

Universidade Federal de Sergipe

Pró-Reitoria de pós-graduação e Pesquisa

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Os Pilares da Geometria Euclidiana Plana no Ensino Básico

Renato Machado Siqueira

SÃO CRISTÓVÃO-SE
AGOSTO DE 2023

Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de pós-graduação e Pesquisa
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Os Pilares da Geometria Euclidiana Plana no Ensino Básico

por

Renato Machado Siqueira

sob a orientação do

Prof. Dr. Allyson dos Santos Oliveira

SÃO CRISTÓVÃO-SE
AGOSTO DE 2023

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S618p Siqueira, Renato Machado
Os pilares da geometria euclidiana plana no ensino básico /
Renato Machado Siqueira ; orientador Allyson dos Santos
Oliveira. - São Cristóvão, 2023.
79 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal
de Sergipe, 2023.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria plana. 3.
Geogebra (Software). I. Oliveira, Allyson dos Santos orient. II.
Título.

CDU 514.12



Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Os Pilares da Geometria Euclidiana Plana no Ensino Básico

por

Renato Machado Siqueira

Aprovada pela Banca Examinadora:

Allyson dos Santos Oliveira

Prof. Dr. Allyson dos Santos Oliveira - UFS
Orientador

Naldisson dos Santos

Prof. Dr. Naldisson dos Santos - UFS
Primeiro Examinador

Adriano Veiga de Oliveira

Prof. Dr. Adriano Veiga de Oliveira - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 29 de Agosto de 2023.

Cidade Univ. Prof. José Aloísio de Campos, Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Bairro Rosa
Elze, CEP 49107-230 - São Cristóvão - Sergipe - Brasil - Tel. (00 55 79) 3194-6887
E-mail: profmat@academico.ufs.br

*“A imaginação é mais importante
que o conhecimento”*

Albert Einstein

Agradecimentos

Querido Deus,

Primeiramente, gostaria de expressar minha profunda gratidão a Ti por todas as bênçãos e oportunidades que tens me concedido ao longo da minha vida. Sou verdadeiramente grato por Tua presença constante e por guiar meus passos em cada jornada.

Gostaria também de agradecer a minha amada esposa, Izabel Cristina, por seu amor incondicional, apoio e compreensão. Ela tem sido minha rocha, meu porto seguro e sou grato por tê-la ao meu lado em cada desafio e conquista.

Não posso deixar de mencionar meu orientador, o professor Dr. Allysson dos Santos Oliveira, cuja sabedoria e orientação foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e profissional. Sua dedicação e paciência em me ajudar a desenvolver novos conhecimentos foram inestimáveis.

Também sou grato ao professor Dr. Valdemberg, cujas contribuições e insights foram essenciais para o sucesso deste trabalho. Sua experiência e conhecimento foram uma fonte de inspiração e motivação para mim.

Por fim, gostaria de agradecer aos amigos professores doutores Luiz Sobral, André Dosea e Ginaldo Santana. O tempo que dedicaram a mim, compartilhando seus conhecimentos e experiência, foi inestimável. Suas palavras de encorajamento e apoio foram um verdadeiro presente.

A todos os meus colegas de curso, meu profundo agradecimento. Sou abençoado por ter pessoas tão maravilhosas em minha vida, que me ajudaram a crescer e a alcançar meus objetivos. Que Deus continue abençoando cada um de vocês e que possamos continuar a compartilhar nossas jornadas juntos.

Com gratidão,

Renato Machado Siqueira

Resumo

Este trabalho apresenta alguns dos principais conceitos da Geometria Euclidiana Plana, mostrando as definições básicas, os teoremas, bem como os resultados desta teoria. Apresentamos também diferentes formas de abordar estes conceitos no ensino básico, usando ferramentas tecnológicas (Geogebra), bem como algumas demonstrações detalhadas para uma melhor compreensão dos conteúdos. O presente trabalho pode ser usado como um material complementar, que poderá ser seguido pelo professor ao longo do ensino básico com a proposta pedagógica para ser aplicada em sala de aula. O objetivo é oferecer ao leitor um trabalho contextualizado, apresentado de maneira detalhada com várias ilustrações que facilmente podem ser seguidas.

Palavras-chave: Geometria Plana Euclidiana, Teoremas, Postulados, Geogebra.

Abstract

This work presents some of the main concepts of Plane Euclidean Geometry, showing the basic definitions, theorems, as well as the results of this theory. We also present different ways of approaching these concepts in basic education, using technological tools (Geogebra), as well as some detailed demonstrations for a better comprehension of the contents. The present work can be used as a complementary material, which can be followed by the teacher throughout basic education with the pedagogical proposal of being applied in the classroom. The objective is to offer the reader a contextualized work, presented details with several illustrations that can be easily followed.

Keywords: Euclidean Plane Geometry, Theorems, Postulates, Geogebra.

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Triângulo Retângulo com ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} | 4 |
| 1.2 | $\alpha + \beta = 180^\circ$ | 7 |
| 1.3 | $\alpha + \beta < 180^\circ$ | 8 |
| 1.4 | Pythagoras de Samos | 9 |
| 1.5 | Esquema de Prova | 11 |
| 1.6 | Variação 1 | 12 |
| 1.7 | Variação 2 | 13 |
| 1.8 | Desenhar dois pontos | 15 |
| 1.9 | Segmento e Reta Perpendicular | 15 |
| 1.10 | Ponto C | 16 |
| 1.11 | Construção do primeiro quadrado | 16 |
| 1.12 | Construção dos quadrados | 17 |
| 1.13 | Áreas dos polígonos | 17 |
| 1.14 | Demonstração do Teorema de Pitágoras no GeoGebra | 18 |
| 1.15 | Proporção | 22 |
| 1.16 | Tales de Mileto | 22 |
| 1.17 | Diagrama 1 | 23 |
| 1.18 | Diagrama 2 | 24 |
| 1.19 | Tipos especiais de cevianas | 26 |
| 1.20 | Caso mais básico do Teorema de Ceva | 27 |

| | | |
|------|--|----|
| 1.21 | Caso mais básico do Teorema de Menelaus | 27 |
| 1.22 | Demonstração do teorema de Menelaus pelo teorema de Tales | 28 |
| 1.23 | Recíproca do Teorema de Menelaus | 30 |
| 1.24 | Demonstração do Teorema de Menelaus pela semelhança de triângulos | 31 |
| 1.25 | Demonstração do teorema de Menelaus pela semelhança de triângulos retângulos | 33 |
| 1.26 | Ceva: pelo Teorema de Menelaus | 34 |
| 1.27 | Recíproca do Teorema de Ceva | 35 |
| 1.28 | Ceva: pelo Teorema de Tales | 36 |
| 1.29 | Aplicação 1 do Teorema de Menelaus | 37 |
| 1.30 | Aplicação 2 do Teorema de Menelaus | 38 |
| 1.31 | Aplicação 3 do Teorema de Menelaus | 39 |
| 1.32 | Aplicação 1 do Teorema de Ceva | 40 |
| 1.33 | O ponto O é o ortocentro do triângulo ABC | 41 |
| 1.34 | G é o ponto de Gergonne | 42 |
| 1.35 | Relação das cordas | 42 |
| 1.36 | Relação das cordas passando pelo centro | 43 |
| 1.37 | Desigualdade triangular | 44 |
| 1.38 | Bissetriz | 45 |
| 1.39 | Polígono $ABCD$ | 45 |
| 1.40 | Polígono inscrito $ABCDEF$ | 46 |
| 1.41 | Polígono circunscrito $ABCD$ | 46 |
| 1.42 | Quadrilátero inscrito $ABCD$ | 47 |
| 2.1 | Representação dos itens $i)$, $ii)$ e $iii)$, respectivamente. | 48 |
| 2.2 | Representação dos casos $d(P, C) = r$, $d(P, C) > r$ e $d(P, C) < r$, respectivamente. | 49 |
| 2.3 | Relação dos segmentos tangentes | 49 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.4 | Quadrilátero circunscritível $ABCD$ | 50 |
| 2.5 | Quadrilátero $ABCD$ não circunscritível. | 51 |
| 2.6 | Quadrilátero $ABCD'$ circunscritível. | 51 |
| 2.7 | Circunferência inscrita num triângulo | 52 |
| 2.8 | Circunferência inscrita num triângulo | 52 |
| 2.9 | Distância \overline{OI} | 54 |
| 2.10 | Teorema de Poncelet na circunferência | 55 |
| 2.11 | Quadrilátero inscrito $ABCD$ | 55 |
| 2.12 | Quadrilátero inscrito $ABED$ | 57 |
| 2.13 | Quadrilátero circunscrito $ABCD$ | 57 |
| 2.14 | Quadrilátero circunscrito $ABCD$ | 58 |
| 2.15 | Triângulo ABC e ceviana d | 59 |
| 2.16 | Quadrilátero inscrito $ABCD$ | 61 |
| 2.17 | Destaque dos triângulos AIK e LIC | 62 |
| 2.18 | Triângulos AIK e CIL juntos | 62 |
| 2.19 | Destaque do triângulo EFI | 63 |
| 2.20 | Quadrilátero $ABCD$ circunscrito e não inscrito | 64 |

Sumário

| | |
|---|----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Teoremas Básicos da Geometria Euclidiana Plana | 3 |
| 1.1 Relação Fundamental da Trigonometria e suas Consequências | 3 |
| 1.2 Os Postulados de Euclides | 6 |
| 1.3 Teorema de Pitágoras | 9 |
| 1.3.1 Introdução | 9 |
| 1.3.2 Demonstrações | 11 |
| 1.3.3 Trios Pitagóricos | 19 |
| 1.3.4 Generalizações e Aplicações | 21 |
| 1.4 Teorema de Tales | 22 |
| 1.4.1 Introdução | 22 |
| 1.4.2 Demonstrações | 23 |
| 1.4.3 Generalizações e Aplicações | 25 |
| 1.5 Teoremas de Menelaus e Ceva | 25 |
| 1.5.1 Introdução | 25 |
| 1.5.2 Demonstrações do Teorema de Menelaus | 28 |
| 1.5.3 Pela semelhança de triângulos | 31 |
| 1.5.4 Demonstrações do Teorema de Ceva | 33 |
| 1.5.5 Aplicações do Teorema de Menelaus | 36 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.5.6 | Aplicações do Teorema de Ceva | 39 |
| 1.6 | Relação Métrica na Circunferência | 42 |
| 1.7 | Definições | 45 |
| 2 | Teoremas de Poncelet | 48 |
| 2.1 | O Teorema de Pitot | 48 |
| 2.2 | O Teorema de Poncelet em triângulos | 52 |
| 2.3 | O Teorema de Poncelet na circunferência | 53 |
| 2.4 | O Teorema de Poncelet nos quadriláteros | 55 |
| 2.4.1 | Fórmula de Fuss | 58 |
| 2.4.2 | Recíproca de Fuss | 64 |
| | Bibliografia | 68 |

Introdução

A palavra Geometria vem do grego *geometrein* que significa medição de terra. Acredita-se que a motivação para o início do estudo da geometria surgiu da necessidade de refazer a demarcação dos campos, perdida durante as enchentes anuais do rio Nilo, e também, para a cobrança de impostos de acordo com o tamanho das terras, evidenciando que o estudo da geometria pode ter começado com os antigos egípcios. Entretanto, apesar destes indícios, não se tem certeza de quando exatamente a geometria começou a ser explorada e estudada pelas civilizações antigas. A única certeza que se tem é que a humanidade sempre esteve em contato com as mais variadas formas geométricas, desde as mais remotas pinturas nas cavernas que exibiam os mais diferentes formatos geométricos até as construções sofisticadas feitas pelas civilizações antigas.

A geometria também sempre esteve presente na natureza, preenchendo as mais diversas paisagens do globo terrestre com diferentes formatos geométricos.

Devido a isso, este ramo da matemática exerceu forte influência nas civilizações em todos os períodos e foi crucial para o desenvolvimento tecnológico que estamos inseridos.

Após esse breve comentário sobre alguns aspectos históricos e gerais sobre a geometria, introduziremos agora os pontos principais desse trabalho.

A matemática é apresentada aos estudantes do Ensino Fundamental e Médio de nossas escolas dividida de uma forma básica em Aritmética e Geometria. Neste trabalho abordaremos a Geometria. E desta área trabalharemos alguns teoremas da Geometria Euclidiana Plana.

Nos livros atuais, a Geometria Plana é abordada ao longo do ano, sendo intercalada com conteúdos de Álgebra e Aritmética e há uma preocupação de alguns professores em aprofundar esses conteúdos, o que não acontecia antigamente, mas mesmo assim alguns mestres deixam para trabalhar os conteúdos de Geometria apenas no final do ano e ministram apenas o nome do teorema, a fórmula e alguns exemplos.

Sendo assim, o estudo da Geometria com todos os seus teoremas, axiomas, postulados e propriedades é feito, na maioria das vezes, de forma rápida e muito resumida, evitando aspectos históricos e demonstrações. Então, apresentamos nesse trabalho, uma contribuição para o estudo e ensino da Geometria Euclidiana Plana.

No primeiro capítulo, apresentamos algumas relações, definições, postulados e teoremas, com algumas demonstrações que são os pilares da Geometria Euclidiana Plana no ensino básico, e darão auxílio no desenvolvimento do capítulo seguinte.

No segundo capítulo e último será apresentado o Teorema de Poncelet e algumas aplicações desse teorema em triângulos, circunferências e quadriláteros.

No desenvolvimento desse trabalho foi mostrado o uso de ferramentas educacionais como o geogebra para facilitar e torna a aprendizagem da matemática mais prazerosa, tento em vista que o ensino desta disciplina ainda se dá de uma forma tradicional.

Capítulo 1

Teoremas Básicos da Geometria Euclidiana Plana

Neste capítulo, nosso objetivo é introduzir conceitos e resultados básicos da geometria plana (ou euclidiana) que serão utilizados no decorrer do texto.

1.1 Relação Fundamental da Trigonometria e suas Consequências

A Relação fundamental da Trigonometria é um novo modo de visualizar o Teorema de Pitágoras, que estabelece uma relação importante entre os lados de um triângulo retângulo. O Teorema de Pitágoras afirma que em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa (o lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos (os dois lados que formam o ângulo reto).

Matematicamente, o Teorema de Pitágoras pode ser expresso como

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{1.1}$$

onde b e c são as medidas dos catetos do triângulo retângulo e a a medida da hipotenusa.

Essa relação é fundamental na trigonometria e na geometria em geral, pois permite calcular a medida de um lado desconhecido de um triângulo retângulo, desde que se conheça a medida dos outros dois lados. Além disso, o teorema de Pitágoras é a base para o desenvolvimento de várias identidades trigonométricas e para a compreensão de conceitos mais avançados na Matemática.

Observação 1.1. *A Demonstração desse teorema está na seção 1.3.*

O seno e o cosseno são duas das principais relações trigonométricas, que estão relacionadas com os ângulos de um triângulo retângulo. Vamos usar essas relações para expressar o Teorema de Pitágoras.

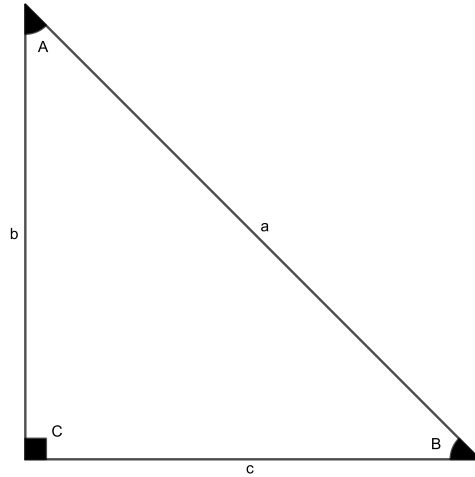


Figura 1.1: Triângulo Retângulo com ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C}

Considere o triângulo retângulo com ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , onde C é um ângulo reto (90°).

Definimos

$$\begin{aligned}\sin(B) &= \frac{b}{a} \\ \cos(B) &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

onde a , b e c são os lados do triângulo retângulo, conforme a Figura 1.1.

Veja que

$$\begin{aligned}(\sin(B))^2 + (\cos(B))^2 &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \\ &= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \\ &= \frac{b^2 + c^2}{a^2}\end{aligned}$$

Sabemos da Equação 1.1 que $b^2 + c^2 = a^2$, logo

$$\begin{aligned}(\sin(B))^2 + (\cos(B))^2 &= \frac{b^2 + c^2}{a^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\sin(B))^2 + (\cos(B))^2 = 1 \tag{1.2}$$

A mesma identidade pode ser encontrada, de maneira similar, para o ângulo A , assim

$$(\sin(A))^2 + (\cos(A))^2 = 1 \tag{1.3}$$

As expressões 1.2 e 1.3 são conhecidas como identidades trigonométricas fundamentais. Elas mostram que, para qualquer ângulo agudo em um triângulo retângulo, o quadrado do seno desse ângulo somado ao quadrado do cosseno desse mesmo ângulo é sempre igual a 1.

A relação entre seno e cosseno fornecida pelo Teorema de Pitágoras é a base para a derivação de várias identidades trigonométricas importantes. Essas identidades são usadas para simplificar expressões trigonométricas complexas e resolver equações trigonométricas.

Essa relação tem várias consequências e implicações relevantes, algumas das quais são:

1. **Identidades Trigonômicas:** A relação fundamental da trigonometria é a base para muitas outras identidades trigonométricas. A partir dessa relação, podemos derivar várias identidades, como a identidade da tangente, identidade da secante, identidade da cossecante, e outras.
2. **Relações entre Funções Trigonômicas:** A relação fundamental mostra uma relação importante entre o seno e o cosseno de um ângulo. Se conhecemos o valor de um deles, podemos calcular o outro usando essa relação.
3. **Unidade do Círculo:** A relação fundamental está diretamente relacionada com a circunferência unitária, a qual é uma circunferência de raio 1 colocado no plano cartesiano. As coordenadas (x, y) de qualquer ponto na circunferência unitária representam os valores do cosseno e do seno do ângulo central correspondente.
4. **Resolução de Equações Trigonômicas:** A relação fundamental é frequentemente usada para resolver equações trigonométricas, simplificando expressões ou isolando uma função trigonométrica desconhecida.
5. **Aplicações em Ciências e Engenharia:** Essa relação é usada em várias aplicações em física, engenharia, ciências naturais e outras áreas para modelar e resolver problemas envolvendo ângulos e medidas trigonométricas.
6. **Prova de outras Identidades:** A relação fundamental pode ser usada como base para provar outras identidades trigonométricas mais complexas, ampliando seu escopo de aplicação.

Essas são algumas das consequências e importâncias da relação fundamental da trigonometria. Ela é uma ferramenta poderosa para trabalhar com funções trigonométricas e é amplamente utilizada em uma variedade de contextos matemáticos e práticos.

1.2 Os Postulados de Euclides

Euclides de Alexandria foi um matemático grego que viveu por volta de 300 a.C. Ele é considerado um dos mais importantes matemáticos da antiguidade clássica, conhecido principalmente pelo trabalho intitulado “Os Elementos”.

