Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Tainnah Rabelo Carneiro da Silva

Considerações sobre o ensino de funções no ensino fundamental e a linguagem matemática

Rio de Janeiro
2023

Tainnah Rabelo Carneiro da Silva

Considerações sobre o ensino de funções no ensino fundamental e a linguagem matemática

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Sueli Ferreira da Cunha

Coorientador: Prof. Dr. Jaime Velasco Câmara da Silva

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S586 Silva, Tainnah Rabelo Carneiro da

Considerações sobre o ensino de funções no ensino fundamental e a linguagem matemática/ Tainnah Rabelo Carneiro da Silva. – 2023.

98 f.: il.

Orientadora: Sueli Ferreira da Cunha

Coorientador: Jaime Velasco Câmara da Silva

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Funções (Matemática) - Estudo e ensino - Teses. 2. Matemática - Estudo e ensino - Teses. I. Cunha, Sueli Ferreira da. II. Silva, Jaime Velasco Câmara da. III.Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Assinatura   Data

Tainnah Rabelo Carneiro da Silva

Considerações sobre o ensino de funções no ensino fundamental e a linguagem matemática

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em 30 de agosto de 2023.

Banca Examinadora:

Prof[a]. Dr[a]. Sueli Ferreira da Cunha
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Jaime Velasco Câmara da Silva
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Laurent Marcos Prouvée
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Rio de Janeiro

2023

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu esposo, Robson, e ao meu filho Liam.

AGRADECIMENTOS

Ao meu esposo Robson, por todo apoio e suporte, e ao nosso filho Liam por dar mais significado a este trabalho.

Aos meus pais, por me ensinarem o valor do estudo e por me incentivarem a conquistar meus desejos. Agradeço ao meu irmão, pela parceria.

Aos amigos Rebeca e Adriano, por caminharem ao meu lado durante todo o mestrado, incentivando e sustentando diante das dificuldades.

Aos professores Sueli e Jaime, pela orientação, paciência e troca durante a realização deste trabalho.

Aos colegas do grupo MateGraMática, por me auxiliarem a entender melhor a matemática e sua linguagem, enriquecendo o meu conhecimento.

Aos meus alunos, que são a motivação para eu me tornar uma professora melhor, buscando transformar suas vidas.

Aos meus colegas de trabalho, por me ensinarem a ser professora em uma escola com muitas necessidades, e especialmente a Vereda, Emily e Ton por todo o suporte, incentivo, e por garantirem que eu conseguisse me envolver com esse estudo que originou tantas descobertas.

RESUMO

SILVA, Tainnah Rabelo Carneiro da. **Considerações sobre o ensino de funções no ensino fundamental e a linguagem matemática.** 2023. 98 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

O estudo de Funções é um dos principais conteúdos do 1º ano do Ensino Médio, porém a base das informações para um bom entendimento do assunto se inicia nas séries finais do Ensino Fundamental. Durante esse período, o aluno precisa se familiarizar com as diferentes formas de escrever em linguagem matemática e fundamentar conceitos algébricos iniciais, correlacionando-os com o cotidiano. Contudo, sem um bom entendimento das regras dessa linguagem (que são diferentes da linguagem natural), o aluno apresenta inúmeras dificuldades, tanto em compreender os conceitos apresentados quanto em fazer as devidas correlações. A partir da experiência da autora em uma escola municipal do Rio de Janeiro, com turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental, o presente estudo tem por objetivo sugerir melhorias no ensino dos conteúdos relacionados a Funções, desde o 7º ano, sendo um dos focos, a forma de apresentar adequadamente a linguagem matemática. Para isso, foi feita uma análise dos currículos básicos e materiais do Ensino Fundamental, presentes nessa escola, para elaborar e apresentar possíveis intervenções que visam diminuir as dificuldades observadas em sala de aula, auxiliando o aluno a se apropriar mais da linguagem matemática, por meio do estudo de sua gramática.

Palavras-chave: Ensino de Funções. Gramática da Linguagem Matemática. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

SILVA, Tainnah Rabelo Carneiro da. **Considerations concerning the teaching of functions in elementary school and mathematical language.** 2023. 98 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

The study of Functions is one of the main contents of the 1st year in the High School, but the basis of information for a good understanding of this subject begins in the final series of the Elementary School. During this period, the student needs to familiarize himself with the different ways of writing in mathematical language and substantiate initial algebraic concepts, correlating them with the daily life. However, without a good understanding of the rules of this language (which are different from a natural language), the student has several difficulties, both in understanding the presented concepts and also in making the necessary correlations. Based on the author's experience in a municipal school in Rio de Janeiro, with classes in the final years of the Elementary School, the present study aims to suggest improvements in the teaching of contents related to Functions, as soon as possible, mainly presenting properly the mathematical language. For this, an analysis of the basic curricula and for some materials of the Elementary Education, present in this school, was carried out in order to elaborate and present possible interventions that aim to reduce the difficulties observed in the classroom, helping the student to understand more of the mathematical language, through the study of your grammar.

Key words: Teaching Functions. Grammar of Mathematical Language. Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Por diversas vezes, na prática docente em uma Escola Municipal do Rio de Janeiro, é observado um afastamento dos alunos com relação à Matemática. Do 6º para o 7º ano do Ensino Fundamental, a postura dos alunos quanto a essa disciplina já mostra uma mudança; muitos já começam a demonstrar desinteresse e a verbalizar que não gostam da disciplina, por não entenderem seus conceitos e sua aplicabilidade no dia a dia. Se houver a oportunidade de atender uma turma no 6º e no 9º anos, é possível notar mais significativamente essas atitudes, que tornam o trabalho do professor mais desafiador.

Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, os alunos são instigados a um maior grau de abstração, além de reverem conceitos importantes previamente apresentados. A faixa etária desse período (de 11 a 14 anos para alunos com a relação idade-série adequada) condiz com a passagem da terceira para a quarta fase do desenvolvimento infantil descrita por Jean Piaget[1]. Por essa razão, segundo os currículos de base nacional, a organização curricular da Matemática incita o aluno a analisar mais seus processos e raciocínios do que as mecânicas de operar com números. A experiência mostra que as dificuldades surgidas nesse momento obstruem o processo de aprendizagem do aluno, criando barreiras que prejudicam o pleno uso das habilidades matemáticas. Essa experiência é corroborada por estudos como os de Ribeiro (2001) e de Gil (2008). O primeiro destaca erros comuns dos alunos relacionados ao conceito de equação, sua manipulação e, em certos casos, à falta de atenção. Por sua vez, o segundo faz um levantamento de dificuldades por meio de pesquisa e entrevista com alunos e professores, e destaca, em alguns blocos de atividades, a dificuldade com a abstração.

Nesse período, quando o ensino formal da Álgebra se inicia, as dificuldades de compreender signos[2] matemáticos levam muitos alunos a “desistirem” da Matemática, isto é, a acreditarem ser impossível a compreensão desse conteúdo. Ao apresentar conceitos matemáticos mais abstratos, a linguagem matemática envolvida nesse

[1] Em suas pesquisas, Piaget descreve quatro fases do desenvolvimento infantil: sensório-motor (de 0 a 2 anos), pré-operacional (de 2 a 7 anos), de operações concretas (de 7 a 12 anos) e de operações formais (a partir dos 12 anos). É nesse último estágio que a criança desenvolve o pensamento abstrato e tem a capacidade de melhor compreender processos matemáticos sem o auxílio de recursos mais concretos. (SCHIRMANN, 2019)

[2] *Signo* é “uma unidade linguística que consiste na combinação de uma imagem acústica (o significante) e de um conceito (o significado).” (SIGNO, 2022).

período se torna um fator complicador, se o aluno não compreender de fato as regras pré-estabelecidas e, principalmente, os significados dos signos utilizados.

Paralelo a isso, muitos alunos que possuem raciocínio mais rápido apresentam resistência a se utilizar de muitos desses signos (que, para eles, podem ser confusos e sem sentido) para resolver um problema aplicado, para o qual obtêm o resultado sem uma escrita apropriada. Por um lado, evidenciar a escrita adequada auxilia os alunos a melhor entender um conteúdo ou problema, por exemplo; por outro, ressaltar os significados das palavras em linguagem matemática, de modo que essa escrita faça mais sentido, se mostra fundamental para a devida compreensão do assunto tratado.

Segundo a BNCC (2017), “O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático [...]”. Consequentemente, é justamente nesse período que as bases para um estudo aprofundado dos conceitos matemáticos são construídas. Assim, entende-se que os elementos presentes na linguagem matemática devam ser apresentados adequadamente nesse período. Considerando a linguagem matemática como uma linguagem propriamente dita, o estudo de sua gramática, feito pelo professor, tem a finalidade de compreender melhor as regras que a regem e apresentar aos alunos a escrita mais apropriada a cada etapa de ensino.

É a partir desse ponto de vista que se optou por estudar, neste texto, a forma como os conceitos de função e de seus elementos são apresentados em sua base. Dentre os diversos assuntos tratados no Ensino Fundamental, a escolha de Funções como objeto deste estudo vem da importância do tema e do fato de que as bases para tal conteúdo são apresentadas ao longo da maior parte dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

O desenvolvimento deste trabalho tem, por finalidade, por um lado analisar o que se espera do Ensino Fundamental (particularmente em relação a Funções); por outro lado, propor formas de apresentar a linguagem matemática de modo a contribuir e ampliar a capacidade de entendimento do aluno quanto aos conceitos relativos ao conceito de função no ensino básico e quanto a sua forma de se expressar na escrita. Desta forma, no primeiro capítulo, são apresentados os currículos básicos e a importância da linguagem matemática, bem como os estudos sobre sua gramática. Já no segundo capítulo, revisam-se os conceitos matemáticos tratados no Ensino Fundamental, com a finalidade de dar o embasamento para o professor relativo a esse conteúdo específico, e são analisados os materiais disponibilizados para os alunos presentes em uma escola do município do Rio de Janeiro. Por fim, no terceiro capítulo, apresentam-se as propostas sobre como introduzir a linguagem matemática em cada momento e quais assuntos podem ser destacados, assim como uma correlação com a escrita adequada e a modelagem matemática. Essas propostas são exemplificadas com atividades, e são divididas ao longo dos três últimos anos do Ensino Fundamental.

1 A LINGUAGEM MATEMÁTICA E OS CURRÍCULOS MÍNIMOS

Para se analisar o estudo de Funções no Ensino Fundamental, é preciso primeiro ter contato com o que se espera desse assunto no período considerado. Por entender que o conhecimento matemático é construído e aprofundado com o passar dos anos, foi verificada a necessidade de observar os currículos gerais do Ensino Fundamental, focando nos Anos Finais. Os objetivos são identificar os conteúdos relacionados a Funções, assim como quais as expectativas com relação à aprendizagem do aluno sobre esses conteúdos, e relacionar com os estudos feitos sobre a gramática da linguagem matemática.

Assim, na Seção 1.1, são identificados o que se espera da Matemática nos currículos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e no currículo da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro. Na Seção 1.2, são destacados os objetivos relacionados especificamente a Funções nos currículos já citados. Por fim, na Seção 1.3, são apresentados alguns dos estudos sobre a gramática da linguagem matemática, referentes aos assuntos relacionados a Funções, principalmente os tratados em Álgebra.

1.1 Objetivos da Matemática nos currículos mínimos

A partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1996[3], foram editados documentos que regulamentam o currículo nacional do Ensino Fundamental. O primeiro deles, de 1997, são os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Esse documento destaca que, durante a educação básica, o aluno deve aprender a buscar conhecimento ao longo de sua vida, fora da escola; ou seja, criar ferramentas que possibilitem um processo de aprendizado constante (BRASIL,1997, p. 28). Essa ideia introduz a premissa de que o Ensino Fundamental constitui a base onde é estruturado o pensamento do aluno nos anos seguintes.

Atualmente, a principal referência curricular é a Base Nacional Comum

[3] Lei nº 9394/1996.

Curricular (BNCC), publicada em 2017 pelo Ministério da Educação, descrita como "um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (BRASIL, 2017, p. 7). Por essa razão, e sendo um documento nacional, espera-se que todas as escolas (públicas e particulares) sigam suas diretrizes. Ao longo desse documento, estão descritas as competências que devem ser construídas com os alunos em cada fase, sendo que,

> Na BNCC, **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2017, p. 8).

Assim, considera-se o conhecimento escolar como uma ferramenta de atuação no mundo. Por esse motivo, os currículos individuais das escolas (e, por consequência, as aulas desenvolvidas pelos professores) devem visar não só os conteúdos a serem apresentados em cada ano, mas também sua correlação com a vivência do aluno, além de proporcionar a este as ferramentas necessárias para que ele desenvolva a capacidade de fazer essas correlações sozinho.

Ao tratar de Matemática nesses currículos, essa orientação torna-se mais evidente. Os PCN, em sua descrição da área de Matemática, destacam que "A atividade matemática escolar não é 'olhar para coisas prontas e definitivas', mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade." (BRASIL, 1997, p. 19).

A BNCC, por sua vez, afirma que

> [...] espera-se que eles [os alunos] desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações (BRASIL, 2017, p. 265).

Nota-se, portanto, que ambos os documentos reforçam a ideia de que o conhecimento deve se tornar algo funcional para os alunos. Em outros termos, não se deve simplesmente saber manipular um objeto matemático, mas sim saber como ele se apresenta na realidade e quais de suas particularidades auxiliam o aluno a atuar nesse mundo.

Para se alcançar esse objetivo, os documentos nacionais identificam um aspecto importante no estudo da Matemática: as representações em sua linguagem. Segundo os PCN,

> No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com

> princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados (BRASIL, 1997, p.19).

A comunicação, à qual o texto se refere, pode ser feita de diferentes maneiras. Uma delas, é utilizando uma linguagem própria, denominada a linguagem matemática, constituída por um conjunto de símbolos próprios (denominados suas letras e que formam o alfabeto dessa linguagem), assim como por formações utilizando tais letras e que admitem algum significado matemático (formações essas denominadas palavras e que formam o vocabulário dessa linguagem). Vale destacar que a linguagem matemática não possui oralidade (GRANGER, 1974 apud SILVEIRA, 2014), necessitando, portanto, de uma língua natural para ser verbalizada. Consequentemente, e, em particular, em sala de aula, a comunicação oral sobre Matemática é sempre feita em uma língua natural, sendo usada tanto pelo professor (para explicar os conceitos) quanto pelo aluno (para expor seu pensamento).

A partir dessa ideia, é destacado na BNCC que o aluno deve desenvolver o *letramento matemático* durante o Ensino Fundamental. O sentido dado a essa expressão está descrito no documento Matriz de Avaliação de Matemática - PISA[4] 2012:

> Letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar, e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos.[5]

Entende-se, então, letramento matemático como a compreensão da Matemática que o aluno deve desenvolver, assim como a habilidade de aplicar esse conhecimento de modo mais amplo. Esses aspectos não são somente dos conceitos matemáticos, mas também de sua escrita, considerando que para se comunicar e aprofundar seu conhecimento matemático é imprescindível o uso da linguagem matemática.

---

4 O *Programme for Internacional Student Assessment* (PISA), é uma avaliação desenvolvida pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) que visa “medir como os estudantes que se aproximam do final da escolaridade obrigatória adquiriram os conhecimentos e habilidades essenciais para a plena participação na sociedade” (Disponível em: <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/37474503.pdf>. Acessado em: 12 out 2021). Apesar de não fazer parte da OCDE, o Brasil é avaliado desde o início do programa. O caráter político dessa avaliação faz com que ela sirva de parâmetro para os currículos nacionais do Ensino Fundamental, o que dita a base para currículos individuais das escolas.

5 Essa definição está disponível no site: <https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf>. Acessado em: 28 mai 2021

Além disso, a BNCC ainda destaca que a Matemática “precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas” (BRASIL, 2017, p. 265). Essa garantia é obtida com a transmissão de conteúdos, mas também com as diferentes formas de se expressar matematicamente. O processo de usar a linguagem matemática para descrever um problema do cotidiano é chamado de *modelagem matemática* (ALMEIDA, SOUSA, TORTOLA, 2015), e tem destaque fundamental nessas orientações.

As reflexões levantadas nos PCN e na BNCC servem de base e estão presentes no currículo desenvolvido pela Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro anualmente. Devido à pandemia de Covid-19, foi analisado o currículo municipal disponibilizado pela prefeitura no começo de 2020, estabelecendo todos os conteúdos previstos para os anos do Ensino Fundamental. Por conta das dificuldades que surgiram após o período de fechamento das escolas, os currículos de 2021 e 2022 foram adaptados para que o aluno tivesse acesso a assuntos do ano anterior. Tendo em vista que esses currículos diminuíram a quantidade de conteúdos programados para o segmento correto e que seu caráter é temporário (para atender uma demanda imediata), este estudo utiliza o currículo original como objeto de análise (isto é, aquele utilizado no período pré-pandemia). O motivo principal dessa escolha foi reconhecer que o original condiz com os objetivos previstos na BNCC e com aquilo que se deseja que os alunos desenvolvam, devendo voltar a ser adotado o quanto antes, a fim de minimizar efeitos prejudiciais no futuro. Além disso, a autonomia do professor em sala de aula, no município, permite que esses conteúdos sejam tratados da forma adequada.

De acordo com as orientações curriculares, disponibilizadas no início de 2020

> O Currículo de Matemática da Secretaria Municipal do Rio de Janeiro enfatiza, em sua proposta pedagógica, a importância de que os conceitos matemáticos sejam construídos a partir de situações contextualizadas, significativas, utilizando o conhecimento prévio dos alunos, aprimorando sua capacidade de abstração e autonomia na resolução de problemas, com uma metodologia significativa que promova o desenvolvimento integral (Prefeitura, 2020, p. 2).

Assim como para outras áreas, a aprendizagem do aluno está vinculada à forma de ele expressar seu conhecimento. Como a maneira de se exprimir matematicamente é feita por meio da linguagem matemática, ao longo dos Anos Iniciais o aluno deve aprender a lidar adequadamente com ela.

Tanto a contextualização quanto a aplicabilidade da matemática estão diretamente relacionadas com a ideia de expressão em linguagem matemática. Para resolver qualquer problema aplicado, o aluno deve ler e interpretar o problema, identificando quais conceitos devem ser utilizados, e depois escrever as informações em linguagem matemática (utilizando seu vocabulário e sua gramática) e, só então, realizar as operações necessárias para se chegar ao resultado. Esse procedimento (a modelagem matemática) foi descrito por Biembengut e Hein (2000) por meio das etapas de Interação, Matematização e Modelo Matemático, que envolvem, respectivamente, a familiarização com o problema, sua formulação e a interpretação da solução, dentre outras subetapas.

Da mesma forma que os PCN e a BNCC descrevem o Ensino Fundamental como a base (conforme dito anteriormente), o currículo da Prefeitura destaca que “As habilidades desenvolvidas nos *anos iniciais* visam a construir a base para *os conhecimentos a serem adquiridos nos anos seguintes* e, a partir dela, os conhecimentos matemáticos no Ensino Fundamental desenvolvem-se de forma sequencial.”. Isso demonstra uma preocupação em estabelecer uma base que permita ao aluno raciocínios cada vez mais avançados, com o passar dos anos. Como, em geral, um professor especialista em Matemática não leciona turmas de Anos Iniciais, essa ideia de evolução dos conhecimentos deve ser desenvolvida a partir do 6º ano, tendo em vista tanto os Anos Finais quanto o Ensino Médio.

1.2 **Elementos de Funções nos Currículos**

No que diz respeito especificamente a Funções no Ensino Fundamental, a BNCC posiciona esse conteúdo na unidade temática *Álgebra* e determina que o aluno deve entender seu princípio ao mesmo tempo em que utiliza suas representações para resolver problemas (BRASIL, 2017), conforme descrito na 6ª habilidade do 9° ano (código[6] EF09MA06). Porém, o estudo dos requisitos necessários para a correta

[6] Cada habilidade descrita na BNCC possui um código indicando o período da educação básica (Ensino Fundamental ou Ensino Médio), o ano a que se destina, a disciplina em que ela está inserida e o número da habilidade, de maneira sequencial. Por essa razão, o código EF09MA06 (relativa ao conteúdo de Funções) corresponde à 6ª habilidade referente à disciplina de Matemática do 9º Ano do Ensino Fundamental.

compreensão do conceito de função começa antes disso. Observando a definição dessa unidade temática, destaca-se que

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (BRASIL, 2017, p. 270).

É possível notar, no final dessa citação, o reconhecimento da necessidade em saber se expressar adequadamente em linguagem matemática. Para isso, é de grande importância a compreensão de sua gramática, o que é tratado com mais detalhes na Seção 1.3.

Além disso, esse documento também frisa que as ideias de equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade são a base dessa unidade temática (BRASIL, 2017). Esses conceitos permitem representar relações entre variáveis, podendo gerar funções baseadas nessas ideias.

Considerando que as unidades temáticas são tratadas ao longo de todo o Ensino Fundamental, o pensamento algébrico deve ser estimulado desde os Anos Iniciais e sua escrita começa a ser formalizada a partir do 7° ano desse ciclo. Até o início da formalização algébrica, as ideias mais exploradas são as relações de proporcionalidade entre quantidades (por meio de problemas práticos e com uma escrita onde o aluno justifique seu pensamento).

Ainda identificando os assuntos relacionados a Funções, o plano cartesiano é uma ferramenta importante para uma de suas representações e está presente no currículo do Ensino Básico. Na unidade temática *Geometria*, destaca-se esse tópico como o princípio da Geometria Analítica, área que relaciona a Geometria e a Álgebra. Nos Anos Iniciais, os alunos são incentivados a fazer atividades envolvendo coordenadas (dizer a posição de um objeto em um plano com semieixos vertical e horizontal demarcados, por exemplo). Nos Anos Finais, as atividades focam em representações de pontos na reta numérica, evoluindo para sua representação no próprio plano cartesiano, onde também devem ser representadas graficamente, por retas, equações de 1º grau com duas variáveis.

A noção de conjunto também começa desde os Anos Iniciais com conjuntos de objetos, muitas vezes utilizados para que os alunos identifiquem a quantidade de elementos e associem a um número. Durante os Anos Finais, inicia-se a formalização dos conjuntos de natureza numérica, assim como a apresentação de novos números que compõem esses conjuntos. Os números naturais são estudados desde o início do Ensino Fundamental; já os inteiros, os racionais e, por fim, os reais são desenvolvidos a partir do 7º ano, apresentando suas particularidades e características específicas. Em geral, a ideia de conjuntos não é estendida a outros campos da Matemática, como a Geometria, por exemplo.

Esses aspectos gerais fazem parte da BNCC e do currículo da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro, sendo que o segundo expande e detalha as habilidades previstas na primeira. Desse modo, são apresentadas a seguir (Subseção 1.2.1) as habilidades relacionadas a Funções previstas no documento nacional para cada segmento dos Anos Finais (a partir do 7º ano). Posteriormente (Subseção 1.2.2), é feita uma análise das semelhanças e particularidades do documento municipal em relação ao nacional.

1.2.1 Habilidades na BNCC

Devido à Matemática apresentada na escola ter um caráter crescente de aprofundamento e abstração, é possível identificar assuntos correlacionados com Funções desde os Anos Iniciais. Porém, considerando somente os Anos Finais destaca-se, a seguir, algumas habilidades específicas na BNCC que contemplam os conceitos diretamente relacionados a Funções.

No 7º ano, a 13ª, a 14ª e a 15ª habilidades se referem à linguagem algébrica e a sua escrita adequada. Elas incluem a diferenciação entre incógnita e variável, a identificação de sequências recursivas e a escrita para expressar a regularidade de determinadas sequências numéricas (BRASIL, 2017). Ainda nesse ano, a 17ª e a 18ª habilidades tratam de problemas envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais e de equações do 1º grau; isto sugere que o aluno utilize a linguagem matemática adequada para descrever os problemas relativos a esses tópicos, para então resolvê-los (BRASIL, 2017).

Com respeito ao 8º ano, a 7ª habilidade da BNCC possui uma relação próxima com o conceito de função, descrevendo a necessidade de se representar uma equação linear do 1º grau com duas incógnitas no plano cartesiano (BRASIL, 2017). Além disso, a 9ª habilidade indica iniciar o estudo das equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ (isto é, aquelas cujo monômio do 1º grau possui coeficiente nulo); a 11ª habilidade trata novamente de sequências recursivas (e a construção de um algoritmo), e as 12ª e 13ª habilidades abordam novamente a proporcionalidade, inclusive indicando representá-la no plano cartesiano (BRASIL, 2017).

Por fim, no 9º ano, a 4ª habilidade determina o estudo dos conjuntos numéricos e a 6ª habilidade define o que deve ser apresentado para os alunos de Ensino Fundamental sobre Funções, como foi dito anteriormente. Nesta última, está descrito que o aluno precisa "Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis." (BRASIL, 2017). Essa descrição traduz a ideia citada pela BNCC desde o princípio: o aluno deve compreender o objeto a ponto de estar apto a utilizá-lo de forma prática em sua realidade, sendo possível perceber um foco na ideia geral do objeto e seu reconhecimento no dia a dia, por meio de suas representações.

Vale observar que a BNCC não desenvolve amplamente os objetivos dessas habilidades, se limitando a informações muito básicas sobre o que é esperado. É provável que isso se deva às diferentes realidades regionais do país, permitindo assim que seus estados e municípios (assim como as escolas particulares) desenvolvam um currículo mais próximo à vivência de sua população e, por consequência, do aluno.

