UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Uma Introdução aos Polinômios Simétricos e Aplicações

Valdir Soares da Costa

Maceió, Agosto de 2013

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

VALDIR SOARES COSTA

UMA INTRODUÇÃO AOS POLINÔMIOS SIMÉTRICOS E APLICAÇÕES

MACEIÓ
2013

VALDIR SOARES COSTA

UMA INTRODUÇÃO AOS POLINÔMIOS SIMÉTRICOS E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 09 de agosto de 2013 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva.

MACEIÓ
2013

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

C837i Costa, Valdir Soares.
Uma introdução aos polinômios simétricos e aplicações / Valdir Soares Costa. – 2013.
51 f.

Orientador: Hilário Alencar da Silva.
Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 50.
Índice: f. 51.

1. Polinômios simétricos. 2. Relações de Girard. 3. Somas de Newton. 4. Discriminantes. 5. Matemática – Ensino básico. I. Título.

CDU: 512.6

UMA INTRODUÇÃO AOS POLINÔMIOS SIMÉTRICOS E APLICAÇÕES

Valdir Soares Costa

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 09 de agosto de 2013 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileria de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Hilario Alencar da Silva (Orientador - UFAL)

Prof. Dr. André Luiz Flores (UFAL)

Prof. Dr. Ana Lucia Pinheiro Lima (UFBA)

A minha amada esposa Zelma e ao meu querido filho Pedro Augusto,
por terem sonhado junto comigo a realização deste mestrado,
... sem vocês nada disso se tornaria realidade.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ser meu guia seguro e confiável, por me dar conhecimento e sabedoria para escrever esta dissertação.

Ao professor Hilário Alencar, por todo apoio, incentivo e paciência, por sua amizade e orientação ao longo do curso de mestrado, pelo exemplo de pessoa e profissional que tem sido e pelos conselhos, os quais contribuíram de forma especial em minha formação acadêmica, profissional e também pessoal. Agradeço pela oportunidade dada, por sempre mostrar as possíveis saídas em momentos complicados.

Agradeço ao professor Walter Teofilo Huaraca Vargas, por disponibilizar uma grande quantidade de material didático cuja leitura e pesquisa foram suficientes para esclarecer muitas dúvidas, dando mais clareza e firmeza aos vários argumentos matemáticos presentes nesta dissertação.

Agradeço à professora Ana Lucia Pinheiro Lima da Universidade Federal da Bahia, por ter feito diversas correções e lido criticamente esta dissertação.

Sou muitíssimo grato à doutoranda Adina Rocha dos Santos pela solidariedade e disponibilidade de ter lido criticamente esta dissertação.

A todos os professores do PROFMAT/UFAL, em especial, aos professores André Luiz Flores, Ediel Azevedo Guerra, Fernando Pereira Micena, Gregório Manoel da Silva Neto, Luis Guillermo Martinez Maza, Marcus Augusto Bronzi e Vânio Fragoso de Melo que colaboraram para a minha formação acadêmica.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro ao longo de todo o curso de Mestrado.

RESUMO

O presente trabalho busca diminuir as dificuldades que muitos discentes apresentam na resolução de sistemas não-lineares. Para este fim, dispomos de uma valiosa ferramenta, a saber, polinômios simétricos. A discussão deste tema no ensino médio tem gerado grande interesse entre os discentes, pois as idéias que aqui serão apresentadas foram aplicadas em turmas especiais que prestam exame de acesso para Instituto Militar de Engenharia (IME) ou Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), e no treinamento das Olimpíadas de Matemática. A experiência de sucesso com essas turmas nos motivou a levar a discussão de polinômios simétricos para as turmas convencionais da Educação Básica, particularmente no ensino médio. Assim, introduzimos, no Capítulo 1, os conceitos e algumas definições e apresentamos alguns problemas que sugerem de modo gradual a importância da teoria. Destacamos especialmente o uso dos polinômios simétricos elementares e como estes estão associados às relações de Girard e às somas de Newton. No Capítulo 2, apresentamos o algoritmo de Van Der Waerden que mostra como escrever qualquer polinômio simétrico em função dos polinômios simétricos elementares. Na sequência, destacamos o estudo do discriminante para equações polinomiais do 2º e 3º graus. Finalmente, no Capítulo 3, incluímos a resolução de vários problemas que servem de apoio para resolver outras possíveis situações-problema envolvendo sistemas não-lineares.

Palavras-chave: Polinômios simétricos elementares. Polinômios simétricos. Relações de Girard. Somas de Newton. Discriminante. Sistemas não-lineares.

ABSTRACT

The present work aims to reduce the difficulties that many learners present at the resolution of nonlinear systems. For this purpose we have valuable tools, symmetric polynomials. The discussion about this theme in High School has generated great interest among learners, since the ideas that will be shown here have been applied in special classes which take exams for The Military engineering institute (IME), The Technological Institute of Aeronautics (ITA) or while learners are preparing for The Mathematics Olympics. The successful experience with these classes motivated us to take the discussion about the symmetric polynomials to the conventional Middle School classes and, particularly to the High School classes. This way, we introduce on chapter 1, the concepts and some definitions and we present some problems that suggest, gradually, the importance of Theory. We specially point out the usage of elementary symmetric polynomials and how they are associated with Girard's relations and Newton sums. On chapter 2 we present the Van Der Waerden theorem which shows us how to write any symmetric polynomials in function of elementary symmetric polynomials. In sequence, we show the study of discriminant of polynomial equation of the second and third degrees. Finally, on chapter 3 we have the solution of several problems that support us to solve other possible problem situation which involve nonlinear systems.

Key words: Elementary symmetric polynomials. Symmetric polynomials. Girard's relations. Newton sums. Discriminant. Nonlinear systems.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação apresenta polinômios simétricos com enfoque na Educação Básica, pois, neste nível, ensinam-se produtos notáveis, fatorações, sistemas e polinômios, sem que, no entanto, o tema, polinômios simétricos, seja mencionado. Assim, essa é uma das razões para discutirmos este conteúdo. Além disso, a abordagem de polinômios simétricos presente nas olimpíadas de matemática não só nos ajudou a incluir o tema no ensino médio como também colaborou para a redação do presente texto.

Inicialmente, podemos introduzir polinômios simétricos na Educação Básica, particularmente no ensino médio, através das Relações de Girard que, na equação polinomial de grau três, pode se enunciada da seguinte maneira:

Afirmação 1. *Se a, b e c são raízes da equação do terceiro grau $x^3-\sigma_1 x^2+\sigma_2 x-\sigma_3=0$, então $\sigma_1=a+b+c$, $\sigma_2=ab+bc+ca$ e $\sigma_3=abc$.*

Embora tal propriedade seja muito conhecida, entre os discentes, em momento algum fala-se de polinômio simétricos. Portanto, procuramos aprofundar a discussão sobre polinômios simétricos através de exemplos práticos que desafiam os discentes do ensino médio a pensar no tema. Com esse fim, enunciamos quatro problemas que sugerem de modo gradual a importância do estudo de polinômios simétricos no Ensino Médio. Os dois primeiros serão resolvidos na Seção 1.2 e os outros na Seção 1.3.

Problema 1. *Considere a, b e c três números reais não-nulos que satisfazem à identidade*

$$(ab+ac+bc)^3=abc(a+b+c)^3.$$

(a) Mostre que a, b e c são termos de uma progressão geométrica.

(b) Se as raízes da equação

$$3x^3-26x^2+ax-24=0$$

estão em progressão geométrica, então qual é o valor de a?

Problema 2. *As raízes do polinômio*

$$f(x)=x^3-7x^2+14x-6$$

são os comprimentos dos lados de um triângulo ABC. Determine o perímetro e a área deste triângulo.

Problema 3. *Determine as raízes reais da equação $\sqrt[5]{33-x}+\sqrt[5]{x}=3$.*

Problema 4. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} a+b+c &= 2\\ a^2+b^2+c^2 &= 6\\ a^3+b^3+c^3 &= 8. \end{cases}$$

O último problema proposto representa um *sistema não-linear* que muitas vezes o discente resolve por inspeção, nesse caso, por exemplo, o terno $(-1, 1, 2)$ é uma solução. A abordagem de polinômios simétricos para resolver esse sistema é muito prática e essencial para a compreensão de outros problemas. Com efeito, podemos afimar que os três primeiros problemas da lista também são, de forma indireta, sistemas não-lineares, assim como o último. Veremos que o fato desses quatro problemas estarem associados a polinômios simétricos nos mostra a necessidade de introduzir o tema na Educação Básica.

Assim, como dissemos, a dissertação propõe uma discussão de polinômios simétricos na Educação Básica. As aplicações que são feitas no texto não só visam mostrar a importância desse tema, como também apresentam várias técnicas de solução que muitas vezes não são exploradas com os discentes. Os argumentos que usamos ao logo do texto exigem um conhecimento básico de álgebra como produtos notáveis, fatorações e estudo das raízes de uma equação polinomial de grau n. Ao logo dessa dissertação, usamos vários livros que contêm temas relacionados com tópicos de álgebra básica e polinômios simétricos, ver [1], [2], [3], [4], [5], [6] e [7].

1 POLINÔMIOS SIMÉTRICOS

Neste capítulo, vamos definir os polinômios simétricos para $x_1, x_2 \ldots, x_n$ indeterminadas em $\mathbb{K}$. Por exemplo, dadas as variáveis $x, y \in \mathbb{R}$ um polinômio $f(x, y)$ definido nessas variáveis é simétrico se, e somente se, $f(x, y) = f(y, x)$. Para nos ajudar, definimos uma aplicação φ nas indeterminadas de um polinômio que justifica quando este é simétrico nas n indeterminadas. Além disso, destacamos, ao logo deste texto, os polinômios simétricos elementares, que estão associados às relações de Girard, e às identidades de Newton, que estão associados às somas de Newton.

1.1 DEFINIÇÕES

Inicialmente, vamos definir um polinômio sobre várias indeterminadas ou variáveis, mas sempre levando em conta que, se uma propriedade é válida para os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, então diremos apenas que tal propriedade vale para o conjunto $\mathbb{K}$, isto é, teremos sempre que $\mathbb{K}$ é um desses conjuntos citados.

Definição 1.1. *Um* polinômio f *é uma notação formal expressa da forma*

$$f = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde a_n*,* a_{n-1}*, …,* a_0 *são os coeficientes de* f *pertencentes a* $\mathbb{K}$*, com* $a_n \neq 0$*. Neste caso, dizemos que o polinômio* f *está definido numa indetermidada* x *em* $\mathbb{K}$*, ou, simplesmente,* $f \in \mathbb{K}[x]$*. Quando dizemos que o polinômio* f *está em* $\mathbb{K}[x]$*, isso significa que todos os seus coeficientes pertencem a* $\mathbb{K}$*. Desse modo, o conjunto* $\mathbb{K}[x]$ *representa todos os polinômios na indeterminada* x*, cujos coeficientes pertencem a* $\mathbb{K}$ *e, no caso em que* $a_n = 1$*, dizemos que* f *é um* polinômio mônico.

Exemplo 1.1. O polinômio $f(x) = 2x^2 + x + \sqrt{2}$ pertence a $\mathbb{R}[x]$, enquanto que o polinômio $f(x) = 5x^6 - ix + 2$ está definido em $\mathbb{C}[x]$, onde $i^2 = -1$.

Definição 1.2. *Fixado o natural* $n > 0$*, chamamos de polinômio nas indeterminadas* $x_1, x_2 \ldots, x_n$ *em* $\mathbb{K}$ *à expressão*

$$f(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

onde $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in \mathbb{K}$ *e os expoentes* $i_1, i_2, ..., i_n \in \mathbb{N}$*. Além disso, as operações de adição e multiplicação para polinômios com* n *indeterminadas que pertencem ao conjunto* $\mathbb{K}[x_1, x_2 \ldots, x_n]$ *seguem analogamente as conhecidas operações de adição e multiplicação definidas para polinômios com uma indeterminada, ou seja, para polinômios em* $\mathbb{K}[x]$*.*

Exemplo 1.2. Seja o polinômio $f(x, y, z) \in \mathbb{K}[x, y, z]$ definido por

$$f(x, y, z) = (x + y)(x + z)(y + z).$$

Se desenvolvermos os fatores dos produtos acima, obtemos o mesmo polinômio representado pela adição de sete monômios, isto é,

$$f(x, y, z) = x^2 y + x^2 z + xy^2 + 2xyz + xz^2 + y^2 z + yz^2.$$

Exemplo 1.3. Seja o polinômio

$$f(x,y,z,w) = x^k + y^k + z^k + w^k \ \in \ \mathbb{K}[x,y,z,w],$$

onde $k \in \mathbb{N}$. Esse polinômio é formado por quatro monômios com quatro indeterminadas.

