



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA - UFRB
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

APLICABILIDADE DAS RELAÇÕES PITAGÓRICAS ENTRE OS
NÚMEROS E AS FIGURAS PLANAS NO ENSINO DA
MATEMÁTICA

PAULO CÉSAR FERREIRA DAS VIRGENS

Cruz das Almas - Bahia

JUNHO DE 2023

APLICABILIDADE DAS RELAÇÕES PITAGÓRICAS ENTRE OS
NÚMEROS E AS FIGURAS PLANAS NO ENSINO DA
MATEMÁTICA

PAULO CÉSAR FERREIRA DAS VIRGENS

Dissertação de Mestrado apresentada
à Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFRB como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rogelma Maria Da
Silva Ferreira.

Cruz das Almas - Bahia

Junho 2023

FICHA CATALOGRÁFICA

V816a

Virgens, Paulo César Ferreira das.

Aplicabilidade das relações pitagóricas entre os números e as figuras planas no ensino da matemática / Paulo César Ferreira das Virgens. _ Cruz das Almas, BA, 2023.
53f.; il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT.

Orientadora: Dra. Rogelma Maria da Silva Ferreira.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Teoria dos números. 3. Pitágoras, teorema de – Geometria – Análise. I. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II. Título.


CDD: 511

APLICABILIDADE DAS RELAÇÕES PITAGÓRICAS ENTRE OS NÚMEROS E AS FIGURAS PLANAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

PAULO CÉSAR FERREIRA DAS VIRGENS


Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRB como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 1º de Junho de 2023.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 ROGELMA MARIA DA SILVA FERREIRA
Data: 07/08/2023 17:21:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Profa. Dra. Rogelma Maria Da Silva Ferreira (Orientadora)

UFRB

Documento assinado digitalmente
 ANDERSON REIS DA CRUZ
Data: 20/07/2023 09:23:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Anderson Reis da Cruz

UFRB

Documento assinado digitalmente
 MARIANA PINHEIRO GOMES DA SILVA
Data: 20/07/2023 14:27:28-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Mariana Pinheiro Gomes da Silva

UFBA

Dedico este trabalho a minha esposa, família, amigos e orientadora.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder saúde, força e coragem para concluir mais essa etapa em minha vida. Aos meus queridos pais José Ferreira e Deusdete Ferreira que me ensinaram os valores éticos e a essenciais ao ser humano. À minha esposa Daniele Carlos Silva Ferreira, por toda paciência, cuidado e carinho durante todo momento. A minha orientadora Dra. Rogelma Maria da Silva Ferreira que me acompanhou com dedicação e profissionalismo, guiando-me com suas orientações precisas e valiosas. Aos meus professores do PROFMAT/UFRB. Aos colegas de sala: Fernando, zesi, taise, Ricardo, Danilo, Sidnei, Iuri, Antônio pelos valorosos momentos que passamos juntos. Aprendi algo de bom para a minha vida com cada um de vocês. Aos mestres Roberval Lima, Ricardo Normando, Luan Felipe e Astrogildo Neto que disponibilizaram seu precioso tempo na tentativa de sanar as minhas inquietações. Agradeço aos meus amigos, que me ajudaram a manter a sanidade e a alegria durante esse período de estudo intenso. À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio. Por fim, agradeço a todos que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse trabalho, seja por incentivos, apoio emocional ou até mesmo por uma simples oração.

Muito obrigado a todos!

"A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela".

Albert Einstein

Resumo

O referido trabalho aborda o ensino da matemática voltado para os números figurados e o teorema de Pitágoras. Os números figurados são uma classe de números que podem ser expressos de forma geométrica, como os quadrados, triângulos e pentágonos, enquanto o teorema de Pitágoras, constitui-se de uma relação entre os lados de um triângulo retângulo, sendo esta uma das mais importantes do campo da geometria. Neste trabalho, explora-se a conexão entre o números figurados e o teorema de Pitágoras. Primeiramente, aborda-se as propriedades dos números figurados, incluindo a sua fórmula geral e suas relações com outras sequências numéricas. Em seguida, apresenta-se o teorema de Pitágoras algumas demonstrações do mesmo, dada a sua importância em diversas áreas do conhecimento. Aqui, alinhado com as recomendações da BNCC (Base Nacional Comum Curricular), explora-se a conexão entre os números figurados e o teorema de Pitágoras, com a demonstração de aplicações deste teorema a triângulos em que os lados são números figurados. Nesta perspectiva, apresenta-se uma proposta de sequência didática, composta por quatro atividades. Ao final do estudo, conclui-se que as propriedades dos números figurados e o teorema de Pitágoras são fundamentais para a compreensão da geometria plana e na matemática em geral, e ainda, a conexão entre estes é um tema de relevância para o ensino-aprendizagem da matemática.

Abstract

This work aims the teaching of mathematics with emphasis on figurative numbers and the Pitágoras theorem. Figurative numbers are a class of numbers that can be expressed geometrically, such as squares, triangles and pentagons, while the Pythagorean theorem consists of a relationship between the sides of a right triangle, which is one of the most important in the field of geometry. In this work, the connection between figurative numbers and the Pythagorean theorem is explored. First, the properties of figurative numbers are addressed, including their formula general and its relations with other numerical sequences. Then, the Pythagorean theorem is presented with some demonstrations of it, given its importance in several knowledge areas. Here, in line with the recommendations of the BNCC (Base Nacional Comum Curricular), the connection between figurative numbers and the theorem is explored. of Pythagoras, with the demonstration of applications of this theorem to triangles in which the sides are figurative numbers. In this perspective, it was presented a proposal for a sequence didactic, composed of four activities. Finally, in this study, it was concluded that the properties of figurative numbers and the Pythagorean theorem are fundamental for understanding of plane geometry and mathematics in general, and yet, the connection between these is a subject of relevance for the teaching and learning of mathematics.

Sumário

1	Introdução	2
2	Pitágoras e Aspectos Históricos	4
2.1	Um pouco da História de Pitágoras	4
2.2	A escola pitagórica e a concepção de número	7
3	Os números figurados na matemática pitagórica	13
3.1	Os números triangulares, quadrados e pentagonais	13
4	Os ternos pitagóricos	21
4.1	O Teorema de Pitágoras	21
4.2	Triângulos Pitagóricos	24
4.3	Semelhança de Triângulos	25
4.4	Teoremas fundamentais	25
4.4.1	Triângulo Retângulo	28
4.4.2	Semelhança nos Triângulos Retângulos	28
4.4.3	Relações Métricas	29
5	Demonstrações do Teorema de Pitágoras	30
5.0.1	Demonstração por semelhança de Triângulos	30
5.0.2	Recíproca do teorema de Pitágoras	31
5.0.3	Demonstração do Presidente	32
5.0.4	Demonstração de Leonardo da Vinci	33
5.0.5	Demonstração de Bhaskara	34
5.0.6	Demonstração de Pitágoras	35
6	Aplicabilidade no ensino	36
6.1	A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)	36
6.2	Sequência Didática	37
6.3	Proposta de sequência didática	39
6.4	Atividade 1	39

6.4.1	Avaliação de Aprendizagem 1	42
6.5	Atividade 2	43
6.5.1	Avaliação de Aprendizagem 2	45
6.5.2	Atividade 3	47
6.5.3	Avaliação de Aprendizagem 3	48
6.6	Atividade 4	48
6.6.1	Avaliação de Aprendizagem 4	48
7	Considerações finais	50
	Referências Bibliográficas	53

Capítulo 1

Introdução

A matemática tem sido descrita como a “ciência dos padrões”. Padrões estão por toda parte e podem aparecer como padrões geométricos ou padrões numéricos ou ainda, ambos. Os números figurados são exemplos de padrões que são tanto geométricos e numéricos, visto que relacionam formas geométricas de polígonos e padrões numéricos. Estes padrões geométricos podem ser encontrados na natureza e no mundo físico, além de serem úteis para resolver problemas matemáticos e entender conceitos abstratos.

Desta maneira, a forma figurativa de escrever estes números possibilita uma observação visual de suas características, o que os torna adequados objetos de operações. É fácil entender por que essa forma de mostrar os números foi aplicada na matemática antiga durante séculos. Esses números têm uma definição simples, mas são incrivelmente ricos em propriedades que permitem que sejam usados em muitas áreas da matemática e outras disciplinas científicas. Nos últimos séculos, muitos matemáticos famosos lidaram com eles, de Pitágoras a Gauss (CAREVIC; PETROVIC; NEBOJSA, 2019).

Os números figurados estão presentes na matemática e em outras disciplinas científicas. Ao longo do tempo, dos números triangulares, quadrados e retangulares pitagóricos iniciais, estes foram complementados com toda a classe de números poligonais, piramidais, poliédricos e outros números figurados. Estes números são representados por uma forma algébrica regular e uma forma geométrica discreta através de um padrão com pontos igualmente espaçados (CAREVIC; PETROVIC; NEBOJSA, 2019). Assim, números poligonais são números que representam pontos que são organizados em uma figura geométrica. Partindo de um ponto comum e aumentando para fora, o número de pontos utilizados aumenta em polígonos sucessivos. À medida que o tamanho da figura aumenta, o número de pontos usados para construí-la cresce em um padrão comum. Devido a sua geometria básica, os tipos mais comuns de números poligonais assumem a forma de triângulos e quadrados.

De acordo com Carvalho e Roque (2012), Pitágoras é considerado o pai da Ma-

temática grega, apesar de sua teoria dos números ser concreta, baseada em manipulações de números figurados, com aritmética indutiva, ou seja, sem provas. Deste modo, era possível graficamente, a obtenção de generalizações sobre sequências de números, mas as regras aplicadas, tais como a dos números quadrados, cúbicos e outros, eram desenvolvidas para fins práticos (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Este trabalho teve por meta propor uma sequência didática envolvendo Números Triangulares, Números Quadrados e o Teorema de Pitágoras para alunos do 9 ano do Ensino Fundamental. A metodologia usada tem como referencial teórico o método indutivo. De acordo com Marconi e Lakatos (2019), este método caracteriza-se por um processo mental no qual, partindo de dados particulares, suficientemente constatados, infere-se uma verdade geral ou universal. Ainda de acordo com as autoras, o objetivo destes argumentos indutivos é levar a conclusões cujo conteúdo é muito mais amplo do que o das premissas nas quais se basearam.

A seguir, uma descrição de cada capítulo do trabalho.

- O Capítulo 2 faz uma breve abordagem sobre a história de Pitágoras e a escola pitagórica e discorre sobre a importância do estudo de Pitágoras na tentativa de explicar o universo.
- O Capítulo 3 trata dos números figurados presentes na matemática pitagórica, com a apresentação e demonstração de algumas propriedades dos números triangulares, quadrados e pentagonais.
- O Capítulo 4 apresenta as triplas pitagóricas, com o famoso teorema de Pitágoras.
- O capítulo 5 mostra as seguintes demonstrações do teorema de Pitágoras: por semelhança de triângulos, a demonstração do presidente, a demonstração de Leonardo da Vinci, a demonstração de Bhaskara e por fim, a demonstração de Pitágoras.
- O capítulo 6, ponto central da contribuição deste trabalho, trata de uma aplicação dos números figurados no ensino, através do uso de uma sequência didática.
- No capítulo 7 estão as considerações finais e perspectivas deste trabalho.

Capítulo 2

Pitágoras e Aspectos Históricos

2.1 Um pouco da História de Pitágoras

Na antiguidade o ser humano não necessitava contar, nem de criar símbolos para registrar quantidades, o senso numérico dos humanos já era suficiente para atender suas necessidades. Como já sabemos, na época das cavernas, o ser humano era nômade, não tinha residência fixa, ele vivia andando de uma região para outra, extraindo tudo o que ele podia consumir e no momento em que se esgotavam as reservas naturais ele se deslocava para outra região. As nossas primeiras concepções de número e forma datam de tempos tão remotos como os do começo do paleolítico, ou idade da Pedra Lascada (aproximadamente 2 milhões de anos a.C).

Durante as centenas de milhares de anos, os homens viviam em cavernas, em condições pouco diferentes das dos animais, e as suas principais energias eram orientadas para o processo elementar de recolher alimentos onde fosse possível encontrá-los. Eles faziam instrumentos para caçar e pescar, desenvolviam a linguagem para comunicarem uns com os outros e, nos últimos tempos do paleolítico, enriqueceram as suas habitações com certas formas de arte criativa, estatuetas e pinturas (STRUICK, 1992).

Com o passar do tempo, o ser humano começa a se fixar, criar residências, deixando de ser nômade e mudando a forma de encarar o mundo. Logo sua evolução era inevitável, não só em relação aos números mas também a todos os costumes já existentes, pois a partir de agora ele deveria aprender a cultivar a terra para poder se auto sustentar, sem a necessidade de mudanças como em tempos anteriores. Esse seria o marco para as mudanças no que diz respeito aos números e a todas as formas de representações numéricas existentes, antes do atual sistema de numeração conhecido por nós, nos dias de hoje (BOYER, 1996).

As transformações começaram a partir do momento em que o homem começou a sentir dificuldade de controlar seu rebanho devido ao aumento de animais, e também

pela produção de alimentos que se tornava cada vez maior. Desde então, começaram as primeiras relações entre quantidades e símbolos. O pastor quando saía com suas ovelhas para pastar fazia algumas relações entre símbolos e quantidades de ovelhas. Por exemplo: marcações eram feitas em ossos ou madeiras, para controlar a quantidade de animais que saía pela manhã, assim ao retornarem ao fim do dia, o pastor poderia fazer uma relação entre ovelhas e marcações para poder conferir a quantidade de animais. Desse modo, poderia saber se estava faltando algum animal (BOYER, 1996).

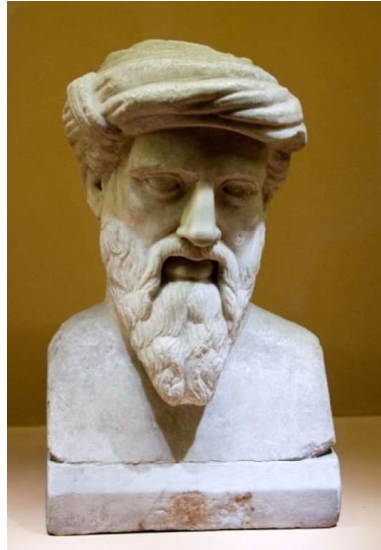


Figura 1: Busto de Pitágoras no Capitulinos em Roma.
Fonte: (JUNIOR, 2023).

Pressupõe-se que Pitágoras de Samos (1) tenha nascido aproximadamente no século VI a. C., algo em torno do ano 569 a. C., em uma das ilhas do litoral grego, chamada Samos, perto de Mileto. Sua vida é envolta de mistérios, pois não existem relatos originais dos seus trabalhos, o que torna difícil para historiadores e pesquisadores conseguirem separar aquilo que é real do que é fictício (OLIVEIRA; NASCIMENTO, 2020). Seu pai, Mnesarco, era um comerciante de Tiro; sua mãe, Pitaís, vinha de Samos. Eles se conheceram quando Mnesarco levou milho para Samos durante um período de escassez de alimentos, tendo então recebido um agradecimento público e sendo transformado em cidadão.

Pitágoras estudou filosofia com Ferécides. Ele também visitou outro filósofo, Tales de Mileto. Assistiu a aulas ministradas por Anaximandro, um pupilo de Tales, e absorveu muitas de suas ideias sobre cosmologia e geometria. Visitou o Egito, foi capturado por Cambises II, rei da Pérsia, e levado como prisioneiro para a Babilônia. Ali, aprendeu a matemática e a teoria musical babilônica. Mais tarde, fundou a escola pitagórica na cidade italiana de Cróton (atualmente Crotona), e é por esse feito que costuma ser lembrado.

Os pitagóricos formavam um culto místico. Acreditavam que o universo era ma-

temático, e que diversos símbolos e números possuíam um profundo significado espiritual. Vários escritores da Antiguidade atribuíram diversos teoremas matemáticos aos pitagóricos, entre eles: Euclides, Proclus, Plutarco, Diógenes Laércio. E, por extensão, a Pitágoras – o mais notável é seu famoso teorema sobre os triângulos retângulos. No entanto, não tem-se ideia quanto à matemática criada pelo próprio Pitágoras. Não sabemos se os pitagóricos conseguiram provar o teorema ou se apenas acreditavam que fosse verdadeiro. Além disso há indícios, obtidos a partir da placa de argila conhecida como Plimpton 322, de que os antigos babilônios talvez já tivessem compreendido o teorema 1.200 anos antes – embora provavelmente não possuíssem uma prova, já que, de qualquer forma, os babilônios não se preocupavam muito com ela (STEWART, 2019).

No século VI antes de Cristo, Pitágoras faria deles o conceito fundamental de sua filosofia. “Tudo é número”, afirma o filósofo grego. Segundo ele, os números que geram figuras geométricas, que por sua vez engendram os quatro elementos da matéria: fogo, água, terra e ar, que compõem todos os seres. Assim, Pitágoras cria todo um sistema em torno dos números. Os ímpares são associados ao masculino, ao passo que os pares são femininos. O número 10, representando como um triângulo, é chamado de “tetractys” e se torna símbolo da harmonia da perfeição do cosmo (DUARTE; GONCALVES; NOBREGA,).

Os pitagóricos também estariam na origem da aritmância, que afirma ler as características humanas associando valores numéricos as letras que compõem os nomes. Paralelamente começa-se a discutir o que é um número. Alguns autores como: Platão, Aristóteles, Plotino, Giordano Bruno sustentam que a unidade não é um número, pois um número designa variedade, só podendo, portanto, ser considerado a partir de 2. Chega-se até a afirmar que, para gerar todos os números, o 1 deve ser ao mesmo tempo par e ímpar. Mais tarde, o zero, os números negativos e os números imaginários é que seriam responsável pelo ressurgimento de debates cada vez mais acalorados (LAUNAY, 2019).