1.2.2 Habilidades no Currículo da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro

A partir dessas habilidades apresentadas na BNCC, cada escola, bem como cada Secretaria de Educação dos estados e municípios, definem um currículo, ampliando as habilidades a serem desenvolvidas e correlacionando diretamente com os conteúdos abordados em cada ano escolar. Observando o currículo disponibilizado pela Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro em 2020, são destacados a seguir os conteúdos e as habilidades dos Anos Finais que se relacionam diretamente com a BNCC e com o conteúdo de Funções.

No 7° ano, o foco da Álgebra permanece em apresentar ao aluno a linguagem algébrica, além de tratar de sequências e proporções. Por esse motivo, os conteúdos abordados nesse ano, a partir do 2º bimestre, são: pensamento algébrico, expressões, equações, proporcionalidade, razões, proporções e escalas (sendo os três últimos tratados apenas no 4º bimestre). Esses conteúdos estão relacionados com 16 habilidades descritas em Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro (2020). Duas destas merecem destaque por sua importância para os anos seguintes, assim como para o estudo de Funções. São elas: a diferenciação entre incógnita e variável, e a compreensão da linguagem algébrica mediante problemas representados por expressões e equações (que também são previstos na BNCC).

No 8° ano, por sua vez, diferenciam-se os conjuntos numéricos, com ênfase nos conjuntos dos números racionais e dos irracionais. Embora já se utilize as representações fracionária e decimal (finito) de números racionais, nesse período o aluno é apresentado às dízimas periódicas. A partir disso, uma das habilidades visa a identificação de quais números são racionais e quais são irracionais. Essa questão não é destacada na BNCC, porém o trabalho com o conjunto dos números racionais corresponde a 13 habilidades do currículo da prefeitura nesse período.

Ainda nessa fase, amplia-se o estudo das expressões algébricas, iniciado no 7º ano, reforçando o pensamento abstrato e representando, no plano cartesiano, equações de 1° grau com duas variáveis (seguindo a orientação do documento nacional). Os conteúdos de Álgebra a serem abordados nesse período são: variáveis, expressões algébricas, equações de 1º grau com uma incógnita, inequações de 1º grau com uma incógnita e sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas. Nesse momento, o trabalho com as inequações se limita a suas resoluções. Porém, ao aprofundar o estudo de funções no 1º Ano do Ensino Médio, esse assunto é fundamental para a análise de informações e interpretação de gráficos. Além disso, é no estudo dos sistemas de equações de 1º grau que o aluno é levado a representar essas equações em um plano cartesiano. A seção de Álgebra é dividida em 31 habilidades, o que demonstra uma preocupação com conteúdos algébricos.

Por fim, no 9º ano, as funções constituem uma parte específica do currículo. Seus casos particulares (afim, linear e quadrática) são estudados tanto por meio de suas representações algébricas quanto gráficas, assim como seus elementos principais (por exemplo, coeficientes, raízes e vértice, no caso da quadrática) e problemas aplicados. Esse conteúdo faz parte do 3º e do 4º bimestres de Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro (2020).

Nos dois primeiros bimestres, alguns assuntos necessários para esse aprendizado também são estudados. No primeiro bimestre, tem-se a descrição dos números reais, assim como sua ordenação e posicionamento na reta numérica. Além disso, as equações do 2º grau são estudadas no segundo bimestre.

Com relação à distribuição dos conteúdos nas habilidades previstas nesse currículo, têm-se: números reais, divididos em 14 habilidades; equações de 2º grau, descritas em 10; e Funções, tratadas em 21 (estas últimas estão nas Figuras 1 e 2). Na organização desse currículo, as habilidades que são consideradas essenciais para o aluno desenvolver no período proposto são destacadas em negrito. Dentre as relacionadas a Funções, cinco[7] são essenciais, sendo uma sobre a ideia geral (como indica a BNCC), duas sobre plano cartesiano e duas relacionadas a representação gráfica de Funções.

Nota-se que, apesar de função ser um conceito importante e permear diferentes áreas da Matemática, o currículo inclui mais habilidades que a BNCC, porém mantém uma abordagem superficial.

Figura 1 – Trecho 1 do currículo da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro[8]

9º ANO	COMPONENTE CURRICULAR – MATEMÁTICA					
	HABILIDADES	BIMESTRE 1º	2º	3º	4º	OBJETOS DE CONHECIMENTO
ÁLGEBRA	**Identificar as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações (numérica, algébrica e gráfica) e utilizar este conceito para analisar situações que envolvem relações funcionais entre duas variáveis.**			x	x	Noção de função. Gráfico de função. Proporcionalidade. Função do 1º grau. Função do 2º grau.
	Interpretar gráficos não convencionais de funções que representam situações da vida real.			x	x	
	Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.					
	Associar uma equação linear de 1º, com duas variáveis, a uma reta no plano cartesiano.			x		
	Reconhecer a raiz ou zero da função do 1º grau, e associá-lo com o ponto no qual o seu gráfico intercepta o eixo das abcissas.			x		
	Relacionar a solução de sistemas de duas equações do 1º grau com duas variáveis à sua representação geométrica no plano cartesiano.			x		
	Elaborar e resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta ou inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisões em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.			x	x	
	Construir e analisar gráficos de funções, relacionando-os a sua representação algébrica e observar seu comportamento..			x	x	
	Reconhecer se um gráfico no plano cartesiano é de uma função ou não.				x	
	Reconhecer função polinomial do 2º grau ou quadrática.				x	
	Relacionar os zeros ou raízes de uma função quadrática com as raízes de uma equação do 2º grau.				x	
	Relacionar o vértice da parábola que representa uma função quadrática como o ponto no qual o valor da função é máximo ou mínimo, com ou sem o uso de recursos computacionais.				x	
	Determinar o vértice da parábola que representa uma função quadrática como o que tem abcissa igual à média das raízes da função.				x	

Fonte: Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro, 2020, p. 85

[7] As Figuras 1 e 2 ilustram sete habilidades em negrito, porém, duas (a 3ª e a 7ª habilidades descritas no quadro) estão relacionadas ao conteúdo de proporcionalidade e não necessariamente serão tratados com funções.
[8] Observa-se que o currículo utiliza a nomenclatura Função do 1º grau e do 2º grau, que não são adequadas, como discutido nos Capítulos 2 e 3.

Figura 2 – Trecho 2 do currículo da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro

9º ANO	COMPONENTE CURRICULAR – MATEMÁTICA					
	HABILIDADES	BIMESTRE				OBJETOS DE CONHECIMENTO
		1º	2º	3º	4º	
ÁLGEBRA	Reconhecer a simetria existente no gráfico da função do 2º grau.				x	. Função do 2° grau. Localização de pontos no plano cartesiano. Gráfico de função do 1° grau (reta). Raiz da função do 1° grau. Gráfico de função do 2° grau (parábola). Raiz da função do 2° grau.
	Determinar as coordenadas do vértice de uma parábola a partir da função.				x	
	Relacionar o discriminante e os coeficientes com a parábola descrita pela função.				x	
	Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.	x	x	x	x	
	Representar pontos no plano cartesiano e seus quadrantes.	x	x	x	x	
	Construir o gráfico de uma função, a partir de pares de soluções de sua equação ou cujas coordenadas satisfazem à lei de formação da função.				x	
	Esboçar o gráfico de uma função quadrática.				x	
	Reconhecer que a concavidade da parábola representa uma função quadrática muda.				x	
	Determinar as coordenadas do vértice de uma parábola a partir de seu gráfico.				x	
	Interpretar gráficos de funções quadráticas: ponto do vértice e zeros da função.				x	

Fonte: Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro, 2020, p. 86

1.3 **Linguagem Matemática e sua Gramática**

Nas orientações gerais dos currículos apresentadas na Seção 1.1, e nas habilidades descritas na Seção 1.2, percebe-se um enfoque na importância de se expressar adequadamente em linguagem matemática. Para isso, é necessário que tanto o professor quanto o aluno a compreendam.

De acordo com Ribeiro (2004), uma linguagem é algo que se refere a qualquer tipo de representação do pensamento, como sinal, símbolo, gesto ou som. Dessa forma, a expressão escrita do pensamento matemático é feita por meio de sua linguagem própria. Embora esse pensamento seja oralmente expresso em uma língua natural, para a escrita, utiliza-se um alfabeto próprio, constituído por algarismos e símbolos matemáticos, além de letras dos alfabetos latino e grego (CUNHA, VELASCO, 2019). Ainda que essas letras não possuam um som próprio, elas admitem significados matemáticos que dependem do contexto em que estão sendo empregadas. Por exemplo, em Álgebra, letras maiúsculas do alfabeto latino usualmente nomeiam conjuntos ou matrizes. Sendo assim, a palavra A pode significar "um conjunto" ou "uma matriz", dependendo do contexto. Em Geometria, por sua vez, letras maiúsculas latinas geralmente expressam nomes de pontos. Logo, nesse contexto, a mesma palavra "A" significa "um ponto". Os algarismos e símbolos matemáticos são utilizados para representar, respectivamente, constantes conhecidas[9], e relações e operações, por exemplo; as letras minúsculas do alfabeto latino, por sua vez, representam constantes desconhecidas, variáveis, retas, entre outros elementos; e as letras do alfabeto grego são utilizadas para representar determinadas constantes irracionais (como π) e alguns elementos geométricos (como planos, por exemplo).

Em seus estudos, tanto Cunha e Velasco (2019) quanto Farias e Costa (2020) consideram a linguagem matemática como uma linguagem propriamente dita, e que por essa razão, necessita de regras para estabelecer a comunicação. Cunha e Velasco (2019) reforçam que essas regras formam a gramática dessa linguagem e os signos utilizados são as letras de seu alfabeto. Portanto, entende-se que a linguagem matemática também possui um alfabeto próprio e uma gramática, a partir dos quais entende-se que a expressão $2 + 3 = 5$ é compreensível, ao passo que, por exemplo, $23 += 5$ não possui significado.

Desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o aluno já começa a lidar com a linguagem matemática. Esse primeiro contato, muitas vezes, se limita a algarismos e símbolos matemáticos básicos (como operadores aritméticos e relacionais, por exemplo). Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, orientado pelo professor especialista, o aluno passa a conhecer outros elementos da linguagem matemática, como os utilizados para expressar as variáveis e os objetos geométricos. Esses elementos são representados por letras do nosso alfabeto (latino), já sendo, portanto, conhecidas pelos alunos devido a seu uso no dia a dia, na língua portuguesa (e que estão, nesse contexto, associadas a sons, ao passo que, em linguagem matemática, estão associadas a conceitos). Esse é o ponto onde a falta de compreensão da linguagem matemática interfere no aprendizado do aluno. Assim sendo, novas regras devem ser apresentadas, juntamente com esses elementos, para que o aluno compreenda como utilizá-las, desde o início.

Reforçando os documentos destacados nas Seções 1.1 e 1.2, Farias e Costa

[9] Alguns números irracionais são representados por letras, tais como $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{e}$, etc.

(2020, p.158) ressaltam a aprendizagem como "a capacidade de interpretarmos, entendermos, enfrentarmos e buscarmos soluções para situações novas a partir das ferramentas cognitivas que construímos com nossas experiências". Essa ideia evidencia a necessidade de uma alfabetização em linguagem matemática adequada, sempre adaptando ao nível de maturidade do aluno.

Diferentemente da alfabetização em língua materna, onde o aluno aprende todo o alfabeto e as regras de construção de palavras nos Anos Iniciais, uma alfabetização em linguagem matemática possui estágios de acordo com o nível de escolaridade do aluno. Essa ideia se traduz em apresentar apenas as letras do alfabeto da linguagem matemática que se relacionam com um novo conceito e explicar as regras para isso, tomando cuidado com o aprofundamento da escrita. Por exemplo, ao apresentar a ideia de retas paralelas, não é necessário escrever toda a sentença que define esse conceito (a saber $r, s \mid (\exists\, \alpha \mid r, s \subset \alpha), r \cap s = \emptyset$, ou seja, duas retas coplanares que não se intersectam), mas pode-se apresentar o signo $//$, que indica paralelismo, escrevendo simplesmente $r\ //s$.

Ao estudar a gramática da linguagem matemática, Cunha e Velasco (2019) identificaram regras específicas em relação às diferentes áreas da Matemática. Por exemplo, em Álgebra, conforme dito anteriormente, um conjunto é usualmente representado por uma letra maiúscula do alfabeto latino; em Geometria, por sua vez, uma reta (que é um conjunto de pontos) é representada por uma letra minúscula latina. As diferenças encontradas levaram os autores a identificar diferentes dialetos da linguagem matemática de acordo com a área a que se referem. Dessa forma, os autores identificaram ainda os dialetos *Aritmetiquês*, *Algebrês*, *Logiquês* e *Geometriquês* (relativos, como os próprios nomes indicam, a Aritmética, Álgebra, Lógica e Geometria, respectivamente).

Ao estudar o conceito de função no Ensino Básico, usualmente foca-se em dois tipos de representações (a algébrica e a gráfica), que exigem do aluno determinados conhecimentos de Álgebra e de Geometria.

Para lidar com a expressão algébrica de uma função, o aluno deve compreender como as variáveis são representadas, o significado de expressões que as relacionam e o conceito de equações. Para uma representação mais completa, também é necessário que ele saiba representar um conjunto e indicar o domínio e o contradomínio da função. Essas necessidades implicam em, desde o 7º ano, aprender as letras do alfabeto da linguagem matemática presentes no estudo de expressões algébricas, compreendendo seu significado, e não tratando como um objeto “emprestado” da língua portuguesa.

O devido conhecimento de noções básicas de Geometria Analítica (que, conforme dito anteriormente, consiste em relacionar Geometria a Álgebra) auxilia na representação gráfica de funções. Nesse sentido, o aluno deve compreender que retas e planos são conjuntos constituídos por pontos, e se utilizar de conceitos algébricos para, primeiro, representar os conjuntos numéricos em uma reta (denominada reta numérica) e, em seguida, construir o plano cartesiano, possibilitando a expressão gráfica desejada.

Para que exista uma melhor apropriação de um signo, é importante que seu significado esteja bem claro para o aluno, como defendem Ponte, Branco e Matos:

> Ao longo do ensino básico, as atividades realizadas pelos alunos devem contribuir para que eles desenvolvam o sentido de símbolo. Continuando a valorizar o simbolismo, mas promovendo a sua apropriação em contextos de trabalhos significativos (...) (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 76).

Baseando-se, então, nos estudos de gramática da linguagem matemática e nas diretrizes elencadas na BNCC, a apresentação das regras de escrita nessa linguagem passa a ser fundamental para uma escrita correta e está de acordo com o letramento matemático descrito para o período. Para entender o significado dos objetos matemáticos apresentados, é importante que o aluno tenha contato com a forma correta de se expressar.

Uma ferramenta importante para tratar o significado e a escrita em linguagem matemática é o processo de modelagem matemática. Isso acontece, pois ele tem o objetivo de ligar os conceitos matemáticos com a realidade, como dizem Biembengut e Hein (2000). Se desconectada da realidade, a Matemática se torna, para grande parte dos alunos, apenas um emaranhado de “letras”, “fórmulas” e “procedimentos” sem sentido algum, aumentando ainda mais o desinteresse e a apatia por parte deles.

Com o objetivo de uma atividade ter mais sentido para o aluno e possibilitar uma maior interação, é necessário conhecer as etapas do processo de modelagem; são elas: promover uma pesquisa a respeito do tema a ser estudado, identificar os conteúdos matemáticos aos quais esse tema está relacionado, escrever adequadamente em linguagem matemática a expressão que descreve o problema, analisar os dados obtidos a partir de sua resolução e validar o modelo. Todas essas etapas implicam uma maior participação do aluno e um trabalho de mediação do professor, o que possibilita uma correlação dos conteúdos dados em aula com a realidade em que o aluno vive. Essa possibilidade só se confirma se a situação-problema envolver algo palpável para ele. Com isso, qualquer atividade com esse intuito deve passar por uma avaliação (por parte do professor) sobre a realidade desses estudantes. Fernandes (2012, p.23) destaca:

> Percebe-se que o ato de ensinar pode basear-se no contexto sociocultural dos indivíduos envolvidos no processo de aprendizagem, proporcionando-lhes o desenvolvimento e estruturação do pensamento lógico matemático, da criatividade, do compreender e apreender os conceitos e conhecimentos. E, assim solidificar os princípios matemáticos, com o intuito de intervir em sua realidade social, histórica e cultural quando necessário.

Deste modo, faz parte do papel do professor utilizar em sala de aula exemplos e atividades que sejam condizentes à realidade do aluno. Considerando que muitos materiais didáticos são utilizados em âmbito nacional, a regionalização das atividades depende diretamente do contato do professor com a turma e a observação das peculiaridades de cada turma.

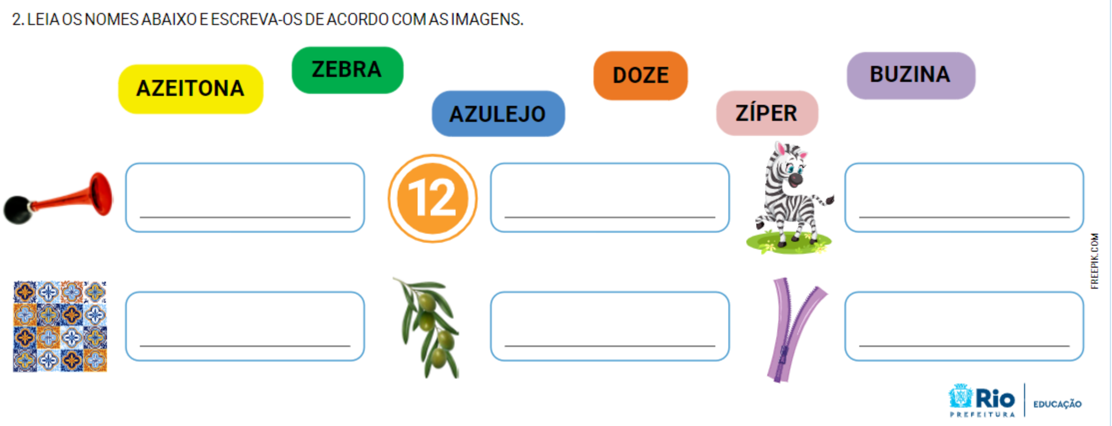
Além do distanciamento de alguns problemas apresentados, os alunos costumam ter dificuldades em interpretá-los e identificar as ferramentas matemáticas mais adequadas para resolvê-los. É possível observar dois pontos onde essas dificuldades se originam. O primeiro ocorre quando da interpretação do texto apresentado, que depende não só dos significados das palavras da língua portuguesa como também da compreensão geral do texto, permitindo sua expressão em linguagem matemática. O segundo ocorre justamente na expressão do problema nessa linguagem. Esses problemas podem ser minimizados se o aluno tiver mais segurança e uma maior apropriação do vocabulário da linguagem matemática, referente a seu nível escolar. Portanto, a apresentação de tal vocabulário, alinhado ao real significado dos conceitos matemáticos, é fundamental para uma maior aprendizagem do aluno e um maior aproveitamento, no sentido de obter as competências descritas na BNCC.

2 CONCEITOS MATEMÁTICOS RELACIONADOS A FUNÇÕES

Uma das formas de o aluno conhecer a pronúncia de uma palavra, ao iniciar os estudos de leitura da língua natural, é por intermédio de seu significado. Na chamada *rota lexical* de pronúncia, o aluno tem “um reconhecimento visual do item escrito, e o leitor tem acesso ao significado daquilo que está sendo lido antes de emitir a pronúncia propriamente dita.” (Capovilla et al., 2004). Isso pode ser observado desde o primeiro estágio de aquisição de leitura e escrita, conhecido como *estágio logográfico*[10], onde a criança começa a “ler” identificando a palavra escrita como uma imagem que representa um determinado significado.

A partir desse raciocínio, é possível observar uma associação das palavras escritas com imagens que trazem a representação do objeto em algumas atividades propostas para os Anos Iniciais nos materiais didáticos oferecidos pela Prefeitura do Rio de Janeiro, tanto nos de língua portuguesa quanto nos de língua estrangeira (Figuras 3 e 4). Nessas atividades, o aluno é levado a associar a palavra a sua imagem.

Figura 3 – Atividade do 1º ano do Ensino Fundamental de língua portuguesa



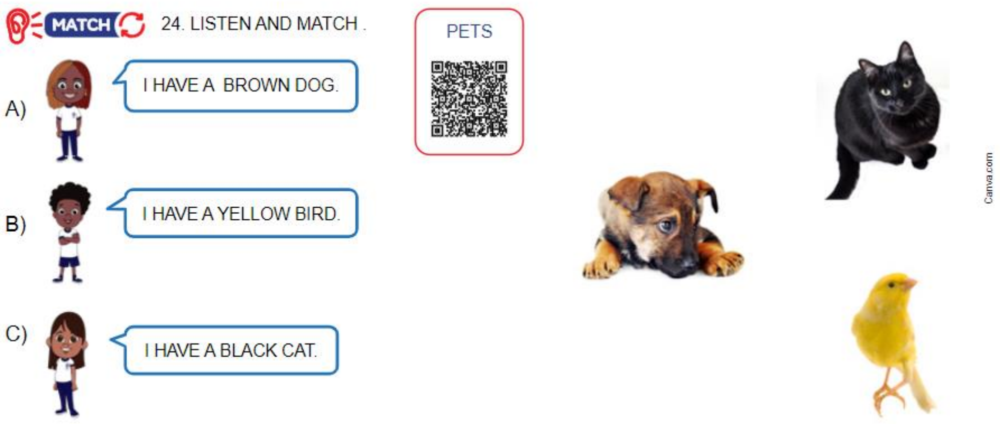
Fonte: Secretaria Municipal de Educação, 2022, p. 17

Essas vivências originam a seguinte reflexão: conhecer o significado de uma palavra é fundamental para a compreensão da língua, pois dessa forma é possível comunicar o que se está pensando de maneira adequada. Não é diferente com a linguagem matemática: deve-se correlacionar as palavras escritas nessa linguagem com seu(s) significado(s). Por exemplo, a expressão escrita em linguagem

[10] Segundo Capovilla et al. (2004), nesse estágio, “a criança trata o texto como se fosse um desenho, não atentando ao código de correspondências entre determinadas letras e combinações de letras (isto é, grafemas) e seus respectivos sons da fala (isto é, fonemas).”.

matemática $2x$, pode significar "o dobro de um número" ou "o produto de dois por um número", dentre outros significados.

Figura 4 – Atividade do 1º ano do Ensino Fundamental de língua inglesa



Fonte: Secretaria Municipal de Educação, 2022, p. 14

Porém, enquanto na língua materna tem-se o contato com seu vocabulário desde o nascimento e aprende-se seu alfabeto desde pequeno, na linguagem matemática ambos são apresentados conforme o aluno avança nos anos escolares, e certos vocábulos (por exemplo, x^2) se limitam ao ambiente escolar. Isso porque muitos conceitos matemáticos requerem certo grau de abstração para serem desenvolvidos, exigindo assim, uma maior maturidade do aluno.

Em relação ao estudo de Funções, são apresentados, ainda nos Anos Finais do Ensino Fundamental e de forma superficial, apenas uma introdução ao assunto, bem como algumas de suas características. Por essa razão, foi identificada uma tendência por parte dos materiais, em simplificar tanto os conceitos quanto suas respectivas escritas, o que, na maioria das vezes, causa confusão tanto na compreensão inicial quanto no aprofundamento nos anos futuros.

Sem compreender os significados de modo adequado, e realizando cálculos de maneira mecânica, o aluno tende a distanciar a Matemática de seu cotidiano e a encontrar mais dificuldades para entender o porquê de aprender essa disciplina. E com o gradual aprofundamento dos conceitos, os assuntos das séries futuras fazem menos sentido ainda para o aluno, causando um impacto negativo também em outras disciplinas que envolvem cálculos matemáticos, como a Física e a Química, por exemplo.

Assim, inicia-se este capítulo com as definições matemáticas de Relações, Funções, Expressões e Equações, baseadas em Domingues e Iezzi (2018) e Lima et al (2006), buscando deixar mais claros ao leitor certos aspectos importantes dessas definições (Seção 2.1). Em seguida, analisam-se como tais conceitos são apresentados nos livros didáticos e no material didático da Prefeitura do Rio de Janeiro, disponíveis em uma escola municipal (Seção 2.2).

2.1 **Principais Conceitos**

Um dos principais conceitos matemáticos relacionados a Funções, que os alunos estudam ainda no Ensino Fundamental, é o de *relação*. Em língua portuguesa, essa palavra tem, como um de seus significados, uma “ligação que existe entre pessoas, coisas ou fatos” (RELAÇÃO, 2022); isso implica dizer que é necessário informar quais objetos estão se relacionando. Esse não é o único significado da palavra relação, mas é o que mais se aproxima de seu sentido matemático; nesse caso, os objetos que se relacionam são elementos de conjuntos. No entanto, existem algumas particularidades a mais que caracterizam uma relação, descritas a seguir.