Exemplo 1.4. Um tipo importante de polinômio são os $\sigma_j \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $0 \leq j \leq n$, definidos do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\sigma_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 1, \\
\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\
\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} x_{i_1} x_{i_2} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\
&\vdots \\
\sigma_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j}, \\
&\vdots \\
\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 x_2 x_3 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

Visto que esses polinômios são usados com frequência ao longo deste texto, denotaremos $\sigma_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por σ_j e $\sigma_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ por σ'_j . Assim, podemos escrever o polinômio σ_j em função dos polinômios σ'_j e σ'_{j-1} através da relação:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma'_1 + x_n, \\
\sigma_2 &= \sigma'_2 + x_n\sigma'_1, \\
\sigma_3 &= \sigma'_3 + x_n\sigma'_2, \\
&\vdots \\
\sigma_j &= \sigma'_j + x_n\sigma'_{j-1}, \\
&\vdots \\
\sigma_{n-1} &= \sigma'_{n-1} + x_n\sigma'_{n-2}, \\
\sigma_n &= x_n\sigma'_{n-1}.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Posto isso, vamos considerar o seguinte resultado:

Lema 1.1. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ zeros do polinômio*

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

isto é,

$$f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = 0.$$

Então podemos escrever

$$f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^j \sigma_j x^{n-j} + \cdots + (-1)^n \sigma_n, \tag{1.2}$$

onde $\sigma_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, *com* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstração. A prova será feita por indução sobre $n \geq 2$. Fazendo $n = 2$, o resultado é imediato, pois

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2, \\ &= x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2.\end{aligned}$$

Agora, assumindo que (1.2) é verdade para $n = k$, vamos mostrar que para $n = k + 1$ também é verdade. Com efeito, multiplicando $f(x)$ por $(x - x_{k+1})$, obtemos que

$$\begin{aligned}f(x)(x - x_{k+1}) &= (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)(x - x_{k+1}), \\ &= x(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k) - x_{k+1}(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k).\end{aligned}$$

Usando a hipótese em (1.2) nas indeterminadas $x_1, x_2, \ldots, x_k$ e agrupando, temos

$$\begin{aligned}f(x)(x - x_{k+1}) &= x(x^k - \sigma_1' x^{k-1} + \cdots + (-1)^k \sigma_k') - x_{k+1}(x^k - \sigma_1' x^{k-1} + (-1)^k \sigma_k') \\ &= x^{k+1} - (\sigma_1' + x_{k+1})x^k + \cdots + (-1)^j (\sigma_j' + x_{k+1}\sigma_{j-1}')x^{[k-(j-1)]} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{k+1}(\sigma_{k+1}' + \sigma_k' x_{k+1}).\end{aligned}$$

Analogamente às identidades em (1.1), para todo $1 \leq j \leq k + 1$, podemos substituir cada uma das parcelas $\sigma_j' + x_{k+1}\sigma_{j-1}'$, da equação acima, por σ_j. Logo,

$$f(x)(x - x_{k+1}) = x^{k+1} - \sigma_1 x^k + \sigma_2 x^{k-1} + \cdots + (-1)^{k+1} \sigma_{k+1}.$$

Finalmente, podemos afirmar que para $n = k + 1$, também, é verdade. Pois,

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k)(x - x_{k+1}) = x^{k+1} - \sigma_1 x^k + \sigma_2 x^{k-1} + \cdots + (-1)^{k+1} \sigma_{k+1}.$$

□

Definição 1.3. *Seja* $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *uma aplicação. Dizemos que* φ *é uma* permutação *no conjunto* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *se* φ *é uma bijeção. Neste caso,* S_n *representa o conjunto de todas as permutações do conjunto* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

O conjunto S_n possui $n!$ elementos. De modo geral, definimos

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

um elemento qualquer de S_n, onde $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)$ corresponde a uma lista de $1, 2, 3, \ldots, n$ numa ordem arbitrária.

Exemplo 1.5. Temos que o conjunto S_3 possui $3! = 6$ elementos ou listas. De fato,

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

são os elementos do grupo de permutação S_3.

O nosso objetivo é permutar as indeterminadas $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ de um polinômio $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ através da bijeção $\varphi_i \in S_n$ e observar quais desses polinômios não se alteram. Assim, vamos considerar a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} S_n \times \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] & \rightarrow & \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \\ (\varphi_i, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) & \mapsto & f^{\varphi_i}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\varphi_i(1)}, \ldots, x_{\varphi_i(n)}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n!. \end{array}$$

A medida que φ_i, onde $i = 1, 2, 3, \ldots, n!$, percorre todas os permutações do conjunto S_n, a aplicação transforma o polinômio

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

no polinômio

$$f^{\varphi_i}(x_{\varphi_i(1)}, x_{\varphi_i(2)}, \cdots, x_{\varphi_i(n)}) \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

Assim, o polinômio f^{φ_i}, onde $1 \leq i \leq n!$, quase sempre, tem suas indeterminadas, em relação f, numa ordem diferente. Geralmente, a consequência disso é que φ_i aplicada às indeterminadas do polinômio f resulta num polinômio diferente de f. Neste trabalho, estamos interessados nos polinômios em $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tal que $f^{\varphi_i} = f$, para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n!$.

Exemplo 1.6. Considere o polinômio $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ definido por

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_2 x_3.$$

Sabemos do Exemplo 1.5 que S_3 possui 6 elementos. As permutações são

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(x_1, x_2, x_3) & = & (x_1, x_2, x_3), \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3) & = & (x_3, x_1, x_2), \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3) & = & (x_2, x_3, x_1), \\ \varphi_4(x_1, x_2, x_3) & = & (x_1, x_3, x_2), \\ \varphi_5(x_1, x_2, x_3) & = & (x_2, x_1, x_3), \\ \varphi_6(x_1, x_2, x_3) & = & (x_3, x_2, x_1). \end{array}$$

Assim, aplicando as permutações sobre as indeterminadas de f, temos as transformações:

$$\begin{array}{rcl} f^{\varphi_1}(x_1, x_2, x_3) & = & f(x_{\varphi_1(1)}, x_{\varphi_1(2)}, x_{\varphi_1(3)}) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_2 x_3, \\ f^{\varphi_2}(x_1, x_2, x_3) & = & f(x_{\varphi_2(1)}, x_{\varphi_2(2)}, x_{\varphi_2(3)}) = f(x_3, x_1, x_2) = x_3 - x_1 + x_1 x_2, \\ f^{\varphi_3}(x_1, x_2, x_3) & = & f(x_{\varphi_3(1)}, x_{\varphi_3(2)}, x_{\varphi_3(3)}) = f(x_2, x_3, x_1) = x_2 - x_3 + x_3 x_1, \\ f^{\varphi_4}(x_1, x_2, x_3) & = & f(x_{\varphi_4(1)}, x_{\varphi_4(2)}, x_{\varphi_4(3)}) = f(x_1, x_3, x_2) = x_1 - x_3 + x_3 x_2, \\ f^{\varphi_5}(x_1, x_2, x_3) & = & f(x_{\varphi_5(1)}, x_{\varphi_5(2)}, x_{\varphi_5(3)}) = f(x_2, x_1, x_3) = x_2 - x_1 + x_1 x_3, \\ f^{\varphi_6}(x_1, x_2, x_3) & = & f(x_{\varphi_6(1)}, x_{\varphi_6(2)}, x_{\varphi_6(3)}) = f(x_3, x_2, x_1) = x_3 - x_2 + x_2 x_1. \end{array}$$

Neste caso, observamos que apenas $f^{\varphi_1} = f$ e para as demais f^{φ_i} são diferentes, ou seja, $f^{\varphi_2} \neq f$, $f^{\varphi_3} \neq f$, $f^{\varphi_4} \neq f$, $f^{\varphi_5} \neq f$ e $f^{\varphi_6} \neq f$. Desse modo, dizemos que o polinômio f não é simétrico nas indeterminadas x_1, x_2 e x_3.

Agora, vamos definir o que são polinômios simétricos nas n indeterminadas.

Definição 1.4. *Dizemos que um polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é* simétrico *se, e somente se, para qualquer permutação $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ vale*

$$f^{\varphi_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\varphi_i(1)}, x_{\varphi_i(2)}, \ldots, x_{\varphi_i(n)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ i = 1, 2, 3, \ldots, n!.$$

Exemplo 1.7. Mostre que o polinômio $f(x, y, z) \in \mathbb{K}[x, y, z]$, definido por

$$f(x, y, z) = (x + y)(x + z)(y + z),$$

é simétrico.

Devemos mostrar que, ao aplicar $\varphi_i \in S_3, i = 1, 2, ..., 3!$ nas indeterminadas de f, temos sempre $f^{\varphi_i} = f$. Assim, analogamente ao Exemplo 1.6, as permutações são:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y, z) &= (x, y, z), \\
\varphi_2(x, y, z) &= (z, x, y), \\
\varphi_3(x, y, z) &= (y, z, x), \\
\varphi_4(x, y, z) &= (x, z, y), \\
\varphi_5(x, y, z) &= (y, x, z), \\
\varphi_6(x, y, z) &= (z, y, x).
\end{aligned}$$

Aplicando φ_i às indeterminadas de f, temos:

$$\begin{aligned}
f^{\varphi_1}(x, y, z) &= f(x, y, z) = (x + y)(x + z)(y + z), \\
f^{\varphi_2}(x, y, z) &= f(z, x, y) = (z + x)(z + y)(x + y), \\
f^{\varphi_3}(x, y, z) &= f(y, z, x) = (y + z)(y + x)(z + x), \\
f^{\varphi_4}(x, y, z) &= f(x, z, y) = (x + z)(x + y)(z + y), \\
f^{\varphi_5}(x, y, z) &= f(y, x, z) = (y + x)(y + z)(x + z), \\
f^{\varphi_6}(x, y, z) &= f(z, y, x) = (z + y)(z + x)(y + x).
\end{aligned}$$

Agora, podemos concluir que $f^{\varphi_1} = f^{\varphi_2} = f^{\varphi_3} = f^{\varphi_4} = f^{\varphi_5} = f^{\varphi_6} = f$, portanto o polinômio f é simétrico nas indeterminadas x, y e z .

Na próxima proposição, vamos aplicar a bijeção $\varphi \in S_n$ nas variáveis do polinômio $\sigma_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, que foi definido no Exemplo 1.4, para provar que esses polinômios são simétricos.

Proposição 1.1. *Para cada $1 \leq j \leq n$, o polinômio*

$$\sigma_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j}$$

é simétrico.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as raízes do polinômio mônico $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, definido por

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Vamos aplicar a bijeção $\varphi \in S_n$, ver Definição 1.3, na variáveis de f. Devemos observar que $f^{\varphi_1} = f$ é imediato, e para os demais casos, os fatores de f^{φ_i} estão numa ordem diferente de f, no entanto o produto destes fatores não se alteram. Logo,

$$f^{\varphi_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\varphi_i(1)}, x_{\varphi_i(2)}, \ldots, x_{\varphi_i(n)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n!.$$

Assim, mostramos que $f^{\varphi_i} = f$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n!$, ou seja, f é simétrico nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Para concluir a demonstração, vamos mostrar que os coeficientes de qualquer um dos polinômios de f^{φ_i} coincide com os coeficientes de f. De fato, como $f^{\varphi_i} = f$, para cada $i = 1, 2, 3, \ldots, n!$, então segue do Lema 1.1 que

$$(-1)^j \sigma_j(x_{\varphi_{i(1)}}, x_{\varphi_{i(2)}}, \ldots, x_{\varphi_{i(n)}}) = (-1)^j \sigma_j(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

para algum j fixado, com $1 \leq \ j \leq \ n$.

Portanto, os polinômios $\sigma_j = \sigma_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são simétricos para todo $j = 1, 2, ..., n$.
$\square$

Definição 1.5. *Os polinômios σ_j sobre $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, com $1 \leq j \leq n$, definidos por*

$$\sigma_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j}$$

são chamados polinômios simétricos elementares*.*

Exemplo 1.8. Vamos listar os polinômios simétricos elementares até $n = 4$.
Para $n = 2$ temos:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2, \\ \sigma_2(x_1, x_2) &= x_1 x_2. \end{aligned}$$

Para $n = 3$ temos:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3, \\ \sigma_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_2 x_3, \\ \sigma_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

E para $n = 4$ temos:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ \sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4, \\ \sigma_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4, \\ \sigma_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 x_3 x_4. \end{aligned}$$

1.2 RELAÇÕES DE GIRARD

Uma aplicação importante dos polinômios simétricos elementares são as Relações de Girard. Esse resultado estabelece uma relação entre as raízes e os coeficientes de um polinômio. Ademais, sobre as raízes de uma equação polinomial, o matemático alemão Karl F. Gauss, em sua tese de doutorado, em 1799, provou que todo polinômio sobre $\mathbb{C}$ admite raízes em $\mathbb{C}$. Esse importante teorema é conhecido na literatura como o Teorema Fundamental da Álgebra. A prova desse teorema pode ser vista em [2], [5] ou [6].

Teorema 1.1 (Relações de Girard). *Dado o polinômio* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$*, sendo* $a_n \neq 0$ *e* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ *as raízes da equação* $f(x) = 0$*, então*

$$\sigma_j = (-1)^j \frac{a_{n-j}}{a_n}$$

para todo $1 \leq \ j \ \leq \ n$.