Invariavelmente, a chegada dessas novas ideias ao mundo dos números causaria discussão, obrigando os matemáticos a ampliar suas concepções. Em suma, o número continua a dar o que falar, e os seres humanos ainda levarão tempo para aprender a dominar essas estranhas criaturas saídas diretamente de seus cérebros (LAUNAY, 2019).

2.2 A escola pitagórica e a concepção de número



Figura 2: Mapa da Magna Grécia.

Fonte: (DUARTE; GONCALVES; NOBREGA,).

Por volta de 530 a.C., Pitágoras fixou-se em Crotona, indicado na Figura 2, cidade da Magna Grécia, onde passou a dedicar-se ao ensino, sem deixar o interesse pelas questões políticas, motivo que o teria levado a fundar um centro de estudos que teve atuação decisiva na derrota que Crotona infligiu a Sibaris em 510 a. C.. Contudo, com as alterações políticas posteriores, ante o triunfo de tendências democráticas, Pitágoras e seus partidários de inclinação aristocrática foram alvo de perseguições. Essa liga secreta ou ordem, fundada por Pitágoras, reunia um grupo de homens e também mulheres que se conservavam fiéis às ideias do mestre e as disseminavam oralmente (SABOYA, 2015).

Os pitagóricos tinham como símbolo uma estrela de cinco pontas (o pentagrama) dentro de um pentágono, que eles utilizavam como meio de identificação para se reconhecerem entre si e, assim, evitar que pessoas que não fizessem parte da confraria tivessem acesso às reuniões nas quais eram debatidos demonstrados os resultados de seus estudos e pesquisas (DUARTE; GONCALVES; NOBREGA,), mostrada na Figura 3.

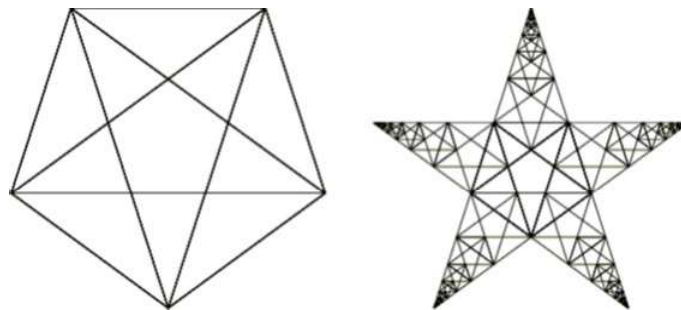


Figura 3: Estrela Pitagórica.

Fonte: (DUARTE; GONCALVES; NOBREGA,).

A historiografia da matemática costuma analisar, entre as épocas de Tales e de Euclides, as contribuições da escola pitagórica do século V antes de Cristo. Os ensinamentos dessa escola teriam influenciado um outro matemático importante desse século,

Hipócrates de Quios. Ele foi um matemático e geômetra grego que fez contribuições significativas para a matemática, em particular na área da geometria. Era conhecido por seu trabalho na quadratura de figuras e na duplicação do cubo.

Além disso, frequentemente encontra-se referências a Pitágoras como um dos primeiros matemáticos gregos. Ambas as afirmações são hoje largamente questionadas pelos historiadores (ROQUE; CARVALHO, 2012).

O estudo crítico sobre a matemática dos pitagóricos deixou uma lacuna na história da matemática desse período. Se o matemático mais conhecido do século V antes de Cristo, Hipócrates de Quios, não era herdeiro de Pitágoras, de onde veio sua matemática? As evidências mostram que havia uma matemática grega antes dos pitagóricos. Em meados desse século, tal prática parecia estar no centro dos interesses dos principais pensadores, pois muitos deles se conectavam com questões matemáticas, caso de Anaxágoras, Hípias e Antifonte. Parece que era comum a construção de soluções para problemas geométricos e a comparação de grandezas geométricas por meio de razões (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Em Atenas, a geometria era ensinada, apesar de não sabermos exatamente como. Nos diálogos de Platão, há algumas evidências da existência de um ambiente de discussão sobre os problemas geométricos que data de uma época anterior à sua obra. Um exemplo são os diálogos entre Sócrates e Teodoro, que era contemporâneo de Hipócrates e de quem Teeteto, importante personagem dos textos de Platão, deve ter sido aluno. Devia tratar-se, contudo, de um ensino em círculos privados e não institucional (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Pitágoras elaborou um método que utilizava os números para representar qualidades e ideias abstratas. Por exemplo, o número 1 era visto como símbolo da unidade, o princípio básico de todas as coisas. O número 2 representava a dualidade e o contraste. O número 3 simbolizava a harmonia e a totalidade, pois era considerado a soma do 1 e do 2. Acreditava que uma mente purificada podia entrar em contato com esse conhecimento simbólico e divino contido nos números. Nas Escolas de Conhecimento que fundou, Pitágoras, desenvolveu não só uma teoria de conhecimento sobre os números, mas também um sistema de vida, com rituais de purificação e iniciações que preparassem seus discípulos para se colocarem em harmonia com os números e compreendê-los (SANTOS; OZGA, 2013).

A teoria dos números desenvolvida por eles e a matemática abstrata, associada à geometria, estavam em dois planos distintos: “tudo é número” não significava “todas as grandezas são comensuráveis”. A tese de que “tudo é número” não se traduz na crença de que todas as grandezas podem ser comparadas por meio de números, uma vez que o problema geométrico da comparação de grandezas parecia não fazer parte do pensamento

pitagórico (ROQUE; CARVALHO, 2012).

A afirmação de que a descoberta da incomensurabilidade produziu uma crise nos fundamentos da matemática grega foi consolidada por trabalhos de historiadores da primeira metade do século XX. De acordo com Tatiane Roque (2012), P. Tannery já havia afirmado que tal descoberta significou um escândalo lógico na escola pitagórica do século V antes de Cristo. Sendo mantida em segredo inicialmente, até que, ao se tornar conhecida, teve como efeito desacreditar o uso das proporções na geometria (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Um dos artigos mais influentes a propalar a ocorrência de uma crise foi “Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik” (A crise dos fundamentos da matemática grega), de Hasse e Scholz, publicado em 1928, que fazia referência somente à possibilidade de ter havido uma crise dos fundamentos da matemática grega. Esses autores também são responsáveis por associar esse problema aos paradoxos de Zenão, neste paradoxo, Zenão argumenta que Aquiles, um corredor rápido, nunca poderia ultrapassar uma tartaruga em uma corrida, mesmo que lhe desse uma grande vantagem inicial. relação desmentida há tempos.

O problema da incomensurabilidade parece ter surgido no seio da própria matemática, mais precisamente da geometria, sem a relevância filosófica que lhe é atribuída. Ao contrário da célebre lenda, os historiadores citados, como Burkert e Knorr, contestam até mesmo que essa descoberta tenha representado uma crise nos fundamentos da matemática grega. Não se encontra alusão a escândalo em nenhuma passagem dos escritos a que temos acesso e que citam o problema dos incomensuráveis, como os de Platão ou Aristóteles (LEAO, 2019).

Aristóteles não cita o problema dos incomensuráveis nem mesmo em sua crítica aos pitagóricos. A descoberta da incomensurabilidade representou uma nova situação que motivou novos desenvolvimentos matemáticos. Logo, não seriam exatamente as lacunas nos fundamentos da matemática que teriam sido resolvidas com a definição dos números irracionais, como se diz muitas vezes. Esse modo de ver as coisas é típico do século XIX e bem diferente do que movia o mundo grego (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Entre os Pitagóricos, ninguém teve tanto destaque quanto Pitágoras, cuja existência, para seus seguidores, não refletia mais a imagem humana, mas sim a de um deus. Pitágoras considerava o número como o princípio formador do universo; no entanto, acreditava que o número constituía-se do acordo entre um elemento indeterminado ou ilimitado e outro determinante ou limitante e, a partir daí, tinham origem todas as coisas (DUARTE; GONCALVES; NOBREGA,).

A Escola Pitagórica considerava os números ímpares como “masculinos” e os pares como “femininos”, a partir da concepção de sua estrutura (ANTISERI, 2002). Para os

pitagóricos, a estruturação dos números partia do pressuposto de que nos números pares predominava o elemento indeterminado, e nos ímpares o elemento limitante. Por esse motivo, eles tinham os números ímpares como perfeitos, pois, na sua distribuição, esses números sempre possuíam um elemento limitante. Os pitagóricos demonstraram tal pensamento a partir de uma distribuição numérica, conforme se pode ver mais claramente na Figura 4 (DUARTE; GONCALVES; NOBREGA,).

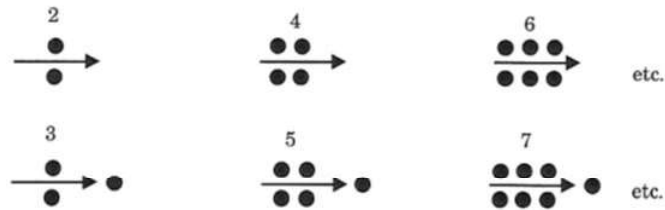


Figura 4: Distribuição dos Números.

Fonte: (DUARTE; GONCALVES; NOBREGA,).

Em relação às formas geométricas, para os pitagóricos, os números pares eram vistos como “retangulares”, pelo motivo de que, se se dispusessem dois elementos num plano e, ao seu redor, se acrescentassem quantidades pares de elementos, obtinha-se um retângulo. Enquanto os ímpares formavam quadrados, resultado da repetição do mesmo procedimento anterior, porém, neste caso, utilizando-se apenas um elemento e, ao seu redor, acrescentando-se quantidades ímpares. Está configuração esta mostrada nas Figuras 5 e 6.

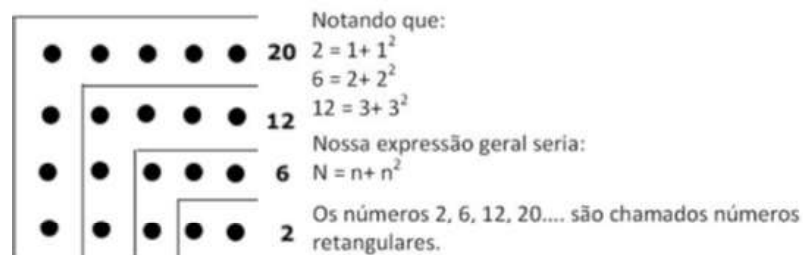


Figura 5: Representação geométrica dos números pares.

Fonte: (DUARTE; GONCALVES; NOBREGA,).

O número 10 era considerado perfeito pelos pitagóricos, dada sua distribuição numérica visualmente organizada, formando um triângulo perfeito, com a mesma quantidade de elementos em seus lados eles chamavam de a tetraktys, demonstrado na Figura 7.

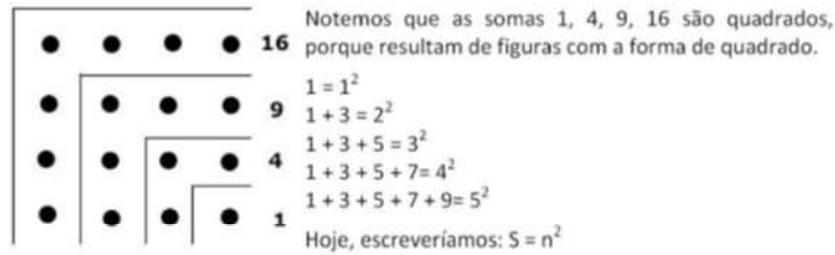


Figura 6: Representação geométrica dos números ímpares.

Fonte: (DUARTE; GONCALVES; NOBREGA,).

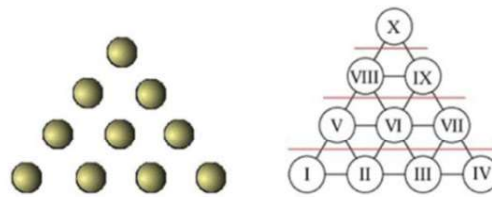


Figura 7: Representação do Triângulo perfeito: A Tetraktys.

Fonte: (DUARTE; GONCALVES; NOBREGA,).

Com o aprofundamento de suas teorias, os pitagóricos desenvolveram a ideia de que os números originavam-se a partir de aglomerações de unidades, surgindo, assim, a teoria dos números figurados, a qual atribui a cada número, determinadas características que os diferenciavam uns dos outros. Eles observaram que os números figurados possuíam distribuições poligonais bem definidas, chegando a dividi-los da seguinte maneira, a saber: lineares, planos ou (triangulares), quadrados, pentagonais, hexagonais etc. Esses números eram obtidos a partir de um processo de construção que tinha a seguinte organização composicional conforme nos mostra (ALMEIDA, 2003):

1. O primeiro número é sempre a unidade ou, dito de outra maneira, a unidade é o princípio gerador desses números.
2. A unidade se subdivide de algum modo (pela “inalação do vazio”?), gerando a primeira figura ou forma: triângulo, quadrado ou pentágono. Essa primeira forma é o que caracteriza o número: triangular, quadrado, pentagonal, poligonal (plano), piramidal (sólido) etc.
3. Essa forma, pela agregação de um gnômon, gera o próximo número figurado. Gnômon é a parte do relógio solar que possibilita a projeção da sombra. O gnômon é a lâmina triangular neste relógio de sol.

Para os Pitagóricos, o crescimento gnomônico dos números figurados se dava pelo acréscimo de números ímpares a números quadrados. Com isso, eles observaram que, após haver essa adição, os números quadrados mantinham suas características iniciais de constituição inalteradas, ou seja, preservavam-se quadrados (ALMEIDA, 2003).

1. Limitado - Ilimitado
2. Impar - Par
3. Um - Múltiplo
4. Direita - Esquerda
5. Macho - Fêmea
6. Parado - Em movimento
7. Reto - Curvo
8. Luz - Trevas
9. Bom - Mau
10. Quadrado - Retângulo

Tabela 1: Tábua dos Dez contrário. Fonte: Autoria própria.

Além de uma distribuição poligonal, os pitagóricos notaram que os números apresentavam um crescimento espacial, utilizando o princípio do crescimento gnomônico como base, originando os números sólidos, sendo classificados, de maneira distinta, da seguinte forma: piramidal, formado pela sobreposição de números triangulares (1, 3, 6, ...), por exemplo; os cúbicos, obtidos por meio de três números iguais (2, 2, 2); os escalenos, compostos por três números diferentes (1, 4, 7); e os paralelepipedais com formas variadas, adquiridos através das expressões como $n(n+1)$, $m^2(m+n)$, entre outras maneiras (ALMEIDA, 2003).

A Escola Pitagórica afirmava que o número não era apenas o elemento formador dos objetos físicos e reais mas estava presente, também, na formação dos seres vivos e do próprio homem, como os fenômenos atmosféricos, os corpos celestes e os movimentos que existiam e ganhavam forma devido aos números. Durante muito tempo, alguns pitagóricos buscavam combinar a ideia das décadas com a dos “contrários”, tendo assim contribuído grandemente na cosmologia jônica, onde buscava-se explicar a origem e a natureza do universo (ALMEIDA, 2003).

O quadro 1 apresenta um exemplo de tais contribuições com Aristóteles, um dos pitagóricos que criou a tábua dos dez contrários, na qual expressa de forma resumida os pensamentos acerca das contrariedades por ela determinada.

Portanto, ao longo deste capítulo, abordou-se as diferentes perspectivas e teorias sobre as tentativas de Pitágoras na explicação de tudo através dos números. Por meio da Escola Pitagórica, local onde nasceram as primeiras tentativas, plenamente racionais, de descrição e explicação da natureza do mundo, Pitágoras deu significado ao universo.

Capítulo 3

Os números figurados na matemática pitagórica

O termo “neopitagórico” se refere a um movimento filosófico e religioso que surgiu após a era clássica do pitagorismo, inspirado nos ensinamentos e ideias atribuídos a Pitágoras e seus seguidores. Os neopitagóricos buscaram reviver e reinterpretar os ensinamentos pitagóricos, adaptando-os às suas próprias épocas e contextos históricos.

A noção de número figurado é completamente estranha à tradição euclidiana. Entre os gregos, ela é exposta pelo neopitagórico Nicómaco de Gerasa, na sua introdução à Aritmética (STRUIK, 1992). Os Números Figurados são números com propriedades especiais que geralmente são usados em matemática e ciência. Alguns exemplos populares de Números Figurados são o Triângulo de Pitágoras, o Quadrado Mágico, o Cubo Mágico e os Números de Fibonacci. Estes números contêm propriedades interessantes que permitem aos matemáticos e cientistas estudarem e compreender melhor as interações entre os números. Além disso, os Números figurados também são usados como base matemática para muitos jogos e quebra-cabeças. Os Números Figurados também são frequentemente usados na criação de esquemas e gráficos para ajudar a representar informações visuais.

