UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM REDE NACIONAL

SILMARA LOUISE DA SILVA

# ALÉM DAS MEDIDAS: ABORDAGENS LÚDICAS E DESAFIOS DA OBMEP NA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE ÁREA

SÃO CARLOS – SP
2023

SILMARA LOUISE DA SILVA

# ALÉM DAS MEDIDAS: ABORDAGENS LÚDICAS E DESAFIOS DA OBMEP NA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE ÁREA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano

SÃO CARLOS – SP
2023

Silva, Silmara Louise da

Além das medidas: abordagens lúdicas e desafios da OBMEP na compreensão do conceito de área / Silmara Louise da Silva -- 2023.
117f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Paulo Antonio Silvani Caetano
Banca Examinadora: João Carlos Vieira Sampaio, Rodrigo Dantas de Lucas
Bibliografia

1. Áreas de polígonos. 2. Sequência didática. 3. OBMEP. I. Silva, Silmara Louise da. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

## Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Silmara Louise da Silva, realizada em 20/09/2023.

### Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano (UFSCar)

Prof. Dr. Rodrigo Dantas de Lucas (IFSP)

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

*Dedico este trabalho ao meu amado filho, por ser a luz que ilumina meus dias e me impulsiona a alcançar novos horizontes.*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos que, de maneira direta ou indireta, inspiraram-me a sonhar e a concretizar meus objetivos. Agradeço especialmente àqueles que acreditaram em mim e me apoiaram incondicionalmente ao longo dessa jornada.

Aos meus amigos, pelas palavras de encorajamento nos momentos de dúvida e pelas comemorações nos momentos de conquista.

Aos meus alunos, cuja curiosidade e entusiasmo pela aprendizagem continuam a me motivar. É por eles que este trabalho ganha significado.

Aos meus professores, pelo conhecimento compartilhado e pela paciência em me guiar na busca pelo saber.

Quero estender meu agradecimento aos meus animais de estimação que estiveram sempre ao meu lado, cuja presença e carinho trouxeram conforto e alegria durante os momentos difíceis.

[0] Trabalho realizado com apoio financeiro da CAPES

*“Aqueles que passam por nós não vão sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós.”*

***Antoine de Saint-Exupery*** *(SAINT-EXUPéRY, 2006).*

# RESUMO

Este projeto consistiu em idealizar, implementar e aplicar uma sequência didática que utilizasse abordagens pedagógicas diversificadas, incluindo o uso de materiais manipulativos, para explorar conceitos e problemas relacionados à área de polígonos. As atividades foram cuidadosamente planejadas para aumentar progressivamente o nível de desafio, visando estimular os estudantes a desenvolverem habilidades de pensamento estratégico na resolução de problemas específicos da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). A sequência didática foi aplicada a estudantes do 8º ano de uma escola municipal da cidade de Poços de Caldas durante o segundo semestre de 2022 e o primeiro semestre de 2023, e os resultados foram analisados e validados segundo a ótica da engenharia didática.



**Palavras-chave:** Áreas de polígonos. Estratégias de ensino. Sequência didática. OBMEP.

# ABSTRACT

This project consisted of conceiving, implementing, and applying a didactic sequence that used diverse pedagogical approaches, including the use of manipulative materials, to explore concepts and problems related to the field of polygons. The activities were carefully planned to progressively increase the level of challenge, aiming to stimulate students to develop strategic thinking skills in solving specific problems from the Brazilian Public School Mathematics Olympiad (OBMEP). The didactic sequence was applied to $8^{th}$ grade students at a municipal school in the city of Poços de Caldas during the second semester of 2022 and the first semester of 2023, and the results were analyzed and validated from the perspective of didactic engineering.