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, as raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ do polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1.3}$$

fatoram completamente este polinômio, isto é, podemos escrever $f(x)$ como

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Agora, devemos aplicar o Lema 1.1 para obter f do seguinte modo:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \\ &= a_n(x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^j \sigma_j x^{n-j} \cdots + (-1)^n \sigma_0) \\ &= a_n x^n - a_n\sigma_1 x^{n-1} + a_n\sigma_2 x^{n-2} + \cdots + a_n(-1)^j\sigma_j x^{n-j} + \cdots + a_n(-1)^n\sigma_n. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Assim, escrevemos $f(x)$ de duas formas. Logo, igualando os coeficientes das equações (1.3) e (1.4), temos

$$\begin{aligned} -a_n\sigma_1 &= a_{n-1}, \\ a_n\sigma_2 &= a_{n-2}, \\ -a_n\sigma_3 &= a_{n-3}, \\ &\vdots \\ a_n(-1)^j\sigma_j &= a_{n-j}, \\ &\vdots \\ a_n(-1)^n\sigma_n &= a_0. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $1 \leq \ j \leq \ n$, temos

$$a_n(-1)^j\sigma_j = a_{n-j}.$$

Logo,

$$\sigma_j = (-1)^j \frac{a_{n-j}}{a_n}.$$

□

Vamos resolver os dois primeiros problemas propostos da introdução deste trabalho.

Problema 1.1. *Considere a, b e c três números reais não nulos que satisfazem à identidade*

$$(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3. \tag{1.5}$$

(a) Mostre que a, b e c são termos de uma progressão geométrica.

(b) Se as raízes da equação

$$3x^3 - 26x^2 + ax - 24 = 0$$

estão em progressão geométrica, então qual é o valor de a?

Solução. (a) Se $a,\ b$ e c são as raízes do polinômio mônico f, ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a)(x - b)(x - c) \\ &= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc, \end{aligned}$$

então segue do Teorema 1.1 que

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= a + b + c \\ \sigma_2 &= ab + bc + ac \\ \sigma_3 &= abc. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Além disso, observe que (1.5), pode ser escrito usando as equações (1.6) como $\sigma_2^3 = \sigma_3\sigma_1^3$. Se $\sigma_1 \neq 0$, podemos substituir o valor de σ_3 na equação $f(x) = 0$ e encontramos as igualdades

$$x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \frac{\sigma_2^3}{\sigma_1^3} = 0,$$

$$\sigma_1^3 x^3 - \sigma_1^4 x^2 + \sigma_2\sigma_1^3 x - \sigma_2^3 = 0,$$

$$\sigma_1^3 x^3 - \sigma_2^3 - \sigma_1^4 x^2 + \sigma_2\sigma_1^3 x = 0. \tag{1.7}$$

A expressão $\sigma_1^3 x^3 - \sigma_2^3$ corresponde a uma diferença de cubos, assim

$$\sigma_1^3 x^3 - \sigma_2^3 = (\sigma_1 x - \sigma_2)(\sigma_1 x^2 + \sigma_1 x\sigma_2 + \sigma_2^2). \tag{1.8}$$

A expressão $-\sigma_1^4 x^2 + \sigma_2\sigma_1^3 x$ pode ser escrita como

$$-\sigma_1^3 x(\sigma_1 x - \sigma_2). \tag{1.9}$$

Agora, substituindo (1.8) e (1.9) na equação (1.7), vemos que

$$(\sigma_1 x - \sigma_2)(\sigma_1^2 x^2 + \sigma_1\sigma_2 x + \sigma_2^2) - \sigma_1^3 x(\sigma_1 x - \sigma_2) = 0. \tag{1.10}$$

De fato, fatorando a equação (1.10), temos

$$(\sigma_1 x - \sigma_2)(\sigma_1^2 x^2 - (\sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2)x + \sigma_2^2) = 0. \tag{1.11}$$

Assim, ao analisarmos a equação (1.11), temos as seguintes conclusões:

(1) O primeiro fator é a equação $\sigma_1 x - \sigma_2 = 0$, que nos dá uma das raízes, digamos que seja b, logo $b = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$;

(2) O segundo fator é a equação quadrática $\sigma_1^2 x^2 - (\sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2)x + \sigma_2^2 = 0$, que contém as outras duas raízes, cujo produto destas raízes pelo Teorema 1.1 vale $ac = \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$.

Desse modo, obtemos $b^2 = ac$, o que significa que a, b e c são os termos de uma progressão geométrica.

(b) Na equação $3x^3 - 26x^2 + ax - 24 = 0$, devido ao Teorema 1.1, temos que $\sigma_1 = \dfrac{26}{3}$, $\sigma_2 = \dfrac{a}{3}$ e $\sigma_3 = 8$ e do item (a) sabemos que $\sigma_2^3 = \sigma_3\sigma_1^3$. Assim, substituindo esses valores obtemos $a = 52$.

Problema 1.2. *As raízes do polinômio*

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$$

são os comprimentos dos lados de um triângulo ABC. Determine o perímetro e a área deste triângulo.

Solução. Inicialmente, denote os lados do triângulo ABC por $AB = a$, $BC = b$ e $AC = c$. Tais medidas, por hipótese, correspondem às raízes do polinômio

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6.$$

Usando o Teorema 1.1, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = a + b + c &= 7, \\ \sigma_2 = ab + bc + ac &= 14, \\ \sigma_3 = abc &= 6. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Inicialmente, estamos interessados em calcular o perímetro do triângulo. O perímetro é representado por $2p$ e indica a soma dos lados, ou seja, $2p = a + b + c$. Desse modo, usando a primeira equação do sistema (1.12), calculamos o perímetro, que vale

$$2p = a + b + c = 7 \quad \text{e} \quad p = \frac{7}{2}. \tag{1.13}$$

Agora, vamos calcular a área do triângulo, que denotamos por $[ABC]$. É conhecido que, para calcular a área de um triângulo a partir dos lados, usamos a fórmula de Heron:

$$[ABC]^2 = p(p - a)(p - b)(p - c). \tag{1.14}$$

Devemos aplicar o Lema 1.1 na fórmula (1.14) e obter

$$[ABC]^2 = p(p^3 - \sigma_1 p^2 + \sigma_2 p - \sigma_3). \tag{1.15}$$

Com os valores (1.12) e (1.13), devemos substituir na equação (1.15) para calcular a área deste triângulo:

$$[ABC]^2 = \frac{7}{2}\left[\left(\frac{7}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 14\left(\frac{7}{2}\right) - 6\right] = \frac{7}{16}.$$

Logo,

$$[ABC] = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

1.3 SOMAS DE NEWTON

Nesta seção estudaremos os polinômios

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$$

que, segundo a Definição 1.3, é um polinômio simétrico. Essas expressões são comumente chamadas de somas de Newton e foram generalizadas pelo grande matemático e físico inglês Sir Isaac Newton (1642-1716) em seu quarto livro Aritmética Universalis. Essa obra teve um grande número de edições entre 1673 a 1683, provavelmente, para os cursos de Newton em Cambrige, mas só foi publicada pela primeira vez em 1707. Nesta obra, Newton mostra como obter a soma das potências das raízes de um polinômio.

No entanto, o matemático italiano Gerônimo Cardano (1501-1576) sabia que a soma das raízes da equação $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ era $-a_1$. O matemático francês Françóis Viéte (1540-1603), contemporâneo de Cardano, conhecia a relação das raízes de uma equação com seus coeficientes que, só após sua morte, foi demonstrada por Albert Girard (1591-1633).

Albert Girard não só demonstrou a relação das raízes com os coeficientes da equação, como também, em 1629, mostrou, por exemplo, como calcular a soma dos quadrados, dos cubos e das quartas potências das raízes de uma equação em termos dos seus coeficientes. Embora outros matemáticos tivessem discutido sobre o assunto, Newton foi quem generalizou pela primeira vez a soma

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k,$$

em termos dos coeficientes da equação $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, para todo $k \geq 0$. Além disso, justificou que tais somas podem ser obtidas através de uma recorrência.

Desse modo, o próximo teorema trata das identidades de Newton de modo bem geral, ou seja, vamos obter a soma

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k,\ k \geq 0,$$

em termos dos polinômios simétricos elementares. Esse teorema é mais conhecido por *Somas de Newton*. Os fatos históricos que foram descritos podem ser vistos com mais detalhes nos livros [3] e [8].

Teorema 1.2 (Somas de Newton). *Sejam* $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *e* $S_k = r_1^k + r_2^k + \cdots + r_n^k$, $k \geq n$, *onde* $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{K}$ *são as raízes da equação* $f(x) = 0$. *Então*

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^j \sigma_j S_{k-(n-j)} + \cdots + (-1)^n \sigma_n S_k = 0, k \geq n,$$

onde σ_j *são os polinômios simétricos elementares, segundo a Definição 1.5.*
Em particular, quando $k = n$, *temos*

$$S_n - \sigma_1 S_{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n S_0 = 0 \text{ e } S_0 = n.$$

Demonstração. Se $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{K}$ são raízes de $f(x) = 0$, então, do Teorema 1.1, temos

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ \sigma_2 &= r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\vdots \\ \sigma_j &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} (r_{1_1} r_{1_2} \cdots r_{i_j}) = (-1)^j \frac{a_{n-j}}{a_n}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Ademais, as r_i raízes, $i = 1, \ldots, n$, satisfazem as equações

$$\begin{aligned} a_n r_1^n + a_{n-1} r_1^{n-1} + \cdots + a_1 r_1 + a_0 &= 0, \\ a_n r_2^n + a_{n-1} r_2^{n-1} + \cdots + a_1 r_2 + a_0 &= 0, \\ &\vdots \\ a_n r_n^n + a_{n-1} r_n^{n-1} + \cdots + a_1 r_n + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando as equações acima, respectivamente, por $r_1^{k-n}, r_2^{k-n}, \ldots, r_n^{k-n}$, obtemos

$$\begin{aligned} a_n r_1^k + a_{n-1} r_1^{k-1} + \cdots + a_1 r_1^{k-(n-1)} + a_0 r_1^{k-n} &= 0, \\ a_n r_2^k + a_{n-1} r_2^{k-1} + \cdots + a_1 r_2^{k-(n-1)} + a_0 r_2^{k-n} &= 0, \\ &\vdots \\ a_n r_n^k + a_{n-1} r_n^{k-1} + \cdots + a_1 r_n^{k-(n-1)} + a_0 r_n^{k-n} &= 0. \end{aligned}$$

De fato, denotando $S_k = r_1^k + r_2^k + \cdots + r_n^k$, $k \geq 0$ e adicionando as equações do sistema acima, vamos obter

$$a_n S_k + a_{n-1} S_{k-1} + \cdots + a_1 S_{k-(n-1)} + a_0 S_{k-n} = 0. \tag{1.17}$$

Em particular, se $k = n$, temos

$$S_{k-n} = S_0 = r_1^0 + r_2^0 + \cdots + r_n^0 = n.$$

Desse modo, vamos obter a recorrência

$$a_n S_n + a_{n-1} S_{n-1} + \cdots + a_1 S_1 + a_0 n = 0.$$

Como $a_n \neq 0$, então podemos dividir a equação (1.17) por a_n e obter

$$S_k + \frac{a_{n-1}}{a_n} S_{k-1} + \cdots + \frac{a_{n-j}}{a_n} S_{k-(n-j)} = 0.$$

Vamos substituir cada um dos coeficientes da equação acima pelas identidades em (1.16) e obter a seguinte equação

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} + \cdots + (-1)^j \sigma_j S_{k-(n-j)} = 0.$$

No caso de $k = n$, temos

$$S_n - \sigma_j S_{n-1} + \sigma_2 S_{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n S_0 = 0 \quad \text{e} \quad S_0 = n.$$

$\square$

Exemplo 1.9. Seja o polinômio $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 \in \mathbb{K}[x, y, z]$. Vamos escrever o polinômio f em termos dos polinômios simétricos elementares.

