



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL
DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL



PAULO CESAR FERREIRA VIANA

SISTEMA MASSA-MOLA E SUAS PROPRIEDADES: UM ESTUDO
ANALÍTICO VIA ÁLGEBRA LINEAR.

REDENÇÃO

2023

PAULO CESAR FERREIRA VIANA

SISTEMA MASSA-MOLA E SUAS PROPRIEDADES: UM ESTUDO ANALÍTICO
VIA ÁLGEBRA LINEAR.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório.

REDENÇÃO - CE

2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Viana, Paulo Cesar Ferreira.

V614s

Sistema massa-mola e suas propriedades: um estudo analítico via álgebra linear / Paulo Cesar Ferreira Viana. - Redenção, 2023.
51fl: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientador: Prof.º Dr.º Wesley Marinho Lozório.

1. Álgebra. 2. Oscilador. 3. Equações diferenciais. 4. Matemática - Sistema. I. Título

CE/UF/BSCA

CDD 515.35

PAULO CESAR FERREIRA VIANA

**SISTEMA MASSA-MOLA E SUAS PROPRIEDADES: UM ESTUDO ANALÍTICO
VIA ÁLGEBRA LINEAR**

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovada em: 10/08/2023

BANCA EXAMINADORA



Dr Wesley Marinho Lozório (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira (UNILAB)



Dr Joserlan Perote da Silva

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira (UNILAB)



Dr Frederico Vale Girão

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho à minha mãe, Antônia
Ferreira Viana (in memoriam), minha maior
incentivadora.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me conduzido até aqui com sua mão protetora.

Aos meus professores e colegas que me acompanharam nesta jornada de mestrado UNILAB, e muito colaboraram para o aumento de meu conhecimento.

Expresso agradecimento especial ao meu professor e orientador Wesley Marinho Lozório, o qual estive ao meu lado nesse processo.

Agradeço imensamente minha base, que é a minha família. Minha esposa e filhas, que tanto me apoiaram, comemorando sempre minhas vitórias ao longo da trajetória, e dando suporte nos momentos difíceis. Agradeço também os amigos mais próximos, que tanto me ajudaram com suas opiniões.

Agradeço a todos os membros da banca examinadora, pelas excelentes contribuições a este trabalho.

Por fim, agradeço meu pai, Antônio Rodrigues Viana, que foi quem me ensinou a dar os primeiros passos nas primeiras contas matemáticas. Agradeço também minhas irmãs, que sempre me incentivaram.

“O Homem não teria alcançado o possível se, repetidas vezes, não tivesse tentado o impossível.” *Max Weber*

RESUMO

Mediante as inúmeras aplicações do movimento harmônico simples, o presente trabalho tem a pretensão de avaliar, de forma individual, o sistema massa-mola, conceituando e caracterizando-o de forma explícita através da modelagem matemática que assume papel preponderante na exibição de suas equações. Para isso, recorreremos ao uso das equações diferenciais, chegando a uma função que descreva este sistema. Utilizamos também conceitos oriundos da álgebra linear, como os conceitos de autovalor e autovetor. Dessa forma, modelamos e resolvemos o problema do oscilador harmônico simples, utilizando-se conceitos da álgebra abstrata e um pouco de cálculo avançado, de maneira que o leitor já traga consigo alguma familiaridade com os mesmos, para que possa aproveitar melhor a leitura. Apresentamos teoremas que garantem tanto a existência, quanto a unicidade das soluções dos sistemas de equações diferenciais usadas na modelagem. Além disso, mostramos os principais fatos sobre a estrutura das soluções de tais sistemas. Exibimos também as soluções de sistemas lineares de equações diferenciais homogêneas com coeficientes constantes, fazendo a generalização das soluções por exponenciais de matrizes. Apresentamos a solução e na sequência damos a classificação de tais soluções para alguns casos de acordo com o tipo de autovalor. Assim sendo, fizemos o estudo para o oscilador livre de amortecimento, para o oscilador amortecido e para o oscilador subamortecido, etc.

Palavras-chave: Álgebra. Oscilador. Sistemas de equações diferenciais. Autovalor.

ABSTRACT

Through numerous applications of simple harmonic motion, the present work intends to evaluate, individually, the mass-spring system, conceptualizing and characterizing it explicitly through mathematical modeling, which assumes a preponderant role in the display of its equations . For this, we resort to the use of differential equations, arriving at a function that describes this system. We also use concepts from linear algebra, such as the concepts of eigenvalue and eigenvector. In this way, we model and solve the simple harmonic oscillator problem, using abstract algebra concepts and a bit of advanced calculus; it is expected that the reader already has some familiarity with those topics so he can enjoy the reading. We present theorems that guarantee both the existence and the uniqueness of the solutions of the systems of differential equations used in the modeling. In addition, we show the main facts about the structure of solutions of such systems. We also show the solutions of linear systems of homogeneous differential equations with constant coefficients, making the generalization of the solutions by exponentials of matrices. We present the solution and in the sequence we give the classification of such solutions for some cases according to the type of eigenvalue. Therefore, we have studied the damped oscillator, underdamped oscillator, etc

Keywords: Algebra. Oscillator. Systems of differential equations. Eigenvalue.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Movimento harmônico simples.	36
Figura 2 – Posição de equilíbrio.	36
Figura 3 – Equilíbrio, alongamento e compressão da mola.	37
Figura 4 – Reta de singularidades.	44
Figura 5 – Ponto de sela.	45

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	13
2.1	ÁLGEBRA	13
2.1.1	Operadores (Simétricos e Ortogonais.)	15
2.1.2	Diagonalização de Operadores	16
2.1.3	Norma Euclidiana	18
2.1.4	Autovetores generalizados	22
2.1.5	Autovalores complexos	23
2.1.6	Forma canônica de Jordan	26
2.2	CÁLCULO	31
2.2.1	Equações diferenciais de ordem n	31
2.2.2	Sistema de equações diferenciais de primeira ordem.	31
3	MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (MHS)	35
3.1	CARACTERÍSTICAS E ASPECTOS FÍSICOS	35
3.2	MOVIMENTOS PERIÓDICOS	35
3.3	MOVIMENTO OSCILATÓRIO	36
4	APLICAÇÃO	39
4.1	MODELAGEM E RESOLUÇÃO DO SISTEMA MASSA MOLA	39
4.2	PROBLEMAS RESOLVIDOS	46
4.3	EXERCÍCIOS PROPOSTOS	48
5	CONCLUSÃO	49
	REFERÊNCIAS	51

1 INTRODUÇÃO

As vibrações mecânicas são conhecidas pela humanidade há bastante tempo. Instrumentos rudimentares, como apitos e tambores, tem em seu princípio de funcionamento um problema vibratório como essência. É interessante salientar que estes tiveram muita importância para os povos antigos como meio de comunicação; com o passar do tempo podemos apontar o surgimento de outros instrumentos musicais, como percussão, cordas, metais, entre outros, todos estes concebidos por movimentos vibratórios geradores de ondas sonoras. Com isso, surge a necessidade de se desenvolver uma teoria sobre essas vibrações, algo que ocorre com os avanços das ciências básicas das quais derivam-se: matemática e mecânica geral. A origem, em termos históricos, encontra-se nos antigos filósofos gregos do primeiro milênio antes de Cristo. Entre esses movimentos vibratórios, o objetivo deste trabalho será o estudo aprofundado do MHS (movimento harmônico simples).

O estudo do MHS tem sua importância centrada em duas grandes razões: primeiramente, o fato de o MHS ser um movimento muito comum, presente com frequência no cotidiano, aparecendo, por exemplo, em gangorras, molas, pêndulos, etc. Em segundo lugar, o fato de que o estudo do MHS representa um dos melhores exemplos das aplicações das leis da mecânica. Nesse contexto, temos de forma muito clara um dos problemas centrais da mecânica, que é o de determinar a posição de uma partícula quando forças agem sobre a mesma. O objetivo deste trabalho é modelar e resolver o problema do oscilador harmônico simples no caso em que o sistema possui apenas uma mola, estudando todos os casos possíveis para este sistema. A importância desse estudo se dá também pelo fato de mostrar a matemática presente embasando tal estudo, pois muitas vezes é visto superficialmente na disciplina de física no ensino médio. Dessa forma, deixa-se de oportunizar a este público a beleza e a criatividade que a matemática traz consigo.

Com o objetivo já citado acima, o presente trabalho está dividido em quatro capítulos. No segundo capítulo, é feita uma revisão enfocando temas ligados à álgebra linear, como autovalor e autovetor, polinômio característico, matrizes semelhantes, operadores (simétricos e ortogonal), diagonalização de operadores, norma euclidiana, propriedades da norma, autovetores generalizadores, autovalores complexos, equações diferenciais, sistema de equações de primeira ordem, forma canônica de Jordan (concreto e demonstração). No terceiro capítulo abordamos as características e aspectos físicos do MHS, salientando principalmente a importância de tal estudo, trazendo alguma definição inerente ao tema, bem como definições do movimento periódico, movimento oscilatório, frequências, período, força restauradora e, por fim, foi feita a modelagem matemática do MHS, de forma introdutória visando o capítulo seguinte.

Já no capítulo quatro foi feita a modelagem e resolução do sistema massa-mola, fornecendo suas principais expressões, utilizando conceitos previamente estudados, gene-

realizando suas soluções, utilizando para tal, equações diferenciais, sistemas de equações diferenciais, etc. Estudando os principais tipos de amortecimento a saber, não amortecido, amortecido, subamortecido. Na sequência, tem-se o capítulo em que são apresentadas as considerações finais, fornecendo e destacando o comportamento do sistema massa-mola em seus vários casos estudados, mostrando tendências do MHS ao longo do tempo, ou seja, enfatizando o que ocorre em cada caso estudado.

2 PRELIMINARES

Nesta seção, revisaremos conceitos e teorias essenciais para o completo entendimento deste trabalho, principalmente teorias relacionadas a álgebra e cálculo, que de certa forma são pilares de toda a matemática.

2.1 ÁLGEBRA

Álgebra é sem dúvidas um dos campos mais belos da matemática. Assim como abordados previamente em ARAUJO (2017), LIMA (2014) e STEINBRUCH e WINTERLE (1987) conceitos de álgebra se estendem por toda a área da matemática; neste sentido, revisaremos alguns tópicos essenciais que serão usados no corpo deste trabalho.

Definição 2.1 (Autovalor e Autovetor) Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear. Dizemos que o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se existir um vetor não nulo $v \in V$, tal que:

$$T(v) = \lambda v$$

Dizemos que esse vetor v é o autovetor de T associado ao autovalor λ .

Observação 2.1 Dizemos que a transformação linear T é um operador linear quando o domínio e o contradomínio de T são o mesmo espaço vetorial.