Dados dois conjuntos não vazios quaisquer, é possível formar pares ordenados tomando os elementos de ambos, na ordem em que os conjuntos são descritos. O modo mais amplo de formar esses pares é por meio do produto cartesiano. Define-se o *produto cartesiano* de dois conjuntos, como o conjunto de todos os pares ordenados de elementos de ambos. Em outros termos, o produto cartesiano de A por B, nomeado por $A \times B$, é definido por:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

Por exemplo, o produto cartesiano do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ pelo conjunto $B = \{4, 5, 6\}$ é dado por

$$A \times B = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}.$$

Embora os subconjuntos dos números reais sejam os mais utilizados em produtos cartesianos, os conjuntos A e B não precisam ser necessariamente numéricos. Um exemplo de conjuntos não numéricos são o conjunto $M = \{\text{Ana, Bianca, Carla}\}$ de mães e o conjunto $C = \{\text{Daniel, Enrico, Felipe}\}$ de crianças, onde Ana é mãe de Enrico, Bianca é mãe de Felipe e Carla é mãe de Daniel. O produto cartesiano de um conjunto por outro é dado por

$$M \times C = \{(\text{Ana, Daniel}),\ (\text{Ana, Enrico}),\ (\text{Ana, Felipe}),\ (\text{Bianca, Daniel}),$$

(Bianca, Enrico), (Bianca, Felipe), (Carla, Daniel), (Carla, Enrico), (Carla, Felipe)}.

Por sua vez, uma *relação*[11] entre os elementos de dois conjuntos é qualquer subconjunto do produto cartesiano de um pelo outro; em outros termos, R é uma relação entre os elementos de A e B quando $R \subseteq A \times B$. Além disso, diz-se que dois elementos estão relacionados (segundo uma certa relação) quando o par ordenado composto por eles for um elemento de tal relação; isto é, dois elementos $a \in A$ e $b \in B$ estão relacionados (segundo uma relação R) quando $(a, b) \in R$. Nesse caso, também se escreve $a\ R\ b$. Usualmente, o primeiro conjunto de uma relação também é conhecido como o *conjunto de partida*, e o segundo como o *conjunto de chegada*.

Voltando aos conjuntos A e B, dois exemplos de relações entre eles são $R_1 = \{(1,4), (1,6), (3,6)\}$ e $R_2 = \{(2,4), (3,6)\}$. Já nos conjuntos de mães e filhos, têm-se como exemplos as relações $R_3 = \{$(Ana, Daniel), (Bianca, Enrico), (Carla, Felipe)$\}$ e $R_4 = \{$(Ana, Enrico), (Bianca, Felipe), (Carla, Daniel)$\}$.

Há relações para as quais os pares ordenados que as compõem constituem o conjunto solução de determinadas sentenças abertas[12]. Esse é o tipo de relação mais estudado em Matemática, pois seu caráter generalizado permite analisar as propriedades que a sentença aberta origina. Por exemplo, as relações R_2 e R_4 supracitadas são exemplos desse tipo de relação, pois também podem ser descritas como $R_2 = \{(a, b) \in A \times B \mid b = 2a\}$ (que relaciona um número em A a seu dobro em B, se existir) e $R_4 = \{(x, y) \in M \times C | x \text{ é mãe de } y\}$ (que relaciona cada mãe em M a seu filho em C.

Outras formas de representar uma relação, principalmente de subconjuntos de números reais, são por meio de sua representação gráfica no plano cartesiano e de um esquema (também conhecido como diagrama) de flechas. A representação gráfica de uma relação consiste em expressar os pares ordenados constituintes dessa relação em um plano cartesiano (isto é, em um sistema cartesiano de eixos perpendiculares em um plano). Nesse caso, os elementos do primeiro conjunto da relação são representados em um dos eixos (denominado eixo das abscissas) ao passo que os elementos do segundo conjunto são representados no outro eixo (dito

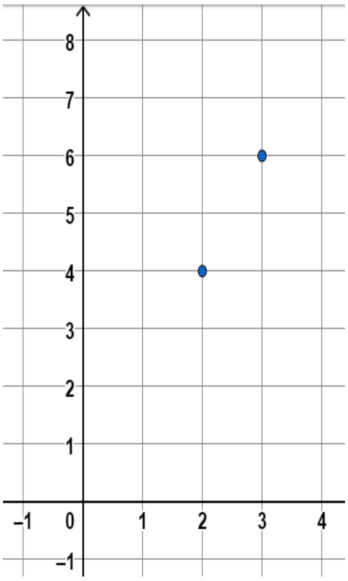
---

[11] Este estudo é limitado às relações binárias, por serem as tratadas ao longo dos Ensinos Fundamental e Médio.

[12] De acordo com Alencar Filho (1986), uma *sentença aberta* é uma expressão $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ que se torna uma afirmação (falsa ou verdadeira) quando se substitui a variável $\boldsymbol{x}$ por qualquer um dos elementos de um conjunto $\boldsymbol{A}$ dado. Dessa forma, chama-se $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ de *sentença aberta em* $\boldsymbol{A}$.

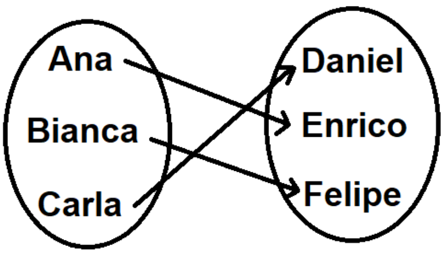
eixo das ordenadas). A Figura 5 ilustra a representação gráfica da relação R_2, definida anteriormente. Por sua vez, o esquema de flechas consiste em escrever, separadamente, os elementos de cada um dos conjuntos dentro de linhas fechadas sem interseção (denominados *diagramas de Venn*), e ligar, utilizando flechas, cada elemento do primeiro conjunto com seu correspondente no segundo, se existir. A Figura 6 ilustra o esquema de flechas da relação R_4. Esse esquema é mais utilizado para conjuntos não numéricos e para conjuntos numéricos finitos, mostrando a relação entre eles.

Figura 5 – Representação gráfica de R_2



Fonte: A autora, 2023

Figura 6 – Esquema de flechas de R_4



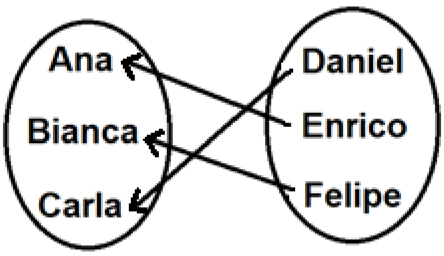
Fonte: A autora, 2023

É possível também fazer a análise da relação inversa à proposta. Por exemplo, nos conjuntos de mães e filhos, pode-se relacioná-los com a afirmativa “é filho de”; essa é a inversa da relação R_4. A *relação inversa* de uma determinada relação é aquela em que são tomados os pares ordenados em ordem inversa da relação original. Em outros termos, a relação inversa da relação R de A em B é determinada pelos pares (x, y), com $x \in B$ e $y \in A$, onde $(y, x) \in R$. Nomeia-se a inversa de uma relação por meio do acréscimo do sufixo superior "-1" ao nome de tal relação; isto é:

$$R^{-1} = \{\, (x, y) \in B \times A \mid (y, x) \in R \,\}.$$

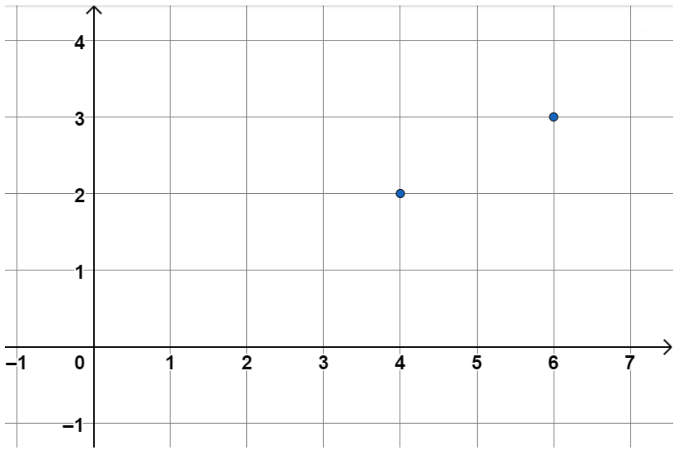
Retornando aos conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,5,6\}$ e à relação $R_1 = \{(1,4), (1,6), (3,6)\}$ vista anteriormente, tem-se que sua inversa é ${R_1}^{-1} = \{(4,1), (6,1), (6,3)\}$. Por inverter a ordem dos pares ordenados, a representação gráfica e o esquema de flechas da relação inversa sofrem alterações se comparadas com a original. No caso, do esquema de flechas costuma-se alterar o sentido da flecha, simplesmente, mantendo os conjuntos na posição original. A Figura 7 apresenta a relação R_4^{-1}, inversa da relação R_4. Entretanto, na representação gráfica, a mudança é mais significativa, pois os conjuntos passam a ser representados em eixos diferentes, o que modifica a posição dos pontos. A Figura 8 ilustra a relação R_2^{-1}, inversa da relação R_2.

Figura 7 – Esquema de flechas de R_4^{-1}



Fonte: A autora, 2023

Figura 8 – Representação gráfica de R_2^{-1}



Fonte: A autora, 2023

Por sua vez, *funções* são casos particulares de relação, onde cada elemento do primeiro conjunto está relacionado a apenas um elemento do segundo conjunto.

Em outros termos, uma relação R de A em B é dita uma *função* quando

$$\forall a \in A, \exists! \, b \in B \ \mid \ (a, b) \in R.$$

Nesse caso, a relação R é usualmente renomeada por f (ou g, ou h, por exemplo; ou seja, letras minúsculas latinas, geralmente a partir de f). No entanto, em vez de se escrever $f \subseteq A \times B$, se escreve $f : A \to B$. Além disso, substitui-se $a \, f \, b$ por $f(a) = b$. Diz-se também que b é a *imagem* de a por f. A escrita $f(a)$, ou genericamente $f(x)$, chama-se *notação funcional*, e deve ser utilizada mesmo que se mude o nome da função para se adaptar a um problema. Assim, por exemplo, em um exercício onde o perímetro de um quadrado está em termos da medida x de seu lado, pode-se nomear a função[13] como P, desde que se use a notação funcional $P(x)$ ao escrever as informações.

É muito frequente que as funções possuam uma sentença aberta $p(x)$ que indique a imagem de um elemento por esta função, em termos desse elemento; no caso de funções relacionando subconjuntos dos números reais, essa sentença geralmente é descrita por uma expressão algébrica. Tal expressão é denominada *lei de formação da função*. (ou *expressão algébrica da função*). Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$ indica a imagem (a saber, $f(x)$) de um elemento x qualquer no conjunto dos números reais em função do próprio elemento x. Nesse caso, a expressão $f(x) = 2x + 1$ é a lei de formação dessa função. Uma escrita um pouco mais avançada de uma função (e não muito utilizada no Ensino Fundamental) é:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, descrita pela lei de formação $f(x) = 2x + 1$, também pode ser expressa por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}. \\ x &\mapsto 2x + 1. \end{aligned}$$

Além disso, na função, o primeiro conjunto é denominado o *domínio* da função e o segundo, o seu *contradomínio*. O subconjunto do contradomínio constituído pelas imagens dos elementos do domínio é chamado de *imagem* da função. Esse subconjunto é descrito, em linguagem matemática, por

[13] Ao tratar de perímetro, costuma-se utilizar a letra maiúscula, pois o $\boldsymbol{p}$ minúsculo em Geometria, no assunto de polígonos, tem o significado de semiperímetro. Ainda assim, o ideal é sempre que possível utilizar a notação funcional corretamente.

$$Im(f) = \{y \in B \mid \exists\, x \in A\, , f(x) = y\}$$

ou, equivalentemente, $Im(f) = \{f(a) \in B \mid a \in A\}$. O nome $Im(f)$ pode igualmente ser representado por $f(A)$.

Por se tratar de um caso particular de relação, uma função também pode ser expressa tanto por um esquema de flechas quanto por uma representação gráfica, sendo que esta última consiste justamente na representação do gráfico da função no plano cartesiano. Ressalta-se aqui que o *gráfico*[14] de uma função consiste no conjunto dos pares ordenados formados pelos elementos do domínio e suas respectivas imagens pela função; em outros termos, o gráfico de uma função $f : A \to B$ é o conjunto $Gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$. Como dito anteriormente, o esquema de flechas é mais utilizado para representar conjuntos não numéricos ou conjuntos numéricos finitos, ao passo que o gráfico costuma ter uma representação em um sistema de eixos coordenados. No caso de *funções reais* (cujos domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais e, portanto, com uma variável), essa representação gráfica é feita no plano cartesiano.

Outro conceito importante, e bastante estudado no Ensino Fundamental, é o de *raiz de uma função*, que consiste em um valor do domínio cuja imagem pela função dada é igual a zero. Determinar esse valor pode ser significativo para uma análise da representação gráfica ou tratar de uma informação relevante em um problema. Vale destacar que esse valor corresponde à primeira coordenada do ponto de interseção da representação gráfica de f com o eixo das abscissas (isto é, o ponto $\big(x, f(x)\big)$, com $f(x) = 0$).

As funções (por serem casos particulares de relações) também possuem uma relação inversa, embora nem sempre essa relação seja também uma função. Caso o seja, a função é chamada de *invertível* e sua inversa é nomeada (assim como na relação) acrescentando o sufixo superior “-1” ao nome da função; ou seja, se uma dada função $f : A \to B$ é invertível, com $f(x) = y$, então sua inversa, nomeada por f^{-1}, é tal que $f^{-1}(y) = x$. É possível demonstrar que, para ser invertível, uma função precisa ser *bijetiva*, ou seja, necessita ter injetividade e sobrejetividade.

Uma função é dita *injetiva* quando elementos distintos de seu domínio possuem imagens distintas (ou, equivalentemente, quando dois elementos que possuem a

[14] Apesar de essa ser a definição mais adequada de gráfico de uma função, esse conceito não costuma ser tratado no Ensino Básico, de maneira geral. Na maioria das vezes, apresenta-se a representação gráfica como o gráfico.

mesma imagem são necessariamente iguais). Em outros termos, uma função $f : A \to B$ é injetiva quando

$$\forall\ (a_1, a_2\ \mid\ a_1 \neq a_2),\ f(a_1) \neq f(a_2)\ \text{(ou, } \forall\ (a_1, a_2\ \mid\ f(a_1) = f(a_2)), a_1 = a_2\text{)}.$$

Por sua vez, uma função é *sobrejetiva* quando todo elemento de seu contradomínio é a imagem de algum elemento do domínio. Em outros termos, uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva quando

$$\forall\ b \in B, \exists\ a \in A\ \mid\ f(a) = b.$$

Por fim, uma função é dita *bijetiva* quando ela for injetiva e sobrejetiva. Isto equivale a dizer que cada elemento do contradomínio é imagem de apenas um elemento do domínio. Em outros termos, uma função $f : A \to B$ é bijetiva quando

$$\forall b \in B, \exists!\ a \in A \mid f(a) = b.$$

A bijetividade se torna necessária para a função ser invertível, pois se em determinada função houver mais de um elemento do domínio com a mesma imagem ou se nem todos os elementos do contradomínio forem a imagem de algum elemento do domínio, a relação inversa não é uma função. O conceito de função inversa (assim como os de injetividade e de sobrejetividade) não é usualmente tratado no Ensino Fundamental, pois é considerado um pouco mais profundo, se afastando assim do objetivo principal do último ano do Ensino Fundamental: apresentar o conceito de função.

Além das funções reais, tratadas com maior frequência nesse período, existem funções cujo domínio é o resultado de um produto cartesiano; isto é, uma função $f : A \times B \to C$ que associa a cada par ordenado $(a, b) \in A \times B$ um elemento $c \in C$. Alguns exemplos desse tipo de função são as operações de adição de números reais e de potenciação de números reais com expoente natural positivo. A primeira é uma função que associa cada par de números reais a sua soma; ou seja, é uma função $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $s(a, b) = a + b$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$. A segunda, por sua vez, é uma função que associa a cada número real e a cada número natural, a potência do primeiro referente ao segundo; de outro modo, é uma função $p : \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida por $p(a, n) = a^n$, para todos $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Em ambos os casos, a sentença que define a função é a operação realizada com os elementos do par ordenado.

Tratando de relações e de funções nos Ensinos Fundamental e Médio, em geral, uma sentença aberta que relaciona elementos de dois conjuntos é representada por meio de uma expressão algébrica (como dito anteriormente). De acordo com o dicionário online Michaelis, o significado gramatical de *expressão* é “qualquer unidade lexical (palavra, frase, dito ou sentença)” (EXPRESSÃO, 2022). Assim, fazendo um paralelo com a língua portuguesa, entende-se que expressões algébricas são unidades lexicais relativas à Álgebra. Mais formalmente, expressões algébricas são “expressões formadas a partir de elementos de um corpo (conjunto dos números reais, racionais, complexos, entre outros) e de uma ou mais variáveis usando as operações algébricas de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação.” (KRANTZ, 2000 apud MIRANDA, 2019). Isso implica que essas expressões podem conter signos que indicam operações matemáticas e signos que representam valores conhecidos ou valores desconhecidos, sendo obrigatória a presença de, pelo menos, um valor desconhecido. Portanto, x e $4x - 7y$ são exemplos de expressões algébricas, porém 18 e $5 - 9$ não o são, pois, a primeira representa um número e a segunda, uma expressão aritmética (ou seja, unidades lexicais relativas à Aritmética, formadas por valores conhecidos e operações). Dentre as expressões algébricas mais usuais nesse período, destacam-se as polinomiais, cuja compreensão é fundamental para o devido entendimento das funções afins e quadráticas. Os valores desconhecidos nas expressões algébricas podem representar *variáveis* ou *incógnitas* (dependendo de seu significado em uma expressão e em determinado contexto) e são representados por letras minúsculas do alfabeto latino. Chamam-se *variáveis* os valores desconhecidos nas expressões, que sofrem variações (por isso, o nome); já as *incógnitas* são valores, em princípio desconhecidos (daí seu nome), que tornam uma sentença aberta verdadeira e cujo(s) valor(es) se deseja(m) determinar.

Expressões algébricas que contêm uma igualdade são denominadas *equações*. O Dicionário de Termos Matemáticos define equação como uma “declaração que afirma que duas expressões matemáticas têm o mesmo valor” (tradução livre; DOWNING, 2009). Com essa definição, consideram-se tanto as equações aritméticas (contendo apenas valores conhecidos) como as algébricas (contendo pelo menos um valor desconhecido). O objetivo de uma equação aritmética é determinar se ela é uma proposição[15] verdadeira ou falsa (isto é, se exprimem ou não uma verdade matemática; por exemplo, $45 \div 3 = 7$ é falsa). Por outro lado, o objetivo principal das equações algébricas no Ensino Fundamental é determinar os valores desconhecidos que figuram nelas (as incógnitas). Neste texto, as equações

[15] Uma proposição é uma afirmação que pode ser verdadeira ou falsa.

algébricas são denominadas simplesmente por equações, em concordância com Zambuzzi (1965):

> A toda sentença aberta, que encerra a relação de igualdade e que se torna verdadeira para determinados valores das variáveis, dá-se o nome de equação. Para que as sentenças se tornem verdadeiras é necessário que se dê às variáveis valores que pertençam a um determinado conjunto universo. (ZAMBUZZI, 1965 apud MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 47)

Têm-se como exemplos de equações:

a) $x^2 + 8x = 9$, equação do 2º grau com uma incógnita;

b) $3(x + 4) = 5(x - 7)$, comparação entre duas expressões algébricas, com uma incógnita;

c) $y = 2x + 9$, equação do 1º grau com duas incógnitas;

d) $f(x) = 3x + 5$, lei de formação de uma função com uma variável.

No último exemplo, o valor desconhecido é chamado de *variável* porque a lei de formação de uma função determina o valor da imagem de cada um dos possíveis valores do domínio (a imagem de um elemento por f varia de acordo com o valor da variável). Essa distinção entre variáveis e incógnitas deve ser apresentada constantemente aos alunos, não só por fazer parte dos currículos básicos, mas também para que os conceitos matemáticos fiquem claros. Oliveira e Laudares (2015) defendem a necessidade de o aluno fazer uma conexão entre as palavras *variável* e *incógnita*, da língua portuguesa, e seu respectivo significado matemático. Deste modo, variável se refere a “algo que está sujeito a variação” (VARIÁVEL, 2022) e incógnita se refere a “aquilo que é desconhecido e que se deseja descobrir” (INCÓGNITA, 2022).

Existem ainda situações em que um valor desconhecido representa uma constante desconhecida, isto é, um valor pré-determinado que, por alguma razão, não foi dito no referido contexto. Por exemplo, a sentença “Hoje, Marcos possui o triplo da idade de seu filho, Alan” pode ser descrita[16], em linguagem matemática, como $m = 3a$, onde m e a representam, respectivamente, as idades que Marcos e Alan possuem hoje. Nota-se que ambas as idades são constantes (pois são dois valores fixos, indicando suas idades na **data de hoje**), e desconhecidas (pois não se sabe exatamente quais são seus valores). As constantes desconhecidas também são representadas por letras do alfabeto latino (em geral, as iniciais a, b, c, etc.) e podem

---

[16] Na escrita da expressão $m = 3a$, optou-se por utilizar nomes mnemônicos para as constantes desconhecidas que representam as idades de **M**arcos e **A**lan.

ser substituídas por valores conhecidos, associados ao contexto do problema. Por exemplo, ao apresentar propriedades aritméticas, utilizam-se usualmente, nos casos gerais, as letras a, b e c, como, por exemplo, para descrever a propriedade distributiva, $a(b+c)=ab+ac$. Como tal propriedade é válida independentemente das constantes a, b e c escolhidas, sempre que considerar necessário, pode-se substituí-las por quaisquer outros valores (conhecidos ou desconhecidos; como em $3(x+2)=\ 3x+3\times 2$).

Cada valor conhecido de uma incógnita, em um conjunto de busca, presente em uma equação e que a torna uma proposição verdadeira, é denominado uma *solução* dessa equação. Além disso, o conjunto de todas as suas soluções é dito seu *conjunto solução*. Por exemplo, na equação $2x^2-11x=-12$, as soluções são $x=\frac{3}{2}$ e $x=4$ (e seu conjunto solução consiste em $S=\left\{\frac{3}{2},4\right\}$), se o conjunto de busca for o dos números reais, por exemplo; porém, ao considerar o conjunto dos números naturais como o conjunto de busca, a solução é somente $x=4$ (e seu conjunto solução $S=\{4\}$). Por sua vez, se considerado o conjunto dos números reais negativos, a equação não possui solução (sendo seu conjunto solução, portanto, $S=\emptyset$). Em geral, no Ensino Fundamental, buscam-se as soluções reais de uma equação e, na maioria das vezes, essa informação é omitida.

As equações que apresentam mais de uma incógnita podem possuir infinitas soluções reais, pois infinitos pares (ou ternos ou grupos de quatro ou mais valores) podem tornar a afirmativa verdadeira. Por exemplo, na equação $y-2x=9$, os pares $\left(-\frac{9}{2},0\right)$ e $(1,11)$ são duas de suas possíveis soluções. Esse tipo de igualdade tem um caráter condicional, quando se deseja determinar os pares (x,y) que satisfazem essa condição, ou relacional, quando considera determinar o valor de uma das variáveis em termos da outra. (MIRANDA, 2019)

Dentre essas igualdades relacionais, destacam-se duas que surgem no contexto do Ensino Fundamental e que podem ser associadas a funções: as fórmulas e as identidades. As *fórmulas* indicam o procedimento a ser desenvolvido para se chegar a um determinado resultado; é o caso de $d=\frac{n(n-3)}{2}$, que representa a quantidade de diagonais de um polígono convexo qualquer (relacionado a seu número de lados). Por sua vez, as *identidades* indicam sentenças verdadeiras para quaisquer valores que substituir as constantes, representando uma propriedade universal em determinado ambiente matemático; é o caso de $a^2 = b^2 + c^2$, considerando b e c as medidas dos catetos de um triângulo retângulo e a a medida de sua hipotenusa, pois é uma relação válida para *qualquer* triângulo retângulo.

É interessante observar que, por serem sentenças abertas, todas essas igualdades podem induzir funções; porém, elas não são de fato funções. A primeira é uma expressão de cálculo do número de diagonais de um polígono de n lados; a segunda é uma propriedade de triângulos retângulos. Para se descrever uma função cuja lei de formação seja uma dessas igualdades, é necessário explicitar os conjuntos relacionados e, em alguns casos, é preciso escrever essas equações como uma equação equivalente. Por exemplo, considerando novamente a expressão $a^2 = b^2 + c^2$ (no contexto do parágrafo anterior), obtém-se $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ como uma equação equivalente a ela (devido ao contexto, a, b e c são positivos). Essa expressão, por sua vez, induz uma lei de formação de uma função, a saber, $a(b, c) = \sqrt{b^2 + c^2}$, que expressa a hipotenusa em termos dos catetos). Principalmente quando se tratam de fórmulas, o uso da palavra "função", da língua portuguesa, ao descrever a relação entre essas variáveis (o número de diagonais em função do número de lados do polígono), pode levar a um mal entendimento do conceito de função.