**Keywords:** Polygon areas. Teaching strategies. Didactic sequence. OBMEP.

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A resolução de problemas que envolvem o cálculo de áreas de figuras planas é uma área fundamental da matemática, cuja importância transcende o âmbito puramente acadêmico. O entendimento desses conceitos é crucial não apenas para o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes, mas também para sua capacidade de aplicar o pensamento crítico e analítico em situações do mundo real. O presente trabalho visa explorar a importância da resolução de tais problemas, empregando a metodologia da Engenharia Didática, em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com foco específico na construção do conhecimento dos estudantes, desde o uso de materiais concretos até a abstração necessária para enfrentar desafios complexos, como os problemas do banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

A Engenharia Didática é um conceito pioneiro que surgiu na França, na década de 80, em resposta a preocupações sobre a "ideologia da inovação" no campo educativo, que muitas vezes carecia de fundamentação científica sólida para embasar as práticas em sala de aula (ARTIGUE, 1996). Esta abordagem destaca a importância de equilibrar o conhecimento teórico com o conhecimento prático do professor, reconhecendo que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula são insuficientes para compreender a complexidade do sistema educacional. Ela busca aprimorar o processo de ensino-aprendizagem ao elaborar sequências didáticas cuidadosamente planejadas, com o intuito de guiar os estudantes desde as concepções iniciais até a compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Para (CARNEIRO, 2005), a teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico.

Uma das características fundamentais da Engenharia Didática é a divisão em quatro fases bem definidas:

- Análises Prévias: Nesta fase, os professores realizam análises detalhadas do contexto educacional, identificando objetivos de ensino, características dos alunos e obstáculos potenciais à aprendizagem. Levantam questões fundamentais para o planejamento das atividades didáticas.

- Concepção e Análise a Priori: Aqui, os professores elaboram planos de aula ou sequências didáticas com base nas análises prévias, projetam atividades, materiais e estratégias de ensino que abordam os desafios identificados, refletindo sobre como a teoria se traduzirá na prática.

- Implementação da Experiência: Esta fase é onde os professores conduzem as atividades planejadas. Durante a implementação, é importante observar e registrar dados sobre o desempenho dos alunos e quaisquer ajustes necessários.

- Análise a Posteriori e Validação da Experiência: Após a implementação, os professores realizam uma análise aprofundada dos resultados, avaliam se os objetivos de ensino foram alcançados, como os alunos responderam às atividades e se houve obstáculos não previstos. A culminância se dá na validação ou revisão das estratégias didáticas com base nas evidências coletadas.

A escolha da resolução de problemas envolvendo cálculo de áreas como foco deste trabalho se justifica pela relevância desse tema na educação matemática. A OBMEP, por exemplo, é um evento que oferece uma excelente oportunidade para avaliar e aprimorar a capacidade dos estudantes em resolver problemas matemáticos variados. Através da resolução de problemas da OBMEP, os estudantes são desafiados a aplicar os conceitos aprendidos em contextos diversos, estimulando a transferência de conhecimento para situações do mundo real (OBMEP, 2023).

A abordagem pedagógica proposta alinha-se com a BNCC, a qual enfatiza a importância do desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas que vão além da mera memorização de fórmulas. A BNCC destaca a necessidade de promover a compreensão dos conceitos matemáticos por meio de estratégias que permitam a articulação entre diferentes áreas do conhecimento e a aplicação prática dos conteúdos estudados.

No caminho da construção do conhecimento do estudante, o uso de materiais concretos desempenha um papel crucial. Autores como Piaget e Vygotsky ressaltaram a importância do contato inicial com objetos tangíveis para a compreensão de conceitos abstratos. O processo de transição do concreto para o abstrato é um aspecto central no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, permitindo-lhes internalizar e generalizar as ideias matemáticas.

Além deste Capítulo 1, em que é fornecida uma visão geral do trabalho, apresentamos nesta dissertação mais quatro capítulos.

No Capítulo 2, é realizada uma descrição detalhada do ambiente escolar onde as atividades foram conduzidas. Nesse contexto, são apresentados os perfis do professor e dos estudantes envolvidos, fornecendo uma visão abrangente das características dos participantes.