Vamos admitir que x, y e z são raízes de um polinômio p mônico do terceiro grau em $\mathbb{K}[t]$, tal que $p(t) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3$. O Teorema 1.1 nos diz que

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & \sigma_1, \\ xy + yz + zx & = & \sigma_2, \\ xyz & = & \sigma_3. \end{array} \tag{1.18}$$

Ademais, se $p(x) = p(y) = p(z) = 0$, então

$$x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x + \sigma_3 = 0, \tag{1.19}$$

$$y^3 - \sigma_1 y^2 + \sigma_2 y + \sigma_3 = 0, \tag{1.20}$$

$$z^3 - \sigma_1 z^2 + \sigma_2 z + \sigma_3 = 0. \tag{1.21}$$

Multiplicando (1.19) por x^k, (1.20) por y^k e (1.21) por z^k, obtemos o sistema

$$\begin{array}{rcl} x^{k+3} - \sigma_1 x^{k+2} + \sigma_2 x^{k+1} + \sigma_3 x^k & = & 0, \\ y^{k+3} - \sigma_1 y^{k+2} + \sigma_2 y^{k+1} + \sigma_3 y^k & = & 0, \\ z^{k+3} - \sigma_1 z^{k+2} + \sigma_2 z^{k+1} + \sigma_3 z^k & = & 0. \end{array}$$

Agora, devemos adicionar as equações acima e denotar

$$S_k = x^k + y^k + z^k, \quad k \geq 0, \tag{1.22}$$

a fim de obter a recorrência,

$$S_{k+3} = \sigma_1 S_{k+2} - \sigma_2 S_{k+1} + \sigma_3 S_k, \quad \text{para} \quad k \geq 0. \tag{1.23}$$

Vamos calcular S_0 e S_1 diretamente de (1.22).

$$\begin{array}{rcl} S_0 = x^0 + y^0 + z^0 & = & 3, \\ S_1 = x^1 + y^1 + z^1 & = & \sigma_1. \end{array} \tag{1.24}$$

Com efeito, S_2 é obtido tomando o quadrado de σ_1, ou seja,

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= (x+y+z)^2, \\ &= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx), \\ &= S_2+2\sigma_2. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2. \tag{1.25}$$

Para calcular S_3, usamos $k=0$ na recorrência (1.23) e os valores em (1.24) e (1.25).

$$\begin{aligned} S_3 &= \sigma_1 S_2 - \sigma_2 S_1 + \sigma_3 S_0, \\ &= \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3, \\ &= \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3. \end{aligned}$$

Logo,

$$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. \tag{1.26}$$

Finalmente, para calcular S_4, usamos $k=1$ na recorrência (1.23) e os valores em (1.26), (1.25) e (1.24).

$$\begin{aligned} S_4 &= \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_3\sigma_1, \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2, \\ &= (\sigma_1 - 2\sigma_2)^2 - (\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3). \end{aligned}$$

Exemplo 1.10. Escreva $f(x,y,z) = x^4+y^4+z^4$ em função dos polinômios simétricos elementares usando apenas produtos notáveis.

Os argumentos que vamos apresentar podem ser vistos em [2]. Vamos usar o seguinte produto notável

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca). \tag{1.27}$$

Na identidade (1.27), denote $a=x^2$, $b=y^2$ e $c=z^2$, obtemos

$$\begin{aligned} (x^2+y^2+z^2)^2 &= x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2), \\ &= x^4+y^4+z^4+2[(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)]. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Assim, isolando em (1.28) a expressão que procuramos, temos

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^4+y^4+z^4 \\ &= (x^2+y^2+z^2)^2 - 2[(xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z)] \\ &= [(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)]^2 \\ &\quad -2[(xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z)]. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Agora, vamos expressar (1.29) em função de σ_1, σ_2 e σ_3,

$$f(x,y,z) = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3).$$

Vale ressaltar que nem sempre teremos sucesso usando produtos notáveis para escrever as identidades de Newton em função dos polinômios simétricos elementares, como fizemos no exemplo anterior. Embora pareça mais demorado o uso do Teorema 1.2 temos uma recorrência para calcular S_k, para todo $k \in \mathbb{N}$. Neste ponto, há uma vantagem em usar o Teorema 1.2, pois não precisamos de nenhuma manipulação algébrica, ou de algum produto notável mais elaborado para escrever S_k em termos dos polinômios simétricos elementares.

Agora, vamos resolver os demais problemas propostos na Introdução.

Problema 1.3. *Determine as raízes reais da equação* $\sqrt[5]{33-x}+\sqrt[5]{x}=3$.

Solução: Por inspeção, é fácil perceber que $x=1$ ou $x=32$ são soluções desta equação, mas como saber se não existem outras raízes reais? Inicialmente, denote

$$a=\sqrt[5]{33-x}, \tag{1.30}$$

$$b=\sqrt[5]{x}. \tag{1.31}$$

Para eliminar os radicais, vamos elevar tanto (1.30) como (1.31) à quinta potência

$$a^5=33-x, \tag{1.32}$$

$$b^5=x. \tag{1.33}$$

Adicionando (1.32) e (1.33), obtemos

$$a^5+b^5=33.$$

Portanto, determinar as raízes reais da equação $\sqrt[5]{33-x}+\sqrt[5]{x}=3$ é equivalente a resolver o sistema.

$$\begin{cases} a+b &= 3, \\ a^5+b^5 &= 33. \end{cases}$$

Agora, considere a e b raízes da equação

$$x^2-\sigma_1 x+\sigma_2=0, \tag{1.34}$$

onde $\sigma_1=a+b$ e $\sigma_2=ab$. A recorrência segue diretamente do Teorema 1.2.

$$S_n=\sigma_1 S_{n-1}-\sigma_2 S_{n-2}, \quad n\geq 2, \tag{1.35}$$

onde $S_n=a^n+b^n$ e S_0 e S_1 valem respectivamente,

$$\begin{aligned} S_0 &= a^0+b^0=2, \\ S_1 &= a^1+b^1=3. \end{aligned}$$

Para calcular S_5 em função de σ_1e σ_2, temos (1.35) e $S_0=2$ e $S_1=3$. Assim,

$$\begin{aligned} S_2 &= 3S_1-\sigma_2 S_0=9-2\sigma_2, \\ S_3 &= 3S_2-\sigma_2 S_1=27-9\sigma_2, \\ S_4 &= 3S_3-\sigma_2 S_2=81-36\sigma_2+2\sigma_2^2, \\ S_5 &= 3S_4-\sigma_2 S_3=243-135\sigma_2+15\sigma_2^2. \end{aligned}$$

Vamos resolver a equação acima.

$$15\sigma_2^2-135\sigma_2+243=33 \quad\Leftrightarrow\quad \sigma_2^2-9\sigma_2+14=0.$$

Suas raízes são $\sigma_2=2$ ou $\sigma_2=7$. Assim, existem duas possibilidades para a equação $x^2-\sigma_1 x+\sigma_2=0$ com $\sigma_1=3$, que são:

(i) para $\sigma_2 = 2$ temos $x^2 - 3x + 2 = 0$, cujas raízes são $a = 1$, $b = 2$ ou $a = 2$ e $b = 1$;

(ii) e para $\sigma_2 = 7$ temos $x^2 - 3x + 7 = 0$, cujas raízes não são reais, pois o discriminante é negativo.

Apenas a primeira possibilidade tem solução real. Como $x = b^5$ e $b = 1$ ou $b = 2$, então $x = 1$ ou $x = 32$.

Problema 1.4. *Resolva o* sistema de equações

$$\begin{cases} a + b + c &= 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 6 \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 8. \end{cases} \tag{1.36}$$

Solução. Inicialmente, observe que as três equações do sistema são identidades de Newton do tipo $S_k = a^k + b^k + c^k$ para $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$. Ademais, motivado pelo Teorema 1.1, vamos considerar que a, b e c são os zeros de um polinômio mônico do terceiro grau

$$f(x) = x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3, \tag{1.37}$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= a + b + c = 2, \\ \sigma_2 &= ab + bc + ca, \\ \sigma_3 &= abc. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Além disso,

$$S_k = a^k + b^k + c^k, \quad \text{onde } k \geq 0, \tag{1.39}$$

e aplicando o Teorema 1.2 na equação (1.37), obtemos a recorrência

$$S_{k+3} = \sigma_1 S_{k+2} - \sigma_2 S_{k+1} + \sigma_3 S_k, \quad \text{onde } k \geq 0. \tag{1.40}$$

Use a identidade em (1.39) para calcular,

$$\begin{aligned} S_0 &= a^0 + b^0 + c^0, \\ S_0 &= 3. \end{aligned} \tag{1.41}$$

No Exemplo 1.9, mostramos o cálculo feito para obter S_2 em (1.25). Podemos reescrever tal equação para obter σ_2 da seguinte maneira

$$2\sigma_2 = S_1^2 - S_2.$$

Agora, substituindo os valores do sistema em (1.36) nesta equação obtemos o valor de σ_2,

$$\begin{aligned} 2\sigma_2 &= 2^2 - 6, \\ \sigma_2 &= -1. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Finalmente, vamos calcular σ_3. Para isso, usamos a recorrência em (1.40) com $k = 0$, os valores em (1.36), (1.41) e (1.42).

$$\begin{aligned} S_3 &= \sigma_1 S_2 - \sigma_2 S_1 + \sigma_3 S_0, \\ 8 &= 2 \cdot 6 - (-1) \cdot 2 + 3\sigma_3, \\ \sigma_3 &= -2. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Desse modo, com os valores (1.42) e (1.43), o sistema (1.38) tem a forma:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2, \\ ab+bc+ca &= -1, \\ abc &= -2. \end{aligned}$$

Consequentemente, determinamos o polinômio em (1.37),

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2,$$

onde a, b e c são suas raízes. Portanto, vamos determinar tais raízes fatorando o polinômio $f(x)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - (x-2) \\ &= (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

Logo, qualquer uma das variações do terno $(a, b, c) = (-1, 1, 2)$ é solução da equação $f(x) = 0$.

2 TEOREMA FUNDAMENTAL DOS POLINÔMIOS SIMÉTRICOS

Nesse capítulo estamos interessados em analisar polinômios simétricos no caso geral. Vamos apresentar um algoritmo que vai escrever tais polinômios simétricos em termos dos polinômios simétricos elementares. Além disso, discutiremos um importante polinômio simétrico, o discriminante de uma equação polinomial.

Inicialmente, vamos mostrar através de um exemplo de como o algoritmo ocorre e, a partir do exemplo, discutir a teoria. A proposta e os argumentos que usamos seguem as referências [1], [2] e [4]. Deixamos a prova do Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos como desfecho da seção.

Exemplo 2.1. Seja o polinômio

$$f(x, y, z) = (x + y)(x + z)(y + z) \in \mathbb{K}[x, y, z].$$

Vamos escrever o polinômio em função dos polinômios simétricos elementares.

Mostramos na Seção 1, no Exemplo 1.7, que o polinômio f é simétrico e, no Exemplo 1.2, desenvolvemos o polinômio f obtendo

$$f(x, y, z) = (x + y)(x + z)(y + z) = x^2y + x^2z + xy^2 + 2xyz + y^2z + xz^2 + yz^2, \quad (2.1)$$

que corresponde a sete monômios de mesmo grau.

Vamos mostrar que podemos escrever f em função dos polinômios simétricos σ_1, σ_2 e σ_3. Para isso, vamos propor o algoritmo elaborado pelo matemático Bartel Leendert Van der Waerden, que ficou conhecido por popularizar a Álgebra Moderna no século XX através do seu famoso livro "Modern Algebra". De modo suscinto, consiste nos seguintes passos:

1º passo: Determine o monômio de maior ordem lexicográfica.

Observamos em (2.1) que os monômios de f têm o mesmo grau. Então, como podemos determinar qual deles é maior? Precisamos definir um critério para resolver essa questão. Vamos chamar de ordem lexicográfica o critério que irá distinguir os monômios, mesmo quando eles têm o mesmo grau. A definição a seguir nos mostrará o que é a ordem lexicográfica entre os monômios de um polinômio.

Definição 2.1. *Dados dois monômios* $a_{(i)}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\dots x_n^{i_n}$ *e* $b_{(j)}x_1^{j_1}x_2^{j_2}x_3^{j_3}\dots x_n^{j_n}$ *em* $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ *temos duas possibilidades:*

(i) se $(i_1, i_2, \dots, i_n) = (j_1, j_2, \dots, j_n)$*, ou seja,* $i_v = j_v$ *para todo* $v = 1, ..., n$*, então dizemos que os monômios têm a mesma ordem, consequentemente têm o mesmo grau;*

(ii) se $(i_1, i_2, \dots, i_n) \neq (j_1, j_2, \dots, j_n)$*, existe* $v = 1, 2, ..., n$*, tal que, na primeira vez que ocorre de* $i_v > j_v$*, então dizemos que a ordem de* $a_{(i)}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\dots x_n^{i_n}$ *é maior que a*

ordem do monômio $b_{(j)}x_1^{j_1}x_2^{j_2}x_3^{j_3}\dots x_n^{j_n}$ *e escrevemos do seguinte modo:*

$$a_{(i)}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\dots x_n^{i_n} \succ b_{(j)}x_1^{j_1}x_2^{j_2}x_3^{j_3}\dots x_n^{j_n}.$$

Analogamente, a n-ésima lista de expoentes indicamos do mesmo modo, isto é,

$$(i_1, i_2, \dots, i_n) \succ (j_1, j_2, \dots, j_n).$$

Chamamos este critério de ordem lexicográfica dos monômios em $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. *Além disso, dizemos que o monômio de maior ordem lexicográfica é denominado monômio líder e naturalmente corresponde ao monômio de maior grau.*

Inicialmente, escrevemos as ternas de expoentes de cada monômio de f,

$$f(x,y,z) = \overbrace{x^2y}^{(2,1,0)} + \overbrace{x^2z}^{(2,0,1)} + \overbrace{xy^2}^{(1,2,0)} + \overbrace{2xyz}^{(1,1,1)} + \overbrace{y^2z}^{(0,2,1)} + \overbrace{xz^2}^{(1,0,2)} + \overbrace{yz^2}^{(0,1,2)}.$$

Devemos observar que as ternas são todas distintas duas a duas, isto é,

$$(2,1,0) \neq (2,0,1) \neq (1,2,0) \neq (1,1,1) \neq (0,2,1) \neq (1,0,2) \neq (0,1,2).$$

Logo, nenhum dos monômios possui a mesma ordem lexicográfica.