Ainda no contexto do Ensino Fundamental, as funções reais que fazem parte do conteúdo programado para esse período são as afins (e as lineares, como caso particular) e as quadráticas. Uma *função afim* é uma função cujos domínio e contradomínio são o conjunto dos números reais (logo, em particular, é uma função real), em que a lei de formação indica que a imagem de um valor é obtida por meio de uma expressão polinomial do tipo $ax + b$ com coeficientes[17] reais constantes; ou seja, uma função afim f é descrita na forma

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax + b \end{aligned}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ (LIMA et al, 2006), sendo denominados *coeficiente de proporcionalidade* e *coeficiente independente*, respectivamente. O tipo mais comum de ser estudado é

[17] De acordo com Downing (2009, p. 47), "coeficiente é um termo técnico para algo que está multiplicando outro item (usualmente aplicado a uma constante multiplicando uma variável)." (Tradução livre). Desse modo, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ da lei de formação da função afim são coeficientes dessa função.

da expressão polinomial de primeiro grau[18] com coeficiente independente não nulo, ou seja, $a \neq 0$ e $b \neq 0$. No entanto, a definição abrange dois outros tipos de função, que são então considerados casos particulares da função afim: a função linear e a função constante. Uma função *linear* é aquela cuja lei de formação é do tipo $f(x) = ax$, ou seja, o coeficiente b é nulo; já uma função é dita *constante* quando sua lei de formação é então do tipo $f(x) = b$, ou seja, o coeficiente a é nulo, e a expressão polinomial é de grau zero. Em relação a apresentação no Ensino Básico, pode-se inverter a ordem, primeiro definindo a função linear para, posteriormente, apresentar as funções afins como suas generalizações, tendo em vista que é mais comum construirmos exemplos práticos com a proporcionalidade observada diretamente nas funções lineares.

Detalhes importantes sobre funções afins, tratados no Ensino Fundamental, são sua raiz, sua representação gráfica e seus coeficientes. A raiz de uma função afim (não constante) pode ser calculada pelo simétrico do quociente do coeficiente independente pelo coeficiente de proporcionalidade, ou seja, $x = -\frac{b}{a}$, a única solução da equação $ax + b = 0$ (como dito anteriormente).

Já a *representação gráfica*, no plano cartesiano, do gráfico de uma função afim corresponde a uma reta não vertical[19] e a demonstração presente em Lima et al (2006, p.100) parte da prova de que quaisquer três pontos desse gráfico são colineares. Essa reta intersecta os eixos coordenados em dois pontos significativos: o ponto de coordenadas $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, uma vez que $-\frac{b}{a}$ é a raiz da função, e o ponto $(0, b)$. A Figura 9 ilustra a representação gráfica de uma função afim (a saber, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$), exemplificando essas informações (ou seja, os pontos $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e $(0, -3)$). Por ser uma reta, basta determinar dois pontos para esboçar essa representação[20]. Em geral, os pontos de interseção com os eixos coordenados são mais fáceis de se determinar.

Quanto aos coeficientes de uma função afim, é muito comum denominá-los

---

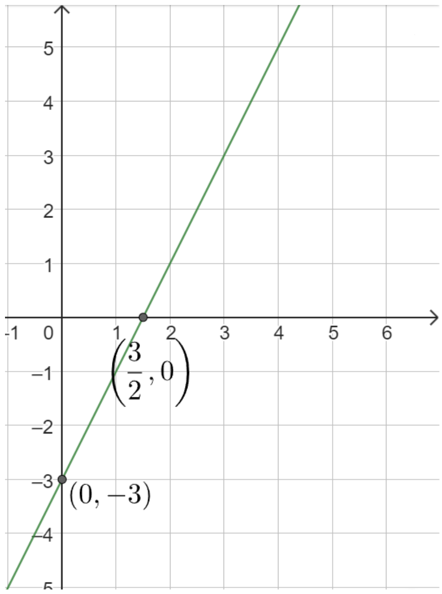
[18] O grau de uma expressão polinomial é dado pela maior soma dos expoentes das variáveis em cada monômio.

[19] Uma reta vertical no plano cartesiano não representa uma função, pois um único valor no primeiro conjunto tem infinitas correspondências no segundo, e a equação que caracteriza essa reta é do tipo $\boldsymbol{x = b}$, sendo $\boldsymbol{b}$ alguma constante. Por sua vez, uma reta horizontal no plano cartesiano é a representação gráfica de uma função constante (do tipo $\boldsymbol{f(x) = b}$).

[20] Um postulado da Geometria afirma que dois pontos no plano determinam uma reta, isto é, existe uma única reta contendo dois pontos distintos dados.

coeficientes angular e linear da função, em alusão aos respectivos coeficientes da equação reduzida da reta que a representa graficamente. No entanto, essa nomenclatura (para as funções) é desaconselhada, visto que pode reforçar uma inadequada equivalência entre função e equação. Além disso, considerar o coeficiente a do monômio de primeiro grau como a taxa de variação da função é mais adequado, devido ao caráter de proporcionalidade que esse termo acarreta (LIMA, 2006). Por sua vez, o coeficiente independente b indica uma translação vertical da representação gráfica da função afim $f(x) = ax$, além de indicar a imagem de zero pela função.

Figura 9 – Representação gráfica de uma função afim



Fonte: A autora, 2023

Por sua vez, as *funções quadráticas* são funções cujos domínio e contradomínio são também o conjunto dos números reais e cuja lei de formação indica que a imagem de um valor é dada por uma expressão polinomial do segundo grau, com coeficientes reais constantes; em outros termos, uma função quadrática f é descrita por

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. De maneira geral, as análises importantes relacionadas a essa função, durante o Ensino Fundamental, são suas raízes, seu valor máximo (ou mínimo) e sua representação gráfica.

As raízes de uma função quadrática são obtidas por meio do cálculo das soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, usualmente feito da seguinte maneira

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

sendo a, b e c os coeficientes da função (esse método de cálculo é comumente chamado de fórmula de Bhaskara).

A representação gráfica de uma função quadrática é uma parábola[21]. O *vértice* da parábola indica o ponto de *máximo* (ou de *mínimo*) da função; em outros termos, esse ponto possui como ordenada o maior (ou o menor) valor que a função pode assumir.

Por desconsiderar informações geométricas da parábola (visto que esse não é o objetivo no estudo de funções), a construção da representação gráfica se baseia em pontos significativos, como o vértice, suas raízes e o ponto onde ela intersecta o eixo das ordenadas (isto é, o ponto $(0, f(0))$, equivalente a $(0, c)$). Além disso, utiliza-se da simetria da parábola em relação a seu eixo[22] para auxiliar em seu esboço. Por sua vez, o vértice tem como abscissa o valor médio entre as raízes e, a partir desse valor, obtém-se sua ordenada. Utilizando-se as fórmulas que determinam as raízes da função, tem-se que as coordenadas do vértice[23] são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, onde Δ representa a expressão $b^2 - 4ac$, chamada de *discriminante* da equação.

Além disso, o cálculo do discriminante permite verificar se a função possui duas raízes reais distintas, duas raízes reais iguais[24] ou não possui raiz real, indicando assim, em quantos pontos a representação gráfica dessa função intersecta o eixo das abscissas. Isso ocorre, pois no cálculo das soluções da equação, deve-se obter a raiz quadrada da expressão $b^2 - 4ac$; logo, para se ter soluções reais, o discriminante deve ser maior que ou igual a zero. Se o discriminante for positivo, então a função possui duas raízes reais distintas e, portanto, sua representação gráfica possui dois pontos em comum com o eixo das abscissas. Por sua vez, se o discriminante for nulo, então a função possui duas raízes reais iguais e, consequentemente, sua representação gráfica intersecta (na verdade, tangencia) o eixo das abscissas em apenas um ponto. Por fim, se o discriminante for negativo, então a função não possui raízes reais e, portanto, sua representação gráfica não intersecta o eixo das

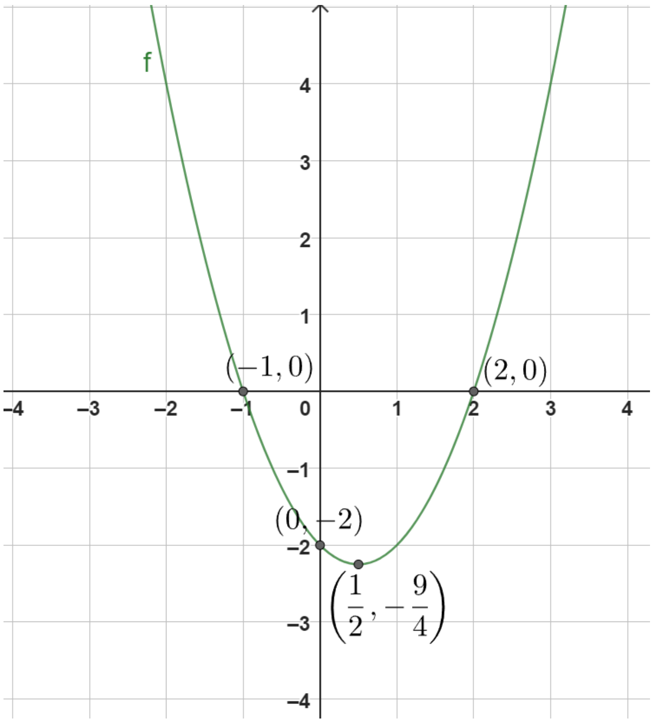
---

[21] Para uma definição precisa de parábola, o leitor pode consultar Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 146)
[22] O *eixo* de uma parábola é a reta vertical que passa por seu vértice, e também pode ser chamado de reta focal (Delgado, Frensel, Crissaff, 2017).
[23] A abscissa e a ordenada do vértice da parábola são usualmente nomeadas por $\boldsymbol{x_V}$ e $\boldsymbol{y_V}$, respectivamente.
[24] Nesse caso, diz-se também que a equação possui apenas uma raiz, com multiplicidade dois.

abscissas.

Outra informação importante que auxilia o esboço da representação gráfica da função é o valor do coeficiente a. O coeficiente do monômio de segundo grau indica a posição da parábola (mais precisamente, de sua concavidade) e, consequentemente, determina se o vértice é ponto máximo (ou de mínimo) da função. Caso esse coeficiente seja positivo, então a parábola possui concavidade voltada para cima (e, portanto, a função possui como valor mínimo a ordenada do vértice). Caso contrário, a concavidade está voltada para baixo (e a função possui como valor máximo a ordenada do vértice). Para exemplificar, a Figura 10 é a representação gráfica de uma função quadrática (a saber, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x - 2$) com concavidade voltada para cima e duas raízes reais distintas. Além das raízes, representadas nos pontos $(-1,0)$ e $(2,0)$, também estão marcados na representação gráfica o ponto $(0, -2)$ e o vértice $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

Figura 10 - Representação gráfica de uma função quadrática



Fonte: A autora, 2023

Outro assunto tratado ainda no Ensino Fundamental, e que se relaciona com Funções, são as *inequações*. Elas partem de desigualdades que segundo Downing (2009, p. 182) são “declarações do tipo ‘x é menor que y’, escrito como $x < y$, ou ‘x é maior que y’, escrito como $x > y$.”; ou seja, desigualdades são comparações entre valores, onde um é maior que o outro. Tais comparações são feitas por meio de expressões algébricas (assim como as equações) e inclui os casos onde um valor é maior do que ou igual ao outro, representado por $a \geq b$ (ou equivalentemente, um valor é menor do que ou igual ao outro, representado por $b \leq a$). Alguns exemplos de inequações são $8x + 7 > 10$, $3x - 2 \leq x + 9$, $4(x - 5) < y + 6x$ e $5(y + 3) \geq 6(x - 9)$.

Em geral, as manipulações algébricas, feitas em uma equação para se determinar o valor de uma incógnita, também podem ser realizadas nas inequações, porém com atenção às multiplicações. Isso porque ao multiplicar uma desigualdade por um valor negativo, altera-se sua relação. Por exemplo, embora $4 < 5$, tem-se que $4 \times (-3) > 5 \times (-3)$, pois $-12 > -15$.

Esse estudo de inequações não costuma ser diretamente conectado com funções no período escolar estudado, porém é de extrema importância para a análise de sinais feita no Ensino Médio. Essa análise se reflete no uso prático de funções, diretamente relacionado com a interpretação de como a função se comporta em determinada parte do domínio.

Com o intuito de reforçar ideias importantes, resume-se que função *é uma regra que relaciona elementos de dois conjuntos, podendo ser expressa ou não por uma equação*. A equação é uma afirmativa que contém uma igualdade cujo intuito é indicar que as expressões intermediadas pelo sinal de igualdade têm o mesmo valor. Dependendo do contexto uma equação com duas variáveis pode representar a lei de formação de uma função, mas para isso é necessário identificar o objetivo e diferenciar a escrita. Caso se apresente para o aluno a equação $y = 2x + 3$, por exemplo, não se deve afirmar que seja uma função, pois pode ser a equação de uma reta, a modelagem de um problema em que uma das variáveis assume um valor específico ou simplesmente uma relação entre x e y. A função que pode ser induzida a partir dessa equação deve ser escrita da forma $f(x) = 2x + 3$, além de informar seus domínio e contradomínio.

Além disso, não é possível desconsiderar a importância dos conjuntos numéricos envolvidos na função, pois a partir de uma mesma lei de formação é possível obter funções com características completamente diferentes. Por exemplo, com $f(x) = x^2$, tomando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tem-se que f não é injetiva nem sobrejetiva. Porém, assumindo $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, obtêm-se f injetiva, mas não sobrejetiva. Por sua vez, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, f é sobrejetiva, mas não injetiva. Por fim, f é bijetiva quando $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Muitas das definições e descrições aqui apresentadas devem ser adaptadas ao vocabulário e ao nível de conhecimento do aluno, mas sem perda de conceitos. Por exemplo, dizer que uma expressão algébrica é uma expressão matemática com pelo menos um valor desconhecido, representado por letras do alfabeto latino, faz sentido e é mais compreensível para o aluno. Porém, reduzir o conceito de função a sua lei de formação é desassociar o objeto matemático de algumas de suas características fundamentais.

2.2 **Análise de materiais didáticos**

As definições apresentadas na seção anterior têm o objetivo de destacar os objetos matemáticos em discussão e o de comparar com os materiais disponibilizados para os alunos. Lembra-se que, tendo em vista que as realidades das escolas são diferentes, e os materiais variam de acordo com essa vivência, esse estudo foca nos materiais disponíveis em uma escola municipal, situada na zona oeste do Rio de Janeiro.

No município do Rio de Janeiro, existem dois tipos de materiais didáticos disponíveis: os livros didáticos aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD, dos quais os professores selecionam um modelo para sua respectiva escola a cada três anos) e o Material Didático Escolar, produzido e fornecido pela Prefeitura, em formato de apostila e separado por semestres[25].

O Material Didático Escolar mais recentemente recebeu o nome de Material RioEduca, e é entregue em todas as escolas municipais do Rio de Janeiro. Essencialmente, o Material RioEduca é uma apostila de exercícios criada por professores da rede municipal e que orienta a avaliação bimestral da rede. Durante alguns anos, cada disciplina possuía sua apostila e havia mais espaço para conteúdos curriculares; porém, a partir de 2019, o material se tornou único para todas as disciplinas, apresentando também um menor detalhamento dos conteúdos.

Os livros didáticos do PNLD, por sua vez, possuem diversos modelos que ficam disponíveis para o professor, porém, os alunos só possuem acesso a apenas um modelo, selecionado pelos professores para a escola durante um determinado

[25] Até 2019, essa separação era feita por bimestres.

período. A cada três anos, os professores da disciplina recebem diversas coleções e devem avaliar a que mais se adequa à realidade do aluno e à proposta da escola, selecionando assim a coleção completa que será utilizada com os alunos do 6º ao 9º ano. Na prática, apesar de algumas vezes o livro didático ter exercícios mais completos, a prioridade é utilizar o Material RioEduca (pois este é propriedade do aluno, ao passo que o livro didático é usado por mais duas turmas, o que requer, portanto, um manuseio mais controlado). Em outras palavras, o Material RioEduca é de posse do aluno, ao passo que o livro didático é de posse da escola, para o uso do aluno apenas durante um período determinado.

Os professores possuem autonomia em sala de aula, e têm em mãos esses dois materiais para elaborar suas aulas. Buscando uma comparação entre as atividades disponíveis para os alunos e o conteúdo indicado para o professor sobre os assuntos desse estudo, foi feita uma breve avaliação de como eles abordam o assunto Funções, analisando ainda como a linguagem matemática é apresentada (além de examinar qual seu possível impacto na compreensão dos conceitos).

Durante o ano de 2021 (quando esta pesquisa foi feita), na escola estudada existiam oito coleções diferentes de livros para a consulta do professor. As coleções são: Mazzieiro e Machado (2012), Dante (2015), Souza e Pataro (2015), Longen (2018), Pataro e Balestri (2018), Silveira (2018), Bianchini (2018) e Chavante (2018). Dentre essas, as quatro últimas foram disponibilizadas para a escolha dos professores no final de 2019, com início de uso com os alunos em 2020, sendo a coleção de Silveira (2018) a escolhida para ser utilizada pelos alunos; as demais são de escolhas anteriores e ainda servem de consulta para o professor durante o preparo das aulas.

Particularmente em relação aos livros de 9º ano dessas coleções, o único que trata de domínio e imagem de uma função, descrevendo suas definições completas, é o Mazzieiro e Machado (2012). Nessa apresentação, destaca-se também a escrita em linguagem matemática[26] e a definição de imagem (Figura 11).

No livro disponível para os alunos, Silveira (2018, p.128) define função descrevendo que “Quando relacionamos duas grandezas, e para cada medida da primeira grandeza corresponde uma única medida da segunda grandeza, dizemos que a segunda grandeza é **função** da primeira.” (grifo do autor). Essa definição não é completa, pois não trata dos conjuntos envolvidos e ainda utiliza a palavra grandeza,

[26] No entanto, não é utilizada nesse livro uma tipografia matemática específica para a linguagem matemática.

que não é bem empregada aqui.

Figura 11 – Definição de função no referido livro didático

> Dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B é uma regra que associa a cada elemento de A um único elemento de B.
>
> Ao conjunto A, dá-se o nome de "domínio da função", e ao conjunto B, o nome de "contradomínio da função".
>
> Designando a função por **f**, escrevemos: **f** : A → B (que se lê **f** de A em B), significando que, a cada elemento **x** do domínio A, corresponde um único elemento **y** = **f**(x) de B, chamado de imagem de **x** pela função **f**, ou também valor da função **f** no ponto **x**. O conjunto que contém todas as imagens dos elementos do domínio chama-se "conjunto imagem da função".

Fonte: Mazzieiro e Machado, 2012, p. 89.

Por sua vez, Chavante (2018, p.145) não define função: apresenta um exemplo e desenvolve que "[...] podemos escrever a fórmula *y* = 4*x* e dizer que ***y* está em função de *x***. Essa fórmula é chamada **lei de formação** da função, e relaciona as variáveis *x* e *y*." (grifo do autor). Além de não definir função apropriadamente, a palavra "fórmula" não deve ser utilizada nesse contexto, sendo mais bem substituída na frase por "expressão algébrica", que representa, de fato, a natureza da lei de formação.

Assim como Chavante (2018), tanto Pataro e Balestri (2018) quanto Bianchini (2018) iniciam o conteúdo de Funções com exemplos, porém dizem que "a grandeza *y* é **função** da grandeza *x* se há entre elas uma correspondência tal que, para cada valor de *x*, exista um único valor de *y*." (BIANCHINI, 2018, p. 217). Dante (2015) e Longen (2018), por sua vez, definem função simplesmente como "relação de dependência entre duas grandezas." (LONGEN, 2018, p. 204), ao passo que Souza e Pataro (2015) não apresentam uma definição formal, dizendo simplesmente que situações que relacionam cada valor de uma variável a um único valor na outra se tratam, em geral, do conceito de função. Isso demonstra que, apesar de a maioria dos livros ter o cuidado de associar função a uma relação unívoca, não fica claro que os elementos que se relacionam fazem parte de conjuntos que devem ser informados previamente. Além disso, alguns usam a palavra "grandezas" para se referirem às variáveis, o que não é ideal de uma maneira geral, pois só é válido em alguns exercícios contextualizados, como os que relacionam velocidade e distância, por exemplo.

Quanto à escrita em linguagem matemática, Longen (2018), além de Pataro e Balestri (2018), não só apresenta a notação $f(x)$, para indicar a imagem de um elemento pela função, como a utiliza mais do que os outros autores analisados, além disso, utilizam outras nomeações (além de f), como por exemplo, $g(x)$, $h(x)$, $A(x)$ (para uma questão envolvendo área) e $P(x)$ (para uma questão envolvendo perímetro). A maioria dos livros utiliza mais y (inadequadamente) e só informa que $f(x)$ também é uma notação possível. Nesse caso, a palavra $f(x)$ é mais utilizada somente nas questões onde se quer identificar o valor da imagem em função de um dado x (por exemplo, determinar o valor de $f(2)$ em relação à função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = 4x - 5$). Por sua vez, a notação $f: A \rightarrow B$ aparece em Chavante (2018), Mazzieiro e Machado (2012), e Pataro e Balestri (2018), com as indicações de leitura como sendo "f de A em B." (CHAVANTE, 2018, p. 146) e em Longen (2018) com a leitura sendo "f é uma função de A em B." (LONGEN, 2018, p. 206).

Os livros de Souza e Pataro (2015), Longen (2018), Pataro e Balestri (2018) e Chavante (2018) são os únicos que utilizam o esquema de flechas para ilustrar a representação de uma função, porém, sem tratar de relação em geral.

Além disso, ao apresentar problemas práticos, e modelá-los por meio de uma função, os livros ignoram a análise do domínio, implícito no problema, e o consideram sempre como o conjunto dos números reais. Por exemplo, em Souza e Pataro (2015), a primeira situação apresentada é um problema em que a função descrita representa o aluguel de um quarto em uma pousada em termos de uma parte fixa e da *quantidade* de dias de hospedagem, e é afirmado que esse é um exemplo de uma função afim (Figura 12), quando, na verdade, trata-se de uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (o que não caracteriza função afim). Nesse caso, o livro apresenta somente a lei de formação, desconsiderando os outros elementos que caracterizam esse tipo de função.

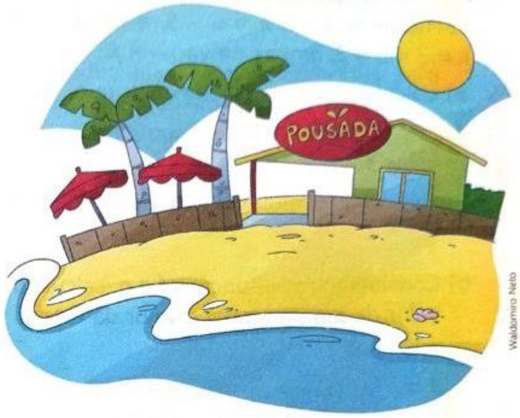
Ao explicitar o conceito de gráfico, a maioria dos materiais trata do domínio como todo o conjunto dos números reais; somente os livros Mazzieiro e Machado (2012) e Silveira (2018) apresentam exemplos de gráficos de funções cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Por outro lado, no livro da coleção Dante (2015), é comentado, em um exemplo, que o gráfico apresentado não é definido como função ao considerar a variável como real, porque nem todos os números reais possuem uma imagem correspondente (Figura 13). Porém, quando a variável é considerada no intervalo apresentado (onde todos os valores possuem uma imagem), aquele gráfico se torna a representação de uma função. Esse exemplo é interessante, pois faz uma reflexão sobre o domínio da função, mesmo esse livro não tratando desse conceito. A complementação dessa atividade é escrever essa função de forma completa, por exemplo, essa é a representação gráfica de uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$.

Figura 12 – Problema exemplificando uma função afim no referido livro didático

Função afim

Carlos e sua família vão alugar um quarto em uma pousada de praia. O aluguel corresponde a uma parte fixa de R$ 85,00, referente à taxa de limpeza, mais R$ 390,00 por dia.

Para calcular o valor do aluguel, podemos escrever uma fórmula. Para isso, chamamos de $y = f(x)$ o valor do aluguel e de **x** o número de dias de hospedagem.

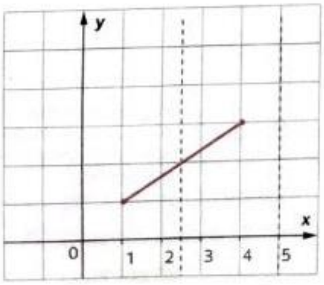


$$f(x) = 390x + 85$$

Dessa maneira, $f(x) = 390x + 85$ é a lei de formação da função que expressa o valor do aluguel de acordo com o número **x** de dias. Essa função é denominada **função afim**.

Fonte: Souza e Pataro, 2015, p. 93

Figura 13 – Exemplo de representação gráfica com discussão de domínio



Considerando x um número real qualquer, este gráfico não define uma função, pois, para $x = 5$, por exemplo, não existe y correspondente.

Mas, considerando x real de 1 a 4, este gráfico indica uma função, pois, para todo x real do intervalo $1 \leqslant x \leqslant 4$, existe sempre um único y.

Fonte: Dante, 2015, p.79

Os livros mais recentes se preocupam em ter pelo menos uma parte dos exercícios dedicada a problemas aplicados. Porém, é notada uma maior tendência em se focar nas expressões algébricas dessas funções e suas manipulações, desconsiderando seus domínios e contradomínios, como Chavante (2018), por exemplo (Figura 14). Nesse exercício, tem-se, novamente, uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, o que poderia ser discutido em sala, para fixar os conceitos. Além disso, é exigido do aluno somente cálculos simples, que poderiam levá-lo a não se expressar com a linguagem matemática adequada (seja por suas dificuldades, seja por um raciocínio mais rápido), também existe o problema de chamar a lei de formação da função de “fórmula”. Dessa maneira, o aluno pode apresentar dificuldades de associar esse exemplo ao aprofundamento de função no Ensino Médio.