O Capítulo 3 se dedica à concepção das atividades propostas, abordando a relação dessas atividades com a OBMEP. Além disso, são expostas as razões que motivaram a escolha do tema, traçando um paralelo entre o cálculo de áreas e sua abordagem na BNCC. Também é discutido o contexto histórico que fundamenta o cálculo de áreas, com a devida exploração da elaboração das atividades propostas.

O Capítulo 4 concentra-se na aplicação prática das atividades dentro da sala de aula. Nesse âmbito, são minuciosamente analisadas as respostas fornecidas pelos estudantes, bem como o desempenho que manifestaram diante dos desafios propostos. Especial ênfase é dada às resoluções de problemas oriundos do banco de questões da OBMEP, delineando as abordagens e estratégias utilizadas pelos mesmos.

Por fim, o Capítulo 5 é reservado para as considerações finais. Nesse momento, as descobertas centrais do estudo são sintetizadas, culminando em uma reflexão sobre as implicações que emergem para o campo da prática pedagógica. Esse capítulo encerra o trabalho, abrindo espaço para a reflexão sobre o trajeto percorrido e as contribuições oferecidas pela pesquisa realizada.

# 2 CARACTERIZAÇÃO DO TRABALHO

## 2.1 ESCOLA

O projeto foi desenvolvido na Escola Municipal Professor Júlio Bonazzi, cuja fundação oficial remonta ao dia 13 de fevereiro de 1986. As atividades letivas tiveram início em fevereiro de 1987, época em que a instituição operava sob a denominação de “Escola Estadual do Bairro Santa Augusta”. Durante esse período, as aulas eram ministradas nos turnos matutino e vespertino, ocorrendo nas instalações anexas ao CEMAE Santa Augusta (Centro Municipal de Apoio Educacional).

A materialização de um ambiente próprio para a escola foi concretizada mediante a edificação de um prédio singular. Localizado na rua João Nery Sobrinho, número 47, no bairro Santa Maria, situado na cidade de Poços de Caldas, estado de Minas Gerais, esse prédio teve suas bases lançadas ainda no mesmo ano de 1987. Uma significativa etapa teve seu desfecho com a inauguração do edifício em 25 de março de 1988.

No interior das suas paredes, a escola contava com quatro amplas salas de aula, proporcionando espaços adequados para a instrução dos alunos. Uma biblioteca enriquecia o ambiente educacional, disponibilizando recursos literários para o enriquecimento do conhecimento. Ademais, uma sala destinada aos professores, além de uma secretaria, garantia a gestão e coordenação das atividades escolares.

Além disso, a escola oferecia instalações sanitárias separadas para alunos do sexo masculino e feminino, atendendo às necessidades básicas dos estudantes. Uma cozinha estava à disposição para a preparação das refeições escolares, contribuindo para um ambiente propício ao aprendizado. Merece destaque também a existência de uma sala de recursos multifuncionais, que certamente servia para atividades pedagógicas variadas. Essa sala incluía um banheiro específico para os professores, visando ao conforto e conveniência do corpo docente.

Dessa forma, a Escola Municipal Professor Júlio Bonazzi ergueu-se como um espaço dedicado ao ensino e ao aprendizado, ao mesmo tempo em que proporcionava infraestrutura e recursos necessários para a promoção de uma educação eficaz e abrangente.

Figura 2.1 – Imagem aérea da localização atual da escola.


Fonte: Google maps[1].

No dia 1º de julho de 1990, atendendo a um pedido da comunidade, a escola passou por uma mudança de nome, passando a ser conhecida como Escola Estadual Professor Júlio Bonazzi. Esse nome foi adotado em reconhecimento a Giulio Bonazzi, um italiano que chegou ao Brasil na década de 1950 e foi oficialmente reconhecido como agente consular da Itália em Poços de Caldas em 04 de outubro de 1954.

Com uma formação em Matemática, Giulio Bonazzi desempenhou um papel fundamental na educação da cidade, contribuindo de maneira substancial e duradoura para a capacitação de muitos educadores locais. Seu legado e contribuições lhe renderam grande respeito na história da região. Em outra ocasião, em 18 de agosto de 1976, ele recebeu uma nova homenagem ao ter seu nome associado à Biblioteca Municipal Professor Júlio Bonazzi.