Exemplo 2.1 Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x - y, -4x + y)$. Determine, se existirem, os autovalores para T . Caso existam, determine seus respectivos autovetores.

Resolução: Temos que $T(v) = \lambda v$, $v \in V$, $v \neq 0$. Seja $v = (x, y)$, assim, temos que

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \lambda(x, y) \\ (x - y, -4x + y) &= (\lambda x, \lambda y), \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{cases} x - y = \lambda x \\ -4x + y = \lambda y \end{cases} \implies \begin{cases} x - \lambda x - y = 0 \\ -4x + y - \lambda y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (1 - \lambda)x - y = 0 \\ -4x + (1 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Como queremos outras soluções, que não seja a trivial, assim

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies (1 - \lambda)(1 - \lambda) - (-1)(-4) = 0 \implies (1 - \lambda)^2 - 4 = 0$$

De onde obtemos que

$$1 - \lambda = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \lambda = 1 \pm 2,$$

logo, encontramos dois possíveis valores de λ , que são $\lambda_1 = 3$ ou $\lambda_2 = -1$.

Agora prosseguiremos com o cálculo de seus autovetores.

Para $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x - y = 0 \\ -4x + (1 - \lambda)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x - y = 0 \Rightarrow y = -2x.$$

Portanto, $v_2 = (x, -2x) = x(1, -2)$, com $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Para $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x - y = 0 \\ -4x + (1 - \lambda)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x.$$

Portanto, $v_2 = (x, 2x) = x(1, 2)$, com $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Definição 2.2 Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Chamamos de núcleo de T e denotamos por $\ker(T)$ todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$, onde 0 denota o vetor nulo de W .

Teorema 2.1 Dizemos que λ é um autovalor do operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se, e só se, λ é raiz do determinante $(A - \lambda I) = 0$, sendo I a matriz identidade.

Demonstração: Seja α a base canônica de \mathbb{R}^n e $A = [T]_\alpha^\alpha$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} Tv &= \lambda v \Leftrightarrow Tv - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (T - \lambda I)v = 0. \\ \Leftrightarrow v &\in \ker(T - \lambda I) = 0, v \neq 0. \\ \Leftrightarrow \det [T - \lambda I]_\alpha^\alpha &= 0, I_n = [I]_\alpha^\alpha. \\ \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) &= 0. \end{aligned}$$

■

Observação 2.2 Portanto iremos utilizar a equivalência $T \leftrightarrow A$, sendo $A = [T]_\alpha^\alpha$.

Definição 2.3 Chamamos $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ de polinômio característico.

Teorema 2.2 Seja A uma matriz real, temos que A e A' tem o mesmo polinômio característico. Sendo A' a transposta de A

Demonstração:

$$P_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda I) = \det(A' - \lambda I)' = \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda).$$

Logo, $P_{A'}(\lambda) = P_A(\lambda)$. ■

Definição 2.4 Dizemos que duas matrizes A e B são semelhantes (ou conjugadas) se $\exists P$, invertível, tal que

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Teorema 2.3 Duas matrizes semelhantes tem o mesmo polinômio característico.

Demonstração:

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\ &= \det [P^{-1} \cdot A \cdot P - P^{-1}(\lambda I)P] \\ &= \det [P^{-1} \cdot (A - \lambda I) \cdot P] \\ &= \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P \\ &= \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda). \end{aligned}$$

2.1.1 Operadores (Simétricos e Ortogonais.)

Definição 2.5 Operador simétrico é tal que $A = A'$.

Teorema 2.4 O operador simétrico tem o mesmo polinômio característico.

Demonstração: Ver o Teorema 2.1.

Definição 2.6 Operador ortogonal é tal que $\|T(v)\| = \|v\|$, ou seja, mais precisamente, seja V um espaço vetorial euclidiano, um operador $T : V \rightarrow V$ é ortogonal se preservar o módulo de cada vetor, isto é, para qualquer $v \in V$, tem-se: $\|T(v)\| = \|v\|$.

Teorema 2.5 Se T é ortogonal, então todos os autovalores de T são, em módulo, iguais a 1.

Demonstração: Basta observar que

$$T(v) = \lambda v \Rightarrow \|T(v)\| = \|\lambda v\| \Rightarrow \|v\| = \|\lambda\| \cdot \|v\| \Rightarrow \|\lambda\| = 1.$$
■

Teorema 2.6 Se $T(v) \cdot v > 0$, então $\lambda > 0$.

Demonstração: Como $T(v) = \lambda v$, temos que

$$T(v) \cdot v > 0 \Rightarrow \lambda v \cdot v > 0 \Rightarrow \lambda \|v\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0.$$
■

Teorema 2.7 O operador ortogonal preserva distâncias.

Demonstração: Seja $d = \|u - v\|$ e $\bar{d} = \|T(v) - T(u)\|$, tem-se então

$$\bar{d} = \|T(v) - T(u)\| = \|T(v - u)\| = \|(v - u)\| = d.$$

Logo $d = \bar{d}$. ■

2.1.2 Diagonalização de Operadores

Definição 2.7 *Diagonalização de operadores:* Dado um operador linear $T : V \rightarrow V$, a cada B de V corresponde uma matriz $[T]_B$ que representa T na base B .

Nosso objetivo é obter uma base do espaço de modo que a matriz de T nessa base seja a mais simples representante de T . Essa matriz é dita matriz diagonal.

Teorema 2.8 *Autovetores associados a autovalores distintos de um operador linear $T : V \rightarrow V$ são linearmente independentes.*

Demonstração: Considerando dois autovalores distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos:

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 \text{ e } T(v_2) = \lambda_2 v_2.$$

Considerando a igualdade

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0. \tag{1}$$

Dessa forma, temos também que:

$$a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) = 0 \text{ ou } a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0. \tag{2}$$

Multiplicando a equação (1) por λ_1 , obtemos:

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 = 0. \tag{3}$$

Subtraindo a equação (3) da equação (2), ficaremos com

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0,$$

mas como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ e como $v_2 \neq 0$, logo, $a_2 = 0$. Substituindo $a_2 = 0$ em (1), temos:

$$a_1 v_1 + 0v_2 = 0 \Rightarrow a_1 v_1 = 0,$$

como $v_1 \neq 0$, então $a_1 = 0$. Portanto o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI. ■

Sempre que tivermos um operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, o conjunto

v_1, v_2 , formado pelos autovetores associados, será uma base do \mathbb{R}^2 . Esse conceito pode ser estendido para qualquer espaço vetorial. Isto é, se $T : V \rightarrow V$ é linear, $\dim V = n$ e T possui n autovalores distintos, o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, formado pelos correspondentes autovetores, é uma base de V .

Processo para diagonalização:

P_1) Determinar $P_A(\lambda)$.

P_2) Calcular os autovalores.

P_3) Determinar os autovetores.

P_4) Determinar P e P^{-1} tal que $D = PAP^{-1}$, ou seja, P diagonaliza A , onde P é formada pelos autovetores.

Exemplo 2.2 Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-3x - 5y, 2y)$, a matriz canônica de T é:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, para fazermos a diagonalização seguiremos os seguintes passos: P_1) Polinômio característico:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & -5 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (-3 - \lambda)(2 - \lambda) = P_A(\lambda).$$

Ou seja $P_A(\lambda) = (-3 - \lambda)(2 - \lambda)$.

P_2) Cálculo dos autovalores ($P_A(\lambda) = 0$):

$$(-3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ e } \lambda_2 = -3.$$

Portanto, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$ são os autovalores de T , como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, os correspondentes autovetores formam uma base de \mathbb{R}^2 .

P_3) Determinação dos autovetores:

Para $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{cases} (-3 - \lambda)x - 5y = 0 \\ 0x + (2 - \lambda)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x - 5y = 0 \\ 0x + 0y = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$-5x - 5y = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x.$$

Logo, $v_1 = (x, -x) = x(1, -1)$, portanto, $v_1 = (1, -1)$.

Para $\lambda_2 = -3$, obtemos de forma análoga $v_2 = (1, 0)$. Assim o conjunto $\{(1, -1), (1, 0)\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 .

P_4) Determinar P e P^{-1} tal que $D = PAP^{-1}$:

Pelo teorema 2.8, temos que $P = \{v_1, v_2\}$ é uma base do \mathbb{R}^2 . Tendo em vista que:

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 \text{ e } T(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2$$

Assim o operador T é representado na base P dos autovetores pela matriz diagonal

$$[T]_P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D$$

A matriz quadrada A é diagonalizável se existe uma matriz invertível P tal que $D = P^{-1}AP$, sendo P a matriz cujas colunas são os autovetores do operador T . Diz-se nesse caso, que a matriz P diagonaliza A , ou que P é a matriz diagonalizadora.

Calculando $P^{-1}AP$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = D.$$

2.1.3 Norma Euclidiana

A norma euclidiana associa a cada vetor v um número real, do ponto de vista mais elementar, esse número real seria uma representação para o “tamanho” do vetor.

Definição 2.8 Dado $v \in \mathbb{R}^n$, temos que a norma euclidiana de v é denotada por $\|v\|$. Além disso, se $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, então

$$\|v\| = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{1/2}$$

e possui as seguintes propriedades:

- (i) $\|v\| \geq 0$
- (ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- (iii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- (iv) $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$, sendo $u, v \in \mathbb{R}^n$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Em geral, dado um espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$, a função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma norma quando satisfaz as propriedades da definição 2.8.

Exemplo 2.3 Seja $(M(n), +, \cdot)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas munidas da soma das matrizes e produto por escalar usuais, a função $\|\cdot\| : M(n) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\|A\| = \sup\{\|AX\| / \|X\| \mid X \in M(n, 1), \|X\| \leq 1\} = \sup\{\|AX\| \mid X \in M(n, 1), \|X\| = 1, A \in M(n)\},$$

é uma norma sobre $M(n)$.