Figura 14 – Exemplo de exercício sobre funções

3. Uma papelaria vende certo modelo de caneta por R$ 2,50.

Quantidade de canetas	1	2	3	4	5
Valor arrecadado (R$)	2,50	5,00	A 7,50	B 10,00	C 12,50

a) Copie o quadro no caderno, substituindo as letras pelos números adequados.

b) Escreva uma fórmula em que seja possível calcular y em função de x, na qual x represente a quantidade de canetas desse modelo vendidas e y, o valor arrecadado. $y = 2{,}50x$

c) Quanto a papelaria arrecadaria com a venda de 6 dessas canetas? R$ 15,00

d) Em um mês, a papelaria vendeu 98 canetas desse modelo. Qual foi o valor arrecadado com essas vendas? R$ 245,00

e) Quantas dessas canetas é preciso vender para arrecadar R$ 70,00? 28 canetas

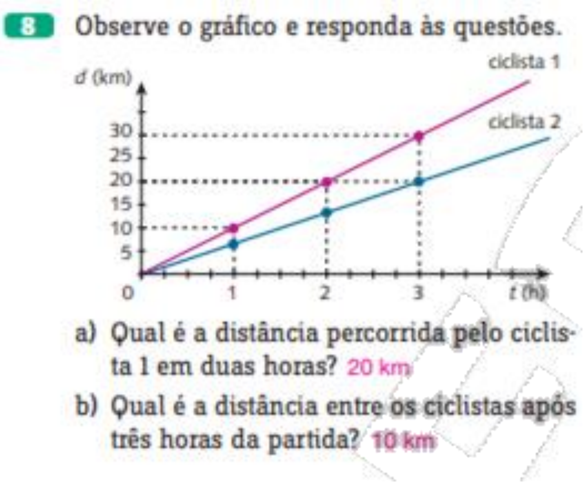
Nota: A escrita em vermelho é o gabarito indicado para cada item no livro.

Fonte: Chavante, 2018, p. 147

Há somente uma questão em Silveira (2018) que trata da análise do gráfico, sem ser necessário obter as leis de formação das funções representadas. Por mais simples que seja essa questão (Figura 15), o fato de estar incluída no capítulo de Funções reforça a ideia de que, em determinados casos, não é necessária uma lei de formação para analisar certos atributos de uma função, assim como a Figura 11. Em geral, questões de análise de tabelas e gráficos não são vinculadas à ideia de função, o que pode ser prejudicial, considerando que o aluno, nesse nível, pode não associar funções a essas outras representações.

O único livro didático que menciona os coeficientes angular e linear do gráfico é Mazzieiro e Machado (2012). Após um primeiro momento, o livro descarta a expressão “do gráfico”, o que poderia levar o aluno a associar esses termos à função. Além desse livro, o Material RioEduca de 2018 (último ano em que apresentou conteúdos) menciona os coeficientes angular e linear de funções afins, omitindo que essa nomenclatura é referente à reta, que é a representação gráfica da função, e não à função.

Figura 15 – Exercício de análise de gráfico



Fonte: Silveira, 2018, p. 153

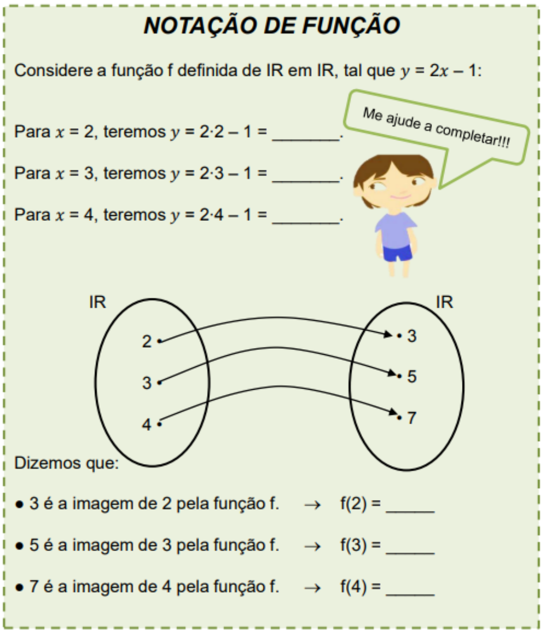
Observando o Material RioEduca, notam-se algumas características diferentes das apresentadas nos livros didáticos mencionados. Ele aborda o conceito de produto cartesiano, mas não o de relações; tampouco correlaciona funções a produto cartesiano. O esquema de flechas (chamado pelo material de diagrama) e os conceitos de domínio e imagem fazem parte do conteúdo abordado, porém nas atividades seguintes, as funções passam a ser consideradas somente pela sua lei de formação, sem utilizar a expressão $f: A \to B$. Esse material não usa as nomenclaturas "função afim" e "função quadrática", mas as nomenclaturas função polinomial de 1º e 2º grau, respectivamente. Vale destacar que funções constantes não são funções polinomiais de 1º grau (mas sim de grau zero), e não são abordadas nesse material.

Acompanhando a maioria dos livros, tem-se que a notação $f(x)$ não é muito bem apresentada, sendo introduzida por meio de um exemplo (Figura 16) e depois usada somente nos primeiros exercícios. É possível perceber ainda que o enunciado começa com "Considere a função f definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$" porém, ao apresentar a lei de formação, é escrita uma expressão utilizando y no lugar de $f(x)$.

De maneira geral, os exercícios de Secretaria Municipal de Educação (2018) não se afastam muito do que foi visto nos livros, porém, apresenta os conteúdos de forma mais resumida e com algumas falhas. Vale destacar que, nesse documento, o editor de texto matemático também não é muito utilizado, exceto para as variáveis x e y.

Com relação a conteúdos não listados no currículo mínimo, um destaque interessante em Mazzieiro e Machado (2012) são exercícios que apresentam funções cujo domínio é um produto cartesiano (apesar de não expressar esse conjunto explicitamente) e o contradomínio é um conjunto qualquer. Mais especificamente, são apresentadas questões envolvendo funções obtidas a partir da operação de adição, do máximo divisor comum (MDC) e do mínimo múltiplo comum (MMC), por exemplo. Os autores incluem ainda um exercício (Figura 17) envolvendo rotações de um hexágono regular (em torno de seu centro), cujo domínio é o produto cartesiano do conjunto de vértices pelo conjunto dos ângulos múltiplos de $60°$; e o contradomínio é o próprio conjunto dos vértices do hexágono. A lei de formação dessa função associa cada par do domínio ao ponto que corresponde à posição que o vértice do par ocupará quando o hexágono for rotacionado do ângulo dado, em torno do centro do hexágono.

Figura 16 – Notação de função no Material RioEduca



Fonte: Secretaria Municipal de Educação, 2018, p. 21

Vale destacar que o autor não explicita os conjuntos domínio e contradomínio da referida função, e somente apresenta a lei de formação no enunciado do exercício. Então, uma complementação dessa atividade é denominar como V o conjunto dos vértices do hexágono e G o conjunto dos ângulos múltiplos de $60°$; em outros termos, $V = \{A, B, C, D, E, F\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 60k, k \in \mathbb{N}\}$. Assim a função[27] r apresentada no exercício é descrita por

$$r : V \times G \to V$$
$$(v_i, g) \mapsto v_j$$

[27] Na atividade o nome da função está com letra maiúscula, porém, como foi dito, o ideal é utilizar letras minúsculas do alfabeto latino.

onde v_j é obtido por meio da rotação do vértice v_i, em torno de O, pelo ângulo g.

Figura 17 – Exercício sobre rotações em um hexágono.

97. Neste exercício você vai imaginar rotações do hexágono regular da figura, em torno do ponto O, no sentido anti-horário, para estabelecer correspondências entre seus vértices, usando a função cuja lei é definida assim:

$$R(v, n) = v_1$$

onde $\mathbf{v_1}$ é o vértice correspondente à posição que ocupará o vértice **v**, girando o hexágono em torno do ponto O, **n** graus, no sentido anti-horário.

Agora, escreva em seu caderno o que deve substituir as interrogações em cada item a seguir, como no exemplo:

$$R(F, 60°) = A$$

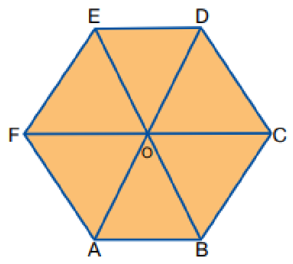
a) R(B, 180°) = ?

b) R(C, 240°) = ?

c) R(D, 300°) = ?

d) R(F, 360°) = ?

e) R(C, 420°) = ?



Fonte: Mazzieiro e Machado, 2012, p. 94

É importante notar que Mazzieiro e Machado (2012) possui uma proposta diferenciada, pois expõe poucas definições e discute todo o conteúdo por meio de exercícios. Por esses motivos, ele não é um livro de fácil entendimento, porém pode ser rico para a consulta do professor.

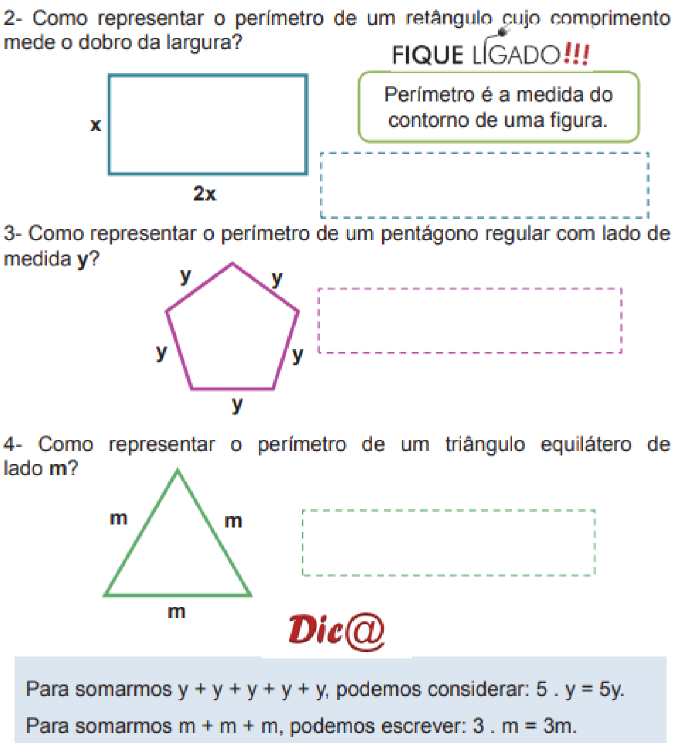
Dos livros mais recentes, Silveira (2018) traz o estudo de sinais, e trata de inequações depois de funções, seja nas funções afins, seja nas quadráticas. Isso pode ocasionar um ganho na compreensão do aluno, além de facilitar o estudo de inequações por meio de uma representação gráfica. É importante destacar que, no currículo do Ensino Fundamental, o estudo de inequações do 1º grau é feito no 8º ano (como apresentado na Seção 1.2) e as inequações do 2º grau não são abordadas nesse período escolar. Isso não impede que se faça um estudo de sinais nas funções, a partir da representação gráfica, ainda no 9º ano, em vez de aguardar o Ensino Médio. O objetivo é observar o comportamento da função, buscando facilitar uma interpretação, no caso de exercícios aplicados. Além disso, esse estudo também permite auxiliar a compreensão das inequações de 1º grau e iniciar os estudos das de 2º grau.

Para verificar como são definidas as expressões algébricas e as equações, foi realizada uma busca desses conceitos nos livros de 7º e 8º anos das mesmas coleções citadas, além da verificação do Material RioEduca desses mesmos anos.

Com relação a expressões algébricas, os livros didáticos definem, em geral, como “Expressões que contém números e letras [...]” (DANTE, 2015, p. 118) ou “[...] expressões em que aparecem letras no lugar de números [...]” (SOUZA, PATARO, 2015, p. 152). Definições desse tipo podem reforçar a ideia de que se está “fazendo contas com letras” e induz a falta de compreensão do uso desses signos do alfabeto da linguagem matemática; o ideal seria definir, no mínimo, como *expressões matemáticas com pelo menos um valor desconhecido* (como dito na Seção 2.1) e, só então, explicar como representar esses valores. Bianchini (2018), por sua vez, só apresenta exemplos, isto é, não define expressões algébricas.

Nota-se ainda que alguns exemplos práticos, tratados no 7º ano e que são modelados por expressões algébricas e equações, podem induzir funções. O Material RioEduca, por vezes, usa o mesmo tipo de exemplo prático (envolvendo perímetro) para desenvolver uma expressão algébrica no 7º ano e uma função afim no 9º ano. Enquanto no 7º ano espera-se que o aluno escreva somente uma expressão algébrica com uma variável (Figura 18), no 9º ano, a modelagem esperada do problema é na forma de equação (Figura 19).

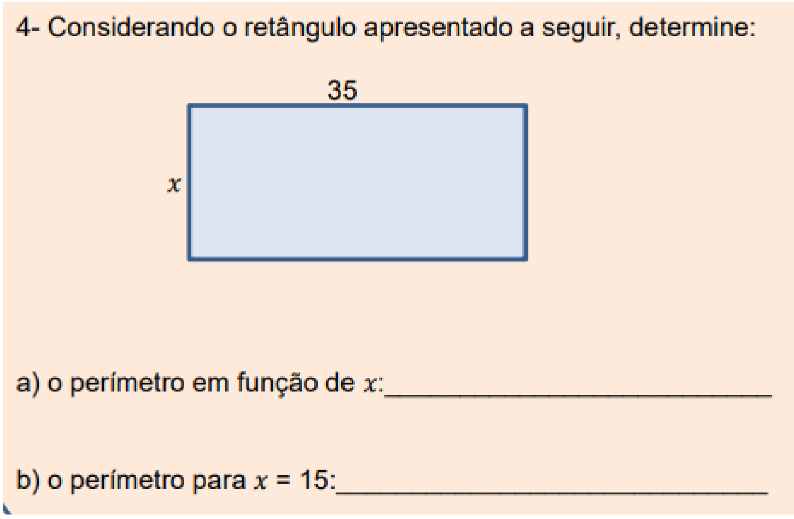
Figura 18 – Exercício de expressão algébrica no 7º ano



Fonte: Secretaria Municipal de Educação,7º ano, 2018, p. 21

De modo geral, o uso dos signos x, y, a, b, etc. não é justificado nos materiais didáticos, variando entre as letras conforme os exercícios se desenvolvem. Em geral, os livros definem variáveis como as letras em expressões algébricas (SILVEIRA, 2018, p. 134) e incógnitas como os elementos desconhecidos que aparecem em equações (BIANCHINI, 2018, p. 121). Porém, como foi abordado na Seção 2.1, é necessário analisar o contexto. Além disso, constantes desconhecidas também são representadas por letras, e (como diz seu nome) não constituem variáveis.

Figura 19 – Exercício de perímetro no conteúdo de funções no 9º ano


4- Considerando o retângulo apresentado a seguir, determine:

a) o perímetro em função de x:_________________________

b) o perímetro para x = 15:____________________________

Fonte: Secretaria Municipal de Educação, 2018, p. 28

As equações costumam ser definidas por “uma igualdade onde há pelo menos uma letra” (SOUZA, PATARO, 2015, p. 157), e em Mazzieiro e Machado (2012) são apresentados exemplos de equação sem uma definição formal. Por somente terem contato com esse termo em Álgebra, nenhum material usa a expressão *equação algébrica*, ou seja, nos materiais de ensino básico a palavra equação é sinônima de equação algébrica e as equações aritméticas não são estudadas (p. 38). Alguns livros, como Bianchini (2018) e Dante (2015), além de Secretaria Municipal de Educação (2018), ao tratarem de um sistema de equações com duas variáveis, apresentam o método de solução gráfica superficialmente. Apesar de entender o ganho que isso poderia trazer, é importante questionar se o aluno compreende a diferença entre o esboço das retas definidas a partir das equações apresentadas e o gráfico de uma função afim.

A partir dessas observações, percebe-se que, apesar de a BNCC mencionar o letramento matemático durante o Ensino Fundamental, muitos desses materiais não apresentam as definições corretamente, tampouco se utilizam com frequência das palavras correspondentes ao vocabulário da linguagem matemática que definem esses elementos. Mesmo trazendo muitos exercícios aplicados, o destaque dado à lei de formação (em detrimento de seus domínio e contradomínio) pode resultar em dificuldades futuras do aluno, como, por exemplo, ao se deparar com uma lei de formação que não seja única para todos os elementos do domínio (como na definição de uma função definida em partes). A tendência nesses materiais é levar o aluno a manipular os objetos matemáticos sem se apropriar adequadamente dos conceitos e de suas ideias fundamentais.

3 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Ao observar os exemplos nos livros didáticos, destacam-se algumas aplicações do conceito de função que justificam seu estudo aprofundado. A proporcionalidade, presente nas funções lineares e afins, permite criar situações relacionadas ao cotidiano do aluno, facilitando a conexão do conceito matemático com seu significado. Contudo, apesar de alguns livros abordarem o conceito de função dessa forma, eles geralmente o tratam de modo incompleto.

A ideia intuitiva, presente em nossa sociedade, de relações entre grandezas (como o gasto com hospedagem de uma viagem em termos da quantidade de diárias, por exemplo), tem o poder de trazer ao aluno a identificação com o conteúdo. Ao tratar das funções quadráticas, essa correlação se torna um pouco mais complicada, e relacioná-las com o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado, por exemplo (realizando ainda, se possível, algum experimento prático), pode auxiliar nessa correlação.

No entanto, a modelagem a partir de problemas aplicados não é a única forma de aprimorar esse estudo no Ensino Fundamental. Baseado nos estudos apresentados no primeiro capítulo, destaca-se a aptidão, por parte do aluno, em transmitir seu pensamento em linguagem matemática corretamente. Desse modo, as propostas desse trabalho envolvem apresentar, desde a introdução do estudo da Álgebra, as regras da linguagem matemática e os elementos necessários para o aluno compreender o estudo de Funções, no final do Ensino Fundamental e começo do Ensino Médio.

Este capítulo se divide de acordo com a série a que se destinam essas intervenções (7º, 8º e 9º anos, respectivamente nas Seções 3.1, 3.2 e 3.3). Todas as sugestões estão de acordo com os currículos mencionados no primeiro capítulo desta dissertação e visam engrandecer o estudo do conceito de função em sua base.

3.1 **Propostas para o 7º ano**

Nesse ano escolar, inicia-se formalmente o estudo da Álgebra. Em alguns materiais, o aluno começa a ter contato com o pensamento algébrico ainda no 6° ano, a partir de atividades e problemas envolvendo cálculos com operações inversas, por exemplo. Nesses casos, a incógnita costuma ser representada por quadrados, estrelas, pontos de interrogação ou quaisquer outros símbolos, evitando assim sua representação usual (a saber, por meio de letras). Considerando que os currículos posicionam a linguagem algébrica no 7° ano, sendo nessa fase que os alunos compreendem melhor conceitos abstratos, propõe-se apresentar alguns dos principais elementos dessa linguagem nesse ano.

Durante esse período, o maior problema identificado ao longo da prática da autora é a dificuldade dos alunos em reconhecer que as letras do alfabeto latino também fazem parte do alfabeto da linguagem matemática, e são usadas para formar palavras nessa linguagem. Portanto, devem ser propostas atividades de leitura e escrita de expressões algébricas. Os objetivos são reforçar as palavras que indicam resultados de operações, apresentar os elementos da linguagem matemática que representam valores desconhecidos, estabelecer o padrão de leitura para as expressões algébricas a partir desse ponto e, por fim, modelar expressões a partir de problemas.

Um bom exemplo são atividades em que o aluno deve transcrever um texto da língua portuguesa para a linguagem matemática e vice-versa (Atividades 1 e 2). Esse tipo de atividade é visto em alguns materiais, sob o título de linguagem algébrica, e aqui destacam-se alguns pontos que merecem atenção, ao tratar uma atividade desse tipo. O objetivo é ensinar aos alunos como fazer a transcrição, apresentando os elementos da linguagem matemática que representam valores desconhecidos e associando, também, certos termos da língua portuguesa às operações matemáticas. Palavras como *dobro*, *triplo*, *soma*, *diferença*, *quadrado* entre outras, que remetem às operações básicas, devem ser de conhecimento prévio do aluno; se não o forem, o professor deve apresentar o significado de cada uma. Esse passo inicial tem por objetivo permitir que os alunos entendam esses significados e se acostumem com uma leitura mais adequada. Os termos escritos em vermelho, a seguir, indicam exemplos daquilo que se espera como resposta em cada item.

Atividade 1. Complete o quadro com a expressão em linguagem algébrica das frases a seguir.

Frase em língua portuguesa	Expressão em linguagem matemática
O dobro de certo número	$2x$
A soma de certo número com três	$y+3$
A diferença entre o triplo de algum número e uma dúzia	$3x-12$
O quociente de algum número por oito	$y \div 8$ ou $\frac{y}{8}$
A soma do quadrado de certo número com seis	x^2+6
O produto de vinte por algum número	$20x$
O dobro da soma de certo número com quatro	$2(y+4)$
O simétrico do quadrado de certo número	$-x^2$
A diferença entre a terça parte do quadrado de algum número e seu quádruplo	$\frac{x^2}{3}-4x$

Atividade 2. Escreva o significado das expressões abaixo:

a) $4x$ o quádruplo de certo número ou o produto de quatro por certo número.
b) $7y$ o produto de sete por certo número.
c) $x+12$ a soma de algum número com doze.
d) $8x-9$ a diferença entre o produto de oito por algum número, e nove.
e) $\frac{y}{6}$ a sexta parte de certo número ou o quociente de certo número por seis.
f) $(-x)^2$ o quadrado do simétrico de certo número.
g) y^2-2y a diferença entre o quadrado de certo número e seu dobro.
h) $3(x-4)$ o triplo da diferença entre algum número e quatro.

É importante que o professor faça a correção da atividade durante a aula, perguntando o que os alunos responderam em cada item. Dessa forma, será possível identificar possíveis erros comuns a vários alunos e corrigi-los imediatamente, assim como enfatizar a existência de diferentes respostas corretas para um mesmo item. Além disso, sugere-se que no gabarito da Atividade 1, o professor se utilize de diferentes vocábulos para representar as respostas. O ideal é utilizar as palavras da linguagem matemática que significam constantes desconhecidas (a saber, a, b ou c), pois são as que melhor representam a expressão “certo número”. No entanto, neste trabalho foram utilizadas as palavras que significam variáveis ou incógnitas, pois serão as mais empregadas pelos alunos. Uma expressão que melhor indicaria o uso de uma variável seria “certo valor” ou ainda “certa variável” (mas para esta, o aluno já deve conhecer o significado de variável).

Em primeiro lugar, a leitura das expressões em aula deve ser ajustada. Para que o aluno desenvolva a compreensão de que x, por exemplo, representa, de modo geral, uma variável ou uma incógnita, é importante fixar essas ideias por meio da leitura. Uma *leitura soletrada*[28] da expressão $4x - 9$ (a saber, quatro "xis" menos nove) pode ocasionar dois problemas: a omissão da noção de produto (ou de fator multiplicador, dependendo do contexto), e a leitura de x como uma letra do alfabeto latino (não traduzindo portanto seu significado matemático). Uma leitura melhor é "a diferença entre o quádruplo de certo número e nove", consistindo em uma *leitura interpretada*[29], assim como "a diferença entre o produto de quatro por certo valor, e nove" (ou, por exemplo, "a diferença entre o quádruplo de certo valor e nove"). Em uma leitura interpretada, são enfatizadas as operações realizadas e os significados matemáticos de cada palavra. Vale destacar que essa leitura deve ser adaptada de acordo com o contexto em que a expressão está inserida. Assim, as atividades em que os alunos devem escrever, em linguagem matemática, a expressão que corresponde a frases do tipo "a soma do quadrado de certo número com seu dobro" devem ser estimuladas, para que eles aprendam a representação adequada; e o inverso (escrever em língua portuguesa o significado de uma expressão matemática) deve ser feito para que eles façam a leitura correta. Além disso, indica-se fazer essa leitura durante toda a vida escolar, evitando, ao máximo, as leituras soletradas.

Vale ressaltar que, ao realizar uma leitura interpretada, utiliza-se a palavra "certo" em vez de "um" (mais usual). Na frase "a diferença entre o quádruplo de um valor e nove", a palavra "um" é artigo indefinido, com o sentido de *qualquer* ou *algum* (pronomes indefinidos), dependendo do contexto; porém, é frequente o aluno ter a falsa compreensão de que a variável tem valor 1 (nesse caso), o que o leva, às vezes, a substituí-la por esse valor. A palavra "certo", ou mesmo a palavra "qualquer", substituindo o artigo indefinido "um", elimina essa dualidade, por serem pronomes indefinidos.

É importante lembrar que as palavras "soma", "diferença", "produto",

---

[28] De acordo com Cunha e Velasco (2019) uma leitura soletrada de uma expressão matemática é aquela em que se lê cada letra separadamente. Em língua portuguesa, seria como ler a palavra "casa" como "cê", "a", "ésse", "a". Enquanto na linguagem natural as letras representam fonemas, em linguagem matemática elas representam significados. Assim, a leitura das palavras formadas é feita por meio da união dos significados que cada parte da palavra representa (assim como a leitura da palavra "casa" é a união dos fonemas de cada letra).

[29] Uma leitura interpretada de uma expressão matemática é aquela que explícita o seu significado, de acordo com Cunha e Velasco (2019). Para isso, é necessário que o leitor reflita sobre a expressão como um todo e compreenda o que ela representa, para, em seguida, prosseguir com a leitura.