3.1 Os números triangulares, quadrados e pentagonais

Números figurados são números que podem ser representados por uma coleção de pontos numa configuração geométrica. Conhecidos desde a antiguidade pelos gregos e revivenciado por eles, tais números e suas disposições geométricas são incrivelmente ricos em propriedades de vários tipos. Veremos abaixo a representação dos três mais conhecidos números figurados. A lista dos seis primeiros números triangulares:

Primeiro : 1

Segundo : $1 + 2 = 3$

Terceiro : $(1 + 2) + 3 = 3 + 3 = 6$

Quarto : $(1 + 2 + 3) + 4 = 6 + 4 = 10$

Quinta : $(1 + 2 + 3 + 4) + 5 = 10 + 5 = 15$

Sexto : $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 6 = 15 + 6 = 21$

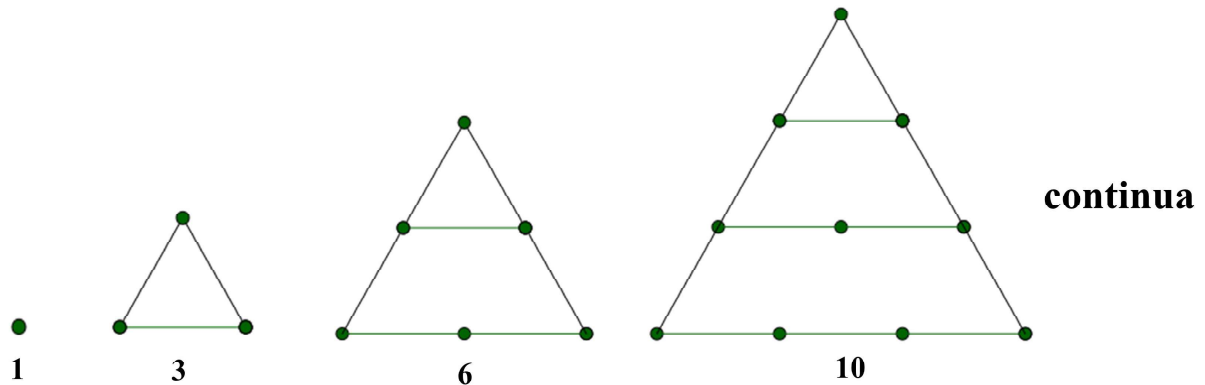


Figura 8: Números triangulares de Pitágoras.
Fonte: Autoria Própria.

A sequência de números mostrada Figura 8 , chamada de números triangulares, inicia-se com um ponto. Depois acrescenta-se mais dois pontos formando um triângulo equilátero, quando ligado ao ponto já existente. Do triângulo construído anteriormente, acrescenta-se mais três pontos, formando assim um triângulo maior que no total possui 6 pontos, ou seja, cada número representa a quantidade de pontos que formam triângulos equiláteros. Logo, os números triangulares são 1, 3, 6, 10, 15, e assim sucessivamente.

Percebemos que cada termo de ordem n é a soma do termo anterior com n . Sendo assim os números triangulares de ordem n de t_n , podem ser escrito da seguinte maneira:
 $T_n = T_{n-1} + n$, com:

$$\begin{array}{rclcl}
 T_1 & = & & & 1 \\
 T_2 & = & T_1 & + & 2 \\
 T_3 & = & T_2 & + & 3 \\
 T_4 & = & T_3 & + & 4 \\
 T_5 & = & T_4 & + & 5 \\
 \vdots & = & \vdots & + & \vdots \\
 T_n & = & T_{n-1} & + & n
 \end{array}$$

Somando as igualdades acima, membro a membro, segue-se que:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n. \quad (3.1)$$

Demonstração Por Indução

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n. \quad (3.2)$$

Passo Base: Primeiro, vamos verificar se a fórmula se aplica para o caso base, que é $n = 1$. Nesse caso, temos $T_1 = 1$. E, de fato, a soma dos números naturais consecutivos de 1 é 1. Portanto, a fórmula é válida para $n = 1$.

Passo de Indução: Agora, vamos supor que a fórmula seja verdadeira para um número k qualquer, ou seja, supomos que:

$$T_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k. \quad (3.3)$$

Precisamos demonstrar que a fórmula também é verdadeira para o próximo número, $k + 1$. Ou seja, precisamos mostrar que:

$$T_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1. \quad (3.4)$$

Podemos escrever T_{k+1} como a soma dos números naturais consecutivos de 1 até $k + 1$. Usando a hipótese de indução, temos:

$$T_{k+1} = T_k + (k+1) = 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1). \quad (3.5)$$

Agora vamos simplificar a expressão:

$$T_{k+1} = (1+2+3+\dots+k)+(k+1) = 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1). \quad (3.6)$$

Observamos que o último termo $(k + 1)$ é o próximo número natural consecutivo após k . Portanto, podemos reescrever a expressão acima como:

$$T_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1. \quad (3.7)$$

Assim, mostramos que a fórmula é válida para $k + 1$.

Portanto, pelo princípio da indução, podemos concluir que a fórmula é válida para todos os números naturais. Assim, a soma dos números naturais consecutivos até o número n pode ser representada como

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n. \quad (3.8)$$

Onde T_n é n -ésimo número triangular.

Diante disso, encontra-se o termo geral da sequência de números triangulares, dado por:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (3.9)$$

Além dos números triangulares, os números figurados também possuem os números quadrangulares, os quais encontram-se apresentados na Figura 9.

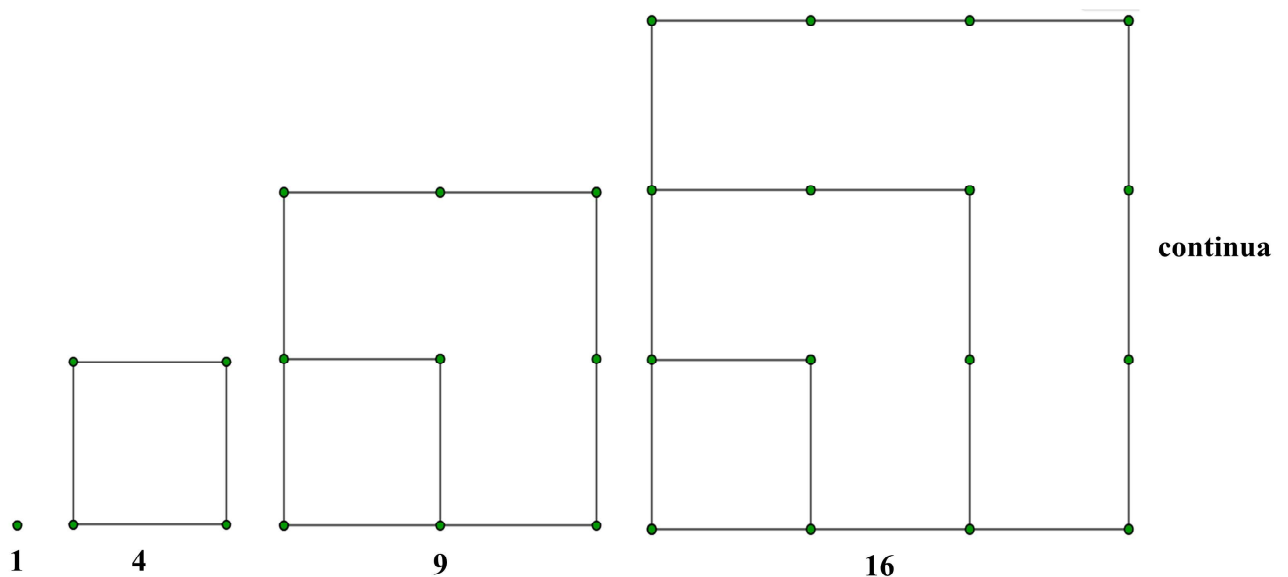


Figura 9: Números quadrangulares de Pitágoras.
Fonte: Autoria Própria.

A sequência dos números mostrada na Figura 9, inicia-se com um ponto, como os números triangulares, depois acrescenta-se mais três pontos formando um quadrado, quando ligado ao ponto já existente. Do quadrado construído anteriormente, acrescenta-se mais cinco pontos, formando assim um quadrado maior que no total possui 9 pontos. E depois no quadrado de 9 pontos, acrescenta-se mais 7 pontos. Ou seja, sempre acrescenta-se o próximo número ímpar da seguinte maneira: $Q_1 = 1$; $Q_2 = 1+3 = 4$; $Q_3 = 1+3+5 = 9$; ... e assim sucessivamente.

Note que cada termo de ordem n é a soma do termo anterior com um número ímpar de ordem n . Denominamos números quadrados de ordem n de q_n , escrito da seguinte maneira: $Q_n = Q_{n+1} + (2n - 1)$, sendo $Q_0 = 0$, com:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 1 \\
Q_2 &= Q_1 + 3 \\
Q_3 &= Q_2 + 5 \\
Q_4 &= Q_3 + 7 \\
Q_5 &= Q_4 + 9 \\
\vdots &= \vdots + \vdots \\
Q_n &= Q_{n-1} + (2n - 1) \\
Q_n &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).
\end{aligned}$$

Demonstração Por Indução

$$Q_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1). \quad (3.10)$$

Passo Base: Vamos verificar se a fórmula se aplica para o caso base, que é $n = 1$. Nesse caso, temos $Q(1) = 1$. E, de fato, a soma do primeiro número ímpar consecutivo é igual a 1. Portanto, a fórmula é válida para $n = 1$.

Passo de Indução: Agora, vamos supor que a fórmula seja verdadeira para um número k qualquer, ou seja, supomos que

$$Q_k = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1). \quad (3.11)$$

Precisamos demonstrar que a fórmula também é verdadeira para o próximo número, $k + 1$. Ou seja, precisamos mostrar que

$$Q_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2(k + 1) - 1). \quad (3.12)$$

Podemos escrever Q_{k+1} como a soma dos primeiros $(k + 1)$ números ímpares consecutivos. Usando a hipótese de indução, podemos escrever:

$$Q_{k+1} = Q_k + (2(k+1) - 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1). \quad (3.13)$$

Agora, vamos simplificar a expressão:

$$\begin{aligned}
Q_{k+1} &= (1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)) + (2(K + 1) - 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + \\
&\quad (2k - 1) + (2k + 1). \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Observamos que o último termo $(2k + 1)$ é o próximo número ímpar consecutivo após $(2k - 1)$. Portanto, podemos reescrever a expressão acima como:

$$Q_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1). \quad (3.15)$$

Assim, mostramos que a fórmula é válida para $k + 1$.

Portanto, pelo princípio da indução, podemos concluir que a fórmula

$$Q_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1). \quad (3.16)$$

representa a soma dos primeiros n números ímpares consecutivos.

Diante disso, encontra-se o termo geral da sequência de números quadrangulares dada por:

$$Q_n = \frac{n(1 + (2n - 1))}{2} = \frac{n \cdot (2n)}{2} = n^2.$$

Deste modo, obtém-se um quadrado de ordem n utilizando exclusivamente os números ímpares de 1 até o n -ésimo número ímpar,

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) \quad (3.17)$$

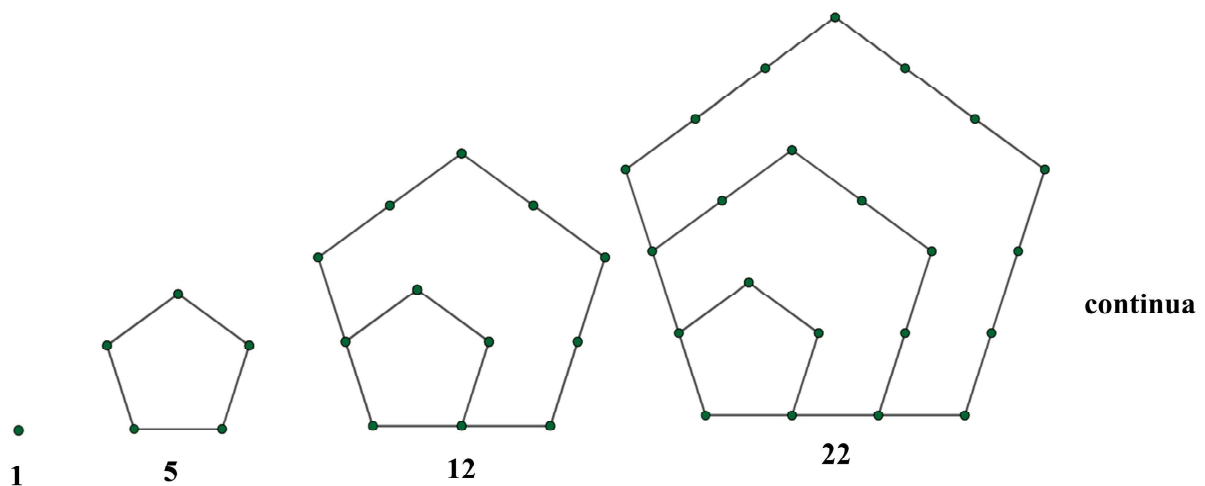


Figura 10: Números Pentagonais de Pitágoras.

Fonte: Autoria Própria.

Os números figurados possuem também os números pentagonais, os quais encontram-se apresentados em 10. Essa sequência inicia-se com um ponto, da mesma forma das sequências anteriores. Depois acrescenta-se mais quatro pontos formando um pentágono, quando ligado ao ponto já existente. Do pentágono construído anteriormente, acrescenta-se mais sete pontos, formando assim um pentágono maior, que no total possui 12 pon-

tos. Em seguida no pentágono de 12 pontos, acrescenta-se mais 10 pontos, formando assim um pentágono de 22 pontos, escrito da seguinte maneira: $P_1 = 1$; $P_2 = 1 + 4 = 5$; $P_3 = 1 + 4 + 7 = 12$; $P_4 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22$; ... e assim sucessivamente. Nesta sequência, cada termo de ordem n é a soma do anterior com um dos números da P.A. $(1, 4, 7, 10, 13, \dots, 3n - 2, \dots)$ de ordem n , obtem-se desta forma os números poligonais pentagonais de ordem n de P_n , escrevendo-os da seguinte maneira: $P_n = P_{n-1} + 3n - 2$, com:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= && 1 \\
 P_2 &= &P_1 &+ &4 \\
 P_3 &= &P_2 &+ &7 \\
 P_4 &= &P_3 &+ &10 \\
 P_5 &= &P_4 &+ &13 \\
 \vdots &= &\vdots &+ &\vdots \\
 P_n &= &P_{n-1} &+ &(3n - 2) \\
 P_n &= &1 &+ &4 &+ &7 &+ &\dots &+ &(3n - 2).
 \end{aligned}$$

Demonstração Por Indução

$$P_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2). \quad (3.18)$$

Passo Base: Vamos verificar se a fórmula se aplica para o caso base, que é $n = 1$. Nesse caso, temos $P(1) = 1$. E, de fato, a soma do primeiro número pentagonal consecutivo é igual a 1. Portanto, a fórmula é válida para $n = 1$.

Agora, vamos supor que a fórmula seja verdadeira para um número k qualquer, ou seja, supomos que

$$P_k = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2). \quad (3.19)$$

Precisamos demonstrar que a fórmula também é verdadeira para o próximo número, $k + 1$. Ou seja, precisamos mostrar que

$$P_{k+1} = 1 + 4 + 7 + \dots + (3(k - 1) - 2). \quad (3.20)$$

Podemos escrever P_{k+1} como a soma dos primeiros $(k + 1)$ números pentagonais conse-

cutivos. Usando a hipótese de indução, podemos escrever:

$$P_{k+1} = P_k + (3(k+1) - 2) = (1 + 4 + 7 + \dots + (3k-2)) + (3(k+1) - 2). \quad (3.21)$$

Agora, vamos simplificar a expressão:

$$P_{k+1} = (1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + (3(k+1) - 2)) = (1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + (3k + 1)). \quad (3.22)$$

Portanto, pelo princípio da indução, podemos concluir que a fórmula $P(n) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)$ representa a soma dos primeiros n números pentagonais consecutivos.

Observamos que o último termo $(3k + 1)$ é o próximo número pentagonal consecutivo após $(3k - 2)$. Portanto, podemos reescrever a expressão acima como:

$$P_{k+1} = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + (3k + 1). \quad (3.23)$$

Assim, mostramos que a fórmula é válida para $k + 1$. Portanto, pelo princípio da indução, podemos concluir que a fórmula

$$P_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2). \quad (3.24)$$

Representa a soma dos primeiros números pentagonais consecutivos.

Diante disso, encontra-se o termo geral da sequência de números pentagonais, dada por:

$$P_n = \frac{n \cdot (1 + (3n - 2))}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}. \quad (3.25)$$

Estas três sequências numéricas que envolve figuras geométricas com a aritmética não são as únicas existentes. Todavia, nesse trabalho utiliza-se apenas as sequências numéricas apresentadas.

Portanto, os pitagóricos desejavam compreender por completo a natureza dos números, para isso examinaram vários relacionamentos, dentre eles propuseram um paralelo com figuras planas, com os números figurados, números estes vistos neste capítulo expressos a partir de determinada configuração geométrica, examinando-se a quantidade de pontos na figura que representa o número, com vários agrupamentos em formas geométricas sugestivas. Em suma, neste capítulo explorou-se as diferentes abordagens dos números figurados, em especial, números triangulares, quadrados e pentagonais com a apresentação de algumas demonstrações.

Capítulo 4

Os ternos pitagóricos

4.1 O Teorema de Pitágoras

Há provas concretas que os babilônios antigos conheciam o Teorema de Pitágoras. Muitos dos tabletes de barro, que datam de 1800 a 1600 a. C., que foram encontrados e decifrados evidenciam este fato. Um deles, chama-se Plimpton 322, e encontra-se atualmente na Universidade de Columbia. É considerada uma das mais famosas e enigmáticas relíquias matemáticas da antiguidade. Ela contém uma tabela de números escritos em escrita cuneiforme, um sistema de escrita usado pelos antigos sumérios e babilônios. A tabela consiste em quinze colunas e quatro linhas de números. Os números são organizados em pares pitagóricos, o que significa que os quadrados dos primeiros números em cada par somam-se aos quadrados dos últimos números em cada par. Essa propriedade pitagórica torna a tabuleta particularmente interessante (RIBEIRO, 2017).