“Os Elementos” é uma coleção de 13 livros que abrangem a geometria e a teoria dos números. Essa obra é uma das mais influentes e duradouras da história da matemática, e sua relevância persistiu por mais de dois milênios.

O trabalho de Euclides estabeleceu um método lógico e sistemático para o desenvolvimento da matemática, conhecido como o método axiomático. Ele começou estabelecendo definições precisas e postulados fundamentais, a partir dos quais ele derivou uma série de teoremas e corolários usando apenas argumentos lógicos dedutivos.

Entre os tópicos abordados em “Os Elementos”, estão a teoria dos números, a teoria das proporções e a geometria. Muitos conceitos básicos que estudamos hoje em geometria euclidiana, como pontos, linhas, planos, ângulos e triângulos, foram formalizados por Euclides. Os cinco postulados são os seguintes:

Postulado 1: É possível traçar uma (única) reta entre dois pontos quaisquer.

Postulado 2: É possível estender uma linha reta finita indefinidamente.

Postulado 3: É possível traçar um círculo com quaisquer centro e raio.

Postulado 4: Todos os ângulos retos são iguais entre si.

Observação 1.2. *Em relação ao Postulado 1, pode-se observar que Euclides não utilizou explicitamente o termo entre parênteses. No entanto, pela maneira como ele o emprega, podemos inferir que esse termo foi implicitamente considerado.*

Antes de apresentarmos o quinto postulado, observemos a Proposição 28 do Livro I dos Elementos de Euclides:

Proposição: *Se uma reta m corta duas outras retas r e s de modo que a soma dos ângulos formados é igual a dois ângulos retos, então r e s são paralelas (ver Figura 1.2).*

Matematicamente podemos representar esta proposição do seguinte modo

$$\alpha + \beta = 180^\circ \implies r \cap s = \emptyset$$

Note que a proposição é da forma “se... , então...”. Dessa forma, naturalmente, surge a questão:

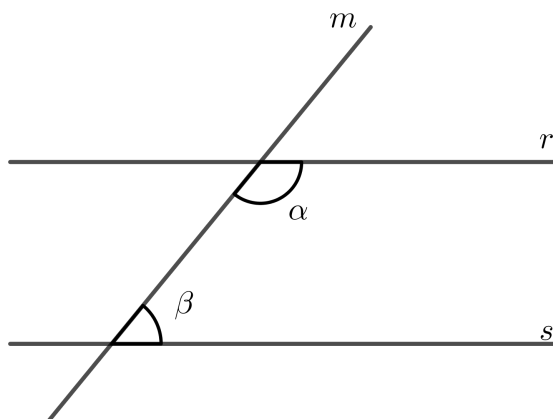


Figura 1.2: $\alpha + \beta = 180^\circ$

será que a recíproca é verdadeira? Isto é, se as retas r e s são paralelas, então uma reta m corta duas outras retas r e s de modo que a soma dos ângulos formados é igual a dois ângulos retos?

$$r \cap s = \emptyset \implies \alpha + \beta = 180^\circ ?$$

Por séculos, brilhantes matemáticos se dedicaram para desvendar essa questão, apenas para descobrir que ela é muito mais complexa do que aparenta. Atualmente, é amplamente reconhecido que essa afirmação é independente de outros princípios (postulados) e está precisamente contida no Postulado 5, conforme enunciado por Euclides.

Postulado 5: Se uma reta m corta duas outras retas r e s formando ângulos menores do que dois ângulos retos, então r e s não são paralelas, e se encontrarão do lado dos ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos (ver Figura 1.3).

O quinto postulado, também conhecido como o Postulado de Euclides, foi o mais debatido ao longo da história da matemática. Diferentemente dos quatro primeiros postulados de Euclides, o quinto postulado parece mais um teorema do que um postulado. Compreendê-lo não é imediato; é necessário ler mais de uma vez para entendê-lo completamente.

Ao longo dos anos, muitos matemáticos acreditaram que Euclides não conseguiu demonstrar o Postulado 5 a partir dos outros quatro, então ele optou por deixá-lo como um postulado. Certamente, Euclides deve ter refletido bastante até aceitar que teria que adicioná-lo como um postulado, visto que, ao contrário dos demais, de fácil entendimento, o Postulado 5 possui uma natureza complexa semelhante a um teorema, não sendo uma simples afirmação que podemos aceitar sem demonstração.

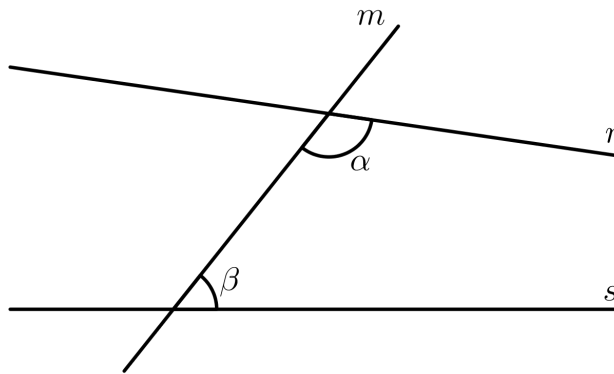


Figura 1.3: $\alpha + \beta < 180^\circ$

Durante séculos, várias tentativas de prova utilizando apenas os outros quatro postulados surgiram, mas todas estavam incorretas ou continham afirmações não justificadas. Outros matemáticos tentaram substituir o Postulado 5 de Euclides por outro que tivesse a mesma simplicidade dos anteriores, e muitas dessas tentativas resultaram em importantes descobertas para o desenvolvimento da geometria plana.

Em 1795, o matemático escocês John Playfair (1748 – 1819) lançou uma edição revisada dos seis primeiros livros dos Elementos de Euclides. Nessa versão, ele fez alterações para corrigir o que considerava falhas no texto original. Uma dessas modificações de Playfair foi a substituição do quinto postulado por uma nova proposição.

Postulado de Playfair: Dada uma reta r e um ponto P fora dela, existe uma única reta paralela a r passando por P .

Playfair demonstrou que esse postulado alternativo leva as mesmas conclusões que o quinto postulado de Euclides.

1.3 Teorema de Pitágoras

1.3.1 Introdução



Figura 1.4: Pythagoras de Samos

O professor R. Smullyan em seu livro *5000 a.C. e Outras fantasias filosóficas* conta uma experiência que realizou em uma de suas aulas de geometria. Ele desenhou um triângulo retângulo no quadro com quadrados na hipotenusa e observou que o quadrado da hipotenusa tinha uma área maior do que qualquer um dos outros dois quadrados. Então ele perguntou: “Suponha que esses três quadrados fossem feitos de ouro batido e lhe oferecessem o único quadrado grande ou os dois pequenos. Qual você escolheria?” Curiosamente, cerca de metade da turma optou por um quadrado grande e metade pelos dois pequenos. Ambos os grupos ficaram igualmente surpresos quando disseram que não faria diferença.

O Teorema de Pitágoras é a afirmação de que a soma (das áreas) dos dois quadrados pequenos é igual à (área) do grande.

Em termos algébricos, $a^2 + b^2 = c^2$ onde c é a hipotenusa enquanto a e b são os catetos do triângulo.

O teorema é de fundamental importância na Geometria Euclidiana onde serve de base para a definição de distância entre dois pontos. É tão básico e conhecido que, creio eu, qualquer um que teve aulas de geometria no ensino médio não poderia deixar de se lembrar dele muito tempo depois que outras noções de matemática foram completamente esquecidas.

Observação 1.3. *Aqui temos alguns fatos sobre esse grande resultado:*

- *A declaração do Teorema foi descoberta em uma tábua babilônica por volta de 1900-1600 a.C. Se Pitágoras (c.560-c.480 a.C.) ou alguém de sua Escola foi o primeiro a descobrir sua prova não pode ser reivindicado com qualquer grau de credibilidade. Os Elementos de*

Euclides (c 300 a.C.) fornecem o primeiro e, posteriormente, o padrão de referência em Geometria. Na verdade, Euclides forneceu duas provas muito diferentes: a Proposição I.47 (Primeiro Livro, Proposição 47) e VI.31. O Teorema é reversível, o que significa que sua recíproca também é verdadeira. A recíproca afirma que um triângulo cujos lados satisfazem $a^2 + b^2 = c^2$ é necessariamente retângulo. Euclides foi o primeiro (I.48) a mencionar e provar este fato.

- W. Dunham [Mathematical Universe] cita um livro *The Pythagorean Proposition* de um professor do início do século 20, Elisha Scott Loomis. O livro é uma coleção de 367 provas do Teorema de Pitágoras e foi republicado pelo NCTM em 1968. No prefácio, o autor afirma corretamente que o número de provas algébricas é ilimitado, assim como o número de provas geométricas, mas que a proposição não admite prova trigonométrica. Curiosamente, em nenhum lugar do livro Loomis menciona o VI.31 de Euclides, mesmo quando o oferece e as variantes como provas algébricas 1 e 93 ou como prova geométrica 230.
- Em termos trigonométricos, o teorema de Pitágoras afirma que em um triângulo ABC , a igualdade $\sin(A)^2 + \sin(B)^2 = 1$ é equivalente ao ângulo em C ser reto. Uma afirmação mais simétrica é que $\triangle ABC$ é reto se $\sin(A)^2 + \sin(B)^2 + \sin(C)^2 = 2$. Pela lei dos senos, este último equivale a $a^2 + b^2 + c^2 = 2d^2$, onde d é o diâmetro do círculo circunscrito. Outra forma da mesma propriedade é $\cos(A)^2 + \cos(B)^2 + \cos(C)^2 = 1$.
- Onde quer que todos os três lados de um triângulo retângulo sejam inteiros, seus comprimentos formam um triplo pitagórico (ou números pitagóricos). Existe uma fórmula geral para obter todos esses números.
- Sabe-se que o Teorema de Pitágoras é equivalente ao 5º Postulado de Euclides.
- O falecido professor Edsger W. Dijkstra encontrou uma generalização absolutamente impressionante do teorema de Pitágoras. Se em um triângulo, os ângulos α, β, γ estão opostos aos lados de comprimento a, b, c , então (EWD) $\text{senal}(\alpha + \beta - \gamma) = \text{senal}(a^2 + b^2 - c^2)$, onde $\text{senal}(t)$ é a função sinal:

$$\begin{aligned} \text{senal}(t) &= -1, \text{ para } t < 0, \\ \text{senal}(0) &= 0, \\ \text{senal}(t) &= 1, \text{ para } t > 0 \end{aligned}$$

O teorema ao qual esta página é dedicada é tratado como "Se $\gamma = \frac{p}{2}$, então $a^2 + b^2 = c^2$." Dijkstra acha merecidamente (EWD) mais simétrico e mais informativo.

O p representa um ângulo específico em um triângulo. Mais precisamente, o ângulo p é duas vezes o ângulo γ . Portanto, se o ângulo γ é igual à metade de p , então o Teorema de Pitágoras se aplica, e a relação $a^2 + b^2 = c^2$ é válida para o triângulo em questão, onde a e b são os comprimentos dos outros dois lados do triângulo.

- O mais famoso dos triângulos retângulos, aquele com dimensões 3 : 4 : 5, foi avistado na arte gótica e pode ser obtido dobrando papel . Inadvertidamente, ele aparece em vários problemas de Sangaku .
- Talvez não surpreendentemente, o teorema de Pitágoras é uma consequência de várias leis físicas e é encontrado em vários fenômenos mecânicos.

1.3.2 Demonstrações

Teorema 1.1 (Pitágoras de Samos). *Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*

Vamos a nossa primeira prova, e a mais clássica.

Demonstração. Esta é provavelmente a mais famosa de todas as provas da proposição pitagórica. É a primeira das duas provas de Euclides (I.47). A configuração subjacente tornou-se conhecida sob uma variedade de nomes, sendo provavelmente a Cadeira da Noiva a mais popular.

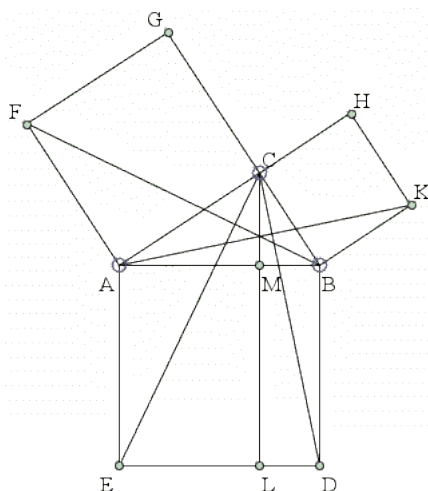


Figura 1.5: Esquema de Prova

A prova abaixo é uma versão um tanto abreviada da prova euclidiana original, conforme aparece na tradução de Sir Thomas Heath.

Em primeiro lugar, $\triangle ABF = \triangle AEC$ por *LAL*. Isso ocorre porque $AE = AB$, $AF = AC$ e $\hat{B}\hat{A}\hat{F} = \hat{B}\hat{A}\hat{C} + \hat{C}\hat{A}\hat{F} = \hat{C}\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\hat{E} = \hat{C}\hat{A}\hat{E}$.

$\triangle ABF$ tem base AF e a altitude de B igual a AC . Sua área, portanto, é igual à metade do quadrado do lado AC . Por outro lado, $\triangle AEC$ tem AE e a altitude de C igual a AM , onde M é o ponto de interseção de AB com a reta CL paralela a AE . Assim, a área de $\triangle AEC$ é igual à

metade da área do retângulo $AELM$. Que diz que a área AC^2 do quadrado do lado AC é igual à área do retângulo $AELM$.

Da mesma forma, a área BC^2 do quadrado de lado BC é igual à do retângulo $BMLD$. Finalmente, os dois retângulos $AELM$ e $BMLD$ formam o quadrado da hipotenusa AB . \square

A configuração em questão admite inúmeras variações. B. F. Yanney e J. A. Calderhead (Am Math Monthly, v.4, n 6/7, (1987), 168-170 publicaram várias provas baseadas nos seguintes diagramas:

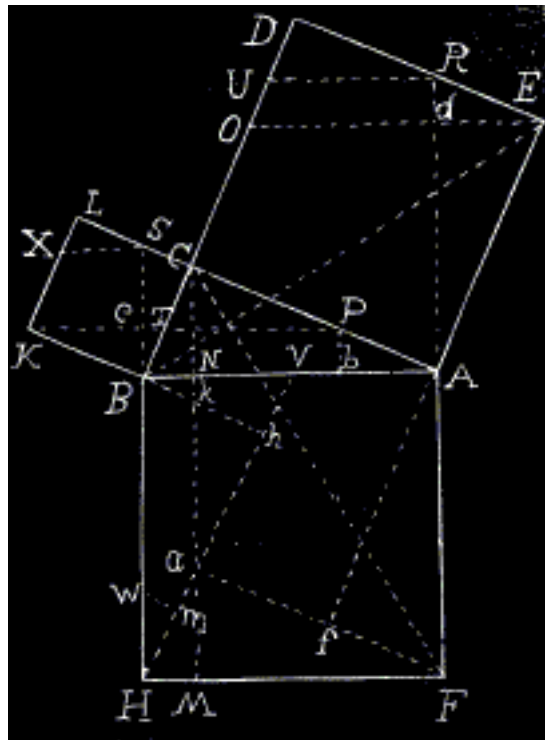


Figura 1.6: Variação 1

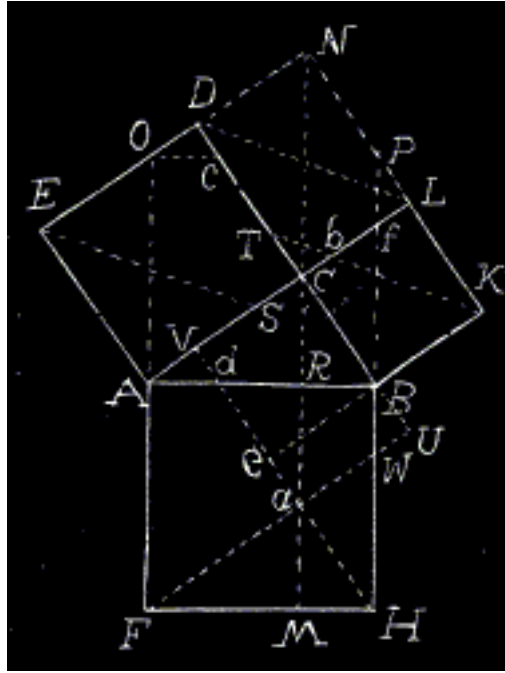
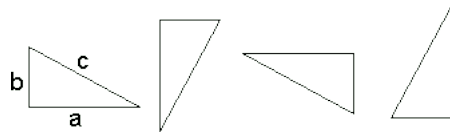


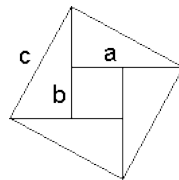
Figura 1.7: Variação 2

Uma segunda demonstração do Teorema de Pitágoras:

Demonstração. Uma segunda demonstração do Teorema de Pitágoras:



Agora começamos com quatro cópias do mesmo triângulo. Três deles foram girados 90° , 180° e 270° , respectivamente. Cada um tem área $\frac{ab}{2}$. Vamos juntá-los sem rotações adicionais para que formem um quadrado de lado c .

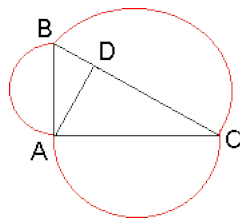


O quadrado tem um buraco quadrado com o lado $(a - b)$. Somando sua área $(a - b)^2$ e $2ab$, a área dos quatro triângulos $\left(\frac{4 \cdot ab}{2}\right)$, obtemos

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - b)^2 + 2ab \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 2ab \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

□

A próxima prova é extraída textualmente de Euclides VI.31 na tradução de Sir Thomas L. Heath. O grande G. Polya o analisa em seu *Induction and Analogy in Mathematics* (II.5) que é uma leitura recomendada para alunos e professores de Matemática.



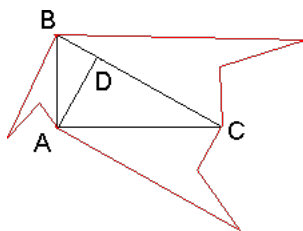
Demonstração. Nos triângulos retângulos, a figura do lado que subtende o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e descritas de maneira semelhante nos lados que contêm o ângulo reto.

Seja ABC um triângulo retângulo com o ângulo BAC reto; Eu digo que a figura em BC é igual às figuras semelhantes e descritas de forma semelhante em BA, AC .

Seja AD traçado perpendicularmente. Então, como no triângulo retângulo ABC , AD foi traçado do ângulo reto em A perpendicular à base BC , os triângulos ABD, ADC adjacentes à perpendicular são semelhantes tanto ao ABC inteiro quanto entre si.

E, como ABC é semelhante a ABD , assim como CB está para BA , AB está para BD .

E, como três retas são proporcionais, como a primeira é proporcional à terceira, assim também a figura da primeira é proporcional à figura semelhante e similarmente descrita da segunda. Portanto, assim como CB está para BD , a figura em CB está para a figura semelhante e similarmente descrita em BA .



Pela mesma razão, assim como BC está para CD , a figura em BC está para CA ; de modo que, além disso, como BC está para BD, DC , assim é a figura em BC para as figuras semelhantes e descritas de forma semelhante em BA, AC .