Ademais, o monômio de maior ordem lexicográfica é x^2y, pois a abscissa da terna $(2,1,0)$ é maior que as abscissas das demais ternas, salvo na terna $(2,0,1)$ que tem abscissa igual. No entanto, a ordenada é menor. Segue abaixo a análise de cada terna:
Comparando as ordenadas temos que $1 > 0$, então $(2,1,0) \succ (2,0,1)$. Logo $x^2y \succ x^2z$.
Comparando as abscissas temos que $2 > 1$, então $(2,1,0) \succ (1,2,0)$. Logo $x^2y \succ xy^2$.
Comparando as abscissas temos que $2 > 1$, então $(2,1,0) \succ (1,1,1)$. Logo $x^2y \succ 2xyz$.
Comparando as abscissas temos que $2 > 0$, então $(2,1,0) \succ (0,2,1)$. Logo $x^2y \succ y^2z$.
Comparando as abscissas temos que $2 > 1$, então $(2,1,0) \succ (1,0,2)$. Logo $x^2y \succ xz^2$.
Comparando as abscissas temos que $2 > 0$, então $(2,1,0) \succ (0,1,2)$. Logo $x^2y \succ yz^2$.

Podemos passar diretamente para o 2º passo do algoritmo, pois x^2y é o monômio de maior ordem lexicográfica, mas preferimos ordenar todos os monômios de f a fim de fixar bem o critério de ordem que foi dado.

Portanto, continuando, temos que o monômio x^2z é o próximo na ordem lexicográfica, pois a abscissa da terna $(2,0,1)$ é sempre maior que as outras cinco ternas. Segue abaixo a análise de cada terna:
Comparando as abscissas temos que $2 > 1$, então $(2,0,1) \succ (1,2,0)$. Logo $x^2z \succ xy^2$.
Comparando as abscissas temos que $2 > 1$, então $(2,0,1) \succ (1,1,1)$. Logo $x^2z \succ 2xyz$.
Comparando as abscissas temos que $2 > 0$, então $(2,0,1) \succ (0,2,1)$. Logo $x^2z \succ y^2z$.
Comparando as abscissas temos que $2 > 1$, então $(2,0,1) \succ (1,0,2)$. Logo $x^2z \succ xz^2$.
Comparando as abscissas temos que $2 > 0$, então $(2,0,1) \succ (0,1,2)$. Logo $x^2z \succ yz^2$.

Na sequência, o monômio xy^2 é o próximo na ordem. Temos que sua terna $(1,2,0)$ é maior que as outras quatro ternas restantes. Segue abaixo a análise de cada terna:

Comparando as ordenadas temos que $2 > 1$, então $(1,2,0) \succ (1,1,1)$. Logo $xy^2 \succ 2xyz$.
Comparando as abscissas temos que $1 > 0$, então $(1,2,0) \succ (0,2,1)$. Logo $xy^2 \succ y^2z$.
Comparando as ordenadas temos que $2 > 0$, então $(1,2,0) \succ (1,0,2)$. Logo $xy^2 \succ xz^2$.
Comparando as abscissas temos que $2 > 1$, então $(1,2,0) \succ (0,1,2)$. Logo $xy^2 \succ yz^2$.

O próximo monômio é $2xyz$, cuja terna é $(1,1,1)$. Ela é maior que as últimas três ternas, pois
comparando as abscissas temos que $1 > 0$, então $(1,1,1) \succ (0,2,1)$, ou seja, $2xyz \succ y^2z$;
comparando as ordenadas temos que $1 > 0$, então $(1,1,1) \succ (1,0,2)$, ou seja, $2xyz \succ xz^2$;
comparando as abscissas temos que $1 > 0$, então $(1,1,1) \succ (0,1,2)$, ou seja, $2xyz \succ yz^2$.

Finalmente, a ordem de xz^2 é maior que a do último yz^2, pois comparando as abscissas das ternas $(1,0,2)$ e $(0,1,2)$ temos $1 > 0$. Assim, podemos escrever que $xz^2 \succ yz^2$. Desse modo, os monômios, na ordem lexicográfica, estão obedecendo à seguinte sequência:

$$x^2y \succ x^2z \succ xy^2 \succ 2xyz \succ y^2z \succ xz^2 \succ yz^2.$$

Portanto, o polinômio, ordenado lexicograficamente, está na forma

$$f(x,y,z) = x^2y + x^2z + xy^2 + 2xyz + xz^2 + y^2z + yz^2,$$

onde x^2y é o monômio líder, pois é o monômio de maior ordem lexicográfica.

2º passo: Devemos construir o polinômio $g_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{K}[x,y,z]$ de tal modo que o seu termo líder seja igual ao termo líder de f e depois calcular o polinômio $f_1 = f - g_1$.

Posto o 2º passo, vamos mostrar como é construído o polinômio g.

Proposição 2.1. *Sejam*

$$a_{(\alpha)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n], \tag{2.2}$$

onde $a_{(\alpha)} \neq 0$, o monômio líder do polinômio simétrico $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ e g o polinômio definido por

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = a_{(\alpha)} \sigma_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \sigma_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots \sigma_n^{\alpha_n}, \tag{2.3}$$

onde $g \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ e $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$, são os polinômios simétricos elementares. Então o termo líder de g é igual ao termo líder de f.

Demonstração. Inicialmente, vamos desenvolver (2.3) em função das indeterminadas $x_1, x_2, \dots, x_n$. De fato,

$$g = a_{(\alpha)} \left(\sum_i x_i \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \left(\sum_{i<j} x_i x_j \right)^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha_n}. \tag{2.4}$$

Agora, para obtermos o termo líder de g, devemos destacar no somatório (2.4) o produto

$$a_{(\alpha)} x_1^{\alpha_1 - \alpha_2} (x_1 x_2)^{\alpha_2 - \alpha_3} (x_1 x_2 x_3)^{\alpha_3 - \alpha_4} \dots (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha_n}. \tag{2.5}$$

Assim, agrupando as indeterminadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, em (2.5), obtemos

$$a_{(\alpha)} x_1^{\alpha_1-\alpha_2+\alpha_2-\alpha_3+\ldots+\alpha_n} x_2^{\alpha_2-\alpha_3+\alpha_3-\alpha_4+\ldots+\alpha_n} \ldots x_n^{\alpha_n}. \tag{2.6}$$

Logo, o termo líder de (2.2) é igual ao termo líder de g, pois segue-se de (2.6) que

$$a_{(\alpha)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

□

Retornando para o nosso exemplo, sabemos que o termo líder de f é $x^2y^1z^0$, então o polinômio associado a f, dado pela Proposição 2.1, é denotado por g_1 é

$$g_1 = \sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0. \tag{2.7}$$

Substituindo $\sigma_1 = x + y + z$ e $\sigma_2 = xy + xz + yz$ em (2.7), temos

$$g_1 = \sigma_1\sigma_2 = (x + y + z)(xy + xz + yz). \tag{2.8}$$

Assim, desenvolvendo (2.8), obtemos

$$g_1 = x^2y + x^2z + xy^2 + 3xyz + xz^2 + y^2z + yz^2. \tag{2.9}$$

Finalmente, com (2.9), calculamos a diferença

$$\begin{cases} f_1 &= f - g_1 \\ f_1 &= -xyz. \end{cases} \tag{2.10}$$

3º passo: Se $f_1 \neq 0$, então devemos repetir o 2º passo. Agora, denote o polinômio, dado pela Proposição 2.1, associado a f_1 e g_2. Assim, vamos calcular $f_2 = f_1 - g_2$, onde $g_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ tem o mesmo termo líder de f_1.

Sabemos, em (2.10), que o termo líder de f_1 é $-x^1y^1z^1$. Portanto, usando a Proposição 2.1, obtemos que

$$\begin{cases} g_2 &= -\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1 \\ g_2 &= -\sigma_3 \\ g_2 &= -xyz. \end{cases} \tag{2.11}$$

Assim, com (2.11), calculamos a diferença,

$$\begin{cases} f_2 &= f_1 - f_2 \\ f_2 &= -xyz + xyz \\ f_2 &= 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Isso encerra o algoritmo. Visto que, com as equações em (2.10) e (2.12), temos o sistema que indica as etapas que foram concluídas.

$$\begin{cases} f_1 &= f - g_1 \\ f_2 &= f_1 - g_2 \end{cases}$$

Assim, substituindo a primeira equação do sistema anterior na segunda equação e usando a igualdade em (2.12), obtemos

$$f = g_1 + g_2. \tag{2.13}$$

Agora, substituindo (2.8) e (2.11) em (2.13), temos

$$f = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3. \tag{2.14}$$

Finalmente, em (2.14), escrevemos f em função dos polinômios simétricos elementares, ou seja,

$$f(x,y,z) = (x+y)(x+z)(y+z) = (x+y+z)(xy+xz+yz) - xyz.$$

O que torna possível o algoritmo de Van der Waerden funcionar é que sempre que calculamos o polinômio $f_i = f_{i-1} - g_i$, para $f_{i-1} \neq 0$, ele possui termo líder menor (lexicograficamente) que f_{i-1} e, assim, para cada próximo passo o termo líder diminui e, como existe uma quantidade finita de monômios em f, garantimos que o algoritmo se encerra. Portanto, para algum $r \geq 0$, temos no processo que $f_r = 0$. Deste modo, organizando cada uma das etapas, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} f_1 &= f - g_1, \\ f_2 &= f_1 - g_2, \\ &\vdots \\ f_r &= f_{r-1} - g_r. \end{cases}$$

Podemos adicionar as etapas acima, pois $f_r = 0$, e obter o polinômio f em função dos polinômios $g_1, g_2, \ldots, g_r$. Logo,

$$f = g_1 + g_2 + \ldots + g_r$$

onde $g_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, e $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ e σ_j são os polinômios simétricos elementares nas indeterminadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, para $1 \leq j \leq n$.

Naturalmente, há uma razão simples para que o algoritmo funcione, ou seja, para que sempre apareça uma recorrência. Este fato, está resumido na próxima afirmação.

Proposição 2.2. *Se $a_{(\alpha)}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ corresponde ao* termo líder *do polinômio simétrico $f \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, então $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$.*

Demonstração. Suponha que α_1 é o maior expoente para algum monômio de f, mas, como f é um polinômio simétrico, temos certeza que a variável $x_1^{\alpha_1}$ aparece em algum monômio de f. Agora, escolha qualquer outro monômio, digamos $a_{(i)}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}$, sabemos que $\alpha_1 > i_1$, pois tomamos α_1 o maior expoente. Logo lexicograficamente $a_{(i)}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}$ não pode ser o termo líder. Escolha dentre os monômios que contêm $x_1^{\alpha_1}$ uma outra indeterminada com expoente máximo, que seja, α_2. O argumento de que f é simétrico impõe que existe um monômio em f da forma $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ com $\alpha_1 \geq \alpha_2$ e comparando novamente com qualquer outro monômio de f, por exemplo, $b_{(j)}x_1^{j_1}x_2^{j_2}\ldots x_n^{j_n}$, isto implica que $j_2 < \alpha_2$, devido à ordem lexicográfica. Portanto, novamente este monômio $b_{(j)}x_1^{j_1}x_2^{j_2}\ldots x_n^{j_n}$ não pode ser o termo líder. Agora, temos que o termo líder de f contêm $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ e devemos repetir este processo mais $n-2$ vezes até chegarmos ao termo líder $a_{(\alpha)}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, com $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$. $\square$

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos). *Seja $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ um polinômio simétrico. Então, existe $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),$$

onde σ_j é o j-ésimo polinômio simétrico elementar nas indetermindas $x_1, \ldots, x_n$.

Demonstração. Segundo o critério de ordem lexicográfica, na Definição 2.1, considere $a_{(\alpha)}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ o termo líder do polinômio simétrico $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, onde sabemos da Proposição 2.2 que $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$.
Além disso, escolha $g_1 \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ deste modo

$$g_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = a_{(\alpha)}\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\ldots\sigma_n^{\alpha_n}.$$

Isto garante, segundo a Proposição 2.2, possuir termo líder, igual a f. Portanto, o primeiro passo é calcular o polinômio $f_1 = f - g_1$, cuja ordem do termo líder segundo a Proposição (2.2), digamos

$$a_{(\beta)}x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}$$

não excede a ordem do termo líder de f, de modo que pelo menos o termo líder de f desaparece quando passamos para f_1. Além disso, se $f_1 \neq 0$, então o termo líder de f_1 é lexicograficamente menor que f, ou seja,

$$a_{(\alpha)}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} \succ a_{(\beta)}x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}.$$

Assim, faremos analogamente a f_1, os passos para $f_2, f_3, \ldots$, onde o número de monômios de f_i decresce a cada nova etapa, a ponto de o algoritmo se encerrar para algum $r \geq 0$, onde $f_r = 0$. Posto isso, passamos a adicionar todas as etapas do processo,

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & f - g_1 \\ f_2 & = & f_1 - g_2 \\ f_3 & = & f_2 - g_3 \\ & \vdots & \\ f_r & = & f_{r-1} - g_r = 0, \end{array}$$

resultando na equação

$$f = g_1 + g_2 + \ldots + g_r,$$

o que encerra nossa demonstração. Assim,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

□

Exemplo 2.2. Escreva o polinômio simétrico

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$$

em termos dos polinômios simétricos elementares.