Figura 11: Placa babilônica Plimpton 322.
Fonte: (ESTRADA, 1993).

O conteúdo presente na referida tabela constitui-se de números onde a primeira coluna da extrema direita estão os números que representam a quantidade de linhas que

seguem de um a quinze com o propósito de reconhecimento da ordem dos elementos nas outras três colunas que se segue, onde essas três restantes representam os lados de triângulos, considerando um triângulo retângulo (BOYER, 1996).

Na Tábua de Plimpton, por exemplo, os números na primeira linha são obtidos partindo de $p = 12$ e $q = 5$, com valores correspondentes $a = 119$ e $b = 120$ e $c = 169$. Os valores de a e c são exatamente os que encontram-se na segunda e terceira posição a partir da esquerda na primeira linha da tabela (BOYER, 1996). Note que $b = 2pq$, $a = p^2 - q^2$ e $c = p^2 + q^2$.

	a	b	c
Linha 1	119	120	169
Linha 2	3367	3456	4825
Linha 3	4601	4800	6649
Linha 4	12709	13500	18541
Linha 5	65	72	97
Linha 6	319	360	481
Linha 7	2291	2700	3541
⋮	⋮	⋮	⋮
Linha 15	56	90	106

Tabela 2: Ternos Pitagóricos.

Fonte: Adaptada de (COSTA, 2018).

Na linha 1, os números pitagóricos foram encontrados da seguinte forma: $b = 2 \times 12 \times 5 = 120$, $a = 12^2 - 5^2 = 119$ e $c = 12^2 + 5^2 = 169$. A fórmula geradora dos ternos Pitagóricos descritos na tábua de Plimpton 322 é dada por $(2pq, p^2 - q^2, p^2 + q^2)$ desenvolvida por Euclides. Sabe-se que os egípcios já utilizavam a relação, $3^2 + 4^2 = 5^2$, quando necessitavam obter ângulos retos durante a construção de suas pirâmides, considerando que a base é um quadrado. Eles faziam 13 nós equidistantes em uma corda, criando 12 intervalos de mesmo comprimento. Por conseguinte, uniam o primeiro nó com o décimo terceiro, e marcavam o quarto e o oitavo nós com estacas, formando assim, um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, como mostra a Figura 12, (BIGODE, 2013).

Os ternos pitagóricos representam um conceito matemático o qual descreve relações entre três números inteiros. Esses três números são chamados de um terno pitagórico. Esses ternos obedecem a seguinte regra matemática: o quadrado do maior dos três números deve ser igual à soma dos quadrados dos outros dois números. Esta é a famosa equação pitagórica (ASSIS, 2020).

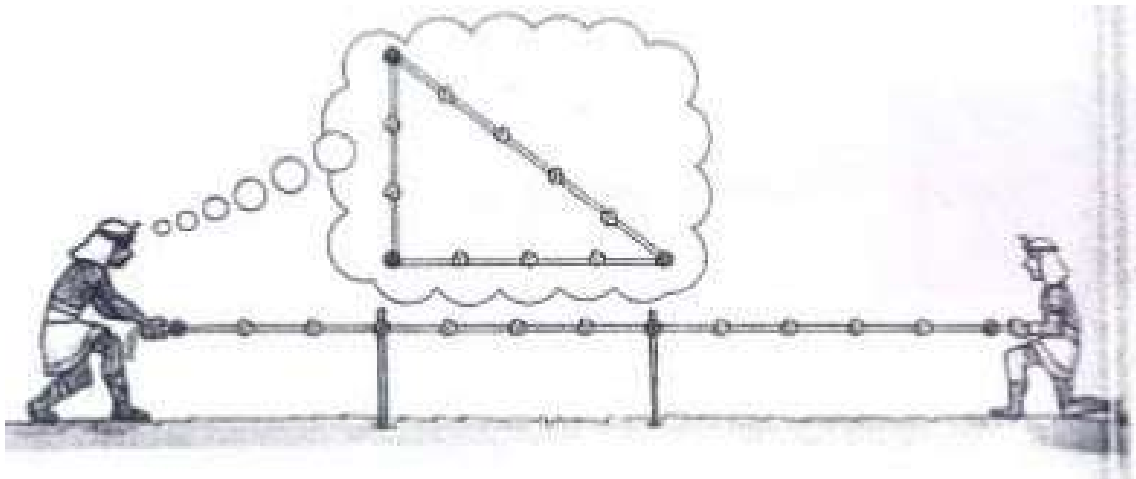


Figura 12: Construção de triângulos retângulos com cordas pelos egípcios.
Fonte: (BIGODE, 2013).

Durante toda a história antiga e mesmo até hoje, temos curiosidade em encontrar triângulos retângulos cujos lados são medidos por números inteiros. Todos nós sabemos que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo, mas você sabia que o triângulo de lados 372, 925 e 997 é retângulo? Possivelmente não, Este é inclusive o triângulo retângulo de maior perímetro que tem lados menores que 1 000 (WAGNER, 2009).

Será que existe alguma maneira de encontrar triângulos retângulos com medidas inteiras? Sendo a , b e c inteiros positivos com $b < c < a$ dizemos que (b, c, a) é um terno pitagórico se $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$ são exemplos de ternos pitagóricos. Um terno pitagórico (b, c, a) é chamado primitivo, quando b e c são primos entre si, ou seja, quando $\text{mdc}(b, c) = 1$. Assim, $(3, 4, 5)$ é um terno pitagórico primitivo. Naturalmente, qualquer terno da forma $(3k, 4k, 5k)$ com k inteiro e maior que 1 é também pitagórico, mas não primitivo (ASSIS, 2020).

Sendo m e n inteiros positivos com $m > n$ considere: $b = m^2 - n^2$, $c = 2mn$, $a = m^2 + n^2$. Veja que (b, c, a) é um terno pitagórico pois:

$$b^2 + c^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2 = a^2. \quad (4.1)$$

Assim, para qualquer escolha de números inteiros m e n , o terno (b, c, a) é pitagórico. Por exemplo, para $m = 7$ e $n = 4$ tem-se o terno pitagórico $(33, 56, 65)$. Observe que, se nesta fórmula você atribui para m e n valores ambos pares ou ambos ímpares, encontra-se um terno pitagórico não primitivo, dado que todos os termos do terno serão pares. Se a escolha de m e n conduzir a valores de b e c que sejam primos entre si, obtém-se um terno pitagórico primitivo (WAGNER, 2009).

4.2 Triângulos Pitagóricos

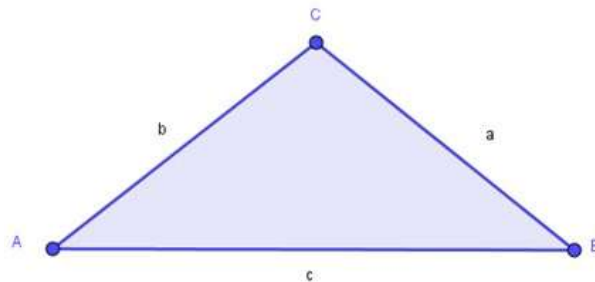


Figura 13: Triângulo.
Fonte: Autoria própria.

Triângulo é a figura plana formada pela união de três segmentos com extremidades em três pontos não colineares (JUNIOR, 1988), como mostrado em 13.

Existem três tipos de triângulos: equilátero, isósceles e escaleno. como mostrado na Figura 14.

O triângulo equilátero possui três lados iguais e três ângulos internos iguais a 60 graus.

O triângulo isósceles possui dois lados iguais e dois ângulos internos congruentes.

O triângulo escaleno possui três lados e três ângulos internos diferentes.

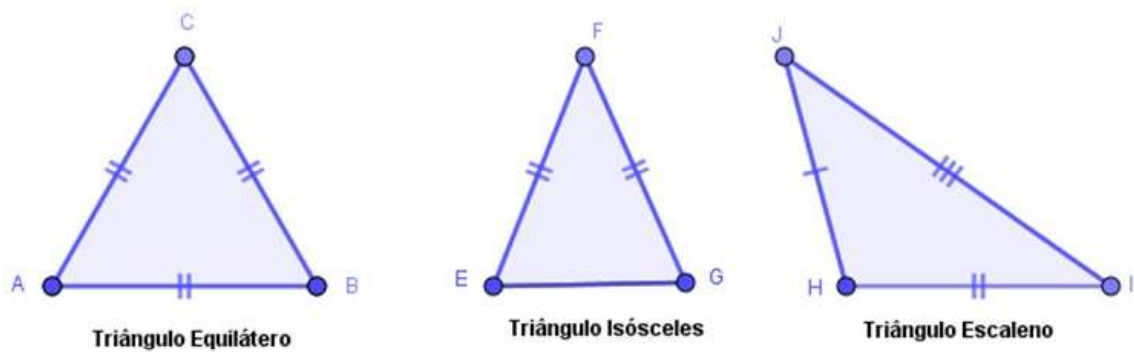


Figura 14: O triângulo e suas classificações.
Fonte: Autoria própria.

4.3 Semelhança de Triângulos

Seja S uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência S é uma semelhança, e dizemos que os triângulos são semelhantes (JUNIOR, 1988).

Consideremos os triângulos ABC e DEF como na Figura 15.

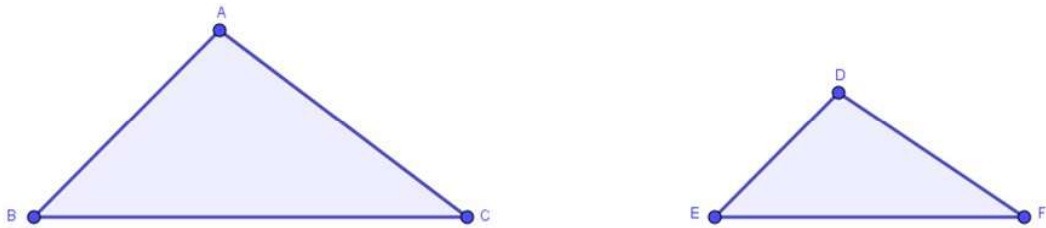


Figura 15: Semelhança de triângulos.
Fonte: Autoria própria.

Pode-se escrever $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ para denotar que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF , com a correspondência que leva A em D , B em E , e C em F . Desta maneira, se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ temos $m\hat{A} \equiv m\hat{D}$, $m\hat{B} \equiv m\hat{E}$, $m\hat{C} \equiv m\hat{F}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{DF}$.

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade ou razão de semelhança entre os dois triângulos. Observe que, se dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança igual a um, então eles são congruentes.

4.4 Teoremas fundamentais

Teorema 1. Se uma reta corta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão, então ela é paralela ao terceiro lado.

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer como mostrado na Figura 16. Consideremos a reta DE onde D é um ponto entre A e B , e E um ponto entre A e C , com

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Seja $\overleftrightarrow{DE'}$ a reta passando por D , paralela a \overleftrightarrow{BC} e interseccionando \overleftrightarrow{AC} no ponto E' . Pelo Teorema fundamental da proporcionalidade, sabe-se que uma reta paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão logo, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE'}$ e, portanto, $AE' = AC \frac{AD}{AB}$. Mas, por hipótese, tem-se $AE = AC \frac{AD}{AB}$. Portanto $AE' = AE$. Logo, $E = E'$ e \overleftrightarrow{DE} é paralela a \overleftrightarrow{BC} . ■

Teorema 2. (Teorema Fundamental da Proporcionalidade) Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e corta os outros dois lados, então ela os divide

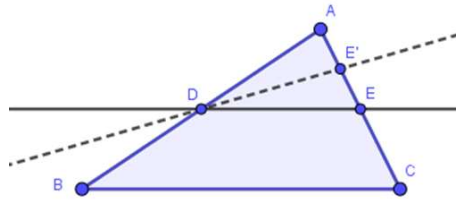


Figura 16: Triângulo qualquer.
Fonte: Autoria própria.

na mesma razão.

Teorema 3. (Teorema de Tales) Se duas retas são transversais a um conjunto de retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes da outra.

Colorário 1. Se um triângulo tem dois pares de ângulos correspondentes congruentes, o terceiro ângulos correspondentes tem também essa propriedade.

O Teorema de Semelhança L.A.L (Lado, Ângulo e Lado).

Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\hat{A} \cong \hat{D}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Demonstração. Consideremos os triângulos ABC e DEF satisfazendo as hipóteses do teorema como mostrado na Figura 17.

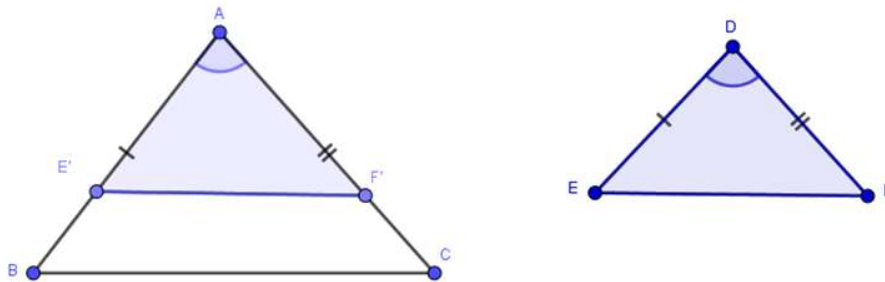


Figura 17: Primeiro caso de semelhança.
Fonte: Autoria própria.

Consideremos E' e F' pontos de \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente, tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$, tem-se $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$. Portanto, pelo teorema 1 obtemos que $\triangle AE'F' \sim \triangle DEF$ e como os triângulos tem dois pares de ângulos correspondentes congruentes, o terceiro ângulo correspondente tem também essa propriedade (Colorário 1) daí, tem-se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. ■

Teorema. (O Teorema de Semelhança Ângulo, Ângulo e Ângulo.)

Dados dois triângulos ABC e DEF , como mostrado na Figura 18, se $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Demonstração. Consideremos os triângulos ABC e DEF os quais satisfazem as hipóteses do teorema acima.

Consideremos E' e F' como pontos de AB e AC , respectivamente, tais que $AE' =$

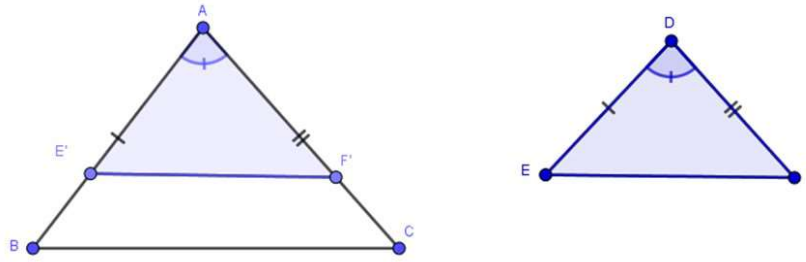


Figura 18: Segundo caso de semelhança.
Fonte: Autoria própria.

DE e $AF' = DF$. Pelo postulado L.A.L (Lado, ângulo e lado), tem-se $AE'F' \sim \triangle DEF$. Portanto, $\widehat{E} \cong \widehat{B}$. Assim, $E'F'$ e BC são paralelas ou coincidem. Se coincidem então, pelo caso de congruência A.L.A. (ângulo, lado e ângulo), tem-se $\triangle AE'F' \sim \triangle ABC$, e portanto, os triângulos ABC e DEF são congruentes; logo, $AB = DE$ e $AC = DF$, ou seja $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = 1$. Por outro lado, se $E'F'$ e BC são paralelas, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, tem-se $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$. Como $AE' = DE$ e $AF' = DF$, tem-se $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$. Analogamente, demonstra-se que $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Portanto, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. ■

O Teorema de Semelhança L.L.L.(Lado, Lado e Lado).

Se dois triângulos ABC e DEF como mostrado na Figura 19, são tais que seus lados satisfazem a relação $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Demonstração. Seja E' e F' pontos de \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente, tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$.

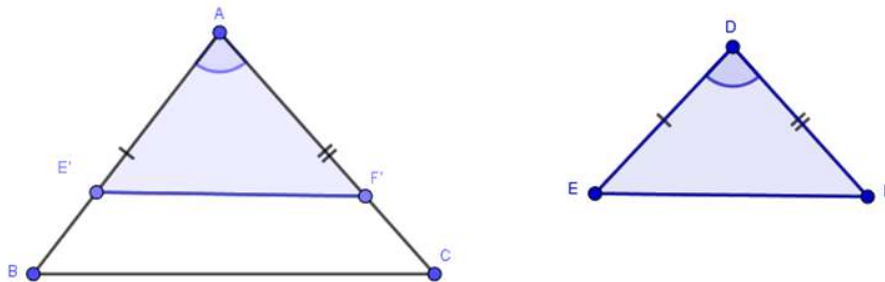


Figura 19: Terceiro caso de semelhança.
Fonte: Autoria própria.

Da hipótese decorre $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$, com uso do teorema 16, tem-se $\overleftrightarrow{E'F'}$ e \overleftrightarrow{BC} são paralelas e pelo teorema de Tales, $\widehat{B} \cong \widehat{AE'F'}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{AF'E'}$ (a). Pelo colorário A.A (ângulo, ângulo), tem-se $\triangle ABC \sim \triangle AE'F'$. Portanto, $\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$, e segue-se, $E'F' = BC \frac{AE'}{AB} = BC \frac{DE}{AB}$ (b). Mas, de acordo com a hipótese, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, ou seja, $EF = BC \frac{DE}{AB}$ (c).