Mas BC é igual a BD, DC ; portanto, a figura em BC também é igual às figuras semelhantes e descritas de maneira semelhante em BA, AC .

Demonstração no GeoGebra

O Geogebra é uma ferramenta poderosa para a demonstração visual e interativa de diversos conceitos matemáticos, incluindo o Teorema de Pitágoras. Aqui estão os passos para demonstrar o Teorema de Pitágoras usando o Geogebra:

1. Abra o GeoGebra e crie uma nova janela de geometria. Você verá uma grade onde poderá desenhar e construir objetos geométricos.
2. Desenhe dois pontos (ferramenta Ponto) em posições arbitrariamente distintas no plano. Vamos chamá-los de A e B (Figura 1.8)



Figura 1.8: Desenhar dois pontos

3. Utilize a ferramenta “Segmento” para ligar os pontos A e B . Em seguida, com a ferramenta “Reta Perpendicular”, toque no segmento construído e em qualquer um dos dois pontos.

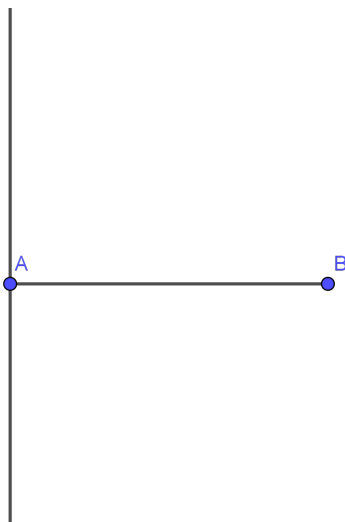


Figura 1.9: Segmento e Reta Perpendicular

4. Desenhe um ponto C sobre a reta perpendicular; depois trace os segmentos AC e BC (Figura 1.10). Na janela de álgebra, toque no círculo azul que representa a reta que passa pelo ponto A e perpendicular ao segmento AB para omiti-la.

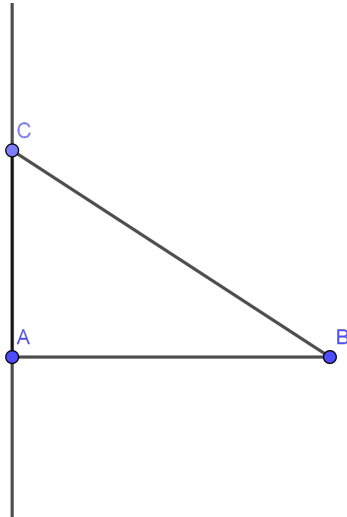


Figura 1.10: Ponto C

5. Construa os quadrados dos lados do triângulo. Selecione a ferramenta “Polígono Regular”, clique no ponto B e depois no ponto A . Aparecerá uma janela na qual será colocado a quantidade de vértices desse polígono, como queremos construir um quadrado, então digitamos 4, e assim, será criado um quadrado abaixo do triângulo (Figura 1.11).

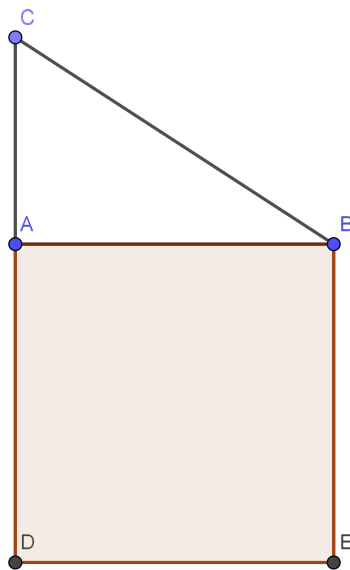


Figura 1.11: Construção do primeiro quadrado

6. Para a construção dos outros dois quadrados, repetimos o processo anterior.

Ferramenta “Polígono Regular” \rightarrow clica no ponto A e no ponto C \rightarrow Vértices: 4

Ferramenta “Polígono Regular” \rightarrow clica no ponto C e no ponto B \rightarrow Vértices: 4

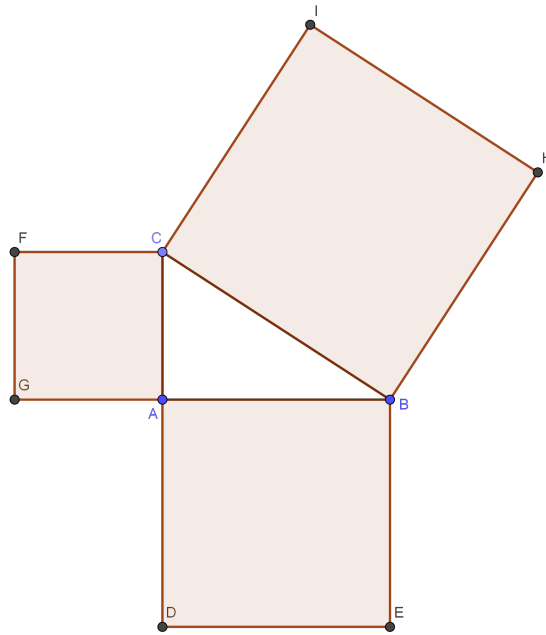


Figura 1.12: Construção dos quadrados

7. Use a ferramenta “Ângulo” para construir o ângulo do triângulo BAC .
8. Use a ferramenta “Área” para medir as áreas dos polígonos $ACFG$, $ABDE$ e $BCHI$ (Figura 1.13).

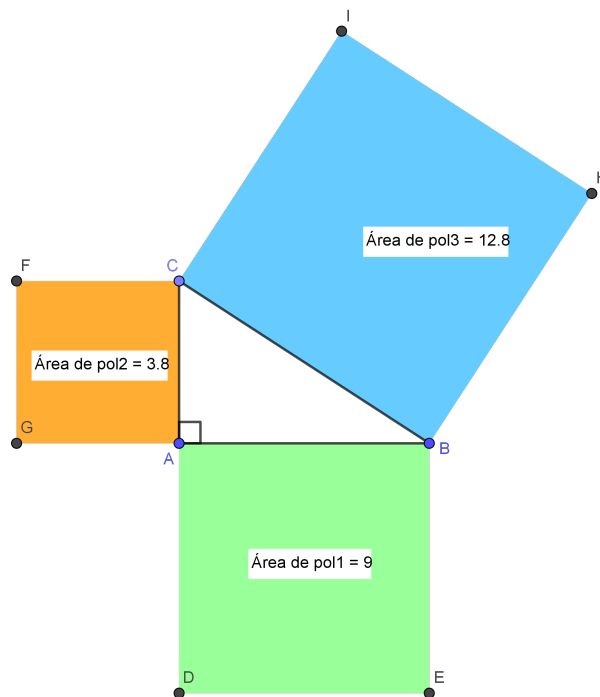


Figura 1.13: Áreas dos polígonos

9. Compare os quadrados dos catetos (segmentos AC e AB) com o quadrado da hipotenusa (segmento BC). Verifique se a soma das áreas dos quadrados dos catetos é igual à área do quadrado da hipotenusa. A diferença entre eles pode ser devida a arredondamentos visuais no GeoGebra.
10. Considere os comprimentos dos segmentos AC , AB e BC , respectivamente como, a , b e c (Figura 1.14).

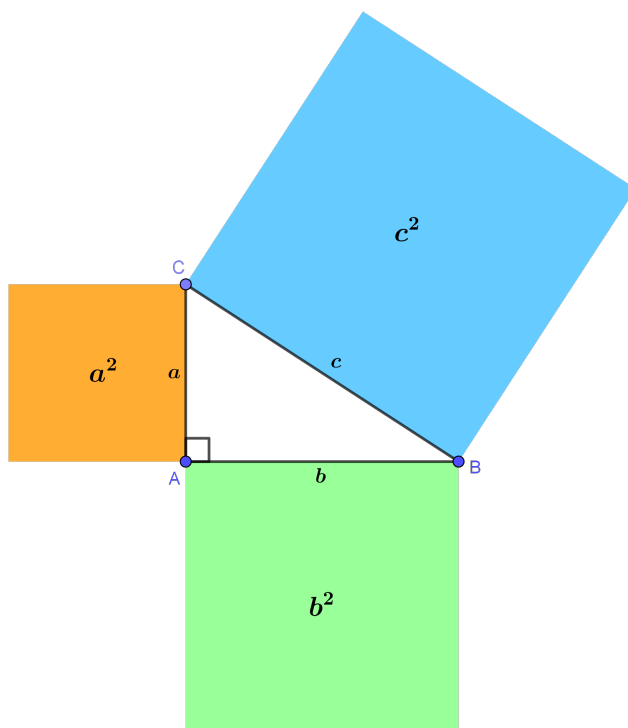


Figura 1.14: Demonstração do Teorema de Pitágoras no GeoGebra

Observação 1.4. *Uma das vantagens do Geogebra é a capacidade de manipular o triângulo e ver como as relações entre os lados mudam. É possível ajustar os pontos ou a posição dos objetos geométricos e ainda, sim, a soma das áreas dos quadrados dos catetos continua sendo igual à área do quadrado da hipotenusa.*

Com o Geogebra, a demonstração do Teorema de Pitágoras se torna uma experiência interativa e dinâmica, o que pode auxiliar os estudantes a entender melhor as propriedades matemáticas envolvidas. Além disso, o Geogebra é uma ferramenta de código aberto e amplamente utilizada, tornando-a acessível para muitos educadores e alunos.

□

1.3.3 Trios Pitagóricos

Uma tripla pitagórica consiste em três inteiros positivos a, b e c , tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Tal tripla é comumente escrita (a, b, c) e um exemplo bem conhecido é $(3, 4, 5)$. Se (a, b, c) é uma tripla pitagórica, então (ka, kb, kc) também é para qualquer inteiro positivo k . Uma tripla pitagórica primitivo é aquele em que a, b e c são primos entre si (ou seja, eles não têm divisor comum maior que 1). Por exemplo, $(3, 4, 5)$ é uma tripla pitagórica primitiva, enquanto $(6, 8, 10)$ não é. Um triângulo cujos lados formam uma tripla pitagórica é chamado de triângulo pitagórico e é necessariamente um triângulo retângulo.

O nome é derivado do teorema de Pitágoras, assim os triplos pitagóricos descrevem os três comprimentos laterais inteiros de um triângulo retângulo. No entanto, triângulos retângulos com lados não inteiros não formam triplos pitagóricos. Por exemplo, o triângulo com lados $a = b = 1$ e $c = \sqrt{2}$, é um triângulo retângulo, mas $(1, 1, \sqrt{2})$ não é um triplo pitagórico porque $\sqrt{2}$ não é um número inteiro.

As triplas pitagóricas são conhecidas desde os tempos antigos. O registro mais antigo conhecido vem de Plimpton 322, uma tabuinha de argila babilônica de cerca de 1800 a.C., escrita em um sistema de numeração sexagesimal. Foi descoberto por Edgar James Banks pouco depois de 1900 e vendido para George Arthur Plimpton em 1922.

Ao procurar por soluções inteiras, observamos que a equação $a^2 + b^2 = c^2$ é uma equação diofantina. Assim, os triplos pitagóricos estão entre as mais antigas soluções conhecidas de uma equação diofantina não linear.

A fórmula de Euclides é uma fórmula fundamental para gerar triplos pitagóricos dados um par arbitrário de inteiros m e n com $m > n > 0$. A fórmula afirma que os inteiros

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

formam um triplo pitagórico.

Demonstração. Que a fórmula de Euclides por a, b, c é suficiente para o triângulo ser pitagórico é aparente pelo fato de que para inteiros positivos m e n , $m > n$, a, b e c dados pela fórmula são todos positivos números inteiros, e do fato de que

$$a^2 + b^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2 = c^2.$$

Uma prova da necessidade de que a, b, c sejam expressos pela fórmula de Euclides para qualquer tripla pitagórica primitiva é a seguinte. Todas essas triplas primitivas podem ser escritas como (a, b, c) onde $a^2 + b^2 = c^2$ e a, b, c são inteiros positivos coprimos. Assim a, b, c são primos pares (se um número primo dividisse dois deles, seria obrigado a dividir também o terceiro). Como a e b são inteiros positivos coprimos, pelo menos um deles é ímpar, então podemos supor que a

é ímpar, trocando, se necessário, a e b . Isso implica que b é par e c é ímpar (se b fosse ímpar, c seria par e c^2 seria um múltiplo de 4, enquanto $a^2 + b^2$ seria congruente a 2 mod 4, pois um quadrado ímpar é congruente a 1 mod 4).

De $a^2 + b^2 = c^2$ nós obtemos $c^2 - a^2 = b^2$ e, portanto $(ca)(c + a) = b^2$. Então $\frac{(c+a)}{b} = \frac{b}{(ca)}$. Desde $\frac{(c+a)}{b}$ é racional, nós igualamos a $\frac{m}{n}$ em termos mais baixos. Por isso $\frac{(ca)}{b} = \frac{n}{m}$, sendo o recíproco de $\frac{(c+a)}{b}$. Então resolvendo:

$$\frac{c}{b} + \frac{a}{b} = \frac{m}{n}, \quad \frac{c}{b} - \frac{a}{b} = \frac{n}{m}$$

para $\frac{c}{b}$ e $\frac{a}{b}$ dá:

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \right) = \frac{m^2 + n^2}{2mn}, \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m} \right) = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.$$

Como $\frac{m}{n}$ é totalmente reduzido, m e n são inteiros positivos coprimos e não podem ser ambos pares. Se ambos fossem ímpares, o numerador de $\frac{m^2 - n^2}{2mn}$ seria um múltiplo de 4 (porque um quadrado ímpar é congruente a 1 mod 4), e o denominador $2mn$ não seria um múltiplo de 4. Como 4 seria o fator par mínimo possível no numerador e 2 seria o máximo possível fator par no denominador, isso implicaria em ser par, apesar de defini-lo como ímpar. Assim, um de m e n é ímpar e o outro é par, e os numeradores das duas frações com denominador $2mn$ são ímpares. Assim, essas frações são totalmente reduzidas (um primo ímpar dividindo esse denominador divide um de m e n , mas não o outro; portanto, não divide $m^2 \pm n^2$). Pode-se assim igualar numeradores com numeradores e denominadores com denominadores, dando a fórmula de Euclides

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

com m e n coprimos e de paridades opostas.

□

A tripla gerada pela fórmula de Euclides é primitiva se e somente se m e n são primos entre si e um deles é par. Quando m e n são ímpares, então a, b e c serão pares e o triplo não será primitivo; no entanto, dividir a, b e c por 2 resultará em um triplo primitivo quando m e n forem primos entre si.

Todo triplo primitivo surge (após a troca de a e b , se a for par) de um par único de números coprimos m, n , um dos quais é par. Segue-se que existem infinitas triplas pitagóricas primitivas. Esta relação de a, b e c para m e n da fórmula de Euclides é referenciada ao longo deste artigo.

Apesar de gerar todos os triplos primitivos, a fórmula de Euclides não produz todos os triplos - por exemplo, $(9, 12, 15)$ não pode ser gerado usando inteiros m e n . Isso pode ser remediado

inserindo um parâmetro adicional k na fórmula. O seguinte irá gerar todos os triplos pitagóricos exclusivamente:

$$a = k \cdot (m^2 - n^2), \quad b = k \cdot (2mn), \quad c = k \cdot (m^2 + n^2)$$

onde m , n e k são inteiros positivos com $m > n$, e com m e n coprimos e não ambos ímpares.

O fato de essas fórmulas gerarem triplos pitagóricos pode ser verificado expandindo $a^2 + b^2$ usando álgebra elementar e verificando se o resultado é igual a c^2 . Como todo triplo pitagórico pode ser dividido por algum inteiro k para obter um triplo primitivo, todo triplo pode ser gerado exclusivamente usando a fórmula com m e n para gerar sua contraparte primitiva e, em seguida, multiplicando por k como na última equação.

Escolher m e n de certas sequências inteiras fornece resultados interessantes. Por exemplo, se m e n são números Pell consecutivos, a e b serão diferentes em 1.

Muitas fórmulas para gerar triplos com propriedades particulares foram desenvolvidas desde a época de Euclides.

1.3.4 Generalizações e Aplicações

O teorema de Pitágoras foi generalizado por Euclides em seus Elementos:

Se alguém erguer figuras semelhantes nos lados de um triângulo retângulo, então a soma das áreas dos dois menores é igual à área do maior. O teorema de Pitágoras é um caso especial do teorema mais geral que relaciona os comprimentos dos lados em qualquer triângulo, a lei dos cossenos:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta) = c^2$$

onde θ é o ângulo entre os lados a e b . Quando θ é 90 graus, então $\cos(\theta) = 0$, então a fórmula se reduz ao usual teorema de Pitágoras.

1.4 Teorema de Tales

1.4.1 Introdução

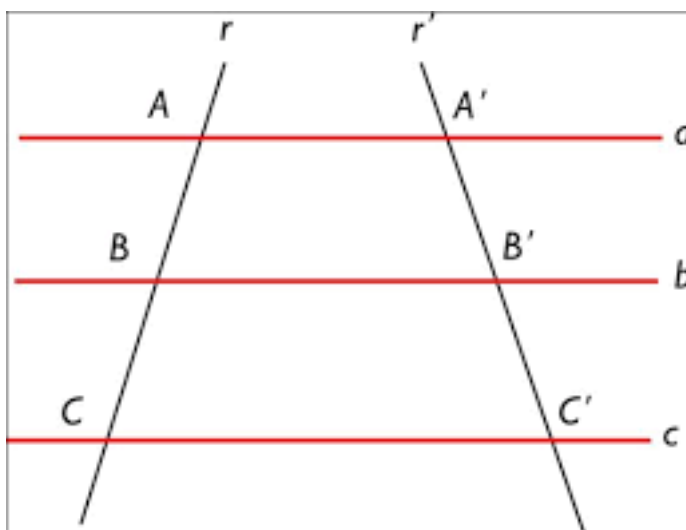


Figura 1.15: Proporção

O teorema de Tales, também conhecido como teorema do intercepto, afirma que “se duas retas são transversais a 3 retas paralelas, então os pontos de intersecção marcam segmentos diretamente proporcionais em ambas as retas.”

Este teorema recebeu o nome do antigo filósofo e matemático grego Tales de Mileto, que acredita-se que o tenha descoberto. O teorema de Tales é um resultado fundamental na geometria elementar e é usado em várias provas e construções geométricas.

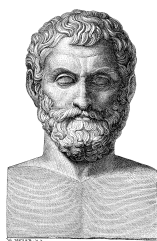


Figura 1.16: Tales de Mileto

O teorema foi registrado pela primeira vez por Euclides em seus Elementos, uma coleção de provas matemáticas escritas por volta de 300 a.C. Nos Elementos, Euclides afirma que o teorema é um teorema antigo, mas não fornece detalhes sobre sua origem.

No século XIX, os estudiosos começaram a estudar a história do Teorema de Tales com mais detalhes. Acredita-se que o teorema foi descoberto pela primeira vez por Thales, que era um filósofo e matemático de Mileto. Ele é considerado o primeiro a usar o raciocínio dedutivo para

provar o teorema, que era uma forma revolucionária de pensar na época.