“quociente” e “quadrado” se referem ao resultado das operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação (de expoente 2), respectivamente. Essa ideia deve ser bastante reforçada com os alunos, para que eles entendam que a leitura interpretada de $2a$ como o “dobro de certo valor” refere-se ao resultado da operação de multiplicação de 2 por a (associada ao cálculo do dobro), e que para determinar esse resultado deve-se realizar a operação que a origina. Essa é uma sutil diferenciação, mas a compreensão e a utilização dos termos corretos, permite melhorar o vocabulário matemático do aluno e diminuir suas dificuldades ao ler expressões escritas em linguagem matemática.

Aliado à leitura, as ferramentas que o aluno necessita para se expressar devem ser apresentadas desde o início, enfatizando a escrita correta e seus usos adequados. Inicialmente, o professor apresenta aos alunos que valores desconhecidos são usualmente representados, em linguagem matemática, por letras do alfabeto latino, e reforça que esse grupo de vocábulos fazem parte do alfabeto da linguagem matemática tanto quanto os numerais. Em um primeiro momento, utilizam-se diferentes letras para mostrar a possibilidade de se expressar dessa forma; contudo, é importante ficar claro que as letras do alfabeto da linguagem matemática que representam incógnitas ou variáveis reais são, em geral, x, y e z. Todas essas letras devem ser escritas no quadro com letra cursiva e deve ser utilizado o ambiente matemático para representá-las nos materiais didáticos e avaliações. É interessante destacar, nesse período, que as outras letras do alfabeto latino também possuem significados importantes e deve-se indicar seu uso, mesmo que não se aprofunde. Apresentar, por exemplo, que a e b costumam representar constantes reais desconhecidas, que r, s e t são usualmente nomes de retas (em *Geometriquês*), e que m e n costumam representar constantes inteiras é de fundamental importância para a devida compreensão das expressões matemáticas.

Nos materiais impressos, a escrita em ambiente matemático (no *Word*, por exemplo, é o ambiente de Equação) auxilia o aluno a destacar os elementos matemáticos apresentados em um texto (no caso de problemas) e diferencia da escrita em língua portuguesa, reforçando a ideia de que são linguagens diferentes. Em manuscritos, por sua vez, essa diferenciação é mais complicada, pois implicaria usar uma forma diferente de escrever para as letras do alfabeto da linguagem matemática que fazem parte do alfabeto latino. Contudo, a escrita cursiva adequada acostuma o aluno a visualizar esses elementos. O professor, então, deve apresentar a escrita manuscrita corretamente e destacar que o aluno também deve escrever dessa forma, reforçando em todas as aulas, até que isso esteja bem estabelecido com a turma.

Uma diferenciação recomendada é entre o x (que representa variável, por exemplo) e o operador de multiplicação $\times$. Muitos alunos, ao verem pela primeira vez a expressão $3x - 8$, assim como outras desse tipo, interpretam-na (erroneamente) como o produto de 3 por -8 (que, na verdade, se escreve como $3 \times (-8)$, uma expressão que os alunos aprenderam anteriormente, no mesmo ano, ao tratar de operações com números inteiros). Escrever a expressão $3x - 8$ inadequadamente, tanto em editores de texto quanto de forma manuscrita, como 3x $-$ 8, pode reforçar a interpretação errada, e deve ser evitado. Isso se reflete em muitos casos quando o aluno realiza a operação de multiplicação, acreditando ser uma outra forma de representá-la, apesar de a expressão correta do produto ser pontuada com parênteses. Possivelmente, para evitar que o aluno confunda, os materiais do 7° ano costumam substituir o operador de multiplicação que o aluno conhece pelo operador ·, usado na Álgebra. Sabendo que isso pode gerar outras dificuldades, principalmente o aluno não identificar a operação corretamente, o mais adequado é escrever esses dois elementos de maneira diferente no quadro (tomando cuidado para escrever a variável com letra cursiva x, em vez de “x”, para diferencial do operador $\times$) e incentivar os alunos a fazerem o mesmo.

Uma das particularidades dos dialetos *Aritmetiquês* e *Algebrês*, que também costumam causar dificuldades na passagem da Aritmética para a Álgebra, é a *justaposição* (isto é, a junção de duas ou mais palavras, sem alteração dos elementos formadores). Cunha e Velasco (2019) destacam que a justaposição de palavras que representam quantidades possui significados diferentes nesses dialetos. Em *Aritmetiquês*, uma justaposição representa uma ideia de adição, como em 357 (justaposição das palavras 3, 5 e 7, que, neste caso, significa a *soma* de 3 centenas, com 5 dezenas e com 7 unidades, isto é $300 + 50 + 7$), ao passo que, em *Algebrês*, representa um produto (isto é, o resultado de uma multiplicação), como em ab (justaposição das palavras a e b, que significa o *produto* de duas constantes desconhecidas a e b, isto é, o resultado da operação $a \times b$). Assim, é comum observar que, ao substituir uma variável por uma quantidade conhecida, os alunos utilizam a ideia de justaposição no *Aritmetiquês*, em vez de realizar a operação de multiplicação e obter o produto desejado. Por exemplo, ao substituir x por 7 na expressão $3x - 8$, o aluno muitas vezes efetua a operação $37 - 8$ (obtendo 29 como resultado), em vez de $3 \times 7 - 8$ (que vale 13), que é a expressão (e seu resultado) correta ao substituir o valor 7 adequadamente. Mesmo que todos os detalhes de justaposição não sejam explicitados para o aluno, é importante que o professor reforce a diferença em ambos os casos, tendo como hábito fazer uma leitura interpretada de ab como "o produto de a por b".

Um outro ponto a destacar diz respeito ao sinal de igualdade. Em Aritmética, o aluno está mais acostumado a identificar sinal com seu significado operacional. A partir da introdução de equações, o significado necessário para que o aluno resolva as atividades propostas é a ideia de equivalência. Esta pode ser tratada inicialmente com valores, para, em seguida, ser generalizada, como indica a própria BNCC, nas orientações relacionadas à Álgebra, descrita a seguir:

> A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se $2 + 3 = 5$ e $5 = 4 + 1$, então $2 + 3 = 4 + 1$. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita. (BNCC, 2017, p. 270).

Nesse caso, a leitura correta dessas expressões pode começar a destacar os diferentes significados do sinal de igualdade. Particularmente nesses exemplos da BNCC, as leituras adequadas são "a adição de dois com três resulta em cinco" (em $2 + 3 = 5$), e "cinco é o resultado da adição de quatro com um" (em $5 = 4 + 1$), indicando, em ambas, o resultado de operações; ao passo que "a soma de dois com três equivale à soma de quatro com um" (em $2 + 3 = 4 + 1$) indica uma equivalência de expressões. Como um exemplo algébrico, considere a seguinte igualdade condicional[30]: $7x + 9 = 16$. Caso o professor leia soletradamente ("sete 'xis' mais nove é igual a dezesseis"), o aluno pode não entender que o objetivo é determinar o valor que a incógnita representa e se fixar na noção de resultado do sinal de igualdade, acreditando assim que não há nada para ser feito. Por outro lado, se a leitura for "A adição do produto de sete por uma certa incógnita e nove resulta em dezesseis.", o próprio termo "incógnita" (se bem compreendido anteriormente, um valor desconhecido que se deseja determinar) indica que o objetivo é descobrir o(s)

[30] Os diferentes significados do sinal de igualdade estão descritos em Miranda (2019), sendo igualdade condicional aquela que "estabelece uma condição que deve ser satisfeita por certos valores [...] a fim de que possamos determiná-los, ou chegar à conclusão de que eles não existem." (MIRANDA, 2019, p. 45).

valor(es) condicionado(s) à expressão dada.

Como parte do desenvolvimento do raciocínio matemático, é importante visualizar um problema e transcrever suas informações em linguagem matemática. Portanto, a modelagem matemática é fundamental nesse período, pois corresponde justamente a descrever um problema em linguagem matemática, a fim de poder resolvê-lo. O professor deve guiar o aluno, com muitos exemplos, indicando quais ferramentas são as melhores para essas transcrições.

Um destaque importante na modelagem é o uso de letras por intermédio de um processo mnemônico. Inicialmente, o objetivo principal é fazer o aluno compreender que valores desconhecidos são representados por letras do alfabeto latino e utilizar essa escrita a partir de problemas aplicados. Para exemplificar, considere o seguinte exercício:

Atividade 3: Ronaldo trabalha como vendedor em uma loja e seu salário é composto por uma parte fixa de R\$ $1\,420{,}00$ acrescido de R\$ $56{,}00$ de comissão por cada produto vendido por ele durante o mês.

a) Quais constantes estão presentes no problema?
b) Quais variáveis estão presentes no problema?
c) Escreva uma expressão algébrica que representa o salário de Ronaldo em um mês (em termos do número de produtos vendidos por ele).
d) Com base nessa expressão, calcule a quantia que Ronaldo receberá se vender em um mês 48 produtos.

Os itens a) e b) têm o intuito de acostumar o aluno a buscar essas informações no problema e destacá-las, a fim de modelar mais facilmente o problema apresentado. Espera-se como resposta, para o item a), que a parte fixa do salário (a saber, R\$ $1\,420{,}00$) e o valor unitário de comissão (a saber, R\$ $56{,}00$) são as constantes do problema. Já para o item b), tanto o número de produtos vendidos quanto o salário são variáveis. Após algumas atividades desse tipo, sugere-se retirar esses dois itens, iniciando com perguntas como a do item c), para que o aluno realize esse raciocínio por conta própria.

Para o item c), espera-se uma resposta do tipo $s = 1\,420{,}00 + p \times 56{,}00$ (ou, equivalentemente, $s = 1\,420 + 56p$), onde s e p representam, mnemonicamente, o salário de Ronaldo em um mês e o número de produtos vendidos por ele nesse período, respectivamente. Vale destacar que, após os alunos atingirem esse primeiro objetivo, por meio de diversos exercícios como o exemplo, o professor deve informá-los quais letras representam variáveis (e incógnitas) e quais outras terão funções diferenciadas na Matemática, como foi dito anteriormente.

Vale ressaltar que uma resposta do tipo $1\,420{,}00 + p \times 56{,}00$ (isto é, sem estabelecer uma correlação entre o salário mensal e os demais dados do enunciado) deve ser considerada incompleta, visto que o problema indica que o salário mensal de Ronaldo deve ser expresso em função do número de produtos vendidos, devendo ser representado, portanto, por meio de uma equação (e não por meio de uma expressão algébrica sem igualdade).

Por fim, espera-se como resposta ao item d) a expressão $s = 1\,420{,}00 + 48 \times 56{,}00$, que resulta em $s = 4\,108{,}00$. É possível que o aluno responda primeiro esse item, por compreender o cálculo que deve ser feito, porém sem escrever a expressão algébrica correspondente. Nesse caso, a dificuldade do aluno não está na interpretação do texto, mas na escrita em linguagem matemática. Caso o aluno apresente a solução sem escrever em linguagem adequada, o professor deve estimulá-lo a escrever a expressão a partir do raciocínio demonstrado. Uma boa opção é inverter os itens c) e d) (e incluir mais valores conhecidos), para que os alunos primeiro façam cálculos com valores conhecidos, para depois generalizar. A ideia principal é que o aluno desenvolva em si a capacidade de refletir sobre os problemas e explore os diferentes raciocínios, a fim de aumentar suas habilidades.

Os conceitos de expressão, equação, variável e incógnita, por exemplo, devem ficar muito claros nesse período. E a indicação é que o aluno diferencie variável e incógnita da forma correta. Como dito anteriormente, chama-se variável quando o valor desconhecido varia em diversos valores na expressão em que ele está, enquanto será chamado de incógnita em equações onde se deseja determinar esse valor. Em outros termos, o ideal é utilizar o sentido dessas palavras na língua portuguesa para justificar o uso e reforçar o significado matemático, como visto na Seção 2.1.

A ideia de relação entre valores desconhecidos pode (e deve) ser apresentada, nesse período, utilizando-se de exemplos, mantendo o cuidado de representar essa relação por meio de equações, ou seja, nomeando todos os valores desconhecidos que estão presentes na relação. Considerando que a ideia de relação entre objetos é a base de função, usar esse tipo de exemplo para iniciar o raciocínio algébrico pode auxiliar na compreensão desses conceitos posteriormente. A seguir, tem-se descrita uma atividade simples cujo intuito é iniciar essas discussões.

Atividade 4: Escreva em linguagem matemática as sentenças a seguir:

a) Hugo possui o dobro de balas de sua irmã, Carla.
b) Hoje, Marcos possui o triplo da idade de seu filho, Alan.
c) Verônica e Júlio possuem juntos uma quantia de R$ $1\,320{,}00$ para comprar uma televisão, e Verônica possui o quádruplo da quantia de Júlio.

As respostas mais adequadas aos itens a), b) e c) são, respectivamente, $h = 2c$, $m = 3a$ (esta vista na Seção 2.1) e $v + j = 1\,320{,}00$, $v = 4j$, sendo a resposta do item c) um sistema de equações, comumente escrito como

$$\begin{cases} v + j = 1\,320{,}00 \\ v = 4j \end{cases}.$$

No entanto, muitas vezes, são esperadas como soluções desses itens, simplesmente, $2c$, $3a$ e $4j + j = 1\,320{,}00$, o que não reflete as relações descritas nas sentenças originais. As duas primeiras descrevem “o dobro de balas de Carla” e “o triplo da idade de Alan”, respectivamente; já a última faz parte da resolução do problema (ao substituir v por $4j$ no sistema original) e não da modelagem propriamente dita.

A partir desses exemplos, é possível iniciar discussões que impactarão na compreensão do conceito de função. Uma delas é se os elementos apresentados no problema podem variar, ou seja, se existe uma relação entre variáveis, podendo, portanto, originar funções. No exemplo de Marcos e Alan (item b) acima, não existe essa variação, pois a idade de Marcos não será sempre o triplo da de Alan; no entanto, é possível alterar a situação de modo a obter uma relação entre as idades que não esteja determinada por um momento específico. Por exemplo, o caso em que “Marcos é trinta e dois anos mais velho do que Alan.” (que pode ser escrita, em linguagem matemática, como $m = a + 32$) descreve uma relação entre as idades que ocorre sempre, independentemente do momento; mais especificamente, existe uma relação permanente entre variáveis (inteiras). Vale destacar que essa relação origina uma função que descreve a idade de Marcos em termos da de Alan.

Outra discussão interessante é em qual conjunto numérico estão as variáveis. No caso das idades, os valores são números naturais, mas é importante também apresentar exemplos em que os números tratados são racionais. Se forem utilizados ainda exemplos descritos por uma mesma equação, já se começa a construir os conceitos completos de relação e função (ver Atividade 14, na Seção 3.3). Essas atividades não são obrigatórias nesse período, porém trazem mais riqueza ao aprendizado a longo prazo.

Alguns problemas de proporcionalidade também podem ser discutidos, ao final do ano, quando a turma já demonstrar habilidades com as equações. Durante as aulas de razão e proporção, a inclusão de perguntas que levem o aluno a destacar a relação entre as duas grandezas, e até mesmo, escrever a equação que represente essa relação, pode ser um princípio das discussões do conceito de função. Para exemplificar, considere o exercício:

Atividade 5: Dona Maria pagou R\$ $39{,}60$ por 6 kg de farinha de trigo. Quanto ela pagará por $8{,}5$ kg?.

Primeiro, é necessário perceber que o valor a ser pago pela farinha de trigo é proporcional à quantidade que se deseja comprar. Portanto, a razão entre o valor a ser pago por determinada quantidade de farinha de trigo e essa tal quantidade precisa ser constante, e pode ser identificada pela relação já conhecida (a saber, paga-se R\$ $39{,}60$ por 6 kg). Logo, uma proporção que modela o problema é: $\frac{39{,}60}{6} = \frac{x}{8{,}5}$; desta forma x indica o valor a ser pago por $8{,}5$ kg de trigo. Nesse caso, pode-se determinar o valor de x multiplicando-se por $8{,}5$ em ambos os membros da igualdade ou mesmo utilizando-se a propriedade de proporções que afirma que o produto dos meios equivale ao produto dos extremos. Após os cálculos, obtém-se que o valor pago por $8{,}5$ kgde farinha é R\$ $56{,}10$.

A discussão proposta aqui é levar os alunos a compreender o significado de cada elemento da proporção, em vez de simplesmente utilizar a regra de três. Desse modo, pode-se destacar que a primeira razão (assim como a segunda razão) corresponde ao preço a ser pago por 1 kg de trigo. Logo, o valor da incógnita x também pode ser determinado por meio do produto da quantidade de trigo que se deseja comprar (a saber, $8{,}5$ kg) pelo preço de 1 kg de trigo (determinado, conforme dito anteriormente, por $\frac{39{,}60}{6}$, que resulta em R\$ $6{,}60$). Após a realização desse exercício, o professor pode escrever (juntamente com os alunos) a expressão que representa a relação entre a quantidade de quilos e o preço final, que neste caso é $p = \frac{39,60}{6} \cdot q$ (ou ainda, $p = 6,60 \cdot q$), onde p é o preço final e q é a quantidade de quilos de farinha de trigo considerada.

Por ser o ano em que os alunos iniciam as atividades algébricas, é importante que, apesar de simples, os exercícios estabeleçam uma base adequada, não só com relação à manipulação algébrica, mas também com respeito à linguagem.

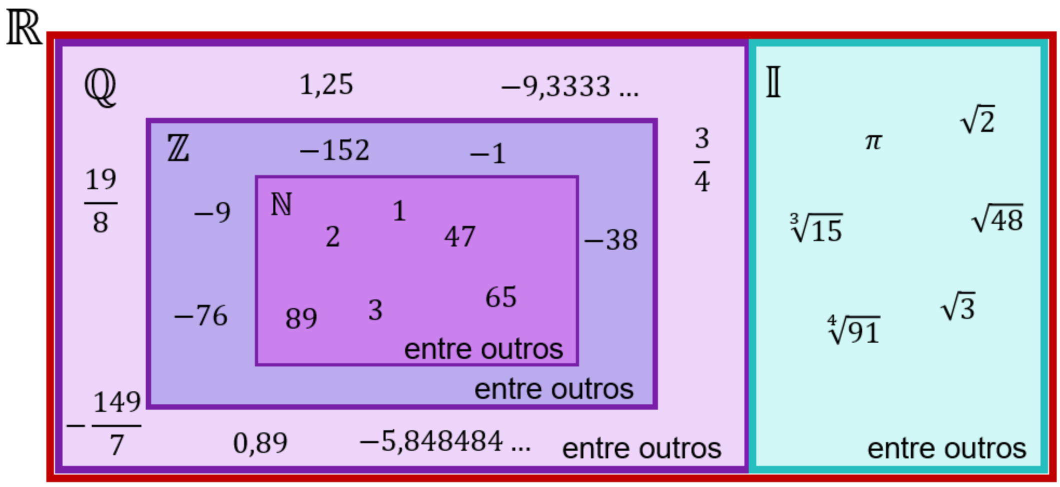
3.2 **Propostas para o 8º ano**

O ideal é que o aluno chegue ao 8° ano sabendo determinar o valor de uma incógnita e manipular expressões mais simples. Além disso, todos os tópicos destacados nas propostas do 7° ano devem ter sido implementados. Caso isto não tenha acontecido, ao revisar os conteúdos no começo do ano, ou ao iniciar assuntos relacionados, o professor deve apresentar resumidamente essas ideias e as colocar em prática em seu dia a dia. O período de adaptação da turma ao professor permite essas intervenções e, com o tempo, os alunos se acostumam com uma linguagem mais adequada.

No início do 8° ano, é definido o conjunto dos números racionais e alguns exemplos de números irracionais são apresentados, de acordo com o currículo analisado nesta dissertação. Sendo assim, indica-se que, nesse momento, a linguagem de conjuntos seja apresentada para os alunos, assim como os operadores relacionais de inclusão e de pertinência. Apresentar os diagramas de Venn com os conjuntos numéricos é um bom iniciador e serve para que o aluno se familiarize com a relação de inclusão que os envolve. Inicialmente, o professor desenha no quadro retângulos (ou elipses), representando os conjuntos numéricos. Junto com a turma, ele apresenta a característica de cada conjunto e acrescenta exemplos de números no conjunto correspondente. A Figura 20 apresenta um modelo de um resultado final dessa dinâmica. Além disso, pode-se construir uma atividade com esse quadro, listando números para que os alunos incluam na parte correta.

Após essa apresentação, pode-se propor atividades usando conjuntos finitos, com as representações adequadas (nome do conjunto sendo uma letra latina maiúscula, elementos representados em lista, separados por vírgula e entre chaves; por exemplo, $A = \{1, 2, 3\}$). É sugerido que as operações como união e interseção ainda não sejam apresentadas, por se tratar de um aprofundamento. Porém, tanto a escrita quanto a leitura interpretada dos conjuntos devem ser introduzidas nesse momento, assim como as leituras de expressões que representam essa relação de inclusão.

Figura 20 – Diagrama de Venn representando o conjunto dos números reais



Fonte: A autora, 2023

As atividades 6 e 7, a seguir, também tratam a relação de inclusão: uma com conjuntos numéricos finitos e outra com o conjunto dos números reais e seus subconjuntos mais habituais (números naturais, inteiros, racionais e irracionais). Os objetivos dessas atividades são familiarizar o aluno com a forma de nomear conjuntos numéricos quaisquer em *Algebrês* (a saber, por letras latinas maiúsculas), as palavras do vocabulário da linguagem matemática que representam as relações de inclusão e pertinência e as relações existentes entre os conjuntos numéricos infinitos.

Atividade 6: Observando os conjuntos A, B e C abaixo, complete os espaços em branco com $\in$, $\notin$, $\subseteq$ e $\nsubseteq$, indicando a existência (ou não) das relações de pertinência e inclusão, conforme o caso.

$$A = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$$

$$B = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}$$

$$C = \{0, 1, 2, 3\}$$

a) -5____ B $(-5 \notin B)$
b) -3____ A $(-3 \in A)$

c) $\frac{3}{2}$___ C ($\frac{3}{2} \notin C$)
d) -1___ B ($-1 \notin B$)
e) 3___ A ($3 \in A$)
f) 3___ B ($3 \in B$)
g) C___ A ($C \nsubseteq A$)
h) C___ B ($C \subseteq B$)

Atividade 7: Leia as afirmativas abaixo, identificando se são verdadeiras ou falsas, e corrija as falsas.

a) $\sqrt{36} \in \mathbb{N}$ Verdadeira, pois $\sqrt{36}$, que corresponde a 6, é um número natural.
b) $2{,}15 \in \mathbb{Q}$ Verdadeira, pois $2{,}15$ é um número racional.
c) $\sqrt{2} \notin \mathbb{I}$ Falsa, pois $\sqrt{2}$ é um número irracional, ou seja, $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.
d) $\pi \in \mathbb{Q}$ Falsa, pois π não é um número racional, ou seja, $\pi \notin \mathbb{Q}$.
e) $-4 \in \mathbb{Q}$ Verdadeira, pois -4 é um número inteiro, logo também é racional.
f) $0 \notin \mathbb{R}$ Falsa, pois 0 é um número real, ou seja, $0 \in \mathbb{R}$.
g) $-\frac{15}{5} \in \mathbb{Z}$ Verdadeira, pois $-\frac{15}{5}$, que corresponde a -3, é um número inteiro.
h) $12 \notin \mathbb{N}$ Falsa, pois 12 é um número natural, ou seja, $12 \in \mathbb{N}$.

Na Atividade 6, estuda-se o significado das palavras $\in$ e $\subseteq$ e suas negações. A frase $-3 \in A$ (resposta correta do item b)) significa “o três negativo é um elemento do conjunto A”. A frase $C \subseteq B$ (resposta correta do item h)), por sua vez, significa que “C é um subconjunto[31] de B”. A leitura das negações é feita de forma análoga. Por exemplo, a frase $-5 \notin B$, do item a), pode ser lida como “o cinco negativo não é um elemento do conjunto B”; ao passo que $C \nsubseteq A$ significa “C não é um subconjunto de A”. A proposta é ler essas expressões dessa maneira com a intenção de facilitar a compreensão do aluno quanto às palavras apresentadas e incluir a explicação do que é um subconjunto.

Na Atividade 7, o objetivo é o aluno identificar quais elementos pertencem ou não a cada um dos conjuntos indicados, avaliando através das características de cada conjunto se a sentença é verdadeira ou falsa. Para isso, é importante que ele tenha

[31] Considera-se neste texto que a palavra “$\subseteq$” representa a relação de inclusão entre conjuntos, sendo, portanto, lida como “ser subconjunto de” (ou “estar contido em”). Ressalta-se que, nesse caso, os conjuntos relacionados podem ser iguais. Caso fosse utilizada neste texto a noção de subconjunto próprio (não usualmente apresentada no Ensino Básico), a palavra “$\subset$” seria utilizada; em outros termos, “$\subset$” significa “ser subconjunto próprio de" (ou “estar contido propriamente em”, ou ainda “estar estritamente contido em”).

compreendido o significado de $\in$ e $\notin$. Além disso, ao fazer a correção, o professor pode destacar a leitura interpretada das expressões. Assim, em vez de ler a expressão $-4 \in \mathbb{Q}$ como “menos quatro pertence a ‘quê’ ”, a leitura indicada é “o quatro negativo é um número racional”. Pode-se ainda fazer uma outra atividade com a leitura de expressões como as verdadeiras. Vale destacar que usar identificadores[32] (em vez do nome) de um determinado número auxilia o aluno a analisar o significado destes, e evita erros como “toda representação fracionária não identifica um número inteiro” ou “a raiz quadrada de um número qualquer é sempre irracional”.

