dos conteúdos, proporcionando aos alunos uma compreensão mais ampla e significativa. Essa abordagem difere da avaliação tradicional, pois valoriza aspectos adicionais que vão além dos resultados e conceitos, promovendo uma visão mais abrangente e aberta do desenvolvimento dos alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi resultado de vivências na atividade de docência explorando modelos de avaliação que têm o objetivo de contribuir para a decodificação de conceitos matemáticos durante as avaliações. Foram apresentadas estratégias que auxiliam os estudantes a compreender de forma mais clara as questões, identificando os conceitos envolvidos e as possibilidades de abordagens para resolvê-las.

A importância de uma abordagem mais afetiva na avaliação também foi abordada, visando criar um ambiente acolhedor e estimulante que promova o engajamento dos estudantes, a reflexão sobre o próprio processo de aprendizagem e o desenvolvimento de soluções criativas para os desafios matemáticos.

Foi possível observar, nas atividades aplicadas (Capítulo 4), uma notável melhoria no desempenho dos alunos durante a avaliação, acompanhada de um aumento significativo do interesse deles em resolver questões relacionadas a esse tema. Além disso, foram exploradas interdisciplinaridades com outros conteúdos, resultando em uma maior resolutividade de questões-problema.

Ao discutir esses aspectos, esperamos ter contribuído para a melhoria da compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos, bem como para o aprimoramento do processo de avaliação na disciplina. Através da apresentação de modelos de avaliação, estratégias de decodificação de conceitos matemáticos com destaque para a lógica matemática e sua simbologia, e a exploração de formas de realizar avaliações mais afetivas, foram apresentadas alternativas práticas para aprimorar a avaliação dos estudantes.

A lógica matemática desempenha um papel fundamental na resolução de problemas, no desenvolvimento do raciocínio lógico e na compreensão dos conceitos matemáticos. No entanto, a dificuldade em decodificar esses conceitos durante as avaliações pode impactar negativamente o desempenho dos estudantes. Isso pode levar a respostas incorretas ou incompletas, resultando em uma avaliação inadequada de seu conhecimento e habilidades matemáticas.

Para lidar com essa dificuldade, é importante adotar estratégias que facilitem a decodificação dos conceitos matemáticos durante as avaliações. Isso pode envolver o uso de modelos de avaliação mais afetivos, que evidenciem conexões entre aspectos do desenvolvimento infantil e o ensino da matemática. Além disso, a aplicação dos princípios do método cartesiano, como a busca por evidências sólidas, a divisão das dificuldades em partes menores, a progressão lógica do pensamento e as revisões gerais, pode contribuir para um pensamento mais rigoroso e sistemático na resolução de problemas matemáticos.

A abordagem da matemática pura, com ênfase na definição clara e precisa dos conceitos utilizados, também é essencial para uma adequada demonstração de teoremas matemáticos. Ao estabelecer bases sólidas para a resolução de problemas, evitando ambiguidades e interpretações equivocadas, é possível construir argumentos e conclusões mais coerentes.

O envolvimento emocional e a narrativa envolvente também desempenham um papel importante no ensino e aprendizado da matemática. Experiências como a apresentada no livro "O Homem que Calculava" de Malba Tahan (LIMA, 2012) demonstram como a matemática pode ser fascinante e instigante, despertando a curiosidade e incentivando os estudantes a explorarem a resolução criativa de problemas matemáticos.

Espera-se que as estratégias propostas nesta dissertação possam contribuir para uma abordagem mais efetiva e afetiva no ensino e avaliação da matemática, resultando em uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, o desenvolvimento de habilidades e o engajamento dos alunos. Isso, por sua vez, pode ter um impacto positivo na formação dos estudantes, especialmente no que se refere aos conteúdos de Lógica Matemática e sua transversalidade, proporcionando uma aprendizagem mais significativa e aplicável.