Além das propriedades da definição 2.8, a norma $\| \cdot \|$ ainda satisfaz:

$$(v) \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

$$(vi) \|A^m\| \leq (\|A\|)^m$$

Agora, considerando o espaço vetorial normado $(M(n), \| \cdot \|)$, um caminho é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow M(n)$ de tal forma que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = L, L \in M(n) \Leftrightarrow \|f(t) - L\| < \varepsilon,$$

sempre que $|t - a| < \delta$ e

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t+h) - f(t)),$$

se o limite existir, satisfazendo

$$f'(0) = A$$

$$f'(t) = f'(0) \cdot f(t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$f'(t) = A \cdot f(t).$$

Resolução: Sabemos que

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t+h) - f(t))$$

se o limite existir. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(t+h) - f(t)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{(t+h)A} - e^{tA}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{tA+hA} - e^{tA}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{tA} \cdot e^{hA} - e^{tA}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{hA} - I) e^{tA} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} (e^{hA} - I) \right] e^{tA}. \end{aligned}$$

Afirmo que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (e^{hA} - I)$$

existe e é tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{hA} - I) = A = f'(0).$$

Pela definição de limites por caminhos em $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ do que $\varepsilon > 0$, tome

$$|h| < \frac{\varepsilon}{\|A\|^2 \cdot e^{\|A\|}},$$

com $h \rightarrow 0$. Como $\|hA\| \leq |h|\|A\| \leq \|A\|$, temos $|h| < 1$. De fato

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h}(e^{hA} - I) - A \right\| &= \left\| \frac{1}{h}(e^{hA} - I) - \frac{1}{h}(hA) \right\| \\ &= \frac{1}{|h|} \|(e^{hA} - I) - hA\| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \cdot \|A\|^2 \cdot e^{\|hA\|} \\ &\leq |h| \cdot \|A\|^2 \cdot e^{\|A\|} = cte. \end{aligned}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, sempre que $|h| < \frac{\varepsilon}{\|A\|^2 \cdot e^{\|A\|}}$ teremos

$$\left\| \frac{1}{h}(e^{hA} - I) - I \right\| < \varepsilon.$$

Assim,

$$f'(t) = A \cdot e^{tA} = f'(0) \cdot f(t).$$

Por fim, como

$$f'(t) = f'(0) \cdot f(t)$$

e como $f'(0) = A$, logo,

$$f'(t) = f'(0) \cdot f(t) = A \cdot f(t),$$

ou seja,

$$f'(t) = A \cdot f(t).$$

■

Seja $(S_k), k \in \mathbb{N}$, uma sequência dada por

$$S_k = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} A^m$$

afirmamos que S_k é limitada.

Com efeito:

$$\|S_k\| = \left\| \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} A^m \right\| \leq \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \|A\|^m \leq e^{\|A\|}.$$

Logo, pelo teorema de Borel, S_k possui uma subsequência convergente denotada por (S_k) .

Definição 2.9 Definimos $\text{Exp}(A) = e^A = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$, com $A \in M(n)$.

Proposição 2.1 Sejam A, B e W matrizes em $M_n(\mathbb{R})$. Seja X a variável em $M_n(\mathbb{R})$.

(i) Está bem definida a matriz

$$e^A = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{m!} \in M_n(\mathbb{R}).$$

(ii) Se A e B comutam então $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

(iii) A matriz e^A é invertível. Ainda, $e^0 = I$ e $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(iv) Se W é invertível, então $e^{W^{-1}AW} = W^{-1}e^AW$.

Demonstração:

(i) Note que

$$\left\| \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} A^m \right\| \leq \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \|A^m\| \leq \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \|A\|^m \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \|A\|^m = e^{\|A\|}.$$

Como cada soma parcial $S_0, S_1, S_2, \dots, S_k$ são tais que $\|S_0\|, \|S_1\|, \dots, \|S_k\| \leq e^{\|A\|}$. Logo,

$$\left\| \lim_{k \rightarrow \infty} S_k \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k\| \leq e^{\|A\|}.$$

Segue que

$$\lim S_k \in M(n) \Rightarrow \text{Exp}(A) \in M(n).$$

(ii)

$$e^{A+B} = \sum_{j,k=0}^{+\infty} \left| \frac{A^j}{j!} \cdot \frac{B^k}{k!} \right| \leq \sum_{j,k=0}^{+\infty} \frac{|A|^j}{j!} \cdot \frac{|B|^k}{k!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|A|^j}{j!} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|B|^k}{k!} = e^{\|A\|} \cdot e^{\|B\|} < +\infty.$$

*Por Euler e pela comutatividade entre A e B .

(iii)

Temos que $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$. Faça $A = B = 0$, daí

$$e^{0+0} = e^0 \cdot e^0 \Rightarrow e^0 = e^0 \cdot e^0 \Rightarrow (e^0)^{-1} \cdot e^0 = (e^0)^{-1} \cdot e^0 \cdot e^0 \Rightarrow I = I \cdot e^0 \Rightarrow I = e^0.$$

Por fim, faça $B = -A \Rightarrow A + B = 0$

$$\begin{aligned} e^0 &= e^A \cdot e^{-A} \Rightarrow I = e^A \cdot e^{-A} \\ &\Rightarrow (e^A)^{-1} \cdot I = (e^A)^{-1} \cdot e^A \cdot e^{-A} \\ &\Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}. \end{aligned}$$

(iv) Sejam A e B matrizes semelhantes ($B = P^{-1}AP$). Então, $e^B = P^{-1} \cdot e^A \cdot P$, ou seja, se A e B são semelhantes, então e^A e e^B também são e com a mesma matriz de semelhança.

Demonstração:

$$e^B = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|B^m|}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|P^{-1}AP|^m}{m!} ** = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|P^{-1}A^mP|}{m!} = P^{-1} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|A^m|}{m!} \cdot P = P^{-1}e^AP$$

**Se $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$, então $B^m = P^{-1} \cdot A^m \cdot P$.

Prova: Por indução em m

(i) $B^2 = B \cdot B = (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P) = P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot A^2 \cdot P$

(ii) Suponha que $B^k = P^{-1} \cdot A^k \cdot P$ seja verdadeira.

(iii) $B^{k+1} = B^k \cdot B = P^{-1} \cdot A^k \cdot P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot A^k \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot A^{k+1} \cdot P$ ■

2.1.4 Autovetores generalizados

Considere o polinômio característico $P_A(\lambda)$ de A . Uma raiz complexa $z = a+ib$, $b \neq 0$ de $P_A(\lambda)$, se houver é chamada de autovalor generalizado de A .

Observação 2.3 Se z é raiz de $P_A(\lambda)$, então \bar{z} também o é.

Observação 2.4 Se $z = a + ib$, $b \neq 0$ é raiz de $P_A(\lambda)$, temos que $z \cdot v \in \mathbb{R}^n$, $\forall v \neq 0$, o que implica dizer que z é autovalor de A no sentido da Definição 2.1.

Diremos que um vetor não-nulo $w \in \mathbb{C}^n$ é um autovetor generalizado de A associado ao autovalor generalizado z , se $AW = zw \in \mathbb{C}^n$.

Problema 2.1 Dados uma matriz $A \in M(n)$, um número complexo não-real z e um vetor não-nulo $w \in \mathbb{C}^n$, temos:

a) Se W é um autovetor complexo de A com autovalor z , então \bar{W} é um autovetor complexo de A com autovalor \bar{z} .

b) Se W é um autovetor complexo de A então $\{W, \bar{W}\}$ é linearmente independente em

\mathbb{C}^n .

Demonstração: Como A é uma matriz real, o polinômio característico $P_A(t)$ de A tem coeficientes reais e portanto, $\overline{P_A(t)} = P_A(\bar{t})$; se z é um autovalor complexo de A , então:

a) $A\bar{W} = \overline{AW} = \overline{ZW} = \bar{Z} \cdot \bar{W}$, já que A é uma matriz real e assim \bar{W} é autovetor complexo de A com autovalor \bar{Z} . Além disso, como z e \bar{z} são distintos, então seus autovetores associados $\{W, \bar{W}\}$ são linearmente independentes em \mathbb{C}^n .

b) Se W é autovetor em \mathbb{C}^n , então $\{W, \bar{W}\}$ é LI.

Temos que,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \cdot W + t \cdot \bar{W} \Rightarrow 0 = A \cdot 0 = A(\alpha \cdot W + t \cdot \bar{W}) \\ &= \alpha \cdot A \cdot W + t \cdot A \cdot \bar{W} = \alpha \cdot Z \cdot W + t \cdot \bar{Z} \cdot \bar{W}, \end{aligned}$$

Assim teremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \alpha \cdot W + t \cdot \bar{W} = 0 \\ \alpha \cdot Z \cdot W + t \cdot \bar{Z} \cdot \bar{W} = 0 \end{cases} \times (Z) \sim \begin{cases} \alpha \cdot W \cdot Z + t \cdot \bar{W} \cdot Z = 0 \\ \alpha \cdot Z \cdot W + t \cdot \bar{Z} \cdot \bar{W} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Subtraindo as igualdades em (4) obtemos que $t \cdot (Z - \bar{Z}) \cdot \bar{W} = 0$, desta última igualdade, temos

$$Z - \bar{Z} \neq 0 \text{ e } \bar{W} \neq 0.$$

Portanto $t = 0$. ■

Corolário 2.1 Se $W \in \mathbb{C}^n$ é autovetor de A , associado a um autovalor $Z \notin \mathbb{R}$, então $W \notin \mathbb{R}^n$, ou seja, $\text{Im}(W) \neq 0 (\in \mathbb{R}^n)$.

2.1.5 Autovalores complexos

Considere a equação $X' = AX$ onde $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz com entradas reais e suponha que o número complexo $\lambda = a + ib$ seja um autovalor de A , com $b \neq 0$, associado ao autovetor $W = u + iv$.

Para o que se segue, utilizaremos dois fatos a saber:

a) Se W é um autovetor complexo de A , então $\{W, \bar{W}\}$ é linearmente independente em \mathbb{C}^n , isto foi provado na proposição 2.1.

b) Seja $A \in M(n)$ uma matriz real e $W \in \mathbb{C}^n$ um autovalor complexo de A associado ao autovalor $a + ib \in \mathbb{C}$ com $b \neq 0$.

Escrevendo $W = u + iv$, com $u, v \in \mathbb{R}^n$ dado por

$$u = \frac{1}{2} \cdot (W + \bar{W}) \text{ e } v = \frac{1}{2i} \cdot (W - \bar{W})$$

Assim, temos que u, v são linearmente independentes em \mathbb{R}^n e mais ainda:

$$A \cdot u = a \cdot u - b \cdot v \quad (5)$$

e

$$A \cdot v = b \cdot u + a \cdot v. \quad (6)$$

Demonstração: Seja W autovetor complexo de A e sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $W = u + iv$. Como nas equações (5) e (6).

Suponhamos por absurdo que $\{u, v\}$ seja linearmente dependente em \mathbb{R}^n , isto é, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha \cdot u$. Assim

$$W - \overline{W} = 2iv = i\alpha(W + \overline{W})$$

e conseqüentemente

$$(1 - i\alpha)W = (1 + i\alpha)\overline{W}.$$

Como $(1 - i\alpha)$ e $(1 + i\alpha)$ são não nulos, segue que $\{W, \overline{W}\}$ é linearmente dependente em \mathbb{C}^n , o que contraria a proposição (2.1), item c. Portanto, $\{u, v\}$ é linearmente independente. Por outro lado, seja $z = a + ib$, com $b \neq 0$ o autovalor associado a W . As equações (5) e (6) seguem da igualdade

$$A \cdot u + iAv = A(u + iv) = AW = zW = (a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(bu + av).$$

■

Observação 2.5 Sendo A uma matriz real, então os coeficientes de seu polinômio característico são reais, conseqüentemente, os autovalores complexos, se houver, devem aparecer aos pares conjugados. Portanto sendo λ autovalor, segue que $\bar{\lambda}$ também é e, além disso, os autovetores também são conjugados.