Além do trabalho com os conjuntos numéricos, é no 8º ano que se inicia o estudo dos polinômios, o que pode auxiliar os alunos nas representações futuras das leis de formação de certas funções (a saber, as funções polinomiais). Nesse caso, é de extrema importância compreender que os coeficientes dos monômios que constituem um polinômio são constantes usualmente representadas por letras a, b e c, por exemplo (quando forem desconhecidas) ou por numerais (quando conhecidas). Como sugerido, caso essa diferenciação não tenha sido feita, é necessário que o seja neste momento. A devida compreensão do conceito de polinômio e das operações que os envolvem auxilia tanto no entendimento de operações com funções (futuramente) quanto na determinação de funções equivalentes e que facilitem a construção de sua representação gráfica.

É importante que o professor relembre as propriedades das operações aritméticas para tratar das operações com polinômios. Essas propriedades devem ser relembradas usando inicialmente números, para depois serem generalizadas. Esse processo é necessário para que o aluno compreenda a necessidade de utilizar as propriedades e realize os procedimentos de cálculos com polinômios de forma adequada. Por exemplo, antes de propor exercícios baseados na distributividade da multiplicação pela adição (isto é, para todos $a, b, c \in \mathbb{R},\ a(b+c) = ab + ac$), pode-se fazer exemplos comparando os valores de $8 \times (3+4)$ e de $8 \times 3 + 8 \times 4$, identificando, assim, a equivalência dessas expressões. Para o aluno, iniciar com algo mais familiar possibilita uma progressão de assunto de maneira mais tranquila.

Outro tema significativo, nesse período, é representar retas no plano cartesiano, a partir de sua equação, facilitando assim a construção da representação

---

[32] De acordo com Cunha e Velasco (2019), “um identificador, geralmente uma locução, indica uma das diferentes formas (operações) de obter o objeto [matemático] em questão”.

gráfica de funções afins. Portanto, o aluno aprender a esboçar uma reta no plano cartesiano nesse momento, auxilia na construção do gráfico no ano seguinte. Atividades simples servem ao propósito inicial, como, por exemplo: “Represente graficamente a reta descrita pela equação $y = 3x - 4$”. Para encontrar a solução, o aluno deve ser orientado a escolher alguns valores reais para x (dois são suficientes, pois, conforme visto anteriormente, dois pontos determinam uma reta) e determinar os valores de y correspondentes.

É interessante também apresentar equações equivalentes a essa, como $3x - y = 4$ (ou mesmo $y - 3x + 4 = 0$), pois isso possibilita a não associação entre equação e lei de formação de uma função afim. Vale destacar que tal associação não ocorreria nessa fase, visto que, no 8º ano, ainda não se conhece o conceito de função. Além disso, facilita o uso do método gráfico para determinar a solução de um sistema de equações lineares (isto é, polinomiais de primeiro grau) com duas variáveis, já que as equações em um sistema costumam ser apresentadas da forma $ax + by = c$.

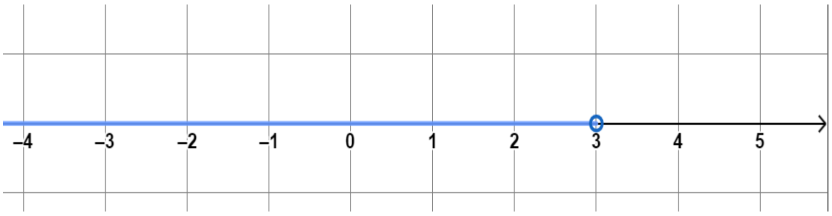
As inequações polinomiais de 1° grau, também presentes no 8º ano, devem ser interpretadas (por meio de uma leitura adequada) com o intuito de compreender melhor seu significado. Desta forma, entende-se que tão importante quanto saber manipulá-las é compreender seu sentido. Além disso, é positivo mostrar aos alunos a representação gráfica do conjunto solução das inequações. Por exemplo, considere a seguinte questão:

Atividade 8: Expresse graficamente o conjunto constituído pelas soluções reais da inequação $4x + 5 < 17$.

Em primeiro lugar, é importante interpretar seu significado. Nesse caso, busca-se determinar todos os valores de uma incógnita cuja soma de seu quádruplo com cinco seja inferior a dezessete. Em seguida, deve-se manipular a inequação, por meio de propriedades algébricas, com o intuito de obter outra inequação (equivalente a ela) em que a variável esteja isolada no primeiro membro. Dessa forma, é possível determinar o conjunto solução da inequação original. No exemplo dado, após a referida manipulação algébrica, obtém-se $x < 3$. Em outros termos, o conjunto solução da inequação original é dado pelo conjunto constituído pelos valores reais inferiores a 3; isto é, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

Para a representação gráfica desse conjunto solução, basta traçar a reta numérica e ressaltar sobre ela os valores pertencentes a tal conjunto. É necessário também enfatizar que 3 não é um elemento de tal conjunto, pois 3 não é inferior a si mesmo. Para expressar graficamente a exclusão desse valor, usualmente põe-se um pequeno círculo aberto sobre ele (Figura 21).

Figura 21 – Representação do conjunto solução da inequação (Atividade 8) na reta numérica



Fonte: A autora, 2023

Nesse período, a modelagem tem também um papel fundamental. Como os alunos devem estar familiarizados com expressões algébricas, as atividades de modelagem devem se fazer ainda mais presentes, levando a equações polinomiais de primeiro grau mais complexas, ou a inequações. Como exemplo, considere o seguinte problema:

Atividade 9: Qual a idade atual de Marcos, sabendo que, daqui a dois anos, a soma do dobro de sua idade com ela mesma será igual a 24 anos?

Nesse caso, o problema é modelado por uma equação do tipo $2(m+2)+(m+2)=24$, sendo m a idade atual de Marcos. Ao manipular essa expressão algébrica, em geral, utiliza-se a distributividade para escrever $2(m+2)$ da forma $2m+4$ e, posteriormente, soma-se essa expressão a $m+2$. No entanto, vale ressaltar que não existe a necessidade de se utilizar essa propriedade. Com efeito, como a soma do dobro de um valor com ele mesmo é equivalente ao triplo desse valor, logo $2(m+2)+(m+2)=3(m+2)$. Assim, a equação original é equivalente a $3(m+2)=24$. Portanto, a terça parte do primeiro membro equivale à terça parte do segundo. Assim, tem-se $m+2=8$ e, consequentemente, $m=6$.

O mesmo pode ser feito com as inequações, conforme indica o próximo exemplo:

Atividade 10: Camila deseja fechar um plano de internet para sua casa e, pesquisando nas principais empresas, chegou a dois planos para 500 Mb:

Empresa A: $R\$\ 35{,}00$ e $R\$\ 0{,}45$ a cada Mb a mais utilizado.

Empresa B: $R\$\ 59{,}00$ e $R\$\ 0{,}25$ a cada Mb a mais utilizado.

A partir de quantos Mb a mais, o plano da empresa B passa a ser mais vantajoso que o da empresa A?

Primeiro, é necessário determinar as equações que indicam quanto Camila pagará pelo plano em cada empresa:

$$p_A = 35{,}00 + 0{,}45n \text{ e } p_B = 59{,}00 + 0{,}25n,$$

onde p_A e p_B indicam os valores a serem pagos nos planos das empresas A e B, respectivamente, e n indica o número de Mb utilizados além do plano.

Para que o plano da empresa B seja mais vantajoso, seu valor final deve ser menor que o da empresa A. Assim, busca-se determinar os valores de n de modo que a seguinte inequação seja verdadeira:

$$p_B < p_A.$$

Substituindo pelas expressões obtidas, tem-se:

$$59{,}00 + 0{,}25n < 35{,}00 + 0{,}45n$$

Manipulando algebricamente essa inequação, obtém-se $n > 120$, ou seja, para que o plano da empresa B seja mais vantajoso, deve-se usar mais de 120 Mb a mais por mês.

Para se chegar à inequação que soluciona o exercício, cada aspecto do problema deve ser anotado, facilitando que o aluno identifique seus elementos.

De maneira geral, o foco do 8º ano é desenvolver melhor as habilidades algébricas, permitindo assim a apresentação de conceitos mais elaborados nos anos seguintes.

3.3 **Propostas para o 9º ano**

Conforme dito anteriormente, o 9° ano é o momento em que os alunos são formalmente apresentados ao conceito de função. Nessa fase, supõe-se que os alunos já saibam trabalhar bem com equações (inclusive as polinomiais de 2º grau, tratadas nesse mesmo ano, antes de funções) e com expressões em geral.

Ao fim desse ano, espera-se que os alunos tenham o embasamento necessário para o aprofundamento de funções (a ser realizado no ano seguinte, sentindo-se assim seguros para avançar no conteúdo) e que saibam expressar corretamente, em linguagem matemática, os assuntos relacionados ao tema. Embora a orientação da BNCC seja focar em situações práticas, os princípios que caracterizam uma função devem ser bem sedimentados para que, no ano seguinte, ao lidar com conjuntos, o aluno não acredite que função passou a ser um conteúdo completamente diferente (isto é, desconectado da noção de conjunto). Antes de iniciar propriamente a noção de função, é necessário apresentar (caso ainda não tenha sido feito) o conceito de produto cartesiano. Para isso, é importante tratar de exemplos práticos (mais concretos), como a separação da própria turma em dois grupos e identificar quais duplas podem ser formadas com um elemento de cada. Caso a turma seja muito grande, pode-se selecionar apenas alguns de seus elementos em cada grupo, facilitando a visualização do produto cartesiano de um pelo outro. Para ilustrar considere a seguinte atividade[33]:

Atividade 11: Liste dois grupos de alunos da sua turma: aqueles que se sentam na fileira da esquerda da sala, e aqueles que se sentam na fileira direita. Quais são todos os pares possíveis selecionando um aluno da fileira da esquerda e um aluno da fileira direita, nessa ordem?

Considerando-se a hipótese de que, a esquerda, estão os alunos Rodrigo, Pedro, Larissa e Beatriz, enquanto na fileira da direita estão os alunos Emily, Melissa e Nathan. Desse modo, os conjuntos formados são $E = \{\text{Rodrigo, Pedro, Larissa, Beatriz}\}$ e $D = \{\text{Emily, Melissa, Nathan}\}$. Todos os pares que podem ser formados constituem o produto cartesiano de E por D. Logo, nesse caso, tem-se:

$$E \times D = \{(\text{Rodrigo, Emily}), (\text{Rodrigo, Melissa}), (\text{Rodrigo, Nathan}),$$
$$(\text{Pedro, Emily}), (\text{Pedro, Melissa}), (\text{Pedro, Nathan}), (\text{Larissa, Emily}), (\text{Larissa, Melissa}),$$
$$(\text{Larissa, Nathan}), (\text{Beatriz, Emily}), (\text{Beatriz, Melissa}), (\text{Beatriz, Nathan})\}.$$

[33] Para ilustrar possíveis respostas para as Atividades 11, 12 e 13, são feitas suposições de escolhas dos alunos de uma turma.

É importante também observar que o par $(\text{Rodrigo}, \text{Emily})$, por exemplo, não é o mesmo que $(\text{Emily}, \text{Rodrigo})$, pois os pares são ordenados. Além disso, $(\text{Emily}, \text{Rodrigo})$ não pertence a $E \times D$ (mas sim a $D \times E$). Uma vantagem desse tipo de atividade é enfatizar que produtos cartesianos podem ser feitos com conjuntos de qualquer natureza (não apenas os numéricos).

Essa atividade também é válida para relembrar a construção de conjuntos em diagramas e apresentar o esquema de flechas.

A partir daí (ainda utilizando exemplos práticos e conjuntos não necessariamente numéricos), introduz-se, formalmente, o conceito de relação. Para isso, propõe-se explicar aos alunos que relação é um subconjunto qualquer do produto cartesiano, mesmo a palavra subconjunto não sendo usual para eles (caso a turma não tenha aprendido no ano anterior, conforme a orientação na Seção 3.2, cabe ao professor explicar esse conceito). Um exemplo de uma relação usando grupos de alunos de uma turma pode ser obtida da seguinte maneira:

Atividade 12: Voltando aos conjuntos da Atividade 11, pede-se às alunas do conjunto E que indiquem quem elas acham que são os dois alunos mais dedicados do conjunto D.

Desse modo, cada uma das duas alunas de E forma, com seus escolhidos em D, dois pares ordenados. Por fim, o conjunto constituído pelos quatro pares ordenados, assim definidos, forma uma relação R de E em D. Por exemplo, caso Larissa e Beatriz do conjunto E tenham escolhido, em D, os alunos Emily e Nathan, e Melissa e Nathan, respectivamente, a relação R é dada por

$$R = \{(\text{Larissa}, \text{Emily}), (\text{Larissa}, \text{Nathan}), (\text{Beatriz}, \text{Melissa}), (\text{Beatriz}, \text{Nathan})\}.$$

Após a descrição da relação, é importante ressaltar que a relação é um subconjunto do produto cartesiano (por definição), e que isso se verifica particularmente para R. Para isso, basta notar que cada par ordenado de R pertence a $E \times D$ (conjunto esse obtido na Atividade 11). Além disso, deve-se observar que R e $E \times D$ são conjuntos distintos, nesse caso (para isso, basta notar que, por exemplo, $(\text{Larissa}, \text{Melissa}) \notin R$, mas que $(\text{Larissa}, \text{Melissa}) \in E \times D$). Essa etapa é importante, pois ajuda a diferenciar as noções de relação e de produto cartesiano.

Nesse ponto, é essencial estabelecer a correta expressão, em linguagem matemática, dos objetos envolvidos, além de interpretá-los de forma adequada. Por exemplo, de acordo com a relação R definida, tem-se (Larissa, Nathan) $\in R$. Isso significa que "Larissa e Nathan estão relacionados, segundo a relação R". Além disso, a expressão (Larissa, Nathan) $\in R$ é *sinônima* de "Larissa R Nathan" (isto é, elas têm precisamente o mesmo significado).

Por fim, é possível ainda identificar uma regra que estabeleça a relação R definida. Nesse caso, deve-se notar que $e\ R\ d$ se, e somente se, e é uma das alunas de E, e o aluno d foi escolhido, em D, pela aluna e.

Vale ressaltar que, da forma que a atividade foi desenvolvida, os conjuntos (a saber, E e D), cujos elementos estão sendo relacionados, são evidenciados. Com isso, compreende-se mais profundamente o conceito de relação, fundamental para o entendimento de funções, que é tratado logo em seguida.

Como visto na Seção 1.2, os currículos mínimos não abordam os conjuntos presentes na relação, e, consequentemente, na função. Porém, o ideal é que os objetos matemáticos sejam apresentados desde o início de forma adequada, com as definições corretas adaptadas a idade e ao entendimento do aluno. Por isso, a ideia de apresentar dois conjuntos quaisquer e definir uma função entre eles exemplifica de maneira clara os três elementos presentes nesse conceito (a saber, domínio, contradomínio e lei de formação), permitindo que o aluno prossiga para o Ensino Médio com o conhecimento correto desse assunto. Após a apresentação, por parte do professor, do conceito de função, propõe-se a seguinte dinâmica com a turma:

Atividade 13: Ainda com os conjuntos E e D, da Atividade 11, solicita-se que cada aluno em E (e não mais apenas as meninas) escolha, obrigatoriamente, apenas um aluno em D para representante de turma. Feito isso, responda as perguntas:

a) Quais são o conjunto domínio e o conjunto contradomínio dessa função?
b) Qual a imagem de cada integrante do conjunto E por essa função?
c) Qual é o conjunto imagem?
d) Existem elementos do contradomínio que não constituem imagem de algum elemento de E? Qual(is)?

O item a) tem o objetivo de destacar os conceitos de domínio e contradomínio, além de identificar se o aluno reconhece qual é cada conjunto. Por mais que seja uma pergunta simples, é importante nessa fase introdutória do conteúdo. Espera-se como resposta que o domínio é o conjunto E e o contradomínio é o conjunto D.

Para ilustrar as outras respostas, supõe-se que Larissa tenha escolhido Melissa, e que Rodrigo, Pedro e Beatriz tenham escolhido Nathan. Nesse caso, Melissa é a imagem de Larissa por essa função (assim como Nathan é a imagem de Rodrigo, de Pedro e de Beatriz por essa mesma função). Em outros termos, denotando por $f : E \to D$ tal função, tem-se como resposta do item b):

$f(\text{Larissa}) = \text{Melissa}$ e $f(\text{Rodrigo}) = f(\text{Pedro}) = f(\text{Beatriz}) = \text{Nathan}$.

Consequentemente, como resposta do item c), a imagem dessa função é constituída apenas por Melissa e Nathan; isto é,

$$Im(f) = \{\text{Melissa}, \text{Nathan}\}.$$

Nota-se que Emily, embora pertença ao contradomínio, não é imagem, por f, de elemento algum de E, por não ter sido escolhida por colega algum. Portanto, a resposta do item d) é: sim, Emily. Essa é uma observação importante que ajuda a estabelecer diferenças entre os conjuntos imagem e contradomínio.

É importante também salientar o porquê de a relação R definida na Atividade 12 não constitui uma função de domínio E (o que ajuda a enfatizar que nem toda relação é uma função). De fato, tal relação R não é uma função (de domínio E) por dois motivos: existem elementos em E (a saber, os meninos) que não estão associados a algum em D, e existem elementos de E (exatamente as duas meninas) que estão associados a mais de um elemento em D. Em outros termos, após as atividades do tipo 12 e 13, indica-se fazer essa comparação, evidenciando o porquê tem-se uma função na Atividade 13 e não na Atividade 12.

Depois dessa apresentação inicial, a proposta é tratar de funções envolvendo conjuntos numéricos e cujas leis de formação sejam provenientes de equações envolvendo exemplos do cotidiano. Nesse sentido, exemplos sobre compras de produtos, bem como relações entre a distância e o preço de uma corrida de táxi (ou de mototáxi, por exemplo), são positivas para o aprendizado, sendo fundamental a discussão sobre quais conjuntos estão envolvidos nas funções. Essa é uma questão importante de ser abordada, para que o aluno entenda que uma função afim, por exemplo, recebe esse nome não só pela lei de formação, mas também pelos conjuntos que estão sendo relacionados (a saber, o conjunto dos números reais). Por exemplo:

Atividade 14: Em cada item, dê o que se pede:

a) Em um supermercado, a caixa de leite custa R$ $5{,}79$. Descreva uma função que relaciona a quantidade de caixas compradas com o valor final da compra.
b) Um armarinho vende o metro de TNT por R$ $5{,}79$. Descreva uma função que relaciona a quantidade de metros de tecido comprado com o valor final da compra.
c) As funções obtidas nos itens a) e b) são as mesmas? Por quê? Caso não sejam, qual a diferença entre elas? E quais são as semelhanças?

Destaca-se, nessa atividade, que é solicitado que o aluno descreva a função. Dessa forma, as respostas aos itens a) e b), respectivamente, são $f: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5{,}79x$ e $f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5{,}79x$. Em ambas, a lei de formação é obtida pelo produto do valor unitário de produto pela quantidade comprada; a diferença está na forma de calcular essa quantidade. No item a) são caixas de leite, contadas em unidades; por isso, o domínio é o conjunto dos números naturais positivos. Uma consequência dessa informação é que a representação gráfica dessa função são pontos isolados alinhados (isto é, sobre uma mesma reta). Por outro lado, no item b) têm-se metros de tecido como o objeto a ser comprado, logo, como, em geral, é permitida a compra de partes de um metro, a quantidade de tecido comprado não precisa ser necessariamente inteira, podendo ser considerada, então, um número real[34] positivo. A representação gráfica dessa função é, portanto, contínua (uma reta). Em ambos os casos, o contradomínio, por sua vez, é o conjunto dos números reais, pois valores monetários não precisam ser necessariamente inteiros (mesmo que na prática só se utilizem representações decimais com duas casas decimais, o que gera uma discussão sobre o conjunto imagem, novamente). Assim, a resposta ao item c) é “Não, elas são diferentes, pois não possuem o mesmo domínio, embora tenham o mesmo contradomínio e a mesma lei de formação”. A discussão sobre a representação gráfica dessas funções deve vir após a apresentação dessa ideia, porém, serve de exemplo

[34] Vale destacar que, na prática, a quantidade de tecido pode ser considerada um número racional. Nesse caso, o domínio dessa função seria o conjunto dos números racionais positivos. Porém, em geral, a distinção que se faz é se o domínio da função é composto por valores "discretos" (quantidades, por exemplo), sendo então representados pelo conjunto dos números naturais ou inteiros, ou se é composto por valores "contínuos" (como distâncias, alturas, metros, quilogramas, por exemplo), sendo nestes casos representados pelo conjunto dos números reais.

para mostrar que nem sempre a representação gráfica será contínua.

Conforme dito anteriormente, essa atividade pode ser proposta no 7º ano, com algumas alterações. Em vez de solicitar a função nos itens a) e b), o enunciado do exercício pode ser “Descreva uma expressão que represente a relação entre o preço e a quantidade...”. Já no item c) pode-se fazer perguntas que levem o aluno a perceber que as caixas de leite são contadas em números naturais, enquanto o tecido pode ser vendido em partes fracionárias (como no 7º ano ainda não foi apresentado o conjunto dos números reais, a discussão fica somente no campo dos números racionais). Uma possibilidade é dividir esse item em outros com perguntas como: “Podemos comprar meia caixa de leite? E meio metro de tecido?” e “Que números usamos para contar as caixas de leite? E que tipo de números usamos para representar metros?”. O objetivo dessa atividade no 7º ano é começar, informalmente, a construir o conceito de relação (e, consequentemente, de função).

É interessante também partir de exemplos da vivência dos alunos, permitindo que eles proponham exemplos, cabendo ao professor as devidas correções, se necessárias, para que as atividades sejam modeladas por funções possíveis de trabalhar nessa fase.

De forma geral, orienta-se que o aluno aprenda, nessa etapa, os conceitos de domínio, contradomínio, lei de formação e conjunto imagem, levando-o a compreender o conceito de função por completo, e evitando, assim, que ele associe esse objeto com a expressão algébrica apenas. Indica-se também que, em todas as atividades, o domínio e o contradomínio estejam destacados no enunciado ou sejam pedidos no problema, mesmo que ambos sejam o conjunto dos números reais.

Uma outra forma de reforçar essas ideias, mostrando diferentes tipos de funções, é tratar de exemplos de funções cujo domínio é resultado de um produto cartesiano. Essa é uma atividade extra e que deve respeitar o processo de avanço da turma, tendo o objetivo de incitar questionamentos positivos, e levar o aluno a refletir mais sobre a Matemática. Ao utilizar como exemplos as próprias operações básicas, ou construir uma situação concreta com a turma, amplia-se o conceito de funções e justifica-se mais seu estudo. Um exemplo inicial é a partir da adição, como apresentado na Seção 2.1. Para isso, define-se, com a turma, uma função f (ou s, caso se opte por uma nomenclatura mnemônica) que associe cada par de números reais ao resultado da adição (isto é, à soma) do primeiro com o segundo. Nota-se que o domínio dessa função é $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ou equivalentemente, $\mathbb{R}^2$). Além disso, como a operação de adição é fechada, o contradomínio é $\mathbb{R}$. Em suma, tem-se que a função f pode ser descrita por $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x, y) = x + y$.

Mazzieiro e Machado (2012) também apresentam exemplos desse tipo de função, utilizando as ideias de máximo divisor comum (MDC) e de mínimo múltiplo comum (MMC), ditos anteriormente. A Atividade 15 é baseada em um exercício proposto em seu livro, e inclui o destaque para o domínio ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) e o contradomínio ($\mathbb{N}$) dessas funções. Essas propostas podem ser incorporadas nas aulas de forma natural.

Atividade 15: Considere as funções que associam a cada par ordenado de números naturais dados seu máximo divisor comum e seu mínimo múltiplo comum, respectivamente:

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x, y) = \mathrm{mdc}(x, y)$

$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(x, y) = \mathrm{mmc}(x, y)$

Para cada par ordenado de números, use as leis dessas funções e determine a imagem por f e por g.

a) $(5, 7)$ $f(5, 7) = 1$, $g(5, 7) = 35$

b) $(12, 16)$ $f(12, 16) = 4$, $g(12, 16) = 48$

c) $(6, 18)$ $f(6, 18) = 6$, $g(6, 18) = 18$

Conforme foi apresentado na Seção 2.1, as diferentes formas de representar uma função, como o diagrama de flechas e a representação gráfica, devem ser apresentados também com as ideias iniciais de função e sempre incluindo as discussões sobre os conjuntos. Indica-se quais são o domínio e o contradomínio, e abre-se a discussão de qual é a imagem. Essas discussões não precisam se prolongar por muitas aulas, mas é indispensável que aconteçam.

Com respeito às representações gráficas, inicialmente o aluno deve identificar quando um gráfico no plano cartesiano representa uma função. Em geral, utiliza-se a regra de observar se uma linha vertical intercepta o gráfico em dois pontos. Mesmo que se utilize esse artifício, deve-se explicar o motivo pelo qual esse artifício é válido; ou seja, é importante que fique evidente que qualquer reta vertical só deve possuir um ponto em comum com a representação gráfica da função, pois isso indica que o elemento do domínio (representado no eixo das abscissas) em que essa reta passa só possui uma imagem pela função.