Por fim, é importante ressaltar que a implementação dessas abordagens e estratégias requer o envolvimento de todos os atores do processo de avaliação, sejam eles os educadores, os estudantes e até mesmo os responsáveis pela elaboração dos materiais didáticos. Acreditamos que a adoção de uma abordagem mais abrangente e afetiva na avaliação traz benefícios tanto para quem avalia quanto para quem é avaliado, proporcionando um ambiente propício para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes.

Desta forma, a compreensão mais clara dos possíveis erros dos alunos, a promoção da reflexão sobre o processo de aprendizagem, o estímulo ao engajamento dos estudantes e o desenvolvimento de soluções criativas podem facilitar a atividade do professor. A avaliação não deve ser vista apenas como um meio de avaliar o conhecimento adquirido pelos estudantes, mas sim como uma oportunidade de promover a compreensão, construindo pontes lógicas para o desenvolvimento de habilidades cognitivas e emocionais necessárias para o sucesso que atravessa a Matemática. Isso contribui para uma prática de ensino mais eficaz, permitindo que os professores atuem como mediadores do processo de aprendizagem, promovendo uma educação mais abrangente e significativa.

REFERÊNCIAS

AVILA, A. *A beleza da matemática só se revela a quem a explora a fundo*. 2022. IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Acesso em: 01/02/2023. Disponível em: <https://impa.br/noticias/artur-avila-beleza-da-matematica-so-se-revela-a-quem-a-explora-a-fundo/>.

BARBOSA, R. M. *Aprendo com Jogos: Conexões e Educação Matemática*. [S.l.]: Autêntica, 2017.

BITTENCOURT, I. M. *Avaliação da aprendizagem na EAD*. In: *Anais do XII Congresso Internacional EDUTEC*. Manaus: Editora da Universidade Federal do Amazonas, 2009.

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p. CDU: 371.214.

CANTOR, G.; JOURDAIN, P. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. [S.l.]: Cosimo, 2007. ISBN 9781602064423.

CUSINATO, R. T.; JÚNIOR, S. P. *A teoria da decisão sob incerteza e a hipótese da utilidade esperada*. *Estudos do CEPE*, Santa Cruz do Sul-RS, v. 22, p. 7–38, 2005.

DALCIN, A.; SILVA, S. R. d. *Zoltan Dienes e a formação de Professores em Porto Alegre em tempos de Matemática Moderna*. *Educação: Teoria e Prática*, Scielo, v. 29, n. 62, p. 669–690, setembro 2019. ISSN 1981-8106.

D'AMBRÓSIO, U. *Por que se ensina Matemática?* 2013.

DESCARTES, R. *Discurso do Método*. 2. ed. São Paulo: Martin Claret, 2009.

FASSARELLA, L. Matemática: natureza e ensino/aprendizagem. *Revista Educação e Matemática*, v. 132, p. 32–35, 2015.

FILHO, E. de A. *Iniciação à lógica matemática*. [S.l.]: NBL Editora, 2002.

FONSECA, S. d. J. d. *Análise das dificuldades enfrentadas por alunos do ensino médio em interpretar e resolver problemas de matemática financeira*. Dissertação (Mestrado) — UFS, São Cristóvão, 2016.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura). ISBN 85-219-0243-3.

GERONIMO, J. R.; FRANCO, V. S. *Fundamentos de matemática: uma introdução à lógica matemática, teoria dos conjuntos, relações e funções*. *EdUEM, Maringá*, 2008.

HADJI, C. *Avaliação desmistificada*. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

HAMBLETON, R. K.; SWAMINATHAN, H.; ROGERS, H. J. *Fundamentals of Item Response Theory*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications, 2018.

HAZIN, I.; FRADE, C.; FALCÃO, J. T. d. R. *Autoestima e desempenho escolar em matemática: contribuições teóricas sobre a problematização das relações entre cognição e afetividade*. *Educar em Revista*, n. 36, p. 39–54, 2010.