Embora já saibamos calcular $f = x^3 + y^3 + z^3$ em termos dos polinômios simétricos elementares σ_1, σ_2 e σ_3 através do Teorema das Somas de Newton, vamos usar o algorítmo proposto pelo Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos.

Solução. O termo líder de f é $x^3y^0z^0$, então, com

$$g_1 = \sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0 = \sigma_1^3,$$

podemos calcular

$$f_1 = f - g_1 = x^3 + y^3 + z^3 - (x + y + z)^3.$$

Lembrando que $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z)$, logo,

$$f_1 = f - g_1 = -3(x + y)(x + z)(y + z).$$

Como já sabemos em (2.14) que $(x+y)(x+z)(y+z) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$, segue que o polinômio

$$\begin{aligned} f &= f_1 + g_1 \\ &= \sigma_1^3 - 3(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) \\ &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. \end{aligned}$$

Exemplo 2.3. Escreva o polinômio

$$f(x, y, z) = x^3(y + z) + y^3(x + z) + z^3(x + y)$$

em termos dos polinômios simétricos elementares.

Solução. Inicialmente, vamos colocar na ordem lexicográfica o polinômio

$$f = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

O termo líder é $x^3y^1z^0$, com isso,

$$g_1 = \sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = \sigma_1^2\sigma_2^1 = (x + y + z)^2(xy + xz + yz).$$

Com efeito, ao desenvolver g_1, temos,

$$\begin{aligned} g_1 &= (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz)(xy + xz + yz) \\ &= x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 + 5x^2yz + 5xy^2z + 5xyz^2 \\ &= 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2. \end{aligned}$$

Assim, devemos calcular e arrumar os monômios na ordem lexicográfica, isto é,

$$f_1 = f - g_1 = -5x^2yz - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 5xy^2z - 5xyz^2 - 2y^2z^2,$$

cujo termo líder é $-5x^2y^1z^1$. Segue a partir daí que

$$g_2 = -5\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1 = -5\sigma_1\sigma_3 = -5xyz(x + y + z).$$

Logo,

$$g_2 = -5x^2yz - 5xy^2z - 5xyz^2.$$

Devemos repetir o processo e calcular a diferença

$$f_2 = f_1 - g_2 = -2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2,$$

obtendo um novo termo líder $-2x^2y^2z^0$. Assim,

$$\begin{aligned} g_3 &= 2\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0 = -2\sigma_2^2 \\ &= -2(xy + xz + yz)^2 \\ &= -2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 - 4x^2yz - 4xy^2z - 4xyz^2. \end{aligned}$$

Calculando mais uma vez

$$f_3 = f_2 - g_3 = 4x^2yz + 4xy^2z + 4xyz^2,$$

com termo líder $4x^2y^1z^1$, identificamos

$$\begin{aligned} g_4 &= 4\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1 = 4\sigma_1\sigma_3 \\ &= 4xyz(x + y + z) \\ &= 4x^2yz + 4xy^2z + 4xyz^2. \end{aligned}$$

Agora, devemos subtrair g_4 de f_3 e obter f_4,

$$f_4 = f_3 - g_4 = 0.$$

Finalmente, como $f_4 = 0$, o algoritmo encerra, pois organizando cada uma das etapas feitas anteriormente, temos

$$\begin{aligned} f_1 &= f - g_1, \\ f_2 &= f_1 - g_2, \\ f_3 &= f_2 - g_3, \\ f_4 &= f_3 - g_4. \end{aligned}$$

Portanto, adicionando as equações acima, obtemos

$$f = g_1 + g_2 + g_3 + g_4,$$

onde

$$g_1 = \sigma_1^2\sigma_2, \quad g_2 = -5\sigma_1\sigma_3, \quad g_3 = -2\sigma_2^2 \ \text{ e } \ g_4 = 4\sigma_1\sigma_3.$$

Logo, vamos obter o polinômio f em função dos polinômios simétricos elementares,

$$f(x, y, z) = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3.$$

Podemos diminuir todos estes passos que foram dados, se na primeira etapa colocarmos

$$g_1 = f + 5xyz(x + y + z) + 2[(xy + xz + yz)^2 - 2xyz(x + y + z)].$$

Agora, substituindo pelos polinômios simétricos σ_1, σ_2 e σ_3, $\sigma_1^2\sigma_2 = f + 5\sigma_1\sigma_3 + 2[\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3]$ temos o mesmo efeito, isto é,

$$f(x, y, z) = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3.$$

Naturalmente, nesta última análise, muitas vezes é necessário um conhecimento maior de fatoração e alguma criatividade para agilizar o algoritmo que estamos desenvolvendo. Por exemplo, a expressão $x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3$ pode ser representada diretamente por

$$x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 - (xy + xz + yz)^3 - 3xyz(x+y)(x+z)(y+z).$$

Como já obtivemos

$$(x+y)(x+z)(y+z) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3,$$

então podemos escrever imediatamente que

$$x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 = \sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2.$$

Desse modo, sempre que nos sentirmos suficientemente seguros podemos acelerar as etapas do algoritmo promovendo em alguma etapa uma solução por manipulação algébrica.

Existem inúmeras situações em que podemos escrever diretamente. Veja alguns casos:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n) \\ &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2x_n^2 &= (x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n)^2 - 2x_1x_2.\cdots.x_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ &= \sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 &= (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - 2(x_1^2x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2x_n^2) \\ &= (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3). \end{aligned}$$

2.1 ESTUDO DO DISCRIMINANTE

Nesta unidade, mostraremos quando as raízes de uma equação polinomial do segundo ou do terceiro grau são distintas.Veremos que o fato de as raízes serem distintas ou não está relacionado ao estudo de um polinômio chamado *discriminante da equação.*

Inicialmente, vamos definir o discriminante de uma equação polinomial.

Definição 2.2. *Dado o polinômio mônico*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

onde $f(x) \in \mathbb{K}[x]$, tal que $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}[x]$ são os zeros de $f(x)$, dizemos que o polinômio D nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, definido por

$$D = -[(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})\ldots(x_2 - x_1)]^2 = -\Pi_{i>j}(x_i - x_j)^2, \qquad (2.15)$$

é o discriminante da equação $f(x) = 0$.

2.2 O DISCRIMINANTE DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Vamos determinar o valor do discriminante de uma equação quadrática. Inicialmente, vamos considerar uma equação do 2º grau do tipo

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Além disso, considere x_1 e x_2 as raízes de (2.16). Então, do Teorema 1.1, temos,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & -a_1, \\ x_1 x_2 & = & a_0. \end{array} \right. \tag{2.17}$$

E o discriminante de (2.16), segundo a Definição 2.2, é

$$D = -(x_2 - x_1)^2. \tag{2.18}$$

Vamos calcular o valor de D em função dos coeficientes a_1 e a_0. Para isso, vamos desenvolver o quadrado da diferença em (2.18) e obter,

$$(x_2 - x_1)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2. \tag{2.19}$$

Agora, sabemos que a soma de quadrados é dada pela identidade.

$$\begin{array}{rcl} (x_1 + x_2)^2 & = & x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2, \\ x_1^2 + x_2^2 & = & (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2. \end{array}$$

Assim, substituindo (2.19) em (2.20), obtemos

$$\begin{array}{rcl} (x_2 - x_1)^2 & = & (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2, \\ (x_2 - x_1)^2 & = & (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2. \end{array} \tag{2.21}$$

Logo, substituindo as equações do sistema em (2.17) na identidade (2.21), temos

$$D = -(a_1^2 - 4a_0). \tag{2.22}$$

Podemos escrever as soluções da equação quadrática resumindo na proposição a seguir:

Proposição 2.3. *Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação*

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \textit{ onde } a_1, a_0 \in R.$$

Então podemos afirmar que as três assertivas são equivalentes:

1) $x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) = 0;$

2) $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & -a_1 \\ x_1 x_2 & = & a_0; \end{array} \right.$

3) $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & -a_1 \\ x_1 - x_2 & = & \sqrt{a_1^2 - 4a_0}. \end{array} \right.$

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2). Esta implicação é imediata, pois

$$\begin{aligned} x^2 + a_1 x + a_0 &= (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2. \end{aligned}$$

Da última identidade, temos

$$x_1 + x_2 = -a_1 \text{ e } x_1 x_2 = a_0.$$

2) $\Rightarrow$ 3). Segue diretamente da identidade (2.22). De fato, sem perda de generalidade, podemos considerar $x_1 > x_2$. Então

$$-D = (x_1 - x_2)^2 = a_1^2 - 4a_0 = \sqrt{a_1^2 - 4a_0}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -a_1 \\ x_1 - x_2 &= \sqrt{a_1^2 - 4a_0}. \end{cases} \tag{2.23}$$

3) $\Rightarrow$ 1). Para essa implicação, é suficiente resolver o sistema (2.23),

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

e substituir na equação $x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, de modo a obter

$$x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = 0 \text{ e } x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = 0.$$

□

Através do discriminante da equação quadrática não só podemos dizer se as raízes são reais ou não, mas também se são distintas. Resumimos a importância do discriminante na proposição a seguir:

Proposição 2.4. *Sejam x_1 e x_2 os zeros do polinômio*

$$f(x) = x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x].$$

Então, são válidas as seguintes afirmações:

i) $D = 0$ se, e somente se, as raízes x_1, x_2 são reais, com $x_1 = x_2$;

ii) $D < 0$ se, e somente se, as raízes x_1, x_2 são reais, com $x_1 \neq x_2$;

iii) $D > 0$ se, e somente se, as raízes x_1 e x_2 não são reais.

Demonstração. Para provar cada uma das três assertivas devemos usar a identidade (2.22). Assim, temos na primeira afirmação que

$$D = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{onde } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

A segunda afirmação, podemos escrever

$$D < 0 \Leftrightarrow -D > 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \neq 0 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2, \text{onde } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

A terceira afirmação segue por exclusão das duas primeiras, pois

$$D > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -D < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2)^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1, x_2 \notin \mathbb{R}.$$

□

2.3 O DISCRIMINANTE DA EQUAÇÃO DO 3º GRAU

Nesta seção vamos calcular o discriminante, segundo a Definição 2.2, da equação cúbica. Para isso, considere a equação, sem perda de generalidade, na forma

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \in \mathbb{R}[x].$$

Inicialmente, vamos apresentar o método desenvolvido por Cardano para encontrar as raízes de uma equação cúbica, o que pode se visto com mais detalhes em [5] ou [7]. A primeira etapa consiste em eliminar o termo do 2º grau da equação cúbica. Assim, vamos substituir $x = y - \frac{a_2}{3}$ na equação (2.23),

$$\left(y - \frac{a_2}{3}\right)^3 + a_2\left(y - \frac{a_2}{3}\right)^2 + a_1\left(y - \frac{a_2}{3}\right) + a_0 = 0. \tag{2.25}$$

Com efeito, desenvolvendo (2.24), conseguimos eleminar o termo de x^2 e, reordenando os termos semelhantes, obtemos a equação na forma

$$y^3 + \left(a_1 - \frac{a_2^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0\right) = 0. \tag{2.26}$$

Agora, denote

$$p = a_1 - \frac{a_2^2}{3} \quad \text{e} \quad q = \frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0. \tag{2.27}$$

Vamos substituir (2.26) na equação (2.25) e obter a cúbica (2.23) na sua forma mais simples,

$$y^3 + py + q = 0. \tag{2.28}$$

Desse modo, para resolver a equação (2.27), devemos fazer uma nova transformação: substituir $y = u + v$ na equação (2.27) e desenvolver

$$y^3 = (u+v)^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3 \;\Rightarrow\; y^3 = 3uvy + u^3 + v^3 = -py - q. \tag{2.29}$$

Portanto, segue da identidade (2.28), o sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}, \end{cases} \tag{2.30}$$

apresentando a adição e o produto de dois números. Logo podemos usar a Proposição 2.3, ou seja,

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 - v^3 = \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}. \end{cases} \tag{2.31}$$

Assim, reescrevendo a segunda equação (2.30), temos

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 - v^3 = 2\sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}. \end{cases} \tag{2.32}$$

Com efeito, ao resolver (2.31), obtemos,

$$\begin{cases} u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}, \\ v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}. \end{cases} \tag{2.33}$$