O Teorema de Tales permaneceu como um importante teorema matemático desde sua descoberta. O teorema é usado em muitos campos diferentes da matemática, incluindo trigonometria, cálculo e geometria.

Também tem sido usado em física e engenharia para resolver problemas. O teorema ainda é estudado hoje como parte do currículo básico em muitas escolas e universidades. É um dos teoremas mais importantes da matemática, sendo considerado a pedra angular da matemática moderna.

1.4.2 Demonstrações

Este teorema pode ser provado usando geometria básica.

Teorema 1.2 (Tales de Mileto). *O teorema de Tales na circunferência nos diz que o diâmetro de um círculo sempre forma um triângulo retângulo quando o conectamos a qualquer ponto da circunferência do círculo. Este teorema pode ser provado usando dois triângulos isósceles inscritos em um círculo e usando seus ângulos. A seguir veremos uma explicação mais detalhada do teorema de Tales.*

O teorema de Tales é considerado um caso especial do teorema dos ângulos inscritos. O teorema de Tales é aplicado a triângulos retângulos inscritos em um círculo.

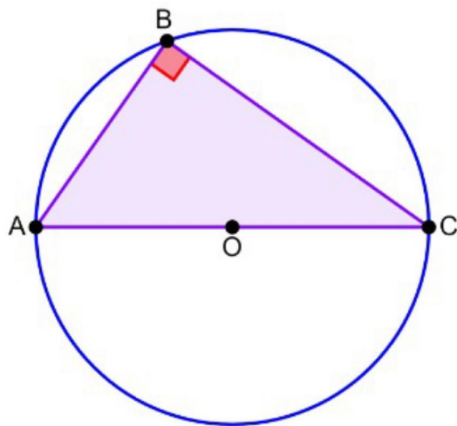


Figura 1.17: Diagrama 1

O teorema de Tales indica que, se os pontos A, B, C são pontos diferentes localizados na circunferência de um círculo de centro O, onde a linha AC é um diâmetro do círculo, o triângulo ABC tem um ângulo reto (de 90°) no ponto B.

Portanto, o triângulo ABC é um triângulo retângulo. Isso significa que o diâmetro de um

círculo sempre forma um ângulo reto com qualquer ponto do círculo.

Demonstração. Podemos provar o teorema de Tales de várias maneiras diferentes usando técnicas algébricas e geométricas. No entanto, aqui vamos nos concentrar em um método geométrico usando bissetrizes e a soma de ângulos internos.

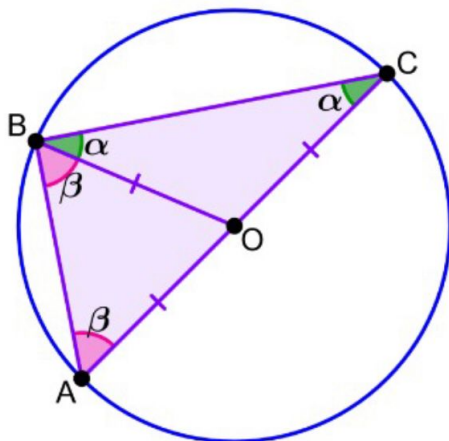


Figura 1.18: Diagrama 2

Primeiro, desenhe um círculo com centro O e raio r e marque os pontos A , B e C distintos sobre a circunferência desse círculo. Trace os segmentos AB , BC e AC , de modo que AC seja o diâmetro.

Quando conectamos o centro do círculo O ao ponto B , criamos dois triângulos ABO e OBC . Ambos os triângulos são isósceles, pois os segmentos OA , OC , OB são iguais porque são os raios do círculo.

Sabemos que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais. Assim, os ângulos da base do triângulo ABO são iguais. Da mesma forma, os ângulos da base do triângulo OBC são iguais.

Sabemos também que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180° . Assim, no triângulo ABC , temos:

$$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

Dividindo a expressão por 2, temos:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

O ângulo $\alpha + \beta$ é o ângulo do triângulo ABC no ponto B . Assim, provamos o teorema.

□

1.4.3 Generalizações e Aplicações

O teorema de Tales afirma que, se um triângulo está inscrito em um círculo, os ângulos do triângulo somam 180 graus. Este teorema é um resultado fundamental na geometria euclidiana e possui muitas generalizações e resultados relacionados.

A primeira generalização do Teorema de Tales é que o teorema vale para qualquer polígono, não apenas para triângulos. Isso significa que, se um polígono estiver inscrito em um círculo, a soma dos ângulos do polígono será de $180(n - 2)$ graus, onde n é o número de lados do polígono. Outro resultado relacionado do Teorema de Tales é o Teorema do Ângulo Inscrito. Este teorema afirma que, se um ângulo está inscrito em um círculo, a medida do ângulo é metade da medida de seu arco interceptado. Este teorema pode ser usado para provar o Teorema de Tales, pois os ângulos de um triângulo podem ser divididos em dois ângulos inscritos em um círculo.

O Teorema de Tales também está relacionado com o Teorema da Tangente Inversa. Este teorema afirma que, se duas linhas se cruzam em um círculo, a medida do ângulo formado pelas linhas é igual à tangente inversa da razão entre os comprimentos das linhas. Este teorema pode ser usado para encontrar os ângulos de um triângulo inscrito em um círculo, que pode então ser usado para provar o Teorema de Tales.

Finalmente, o Teorema de Tales está relacionado com o Teorema do Ângulo Exterior. Este teorema afirma que, para qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes. Este teorema pode ser usado para encontrar os ângulos de um triângulo inscrito em um círculo, que pode então ser usado para provar o Teorema de Tales. Em resumo, o Teorema de Tales tem muitas generalizações e resultados relacionados. Esses resultados relacionados podem ser usados para provar o Teorema de Tales e para encontrar os ângulos de um triângulo inscrito em um círculo.

1.5 Teoremas de Menelaus e Ceva

1.5.1 Introdução

Em sua forma mais básica, o Teorema de Ceva e o Teorema de Menelaus são fórmulas simples de geometria triangular. Para enunciá-los, precisamos de algumas definições.

Definição 1.1 (Ceviana). *Ceviana é o segmento formado por um dos vértices de um triângulo qualquer e um ponto pertencente ao lado oposto a esse vértice considerado ou ao seu prolon-*

gamento. Todo triângulo possui infinitas cevianas, mas agora destacaremos os três tipos de cevianas especiais: altura, bissetriz e mediana (sendo essa usada na demonstração do teorema de Stewart). Veremos, a seguir, exemplo e definição de cada tipo de ceviana. Considere um triângulo PQR qualquer, temos os seguintes tipos de cevianas especiais:

- i) \overline{RH} é a ceviana que representa a altura (segmento que liga um dos vértices do triângulo ao seu lado oposto, formando com ele um ângulo de 90°) relativa ao lado \overline{PQ} ;
- ii) \overline{PM} é a ceviana que representa a mediana (é o segmento de reta com origem em um dos vértices do triângulo e extremidade no ponto médio ao lado oposto ao vértice considerado) relativa ao lado \overline{RQ} ;
- iii) \overline{RB} é a ceviana que representa a bissetriz (é o segmento de reta com origem em um dos vértices do triângulo com a outra extremidade no lado oposto a esse vértice, sendo que ela divide ao meio o ângulo correspondente ao vértice considerado) relativa ao ângulo \widehat{PRQ} .

A figura abaixo representa os três tipos especiais de cevianas definidos acima

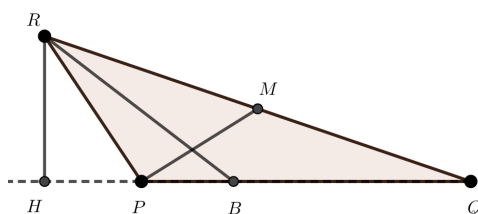


Figura 1.19: Tipos especiais de cevianas

Vamos denotar o comprimento do segmento \overline{AB} por $|AB|$.

Teorema 1.3 (Ceva). *Dados pontos X no segmento de reta \overline{BC} , Y no interior do segmento de reta \overline{AC} , e Z no interior do segmento de reta \overline{AB} .*

Temos:

- Se as cevianas \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} são concorrentes, então

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1.$$

- Se os pontos X , Y , Z são escolhidos como no enunciado acima, e se

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1,$$

então as cevianas \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} são concorrentes.

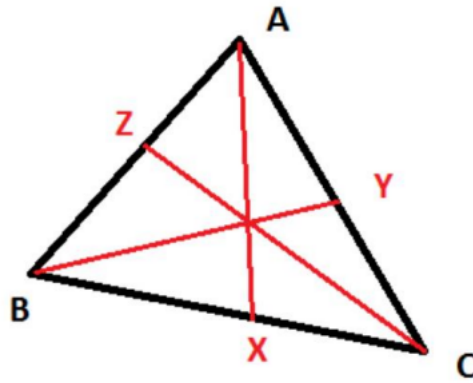


Figura 1.20: Caso mais básico do Teorema de Ceva

Teorema 1.4 (Menelaus). *Dados pontos X na reta \overleftrightarrow{BC} mas não no segmento \overline{BC} , Y no interior do segmento \overline{AC} , e Z no interior do segmento \overline{AB} .*

Temos:

- Se X, Y e Z são colineares, então

$$\frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ|}{|BZ|} = 1.$$

- Se os pontos X, Y e Z são escolhidos como no enunciado acima e se

$$\frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ|}{|BZ|} = 1,$$

então X, Y e Z são colineares.

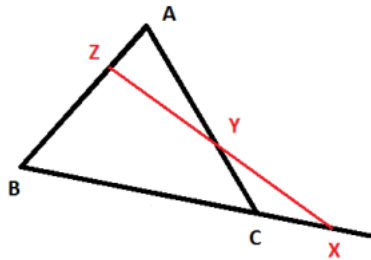


Figura 1.21: Caso mais básico do Teorema de Menelaus

O Teorema de Menelaus era conhecido pelos antigos gregos, incluindo Menelaus de Alexandria: uma prova vem da Spherica de Menelaus. Não temos nenhuma evidência, no entanto, que o teorema de Ceva foi descoberto formalmente antes da publicação de Ceva de De Lineas Rectis em 1678. No entanto, os teoremas têm uma certa semelhança. De fato, para não exagerar, exceto pelo posicionamento de X , as equações (1.1) e (1.2) são iguais. A ideia geral é que, em

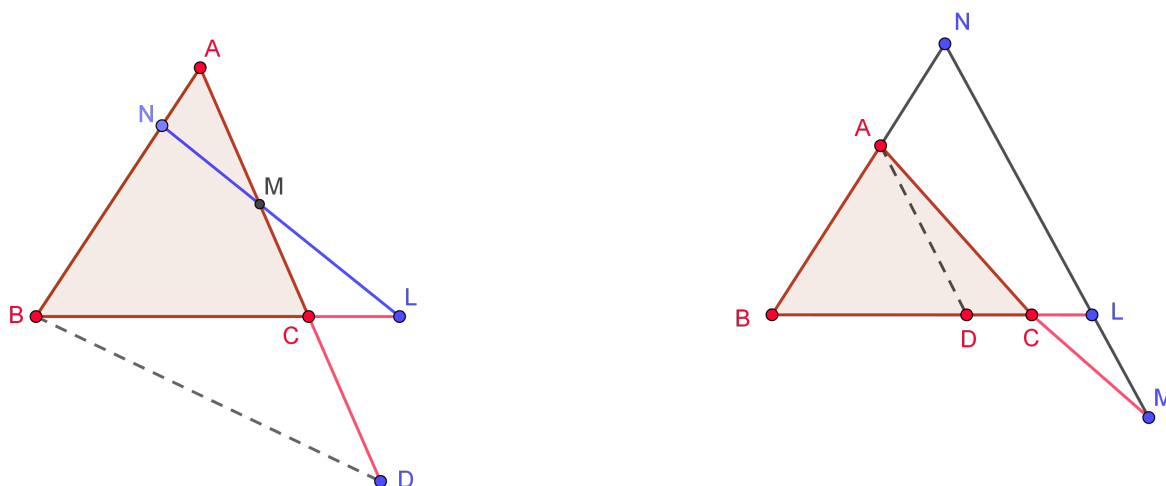


Figura 1.22: Demonstração do teorema de Menelaus pelo teorema de Tales

última análise, os teoremas de Ceva e Menelau são teoremas sobre comprimentos sinalizados. Se, por exemplo, B, X e C são colineares, então $\frac{|BX|}{|XC|}$ deve ser considerado positivo se X estiver entre B e C (isto é, \overrightarrow{BX} e \overrightarrow{XC} estão na mesma direção) e negativo caso contrário (ou seja, \overrightarrow{BX} e \overrightarrow{XC} estão em sentidos opostos).

1.5.2 Demonstrações do Teorema de Menelaus

Devido à sua importância e ampla aplicação no campo da geometria, especialmente em problemas relacionados à colinearidade, serão apresentadas diversas demonstrações desse Teorema nas próximas subseções.

Pelo Teorema de Tales

Vamos utilizar o teorema de Tales (a demonstração está na seção 1.4) nesta forma de demonstração.

Suponhamos inicialmente que os pontos N, L e M são colineares. Distinguímos dois casos diferentes, veja figura ilustrativa abaixo.

Para o primeiro caso, traçamos o seguimento \overline{BD} paralelo à reta NL (Reta de Menelaus) que intercepta o prolongamento do lado \overline{AC} no ponto D e no segundo caso, traçamos o segmento \overline{AD} paralelo a \overline{NM} com D no segmento \overline{BC}

Para o primeiro caso da figura acima, identificamos a proporcionalidade entre os segmentos paralelos \overline{BD} e \overline{NL} sobre os transversais.

Os segmentos paralelos \overline{BD} e \overline{NM} cortam as secantes \overline{AB} e \overline{AD} em partes proporcionais,

logo

$$\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MD}$$

Donde obtemos

$$\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MD} = 1 \quad (1.4)$$

Pelo mesmo raciocínio, considerando os segmentos paralelos \overline{NL} e \overline{BD} e tomando agora as secantes \overline{BL} e \overline{MD} teremos:

$$\frac{CD}{MC} = \frac{BC}{CL} \Rightarrow \frac{MD}{MC} = \frac{MC + CD}{MC} = \frac{BC + CL}{CL} = \frac{BL}{CL}$$

Concluimos que

$$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MD} = 1 \quad (1.5)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades 1.4 e 1.5 e suprimindo o fator MD obtemos

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Para o segundo caso temos: Os segmentos \overline{BN} e \overline{BL} cortam as paralelas \overline{AD} e \overline{NL} em partes proporcionais, logo

$$\frac{BA}{AN} = \frac{BD}{DL} \Rightarrow \frac{BN}{AN} = \frac{BA + AN}{AN} = \frac{BD + DL}{LD} = \frac{BL}{LD}.$$

Segue que

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LD} = 1 \quad (1.6)$$

Analogamente considerando os segmentos paralelos \overline{AD} e \overline{NM} cortados pelas transversais \overline{AM} e \overline{DL} temos

$$\frac{AC}{CM} = \frac{DC}{CL} \Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{AC + CM}{CM} = \frac{DC + CL}{CL} = \frac{DL}{CL}.$$

Donde

$$\frac{MC}{MA} \cdot \frac{LD}{LC} = 1 \quad (1.7)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades 1.6 e 1.7 e suprimindo o fator LD obtemos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

A primeira parte do teorema de Menelaus foi devidamente demonstrada até o momento.

Para provar a recíproca, ou seja: Dados $\triangle ABC$ e pontos N , L e M sobre os lados (ou prolongamentos), \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} , respectivamente. Se ocorrer que $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$, então os pontos L , M e N são colineares.

No primeiro caso, prolongamos o segmento \overline{NM} até que intercepte a prolongação do lado \overline{AB} no ponto P .

Para o segundo caso consideramos o segmento \overline{NM} que corta a prolongação do lado \overline{BC} no ponto P .

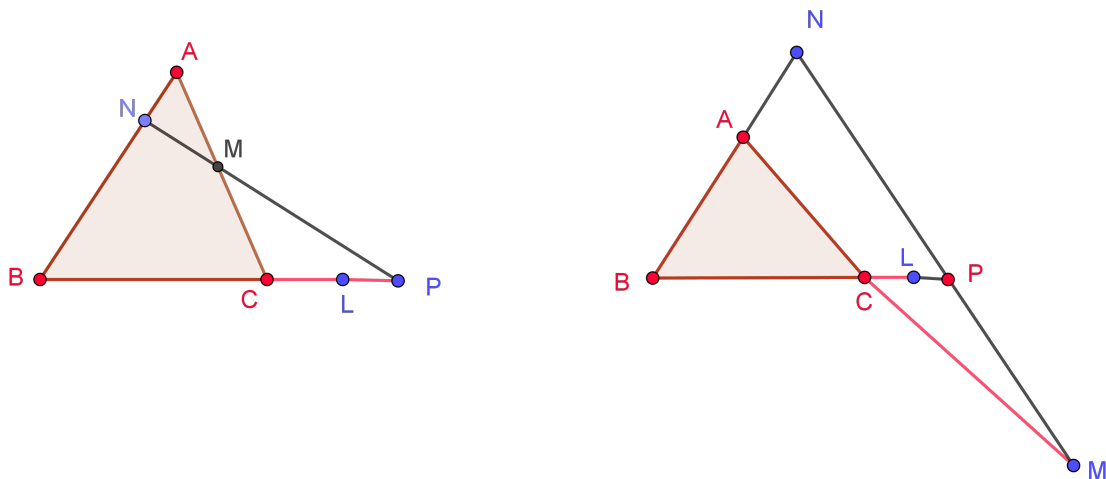


Figura 1.23: Recíproca do Teorema de Menelaus

A demonstração a seguir vale para os dois casos. Pelo que acabamos de provar, vale que

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

Como por hipótese,

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1,$$

temos daí que:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{LB}{LC} \Rightarrow P = L.$$

Concluimos que os pontos N , L e M são colineares.

1.5.3 Pela semelhança de triângulos

Agora demonstraremos o teorema de Menelaus utilizando semelhanças de triângulos.

Novamente, suporemos inicialmente que os pontos L , M e N são colineares para mostrar a relação

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

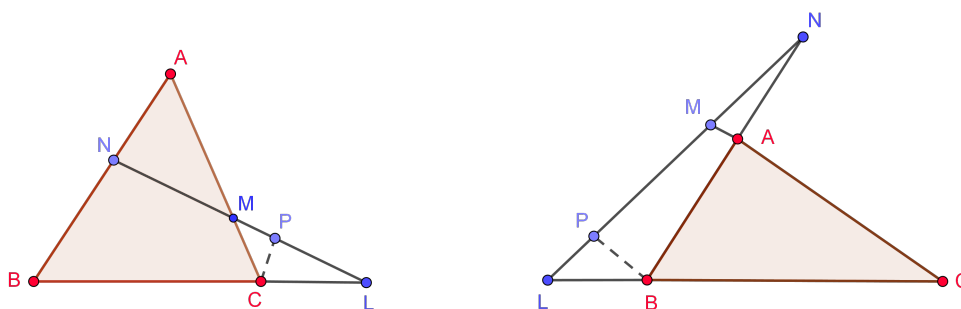


Figura 1.24: Demonstração do Teorema de Menelaus pela semelhança de triângulos

Considerando a figura acima, temos: no primeiro caso traçamos um segmento \overline{PC} paralelo a \overline{AB} e no segundo caso o segmento \overline{PB} paralelo a \overline{AC} onde em ambos os casos o ponto P está sobre a reta de Menelaus.