HOFFMANN, J. *Avaliação: Mito e Desafio: Uma Perspectiva Construtivista*. 41. ed. [S.l.]: Editora Mediação, 2011.

HUTZ, C. S.; BANDEIRA, D. R.; TRENTINI, C. M. (Ed.). *Psicometria*. Porto Alegre: Artmed, 2015.

INEP. *Sinopse Estatísticas do Exame Nacional de Ensino Médio 2015*. Inep, 2017. Acesso em: 30 de janeiro de 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/acesso-a-informacao/dados-abertos/sinopses-estatisticas/enem>.

INEP. *Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)*. 2023. Recuperado de <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb>.

INEP. *Página do Encceja no site do INEP*. s.d. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/encceja/provas-e-gabaritos>.

LACAN, J. *O Seminário. Livro 1: Os escritos técnicos de Freud*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1981. Trabalho original publicado em 1954.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. 6. ed. [S.l.]: SBM, 2012. 410 p. ISBN 9788585818760.

LORENZONI, C. A. C. d. A.; AL. et. *Jogos, brincadeiras e experiências em matemática com os Guarani e Tupinikim*. 1. ed. Vitória, ES: Edifes, 2022. 1 recurso digital : PDF; 116 p. ; il. col. ISBN 978-85-8263-622-0.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem: componente do ato pedagógico*. São Paulo: Cortez, 2011.

MARZAGÃO, M. A. et al. *A perspectiva docente sobre o domínio afetivo do ensino e da aprendizagem da matemática na transição de estudantes do 5º para o 6º ano do Ensino Fundamental*. Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2021.

MENEZES, S. B. D. *A importância da Lógica como base de estudo para a Matemática*. *RIDE. Rev. Iberoam. Investig. Desarro. Educ*, Guadalajara, v. 11, n. 22, p. e017, junho 2021. Epub 21-Mayo-2021.

MORTARI, C. A. *Introdução à lógica*. [S.l.]: Unesp, 2001.

OCDE. *10 Questões para Professores de Matemática...e como o PISA Pode Ajudar a Respondê-las*. 1ª edição. ed. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 2018. ISBN 978-85-244-0444-3.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 2004.

ROSEN, K. *Matemática Discreta e suas Aplicações*. [S.l.]: Grupo A Educação, 2009. ISBN 9788563308399.

SANTOS, G. F. d. L. O processo de civilização do jogo. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2012.

SILVA, A. da et al. *Gamificação na Educação*. [S.l.]: Pimenta Cultural, 2014. ISBN 9788566832136.

SILVA, E. C. *Ensino-aprendizagem de matemática*. Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. Organizador.

SILVA, R. S. *A Importância da Afetividade no Ensino de Ciências e Matemática*. *RECIMA21 - Revista Científica Multidisciplinar*, v. 3, n. 5, p. e351448, maio 2022. ISSN 2675-6218.

SOARES, E. *Lógica Formal: Da Lógica Aristotélica ao Cálculo Sentencial Bivalente*. 1ª. ed. Marília: Oficina Universitária, 2023. ISBN 978-65-5954-361-8.

VALLE, L. E. L. R. d. *Estresse e distúrbios do sono no desempenho de professores: saúde mental no trabalho*. Tese (Tese de Doutorado) — Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011. 209 f.

VAZ, R. F. N.; NASSER, L. *Um Estudo sobre o Feedback Formativo na Avaliação em Matemática e sua Conexão com a Atribuição de Notas*. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, v. 35, n. 69, p. 3–21, jan. 2021. ISSN 0103-636X.

VIGOTSKI, L. S. *Sobre os sistemas psicológicos*. 3ª ed.. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2004.

VYGOTSKY, L. S. *Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem*. 11th. ed. São Paulo: Ícone, 2010.