De (b) e (c) segue que $E'F' = EF$. Logo, pelo Teorema L.L.L de congruência de triângulos, tem-se que $\triangle AE'F' \sim \triangle DEF$, e portanto, $\widehat{AE'F'} \cong \widehat{E}$ e $\widehat{AF'E'} \cong \widehat{F}$ (d).

Por (a) e (d) temos $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$. E, pelo corolário 1, segue o resultado.

4.4.1 Triângulo Retângulo

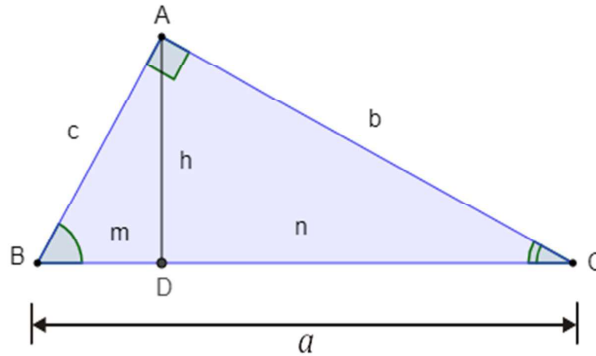


Figura 20: Triângulo retângulo.

Fonte: Autoria própria.

Chama-se triângulo retângulo, o triângulo que possui um ângulo de 90° (ângulo reto), conseqüentemente pela Lei angular de Tales (a soma dos 3 ângulos internos de qualquer triângulo é sempre equivalente a 180°) os outros dois ângulos são agudos como mostrado na Figura 20.

Elementos Considerando o triângulo ABC acima, retângulo em A, e conduzindo \overline{AD} perpendicular a \overline{BC} , com D em \overline{BC} , vamos caracterizar os elementos seguintes:

$\overline{BC} = a$: hipotenusa;

$\overline{AC} = b$: cateto;

$\overline{AB} = c$: cateto;

$\overline{BD} = m$: projeção do cateto c sobre a hipotenusa;

$\overline{CD} = n$: projeção do cateto b sobre a hipotenusa;

4.4.2 Semelhança nos Triângulos Retângulos

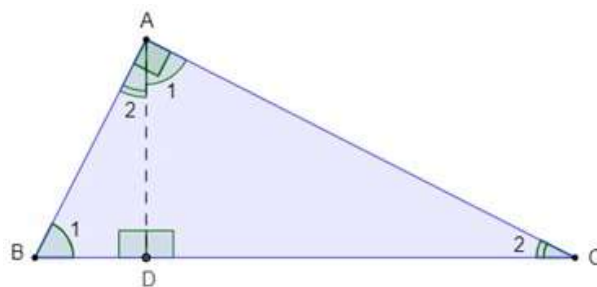


Figura 21: Casos de semelhanças.

Fonte: Autoria própria.

De fato, devido à congruência dos ângulos indicados na Figura 22, $\widehat{B} \cong \widehat{1}$ (complemento de \widehat{C}) e $\widehat{C} \cong \widehat{2}$ (complemento de \widehat{B}) tem-se na Figura 22, $\triangle ABC \sim \triangle DBA$, $\triangle ABC \sim \triangle DAC$, $\triangle DBA \sim \triangle DAC$. Visto eles têm dois ângulos congruentes.

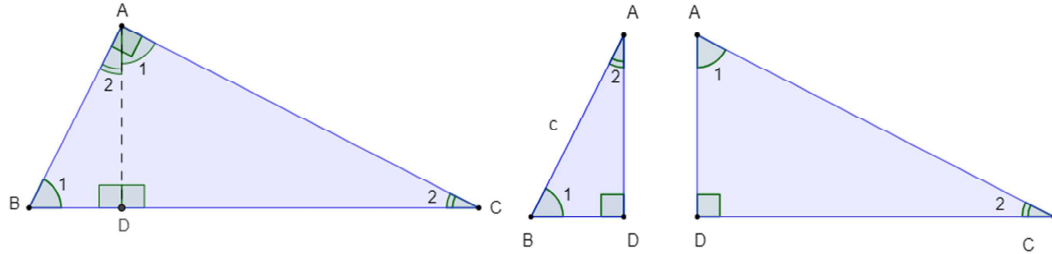


Figura 22: Casos de semelhanças no triângulo retângulo.
Fonte: Autoria própria.

Logo: $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$.

4.4.3 Relações Métricas

Com base nas semelhanças de triângulos citados no item anterior e com os elementos caracterizados, de acordo com a Figura 23,

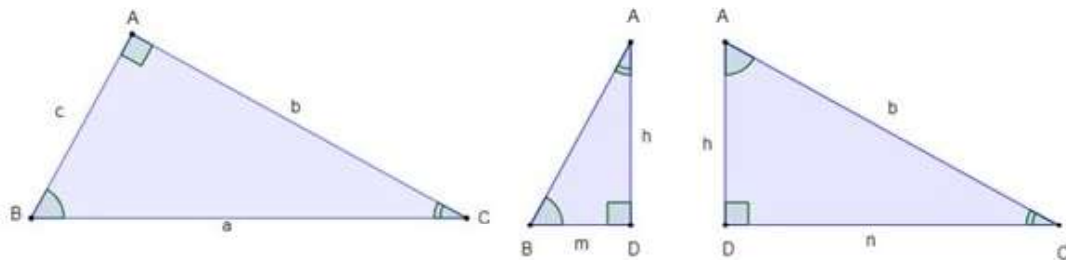


Figura 23: Triângulos retângulo Semelhantes.
Fonte: Autoria própria.

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow bc = ah. \text{ Por outro lado, } \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = am.$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = an.$$

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \rightarrow h^2 = mn.$$

Existem inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras. Apresenta-se aqui, algumas destas. Grande parte das demonstrações do Teorema de Pitágoras são geométricas, todavia, existem demonstrações que são algébrica, seguem-se algumas no capítulo seguinte desse trabalho.

Capítulo 5

Demonstrações do Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é um dos teoremas mais famosos da matemática e estabelece uma relação fundamental entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. O enunciado do teorema de Pitágoras diz o seguinte: Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Matematicamente, isso pode ser expresso da seguinte forma: Em um triângulo retângulo com hipotenusa de medida c e catetos de medidas a e b , temos: $c^2 = a^2 + b^2$.

Nessa fórmula, “ c ” representa o comprimento da hipotenusa, enquanto “ a ” e “ b ” representam os comprimentos dos catetos do triângulo retângulo.

O teorema de Pitágoras é amplamente utilizado em vários ramos da matemática e tem muitas aplicações práticas, desde a resolução de problemas de geometria até cálculos envolvendo distâncias, medidas de espaço e muito mais.

5.0.1 Demonstração por semelhança de Triângulos

Demonstração. Das relações métricas apresentada na Figura 23 sabe-se que,

$$\begin{cases} b^2 = an \\ c^2 = am \end{cases}$$

Somando ambos os membros das equações obtém-se: $b^2 + c^2 = an + am$. Colocando a em evidência temos: $b^2 + c^2 = a(m + n)$ é sabido das relações métricas que $m + n = a$, logo $c^2 + b^2 = a.a \rightarrow c^2 + b^2 = a^2$. Portanto, conclui-se que num triângulo retângulo qualquer, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. ■

5.0.2 Recíproca do teorema de Pitágoras

Se num triângulo qualquer o quadrado de um lado é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo.

Hipótese

$\triangle ABC$ em que $b^2 + c^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = 90^\circ$.

Tese

Demonstração

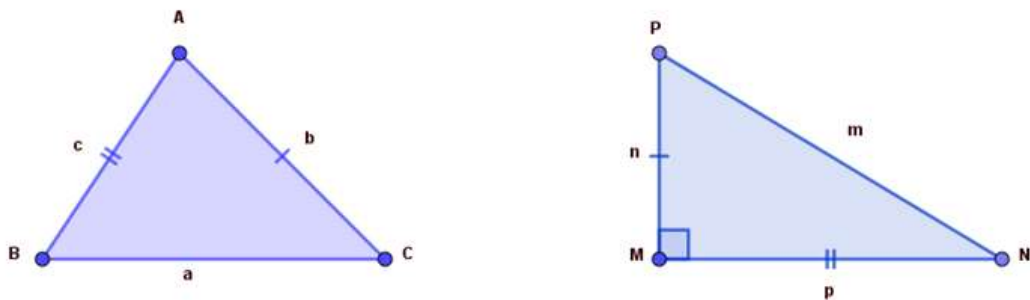


Figura 24: Figuras da demonstração.

Fonte: Autoria própria.

Construindo um triângulo auxiliar MNP , retângulo em M e cujos catetos \overline{MN} e \overline{MP} sejam congruentes, respectivamente, a \overline{AB} e \overline{AC} , como mostra na Figura 24, segue-se do $\triangle MNP$ que $m^2 = n^2 + p^2$, como $n = b$ e $p = c$, vem que $m^2 = b^2 + c^2$. Logo, $m^2 = a^2$, ou seja, $m = a$. Então pelo caso LLL (lado, lado, lado), $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$ e, como $\triangle MNP$ é retângulo em M , o $\triangle ABC$ é retângulo em A . ■

5.0.3 Demonstração do Presidente

A demonstração conhecida por "Demonstração do presidente" é de Abram Garfield (1831 - 1881), presidente dos Estados Unidos durante apenas 4 meses, até ser assassinado em 1881, ele gostava muito de matemática. A ideia resume-se em considerar um trapézio de bases b e c e altura $b+c$ e decompor este trapézio em três triângulos, conforme a Figura 25. A partir disso, pode-se demonstrar a relação de Pitágoras.

Demonstração

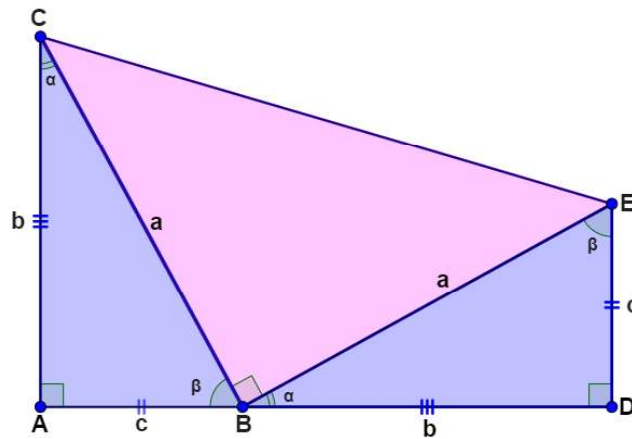


Figura 25: Trapézio.
Fonte: Autoria própria.

Sejam dois triângulos ABC e BDE congruentes e retângulos nos vértices A e D respectivamente. Sejam ainda, colineares os pontos A , B e D , assim $\overline{AC} = \overline{BD}$ que denotaremos por b e $\overline{AB} = \overline{DE}$ que denotaremos por c . Tracemos, também O segmento \overline{CE} conforme a figura acima.

Considere um trapézio de base menor c , base maior b , e altura $b+c$. Seguindo essa construção, podemos decompor o trapézio em três triângulos, dois deles retângulos e de modo que tenham catetos b e c , e hipotenusa a . Sabemos que a área do trapézio é dada por:

$$A_t = \frac{(b+c) \cdot (b+c)}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \quad (5.1)$$

e a soma das áreas dos triângulos é dada por:

$$A_t = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{b \cdot c}{2} + \frac{a \cdot a}{2} = \frac{2bc + a^2}{2} \quad (5.2)$$

Como a área do trapézio deve ser igual a soma das áreas dos triângulos, obtemos que:

$$\frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2} \rightarrow b^2 + c^2 = a^2. \blacksquare \quad (5.3)$$

5.0.4 Demonstração de Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci (1452 - 1519) nasceu na Itália, pintor e escultor italiano um dos grandes gênios da humanidade, criador do quadro Monalisa também fez uma demonstração do Teorema de Pitágoras, a qual baseia-se na Figura 26.

Demonstração.

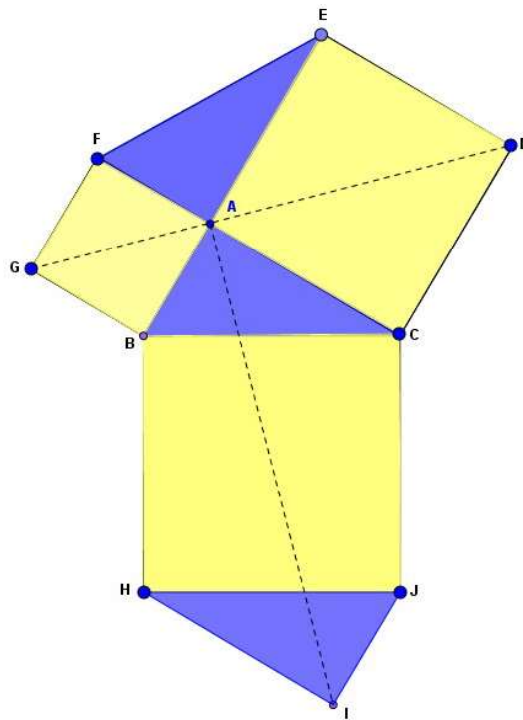


Figura 26: Demonstração do Leonardo da Vinci.
Fonte: Autoria própria.

Dado um $\triangle ABC$, retângulo em A, constrói-se sobre o lado \overline{BC} , o quadrado $BCJH$. Sobre o lado \overline{AB} , construímos o quadrado $BCJH$ e sobre o lado \overline{AB} , construímos o quadrado $ABGF$. Sobre o lado \overline{HJ} construímos um triângulo $\triangle HIJ \equiv \triangle ABC$, girando $\triangle ABC$, com um giro de 180° . Construímos $\triangle FAE$, como \widehat{BAC} e \widehat{FAE} são opostos pelo vértice e, $AF = AB$ e $AE = AC$, pelo caso (LAL) concluímos que $\triangle FAE \equiv \triangle ABC$. Tracemos então os segmentos AI e DG . Desta forma temos os quadriláteros $DEFG$, $BCDG$, $ABHI$ e $ACJI$ congruentes entre si pois, podemos verificar que, $FE = BC = BH = CJ$; $FG = BG = AB = IJ$ e $DE = CD = HI = AC$. Conforme mostra a figura 26.

Portanto, os hexágonos $BCDEFG$ e $ABHIJC$ têm a mesma área. Dessa forma vamos à demonstração:

Sejam $A_1 = \text{área}(BCDEFG)$ e $A_2 = \text{área}(ABHIJC)$. Como:

$$A_1 = \text{área}(BCD) + \text{área}(ACDE) + \text{área}(ABFG) + \text{área}(AEF)$$

$$A_2 = \text{área}(HIJ) + \text{área}(BCJH) + \text{área}(ABC)$$

Lembrando que área (ABC) = área (HIJ) = área (AEF), retiramos os dois triângulos de A_1eA_2 e concluímos que área (ACDE) + área (ABFG) = área (BCJH). ■

5.0.5 Demonstração de Bhaskara

Bhaskara (1114-1185) foi um matemático, astrólogo, astrônomo e professor indiano. Tornou-se conhecido por ter criado a fórmula matemática aplicada na equação de 2º grau, embora haja controvérsias quanto a esse fato (CELESTINO; PACHECO,). Ele fez uma demonstração do Teorema de Pitágoras que se baseia na Figura 27.

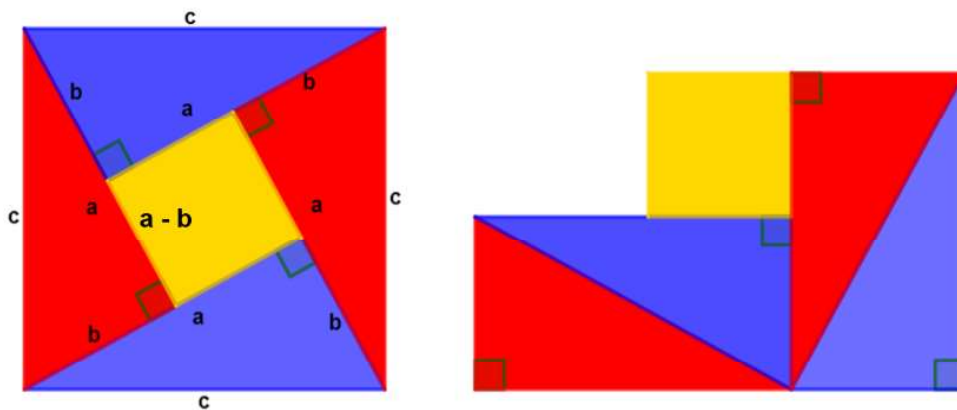


Figura 27: Demonstração de Bhaskara.
Fonte: Autoria própria.

Para essa demonstração, utiliza-se 4 triângulos retângulos congruentes e um quadrado menor. Ao reunir-se os 4 triângulos na disposição a direita da Figura 27, encontra-se um outro quadrado. Seja A_Q a área do quadrado maior e A_q a área do quadrado menor, tem-se que

$$A_Q = c^2 \quad (5.4)$$

e

$$A_q = (a - b)^2. \quad (5.5)$$

Note que,

$$A_Q = 4\left(\frac{a \cdot b}{2}\right) + (a - b)^2 \quad (5.6)$$

e,

$$A_Q = (2ab + a^2 - 2ab + b^2) \rightarrow A_Q = a^2 + b^2. \quad (5.7)$$

Portanto,

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad \blacksquare \quad (5.8)$$

5.0.6 Demonstração de Pitágoras

“Qual foi a demonstração dada por Pitágoras? Não se sabe ao certo, pois ele não deixou trabalhos escritos. A maioria dos historiadores acredita que foi uma demonstração do tipo geométrica, isto é, baseada na comparação de áreas (LIMA, 1991).