Prova Admitindo que λ é autovalor associado ao autovetor W , assim

$$(A - \lambda I)W = 0 \Rightarrow \overline{(A - \lambda I)W} = (A - \bar{\lambda} I)\overline{W} = 0.$$

Sabemos que dada a equação $X' = AX$ onde $A \in M(n)$. Sendo $v \in \mathbb{R}^n$ um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, então para $t \in \mathbb{R}$, qualquer, temos

$$X(t) = e^{\lambda t} \cdot v.$$

Sendo solução de $X' = AX$, com $X(0) = v$, fato esse, já demonstrado em seções anteriores. Salientamos, no entanto, que este fato permanece válido no caso complexo, uma vez que para demonstrá-lo não usamos a hipótese de o autovalor ser real. Assim, são soluções de

$X' = AX$:

$$X(t) = (u + iv)e^{(a+ib)t} \quad (7)$$

e

$$X(t) = (\overline{u + iv})e^{\overline{(a+ib)}t} \quad (8)$$

Usando a exponencial de Euler em (7), ficamos com

$$\begin{aligned} X(t) &= (u + iv) \cdot e^{at} \cdot e^{ibt} \\ X(t) &= e^{at} \cdot (u + iv) \cdot e^{ibt} \\ X(t) &= e^{at} \cdot (u + iv) \cdot (\cos(bt) + i\text{sen}(bt)) \\ X(t) &= e^{at} \cdot [u\cos(bt) + i\text{usen}(bt) + iv\cos(bt) - v\text{sen}(bt)] \end{aligned}$$

Portanto, escrevendo $X(t) = X_1(t) + iX_2(t)$, vem que

$$X_1(t) = e^{at}[u\cos(bt) - v\text{sen}(bt)] \quad (9)$$

e

$$X_2(t) = e^{at}[u\text{sen}(bt) - v\cos(bt)] \quad (10)$$

Notemos que as funções (9) e (10) satisfazem $X' = AX$. Para provarmos isso, lembremos do item (b), da definição de autovalores complexos, onde escrevemos que $Au = au - bv$ e $Av = bu + av$ e então derivando (9), obteremos:

$$X_1'(t) = t \cdot e^{at} \cdot [u\text{sen}(bt) + v\cos(bt)] - e^{at}[v\text{tsen}(bt) - bu\cos(bt)],$$

assim,

$$X_1'(t) = A \cdot e^{at}(u\cos(bt) - v\text{sen}(bt)) = AX_1(t).$$

De forma análoga, prova-se que (10) também é solução de $X' = AX$. Além disso, é possível provar que $X_1(t)$ e $X_2(t)$ sempre são linearmente independentes.

Observação 2.6 *Tanto faz pegarmos as equações (7) ou (8), os resultados se manteriam e a discussão feita seria a mesma, ou seja, bastaria escolher um autovalor complexo.*

Observação 2.7 *Prova-se em análise complexa que a exponencial natural de um número imaginário é igual a uma soma de funções trigonométricas, ou seja*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i\text{sen} \theta.$$

Assim, se a matriz A admite o complexo $\lambda_1 = a + ib$ e conseqüentemente $\lambda_2 = a - ib$ e os reais $\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n$ reais como autovalores associados aos autovetores de

(9), (10), v_3, v_4, \dots, v_n a solução geral de $X' = AX$, se escreverá como

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + c_3 e^{X_3 t} \cdot v_3 + \dots + c_n e^{X_n t} \cdot v_n$$

2.1.6 Forma canônica de Jordan

A forma canônica de Jordan é uma forma de representar uma matriz ou operador linear através de uma outra matriz semelhante a original que é quase uma matriz diagonal. No corpo dos números complexos, esta forma é uma matriz triangular superior, em que os únicos elementos não nulos são aqueles da diagonal principal ou aqueles imediatamente acima desta.

Teorema 2.9 (Teorema da forma canônica de Jordan (caso 2 x 2).) *Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e sejam λ_1 e λ_2 raízes do polinômio característico de A . Então ocorre uma das seguintes possibilidades:*

- 1) $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, ou seja, A é diagonalizável.
- 2) $A \sim \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, onde $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.
- 3) $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, onde $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

Observação 2.8 *No primeiro caso as matrizes são diagonalizáveis, pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Como já abordado nas preliminares deste trabalho.*

Sendo assim, começaremos a demonstração deste teorema pelo caso 2, onde $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ são raízes do polinômio característico, temos, portanto, que tais autovalores são generalizados de uma matriz A . Vamos supor então que exista uma matriz P e uma matriz J ambas de ordem 2 de modo que $AP = PJ$, dessa forma, teremos então que J é uma matriz semelhante a A . Portanto nosso objetivo é demonstrar a existência da matriz J de tal maneira que satisfaça a igualdade $AP = PJ$.

Demonstração: Seja A uma matriz qualquer,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Onde seu polinômio característico será dado por:

$$\begin{aligned}
 P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
 &= \det \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] \\
 &= \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= (a - \lambda) \cdot (d - \lambda) - bc = ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc \\
 &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc.
 \end{aligned}$$

Ou seja, $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$.

Daí, teremos que

$$\Delta = [\text{tr}(A)]^2 - 4 \cdot \det A < 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (a + d)^2 - 4 \cdot (ad - bc) < 0, \\
 \Delta &= a^2 + 2ad + d^2 - 4 \cdot ad + 4bc < 0, \\
 \Delta &= a^2 - 2ad + d^2 + 4bc < 0.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc < 0.$$

Sendo assim, suas raízes serão complexas, implicando dessa forma que a matriz A não é diagonalizável. Logo, suas raízes são da forma

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i \text{ e } \lambda_2 = \alpha - \beta i$$

e fazendo $W = \alpha + \beta i$ um autovalor qualquer complexo de A , temos, pela aplicação ortogonal que:

$$J(W) = J(\alpha + \beta i) = (\overline{W} + i\overline{W}),$$

daí,

$$\overline{W} = \alpha - \beta i \text{ e } i\overline{W} = \alpha i - \beta i^2 = \alpha i + \beta = \beta + \alpha i.$$

Logo,

$$J(\alpha + \beta i) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

e seja $W = U + iV$, onde $W, U, V \in M(2)$. Como λ é autovalor complexo de A associado a W , temos $AW = \lambda W$, mas

$$(i) \quad AW = A(U + iV) = AU + iAV.$$

$$(ii) \lambda W = (\alpha + \beta i)(U + iV) = \alpha U + \alpha iV + \beta iU - \beta V = (\alpha U - \beta V) + i(\alpha V + \beta U).$$

Logo,

$$AW = \lambda W \Rightarrow AU + iAV = (\alpha U - \beta V) + i(\alpha V + \beta U)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AU = \alpha U - \beta V = \alpha \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ AV = \alpha V + \beta U = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} PJ &= \begin{pmatrix} \mu_1 & v_1 \\ \mu_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mu_1 - \beta v_1 & \beta\mu_1 + \alpha v_1 \\ \alpha\mu_2 - \beta v_2 & \beta\mu_2 + \alpha v_2 \end{pmatrix} \\ &= \left[\alpha \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\beta \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$\lambda P = AP$, pois λP provem de $AP = \lambda P$ uma vez que λ é autovalor de A . Portanto, $AP = PJ$ ■

Já para o 3º caso da forma canônica de Jordan analisaremos as matrizes que possui apenas um autovalor real. Assim,

Dado a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ temos pelo 1º caso, que

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A) + \det(A)$$

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ é seu polinômio característico. Neste caso, como os autovalores são reais e iguais, então:

$$\Delta = [\text{tr}(A)]^2 - 4 \cdot \det A = 0.$$

Logo

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{a + b \pm 0}{2} = \frac{a + d}{2}.$$

Assim,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a + d}{2}.$$

Neste caso dizemos que o discriminante do polinômio característico é zero.

Temos, portanto, dois subcasos a considerar:

i) A matriz $(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow A = \lambda I$ e, portanto, já é diagonal.

ii) Se $(A - \lambda I) \neq 0, \exists W$ tal que $(A - \lambda I)W \neq 0$. (Seja $v \in V$ tal que $v \neq 0$ e $(A - \lambda I)W = v$). Logo, $AW - \lambda IW = v \Rightarrow AW - \lambda W = v \Rightarrow AW = \lambda W + v$.

De i), temos:

$$A - \lambda I = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)^2 = 0^2 \Rightarrow A^2 - 2A\lambda I + \lambda^2 I^2 = 0,$$

portanto,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - 2\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\lambda a & -2\lambda b \\ -2\lambda c & -2\lambda d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\lambda a & -2\lambda b \\ -2\lambda c & -2\lambda d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim, seja

$$C = \begin{pmatrix} a^2 + bc - 2\lambda a + \lambda^2 & ab + bd - 2\lambda b \\ ac + dc - 2\lambda c & bc + d^2 - 2\lambda d + \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analisando cada um dos elementos da igualdade acima temos:

$$\begin{aligned} c_{11} &= a^2 + bc - 2\lambda a + \lambda^2 = 0 \\ &= a^2 + bc - 2a \left(\frac{a+d}{2} \right) + \left(\frac{a+d}{2} \right)^2 \\ &\Rightarrow a^2 + bc - a^2 - ad + \left(\frac{a+d}{2} \right)^2 = 0 \\ &\Rightarrow bc - ad + \frac{a^2 + 2ad + d^2}{4} = 0 \quad (\times 4) \\ &\Rightarrow 4bc - 4ad + a^2 + 2ad + d^2 = 0 \\ &\Rightarrow 4bc - 2ad + a^2 + d^2 = 0 \\ &\Rightarrow a^2 - 2ad + d^2 + 4bc = \Delta = 0 \end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= ab + bd - 2b \left(\frac{a+d}{2} \right) = ab + bd - ab - bd = 0 \\
 c_{21} &= ac + dc - 2\lambda c = 0 \\
 &= ac + dc - 2c \left(\frac{a+d}{2} \right) = ac + dc - ac - dc = 0 \\
 c_{22} &= bc + d^2 - 2\lambda d + \lambda^2 = 0 \\
 &= bc + d^2 - 2d \left(\frac{a+d}{2} \right) + \left(\frac{a+d}{2} \right)^2 \\
 &= bc + d^2 - ad - d^2 + \frac{a^2 + 2ad + d^2}{4} (\times 4) \\
 \Rightarrow c_{22} &= 4bc + 4d^2 - 4ad - 4d^2 + a^2 + 2ad + d^2 = (a+d)^2 + 4bc - 4ad \\
 \Rightarrow c_{22} &= (a+d)^2 - 4(ad - bc) = \Delta = 0
 \end{aligned}$$

Para o subcaso ii), tome $W = (W_1, W_2)$. Como W não é autovetor de A , então:

$$AW \neq \lambda W \Rightarrow AW - \lambda W \neq 0 \Rightarrow (A - \lambda I)W \neq 0$$

Como $v = (A - \lambda I)W$, temos que

$$(A - \lambda I)v = (A - \lambda I)^2 W,$$

por i), temos

$$(A - \lambda I)v = (A - \lambda I)^2 W = 0W = 0.$$

Assim

$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow Av - \lambda v = 0 \Rightarrow Av = \lambda v$$

Portanto, v é autovetor de A .