Demonstração do primeiro caso. Das semelhanças entre triângulos da figura podemos escrever:

- Os triângulos $\triangle NBL \sim \triangle PCL$. Isto, pois tem um ângulo em comum e dois ângulos correspondentes congruentes. Portanto, pela proporcionalidade dos lados desses triângulos, temos $\frac{NB}{PC} = \frac{LB}{LC}$. Segue que,

$$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{PC}{NB} = 1 \quad (1.8)$$

- Os triângulos $\triangle ANM \sim \triangle CPM$. Isto, pois tem um ângulo oposto pelo vértice e dois ângulos alternos internos. Assim, temos $\frac{AN}{CP} = \frac{AM}{CM}$. Portanto,

$$\frac{NA}{MA} \cdot \frac{MC}{PC} = 1. \quad (1.9)$$

Multiplicando os dois membros das igualdades 1.8 e 1.9 e simplificando o fator comum PC , encontramos a relação procurada:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Agora demonstraremos o segundo caso, novamente usando semelhança de triângulos. Assim,

- Os triângulos $\triangle MLC \sim \triangle PLB$, pois tem um ângulo comum e dois ângulos correspondentes. Logo, $\frac{LB}{LC} = \frac{PB}{MC}$. Portanto,

$$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{PB} = 1. \quad (1.10)$$

- Os triângulos $\triangle PBN \sim \triangle MAN$, pois tem um ângulo comum e dois ângulos correspondentes. Assim, temos $\frac{NA}{NB} = \frac{AM}{BP}$. Logo,

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{PB}{MA} = 1. \quad (1.11)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades 1.10 e 1.11, e simplificando o fator comum PB , encontramos

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

A recíproca será omitida, por ser semelhante ao que foi feito na demonstração pelo Teorema de Tales.

Pela semelhança de triângulos retângulos

Suporemos que os pontos L , M e N são colineares para mostrar que temos a relação

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Traçamos pelos vértices A , B e C do triângulo $\triangle ABC$, as alturas relativas aos triângulos $\triangle ANM$, $\triangle BNL$ e $\triangle CLM$ respectivamente. Denotamos por E , F e D os pés de tais alturas e por H_a , H_b e H_c seus respectivos comprimentos.

Assim, como os segmentos \overline{AE} , \overline{BF} e \overline{CD} são perpendiculares à reta de Menelaus, eles são paralelos entre si. Podemos, então concluir a semelhança dos seguintes triângulos retângulos (ver figura abaixo).

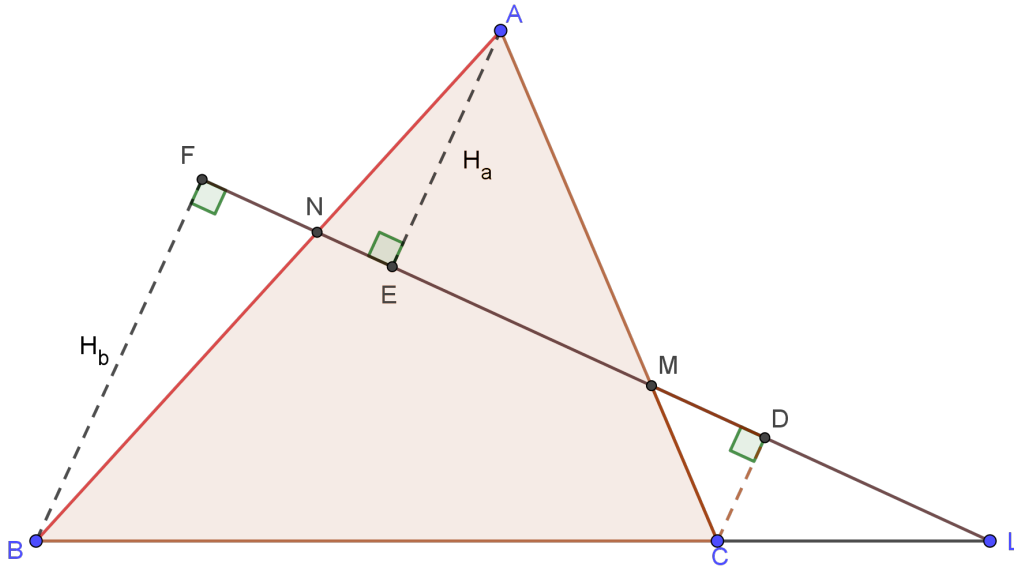


Figura 1.25: Demonstração do teorema de Menelaus pela semelhança de triângulos retângulos

- $\triangle BFL \sim \triangle CDL$ (possuem um ângulo reto e um ângulo comum), segue que:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{H_b}{H_c} \quad (1.12)$$

- $\triangle CDM \sim \triangle AEM$ (possuem um ângulo reto e um ângulo oposto pelo vértice), logo

$$\frac{MC}{MA} = \frac{H_c}{H_a} \quad (1.13)$$

- $\triangle BFN \sim \triangle AEN$ (possuem um ângulo reto e um oposto pelo vértice), assim

$$\frac{NA}{NB} = \frac{H_a}{H_b} \quad (1.14)$$

Multiplicando membro a membro as relações 1.12, 1.13 e 1.14, obtemos:

$$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = \frac{H_b}{H_c} \cdot \frac{H_c}{H_a} \cdot \frac{H_a}{H_b} \Rightarrow \frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

A recíproca será omitida, por ser semelhante ao que foi feito na demonstração pelo Teorema de Tales.

1.5.4 Demonstrações do Teorema de Ceva

Agora apresentaremos algumas demonstrações do Teorema de Ceva.

Pelo Teorema de Menelaus

Inicialmente, suporemos que as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes no ponto P e mostraremos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Considerando a figura, 1.26 (a), desdobrando-as nas figuras: 1.26 (b) e 1.26 (c) abaixo

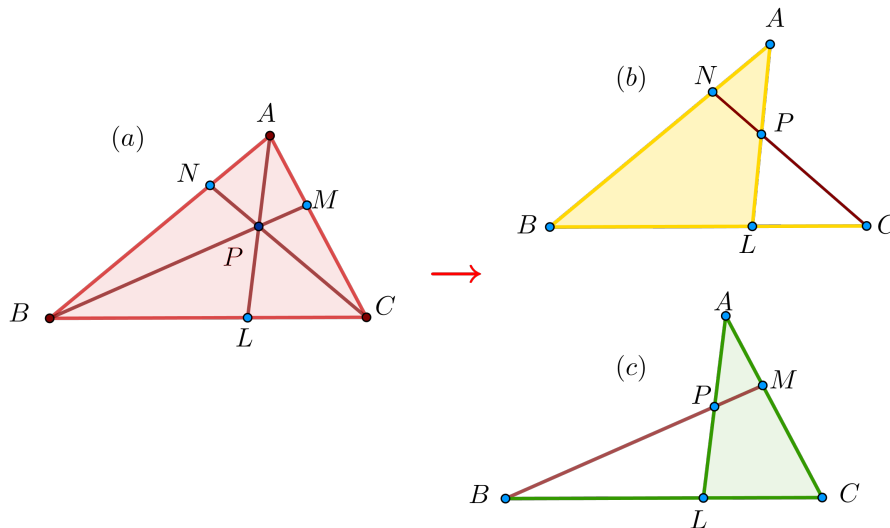


Figura 1.26: Ceva: pelo Teorema de Menelaus

Aplicando o teorema de Menelaus ao $\triangle ABL$ e a transversal \overleftrightarrow{NPC} , figura 1.26 (b), podemos escrever

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{CB}{CL} \cdot \frac{PL}{PA} = 1 \quad (1.15)$$

O teorema de Menelaus, aplicado agora ao triângulo $\triangle ALC$ e a transversal, \overleftrightarrow{BPM} , figura 1.26 (c) nos dá,

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{BL}{BC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1 \quad (1.16)$$

Multiplicando 1.15 por 1.16 e eliminando os fatores comuns, BC e PL , resulta

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

Para provar a volta, ou seja, mostrar que a recíproca desse teorema vale, utilizaremos argumentação semelhante à usada na recíproca do Teorema de Menelaus.

Seja P o ponto de interseção das cevianas \overline{AL} e \overline{BM} . Considere, agora, a ceviana partindo do vértice C , passando pelo ponto P e achando o lado \overline{AB} no ponto S . Veja a figura abaixo.

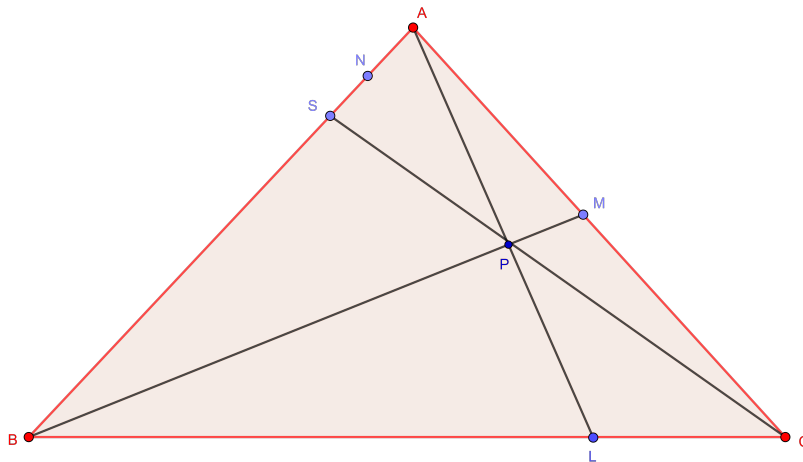


Figura 1.27: Recíproca do Teorema de Ceva

Pela primeira parte do Teorema de Ceva podemos escrever,

$$\frac{SA}{SB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Porém, por hipótese,

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Dessas relações, podemos concluir, que:

$$\frac{SA}{SB} = \frac{NA}{NB} \Rightarrow S = N$$

Logo, as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes.

Observação 1.5. Na demonstração a seguir do Teorema de Ceva omitiremos a partes correspondente à demonstração da proposição recíproca por serem análogas à demonstração dada anteriormente, com exceção da demonstração envolvendo a lei dos senos.

Pelo Teorema de Tales

Suponha que as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} do triângulo $\triangle ABC$ são concorrentes no ponto P . Para fazer a demonstração do Teorema de Ceva usando o Teorema de Tales, traçaremos pelo

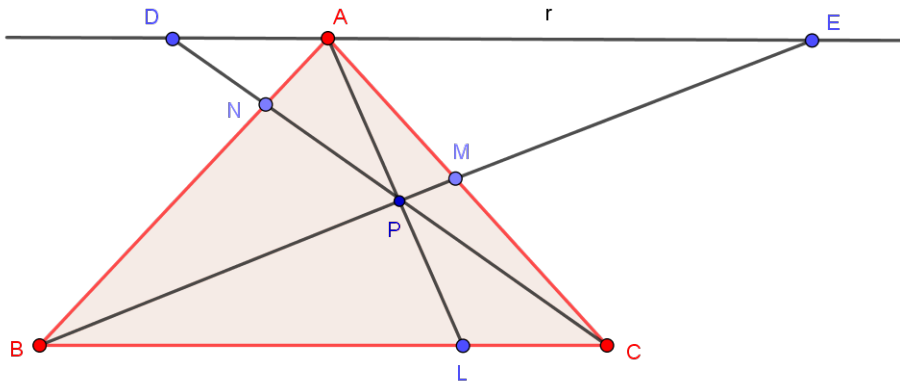


Figura 1.28: Ceva: pelo Teorema de Tales

ponto A uma reta r paralela a reta suporte do lado \overline{BC} . Prolongaremos as cevianas \overline{BM} e \overline{CN} até interceptar a reta r , nos pontos E e D respectivamente. Veja a figura a abaixo.

temos então, da semelhança dos triângulos:

- $\triangle DNA \sim \triangle BNC$ (possuem dois ângulos congruentes, alternos internos). Portanto, temos:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{AD}{CB} \quad (1.17)$$

- $\triangle AME \sim \triangle BMC$ (possuem ângulos congruentes, alternos internos). Portanto, temos

$$\frac{MC}{MA} = \frac{CB}{AE} \quad (1.18)$$

- $\triangle AEP \sim \triangle LBP$. Daí obtemos $\frac{AE}{LB} = \frac{AP}{PL}$. Também $\triangle DAP \sim \triangle CLP$ donde $\frac{AP}{PL} = \frac{AD}{LC}$. Logo, $\frac{AE}{LB} = \frac{AD}{LC}$ e portanto, temos:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{AE}{AD} \quad (1.19)$$

Efetuando as multiplicações das relações 1.17, 1.18 e 1.19 e simplificando, temos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = \frac{AD}{CB} \cdot \frac{AE}{AD} \cdot \frac{CB}{AE} = 1$$

1.5.5 Aplicações do Teorema de Menelaus

Utilizaremos como referências [5] e [6].

Aplicação 1.1. *Seja ABC um triângulo equilátero de perímetro igual a 24 cm. O segmento \overline{CD} mede 4 cm e M é o ponto médio do lado \overline{AB} . Determine a medida do segmento \overline{EC} .*

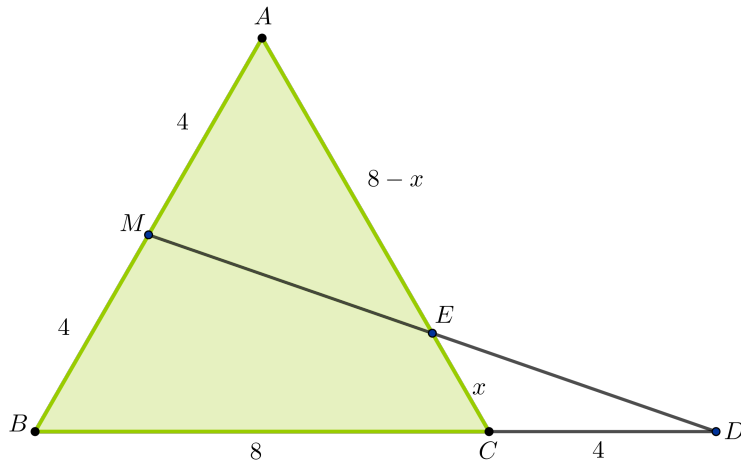


Figura 1.29: Aplicação 1 do Teorema de Menelaus

Solução: Como o triângulo é equilátero e seu perímetro vale 24 cm, então os lados AB , BC e AC medem 8 cm. Considere $x = |CE|$, como os pontos M, E e D são colineares, pelo teorema de Menelaus aplicado a esse triângulo, temos que

$$\frac{|DB|}{|DC|} \cdot \frac{|EC|}{|EA|} \cdot \frac{|MA|}{|MB|} = 1.$$

Utilizando os valores da figura 1.29, obtemos

$$\frac{8 + 4}{4} \cdot \frac{x}{8 - x} \cdot \frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{3x}{8 - x} = 1$$

$$3x = 8 - x$$

$$4x = 8$$

$$x = 2.$$

Portanto, o segmento $|EC|$ mede 2 cm.

Aplicação 1.2. Considere os triângulos ABC e BDF que têm como vértice comum o ponto B , conforme figura abaixo. Determine o valor de $y = |EF|$, sabendo que:

1. $|AF| = 4 \cdot |BF|$

2. $2 \cdot |DC| = 3 \cdot |BC|$

3. $|DE| = 20$ cm

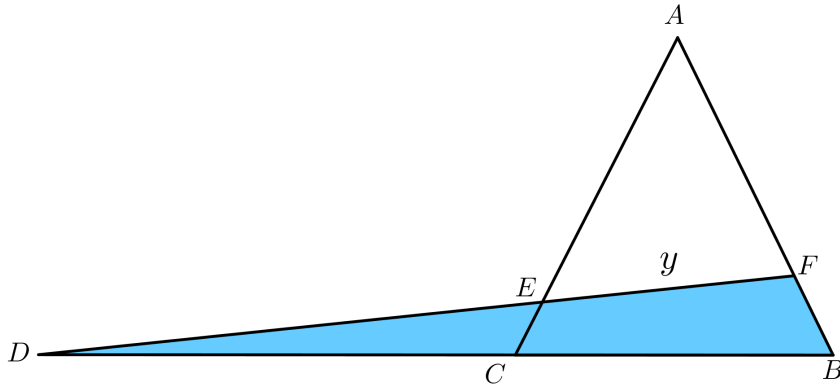


Figura 1.30: Aplicação 2 do Teorema de Menelaus

Solução: Denotemos $x = |BF|$ e considere w tal que $|BC| = 2w$. Por 1. temos que $|AF| = 4x$ e por 2. $|DC| = 3w$.

A reta transversal $\overleftrightarrow{AEC'}$ corta os segmentos DB e DF , bem como a extensão do segmento FB do triângulo BDF . Desse modo, aplicando o teorema de Menelaus, temos que

$$\frac{|AB|}{|AF|} \cdot \frac{|EF|}{|ED|} \cdot \frac{|CD|}{|CB|} = 1.$$

Substituindo as medidas dos segmentos nessa expressão, obtemos

$$\frac{AF + FB}{AF} \cdot \frac{y}{20} \cdot \frac{3w}{2w} = 1$$

$$\frac{5x}{4x} \cdot \frac{y}{20} \cdot \frac{3w}{2w} = 1$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{y}{20} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{15y}{160} = 1$$

$$y = \frac{32}{3}$$

Logo, o segmento $|EF|$ mede $\frac{32}{3}$ cm.

Aplicação 1.3. (POTI-Geometria-Nível 2/Adaptada). O lado AB de um quadrado é prolongado no sentido de A para B até o ponto F tal que $|BF| = 2|AB|$. Sendo M o ponto médio de CD , desenhe FM intersectando AC em um ponto G . Sabendo que FG intersecta BC em um ponto H , determine $\frac{|CH|}{|HB|}$.