WITTGENSTEIN, L. *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

A Avaliação Diagnóstica: Lógica Matemática

Objetivos

Esta avaliação tem como objetivo verificar o conhecimento dos alunos sobre os conteúdos de lógica matemática, levando em consideração as habilidades e competências estabelecidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Além disso, busca avaliar a capacidade dos alunos em aplicar os conceitos de lógica matemática em diferentes situações.

Instruções

1. Leia atentamente cada questão antes de respondê-la.

2. Responda de forma clara, coesa e coerente.

3. Utilize a folha de respostas fornecida.

4. A avaliação tem duração de 1 hora.

Questões

1. Complete as seguintes sequências numéricas:

   a) 2, 4, 6, _, 10, _,_, 16

   b) 1, 3, 6, 10, _, _, 28, _

2. Explique o que é uma proposição e dê um exemplo.

3. Utilizando as leis da lógica matemática (negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência), resolva a seguinte expressão lógica:

   $\neg$ q $\implies$ p

   Qual a condição para que a expressão lógica seja verdadeira?

4. Em um jogo de tabuleiro, três amigos A, B e C fizeram as seguintes afirmações:

   A: "Eu ganhei e B também ganhou."

   B: "ou Eu ganhei ou C ganhou."

   C: "Se Eu ganhei, então B ganhou"

   Com base nessas afirmações, Se o jogo só tem um único vencedor, quem está mentindo com certeza?

5. Desenvolva uma tabela-verdade para a seguinte expressão lógica:

   $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Folha de Respostas

Nome: ____

Turma: ___________________ **Data:** ___________________

Respostas possíveis:

1.a) Observando a sequência, podemos notar que os números estão aumentando de 2 em 2. Portanto, para completar a sequência, precisamos adicionar 2 unidades a cada número.

A sequência completa é: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16.

1.b) Observando a sequência, podemos perceber que os números estão aumentando de forma sequencial, onde cada número é a soma do número anterior com um valor crescente.

Vamos analisar a diferença entre os termos consecutivos:

$3 - 1 = 2$

$6 - 3 = 3$

$10 - 6 = 4$

Podemos observar que a diferença entre os termos consecutivos está aumentando em 1 a cada termo. Portanto, a diferença entre o próximo par de termos deve ser 5.

Agora podemos continuar a sequência aplicando essa lógica:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36

Portanto, a sequência completa é: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36.

2. Uma proposição é uma sentença declarativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, mas não ambas ao mesmo tempo. Em outras palavras, é uma afirmação que pode ser avaliada como sendo verdadeira ou falsa.

Um exemplo de proposição é: "2 + 2 = 5". Essa afirmação é falsa, pois a soma aritmética de 2 + 2 é igual a 4 e não a 5.

3. A expressão lógica $\neg q \implies p$ é verdadeira nas seguintes condições:

q	$\neg q$	p	$\neg q \Rightarrow p$
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F

Tabela A.1: Tabela verdade da Implicação $\neg q \implies p$

I. p é verdadeiro.

II. p é falso e q é verdadeiro.

Ou seja, p e q não podem ser ambos falsos.

4. O amigo A está mentindo com certeza pois na proposição “e” só é verdade se ambos forem verdade.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela A.2: Tabela verdade: $(p \wedge q)$

5.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$(\neg p \wedge \neg q)$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Tabela A.3: Tabela verdade: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

B Proposta de Avaliação

Proposta de Avaliação com afetividade para aplicação

Avaliação Prática: Lógica Matemática

Objetivos

Esta avaliação tem como objetivo verificar o conhecimento dos alunos sobre os conceitos de lógica matemática, bem como sua habilidade em aplicar estratégias afetivas para decodificar e compreender os problemas matemáticos. Através desta avaliação, buscamos promover uma abordagem mais afetiva e significativa da matemática, incentivando a resolução criativa de problemas.