Dessa forma temos

$$\begin{aligned}
 AP &= A[v \quad W] = [Av \quad AW] \\
 &= [Av \quad v + \lambda W] \\
 &= [\lambda v \quad v + \lambda W] \\
 \Rightarrow AP &= [\lambda v + 0W \quad v + \lambda W] \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = JP.
 \end{aligned}$$

Portanto, $AP = JP$. ■

2.2 CÁLCULO

2.2.1 Equações diferenciais de ordem n .

As equações diferenciais aparecem naturalmente em muitas áreas da ciência. No presente trabalho utilizaremos especialmente conceituações vistas em BOYCE e RICHARD (2013), FIGUEIREDO e NEVES (2009) e DOERING e LOPES (2008). O propósito desta seção é mostrar como as equações diferenciais servem para resolver, ou tentar resolver, problemas do cotidiano.

Definição 2.10 *Uma equação diferencial ordinária de grau $n \in \mathbb{N}$ é uma relação da forma*

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0 \in \mathbb{R}^{n+2} \quad (11)$$

Envolvendo uma função $y = y(x)$ e as n derivadas

$$a) \ y' = \frac{dy}{dx}$$

$$b) \ y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

E assim podemos escrever

$$y' = \frac{dy}{dx}, \ y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \ y^n = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right).$$

A função F é suposta contínua e está definida num subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^{n+2}$. A função $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas até a ordem n é chamada uma solução da equação (11), se a substituição $y = f(x)$, $y' = f'(x)$, \dots , $y^n = f^n(x)$, tornar a equação (11) uma identidade em X .

Observação 2.9 *A palavra “ordinária” significa que a função $y = y(x)$ depende somente de uma variável independente X .*

Tem-se que a equação diferencial (11) é linear quando a função F é linear em cada uma das variáveis y, y', \dots, y^n .

2.2.2 Sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Existem muitos problemas de áreas diversas, que estão associados de alguma forma com o emprego ou uso desses sistemas, como exemplo, tirado da física, temos o sistema massa-mola. Alguns problemas descrevem modelos matemáticos que consistem em um sistema de duas ou mais equações diferenciáveis de ordem n que sempre pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Sendo assim, serão utilizados sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas de primeira ordem na sua versão mais simples, onde seus coeficientes

são constantes.

Segundo Doering e Lopes (2008), tais sistemas irão tratar do estudo dos campos lineares $f(x) = T_A(x) = A \cdot X = AX$, onde o operador linear $f = T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dado pela ação $A \cdot X = AX$ da matriz real $A = (a_{ij})_{n \times n}$ sobre o vetor X , ou seja, produto da matriz A com o vetor coluna $n \times 1$ formado pelas coordenadas (canônicas) de $X \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que um caminho $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, é uma solução da equação diferencial linear autônoma

$$X' = AX.$$

Se X é diferencial em \mathbb{R} e, para cada $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$.

Equivalentemente, as funções coordenadas, $X_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de $X(t)$ são soluções de sistemas associados a matriz A , ou seja, do sistema que será formado da seguinte forma.

Dada a equação diferencial $y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y + b(t)$, assim, podemos através de mudança de variável, definir novas coordenadas fazendo-se $X_1 = y, X_2 = y', \dots, X_n = y^{n-1}$ daí, segue que

$$\begin{aligned} X_1' &= x_2, \\ X_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ X_n' &= a_{n-1}x_n + a_{n-2}x_{n-1} + \dots + a_0x_1 + b(t), \end{aligned}$$

Ou seja,

$$X' = AX + g(t).$$

Onde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix} \in M(n)$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

São matrizes coluna com n linhas.

Para entendermos melhor como essa mudança de coordenadas age sobre uma equação diferencial de ordem maior que 1, daremos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.4 Consideremos a equação $y''' = -2y'' + y' - 4y$ e as mudanças de coordenadas $x_1 = y$, $x_2 = y'$ e $x_3 = y''$, daí, segue que $x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_3$ e $x'_3 = -2x_3 + x_2$ e assim, a equação poderá ser reescrita em notação matricial do seguinte modo:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

De modo geral, podemos escrever tal sistema em notação matricial da seguinte forma:

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x'_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \quad (12)$$

Formado com equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes.

Dada uma solução $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (12), dizemos que o ponto $X(0) \in \mathbb{R}^n$ é o valor inicial ou a condição inicial da solução.

Proposição 2.2 Dados uma matriz $A \in M(n)$ e $X_0 \in \mathbb{R}^n$, os caminhos $t \rightarrow e^{tA}$ em $M(n)$ e $t \rightarrow e^{tA} \cdot X_0$ em \mathbb{R}^n são deriváveis e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= Ae^{tA} \in M(n), \\ \frac{d}{dt}e^{tA}X_0 &= Ae^{tA}X_0 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Proposição 2.3 Se $A \in M(n)$ e $X_0 \in \mathbb{R}^n$, então o caminho $X(t) = e^{tA}X_0$, $t \in \mathbb{R}$, define a única solução de $X' = AX$ com condição inicial $X(0) = X_0$.

Demonstração: $X' = \frac{dx}{dt} = Ae^{tA}X$, pela proposição (2.2). Como

$$X(t) = e^{tA}X_0,$$

vem que

$$X' = \frac{dx}{dt} = AX \Rightarrow X' = AX.$$

Como, $X_0 = X(0) = e^{0A}X_0 = e^0X_0 = X_0$ provando assim a existência.

Passemos agora para a prova da unicidade.

Suponha que $\exists y(t)$ tal que $y(t) = e^{-tA}\tilde{X}(t)$, onde $\tilde{X} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja solução do PVI,

sendo assim, teremos:

$$\begin{aligned}
 y'(t) &= e^{-tA} \cdot \tilde{X}'(t) - Ae^{-tA} \cdot \tilde{X}(t) \\
 &= e^{-tA} \tilde{X}'(t) - e^{-tA} \cdot \tilde{X}'(t) = 0 \\
 \Rightarrow y' &\equiv 0 \Rightarrow y = ck \Rightarrow y(0) = \tilde{X}(0) = X_0.
 \end{aligned}$$

Portanto, $X'(t) = e^{tA} \cdot X_0 = X(t)$. ■

Podemos escrever esta proposição da seguinte forma:

Considere a equação $X' = AX$, onde $A \in M(n)$. Seja $X_0 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, dado t real qualquer, $X(t) = e^{\lambda t} \cdot X_0$ é solução de $X' = AX$ com $X(0) = X_0$.

Demonstração: Sendo X_0 autovetor de A associado ao autovalor λ , segue que $AX_0 = \lambda X_0$. Derivando $X(t) = e^{\lambda t} \cdot X_0$ em relação a t , temos:

$$\begin{aligned}
 X'(t) &= \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot X_0, \\
 X'(t) &= e^{\lambda t} \cdot \lambda X_0, \\
 X'(t) &= e^{\lambda t} \cdot AX_0, \\
 X'(t) &= Ae^{\lambda t} \cdot X_0.
 \end{aligned}$$

$X'(t) = AX(t)$ o que conclui a prova. ■

3 MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (MHS)

3.1 CARACTERÍSTICAS E ASPECTOS FÍSICOS

A importância de se estudar o MHS se dá muito pelo fato de vermos tais aplicações em nosso cotidiano. Como exemplos temos: molas, pêndulos, colchões etc.

E também por ser um dos melhores exemplos das aplicações das leis da física, visto que o problema central é exatamente a determinação da posição (X_p) de uma partícula, conhecendo-se as forças que agem sobre a mesma.

Baseando-se nos trabalhos de HALLIDAY, RESNICK E WALKER (2014) e NUSSENZVEIG (2013), deve-se ressaltar que o MHS ocorre sob as seguintes circunstâncias, ocorrendo sempre que as forças atuantes que agem sobre o corpo exibam uma característica a qual é chamada de comportamento elástico. Estas com características especiais, denominaremos como forças elásticas ou forças harmônicas. Não podendo esquecer que temos no MHS, um movimento periódico mais simples se comparado com os outros, sendo também oscilatório.

Definimos a frequência f do movimento periódico como o inverso do período, isto é,

$$f = \frac{1}{T}.$$

Pela definição dada acima, concluímos que a frequência determina o número de vezes que o movimento se repete por unidade de tempo.

Salientamos que as unidades do período são as mesmas utilizadas para tempo. Logo, as unidades do período são as mesmas utilizadas para a de tempo, assim estas podem ser expressas como: O segundo, o minuto, a hora, entre outras. Para as unidades de frequências, temos:

Hertz (Hz) - ciclo/segundos

RPM - rotação/minuto

RPS - rotação/segundo

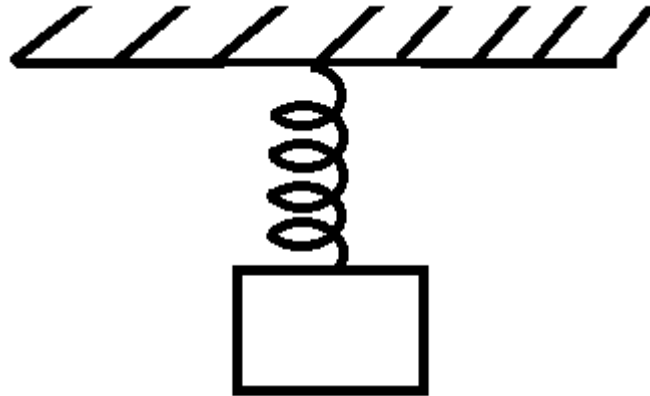
3.2 MOVIMENTOS PERIÓDICOS

Temos movimentos periódicos, quando eles se repetem a intervalos de tempos regulares e sucessivos, ou seja, dado um ponto material, caso ele se repita e depois de decorrido o intervalo de tempo de um período (T), ele ainda se encontrar na mesma posição anterior e com a mesma velocidade. Desta forma, estaremos diante de um movimento periódico. E por conseguinte matematicamente teremos:

$$\vec{X}(t + T) = \vec{X}(t) \text{ e } \vec{V}(t + T) = \vec{V}(t).$$

3.3 MOVIMENTO OSCILATÓRIO

Figura 1 – Movimento harmônico simples.