Em se tratando da escrita de uma função, um ponto de extrema importância nesse ano é a utilização das notações $f(x)$ e de $f\colon A \to B$. Essas expressões fazem parte da forma correta de se escrever funções, mas são pouco exploradas no Ensino Fundamental. Conforme dito anteriormente, a orientação é, ao descrever a lei de formação de uma função, se utilizar "$f(x)$", e não "y", sob pena de poder haver confusão com os conceitos de função e de equação. Além disso, ao representar tal função graficamente, no plano cartesiano, recomenda-se renomear o eixo y (isto é, o eixo das ordenadas) por $f(x)$, indicando, portanto, o eixo no qual se deve localizar a imagem de cada x por f. Por exemplo, as expressões $y = 3x + 4$ e $f(x) = 3x + 4$ representam objetos matemáticos diferentes e, portanto, são lidos de formas diferentes; a saber "o valor de uma incógnita é igual à soma do triplo de outra com quatro" e "a imagem de x por uma função f é igual à soma do triplo de x com quatro", respectivamente.

A notação $f\colon A \to B$ (e, em particular, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) não costuma ser apresentada nos materiais didáticos do 9º ano, conforme observado anteriormente. Além disso, quando usados, geralmente não são explicados corretamente (os livros usualmente leem $f : A \to B$ como "f de A em B", quando o ideal é ler "uma função f de domínio A e contradomínio B"). As discussões propostas sobre o domínio e o contradomínio ressaltam a importância dessa escrita e enfatizam o conceito de função de forma completa. Esse tipo de informação deve aparecer nos exercícios aplicados, e deve ser exigido do aluno que, ao modelar um problema, ele apresente quais conjuntos estão descritos na questão, usando essa informação. Caso isso não seja feito, a modelagem do problema fica descrita de modo incompleto, o que pode levar a associações erradas no momento da resolução. Por exemplo, considere o seguinte exercício:

Atividade 16: Em uma papelaria, cada lápis custa R$ $0{,}40$.

a) Estabeleça uma função que expresse o preço pago na compra de uma quantidade qualquer de lápis em termos dessa quantidade.
b) Qual o número máximo de lápis que se pode comprar com R$ $15{,}00$?
c) Quanto de troco recebe-se pela compra de tal quantidade?

Uma resposta esperada para o item a) esse exercício é $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, com $f(n) = n \cdot 0{,}40$ (ou, equivalentemente $f(n) = 0{,}40n$). Nota-se que, por se tratar de uma quantidade (de lápis), a variável desse problema é um número natural (por esse motivo, foi escolhido $\mathbb{N}$ como domínio). No entanto, como o preço não é necessariamente um valor natural (mas sim real), e o produto de um número natural por um número real é sempre real, o contradomínio utilizado foi o conjunto $\mathbb{R}$. A indicação é que o exercício seja formulado dessa maneira (pedindo a função e não somente a lei de formação), e que a resposta também seja completa.

Os itens b) e c) reforçam a questão do domínio, pois ao resolver a equação $0{,}40n = 15{,}00$ (obtida ao se notar que o item b) apresenta uma possível imagem da função e pede o valor de n que corresponde a essa imagem), o aluno obtém $n = 37{,}5$, o que não condiz com o problema. Desse modo, a resposta ao item b) é que o valor máximo de lápis é 37, por não ser possível calcular $f(37{,}5)$, considerando o domínio como o conjunto dos números naturais. A resposta ao item c) é, então a diferença entre R\$ $15{,}00$ e $f(37)$, que é igual a R\$ $14{,}80$, ou seja, recebe-se R\$ $0{,}20$ de troco.

No terceiro e no quarto bimestres do 9º ano, além da ideia geral de função, também são apresentadas as funções afins e quadráticas. É muito comum encontrar materiais (principalmente na *internet*) associando funções afins a “funções de primeiro grau”. No entanto, essa nomenclatura é considerada inadequada, pois função não possui grau (LIMA et al, 2006); o mesmo se aplica às quadráticas. Por sua vez, a nomenclatura “função polinomial do 1º grau” (assim como, “função polinomial do 2º grau) é aceitável, mas não considera as funções constantes (que, pela definição usada, são um tipo de função afim, como dito anteriormente). No entanto, ao considerar a nomenclatura função polinomiais de no máximo grau 1, inclui-se as constantes, estando assim mais de acordo com a definição de função afim. Ainda assim, o ideal é se utilizar os nomes corretos da função, objetivando acostumar o aluno a esses termos; isto é, afins e quadráticas. Além disso, é importante reforçar que essas funções têm como domínio e contradomínio o conjunto dos números reais. Portanto, é fundamental destacar esse fato ao longo das atividades (principalmente os problemas aplicados), e diferenciar das funções que possuem como lei de formação uma expressão polinomial de primeiro ou segundo grau, mas não são afins ou quadráticas, pois seu domínio ou contradomínio não são o conjunto dos números reais, como a da Atividade 16, vista anteriormente.

Com relação às funções afins, a sugestão é destacar a função linear, com o nome apropriado. O início dos estudos também deve ser feito mediante um exemplo concreto, se atentando em escolher um problema que possua domínio e contradomínio corretos. Como as expressões polinomiais que os alunos já estudaram são somente as de 1º e 2º graus, é possível que alguma atividade já proposta tenha resultado em uma função afim, linear ou quadrática (como é o caso do item b) da Atividade 14, que é uma função linear). Pode-se retornar a esses exemplos, ou propor outros semelhantes como o preço de determinado produto comprado a quilo (exemplificando uma função linear), e o preço pago no aluguel de um carro a partir da quilometragem rodada (caracterizando uma função afim, pois, nesse caso, para o aluguel existe uma taxa inicial fixa). Em ambos os casos, o domínio é o conjunto dos números reais, por mais que na prática sejam utilizadas aproximações.

Construir a representação gráfica desses dois tipos de funções, e comparar as peculiaridades de cada uma, são tarefas de grande importância para ajudar o aluno a diferenciar uma função afim (não linear) de uma linear. A discussão do papel das constantes também é indispensável e o aluno pode visualizar sua interpretação nessas construções. Existem ferramentas de geometria dinâmica (como o *Geogebra*, por exemplo), que permitem, ao esboçar a representação gráfica dessas funções, alterar ambos os coeficientes, o que auxilia muito na interpretação de seus significados. No entanto, por compreender que a realidade em uma escola municipal nem sempre permite o acesso a esse tipo de ferramenta, a proposta é fazer uma atividade em grupo que permita essa visualização e que reforce ainda a construção das representações gráficas.

Nesse sentido, a atividade sugerida é dividir a turma em grupos e pedir para que cada um construa, em papel quadriculado (para evitar diferenças de escala), as representações gráficas de funções afins obtidas por meio da alteração de cada um dos coeficientes. A quantidade de exemplos pode depender da quantidade de alunos de cada grupo, mas o indicativo é que se tenham seis exemplos em cada grupo, e descritos da seguinte forma. O primeiro, que servirá como base, é a função identidade (cuja lei de formação é $f(x) = x$), uma função linear com taxa de variação 1 e coeficiente independente 0. O segundo e o terceiro, por sua vez, são funções afins, obtidas a partir de f (mantendo-se sua taxa de variação, a saber, 1), cujos coeficientes independentes são um positivo e um negativo (por exemplo, 2 e -3, gerando as funções $g_1(x) = x + 2$ e $g_2(x) = x + (-3)$, sendo esta última equivalente a $g_2(x) = x - 3$). O quarto e o quinto exemplos são funções afins, obtidas a partir de f

(mantendo-se seu coeficiente independente, a saber, 0), cujas taxas de variação são uma positiva e uma negativa (por exemplo, as funções afins cujas leis de formação são $h_1(x) = 3x$ e $h_2(x) = (-2)x$, sendo esta última equivalente a $h_2(x) = -2x$). Por fim, o sexto exemplo é uma função afim, obtida a partir de f, cujos taxa de variação e coeficiente independente são ambos distintos dos de f (por exemplo, a função afim cuja lei de formação é $p(x) = 3x + 2$). Desse modo, é possível analisar não somente o que acontece com a representação gráfica quando se altera um dos coeficientes, mas também é possível analisar quando essas representações serão paralelas e quando serão concorrentes. A atividade a seguir descreve o modelo a ser proposto para os alunos, sendo o ideal que cada grupo receba um conjunto diferente de funções, mantendo somente a função original f.

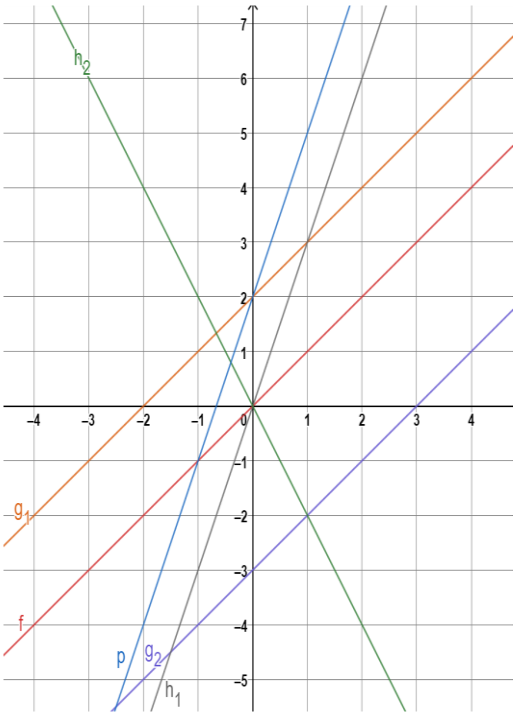
Atividade 17: Construa, no plano cartesiano, as representações gráficas das seguintes funções e depois responda às perguntas.

$f(x) = x$, $g_1(x) = x + 2$, $g_2(x) = x - 3$, $h_1(x) = 3x$, $h_2(x) = -2x$ e $p(x) = 3x + 2$

a) Observando as representações gráficas das funções f, g_1 e g_2, o que acontece com o gráfico de uma função quando se altera o coeficiente independente?
b) Observando as representações gráficas das funções f, h_1 e h_2, o que acontece com o gráfico de uma função quando se altera a taxa de variação?
c) As representações gráficas das funções h_1 e p possuem algum ponto em comum?
d) Observando a lei de formação das funções do item c), o que podemos perceber?
e) O que as representações gráficas das funções g_1 e p possuem em comum? E o que possuem de diferente?
f) E as leis de formação das funções g_1 e p?

A sugestão é esboçar as representações gráficas em uma mesma folha quadriculada (se possível com cores diferentes), facilitando a identificação das mudanças de uma para outra, e as respostas às perguntas propostas (Figura 22). Espera-se que os alunos identifiquem no item a) que as retas dadas pelas representações gráficas das funções se deslocam verticalmente, ou seja, o valor em que tais retas intersectam o eixo das ordenadas muda. Já no item b), o ideal é observar que o ângulo com o eixo das abscissas se altera, o que pode ser identificado pela variação entre as imagens (por exemplo, destacar que, na h_1, as imagens crescem três unidades a cada unidade de crescimento de um valor do domínio, o que altera a inclinação da reta e ilustra a proporcionalidade presente em funções desse tipo). Do item c) em diante, o objetivo é observar que algumas retas são paralelas, e outras se intersectam no mesmo ponto do eixo vertical. Assim, a resposta do item c) é “Não, elas são paralelas” e do item d) é “Elas possuem a mesma taxa de variação”. Ao passo que, no item e) “Elas só possuem em comum o ponto de coordenadas $(0, 2)$. A inclinação das retas, e por consequência, todos os demais pontos, são diferentes.” e, no item f), “As leis de formação possuem o mesmo coeficiente independente”.

Figura 22 - Representações gráficas das seis funções



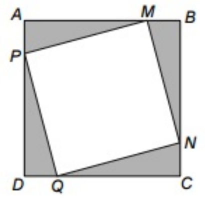
Fonte: A autora, 2023

Essas orientações também são válidas para as funções quadráticas, apresentadas no último bimestre, porém com algumas ressalvas. Ao se propor diferentes funções, a análise das alterações nos coeficientes dos monômios de grau 2 e 0 (ou seja, os termos a e c) são mais fáceis de serem observadas. A alteração no coeficiente a modifica a concavidade da parábola, ao passo que o coeficiente c provoca uma translação vertical. No entanto, a variação do monômio de primeiro grau (a saber, b) não é tão simples de ser analisada, pois ela provoca uma variação do vértice que não seria facilmente concluída pela observação de poucos exemplos.

Assim, para propor essa atividade para as funções quadráticas, sugere-se que as variações e perguntas foquem somente nos coeficientes a e c.

Conforme observado anteriormente, a análise do vértice da parábola também faz parte do currículo, e deve ser feita nesse período. A representação gráfica da função auxilia a visualização do porquê o vértice é chamado de ponto de máximo ou de mínimo, mas a interpretação dos problemas aplicados que solicitam esses valores costuma trazer à tona algumas dificuldades. Muitas vezes o aluno não sabe identificar em um problema quais são as variáveis independente e dependente, dificultando sua associação com x e $f(x)$, o que ocasiona em não saber qual das coordenadas do vértice deve ser calculada para resolver o problema. Para minimizar essa dificuldade de interpretação, ao longo dos exemplos aplicados, o professor deve destacar o significado da lei de formação, evidenciando as diferenças entre as variáveis do problema apresentado. Quanto mais acostuma-se os alunos a procurar o significado da expressão nos problemas, mais ensina-os a interpretar, permitindo que eles se apropriem dos conceitos matemáticos. Como exemplo, observe a atividade a seguir.

Atividade 18: Na figura a seguir, o quadrado externo tem lados de medida 12 cm, e os segmentos AP, BM, CN e DQ têm a mesma medida, x cm. Determine:



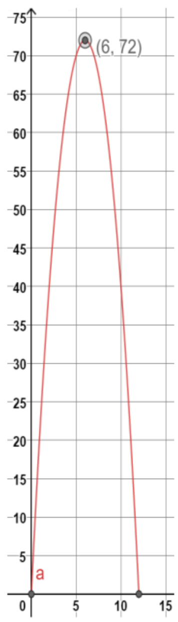
a) O valor de x para que a área da região sombreada do quadrado seja máxima.
b) O valor dessa área máxima.

Para solucionar esse problema, primeiro o aluno deve escrever a equação que representa a área da região sombreada em função da medida x. Considerando que cada lado do quadrado $ABCD$ possui 12 cm e que o segmento BM mede x (por hipótese), segue que o segmento AM mede a diferença entre ambos, isto é, $12 - x$. Consequentemente, os catetos AP e AM do triângulo retângulo AMP medem x e $12 - x$, respectivamente. Por outro lado, como a área de um triângulo retângulo pode ser calculada como a metade do produto dos catetos, conclui-se que a área de AMP vale $\frac{x(12-x)}{2}$. Por fim, como os quatro triângulos sombreados são congruentes entre si (pois possuem catetos respectivamente congruentes), suas áreas são as mesmas, e, portanto, a área $a(x)$ da região sombreada pode ser calculada por

$$a(x) = 4 \times \frac{x(12-x)}{2} \text{ (ou, equivalentemente, } a(x) = -2x^2 + 24x\text{).}$$

Em seguida, é importante determinar o domínio e o contradomínio da função obtida. Como os pontos M, N, P e Q são tomados nos lados do quadrado original, tem-se que x varia de 0 a 12; em outros termos, a função a tem como domínio o intervalo $[0, 12]$, que também pode ser representado em sala como $A = \{x \in \mathbb{R} \,|0 \leq x \leq 12\}$. Como a área é sempre um valor real não negativo, pode-se tomar o contradomínio como $\mathbb{R}_+$ (isto é, o conjunto dos números reais não negativos), ou mesmo como $\mathbb{R}$. Feito isso, é interessante questionar quando a área sombreada é mínima e quando é máxima. Caso seja possível o trabalho com um programa de geometria dinâmica, é importante mostrar o que acontece com a área ao variar os pontos M, N, P e Q nos segmentos de reta que os contêm. Caso não seja possível a utilização do programa, pode-se construir o gráfico dessa função para uma melhor análise (Figura 23). Nota-se que, caso x tenha valor 0 ou 12, os pontos M, N, P e Q coincidem com os próprios vértices do quadrado original e, portanto, a região sombreada possui área 0 (o valor mínimo possível). Por outro lado, por ter a concavidade voltada para baixo (pois $a < 0$), a função possui valor máximo (justamente no vértice). A partir dessa discussão, verifica-se que a resposta do item a) é o valor da abscissa do vértice da parábola que representa o gráfico da função área (a saber, $x = 6$) e, para responder ao item b), basta determinar a imagem dessa abscissa pela função (a saber, $a(6) = 72$).

Figura 23 – Gráfico da função obtida na Atividade 18.



Fonte: A autora, 2023

As atividades aqui propostas são algumas sugestões, podendo sempre ser adaptadas e incrementadas a critério do professor. Os principais pontos que devem ser levados em consideração na criação de novas atividades são, de modo geral, o ajuste da leitura, a apresentação correta dos elementos e o uso adequado da linguagem. Estes aspectos devem permear toda a introdução do conceito de Funções e seus tópicos no Ensino Fundamental.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ideia de relações (e, por consequência, de funções) fazem parte do cotidiano do ser humano; a concepção matemática dessa ideia é uma forma de analisar padrões e permitir intervenções em diversas áreas. No entanto, após a análise bibliográfica, percebe-se que isso não parece ficar claro para o aluno do Ensino Fundamental. Ao dialogar com alunos dessa etapa, nota-se o discurso de não compreender para que servem determinados conteúdos e um desânimo com o aprendizado matemático, justificado pelas dificuldades de compreensão, principalmente entre os que estão em situações de vulnerabilidade.

Visando melhorar esse aspecto através da linguagem matemática, notou-se que a abordagem de Funções, feita nos Anos Finais do Ensino Fundamental, possui pontos que possibilitam melhorias para a apresentação desse conceito e que podem ser feitas mesmo antes de tratar de funções. Além disso, o estudo da escrita e leitura em Matemática permitem uma distinção de elementos matemáticos e tem o objetivo de facilitar a compreensão dos conceitos desde sua base.

Revisar os conteúdos relacionados a Funções se mostrou importante para centralizar os conceitos, identificando aqueles que possam ser abordados no Ensino Fundamental. Desse modo, as propostas apresentadas respeitam o que é exigido nesse período, assim como, aquilo que pode engrandecer o estudo e o embasamento necessário para os próximos anos escolares.

Apesar de os documentos norteadores desenvolverem mais esse conceito no Ensino Médio, é observado que o conteúdo matemático é construído ao longo dos anos escolares anteriores. Em outras palavras, para uma boa compreensão de conceitos mais elaborados, é necessário que a base seja feita corretamente. Assim, ajustar a apresentação da linguagem matemática no início da Álgebra e, por consequência, no Ensino Fundamental, influenciará não só no ensino de Funções, mas também na forma que os alunos encaram a Matemática.

Vale ressaltar que o presente trabalho foi desenvolvido entre os anos de 2020 a 2023, durante o período de pandemia de Covid-19 e adaptações de currículo. Existia o intuito inicial de aplicar as atividades propostas em sala de aula, o que não foi possível. Assim, a aplicação e, por consequência, as observações dessas dinâmicas serão feitas em momento oportuno.

Espera-se que o presente trabalho sirva de orientação aos professores do Ensino Fundamental de como aprimorar suas aulas do ponto de vista da linguagem matemática, principalmente na Álgebra. Com isso, visa-se melhorar a relação dos alunos com a Matemática e diminuir suas dificuldades ao longo do ensino básico.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. Iniciação à lógica matemática. 16. ed. São Paulo: Nobel, 1986.

ALMEIDA, L.; SOUSA, B; TORTOLA, E. Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, n. 6, 2015, Pirenópolis. *Anais*. Pirenópolis: SBEM, 2015, p. 1-12.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf>. Acesso em: 16 out. 2020

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Introdução aos Parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC / SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1997.

BIANCHINI, E. *Matemática – Bianchini*. Volumes 7º, 8º e 9° ano. 9ª ed. São Paulo. Moderna. 2018.

BIEMBENGUT, M.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Editora Contexto, 2000.

CAPOVILLA, A. et al. Estratégias de leitura e desempenho em escrita no início da alfabetização. *Psicologia Escolar e Educacional*, São Paulo, v. 8, p. 189-197, 2004.

CHAVANTE, E. *Convergências matemática: anos finais 9° ano*. 2ª ed. São Paulo. Edições SM, 2018.

CUNHA, S; VELASCO, J. *Introdução à Gramática da Linguagem Matemática*. 1 ed. Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna, 2019.

DANTE, L. *Projeto Teláris: matemática ensino fundamental 2*. Volumes 7º, 8º e 9º. 2ª ed. São Paulo. Ática. 2015.

DELGADO, J.; FRENSEL, K. e CRISSAFF, L. *Geometria Analítica*. 2 ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2017

DOMINGUES, H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. 5 ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

DOWNING, D. *Dictionary of Mathematics Terms*. Barron's Educational Series, Inc, 3 ed. Hauppauge, New York. 2009

EXPRESSÃO. Michaelis. Dicionário Online de Língua Portuguesa. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/express%C3%A3o/>. Acesso em: 25 abr. 2022

FARIAS, R.; DA COSTA, L. O papel da linguagem matemática no processo ensino-aprendizagem da matemática. *Revista Areté*, v. 14, n. 28, p. 152-166, 2020.

FERNANDES, R.; SANTOS JUNIOR G. Modelagem matemática: um recurso pedagógico para o ensino da matemática. *Revista Práxis*, ano IV, nº 8, pp. 21-29, 2012.

GIL, K. *Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra*. Dissertação (Programa de pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática) PUCRS. Porto Alegre, 2008.

GRANGER, G. *Filosofia do estilo*. São Paulo: Perspectiva, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974 apud SILVEIRA, M. Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.16, n.1, pp. 47-73, 2014. Disponível em:

<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/15338/pdf>. Acesso em 18 ago. 2022.

INCÓGNITA. Michaelis. Dicionário Online de Língua Portuguesa. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/incógnita/>. Acesso em: 05 set. 2022

KRANTZ, S. (Ed.). *Dictionary of algebra, arithmetic, and trigonometry*. Boca Raton: CRC Press, 2000. (A volume in the comprehensive dictionary of mathematics) apud MIRANDA, D. R. *Significados do sinal de igualdade na Matemática*. 2019. 75 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

LIMA, E.; CARVALHO, P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. *A matemática do ensino médio – volume 1*. 9ª ed. Rio de Janeiro. SBM 2006.

LONGEN, A. *Apoema: matemática 9*. 1ª ed. São Paulo. Editora do Brasil, 2018.

MAZZIEIRO, A.; MACHADO, P. *Descobrindo e aplicando a Matemática*; Volumes 7º, 8º e 9° ano. 1ª ed. Belo Horizonte, Dimensão 2012

MIRANDA, D. R. *Significados do sinal de igualdade na Matemática*. 2019. 75 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

OLIVEIRA, S.; LAUDARES, J. Pensamento Algébrico: Uma relação entre álgebra, aritmética e geometria. In: VII ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EMEM, São João del-Rei (MG), 2015.

PATARO, P.; BALESTRI, R. *Matemática essencial 9° ano.* 1ª ed. São Paulo. Scipione. 2018.

PONTE, J.; BRANCO, N.; MATOS, A. *Álgebra no ensino básico*. 2009. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf>. Acesso em: 18 out. 2022

PREFEITURA DA CIDADE DO RIO DE JANEIRO. Currículo 2020. Rio de Janeiro: SME, 2020. Disponível em: <http://www.rio.rj.gov.br/dlstatic/10112/10884557/4268552/MATEMATICA.pdf> Acesso em: 16 fev 2022

RELAÇÃO. Michaelis. Dicionário Online de Língua Portuguesa. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/rela%C3%A7%C3%A3o/>. Acesso em: 25 abr. 2022

RIBEIRO, A. *Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do Saresp*. Dissertação () PUC São Paulo, São Paulo, 2001.

RIBEIRO M. *Gramática aplicada da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Metáfora Ed., 2004.

SCHIRMANN, J. et al. Fases de desenvolvimento humano segundo Jean Piaget. In: VI CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. 2019.

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO. Material RioEduca 2022. Rio de Janeiro, 2022. Disponível em <http://www.rio.rj.gov.br/web/rioeduca/exibeconteudo?id=14100813>. Acesso em: 18 out. 2022

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO. Material Didático do Aluno: Matemática. Rio de Janeiro, 2018.

SIGNO. Michaelis. Dicionário Online de Língua Portuguesa. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/signo/>. Acesso em: 05 set. 2022

SILVEIRA, Ê. *Matemática: compreensão e prática*. Volumes 7º, 8º e 9º ano. 5ª ed. São Paulo. Moderna. 2018

SILVEIRA, M. Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.16, n.1, pp. 47-73, 2014. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/15338/pdf>. Acesso em 18 ago. 2022.

SOUZA, J.; PATARO, P. *Vontade de saber matemática*, Volumes 7º, 8º e 9º ano. 3ª ed. São Paulo. Editora FTD, 2015.

VARIÁVEL. Michaelis. Dicionário Online de Língua Portuguesa. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/variável/>. Acesso em: 05 set. 2022.

ZAMBUZZI, O. A. *Ensino Moderno da* Matemática. 4ª ed. São Paulo, Editora do Brasil, volume 2, 1965 apud MIGUEL, A., FIORENTINI, D., MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? Revista Pro-Prosições, Faculdade de Educação da Unicamp, vol 3, n. 1[7], pp. 39-54, mar, 1992.