Desse modo, com os valores (2.32), em $y = u + v$, obtemos a solução da equação cúbica em (2.27)

$$y = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{2.34}$$

Mas, para a equação original, dada (2.23), devemos substituir (2.33) na identidade $x = y - \dfrac{a_2}{3}$. Logo,

$$x = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{a_2}{3}. \tag{2.35}$$

Naturalmente, o que fizemos até agora foi determinar apenas uma raiz da equação (2.23), através da fórmula que deduzimos (2.34). Como encontrar as outras duas raízes desta equação? Antes, devemos lembrar que as raízes cúbicas da unidade, dadas pela equação $z^3 - 1 = 0$, são:

$$1, \quad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, denote a raiz da unidade por $w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Observe que podemos fatorar a equação $z^3 - 1 = 0$ completamente da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} z^3 - 1 &= 0, \\ z^3 - 1 &= (z-1)(z^2 + z + 1) = 0, \\ z^3 - 1 &= (z-1)(z-w)(z-w^2) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, generalizando esse fato, para $z^3 - r^3 = 0$, onde $r \in C$ significa que r, wr e w^2r são suas raízes. Com efeito, a equação $z^3 - r^3 = 0$, também se fatora completamente, pois

$$\begin{aligned} z^3 - r^3 &= 0, \\ z^3 - r^3 &= (z-r)(z^2 + rz + r^2) = 0, \\ z^3 - r^3 &= (z-r)(z-wr)(z-w^2r) = 0. \end{aligned}$$

Esse fato, indica que cada um dos radicais dados por (2.33),

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

possui três raízes, ou seja,

$$u = \sqrt[3]{r} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{s},$$
$$u = w\sqrt[3]{r} \quad \text{e} \quad v = w\sqrt[3]{s},$$
$$u = w^2\sqrt[3]{r} \quad \text{e} \quad v = w^2\sqrt[3]{s}.$$

Agora, combinado esses casos, temos nove possibilidades. No entanto, se encontramos uma dessas raízes, a outra esta determinada pela equação $uv = -\dfrac{p}{3}$. Portanto, podemos escrever as três raízes da cúbica, $y^3 + py + q = 0$, do seguinte modo:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & u + v, \\ y_2 & = & wu + w^2 v, \\ y_3 & = & w^2 u + wv. \end{array} \tag{2.36}$$

Agora temos as ferramentas para, segundo a Definição 2.2, calcular o discriminante da equação cúbica (2.23). Logo,

$$D = -[(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)]^2. \tag{2.37}$$

Para determinar as raízes, substituimos (2.35), na identidade $x = y - \dfrac{a_2}{3}$, assim,

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & u + v - \dfrac{a_2}{3}, \\ x_2 & = & wu + w^2 v - \dfrac{a_2}{3}, \\ x_3 & = & w^2 u + wv - \dfrac{a_2}{3}. \end{array} \tag{2.38}$$

Agora, calcule as diferenças entre as equações (2.37), obtendo

$$\begin{array}{rcl} x_3 - x_2 & = & (w-1)w(u-v), \\ x_3 - x_1 & = & (w-1)(-w^2 u + v), \\ x_2 - x_1 & = & (w-1)(u - w^2 v). \end{array} \tag{2.39}$$

Vamos multiplicar as equações (2.38) e usar as identidades $w^2 = \overline{w}$, $w^3 = 1$ e $w^2 + w + 1 = 0$.

$$\begin{array}{rcl} (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) & = & -(w-1)^3(u-v)(u-wv)(u-w^2v) \\ & = & -3\sqrt{3}i(u^3 - v^3). \end{array} \tag{2.40}$$

A identidade (2.39) já conhecemos de (2.31):

$$u^3 - v^3 = 2\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Logo,

$$(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) = -6\sqrt{3}i\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Portanto, para eliminar o radical, devemos elevar ao quadrado ambos os lados.

$$D = -[(x_3 - x_2)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)]^2 = 108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$$

Logo, o discriminante da equação cúbica é dado pela expressão

$$D = 4p^3 + 27q^2, \text{onde } p = a_1 - \frac{a_2^2}{3} \text{ e } q = \frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_0.$$

Com o discriminante da equação cúbica podemos avaliar a condição das raízes serem distintas ou não e se possuem apenas uma ou as três raízes reais. A demonstração da próxima proposição segue na íntegra a referência [6].

Proposição 2.5. *Sejam x_1, x_2 e x_3 os zeros do polinômio*

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x].$$

Então, são válidas as seguintes afirmações:

i) $D = 0$ se, e somente se, as raízes x_1, x_2, x_3 são reais, com $x_1 = x_2 \neq x_3$;

ii) $D > 0$ se, e somente se, a raiz x_1 é real e as raízes x_2 e x_3 são complexas não-reais;

iii) $D < 0$ se, e somente se, as raízes x_1, x_2, x_3 são reais, com $x_1 \neq x_2 \neq x_3$.

Demonstração.

i) $D = 0 \Rightarrow [(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)]^2 = 0$, logo um desses fatores se anula, digamos $x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1$. Ademais, $x_3 \in \mathbb{R}$, pois, se $x_3 \in \mathbb{C}$ seríamos obrigados a admitir que $\overline{x_3}$ também seria raiz, o que é um absurdo. A recíproca é imediata.

ii) $D > 0$. Como $-D$ é um quadrado, então $[(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)]^2 < 0$. Logo, existe um desses quadrados que não é real. Para a recíproca, colocamos $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Assim, no produto

$$(\alpha - \overline{\alpha})^2(\alpha - \beta)^2(\overline{\alpha} - \beta)^2,$$

temos que o conjugado de $(\alpha - \beta)$ é $(\overline{\alpha} - \beta)$ logo $(\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta})$ é um real positivo. Portanto, o sinal de D, depende apenas do sinal de $-(\alpha - \overline{\alpha})^2 = 4[Im(\alpha)]^2$, que é positivo.

iii) $D < 0$. Esse caso decorre dos outros por exclusão.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, procuramos colocar em prática a teoria de polinômios simétricos que desenvolvemos ao logo desta dissertação. Os problemas que serão resolvidos nesta seção servem de apoio e orientação para muitos outros problemas. Neste ponto, desejamos proporcionar uma visão mais geral da teoria. Os exemplos que colocamos é uma sugestão de atividades que podemos desenvolver com nossos alunos. Assim, desejamos que se sintam desafiados e estimulados a propor suas próprias respostas. Muitas destas questões foram resolvidas pelos meus alunos e proporcionaram momentos de grande enriquecimento matemático, sendo assim, que todos possam tirar o máximo de proveito dos exercícios propostos e das resoluções.

Problema 3.1. *Calcule o valor de* $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$.

Solução. Considere $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $v = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Agora, calculando $u+v$ e uv, vamos obter

$$\sigma_1 = u + v = 1 \tag{3.1}$$

$$\sigma_2 = uv = -1. \tag{3.2}$$

Deste modo, u e v são raízes do polinômio $f(x) = x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2$. Assim, substituindo as equações em (3.1) e (3.2), chegamos ao polinômio $f(x) = x^2 - x - 1$. Como u e v são raízes de f, então

$$u^2 - u - 1 = 0 \tag{3.3}$$

$$v^2 - v - 1 = 0. \tag{3.4}$$

Ao multiplicar (3.3) e (3.4), respectivamente por u^k e v^k, com $k \geq 0$, temos

$$u^{k+2} - u^{k+1} - u^k = 0 \tag{3.5}$$

$$v^{k+2} - v^{k+1} - v^k = 0. \tag{3.6}$$

Agora, adicionando as equações em (3.5) e (3.6),

$$u^{k+2} + v^{k+2} - (u^{k+1} + v^{k+1}) - (u^k + v^k) = 0. \tag{3.7}$$

Denominamos $S_k = u^k + v^k$. A equação em (3.7) se reduz à recorrência

$$S_{k+2} = S_{k+1} + S_k, \tag{3.8}$$

onde S_0 e S_1 satisfazem

$$\begin{cases} S_0 &= u^0 + v^0 = 2 \\ S_1 &= u + v = 1. \end{cases}$$

Usando S_0 e S_1 podemos, através da equação em (3.8), calcular $S_2, S_3, S_4, \ldots$. De fato,

$$\begin{array}{rcl} S_2 &=& S_1 + S_0 = 3 \\ S_3 &=& S_2 + S_1 = 4 \\ S_4 &=& S_3 + S_2 = 7 \\ S_5 &=& S_4 + S_3 = 11. \end{array}$$

Para calcular S_{10}, fazemos os seguintes cálculos,

$$\begin{aligned} S_5^2 &= (u^5 + v^5)^2 = u^{10} + v^{10} + 2u^5v^5 \\ S_5^2 &= S_{10} + 2\sigma_2^5 \\ S_{10} &= S_5^2 - 2\sigma_2^5 \\ S_{10} &= 11^2 - 2(-1)^5 \\ S_{10} &= 123 \end{aligned}$$

Problema 3.2. *Se a, b e c são raízes da equação $x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0$. Determine o valor de $a^3 + b^3 + c^3 + a^4 + b^4 + c^4$.*

Solução. Segue das Relações de Girard que

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= a + b + c = -3 \\ \sigma_2 &= ab + bc + ca = -7 \\ \sigma_3 &= abc = -1. \end{aligned}$$

Além disso, a, b e c são raízes da equação dada, então

$$a^3 + 3a^2 - 7a + 1 = 0 \tag{3.9}$$

$$b^3 + 3b^2 - 7b + 1 = 0 \tag{3.10}$$

$$c^3 + 3c^2 - 7c + 1 = 0. \tag{3.11}$$

Multiplicando as equações (3.9) por a^k, (3.10) por b^k e (3.11) por c^k, com $k \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} a^{k+3} + 3a^{k+2} - 7a^{k+1} + a^k &= 0 \\ b^{k+3} + 3b^{k+2} - 7b^{k+1} + b^k &= 0 \\ c^{k+3} + 3c^{k+2} - 7c^{k+1} + c^k &= 0. \end{aligned}$$

Ao somar as três equações acima,

$$(a^{k+3}+b^{k+3}+c^{k+3})+3(a^{k+3}+b^{k+3}+c^{k+3})-7(a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1})+(a^k+b^k+c^k) = 0. \tag{3.12}$$

Agora, denotando $S_k = a^k + b^k + c^k$, $k \geq 0$, podemos representar a equação (3.12) por meio da recorrência

$$S_{k+3} = -3S_{k+2} + 7S_{k+1} - S_k, \tag{3.13}$$

onde

$$\begin{aligned} S_0 &= a^0 + b^0 + c^0 = 3 \\ S_1 &= a^1 + b^1 + c^1 = \sigma_1 = -3. \end{aligned}$$

Agora, para calcular S_2, devemos desenvolver o quadrado $(a + b + c)^2$, ou seja,

$$\sigma_1^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = S_2 + 2\sigma_2.$$

Assim,

$$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = (-3)^2 - 2 \cdot 7 \quad \Rightarrow \quad S_2 = -5.$$

Finalmente, usando os valores $S_0 = 3, S_1 = -3$ e $S_2 = -5$ e junto com a recorrência (3.12), podemos calcular S_3 e S_4. Com efeito,

$$\begin{array}{rcl} S_3 & = & -3S_2 + 7S_1 - S_0 = -9 \\ S_4 & = & -3S_3 + 7S_2 - S_1 = -5. \end{array}$$

Portanto, $S_3 + S_4 = -14$.

Problema 3.3. *Sejam a e b números reais não nulos, tais que x e y satisfazem o sistema*

$$\begin{array}{rcl} ax + by & = & 2 \\ ax^2 + by^2 & = & 20 \\ ax^3 + by^3 & = & 56 \\ ax^4 + by^4 & = & 272. \end{array}$$

Calcule o valor de $ax^5 + by^5$.