Embora não se tenha certeza desse fato, a prova atribuída a Pitágoras é uma demonstração simples por decomposição de figuras (EVES, 2004), como mostrada na Figura 28.

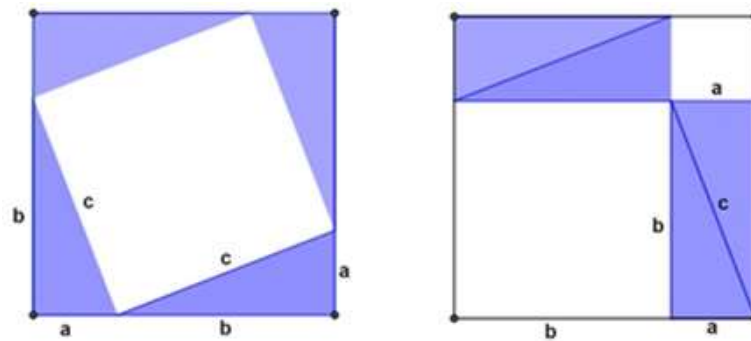


Figura 28: Demonstração de Pitágoras.

Fonte: Autoria própria.

Do quadrado que tem $a + b$ como lado, retira-se 4 triângulos iguais ao dado. Se isto for realizado como mostrado na Figura 28 à esquerda, obtém-se um quadrado de lado c . Mas, se a mesma operação for realizada como mostrado na Figura 28 à direita, restam-se dois quadrados, de lados a e b respectivamente. Logo, a área do quadrado de lado c é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem a e b .

Uma outra forma de demonstração é a seguinte: considera-se o fato de que a área de uma figura plana é igual a soma das áreas das partes que compõe a figura. Desta forma, pode-se tomar o quadrado de lado $a + b$, com sua área dada pela expressão: $(a + b)^2$. Por outro lado, toma-se a soma das áreas de sua cinco partes Figura 28 à esquerda : c^2 (quadrado de lado c) + $4 \cdot (\frac{a \cdot b}{2})$ (quatro triângulo retângulos de catetos a e b). Ao Comparar as duas expressões tem-se: $(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} \rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

■

Portanto, neste capítulo apresentou-se um estudo sobre o teorema de Pitágoras, como também sobre várias maneiras de demonstrações do mesmo, com a apresentação dos elementos que compõem o triângulo retângulo, sua definição, a proposição que relaciona os seus lados e também os primeiros métodos de demonstrações.

Capítulo 6

Aplicabilidade no ensino

6.1 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que estabelece as competências e habilidades essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica, que compreende a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio. A BNCC foi aprovada em dezembro de 2017 e é referência obrigatória para a elaboração dos currículos das escolas públicas e privadas de todo o Brasil, com o objetivo de garantir que os estudantes tenham acesso a uma educação comum e de qualidade em todo o país (SILVA, 2018).

A BNCC é organizada por áreas do conhecimento, como Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas, e define as competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada uma dessas áreas, desde a educação infantil até o ensino médio. Além disso, a BNCC também contempla as chamadas competências gerais, que são competências que devem ser desenvolvidas em todas as áreas do conhecimento e que visam preparar os alunos para serem cidadãos conscientes e atuantes em uma sociedade plural e democrática (SILVA, 2018).

A implementação da BNCC é um processo em andamento em todas as redes de ensino do Brasil, e tem sido objeto de discussões e reflexões por parte de professores, gestores e demais profissionais da educação. A expectativa é que a BNCC contribua para a melhoria da qualidade da educação no país e para a formação de cidadãos críticos, reflexivos e preparados para os desafios do mundo contemporâneo (PONCE; ARAUJO, 2019).

A BNCC de Matemática estabelece as competências e habilidades que os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica, desde a educação infantil até o ensino médio, para compreender conceitos matemáticos e aplicá-los em situações práticas do cotidiano e do mundo do trabalho. Entre as competências fundamentais, destacam-se:

resolver e elaborar problemas em diferentes contextos, comunicar ideias matemáticas, modelar e interpretar fenômenos do mundo real por meio de representações matemáticas, fazer análises críticas de dados e informações e argumentar usando linguagem matemática. Já as habilidades específicas da BNCC de Matemática variam de acordo com a etapa de ensino (SANTOS, 2018).

Na educação infantil e no ensino fundamental, as habilidades são organizadas em três eixos: números e operações, geometria e medidas e tratamento da informação. No ensino médio, as habilidades estão organizadas de forma integrada, seguindo os eixos temáticos de Matemática no Ensino Médio: grandezas e medidas, Álgebra e Funções, Geometria e Trigonometria, e Estatística e Probabilidade (SANTOS, 2018).

A implementação da BNCC de Matemática pressupõe uma abordagem pedagógica centrada na resolução de problemas e na valorização do raciocínio lógico, proporcionando uma aprendizagem significativa e o desenvolvimento da capacidade dos alunos de aplicar a Matemática em situações reais da vida cotidiana e em áreas profissionais (FREITAS et al., 2019).

Para uma implementação de forma efetiva da BNCC faz-se necessário que os professores estejam preparados para trabalhar com essa abordagem pedagógica, com a inclusão de uma formação continuada dos docentes e a disponibilização de recursos didáticos adequados, como materiais de apoio e tecnologias educacionais. Além disso, é importante promover a interdisciplinaridade, ou seja, a integração da Matemática com outras áreas do conhecimento, de forma a proporcionar uma aprendizagem mais contextualizada e significativa para os alunos (PONCE; ARAUJO, 2019).

Com a implementação da BNCC de Matemática, espera-se que os alunos tenham uma formação mais sólida nessa área do conhecimento, desenvolvendo habilidades e competências que lhes permitam utilizar conceitos matemáticos para resolver problemas concretos da vida real, contribuindo assim para o seu desenvolvimento pessoal e profissional (SILVA, 2018).

6.2 Sequência Didática

Uma sequência didática constitui-se de um conjunto de atividades, planejadas de forma coerente e articulada, com o objetivo de desenvolver uma determinada habilidade ou competência nos alunos. Essas atividades são organizadas em uma sequência lógica, levando em consideração o nível de conhecimento prévio dos alunos e as metas de aprendizagem a serem alcançadas, com objetivo de proporcionar ao aluno um aprendizado significativo, que possa ser aplicado em situações reais e cotidianas (PERETTI; COSTA, 2013).

Na realidade atual da sala de aula, observa-se um considerável crescimento de professores e pesquisadores que empregam a proposta metodológica da sequência didática para facilitar o desenvolvimento de atividades que visam à construção de novos conhecimentos e saberes. O professor precisa ter clareza sobre o que pretende ensinar e definir as etapas para alcançar esse objetivo. Essas etapas devem estar alinhadas com os objetivos de aprendizagem e com as habilidades e competências que se pretende desenvolver. A sequência didática pode ser dividida em três momentos: introdução, desenvolvimento e avaliação. No momento de introdução, o professor apresenta o tema e desperta o interesse dos alunos. No momento de desenvolvimento, são realizadas atividades para aquisição e desenvolvimento das habilidades e competências. E, no momento de avaliação, verifica-se se os objetivos foram alcançados ou se é necessário revisar alguma etapa da sequência (UGALDE; ROWEDER, 2020).

Para que a sequência didática seja eficiente, é fundamental que ela seja diversificada, contemplando diferentes tipos de atividades, tais como: debates, pesquisas, produção de textos, jogos, entre outras. É importante que o professor esteja aberto a mudanças durante o processo, para que possa adaptar as atividades de acordo com as necessidades dos alunos. Assim, a sequência didática se torna uma ferramenta importante para a efetivação do processo de ensino-aprendizagem (PERETTI; COSTA, 2013).

Uma sequência didática deve ser preparada com antecedência, considerando a faixa etária e as habilidades de cada aluno. Em Matemática pode englobar diferentes tipos de atividades, como jogos, resolução de problemas, debates, leituras, entre outros. Ela deve ser estruturada de maneira a permitir a aproximação do conteúdo matemático ao cotidiano dos alunos, estabelecendo relações entre a teoria e a prática. Ao utilizar sequências didáticas em sala de aula, os professores podem favorecer a aprendizagem dos alunos de maneira mais significativa, proporcionando-lhes um conhecimento mais fundamentado e aplicável a situações do dia a dia. Além disso, essa metodologia pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades socioemocionais, como a comunicação, a colaboração e a resolução de conflitos (UGALDE; ROWEDER, 2020).

O planejamento é um aspecto fundamental para a construção de uma prática pedagógica integrada e significativa, que possibilite aos alunos uma aprendizagem sólida e consistente. Isso porque, ao planejar as aulas de Matemática, o professor tem a oportunidade de pensar em estratégias e atividades que permitam a exploração dos conteúdos de maneira multidimensional, contemplando, por exemplo, as habilidades e competências estabelecidas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino de Matemática (PRA-TES; BARBOSA, 2020).

O planejamento em Matemática deve ser estruturado com base nos objetivos de aprendizagem e nas situações didáticas que favoreçam a construção do conhecimento

pelo alunos. Nesse sentido, é importante que o planejamento seja flexível e adaptável, permitindo ajustar as estratégias e os recursos de acordo com as necessidades e atitudes dos alunos. Outro aspecto importante no planejamento em Matemática é considerar o contexto dos alunos e suas experiências de vida, explorando, por exemplo, o raciocínio lógico, a criatividade e a aplicação dos conceitos matemáticos no cotidiano. Assim, o planejamento deve envolver ações, recursos e metodologias capazes de motivar e engajar os alunos na aprendizagem dos conteúdos (MENEGOLLA; SANT'ANNA, 2011).

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) estabelece que o planejamento escolar é uma das responsabilidades do estabelecimento de ensino, devendo ser elaborado de forma participativa e de acordo com as normas e diretrizes dos sistemas educacionais. De acordo com a LDB, o planejamento escolar deverá contemplar a organização e a gestão da escola, assim como as práticas pedagógicas e os processos de avaliação, com o objetivo de garantir a qualidade do ensino e a aprendizagem dos alunos. Além disso, a LDB destaca que o planejamento pedagógico deve garantir a formação integral dos alunos, com o desenvolvimento de habilidades cognitivas, afetivas e sociais (DEMO, 1997).

Em resumo, o planejamento em Matemática é fundamental para a construção de uma prática pedagógica dinâmica e significativa, que permita a construção do conhecimento pelos alunos, contemplando suas necessidades individuais e coletivas, a partir de estratégias e recursos adaptáveis.

6.3 Proposta de sequência didática

Aqui, ponto central desta dissertação, tem-se como proposta, a criação de uma sequência didática para aplicação em sala de aula por alunos do 9 ano do Ensino Fundamental.

6.4 Atividade 1

A primeira sequência didática deste trabalho tem por objetivo trabalhar com os alunos o fato de que os números figurados podem ser representados por uma coleção de pontos em uma configuração geométrica como mostrado no Capítulo 3. A atividade será desenvolvida com o uso do *Geogebra*, um software gratuito de matemática dinâmica, que permite a visualização e manipulação de objetos matemáticos em tempo real.

Ao utilizar o *Geogebra*, os (as) alunos (as) poderão perceber como as mudanças em uma fórmula ou em um gráfico afetam diretamente os resultados, tornando o aprendizado mais concreto e interessante. Além disso, o *Geogebra* permite a exploração de padrões e relações matemáticas de forma intuitiva, o que poderá auxiliar na compreensão mais

profunda dos conceitos, dado que ele pode ajudar a tornar a matemática mais acessível para os (as) alunos (as) que possuem dificuldade em visualizar conceitos matemáticos abstratos. Desta forma, a visualização pode ajudar a tornar a matemática mais interessante e envolvente para os alunos, o que pode ajudá-los no engajamento durante as aulas e a se tornarem mais confiantes no aprendizado da matemática.

A proposta dessa atividade é apenas exploratória, não sendo necessário que o (a) aluno (a) ou o (a) professor (a) precisem aprender os passos da construção. Dessa forma, não será descrito aqui os passo de construção do *Geogebra* aqui apresentado.

Na simulação a seguir, considera-se os números triangulares com apenas um controle deslizante na variável n representando as variáveis $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$. Ao manipular o programa para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$ os alunos deverão visualizar, de acordo com a equação (8), respectivamente, as Figuras 29, 30, 31, 32 e 33. Após as manipulações, o (a) professor (a) deverá solicitar aos alunos que registrem em uma tabela os resultados encontrados em cada caso ao manusear o *Geogebra*, a fim de perceberem a ligação entre os números figurados triangulares e os pontos em uma configuração geométrica dada pela equação 3.9.

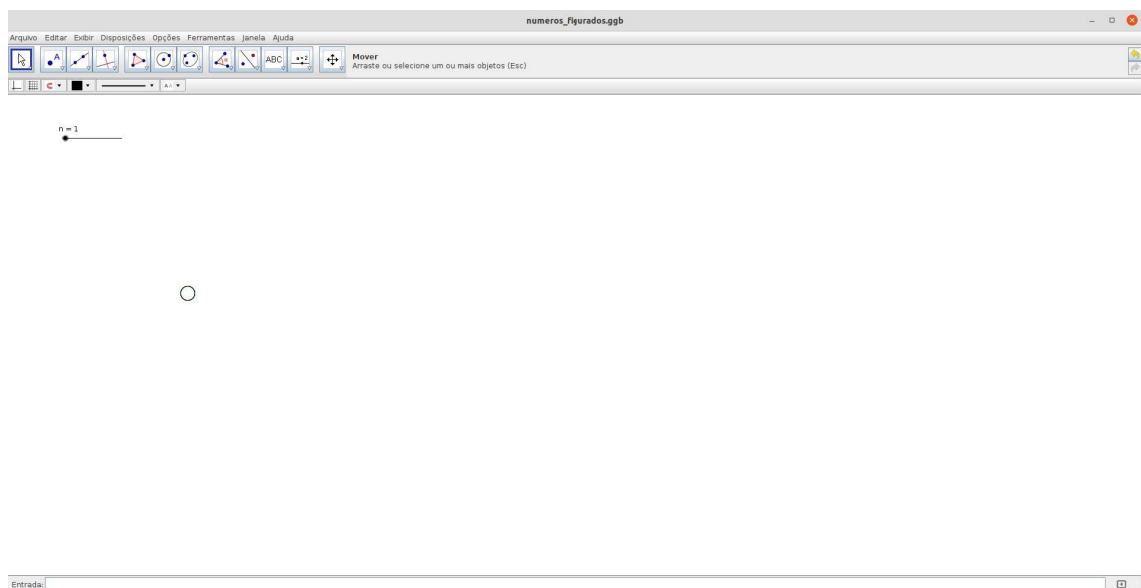


Figura 29: Número figurado triangular $t_1 = 1$.
Fonte: Autoria própria.

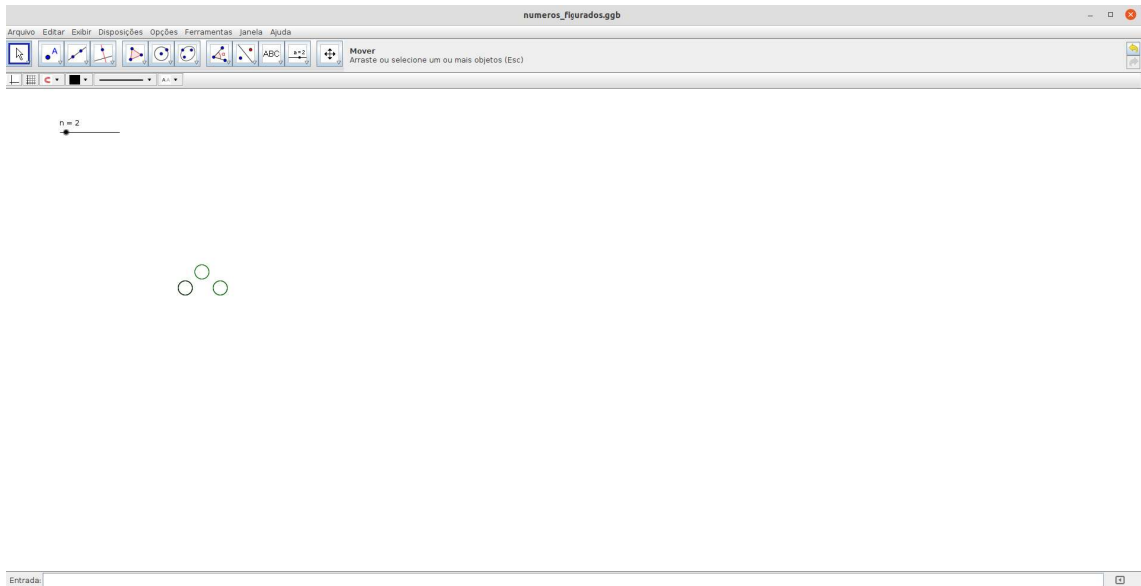


Figura 30: Número figurado triangular $t_2 = 3$.
Fonte: Autoria própria.