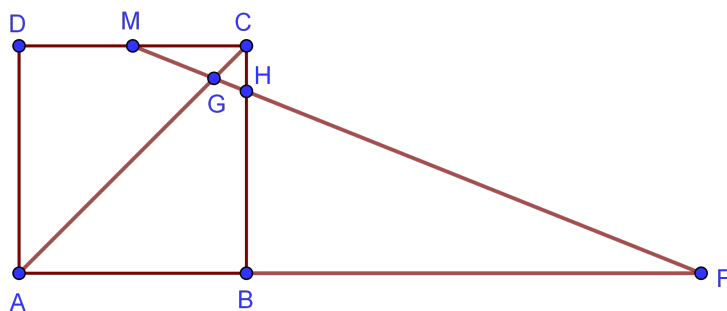


Figura 1.31: Aplicação 3 do Teorema de Menelaus

Denotemos por x a medida do lado do quadrado $ABCD$. Note que pelo caso Ângulo-Ângulo (AA) os triângulos AFG e CGM são semelhantes. Dessa forma,

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{AF}} = \frac{\frac{x}{2}}{3x} = \frac{1}{6}$$

Uma vez que os pontos F, H e G estão alinhados em uma mesma reta, é possível utilizar o Teorema de Menelaus no triângulo ABC considerando o segmento FG . Dessa maneira, podemos chegar à conclusão de que

$$\frac{|CG|}{|AG|} \cdot \frac{|AF|}{|BF|} \cdot \frac{|BH|}{|CH|} = 1$$

Como $|BF| = 2|AB|$, então

$$\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{3|AB|}{2|AB|} = \frac{3}{2}$$

Com essas informações, podemos concluir que

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{|BH|}{|CH|} = 1$$

Portanto,

$$\frac{3}{12} \cdot \frac{|BH|}{|CH|} = 1 \Rightarrow \frac{|CH|}{|HB|} = \frac{1}{4}.$$

1.5.6 Aplicações do Teorema de Ceva

Vejamos, primeiramente, a seguinte definição:

Definição 1.2 (Bissetriz interna). *Uma bissetriz interna de um ângulo é uma linha ou segmento de reta que parte do vértice desse ângulo e divide o ângulo em duas partes congruentes (ou seja, com a mesma medida). Em outras palavras, a bissetriz interna divide o ângulo em dois ângulos, com a mesma abertura e, portanto, a mesma medida.*

Aplicação 1.4. *Mostre que as bissetrizes de um triângulo qualquer ABC são concorrentes.*

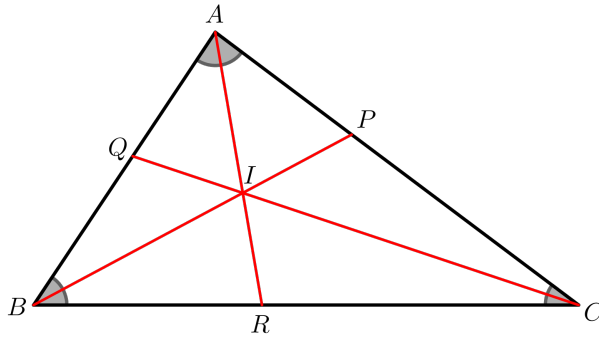


Figura 1.32: Aplicação 1 do Teorema de Ceva

Demonstração. Sejam ABC um triângulo e \overline{AR} , \overline{BP} e \overline{CQ} bissetrizes correspondentes a $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente (ver figura 1.32).

Pela recíproca do Teorema de Ceva, temos que, se

$$\frac{QA}{QB} \cdot \frac{RB}{RC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1,$$

então as bissetrizes \overline{AR} , \overline{BP} e \overline{CQ} concorrem em um único ponto, denominado de incentro.

Conforme o teorema da bissetriz interna, podemos usar isso para a bissetriz CQ :

$$\frac{QA}{QB} = \frac{AC}{BC}. \quad (1.20)$$

Da mesma forma, podemos aplicar esse teorema à bissetriz interna AR :

$$\frac{RB}{RC} = \frac{AC}{BC}. \quad (1.21)$$

Por último, usando o mesmo raciocínio, podemos aplicar o teorema à bissetriz BP :

$$\frac{PC}{PA} = \frac{AC}{BC}. \quad (1.22)$$

Em seguida, multiplicando cada uma das equações (1.20), (1.21) e (1.22) termo a termo e simplificando, chegamos ao resultado que queríamos alcançar.

$$\frac{QA}{QB} \cdot \frac{RB}{RC} \cdot \frac{PC}{PA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{QA}{QB} \cdot \frac{RB}{RC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1$$

Concluimos que as bissetrizes \overline{AR} , \overline{BP} e \overline{CQ} do triângulo ABC são concorrentes. \square

Aplicação 1.5. Num triângulo ABC as alturas se encontram num ponto O denominado **ortocentro**.

Demonstração. Sejam \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} as alturas do triângulo relativas aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. Considerando que $|BC| = a$, $|AC| = b$ e $|AB| = c$, observamos na Figura 1.33

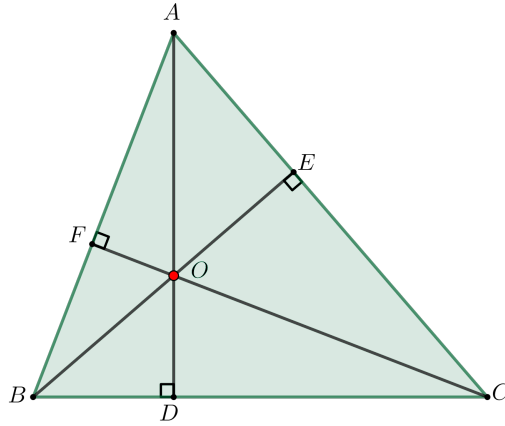


Figura 1.33: O ponto O é o ortocentro do triângulo ABC

que os triângulos $\triangle AFC$ e $\triangle AEB$ compartilham o ângulo \hat{A} e são ambos triângulos retângulos. Isso leva à conclusão de que esses triângulos são semelhantes. Dessa forma,

$$\frac{|AF|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}. \quad (1.23)$$

Analogamente, $\triangle BFC \sim \triangle AEB$, assim

$$\frac{|BD|}{|FB|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{c}{a}. \quad (1.24)$$

Ainda $\triangle CEB \sim \triangle CDA$, assim

$$\frac{|CE|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b}. \quad (1.25)$$

Multiplicando os membros das equações (1.23), (1.24) e (1.25), obtemos:

$$\frac{|AF|}{|AE|} \cdot \frac{|BD|}{|FB|} \cdot \frac{|CE|}{|DC|} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1.$$

E pelo Teorema de Ceva, concluímos que as alturas \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} intersectam-se em um único ponto. \square

Aplicação 1.6 (Ponto de Gergonne). *Sejam \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} os lados de um triângulo ABC , e γ um círculo inscrito no triângulo (incírculo). Se $\{X\} = \overline{BC} \cap \gamma$, $\{Y\} = \overline{AC} \cap \gamma$ e $\{Z\} = \overline{AB} \cap \gamma$, então as cevianas \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} são concorrentes em um único ponto.*

Demonstração. Observando a figura 1.34, nota-se que $AZ = AY$, $BZ = BX$ e $CX = CY$. Desse modo,

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{CY}{AY} = \frac{BZ}{CY} \cdot \frac{AY}{BZ} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, as cevianas \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} são concorrentes em um único ponto. \square

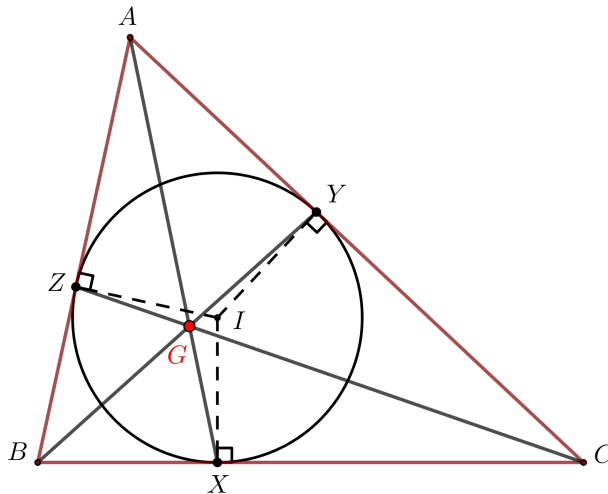


Figura 1.34: G é o ponto de Gergonne

1.6 Relação Métrica na Circunferência

A proposição a seguir é uma importante consequência elementar dos casos de semelhança de triângulos, que não serão demonstrados aqui, sendo conhecida como o **relação das cordas**.

Proposição 1.1. *Sejam γ uma circunferência de centro O , e $|AB|$ e $|CD|$ duas cordas de γ . Se $|AB|$ e $|CD|$ se interceptam em um ponto P , interior a γ , então*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \tag{1.26}$$

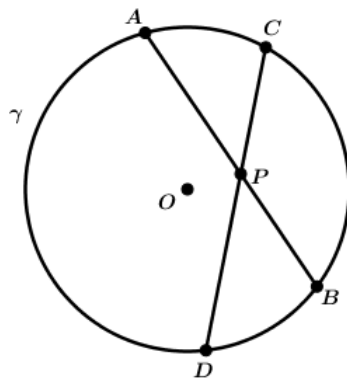


Figura 1.35: Relação das cordas

Como consequência da Proposição anterior temos o seguinte corolário:

Corolário 1.1. *Sejam γ um círculo de centro O e raio R , e P um ponto interior a γ . Se uma reta que passa por P intercepta γ nos pontos A e B , então*

$$|PA| \cdot |PB| = R^2 - |OP|^2 \tag{1.27}$$

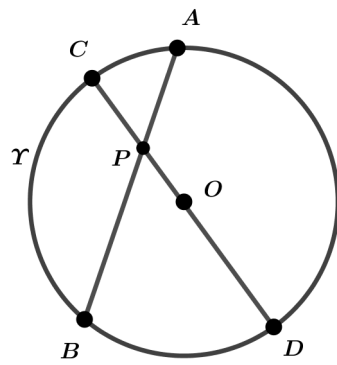


Figura 1.36: Relação das cordas passando pelo centro

A proposição a seguir será utilizada na demonstração do Teorema de Pitot, conhecido como a **desigualdade triangular** ou **condição de existência de um triângulo**.

Proposição 1.2. *Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. Em outras palavras, seja ABC um triângulo tal que $|AB| = c$, $|AC| = b$ e $|BC| = a$, em que a , b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo, segue da desigualdade triangular que*

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

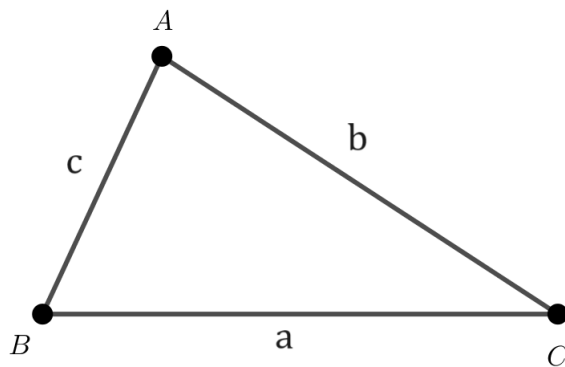


Figura 1.37: Desigualdade triangular

1.7 Definições

Nesta seção, faremos algumas definições formais que terão utilidade em outras situações.

Definição 1.3. *Seja $\widehat{A\hat{O}B}$ um ângulo dado. A bissetriz do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ é a semirreta, com origem no vértice do ângulo e o divide em dois ângulos congruentes. Dessa forma, todos os pontos pertencentes a bissetriz são equidistantes dos lados do ângulo.*

A imagem abaixo mostra uma interpretação da definição anterior. Para mais detalhes ver [3].

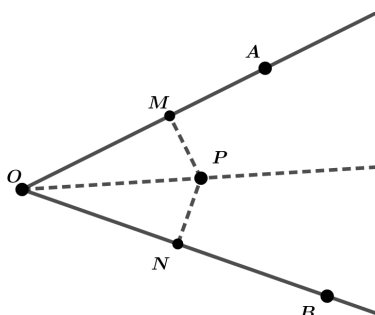


Figura 1.38: Bissetriz

Definição 1.4 (Polígonos). *Um polígono é uma figura plana limitada por uma sequência finita de segmentos de reta, chamados de lados, de modo que:*

1. Cada lado se encontra em exatamente dois vértices, e esses vértices são pontos únicos.
2. Nenhum dos lados se cruza, exceto nos vértices, ou seja, os lados não podem se interceptar no interior da figura.
3. Cada vértice é compartilhado por exatamente dois lados consecutivos.

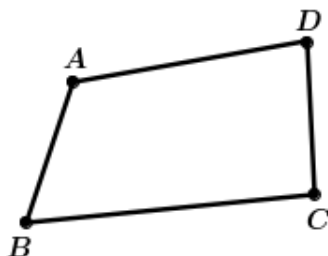


Figura 1.39: Polígono ABCD

Definição 1.5 (Polígonos Inscritos). *Um polígono é dito inscrito em uma circunferência quando todos os seus vértices são pontos pertencentes a ela.*

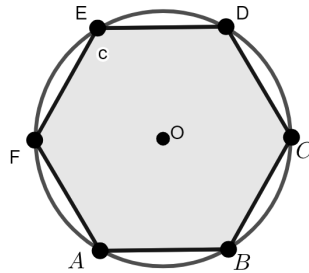


Figura 1.40: Polígono inscrito ABCDEF

Definição 1.6 (Quadrilátero). *Um quadrilátero é uma figura plana formada por quatro segmentos de reta distintos que não se encontram em três pontos colineares (ou seja, não estão alinhados em uma única linha reta) e cujos pontos de encontro (vértices) não são colineares.*

Definição 1.7. *Um quadrilátero é circunscritível quando possui um círculo tangente a todos os seus lados. Dizemos que esse círculo é inscrito ao quadrilátero.*

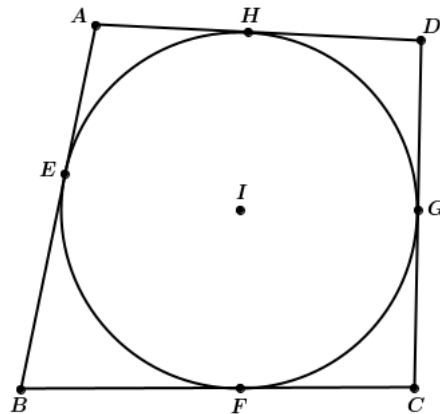


Figura 1.41: Polígono circunscrito ABCD

Definição 1.8. *Um quadrilátero é inscritível se existir um círculo passando pelos seus vértices.*

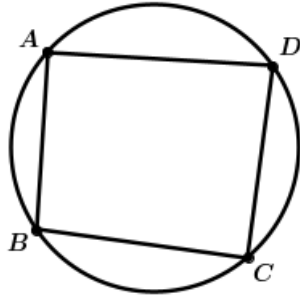


Figura 1.42: Quadrilátero inscrito $ABCD$

Definição 1.9 (Quadriláteros Bicêntricos). *Dizemos que um quadrilátero é bicêntrico, quando as seguintes condições são verdadeiras:*

- i) Inscritível*
- ii) Circunscritível*

Capítulo 2

Teoremas de Poncelet

2.1 O Teorema de Pitot

Antes de demonstrarmos o Teorema de Pitot faremos uma pequena abordagem sobre as posições relativas entre um ponto e uma circunferência e sobre o Teorema dos segmentos tangentes a uma circunferência. Considere uma circunferência λ de centro C e raio r e seja P um ponto qualquer, temos as seguintes situações:

- i)* o ponto P está sobre a circunferência λ (pertence à circunferência);
- ii)* o ponto P é interior à circunferência;
- iii)* o ponto P é exterior à circunferência.

A figura abaixo representa essas três situações

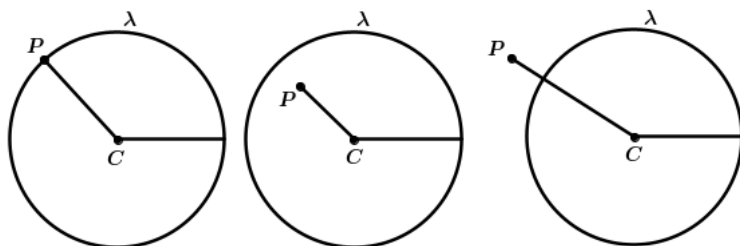


Figura 2.1: Representação dos itens *i)*, *ii)* e *iii)*, respectivamente.

Para verificar essas posições basta obter a distância do ponto P ao centro da circunferência λ e comparar com o raio r . Em outras palavras, seja d a distância do ponto P ao centro C , denotada por $d(P, C)$, então temos as seguintes situações:

- i) Se $d(P, C) = r$, então o ponto P está sobre a circunferência;
- ii) Se $d(P, C) > r$, então o ponto P está fora da circunferência;
- iii) Se $d(P, C) < r$, então o ponto P está dentro da circunferência.

A figura abaixo representa essas três situações

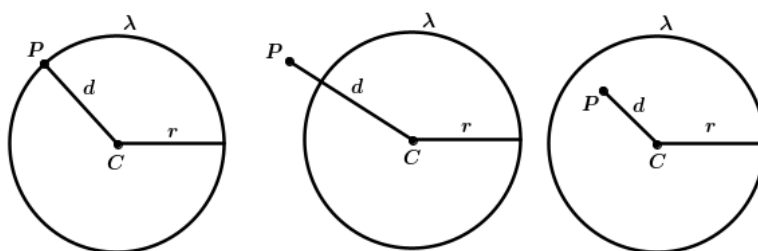


Figura 2.2: Representação dos casos $d(P, C) = r$, $d(P, C) > r$ e $d(P, C) < r$, respectivamente.

Proposição 2.1 (Relação dos segmentos tangentes a uma circunferência). *Sejam λ uma circunferência de centro O e raio r e P um ponto externo a λ . Então, $\overline{PT_1}$ e $\overline{PT_2}$ são tangentes a λ , onde $\overline{T_1}$ e $\overline{T_2}$ pertencem a λ , então $\overline{PT_1}$ e $\overline{PT_2}$ são congruentes.*

Demonstração. Considere T_1 e T_2 pontos pertencentes a λ , e P um ponto externo a λ , como mostra a figura abaixo.

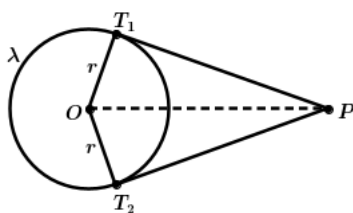


Figura 2.3: Relação dos segmentos tangentes

Ao traçarmos os segmentos OT_1 e OT_2 que são iguais ao raio, temos que o segmento OP é bissetriz do ângulo $T_1\hat{P}T_2$. Logo, os ângulos $T_1\hat{P}O$ e $T_2\hat{P}O$ são congruentes e os ângulos $T_1\hat{O}P$ e $T_2\hat{O}P$ também são. Portanto, os triângulos OPT_1 e OPT_2 são congruentes pelo caso *ALA*, ou seja, o ângulo $T_1\hat{O}P$ é congruente a $T_2\hat{O}P$, \overline{PO} é lado comum e o ângulo $T_1\hat{P}O$ é congruente a $T_2\hat{P}O$. Logo, os segmentos $\overline{PT_1}$ e $\overline{PT_2}$ são congruentes.

□

A seguir veremos o teorema de Pitot, este resultado será muito importante na demonstração do Teorema de Poncelet no triângulo retângulo e na circunferência. O teorema de Pitot leva esse nome devido ao engenheiro Henri Pitot, que foi um francês especializado em hidráulica, matemático e astrônomo.

O teorema de Pitot afirma que em um quadrilátero convexo circunscritível o resultado da soma dos comprimentos dos lados opostos é o mesmo.

Teorema 2.1 (Teorema de Pitot). *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Então, $ABCD$ é circunscritível se, e somente se,*

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}. \quad (2.1)$$

Demonstração. Suponha que $ABCD$ é um quadrilátero circunscritível, ou seja, os seus lados tangenciam uma circunferência, conforme figura abaixo.