Solução. Sejam x e y as raízes da equação

$$t^2 - \sigma_1 t + \sigma_2 = 0, \tag{3.14}$$

então, das relações de Girard, temos

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 & = & x + y, \\ \sigma_2 & = & xy. \end{array}$$

Tendo em vista que x e y satisfazem a equação (3.14), vemos que

$$x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2 = 0, \tag{3.15}$$

$$y^2 - \sigma_1 y + \sigma_2 = 0. \tag{3.16}$$

Com efeito, devemos multiplicar (3.15) por ax^k e (3.16) por by^k, com $k \geq 0$, e obter

$$\begin{array}{rcl} ax^{k+2} - \sigma_1 ax^{k+1} + \sigma_2 ax^k & = & 0, \\ by^{k+2} - \sigma_1 by^{k+1} + \sigma_2 by^k & = & 0. \end{array}$$

Agora, vamos adicionar as duas equações, e obter

$$(ax^{k+2} + by^{k+2}) - \sigma_1(ax^{k+1} + by^{k+1}) + \sigma_2(ax^k + by^k) = 0. \tag{3.17}$$

Vamos denotar $S_k = ax^k + by^k$, $k \geq 0$ e substituir na equação (3.17), para obtermos a recorrência

$$S_{k+2} = \sigma_1 S_{k+1} - \sigma_2 S_k, \;\; k \geq 0. \tag{3.18}$$

Temos do sistema $S_1 = 2$, $S_2 = 20$, $S_3 = 56$ e $S_4 = 272$. Os valores σ_1 e σ_2 são obtidos usando (3.18)

$$\begin{array}{rcl} S_3 & = & \sigma_1 S_2 - \sigma_2 S_1, \\ S_4 & = & \sigma_1 S_3 - \sigma_2 S_2. \end{array}$$

Assim, temos o sistema

$$\begin{aligned} 20\sigma_1 - 2\sigma_2 &= 56, \\ 56\sigma_1 - 2\sigma_2 &= 272. \end{aligned}$$

A solução do sistema é $\sigma_1 = 2$ e $\sigma_2 = -8$. Logo, a recorrência (3.8) tem a seguinte forma

$$S_{k+2} = 2S_{k+1} + 8S_k, \ k \geq 0. \tag{3.19}$$

Finalmente, o valor de S_5, usando a recorrência (3.19), é

$$S_5 = 2S_4 + 8S_3 \quad \Rightarrow \quad S_5 = 2 \cdot 272 + 8 \cdot 56 \quad \Rightarrow \quad S_5 = 992.$$

Problema 3.4. *Sejam a, b e c as raízes da equação $x^4 - 4x^2 + x - 1 = 0$. Sabendo que*

$$\begin{aligned} \frac{a^{\sqrt{2}}}{a} + \frac{b^{\sqrt{2}}}{b} + \frac{c^{\sqrt{2}}}{c} &= \alpha \\ \frac{a^{\sqrt{2}}}{a^2} + \frac{b^{\sqrt{2}}}{b^2} + \frac{c^{\sqrt{2}}}{c^2} &= \beta \\ \frac{a^{\sqrt{2}}}{a^3} + \frac{b^{\sqrt{2}}}{b^3} + \frac{c^{\sqrt{2}}}{c^3} &= \gamma. \end{aligned}$$

Calcule $a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{2}} + c^{\sqrt{2}}$.

Solução. Estamos interessados na seguinte expressão geral

$$S_k = \frac{a^{\sqrt{2}}}{a^k} + \frac{b^{\sqrt{2}}}{b^k} + \frac{c^{\sqrt{2}}}{c^k}, \ k \geq 0 \text{ e } abc \neq 0$$

sabemos que a, b e c satisfazem a equação $x^3 - 4x^2 + x - 1 = 0$. Logo,

$$a^3 - 4a^2 + a - 1 = 0 \tag{3.20}$$

$$b^3 - 4b^2 + b - 1 = 0 \tag{3.21}$$

$$c^3 - 4c^2 + c - 1 = 0. \tag{3.22}$$

Multiplicando (3.20) por $\dfrac{a^{\sqrt{2}}}{a^{k+3}}$, (3.21) por $\dfrac{b^{\sqrt{2}}}{b^{k+3}}$ e (3.22) por $\dfrac{c^{\sqrt{2}}}{c^{k+3}}$.

$$\begin{aligned} \frac{a^{\sqrt{2}}}{a^k} - 4\frac{a^{\sqrt{2}}}{a^{k+1}} + \frac{a^{\sqrt{2}}}{a^{k+2}} - \frac{a^{\sqrt{2}}}{a^{k+3}} &= 0 \\ \frac{b^{\sqrt{2}}}{b^k} - 4\frac{b^{\sqrt{2}}}{b^{k+1}} + \frac{b^{\sqrt{2}}}{b^{k+2}} - \frac{b^{\sqrt{2}}}{b^{k+3}} &= 0 \\ \frac{c^{\sqrt{2}}}{c^k} - 4\frac{c^{\sqrt{2}}}{c^{k+1}} + \frac{c^{\sqrt{2}}}{c^{k+2}} - \frac{c^{\sqrt{2}}}{c^{k+3}} &= 0, \end{aligned}$$

somando as equações e denotando S_k por

$$S_k = \frac{a^{\sqrt{2}}}{a^k} + \frac{b^{\sqrt{2}}}{b^k} + \frac{c^{\sqrt{2}}}{c^k}, \ k \geq 0$$

obtemos a recorrência

$$S_k = 4S_{k+1} - S_{k+2} + S_{k+3},\ \ k \geq 0.$$

Além disso, sabemos que

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha \\ S_2 &= \beta \\ S_3 &= \gamma. \end{aligned}$$

Como queremos calcular

$$S_0 = a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{2}} + c^{\sqrt{2}},$$

então podemos obter S_0 por meio da recorrência

$$\begin{aligned} S_0 &= 4S_1 - S_2 + S_3 \\ S_0 &= 4\alpha - \beta + \gamma. \end{aligned}$$

Logo,

$$a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{2}} + c^{\sqrt{2}} = 4\alpha - \beta + \gamma.$$

Problema 3.5. *Sejam a, b e c as três raízes distintas da equação $x^3 - 2x^2 - 3x - 4 = 0$. Ache o valor da expressão* $\dfrac{a^5 - b^5}{a - b} + \dfrac{b^5 - c^5}{b - c} + \dfrac{c^5 - a^5}{c - a}$.

Solução. Como a, b e c são raízes da equação $x^3 - 2x^2 - 3x - 4 = 0$, então, segue das Relações de Girard, que

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= a + b + c = 2 \\ \sigma_2 &= ab + bc + ca = -3 \\ \sigma_3 &= abc = 4. \end{aligned}$$

Além disso, a, b e c são três raízes distintas, ou seja, $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$. Assim, vamos determinar a expressão geral

$$S = \frac{a^k - b^k}{a - b} + \frac{b^k - c^k}{b - c} + \frac{c^k - a^k}{c - a}$$

em função dos polinômios simétricos elementares σ_1, σ_2 e σ_3, da forma a seguir. Inicialmente, partimos do fato que a, b e c são raízes de $p(x) = 0$. Assim temos as seguintes equações satisfeitas:

$$a^3 - 2a^2 - 3a - 4 = 0 \tag{3.23}$$

$$b^3 - 2b^2 - 3b - 4 = 0 \tag{3.24}$$

$$c^3 - 2c^2 - 3c - 4 = 0. \tag{3.25}$$

i) Multiplique (3.23) por $\dfrac{a^k}{a - b}$ e (3.24) por $\dfrac{b^k}{a - b}$ e depois subtraia a segunda da primeira;

ii) Multiplique (3.24) por $\dfrac{b^k}{b - c}$ e (3.25) por $\dfrac{c^k}{b - c}$ e depois subtraia a segunda da primeira;

iii) Multiplique (3.25) por $\dfrac{c^k}{c-a}$ e (3.23) por $\dfrac{a^k}{c-a}$ e depois subtraia a segunda da primeira;

chegamos às seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}\right)-2\left(\frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}\right)-3\left(\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}\right)-4\left(\frac{a^k-b^k}{a-b}\right) &= 0\\
\left(\frac{b^{k+3}-c^{k+3}}{b-c}\right)-2\left(\frac{b^{k+2}-c^{k+2}}{b-c}\right)-3\left(\frac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}\right)-4\left(\frac{b^k-c^k}{b-c}\right) &= 0\\
\left(\frac{c^{k+3}-a^{k+3}}{c-a}\right)-2\left(\frac{c^{k+2}-a^{k+2}}{c-a}\right)-3\left(\frac{c^{k+1}-a^{k+1}}{c-a}\right)-4\left(\frac{c^k-a^k}{c-a}\right) &= 0,
\end{aligned}$$

que, adicionando as três últimas equações e denotando

$$S_k=\frac{a^k-b^k}{a-b}+\frac{b^k-c^k}{b-c}+\frac{c^k-a^k}{c-a}, \tag{3.26}$$

temos a recorrência

$$S_{k+3}=2S_{k+2}+3S_{k+1}+4S_k,\ \ k\geq 0. \tag{3.27}$$

Para calcular S_0, S_1 e S_2 usamos a identidade em (3.26),

$$\begin{aligned}
S_0 &= \frac{a^0-b^0}{a-b}+\frac{b^0-c^0}{b-c}+\frac{c^0-a^0}{c-a}=0\\
S_1 &= \frac{a^1-b^1}{a-b}+\frac{b^1-c^1}{b-c}+\frac{c^1-a^1}{c-a}=3\\
S_2 &= \frac{a^2-b^2}{a-b}+\frac{b^2-c^2}{b-c}+\frac{c^2-a^2}{c-a}\quad \text{(fatorando os numeradores)}\\
S_2 &= a+b+b+c+c+a\\
S_2 &= 2(a+b+c)=2\sigma_1,\ \text{mas } \sigma_1=2\\
S_2 &= 4.
\end{aligned}$$

Com os valores $S_0=0$, $S_1=2$ e $S_2=4$, juntamente com a recorrência em (3.27), podemos calcular S_3, S_4 e S_5,

$$\begin{aligned}
S_3 &= 2S_2+3S_1+4S_0=17\\
S_4 &= 2S_3+3S_2+4S_1=58\\
S_5 &= 2S_4+3S_3+4S_2=183.
\end{aligned}$$

Problema 3.6. *Manipule a expressão*

$$x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2 \tag{3.28}$$

para obter em termos dos polinômios simétricos elementares.

Solução. Considere a expressão em (3.28) como um polinômio do 2º grau na variável x, ou seja,

$$(y+z)x^2+(y^2+z^2)x+(y+z)xy, \tag{3.29}$$

substitua y^2z^2 por $(y+z)^2 - 2yz$. Então, a expressão em (3.29) passa para a forma

$$(y+z)x^2 + (y+z)^2x - 2xyz + (y+z)yz. \tag{3.30}$$

Coloque $y+z$ em evidência nas parcelas em (3.31) que possuem esse fator

$$(y+z)[x^2 + (y+z)y + yz] - 2xyz \tag{3.31}$$

fatorando em (3.31) a identidade

$$x^2 + (y+z)y + yz = (x+y)(x+z),$$

temos

$$(x+y)(x+z)(y+z) - 2xyz. \tag{3.32}$$

Agora, ficou muito fácil, pois no Capítulo 2, página 26, temos que

$$(x+y)(x+z)(y+z) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 \text{ e } xyz = \sigma_3.$$

Portanto, podemos escrever a expressão como segue

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3,$$

ou seja,

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 = (x+y+z)(xy+xz+yz) - 3xyz.$$

Problema 3.7. *Dados a, b e c, explicite em termos de a, b e c, os coeficientes de um polinômio mônico de grau três cujas raízes complexas sejam os cubos das raízes complexas do polinômio* $x^3 + ax^2 + bx + c$.

solução. Sejam x, y e z as raízes do polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x+y+z = -a \\ \sigma_2 &= xy+xz+yz = b \\ \sigma_3 &= xyz = -c. \end{aligned}$$

Devemos construir o polinômio $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \lambda$ cujas raízes são x^3, y^3 e z^3, ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha &= -(x^3+y^3+z^3) \\ \beta &= x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 \\ \lambda &= -x^3y^3z^3. \end{aligned}$$

Como já sabemos escrever os polinômios α, β e λ em termos de σ_1, σ_2 e σ_3, dos exemplos que desenvolvemos, temos que

$$x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,$$

$$x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 = \sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2,$$

e

$$x^3y^3z^3 = \sigma_3^3.$$

Portanto,
$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \lambda = (x - x^3)(x - y^3)(x - z^3).$$
Temos
$$\begin{array}{rcl}\alpha & = & -(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\\ \beta & = & \sigma_2^2 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2\\ \lambda & = & -\sigma_3^3.\end{array}$$
Devemos escrever o polinômio da seguinte maneira
$$x^3 - (a^3 + 3ab - 3c)x^2 + (\sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2)x + c^3. \tag{3.33}$$
Uma consequência imediata desse processo é que a soma da potências das raízes da forma $S_n = x^{3n} + y^{3n} + z^{3n}$ que obtivemos, pela recorrência $S_{n+3} = -\alpha S_{n+2} - \beta S_{n+1} - \lambda S_{n+1}$, pode ser calculada diretamente do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

REFERÊNCIAS

[1] BASTOS, G.G. *Tópicos de Álgebra Abstrata.* Premius, Ed. Livro Técnico, 2003.

[2] CAMINHA, A. *Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios.* [S.l.]: SBM, 2012. Coleção do Professor de Matemática, v. 6.

[3] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Tradução Higyno H. Domingues, Ed. Unicamp, 2008.

[4] GARCIA, A. ; LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra.* Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

[5] HEFEZ, A. *Polinômios e Equações Algébricas.* [S.l.]: SBM, 2012. Coleção PROFMAT.

[6] HEFEZ, A. *Curso de Álgebra, vol. II.*Em preparação. 12 de nov., Brasil, 2002.

[7] LIMA, E.L. *Equações do Terceiro Grau. Revista Matemática Universitária*, Rio de Janeiro: IMPA, junho 1987, v. 03, n. 05, p. 9-23.

[8] ROQUE, T.; CARVALHO, J.B.P. *Tópicos de História da Matemática.* [S.l.]: SBM, 2012. Coleção PROFMAT.

Índice Remissivo