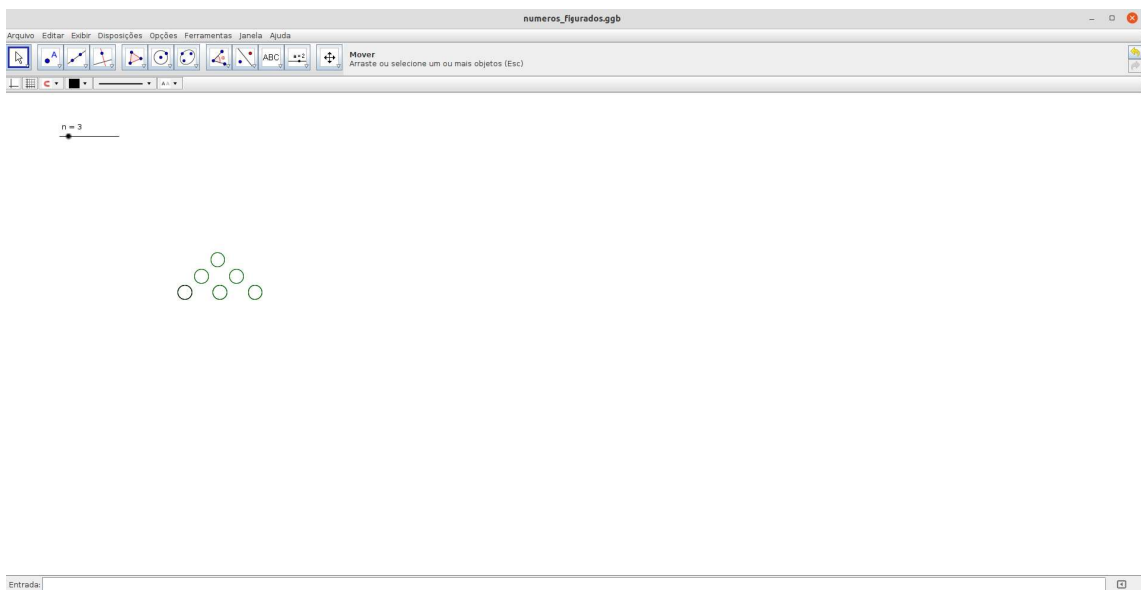


Figura 31: Número figurado triangular $t_3 = 6$.
Fonte: Autoria própria.

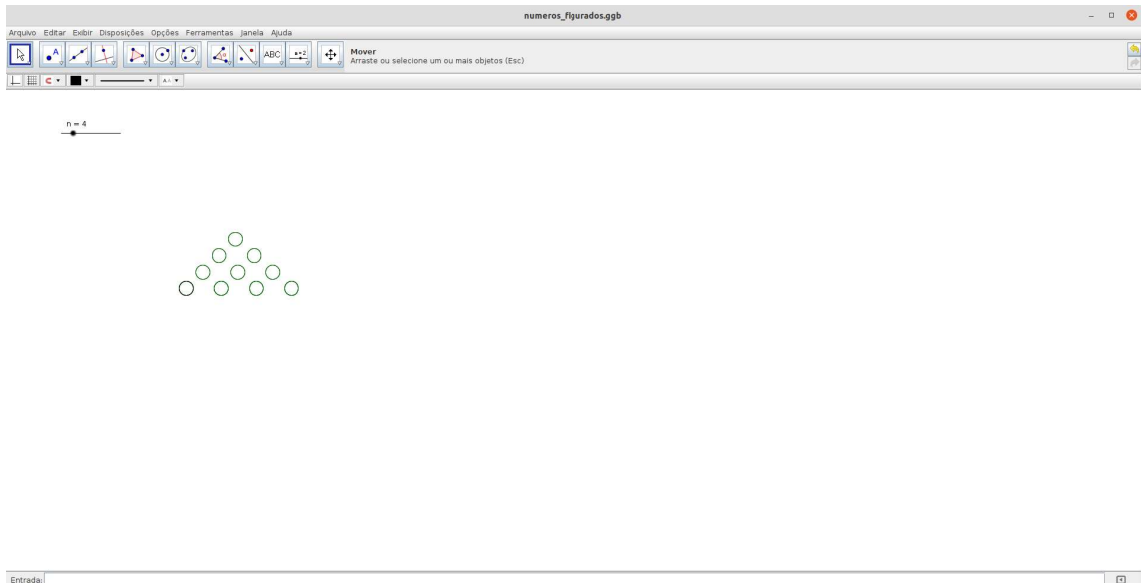


Figura 32: Número figurado triangular $t_4 = 10$.
Fonte: Autoria própria.

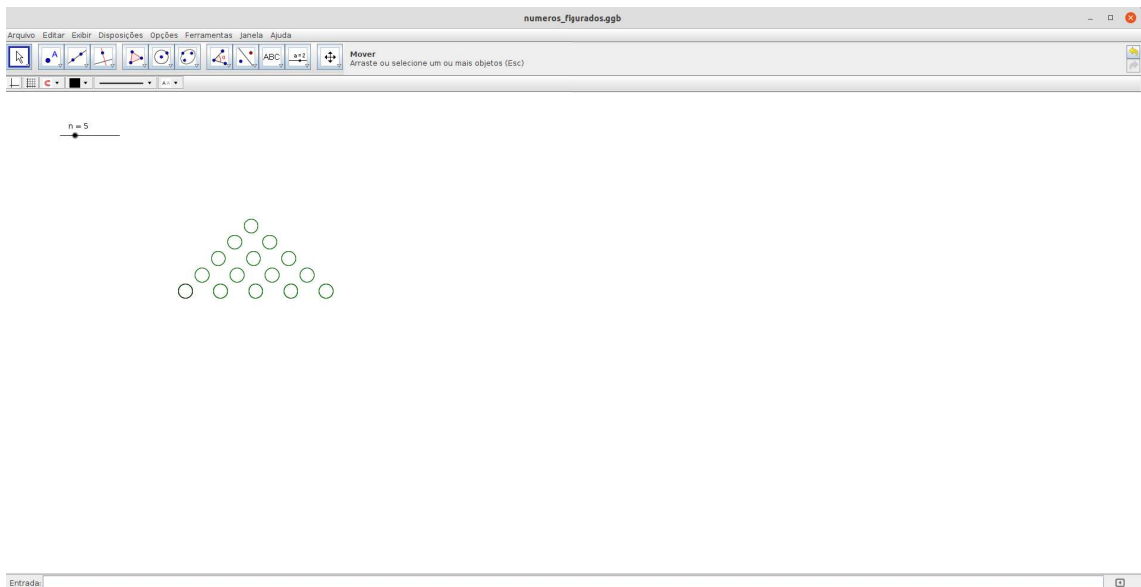


Figura 33: Número figurado triangular $t_5 = 15$.
Fonte: Autoria própria.

6.4.1 Avaliação de Aprendizagem 1

- Questão 1: Como podemos calcular o n -ésimo número triangular?
- Questão 2: Qual é o padrão de crescimento dos números triangulares?
- Questão 3: Como podemos representar graficamente os números triangulares?
- Questão 4: Como os números triangulares são importantes na geometria?
- Questão 5: Como podemos encontrar o maior número triangular que é menor que um número dado?

Espera-se com a realização desta atividade que os alunos possam reconhecer o conceito de números triangulares, como são formados e suas características; Faça uma correlação com entre os números triangulares e as formas geométricas; Aprofunde o conceito com exemplos numéricos e explique a fórmula para calcular o número triangular.

6.5 Atividade 2

Números figurados são aqueles representados graficamente por figuras geométricas, como quadrados, triângulos, círculos, entre outras. De acordo com o exposto no capítulo 3, os números quadrangulares são uma sequência de números gerados pela fórmula n^2 , onde n é um número inteiro que começa em 1. Esses números são chamado de quadrangulares porque podem ser usados para criar quadrados com lados de comprimento igual ao número de termos na sequência. Nessa atividade usa-se novamente o *Geogebra*.

Ao utilizar o *Geogebra*, os (as) alunos (as) poderão perceber como as mudanças em uma fórmula ou em um gráfico afetam diretamente os resultados, tornando o aprendizado mais concreto e interessante. Além disso, o *Geogebra* permite a exploração de padrões e relações matemáticas de forma intuitiva, o que poderá auxiliar na compreensão mais profunda dos conceitos, dado que ele pode ajudar a tornar a matemática mais acessível para os (as) alunos (as) que possuem dificuldade em visualizar conceitos matemáticos abstratos. Desta forma, a visualização pode ajudar a tornar a matemática mais interessante e envolvente para os alunos, o que pode ajudá-los no engajamento durante as aulas e a se tornarem mais confiantes no aprendizado da matemática. A proposta dessa atividade é apenas exploratória, não sendo necessário que o (a) aluno (a) ou o (a) professor (a) precisem aprender os passos da construção. Dessa forma, não será descrito aqui os passos de construção no *Geogebra* aqui apresentado. A simulação a seguir, considera-se os números quadrangulares com apenas um controle deslizante na variável n representando as variáveis $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$. Ao manipular o programa para

$n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$ os alunos deverão visualizar, de acordo com a equação n^2 . Após as manipulações, o (a) professor (a) deverá solicitar aos alunos que registrem em uma tabela os resultados encontrados em cada caso ao manusear o *Geogebra*, a fim de perceberem a ligação entre os números figurados quadrangulares e os pontos em uma configuração geométrica dada pela equação $a_n = n^2$.

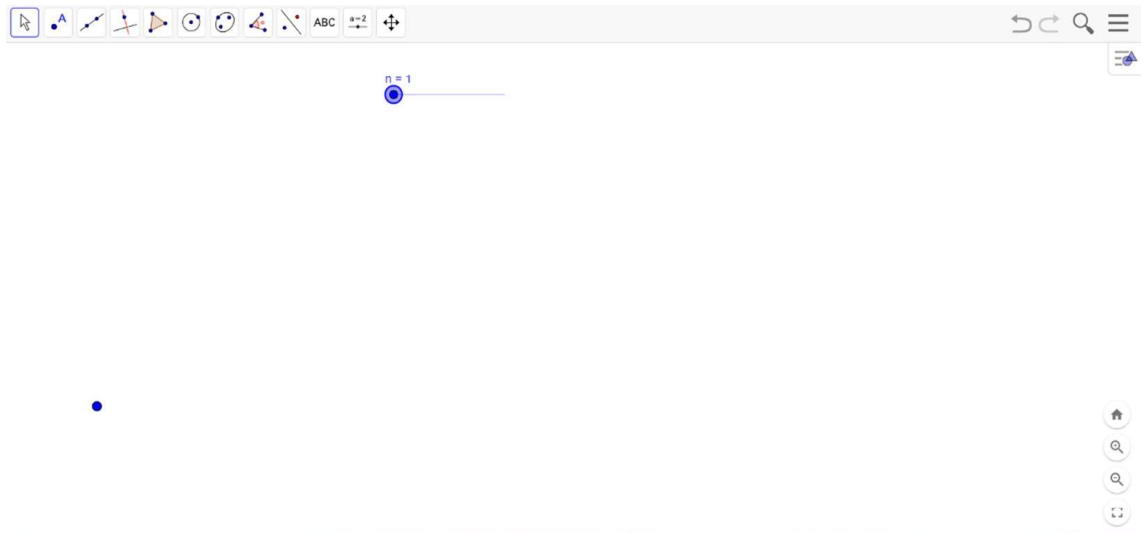


Figura 34: Número figurado Quadrangular $Q_1 = 1$.

Fonte: Autoria própria.

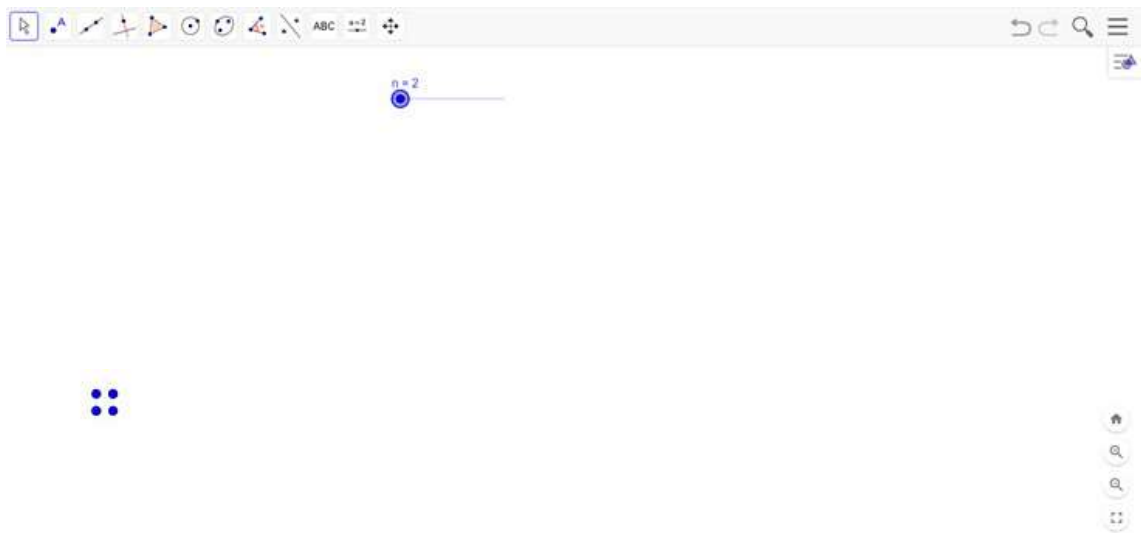


Figura 35: Número figurado Quadrangular $Q_2 = 4$.

Fonte: Autoria própria.

O (a) professor (a) deverá pedir aos alunos o cálculo do valor de Q_2 contando o número de bolinhas no quadrado: Logo, $Q_2 = 4$. Para um número natural arbitrário n , seja Q_n o número de bolinhas no n -ésimo quadrado, o (a) professor (a) deverá solicitar aos alunos o preenchimento da tabela a seguir com os primeiros dez quadrados.

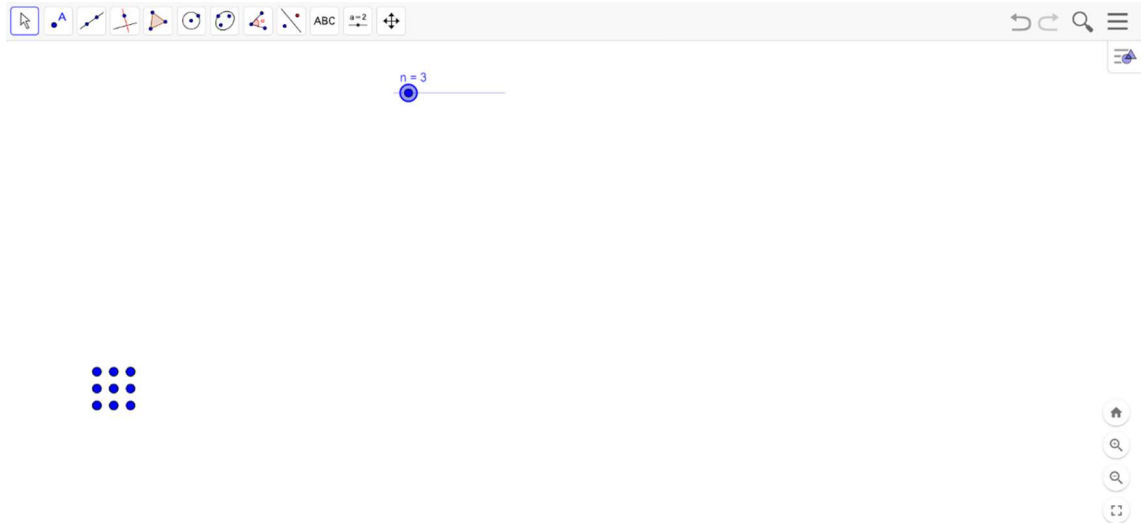


Figura 36: Número figurado Quadrangular $Q_3 = 9$.
Fonte: Autoria própria.

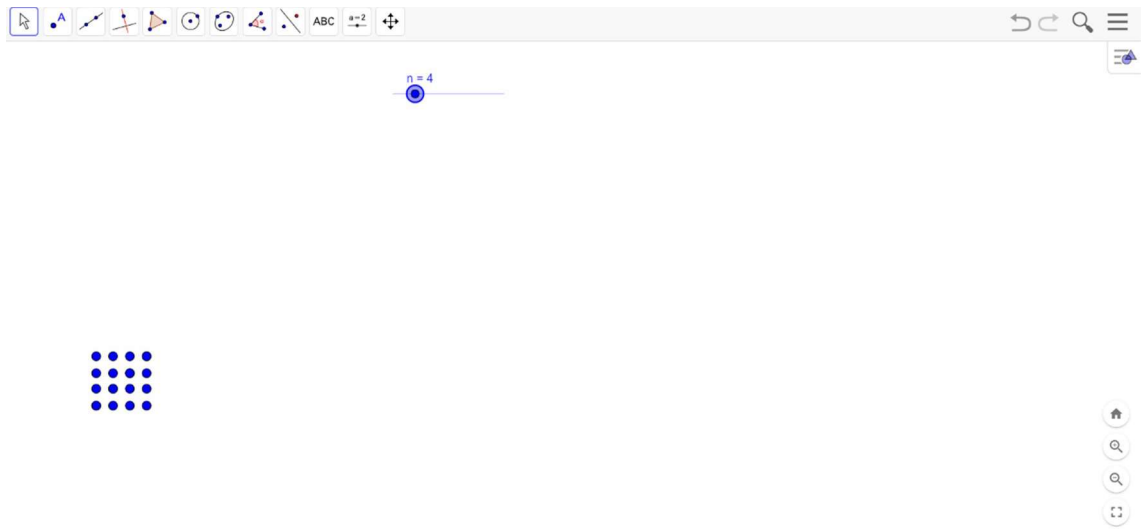


Figura 37: Número figurado Quadrangular $Q_4 = 16$.
Fonte: Autoria própria.

6.5.1 Avaliação de Aprendizagem 2

Com base nas manipulações o (a) professor (a) deverá estimular algumas conjecturas e pedir que os alunos respondam ao questionário sugerido abaixo:

- Questão 1: Como podemos escrever o termo geral dessa sequência?
- Questão 2: Qual é o padrão de crescimento dos números quadrangulares?
- Questão 3: Como podemos representar graficamente os números quadrangulares?
- Questão 4: Como os números quadrangulares são importantes na geometria?