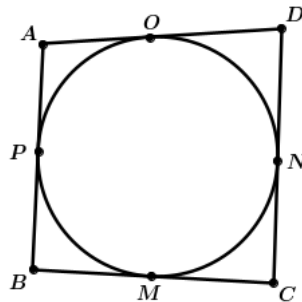


Figura 2.4: Quadrilátero circunscritível $ABCD$

Pela Proposição 2.1, temos que

$$\overline{BM} = \overline{BP}, \overline{CM} = \overline{CN}, \overline{DN} = \overline{DQ} \text{ e } \overline{AO} = \overline{AP}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{CD} &= \overline{BC} + \overline{AD} \\ &= (\overline{AP} + \overline{PB}) + (\overline{CN} + \overline{ND}) \\ &= (\overline{AO} + \overline{BM}) + (\overline{CM} + \overline{DQ}) \\ &= \overline{BC} + \overline{AD}. \end{aligned}$$

Portanto, (2.1) é verdadeiro.

Provaremos agora que se (2.1) é válido, então o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível. Suponha por contradição que o quadrilátero $ABCD$ não é circunscritível. Então, o círculo interior não é tangente ao menos um dos lados. Digamos que tal lado seja AD , veja figura abaixo.

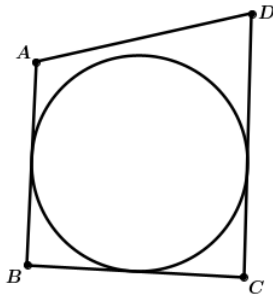


Figura 2.5: Quadrilátero $ABCD$ não circunscritível.

Agora, seja D' um ponto pertencente ao segmento CD tal que o segmento AD' tangencia o círculo, conforme figura abaixo:

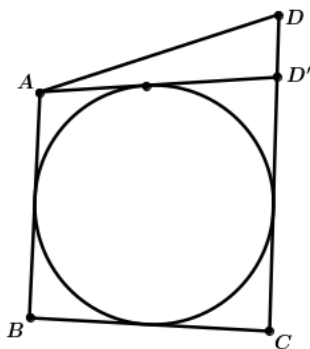


Figura 2.6: Quadrilátero $ABCD'$ circunscritível.

Assim, temos que

$$\overline{AB} + \overline{CD'} = \overline{BC} + \overline{AD'} \quad \text{ou} \quad \overline{AB} - \overline{BC} = \overline{AD'} - \overline{CD'}. \quad (2.2)$$

Além disso, por (2.1), segue que

$$\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{AD} - \overline{CD}. \quad (2.3)$$

Por fim, usando o fato que $\overline{CD} = \overline{CD'} + \overline{D'D}$, juntamente com (2.2) e (2.3), obtemos que

$$\overline{AD'} - \overline{CD'} = \overline{AD} - \overline{CD},$$

ou seja,

$$\overline{AD} - \overline{AD'} = \overline{CD} - \overline{CD'} = \overline{DD'},$$

isto é, $\overline{AD} = \overline{AD'} + \overline{DD'}$, contradizendo a desigualdade triangular no triângulo ADD' . \square

2.2 O Teorema de Poncelet em triângulos

Teorema 2.2. *Sejam γ uma circunferência de raio r , inscrita em um triângulo ABC e α o ângulo $C\hat{A}B$. Então*

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC} + 2r \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (2.4)$$

Demonstração. Sejam M, N, O os pontos de tangência de \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente, como mostra a figura abaixo.

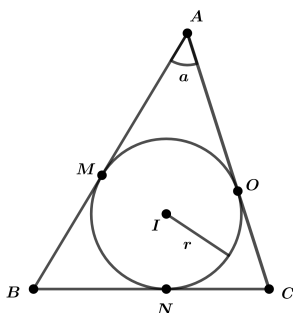


Figura 2.7: Circunferência inscrita num triângulo

Agora, seja \overline{AI} a bissetriz do ângulo α no triângulo ABC e considere os segmentos $\overline{MI} = \overline{OI} = r$.

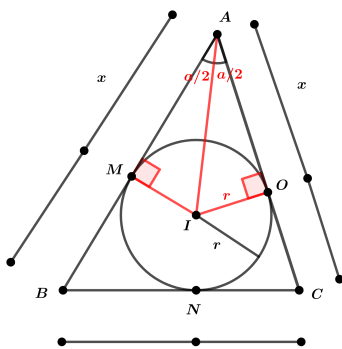


Figura 2.8: Circunferência inscrita num triângulo

Assim, temos os triângulos retângulos AMI e AOI . Pela proposição 2.1, sabemos que

$$\overline{AM} = \overline{AO} = x, \overline{OC} = \overline{NC} = \overline{AC} - x \text{ e } \overline{MB} = \overline{BN} = \overline{AB} - x. \text{ Logo,}$$

$$\overline{BC} = \overline{AB} - x + \overline{AC} - x = \overline{AB} + \overline{AC} - 2x,$$

Ou seja,

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC} + 2x. \quad (2.5)$$

Por outro lado, AOI é um triângulo retângulo, assim temos que

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{r} \therefore x = r \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Portanto, substituindo esse valor em (2.5), obtemos que

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC} + 2.r. \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

□

Observação 2.1. Note que no caso onde $\alpha = 90^\circ$, isto é, o triângulo é retângulo, temos que

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cot\left(\frac{90^\circ}{2}\right) = \cot(45^\circ) = 1.$$

Assim, por (2.5), segue que

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC} + 2r. \quad (2.6)$$

2.3 O Teorema de Poncelet na circunferência

Para provarmos o Teorema de Poncelet na circunferência, utilizaremos alguns resultados vistos no Capítulo 1.

O primeiro resultado desta seção é conhecido como Teorema de Euler. No entanto, essa relação foi descoberta pelo matemático inglês Chapple em 1746, que entendeu a verdadeira lógica de Poncelet: se existir dois círculos satisfazendo a relação (2.8) abaixo, significa que há uma infinidade de triângulos inscritos em um círculo e circunscritos em outro.

Teorema 2.3 (Teorema de Euler). *Seja γ uma circunferência de raio r e centro I , interior a um círculo Γ de raio R e centro O . Se $A \in \Gamma$ e \overline{AB} e \overline{AC} são cordas de Γ tangentes a γ , então γ é o círculo inscrito no triângulo ABC se, e somente se,*

$$R^2 - d^2 = 2rR, \text{ com } d = \overline{OI}. \quad (2.7)$$

Demonstração. Se P é o ponto de interseção do prolongamento da bissetriz \overrightarrow{AI} do ângulo $B\hat{A}C$ com Γ , conforme a figura abaixo, segue do corolário (1.1) que

$$\overline{AI} \cdot \overline{IP} = R^2 - \overline{OI}^2 = R^2 - d^2. \quad (2.8)$$

Agora, sejam X e Y os pés das perpendiculares traçadas de O e I a \overline{BP} e \overline{AC} , respectivamente, como mostra a figura abaixo

Assim temos que

$$B\hat{O}X = \frac{1}{2} \cdot B\hat{O}P = B\hat{A}P = P\hat{A}C = I\hat{A}Y.$$

Como ambos os triângulos BOX e IAY são triângulos retângulos, então eles são semelhantes pelo caso A.A. Portanto,

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{IY}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{AI}},$$

ou ainda,

$$\overline{BX} \cdot \overline{AI} = \overline{BO} \cdot \overline{IY}. \quad (2.9)$$

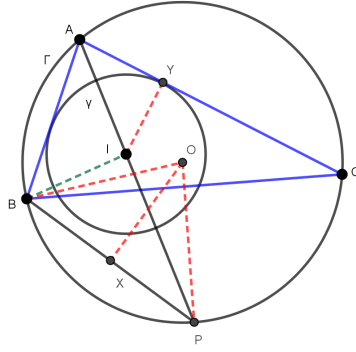


Figura 2.9: Distância \overline{OI}

Como $\overline{BO} = R$, $\overline{IY} = r$ e $\overline{BX} = \frac{1}{2}\overline{BP}$, segue das equações (2.8) e (2.9) que

$$R^2 - \overline{OI}^2 = R^2 - d^2 = \overline{AI} \cdot \overline{IP} = 2Rr \cdot \frac{\overline{IP}}{\overline{BP}},$$

de maneira que

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr \iff \overline{BP} = \overline{IP}.$$

Observe que $\overline{BP} = \overline{IP}$ se, e somente se, o triângulo PBI é isósceles de base \overline{BI} , de modo que $\widehat{PBI} = \widehat{PIB}$. Como \widehat{PIB} é ângulo externo ao triângulo ABI , segue que

$$\widehat{PIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}.$$

Por outro lado, usando a relação do ângulo inscrito, temos

$$\widehat{PBC} = \widehat{PAC} = \widehat{PAB} = \widehat{IAB}.$$

Portanto,

$$\widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \widehat{PIB} = \widehat{PBI} = \widehat{PBC} + \widehat{CBI} = \widehat{IAB} + \widehat{CBI}$$

o que nos dá $\widehat{IBA} = \widehat{CBI}$ de modo que I pertence à bissetriz de \widehat{ABC} e assim é interseção de duas bissetrizes do triângulo ABC , o que nos garante que I é o incentro do triângulo ABC e γ está inscrita no triângulo ABC . Em particular, o lado \overline{BC} também é tangente à circunferência γ . □

O resultado a seguir é conhecido como o Teorema de Poncelet na circunferência. Este garante que, dadas duas circunferências, uma interna a outra, se existe um triângulo inscrito na circunferência externa e circunscrito na interna, então cada ponto P da circunferência externa é vértice de um triângulo com as mesmas características.

Teorema 2.4 (Teorema de Poncelet na circunferência.). *Sejam γ e Γ , respectivamente, os círculos inscritos e circunscritos a um triângulo ABC . Se $A' \neq A, B, C$ é outro ponto de Γ , e $\overline{A'B'}$ e $\overline{A'C'}$ são cordas de Γ tangentes a γ , então γ é o círculo inscrito no triângulo $A'B'C'$.*

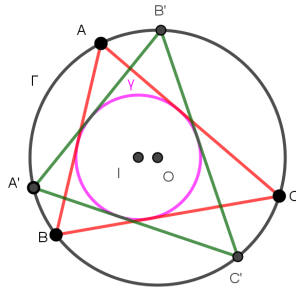


Figura 2.10: Teorema de Poncelet na circunferência

Demonstração. Sejam $\gamma (I; r)$ e $\Gamma (O; R)$, como mostra a figura acima, então o fato de γ ser o círculo inscrito ao triângulo ABC , garante, pelo teorema de Euler, que $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$. De posse dessa igualdade, aplicando novamente o referido teorema ao triângulo $A'B'C'$, concluímos que $B'C'$ tangencia γ , conforme desejado. \square

2.4 O Teorema de Poncelet nos quadriláteros

Nesta seção estudaremos a contribuição de Poncelet no estudo de circunferências e quadriláteros, e para isso utilizaremos algumas definições vistas no capítulo de preliminares. Leonhard Euler se interessou por esse problema e realizou alguns esforços para encontrar a condição necessária e suficiente para que, dadas duas circunferências λ interna a Γ , exista um quadrilátero inscrito em Γ e circunscrito em λ , porém foi seu aluno Nikolai Ivanovich Fuss quem a encontrou em 1797. Tal condição é

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2,$$

fórmula de Fuss para quadriláteros bicêntricos. Mas antes veremos algumas proposições que auxiliarão na compreensão da fórmula de Fuss.

Proposição 2.1. *Um quadrilátero convexo $ABCD$, de lados AB , BC , CD e DA é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.*

Demonstração. Suponha que $ABCD$ seja inscritível, como mostra a Figura 1.42.

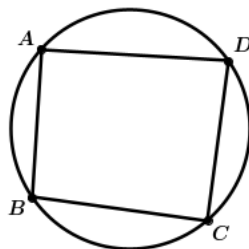


Figura 2.11: Quadrilátero inscrito $ABCD$

Sendo $med(A)$ a medida do ângulo \hat{A} , $med(C)$ a medida do ângulo \hat{C} , $arc(BCD)$ a medida do arco BCD e $arc(DAB)$ a medida do arco DAB , temos que:

$$med(A) + med(C) = \frac{arc(BCD)}{2} + \frac{arc(DAB)}{2} = 180^\circ.$$

Suponha agora que $med(A) + med(C) = 180^\circ$ e que $ABCD$ não seja inscritível. Considere o triângulo ABD e trace a circunferência circunscrita a esse triângulo. Seja E o ponto de interseção do lado BC com a circunferência, conforme a figura abaixo:

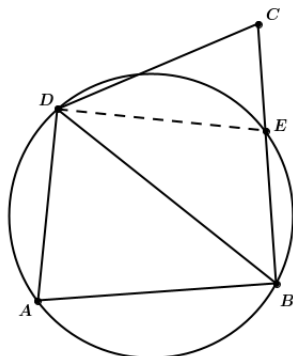


Figura 2.12: Quadrilátero inscrito $ABED$

Como $ABED$ é inscritível, temos que

$$med(A) + med(E) = 180^\circ.$$

Logo, temos que $med(E) = med(C)$, o que é um absurdo já que o ângulo \widehat{E} é externo ao triângulo CDE . Por fim, se C for interior ao círculo, chegamos a uma contradição análoga. Portanto, a demonstração está concluída. \square

Proposição 2.2. *Um quadrilátero convexo é circunscritível se as bissetrizes de seus ângulos internos enterseptam-se em um único ponto, que será o centro do círculo inscrito.*

Demonstração. Suponha que $ABCD$ é circunscritível, como mostra a figura abaixo.

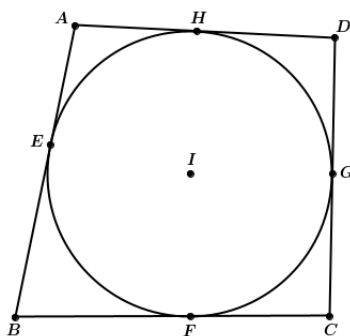


Figura 2.13: Quadrilátero circunscrito $ABCD$

Os pontos E, F, G e H são pontos de tangência aos lados AB, BC, CD e DA , respectivamente. Então o centro I da circunferência inscrita está a uma distância igual dos lados do polígono. Assim, como a bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância dos lados do polígono, podemos afirmar que I é a interseção das bissetrizes dos quatro ângulos internos do polígono $ABCD$. \square

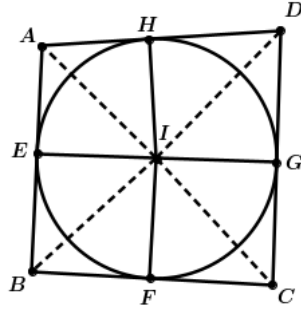


Figura 2.14: Quadrilátero circunscrito $ABCD$

2.4.1 Fórmula de Fuss

Nikolai Fuss (1755-1826), foi um matemático suíço que viveu a maior parte da sua vida na Rússia como assistente de Euler de 1773 a 1783, onde permaneceu até morrer. Fuss descobriu que um quadrilátero bicêntrico deve satisfazer a relação

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2.$$

A fórmula de Fuss é a aplicação do Teorema de Poncelet para quadriláteros. Antes de demonstrarmos a Fórmula de Fuss, faremos a demonstração do Teorema de Stewart e do Teorema de Pitágoras Inverso que serão utilizados na primeira parte da demonstração da Fórmula de Fuss.

Inicialmente veremos o Teorema de Stewart. Tal resultado relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo com o comprimento de uma ceviana, ver Definição 1.1. Na demonstração da Fórmula de Fuss, ele será utilizado para o cálculo da mediana.

Teorema 2.5 (O Teorema de Stewart). *Seja ABC um triângulo qualquer, cujos lados medem a , b e c . Seja d uma ceviana, D o ponto de interseção da ceviana com o lado BC , n corresponde a medida do segmento \overline{BD} e m equivale à medida do segmento \overline{DC} . O Teorema de Stewart afirma que:*

$$c^2m + b^2n - d^2a = mna. \tag{2.10}$$

Demonstração. Sejam α e β os ângulos formados pelos segmentos m e d e n e d , respectivamente, ver figura 2.15. Temos que α e β são suplementares. Pela lei dos cossenos, temos que

$$b^2 = m^2 + d^2 - 2.d.m.\cos(\alpha) \quad \text{e} \quad c^2 = n^2 + d^2 - 2.d.n.\cos(\beta).$$

Mas $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$. Então,

$$b^2 = m^2 + d^2 - 2.d.m.\cos(\alpha) \quad \text{e} \quad c^2 = n^2 + d^2 + 2.d.n.\cos(\alpha).$$

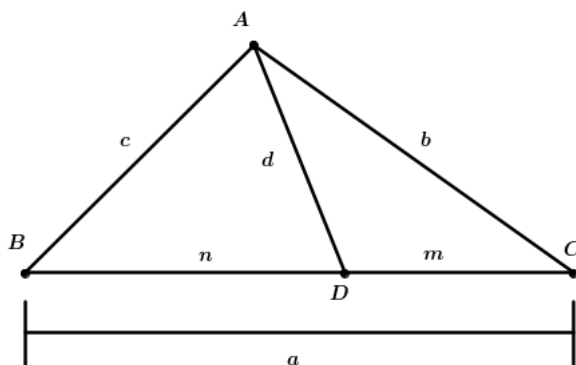


Figura 2.15: Triângulo ABC e ceviana d

Multiplicando a primeira equação por n e a segunda por m , fica

$$b^2.n = m^2.n + d^2.n - 2.d.m.n.\cos(\alpha) \quad \text{e} \quad c^2.m = n^2.m + d^2.m - 2.d.m.n.\cos(\alpha).$$

Somando as equações, obtemos:

$$c^2.m + b^2.n = n^2.m + m^2.n + d^2.n + d^2.m,$$

ou seja,

$$c^2.m + b^2.n = m.n.(m + n) + d^2.(m + n).$$

Mas $a = m + n$. Logo,

$$c^2.m + b^2.n - d^2.a = mna.$$

□

Observação 2.2. Agora, para o caso em que d é mediana, teremos $m = n$.

$$c^2.m + b^2.n - d^2.(a) = m^2.a.$$

Mas $a = 2m$. Portanto,

$$c^2.m + b^2.m - d^2.2m = m^2.2m.$$

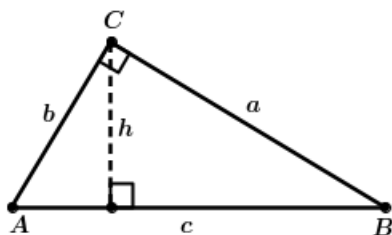
Dividindo por m ,

$$\begin{aligned} c^2 + b^2 - 2d^2 &= 2m^2 \\ c^2 + b^2 &= \frac{a^2}{2} + 2d^2. \end{aligned}$$

Agora vamos demonstrar o teorema de Pitágoras inverso. Esse resultado relaciona os inversos dos catetos com o inverso da altura, ao invés de relacionar os catetos com a hipotenusa.

Teorema 2.6 (O Teorema de Pitágoras Inverso). *Seja o triângulo ABC , retângulo em C , catetos a e b , hipotenusa c e altura h relativa à hipotenusa.*

Demonstração. Considere o triângulo retângulo ABC como na figura abaixo



Sabemos pelo Teorema de Pitágoras que

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (2.11)$$

Temos que a área do triângulo ABC pode ser calculada de várias formas.