Instruções

1. Leia atentamente cada questão antes de respondê-la.

2. Resolva os problemas de forma clara e organizada.

3. Utilize estratégias afetivas, como desenhos, esquemas ou representações visuais, para auxiliar na compreensão e resolução dos problemas.

4. A avaliação tem duração de 1 hora.

Questões

1. Dada a proposição p: "Os estudantes passaram na prova" e q: "Eles estudaram", escreva a negação da seguinte afirmação: "Se os estudantes passaram na prova, então eles estudaram".

2. Seja p: “O dia está ensolarado” e q: “Estou de bom humor”. Escreva a afirmação “Se o dia está ensolarado, então estou de bom humor” utilizando os símbolos lógicos.

3. Dada a proposição p: “O número é par” e q: “É divisível por 3”, escreva a afirmação “O número é par e divisível por 3” utilizando os símbolos lógicos.

4. Considere a proposição p: “O aluno obteve nota alta” e q: “Ele estudou muito”. Escreva a afirmação “O aluno não obteve nota alta ou não estudou muito” utilizando os símbolos lógicos.

5. Seja p: “O jogo foi cancelado” e q: “Estava chovendo”. Escreva a negação da seguinte afirmação: “Se o jogo foi cancelado, então estava chovendo”.

6. O desafio a seguir envolve um jogo de lógica chamado "Quatro Cores". O objetivo é colorir um mapa de tal forma que nenhum par de Estados do Nordeste brasileiro que são adjacentes[1] tenha a mesma cor. Utilize estratégias afetivas para resolver o desafio e responder às perguntas a seguir:

a) Quantas cores diferentes são necessárias para colorir o mapa sem que os Estados do Nordeste brasileiro que são adjacentes tenham a mesma cor?

b) Quais Estados do Nordeste brasileiro podem ser coloridos com a mesma cor?

Sugestão de decodificação: Para resolver esse desafio, você pode usar lápis de cor ou marcadores para colorir o mapa e identificar as cores diferentes necessárias. Ao colorir o

[1] Adjacentes no sentido de que está contíguo, ou seja, próximo, vizinho, que faz divisa (fronteira).

mapa, preste atenção aos Estados que compartilham uma divisa e certifique-se de que eles tenham cores diferentes.

Folha de Respostas

Nome: ____

Turma: __________________ **Data:** __________________

Respostas possíveis:

1. A negação da afirmação “Se os estudantes passaram na prova, então eles estudaram” pode ser escrita como: “Os estudantes passaram na prova, mas não estudaram”.

2. Utilizando os símbolos lógicos, a afirmação “Se o dia está ensolarado, então estou de bom humor” pode ser escrita como: $p \to q$.

3. A afirmação “O número é par e divisível por 3” utilizando os símbolos lógicos pode ser escrita como: $p \land q$.

4. A afirmação “O aluno não obteve nota alta ou não estudou muito” utilizando os símbolos lógicos pode ser escrita como: $\neg p \lor \neg q$.

5. A negação da afirmação “Se o jogo foi cancelado, então estava chovendo” pode ser escrita como: “O jogo foi cancelado, mas não estava chovendo”.

6. Para determinar quantas cores diferentes são necessárias para colorir o mapa sem que os estados adjacentes tenham a mesma cor, é necessário analisar o mapa. Neste caso, podemos usar a estratégia sugerida de utilizar cores diferentes para os estados vizinhos. Ao analisar o mapa, podemos ver que são necessárias no mínimo **3 cores diferentes** para colorir o mapa sem que os estados adjacentes tenham a mesma cor.

C Proposta de Atividade (Gráfico)

Apresentamos aqui uma proposta de atividades práticas para obter gráficos ilustrativos com maior afetividade.

Para traçar as duas funções no *GeoGebra*, pode-se seguir os seguintes passos:

Passo 1: Abra o *GeoGebra* em <https://www.geogebra.org/calculator/> e crie uma nova janela de Álgebra e Gráficos.