Fonte: Autor, 2023.

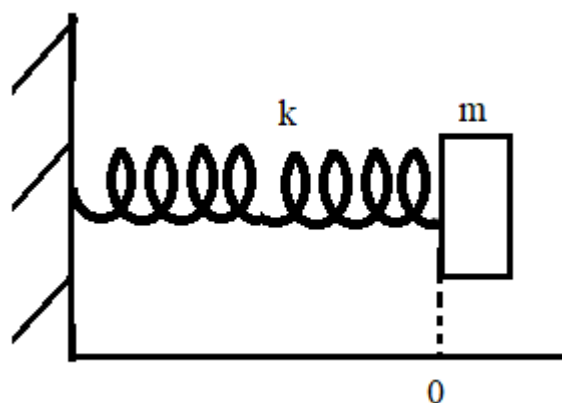
O movimento oscilatório é um caso especial de movimento periódico, ocorrendo quando em algum momento o movimento mudar o sentido do corpo, tal inversão acontece em função do anulamento da velocidade do corpo, em seguida mudando de sentido.

Portanto, o movimento será oscilatório se ele for periódico e se o sentido determinado, no caso unidimensional, pelo sinal da velocidade, for invertido a intervalos de tempos regulares (relacionado ao período do movimento).

Algumas considerações sobre a modelagem sistema massa-mola com uso de equações diferenciais.

Inicialmente consideremos uma mola desprezível a qual é presa em uma ponta, uma partícula de massa $m > 0$. Conforme a figura 2.

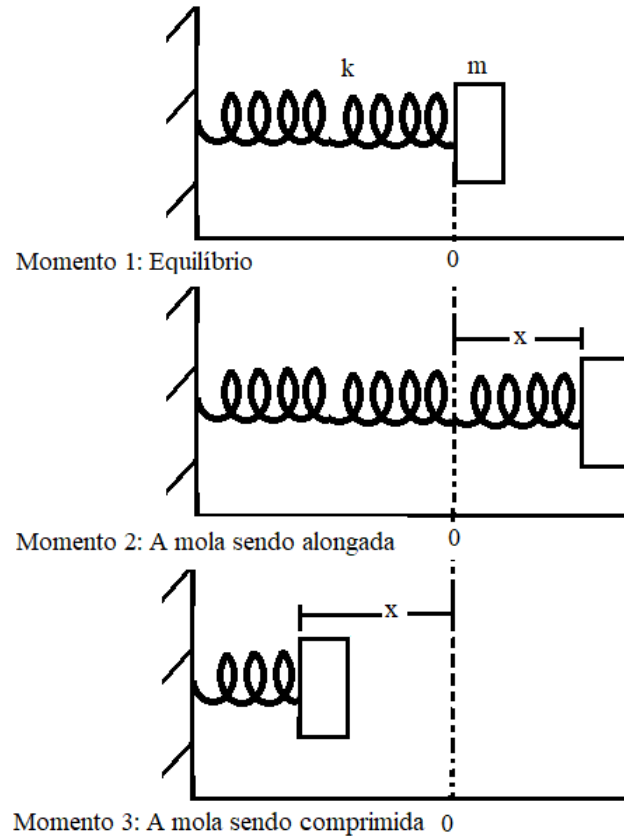
Figura 2 – Posição de equilíbrio.



Fonte: Autor, 2023.

A partir daí poderemos ter as seguintes situações a saber conforme as ilustrações da figura 3.

Figura 3 – Equilíbrio, alongamento e compressão da mola.



Fonte: Autor, 2023.

Observemos que a mola em sua posição de equilíbrio (Momento 1) não exerce nenhuma força sobre o sistema, no entanto quando a mola sofre algum deslocamento, para a direita (Momento 2) ou para a esquerda (Momento 3) percebemos que a partícula sofre o efeito de uma força restauradora através da reação da mola, segundo a lei de Hooke, esta força tem intensidade proporcional ao deslocamento, atuando no sentido oposto, dado por:

$$F_m = -k \cdot x, \text{ onde:}$$

F_m = força da mola;

K = constante de elasticidade;

X = deslocamento.

Observação 3.1 Quando a mola é alongada, temos

$$F_m < 0; k > 0; x > 0.$$

Observação 3.2 *Quando a mola é comprimida, tem-se*

$$F_m > 0; k > 0; x < 0.$$

Observemos também que o deslocamento sofrido pela partícula não deve ser muito grande, a ponto de haver ruptura da mola, pois devemos observar a rigidez da mola, o material com o qual a mesma foi confeccionada etc.

Estamos aqui supondo que o deslocamento da partícula ao longo da reta não gere atrito, contudo, levaremos em conta a viscosidade do meio em que ocorre o movimento (ar, água, óleo, etc.), ou seja, a partícula poderá sofrer o efeito da força de atrito (F_a) do meio.

De forma experimental observa-se que essa força de atrito é de intensidade proporcional a velocidade e atua no sentido oposto ao movimento.

Finalmente poderá existir alguma outra força além dessas que acabamos de citar, atuando no sistema mola-partícula, como exemplo temos: a vibração da parede na qual a mola está presa, ou seja, o material de que é feito a partícula (metal, borracha, etc.), força essa, que pode ser independente da posição e velocidade da partícula, mas, contudo, dependerá do instante tempo. Dada por:

$$F_e = \text{Força externa.}$$

Dessa forma, permitindo apenas pequenos deslocamentos e supondo que $x(t)$ descreva a posição da partícula sujeita a todas as forças supracitadas acima, segue-se que $x'(t)$ e $x''(t)$ nos darão a velocidade e a aceleração da partícula e utilizando a segunda lei de Newton ($F_R = m \cdot a$), a trajetória $x(t)$ da partícula nesse sistema mecânico será dado por:

$$m \cdot x''(t) = k \cdot x(t) - n \cdot x'(t) + F_e(t) \quad (13)$$

e dividindo a equação acima por m , obtemos

$$x''(t) = \frac{k}{m} \cdot x(t) - \frac{n}{m} \cdot x'(t) + \frac{F_e(t)}{m}.$$

Por comodidade podemos estabelecer que

i) $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

ii) $\frac{n}{2m} \geq 0$ e

iii) $h = \frac{1}{m} F_2$.

Assim a nossa equação tomará a forma

$$x''(t) + 2ax'(t) + w^2x(t) = h(t).$$

4 APLICAÇÃO

4.1 MODELAGEM E RESOLUÇÃO DO SISTEMA MASSA MOLA

Após modelar o problema massa mola, busquemos generalizar sua solução através das soluções da EDO

$$x'' + px' + qx = 0, \quad (14)$$

com $p, q \in \mathbb{R}$ que é de 2ª ordem, linear e homogênea.

Note que o modelo do oscilador harmônico simples se expressa por

$$x'' + 2ax' + w^2x = 0,$$

se deriva da equação mais geral dada por

$$mx'' = -kx - nx' + F_e \quad (15)$$

donde mx'' provém da 2ª lei de Newton, $-kx$ da lei de Hooke, $-nx'$ do atrito, da resistência do ar ou da viscosidade do meio e F_e é qualquer outra força proveniente de um meio externo.

Por comodidade, fazendo

$$W = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad a = \frac{n}{2m}, \quad \text{e } h = \frac{1}{m}F_e.$$

Formamos a equação em $x'' + 2ax' + w^2x = h$ e para $h = 0$ temos a (equação 14). Assim assumindo $p = 2a$ como coeficiente de atrito e $q = W^2$ como constante de elasticidade da mola proveniente da lei de Hooke.

Por Picard, assim como em Doering e Lopes (2008), tomando $x = x_1$ e $x_2 = x_1'$, temos:

$$x_2' = x_1'' = x'' \rightarrow x_2' = -x_1' - qx_1,$$

e, portanto, $x_2' = -qx_1 - px_2$. Portanto, resolver $x'' + px' + qx = 0$ equivale a resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1' = & x_2 \\ x_2' = & -qx_1 - px_2. \end{cases}$$

isto é, um sistema 2x2 de equação diferencial de 1ª ordem.

Observe que o sistema acima é matricialmente equivalente a:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, $x' = Ax$ onde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ é a solução procurada, se e só se x_1 for solução e $x_2 = x'_1$, perceba também que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}.$$

Observemos agora algumas particularidades sobre a matriz A .

(i) $A \in M(2)$ com a particularidade de se associar a uma EDO de 2^a ordem.

(ii) Como $a_{12} = 1$ então A não satisfaz o caso da forma canônica de Jordan, pois para tal teríamos que $A = (a_{ij})$ seria um múltiplo da matriz identidade de ordem 2, a saber $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, absurdo pois $\nexists k \in \mathbb{R}$ tal que $k \cdot 0 = 1$. Logo, não é possível que A admita único autovalor $\lambda < 0$ e, portanto, ambas as coordenadas não tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$ sobre uma semireta definida por um autovetor \vec{v} associado a λ (entenda \vec{v} como vetor diretor dessa reta). Também não é possível que as coordenadas tendam a $+\infty$ se $t \rightarrow -\infty$. Assim, o retrato de fase em questão não será perfeitamente radical (atrator linear).

Estudemos agora os autovalores e autovetores possíveis para A .

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -q & -p - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + p) + q = \lambda^2 + p\lambda + q.$$

Assim,

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q. \quad (16)$$

Perceba que em A é fácil ver que

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} = -p \text{ e } \det A = 0 \cdot (-p) - (-q) \cdot 1 = q,$$

onde $\text{tr}(A)$ é o traço da matriz A .

Pela semelhança entre (eq. 14) e (eq. 16) e retornando $p = 2a$ (por comodidade algébrica), temos que as raízes de (eq. 16), são

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4 \cdot q \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2a \pm \sqrt{(4a^2 - 4q)}}{2} = \frac{-2a \pm 2\sqrt{a^2 - q}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 - q}.$$

Assim, $\lambda_1 = -a - \sqrt{\Delta}$ e $\lambda_2 = -a + \sqrt{\Delta}$, para $\Delta = a^2 - q$. Claramente temos:

(i) Se $a^2 \geq q \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) Se $a^2 < q \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{C}$ e $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$.

Analisemos agora esse problema segundo o comportamento dicotômico do sistema, a saber: ser ou não ser um sistema mola-partícula, isto é:

a) Ser sistema mola-partícula:

$$n \geq 0 \Rightarrow \frac{n}{2m} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \Rightarrow 2a \geq 0 \Rightarrow p \geq 0,$$

e

$$k > 0 \Rightarrow \frac{k}{m} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} > 0 \Rightarrow w > 0 \Rightarrow w^2 > 0 \Rightarrow q > 0.$$

b) Não ser sistema mola-partícula:

$$p < 0 \text{ e } q \leq 0.$$

Subdividindo em casos, uma vez que $a \geq 0$, $q > 0$ e, portanto, Δ pode ser positivo, nulo ou negativo.