$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2},$$

ou seja,

$$a \cdot b = c \cdot h.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos que

$$a^2 \cdot b^2 = c^2 \cdot h^2. \quad (2.12)$$

Agora, substituindo (2.11) em (2.12) temos

$$a^2 \cdot b^2 = (a^2 + b^2) \cdot h^2.$$

Logo,

$$\frac{1}{h^2} = \frac{a^2}{a^2 \cdot b^2} + \frac{b^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}.$$

□

Com esses dois resultados em mãos, veremos agora a demonstração da Fórmula de Fuss.

Teorema 2.7 (Fórmula de Fuss). *Seja $ABCD$ um quadrilátero. Então, $ABCD$ é um quadrilátero bicêntrico se, e somente se, vale a relação*

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2. \quad (2.13)$$

Demonstração. Suponha que $ABCD$ é um quadrilátero bicêntrico. Mostraremos que a relação (2.13) é verdadeira. Consideremos o quadrilátero $ABCD$, inscrito em um círculo Γ de centro em O e raio R e circunscrito em um círculo γ de centro I e raio r . Os pontos K e L são os pontos de tangência do quadrilátero com relação à γ . Seja d a distância entre os centros O e I . Prolongando o segmento CI , encontramos o ponto E em Γ . Da mesma forma, prolongando o segmento AI , encontramos o ponto F em Γ . Tracemos os segmentos \overline{EO} , \overline{OF} , \overline{IO} , \overline{IL} e \overline{IK} .

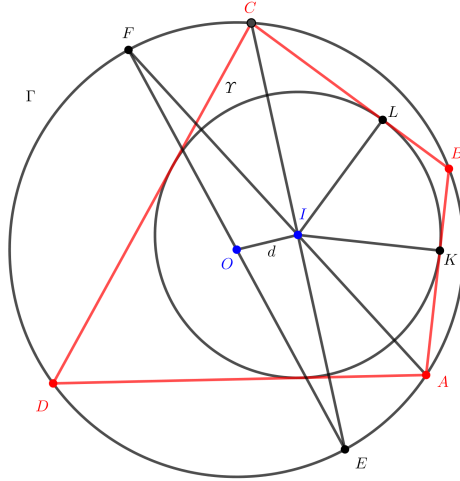


Figura 2.16: Quadrilátero inscrito $ABCD$

Como o quadrilátero $ABCD$ está inscrito em Γ , os ângulos \widehat{A} e \widehat{C} são suplementares. Por outro lado, a reta AI é bissetriz do ângulo \widehat{A} e CI é bissetriz do ângulo \widehat{C} . Portanto, $med(B\widehat{A}I) + med(I\widehat{C}B) = 90^\circ$. Pela construção, $\overline{IK} = \overline{IL} = r$. Os triângulos AIK e CIL juntos formam um triângulo retângulo de catetos AI e CI , e hipotenusa $AK + CL$, conforme ilustram as figuras a seguir

Das relações métricas no triângulo retângulo, temos que

$$\overline{IL} \cdot (\overline{AK} + \overline{CL}) = \overline{AI} \cdot \overline{CI}. \quad (2.14)$$

Ou ainda

$$r \cdot (\overline{AK} + \overline{CL}) = \overline{AI} \cdot \overline{CI}. \quad (2.15)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AIC , temos

$$(\overline{AK} + \overline{CL})^2 = \overline{AI}^2 + \overline{CI}^2. \quad (2.16)$$

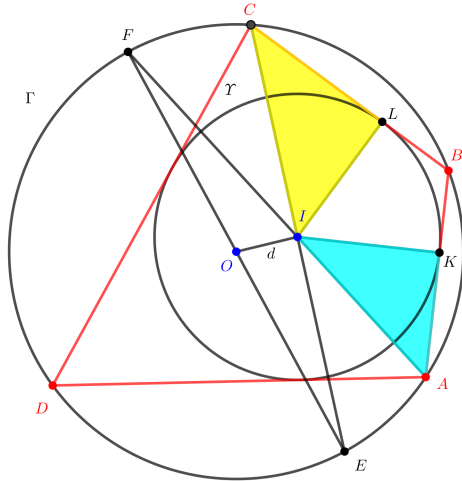


Figura 2.17: Destaque dos triângulos AIK e LIC

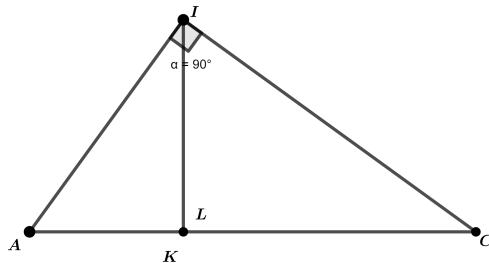


Figura 2.18: Triângulos AIK e CIL juntos

E levando (2.14) ao quadrado

$$r^2 \cdot (\overline{AK} + \overline{CL})^2 = \overline{AI}^2 \cdot \overline{CI}^2. \quad (2.17)$$

E substituindo (2.16) em (2.17)

$$r^2 \cdot (\overline{AI}^2 + \overline{CI}^2) = \overline{AI}^2 \cdot \overline{CI}^2.$$

Donde

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\overline{AI}^2} + \frac{1}{\overline{CI}^2}. \quad (2.18)$$

Observemos na figura acima que o segmento \overline{EF} é diâmetro, pois

$$\text{med}(\widehat{DOF}) + \text{med}(\widehat{DOE}) = 2 \cdot (\text{med}(\widehat{DAF}) + \text{med}(\widehat{DCE})) = \text{med}(\widehat{BAD}) + \text{med}(\widehat{BCD}) = 180^\circ$$

Portanto, $\overline{EF} = 2r$ e O é o ponto médio do segmento \overline{EF} . Assim, \overline{IO} é mediana do triângulo EFI . Utilizando o Teorema de Stewart acima, para o cálculo de medianas, segue

$$\overline{EI}^2 + \overline{FI}^2 = 2 \cdot \overline{IO}^2 + \frac{\overline{EF}^2}{2}.$$

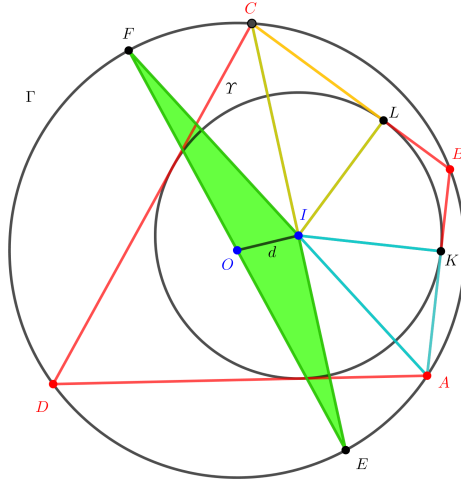


Figura 2.19: Destaque do triângulo EFI

Mas sabemos que $\overline{IO} = d$ e $\overline{EF} = 2R$.

$$\overline{EI}^2 + \overline{FI}^2 = 2.(d^2 + R^2). \quad (2.19)$$

Considere agora o diâmetro de Γ passando por O e por I . Sejam P e Q os pontos extremos desse diâmetro.

As cordas \overline{AF} e \overline{PQ} também se interceptam em I , valendo

$$\overline{AI} \cdot \overline{FI} = \overline{PI} \cdot \overline{QI}.$$

Mas $\overline{PI} = R - d$ e $\overline{QI} = R + d$. Então temos

$$\overline{AI} \cdot \overline{FI} = (R + d).(R - d) = (R^2 - d^2). \quad (2.20)$$

Por outro lado, as cordas \overline{AF} e \overline{CE} também se interceptam em I , e, portanto, vale

$$\overline{AI} \cdot \overline{FI} = \overline{CI} \cdot \overline{EI}.$$

$$\overline{CI} \cdot \overline{EI} = (R^2 - d^2) \quad (2.21)$$

Isolando \overline{AI} e \overline{CI} , respectivamente em (2.20) e (2.21), e substituindo em (2.18) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} &= \frac{\overline{FI}^2}{(R^2 - d^2)^2} + \frac{\overline{EI}^2}{(R^2 - d^2)^2} \\ \frac{1}{r^2} &= \frac{\overline{FI}^2 + \overline{EI}^2}{(R^2 - d^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Substituindo, agora, (2.19) em (2.22)

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2.(d^2 + R^2)}{(R^2 - d^2)^2}.$$

Logo, $2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$.

2.4.2 Recíproca de Fuss

Suponhamos que vale a fórmula de Fuss. Mostraremos que $ABCD$ é um quadrilátero bicêntrico. Para tanto, sejam dados a circunferência γ de centro I e raio r , a circunferência Γ de centro O e raio R e d a distância entre os centros, onde a circunferência γ é interna a circunferência Γ e um quadrilátero $ABCD$ circunscrito a γ com os vértices A, B e C em Γ . Qualquer quadrilátero $ABCD$ circunscrito a γ com três de seus vértices pertencentes em Γ , é inscrito em Γ . Traçando a semirreta \overrightarrow{AI} encontramos o ponto E em Γ , e traçando a semirreta \overrightarrow{CI} , determinamos o ponto F , também em Γ . Consideremos os ângulos $I\hat{A}B = \alpha$ e $I\hat{C}B = \beta$. Tracemos a reta IO determinando os pontos G e H em Γ , portanto, \overline{GH} é diâmetro de Γ . Temos

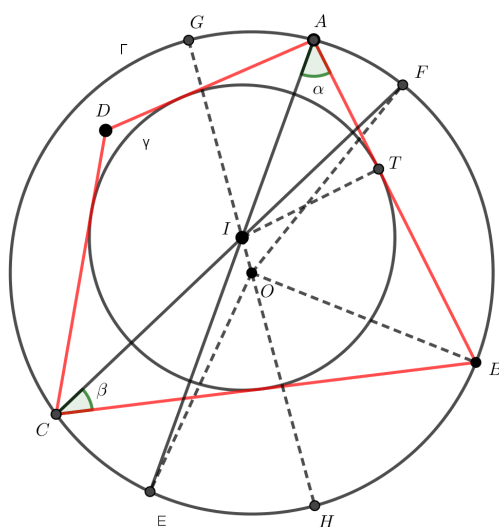


Figura 2.20: Quadrilátero $ABCD$ circunscrito e não inscrito

$med(E\hat{O}B) = 2\alpha$ e $med(F\hat{O}B) = 2\beta$ e portanto

$$med(E\hat{O}B + F\hat{O}B) = 2(\alpha + \beta). \quad (2.23)$$

Temos que as cordas \overline{AE} e \overline{GH} se interceptam em I , então podemos escrever utilizando o triângulo retângulo AIT

$$\sin \alpha = \frac{r}{AI} = \frac{r \cdot \overline{IE}}{AI \cdot \overline{IE}} = \frac{r \cdot \overline{IE}}{GI \cdot \overline{IH}}.$$

Por outro lado, $\overline{GI} = R - d$ e $\overline{IH} = R + d$. A igualdade acima pode ser reescrita como

$$\sin \alpha = \frac{r \cdot \overline{IE}}{(R + d) \cdot (R - d)}$$

Elevando ambos os membros, da equação acima, ao quadrado

$$\sin^2 \alpha = \frac{r^2 \overline{IE}^2}{(R+d)^2 \cdot (R-d)^2}. \quad (2.24)$$

Suponhamos que vale a fórmula de Fuss para esse caso, ou seja,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2 \cdot (d^2 + R^2)}{(R^2 - d^2)^2}.$$

Que equivale à igualdade

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2 \cdot (d^2 + R^2)}{(R+d)^2 (R-d)^2}. \quad (2.25)$$

Comparando (2.24) e (2.25), temos que

$$\sin^2 \alpha = \frac{\overline{IE}^2}{2 \cdot (d^2 + R^2)}.$$

Analogamente, encontramos que

$$\sin^2 \beta = \frac{\overline{IF}^2}{2 \cdot (d^2 + R^2)}.$$

Somando as igualdades anteriores,

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \frac{\overline{IE}^2 + \overline{IF}^2}{2 \cdot (d^2 + R^2)}.$$

Agora, no triângulo IEO , pela lei dos cossenos,

$$\overline{IE}^2 = \overline{EO}^2 + \overline{IO}^2 - 2 \cdot \overline{EO} \cdot \overline{IO} \cdot \cos(\widehat{EOI})$$

$$\overline{IE}^2 = R^2 + d^2 - 2 \cdot R \cdot d \cdot \cos(\widehat{EOI})$$

E, no triângulo IFO , também pela lei dos cossenos,

$$\overline{IF}^2 = \overline{FO}^2 + \overline{IO}^2 - 2 \cdot \overline{FO} \cdot \overline{IO} \cdot \cos(\widehat{FOI})$$

$$\overline{IF}^2 = R^2 + d^2 - 2 \cdot R \cdot d \cdot \cos(\widehat{FOI}).$$

Portanto,

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \frac{R^2 + d^2 - 2.R.d. \cos(\widehat{EOI}) + R^2 + d^2 - 2.R.d. \cos(\widehat{FOI})}{2.(d^2 + R^2)}$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1 - \frac{R.d.(\cos(\widehat{EOI}) + \cos(\widehat{FOI}))}{(d^2 + R^2)} \quad (2.26)$$

Agora, usando (2.23),

$$\text{med}(\widehat{EOI}) + \text{med}(\widehat{FOI}) = 360^\circ - (\text{med}(\widehat{EOB}) + \text{med}(\widehat{FOB})) = 360^\circ - 2(\alpha + \beta).$$

Sabemos que $\alpha < 90^\circ$ e $\beta < 90^\circ$, e por isso, $\alpha + \beta < 180^\circ$. Analisaremos três possíveis casos para a equação (2.26).

Caso 1: $\alpha + \beta < 90^\circ$. Neste caso, temos que

$$\text{med}(\widehat{EOI}) + \text{med}(\widehat{FOI}) > 180^\circ, \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < 1 \text{ e } \cos(\widehat{EOI}) + \cos(\widehat{FOI}) < 0.$$

Agora denote

$$k = \text{med}(\widehat{EOI}) + \text{med}(\widehat{FOI}).$$

Logo, temos que

$$k = 360^\circ - 2(\alpha + \beta).$$

Assim, segue que

$$\alpha + \beta = \frac{360^\circ - k}{2},$$

isto é,

$$\frac{360^\circ - k}{2} < 90^\circ.$$

Dessa forma, obtemos que $k > 180^\circ$. Logo,

$$\text{med}(\widehat{EOI}) + \text{med}(\widehat{FOI}) = k > 180^\circ.$$

Além disso, desde que $\alpha < 90^\circ - \beta$, temos que

$$\sin \alpha < \sin(90^\circ - \beta)$$

$$\sin \alpha < \cos \beta$$

$$\sin^2 \alpha < \cos^2 \beta$$

$$\sin^2 \alpha < 1 - \sin^2 \beta$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < 1.$$

Temos também que

$$\text{med}(\widehat{EOI}) + \text{med}(\widehat{FOI}) > 180^\circ$$

$$\text{med}(E\widehat{OI}) > 180^\circ - \text{med}(F\widehat{OI})$$

$$\cos[\text{med}(E\widehat{OI})] > \cos[180^\circ - \text{med}(F\widehat{OI})]$$

$$\cos[\text{med}(E\widehat{OI})] > -\cos[\text{med}(F\widehat{OI})]$$

, assim $\cos(E\widehat{OI}) + \cos(F\widehat{OI}) > 0$ o que é uma contradição.

Caso 2: $\alpha + \beta > 90^\circ$. Então

$$\text{med}(E\widehat{OI}) + \text{med}(F\widehat{OI}) < 180^\circ, \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta > 1 \text{ e } \cos(E\widehat{OI}) + \cos(F\widehat{OI}) > 0.$$

Temos

$$\frac{360^\circ - k}{2} > 90^\circ$$

$$360^\circ - K > 180^\circ$$

$$K < 180^\circ$$

Além disso, desde que $\alpha > 90^\circ - \beta$, temos que

$$\sin \alpha > \sin(90^\circ - \beta)$$

$$\sin \alpha > \cos \beta$$

$$\sin^2 \alpha > \cos^2 \beta$$

$$\sin^2 \alpha > 1 - \sin^2 \beta$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta > 1.$$

Temos também que

$$\text{med}(E\widehat{OI}) + \text{med}(F\widehat{OI}) < 180^\circ$$

$$\text{med}(E\widehat{OI}) < 180^\circ - \text{med}(F\widehat{OI})$$

$$\cos[\text{med}(E\widehat{OI})] < \cos[180^\circ - \text{med}(F\widehat{OI})]$$

$$\cos[\text{med}(E\widehat{OI})] < -\cos[\text{med}(F\widehat{OI})],$$

assim $\cos(E\widehat{OI}) + \cos(F\widehat{OI}) < 0$ o que é uma contradição.

Caso 3: $\alpha + \beta = 90^\circ$.

$$\text{med}(E\widehat{OI}) + \text{med}(F\widehat{OI}) = 180^\circ, \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1 \text{ e } \cos(E\widehat{OI}) + \cos(F\widehat{OI}) = 0.$$

Temos

$$\frac{360^\circ - k}{2} = 90^\circ$$

$$360^\circ - K = 180^\circ$$

$$K = 180^\circ$$

Além disso, desde que $\alpha + \beta = 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ - \beta$, temos que

$$\sin \alpha = \sin(90^\circ - \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \beta$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1.$$

Temos também que

$$\text{med}(E\hat{O}I) + \text{med}(F\hat{O}I) = 180^\circ$$

$$\text{med}(E\hat{O}I) = 180^\circ - \text{med}(F\hat{O}I)$$

$$\cos[\text{med}(E\hat{O}I)] = \cos[180^\circ - \text{med}(F\hat{O}I)]$$

$$\cos[\text{med}(E\hat{O}I)] = -\cos[\text{med}(F\hat{O}I)],$$

assim $\cos(E\hat{O}I) + \cos(F\hat{O}I) = 0$.

Portanto, $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Como $\text{med}(B\hat{A}D) = 2\alpha$ e $\text{med}(B\hat{C}D) = 2\beta$, $\text{med}(B\hat{A}D + B\hat{C}D) = 180^\circ$.

Logo, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível, o que implica que D pertence ao círculo que passa por A, B e C . Fica comprovado assim que, para qualquer ponto arbitrário inicial A , o quadrilátero $ABCD$ será bicêntrico. \square

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974
- [2] FREITAS, Vinícius Paulo. **Alguns teoremas clássicos da geometria sintética e aplicações**. 2013. 71 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2023.
- [3] MUNIZ, Neto. Antonio Caminha Muniz. Geometria — Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat).
- [4] SANTOS, Almir Rogério. **Geometria Euclidiana Plana** (notas de aula). 2021.
- [5] SANTOS, Jhonata Avelar. et al. Explorando os teoremas de Menelaus e Ceva em questões de olimpíadas de matemática. **Revista Professor de Matemática On line**, v. 9, n. 3, p. 461–482, 2021.
- [6] SILVA, José Constantino da. **Os teoremas de Menelaus e Ceva**. 2015. 130 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT)) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.