Passo 2: Digite a primeira função C.1 no campo de entrada na parte superior da janela. Para a função

$$g(x) = -3\sqrt{1 - \frac{|x|}{2}} \tag{C.1}$$

digite:

g(x) = -3 sqrt(1 - abs(x) / 2)

Pressione Enter para que a função seja definida.

Passo 3: Agora, digite a segunda função C.2 no campo de entrada. Para a função

$$f(x) = \sqrt{1 - (|x| - 1)^2} \tag{C.2}$$

digite:

f(x) = sqrt(1 - (abs(x) - 1)²)

Pressione Enter para que a função seja definida.

Passo 4: As duas funções estão definidas agora. Para traçá-las no gráfico, pode-se usar a ferramenta "Gráfico" no *GeoGebra*. Para isso, clique no ícone do gráfico na barra de ferramentas lateral.

Passo 5: Com a ferramenta "Gráfico" selecionada, clique e arraste um retângulo na área de trabalho para definir a região onde deseja traçar as funções.

Passo 6: Agora, pode-se visualizar os gráficos das duas funções traçados na área de trabalho do *GeoGebra*.

Pode-se personalizar a aparência dos gráficos, como cor, estilo de linha, etc., usando as opções de formatação disponíveis no *GeoGebra*.

D Proposta de Plano de Aula

Objetivos:

1. Compreender os conceitos básicos da lógica matemática de forma engajadora.
2. Aplicar os princípios lógicos em situações do cotidiano.
3. Promover a interação e o trabalho em equipe por meio de atividades lúdicas.

Recursos necessários:

- Quadro branco ou lousa.
- Marcadores.
- Papéis coloridos, cartões ou fichas.
- Lápis de cor ou canetas hidrográficas.
- Exercícios e desafios de lógica matemática.

Duração: 1 hora e 40 minutos

Plano de aula:

1. Introdução e dinâmica de grupo (15 minutos)

- Recepcionar os alunos de forma acolhedora, demonstrando interesse por sua participação.

- Realizar uma breve dinâmica de grupo para promover a interação e o entrosamento da turma.
- Estabelecer um ambiente descontraído e convidativo para o aprendizado.

2. Conceitos básicos da lógica matemática (30 minutos)

- Apresentar os termos e conceitos fundamentais da lógica matemática de forma simplificada e acessível.
- Utilizar recursos visuais, como cores, símbolos e desenhos, para facilitar a compreensão dos conceitos.
- Relacionar os conceitos de lógica matemática com situações do cotidiano dos alunos.

3. Atividade lúdica (40 minutos)

- Propor uma atividade prática e lúdica que envolva a aplicação dos princípios lógicos.
- Por exemplo, criar enigmas ou quebra-cabeças com pistas e desafios para que os alunos resolvam em grupos.
- Estimular a criatividade e a colaboração entre os estudantes, incentivando-os a compartilhar ideias e estratégias.

4. Discussão e reflexão (20 minutos)

- Promover uma discussão em grupo sobre as soluções encontradas pelos alunos na atividade lúdica.
- Encorajar os estudantes a expressar suas opiniões e explicar o raciocínio por trás de suas respostas.
- Refletir sobre como a lógica matemática pode ser aplicada em diferentes contextos e como isso pode influenciar as tomadas de decisões.

5. Prática individual (25 minutos)

- Distribuir folhas de papel com exercícios de lógica matemática adaptados para atividades afetivas.
- Os alunos devem resolver os exercícios individualmente, aplicando os conceitos aprendidos.
- Circular pela sala para auxiliar os estudantes, oferecendo suporte e tirando dúvidas.

6. Conclusão (10 minutos)

- Reunir a turma para uma breve conclusão da aula.
- Destacar os pontos principais aprendidos e reforçar sua relevância.
- Agradecer a participação e o empenho dos alunos durante a aula.
- Encorajar os estudantes a continuar explorando a lógica matemática e sua aplicação no dia a dia.