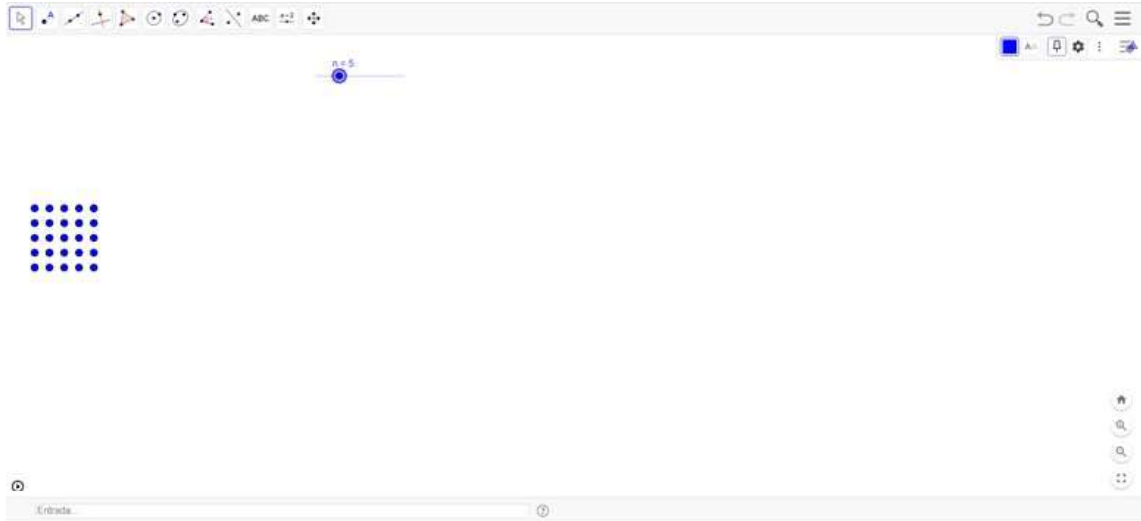


Figura 38: Número figurado Quadrangular $Q_5 = 25$.

Fonte: Autoria própria.

Espera-se com a realização desta atividade que os alunos possam reconhecer o conceito de números quadrangulares, como são formados e suas características; Faça uma correlação com entre os números quadrangulares e as formas geométricas; Aprofunde o conceito com exemplos numéricos e explique a fórmula para calcular o número quadrangular.

6.5.2 Atividade 3

A terceira atividade deste trabalho busca trabalhar com os alunos o reconhecimento dos padrões presentes nos números figurados. Este objetivo está pautado no uso de diagramas de escadas feitas de blocos do mesmo tamanho, como mostra a Figura 39, com as escadas numeradas de acordo com sua altura, dada pelo número de blocos.

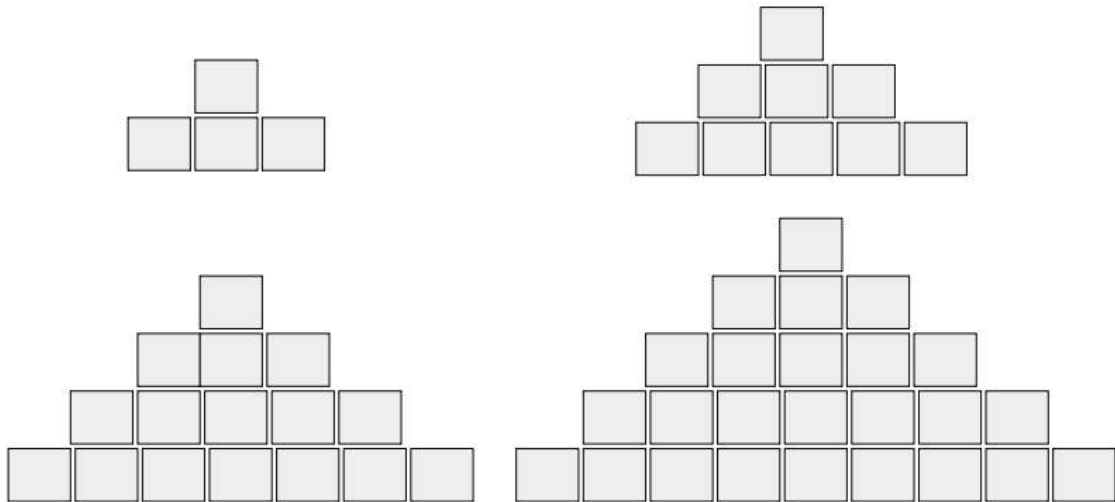


Figura 39: Diagramas de escadas.

Fonte: Autoria própria.

Nesta atividade, com o uso da Tabela 3, o professor deverá solicitar aos alunos para relatar a altura de uma escada, neste caso, correspondente ao número de escadas que tem (ou seja, o número de colunas de blocos) e o número total de blocos necessários para fazer a escada.

Escada (Altura)	Número de colunas	Número de blocos
1	1	1
2	3	4
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Tabela 3: Registro da escada (altura), número de colunas e o número total de blocos necessários para fazer a escada.

6.5.3 Avaliação de Aprendizagem 3

Com base nas solicitações do (a) professor (a), os alunos deverão responder ao questionário sugerido abaixo:

- Questão 1: Registre e complete os valores obtidos na Tabela 3 em cada caso.
- Questão 2: Analise a tabela e responda: qual a relação entre a altura da escada, ou seja, o número de blocos(e o número de escadas)?
- Questão 3: Qual o padrão recursivo deverá ser utilizado para a construção da próxima escada?

Espera-se com a realização desta atividade que os alunos possam reconhecer, generalizar e explicar a relação entre a altura da escada, ou seja, o número de blocos(o e o número de escadas. Além disso, com o uso da Tabela 3, que os alunos consigam reconhecer e generalizar o padrão recursivo, sendo este que o número de blocos necessário para construir a próxima escada aumenta por mais dois blocos de cada vez. E por fim, que os alunos possam reconhecer que o número de blocos em cada escada é o quadrado do número da escada e ainda, utilizar esta relação para encontrar o número de escadas em uma escada de 100 blocos de altura.

6.6 Atividade 4

A Quarta atividade desse trabalho tem por objetivo trabalhar com os alunos o conceito intuitivo do Teorema de Pitágoras. A atividade será desenvolvida com o uso do geogebra onde os alunos farão a manipulação de objetos matemáticos em tempo real. Na simulação a seguir iremos considerar um triângulo retângulo e três quadrados possuindo os lados desse triângulo. Os alunos serão convidados a mover os controles deslizantes B e C até atingir os valores procurados na tabela mostrada na figura 40. Após essa manipulação, o professor deverá solicitar que os alunos registrem na tabela os resultados encontrados seguindo o modelo em anexo. O objetivo principal dessa atividade é que os alunos concluam que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

6.6.1 Avaliação de Aprendizagem 4

Com base nas manipulações o (a) professor (a) deverá estimular algumas conjecturas e pedir que os alunos respondam ao questionário sugerido abaixo:

\overline{AB}	\overline{CA}	\overline{BC}	\overline{AB}^2	\overline{CA}^2	\overline{BC}^2
4	3				
				64	100
		20		144	

Figura 40: Tabela da Atividade 3.
Fonte: Autoria própria.

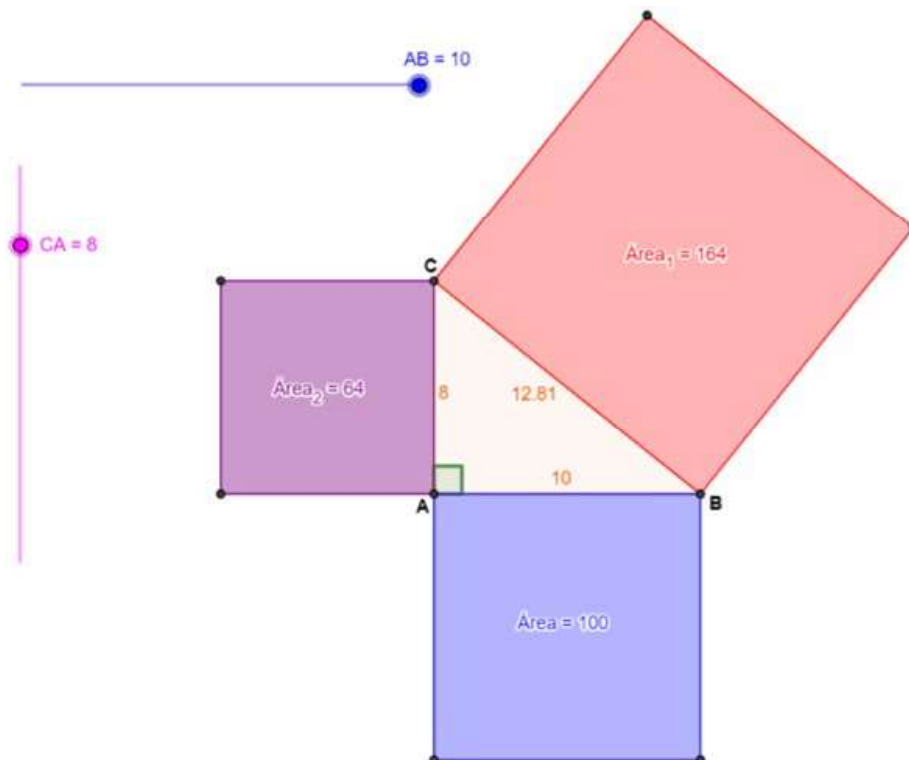


Figura 41: Pitágoras no geogebra
Fonte: Autoria própria.

- Questão 1: Registre e complete os valores obtidos na tabela em cada caso (Mova os controles deslizantes até atingir esses valores).
- Questão 2: Analise a tabela e responda: que relação existe entre as áreas dos quadrados construída sobre os lados do triângulo?
- Questão 3: Caso o triângulo seja retângulo isósceles as relações continuaram valendo?

Capítulo 7

Considerações finais

Ao longo do desenvolvimento do presente trabalho procurou-se aprofundar os estudos sobre os números figurados e o Teorema de Pitágoras, possivelmente, o teorema com mais demonstrações da história da matemática e que ainda continua a despertar interesse pela busca de novas demonstrações, tornando-o de fácil compreensão e acessível aos alunos de ensino fundamental. Desta maneira, buscou-se analisar os principais conceitos matemáticos relacionados com a teoria dos números figurados e com o Teorema de Pitágoras, com ênfase na importância deste conhecimento para a compreensão e resolução de problemas matemáticos. Além disso, realizou-se algumas demonstrações e alguns exemplos práticos do uso da teoria do teorema de Pitágoras, assim como dos números figurados.

O estudo das demonstrações do Teorema de Pitágoras, abordadas no capítulo 5, e comumente não abordadas na escola básica, oferece aplicações, onde pode-se demonstrar, pela aplicação da generalização para figuras semelhantes, que a relação entre as áreas de figuras construídas sobre os lados de um triângulo retângulo se mantém mesmo variando as figuras construídas.

Por outro lado, buscou-se também uma apresentação da história de Pitágoras, até os dias de hoje, cheia de mistérios, e sua contribuição no desenvolvimento da matemática, dado que, a compreensão da história da matemática auxilia no entendimento dos conceitos e de suas contribuições ao longo do tempo de sua existência desde a sua descoberta.

Como o objetivo da pesquisa pauta-se no estudo matemática pitagórica, através dos números figurados e do Teorema de Pitágoras, apresentou-se conceitos importantes relacionados com a teoria dos números triangulares, quadrangulares, pentagonais e suas propriedades.

Além de ressaltar a relevância destas teorias como fundamento básico de resolução de problemas matemáticos, a partir da compreensão dos conceitos apresentados ao longo desta dissertação, faz-se possível perceber a importância da matemática na resolução de problemas cotidianos e no uso de novas tecnologias. Assim, com esta pesquisa, pretende-

se orientar professores quanto a importância da contextualização histórica da matemática pitagórica e da necessidade de estimular um estudo mais profundo destes conceitos pelos alunos.

Portanto, espera-se que este trabalho possa contribuir para o aprimoramento do conhecimento acadêmico na área e para a disseminação dos princípios básicos dos números figurados e do teorema de Pitágoras.

Como proposta de continuidade da pesquisa, pretende-se aplicar em uma escola a sequência didática proposta neste trabalho, com a inclusão de atividades envolvendo a história da matemática pitagórica, a qual deverá ser aplicada a alunos do nono ano do ensino fundamental. Após a aplicação, sugere-se a realização de um levantamento dos dados e sistematização dos resultados, a fim de verificar a eficácia da abordagem dos números figurados e do teorema de Pitágoras propostas por esta pesquisa.

Referências Bibliográficas

- ALMEIDA, M. C. *Platão Redimido: A Teoria dos Números Figurados na Ciência Antiga e Moderna*. [S.l.]: Editora Champagnat, 2003.
- ANTISERI, D. Reale g. *Zapadnaya filosofiya ot istokov do nashykh dney. Ot Vozrozhdeniya do Kanta [The Western Philosophy from the Origins to our Days. From the Renaissance to Kant]*. Saint-Petersberg, Pnevma, 2002.
- ASSIS, F. O. S. *Ternos pitagóricos e quase pitagóricos*. Tese (Doutorado), 2020.
- BIGODE, A. J. L. *Matemática, 8^o ano, 1^a edição*. [S.l.]: Editora Scipione, 2013.
- BOYER, B. C. *História da Matemática*. [S.l.]: Editora do livro, 1996.
- CAREVIC, M. M.; PETROVIC, M.; NEBOJSA, D. Figurative numbers contribution in perceiving the legality in numerous strings tasks and long-term memory of numerous data. *Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, v. 15, n. 4, 2019.
- CELESTINO, K. G.; PACHECO, E. R. Observações sobre bhaskara. Anais do XIX EAIC – 28 a 30 de outubro de 2010,.
- COSTA, E. D. A. e. S. *Triângulo Pitagóricos, Ternos Pitagóricos e Suas Propriedades*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Do Pará Dissertação De Mestrado, 2018.
- DEMO, P. *A nova LDB: ranços e avanços*. [S.l.]: Papyrus Editora, 1997.
- DUARTE, C. L.; GONCALVES, H. H.; NOBREGA, N. P. Tudo é número: uma análise conceitual da ideia de número em pitágoras. *Revista Principia*, n. 2017.
- ESTRADA, M. F. A história da matemática no ensino da matemática. *Educação e Matemática*, n. 27, p. 17–20, 1993.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Editora Unicamp, 2004.
- FREITAS, F. et al. Abrindo a caixa de pandora: as competências da matemática na bncc. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, Universidade Estadual do Paraná, v. 8, n. 17, p. 265–291, 2019.
- JUNIOR, O. G. *Matemática Por Assunto*. [S.l.]: Editora Scipione, 1988.
- JUNIOR, W. A. R. *Pitágoras de Samos*. 2023. Disponível em: <<https://greciantiga.org/arquivo.asp?num=0164>>. Acesso em: 09 de maio 2023.
- LAUNAY, M. *A Fascinante História Da Matemática*. [S.l.]: Editora Bertrand Brasil, 2019.

- LEAO, A. F. *Euclides e a incomensurabilidade: o profundo tear das abrangências: Os sumos e segredos do Livro X*. [S.l.]: Chiado Brasil, 2019.
- LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.
- MENEGOLLA, M.; SANT'ANNA, I. M. *Por que planejar? Como planejar?: currículo, área, aula*. [S.l.]: Editora Vozes Limitada, 2011.
- OLIVEIRA, A. M. L.; NASCIMENTO, E. da S. A trajetória de vida de pitágoras e suas principais contribuições matemática. *Itinerarius Reflectionis*, v. 16, n. 2, p. 01–13, 2020.
- PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. D. Sequência didática na matemática. *Revista de Educação do IDEAU*, v. 8, n. 17, p. 1–15, 2013.
- PONCE, B. J.; ARAUJO, W. A justiça curricular em tempos de implementação da bncc e de desprezo pelo pne (2014-2024). *Revista e Curriculum*, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, v. 17, n. 3, p. 1045–1074, 2019.
- PRATES, R. F.; BARBOSA, A. da C. O planejamento e a utilização dos planos de aula “nova escola” em matemática. *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática*, v. 4, n. 3, p. 476–498, 2020.
- RIBEIRO, V. V. S. M. Revisitando o teorema de pitágoras. *DMA-UFV: Rio de Janeiro*, 2017.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. *Tópicos de História da Matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- SABOYA, M. C. L. *Pitágoras: Todas as coisas são números*. 2015.
- SANTOS, L. F. dos; OZGA, J. G. dos S. A importância dos números na escola pitagórica. *Revista Diaphona*, v. 7, n. 1, 2013.
- SANTOS, M. J. C. D. O currículo de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental na base nacional comum curricular (bncc): os subalternos falam? *Horizontes*, v. 36, n. 1, p. 132–143, 2018.
- SILVA, M. R. D. A bncc da reforma do ensino médio: o resgate de um empoeirado discurso. *Educação em revista*, v. 34, 2018.
- STEWART, I. *Almanaque das Curiosidades Matemática*. [S.l.]: Editora Zahar, 2019.
- STRUIK, D. J. *História Concisa das Matemática*. [S.l.]: Editora Ciências Aberta, 1992.
- UGALDE, M. C. P.; ROWEDER, C. Sequência didática: uma proposta metodológica de ensino-aprendizagem. *Educitec-Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico*, v. 6, 2020.
- WAGNER, E. Teorema de pitágoras e áreas. *Programa de Iniciação Científica*, 2009.