(ia) para $p = 0$ e $p < q$, fisicamente observado como movimento oscilatório não amortecido (visto que $p = 0 \Rightarrow n = 0$ e, portanto, sem atrito), temos

$$p = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 - q = -q < 0,$$

daí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix},$$

e, portanto, $\lambda_1 = -\sqrt{-q} = -i\sqrt{|q|}$ e $\lambda_2 = \sqrt{-q} = i\sqrt{|q|}$.

Como $W^2 = |q|$ então $\lambda_1 = -Wi$ e $\lambda_2 = Wi$ e a forma diagonal de A é $\begin{pmatrix} 0 & W \\ -W & 0 \end{pmatrix}$.

Segue que para autovalores complexos a solução é dada por:

$$X_1(t) = c_1 \cos(Wt) + c_2 \text{sen}(Wt).$$

Cujas órbitas são círculos centrados na origem e, portanto, as trajetórias de $X' = AX$ descrevem elipses, centradas na origem. Portanto, o retrato de fase é um centro linear e as órbitas são periódicas de período $\frac{2\pi}{W}$.

Para qualquer variação $0 < p$ o sistema recai no modelo subamortecido com trajetória oscilatória, mas perdendo amplitude, evitando percorrer elipses.

(ib) Tome $0 < \frac{1}{4}p^2 < q$ que fisicamente equivale a $0 < a^2 < W$, criando um

subarmortecimento no movimento oscilatório. Decorre que:

$$0 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 < q \therefore 0 < a^2 < q \Rightarrow a^2 - q < 0 \Rightarrow \Delta < 0.$$

Assim $\lambda = -a \pm \sqrt{\Delta} = -a \pm bi$ onde $\sqrt{\Delta} = b > 0$. Segue que a forma de Jordan de A é expressa por

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema conjugado é dada por

$$\tilde{X}(t) = e^{-at} (k_1 \cos(bt) + k_2 \text{sen}(bt), -k_1(\text{sen}(bt) + k_2 \cos(bt))).$$

Decorre que $\exists Q \in M(2)$ tal que $X(t) = Q\tilde{X}(t)$ é solução para

$$AX = X',$$

com $a > 0$ o retrato de fase é uma espiral estável com trajetórias oscilando para origem em

$$t \rightarrow +\infty \text{ e } X(t) = e^{-at}(c_1 \cos bt + c_2 \text{sen } bt).$$

(ic) Agora, para $0 < \frac{1}{4}p^2$ e $q = \frac{p^2}{4}$ notamos que:

$$\frac{p^2}{4} = q \Rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q \Rightarrow a^2 = q \Rightarrow a^2 - q = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -a + \sqrt{0} = -a.$$

e segundo (ii) a matriz A não pode ser múltiplo de I_2 . Segue que $\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ conjugua A pelo capítulo 1, como $\lambda_1 = \lambda_2$ reais a solução geral para $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{X}'$ é

$$(k_1 e^{-at}, k_1 t e^{-at} + k_2 e^{-at})$$

e é imediato que $\exists Q \in M(2)$ tal que $X(t) = Q\tilde{X}(t)$, cujo retrato de fase são atratores lineares com único nó impróprio e estável, com trajetórias convergindo para a origem do plano em $t \rightarrow +\infty$, sem bruscas oscilações e expressas analiticamente por

$$c_1 e^{-at} + c_2 t e^{-at}.$$

A estrutura física desse caso é instável ao passo que, por decaimento de p ou aumento de q , para qualquer e menor que sejam o sistema recai para o regime subamortecido. Entretanto, caso contrário, para aumento em p ou redução em q , temos um novo caso, conforme abaixo,

(id) Seja $0 < q < \frac{1}{4}p^2$. Decorre que

$$q < \frac{1}{4}p^2 \Rightarrow q < \left(\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow q < a^2 \Rightarrow q - a^2 < 0 \Rightarrow a^2 - q > 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lambda_1 = -a - \sqrt{\Delta} = -(a + \sqrt{\Delta}) < 0 \text{ e } \lambda_2 = -a + \sqrt{\Delta} = -(a - \sqrt{\Delta}) < 0.$$

A matriz \tilde{A} é linearmente conjugada a matriz A , de tal forma que \tilde{A} na forma triangular é dada por

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

e conforme capítulo 1, sua solução é $(k_1 e^{\lambda_1 t}, k_2 e^{\lambda_2 t}) = \tilde{X}(t)$.

Segue que $\exists Q \in M(2)$ tal que $X(t) = Q\tilde{X}(t)$ é solução para $X' = AX$, cujos retratos de fase são atratores lineares (nó estável) com trajetórias que para t suficientemente grande tendem para a origem, sem oscilações expressivas e analiticamente expressas por

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Chamamos esse sistema, de comportamento peculiar, de movimento superamortecido.

Agora analisaremos as situações para as quais o sistema não é considerado sistema mola-partícula, isto é:

$$p < 0 \text{ e } q \leq 0.$$

Note que $p < 0$ e $q \leq 0$ equivale fisicamente a:

$$*p < 0 \Rightarrow 2a < 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \frac{n}{2m} < 0 \Rightarrow n < 0 \text{ (coeficiente de atrito ou viscosidade).}$$

$$**p \leq 0 \Rightarrow W^2 \leq 0 \Rightarrow \frac{k}{m} \leq 0 \Rightarrow k \leq 0 \text{ (constante de elasticidade ou de Hooke).}$$

Para fins de tratamento matemático há três casos que chamam atenção:

(iia) $p < 0$ e $q > 0$.

Bom, se $p < 0$ então $a < 0$. Mas para $\Delta = a^2 - q$, há os casos $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$. Note que para cada possível expressão de $\Delta > 0$ existe um dual equivalente em (ib), (ic) e (id), de movimento amortecido, subamortecido ou superamortecido, deferindo tão somente pelo sentido do movimento, a saber:

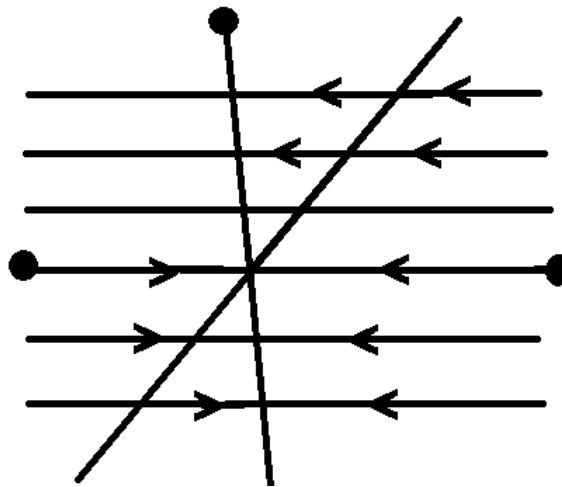
- $a < 0$ e $\Delta < 0$: Espiral instável, pois $a^2 < q$.
- $a < 0$ e $\Delta = 0$: Nó impróprio instável, haja vista que $a^2 = q$.
- $a < 0$ e $\Delta > 0$: Nó instável, com $a^2 > q$.

(iib) $q = 0$.

Decorre da equação 16 que, se $q = 0$, então $\det A = 0$ e assim os autovalores da matriz A são 0 e $-p$ (lembre que $-p = \text{tr}A$).

Se $p > 0$ temos o caso anterior, cujo auto espaço gerado do autovalor associado a $\lambda = 0$ representa uma reta de singularidades com as demais trajetórias paralelas e transversais a esta, conforme a Figura 5: Se $p = 0$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de forma degenerada

Figura 4 – Reta de singularidades.



Fonte: Autor, 2023.

com soluções constantes $y(t) = (0, k_2)$ e retas verticais $y(t) = (l_1, tl_1 + l_2)$, se $l_1 \neq 0$, que apresenta uma reta de singularidades e cujas demais trajetórias são paralelas a esta, em sentido opostos e em lados opostos.

Por fim, para $p < 0$ recaímos sobre o dual de $p > 0$, em que todas as trajetórias fora da reta de singularidades se afastam paralela e transversalmente dessa reta.

Para $p \neq 0$, temos

$$X(t) = c_1 + c_2 e^{-pt}$$

e para $p = 0$, $X(t) = c_1 + c_2 t$, cujo reducionismo nos leva a $X'' = 0$.

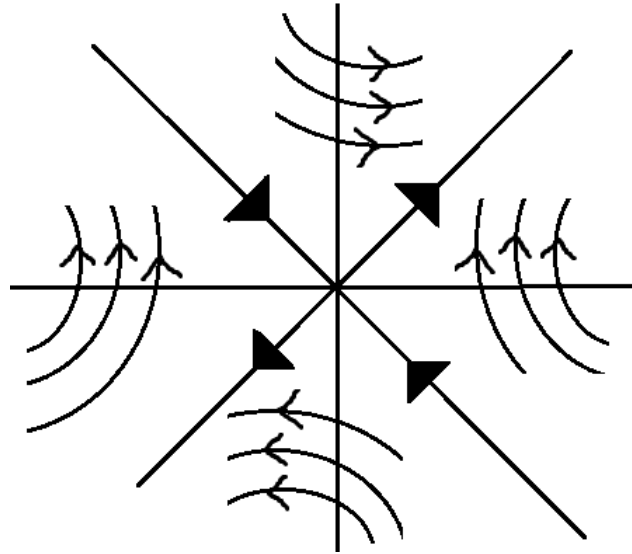
(iic) $q < 0$ Nesse caso, $0 \leq a^2 \leq a^2 - q = \Delta$ que implica em $0 \leq |a| \leq \sqrt{\Delta}$ e daí $\lambda_1 = -a - \sqrt{\Delta} < 0$ e $\lambda_2 = -a + \sqrt{\Delta}$, que implica em

$$\lambda_1 = -a - \sqrt{\Delta} < 0 < -a + \sqrt{\Delta} = \lambda_2,$$

por onde concluimos que $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ e que A admite autovalores reais distintos e sinais opostos, cujo campo de A define uma sela linear cujas soluções são

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Figura 5 – Ponto de sela.



Fonte: Autor, 2023.

Dessa forma, temos completamente descritas as soluções da (eq. 14) de segunda ordem em \mathbb{R} . Podemos também perceber que esses casos podem ser vistos no plano pq dos coeficientes constantes da (eq. 14), esboçando-se para isso os eixos horizontais, fazendo $q = 0$ (determinante nulo) e vertical, fazendo $p = 0$ (traço nulo). Sendo que o primeiro quadrante aberto desse plano coordenado com $p, q > 0$ representa o movimento amortecido dos casos (ib), (ic) e (id), em que o movimento criticamente amortecido é dado pela metade da parábola $q = \frac{p^2}{4}$, onde $\Delta = 0$, com $p > 0$.

Enquanto o movimento não-amortecido é dado pelo semieixo vertical superior $p = 0, q > 0$. Observemos também que as selas do caso (iic) ocupa todo o semiplano inferior.

Observando agora o primeiro quadrante $p \geq 0, q > 0$, faz total sentido afirmar que, dentro da família (eq. 14) referente ao sistema massa-mola que os casos (ib) e (id) são genéricos, no sentido de que, dados aleatoriamente a constante de elasticidade e o coeficiente de atrito, um desses casos ocorrerá, e por serem estritamente estáveis, no tocante a pequenas perturbações de p e q não afetarem o tipo topológico de retrato de fase. Vemos também que os casos (ia) e (ic) são estáveis e não são genéricos.

Enquanto o movimento não-amortecido é dado pelo semieixo vertical superior $p = 0, q > 0$. Observemos também que as selas dos casos (iic) ocupam todo o semiplano inferior.

4.2 PROBLEMAS RESOLVIDOS

Problema 4.1 Qual é a aceleração máxima de uma plataforma que oscila com uma amplitude de 2,20 cm e uma frequência de 6,60 Hz?

Resolução: Dados:

$$A = 2,20\text{cm} = 0,022\text{m}$$

$$f = 6,6\text{Hz}$$

$$a_{\max} = ?$$

Como $a_{\max} = Aw^2$ e sabemos que $f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi f$. Assim,

$$a_{\max} = A \cdot (2\pi f)^2 = 0,022 \cdot 4\pi^2 \cdot (6,6)^2 = 37,83\text{m/s}^2.$$

Problema 4.2 Do ponto de vista das oscilações verticais, um automóvel pode ser considerado como estando apoiado em quatro molas iguais. Suponha que as molas de um carro sejam ajustadas de tal forma que as oscilações tenham uma frequência de 3,00 Hz.

a) Qual é a constante elástica de cada mola se a massa do carro é 1450 kg e está igualmente distribuída pelas molas?

b) Qual é a frequência de oscilação se cinco passageiros, pesando, em média, 73,0 kg, entra no carro e a distribuição de massa é uniforme?

Resolução: Dados:

$$f = 3 \text{ Hz}$$

$$m = 1450 \text{ kg}$$

$$\text{a) } k = ?$$

Como $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e como $\omega = 2\pi f$ vem que

$$2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Assim, teremos

$$(2\pi f)^2 = \frac{k}{m},$$

isolando k , teremos

$$k = m(2\pi f)^2.$$

Como a massa do carro é igualmente dividida pelas quatro molas, temos que

$$m = \frac{1450}{4} = 362,5\text{kg}$$

Com isso, temos que

$$k = 362,5 \cdot (6\pi)^2 \approx 128.798N/m$$

b) Como $m_f = m + 5 \cdot 73 = 1815kg$, logo,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{m_f}{4}}},$$

com $k = 128.798N/m$. Daí, temos que

$$2\pi f = \sqrt{\frac{128.798}{\frac{1815}{4}}} \cong 16,85.$$

Ou seja, $f \cong 2,68Hz$.

Problema 4.3 *Em um barbeador elétrico, a lâmina se move para a frente e para trás, percorrendo uma distância de 2,0 mm, em um movimento harmônico simples com uma frequência de 120 Hz. Determine:*

- a) *Amplitude*
- b) *Velocidade máxima da lâmina.*
- c) *O módulo da aceleração máxima da lâmina.*

Resolução: Dados:

$$f = 120Hz$$

$$a) A = \frac{2mm}{2} = 1mm = 0,001m.$$

b) $v_{\max} = \omega \cdot A$ e como $\omega = 2\pi f$, vem que

$$v_{\max} = 2\pi f A = 2\pi \cdot 120 \cdot 0,001 \cong 0,75m/s.$$

$$c) a_{\max} = \omega^2 \cdot A = (2\pi f)^2 \cdot A = (2\pi \cdot 120)^2 \cdot 0,001 \cong 570m/s^2.$$

4.3 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Problema 4.4 *Uma partícula com massa de $1,00 \times 10^{-20} \text{kg}$ executa um movimento harmônico simples com um período de $1,00 \times 10^{-5} \text{s}$ e uma velocidade máxima de $1,00 \times 10^3 \text{m/s}$. Calcule:*

- a) *frequência angular.*
- b) *O deslocamento máximo da partícula.*

Problema 4.5 *Um sistema oscilatório bloco-mola leva $0,75 \text{s}$ para repetir o movimento. Determine:*

- a) *o período*
- b) *a frequência em Hertz.*
- c) *a frequência angular em radianos por segundo do movimento.*

Problema 4.6 *Um oscilador é formado por um bloco com uma massa de $0,500 \text{kg}$ ligado a uma mola. Quando é posto em oscilação com uma amplitude de $35,0 \text{cm}$, o oscilador repete o movimento a cada $0,500 \text{s}$. Determine:*

- a) *o período.*
- b) *a frequência.*
- c) *a frequência angular.*

5 CONCLUSÃO

Diante das considerações feitas ao longo do texto e com a análise minuciosa das equações encontradas, verifica-se a existência de dois tipos de oscilações, a saber: oscilações livres com e sem amortecimento e as oscilações forçadas, esta última ocorrendo quando o sistema for afetado por uma força externa, caso este não explorado aqui.

Nas oscilações livres, foram encontrados os movimentos oscilatórios não amortecido, subamortecido e superamortecido. A seguir serão descritas as características e comportamentos de cada movimento desse.

Começando pelas oscilações não amortecidas que tem como principal característica a ausência de atrito, ou seja, seu comportamento dependerá da amplitude, da frequência angular e da fase inicial. Contudo, sabemos que na prática é impossível termos um movimento completamente não amortecido, pois sempre haverá alguma forma de dissipação de energia, como resistência do ar ou fricção interna na mola. Isso significa que, ao longo do tempo, a amplitude da oscilação da mola diminuirá gradualmente até que a mola para de se mover completamente. O estado final da mola dependerá das condições específicas do sistema, incluindo a amplitude inicial da oscilação, a massa da partícula e a intensidade das forças dissipativas. Salienta-se também que neste caso, a mola continuará oscilando indefinidamente, mantendo sua amplitude constante.

Nesse estudo foi verificado também a existência do movimento oscilatório subamortecido sendo este afetado por alguma forma de resistência que fará com que a amplitude diminua gradualmente até parar, mantendo-se sua periodicidade, ainda assim o movimento ocorre indefinidamente. A resistência observada aqui pode ser causada por forças de atrito, resistência do ar ou qualquer outra força que atue para diminuir a energia do sistema.

A principal diferença entre o movimento oscilatório subamortecido e o movimento oscilatório amortecido é que, no último, a amplitude do movimento diminui rapidamente e eventualmente para completamente, enquanto no primeiro a amplitude diminui gradualmente, mas o movimento continua ocorrendo indefinidamente. O estado final da mola depende do quão forte são essas forças dissipativas e da energia inicial do sistema. Em geral, quanto maior a energia inicial do sistema, mais tempo levará para a amplitude da oscilação diminuir até atingir zero, estado esse em que a partícula atinge seu ponto de equilíbrio.

Já com relação ao movimento oscilatório superamortecido foi percebido que tal sistema é submetido a uma força externa, fazendo com que a partícula volte ao seu estado natural, ou seja, sua posição de equilíbrio sem sequer oscilar, pois seu coeficiente de amortecimento é tão grande que impede qualquer oscilação do sistema. Dessa forma, o tempo que leva para o corpo retornar à posição natural é determinado pelo coeficiente de atrito e pela constante da mola. Quanto maior o coeficiente de atrito, mais rápido

o sistema retorna à posição de equilíbrio. Na prática vemos isso ocorrer em sistemas de suspensão veicular ou na proteção contra choques em equipamentos eletrônicos.

No estado final de um sistema superamortecido, a mola para de oscilar e atinge uma posição de equilíbrio estático, podendo ser um valor diferente de zero. A posição de equilíbrio estático é determinada pela força restauradora da mola e pelas forças dissipativas que estão agindo sobre ela. O tempo necessário para que a mola alcance o estado final em um sistema superamortecido depende das características específicas do sistema, incluindo a massa da mola, a constante elástica da mesma e a intensidade das forças dissipativas. Em geral, quanto mais intensas forem as forças dissipativas, mais rapidamente a mola atingirá o seu estado final de equilíbrio.

E finalmente foi feita uma análise de sistemas não massa partícula, que pode ser realizado utilizando equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema em termos de variáveis contínuas, como densidade, pressão, temperatura, entre outras. Essas equações são baseadas nas leis fundamentais da física, como as leis de conservação da massa, momento e energia, motivo pelo qual não nos aprofundamos, pois foge ao escopo deste trabalho.

Em todos esses sistemas, as propriedades coletivas emergem das interações complexas entre as partículas individuais que as compõem. A compreensão desses sistemas é essencial para muitas áreas da ciência e da tecnologia, desde a biologia molecular até a engenharia de materiais e sistemas.

Observa-se, também, com este estudo o quanto a matemática foi importante para a obtenção e compreensão das equações, encontrando ao longo do texto, assuntos como: matrizes, trigonometria, determinantes, que se encaixavam e tiveram sua relevância no embasamento matemático a nível de ensino médio, sendo complementado em seguida com o uso de uma matemática mais robusta, utilizando-se das equações diferenciais e da álgebra linear, sendo determinante para a consecução deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, Thelmo de. *Álgebra Linear: Teorias e Aplicações. 1.ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- BOLDRINI, José; COSTA, Sueli; FIGUEIREDO, Vera; WETZLER, Henry. *Álgebra linear.* São Paulo: Editora Harbra, 1984.
- BOYCE, William E; RICHARD, DiPrima C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* Rio de Janeiro: LTC, 2013
- DOERING, Claus I; LOPES, Artur O. *Equações diferenciais ordinárias. 3. ed.* Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- FIGUEIREDO, Djairo G.; NEVES, Aloisio F. *Equações diferenciais aplicadas.* Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos da física - volume 1. 9. ed.* Rio de Janeiro: Editora LTC, 2014.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos da física - volume 2. 9. ed.* Rio de Janeiro: Editora LTC, 2014.
- LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear. 8. ed.* Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- NUSSENZVEIG, Herch Moysés. *Curso de física básica - volume 1: mecânica. 5. ed.* São Paulo: Edgard Blücher, 2013.
- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear.* São Paulo: Editora McGraw-hill, 1987.