1 <https://goo.gl/maps/wCsn4CHmJ6sKkPNh8>. Acesso em: 27 mai. 2023.

Figura 2.2 – Área externa da escola em agosto de 1991.


Fonte: Cedida pela comunidade escolar.

Desde o momento de sua fundação, a escola esteve sob a tutela do Estado de Minas Gerais. No entanto, uma transformação significativa ocorreu quando, em conformidade com a Resolução nº 8641/98, datada de 06 de fevereiro de 1998 e publicada no Diário Oficial de Minas Gerais, a escola passou por um processo de municipalização. Nesse ponto crucial, o estabelecimento de ensino teve sua designação alterada para Escola Municipal Professor Júlio Bonazzi, e, a partir desse momento, a responsabilidade de gerenciamento foi assumida pela Prefeitura Municipal de Poços de Caldas.

À medida que a demanda por vagas educacionais superava a capacidade física do edifício principal, medidas adicionais foram tomadas. Em 2010, em resposta a essa necessidade, a Unidade II da escola foi concebida e implementada. Estrategicamente localizada na zona central, na rua Paraná, n.º 254, Centro, essa nova instalação visava atender às demandas da comunidade. A Unidade II abriu suas portas para acolher os alunos do Jardim II da educação infantil e os estudantes do 1º ao 4º ano do ensino fundamental I, durante os períodos matutino e vespertino. Essa ampliação não apenas aliviou a pressão sobre a capacidade do prédio original, mas também fortaleceu a capacidade da escola em cumprir sua missão educacional de maneira eficaz.

Figura 2.3 – Localização da sede da escola e seu anexo.


Fonte: Google Earth[2].

Em 2012, a escola deu um passo significativo, ampliando sua oferta educacional para incluir estudantes do 6º ano do ensino fundamental II. Nos anos subsequentes, de 2013 a 2016, essa ampliação prosseguiu com a inclusão de uma turma do 7º ano. A evolução não parou por aí, pois nos anos seguintes, especificamente em 2017 e 2018, novas etapas foram acrescentadas, abrangendo os estudantes do 8º e 9º ano, respectivamente.

Em 2016, uma decisão estratégica foi tomada, culminando com o foco da escola direcionado para os ciclos do ensino fundamental I e do ensino fundamental II. Como resultado, a educação infantil foi retirada do escopo da escola, que então se concentrou nos anos do 1º ao 9º ano.

Já em 2015, teve início um projeto ambicioso: a construção de um prédio que uniria as duas unidades escolares em um único local. Essa empreitada visava não apenas a otimização dos recursos, mas também o aumento da conveniência para os estudantes e suas famílias. A nova edificação possibilitaria a consolidação das turmas e proporcionaria uma experiência de aprendizado mais integrada e eficaz.

[2] <https://encurtador.com.br/imoQ0>. Acesso em: 27 mai. 2023.

Figura 2.4 – Obras da construção do atual prédio da escola.


Fonte: Google imagens[3].

A edificação, disponibilizada à comunidade em 2016, é composta por três pavimentos, cada um com funções distintas. No pavimento térreo, encontra-se um auditório que serve como espaço para eventos e atividades congregacionais. O primeiro andar abriga uma cozinha completa com refeitório, oferecendo um ambiente propício para as refeições dos estudantes. Nesse mesmo andar, há instalações sanitárias projetadas para os estudantes, salas destinadas à equipe gestora, além de quatro salas de aula.

No segundo andar, um acervo valioso se encontra disponível na biblioteca, fornecendo uma fonte rica de conhecimento para a comunidade escolar. Destaca-se também uma sala de recursos multifuncionais, destinada a fornecer suporte especializado a estudantes que apresentam necessidades educacionais especiais. Além disso, uma sala de informática é provida para potencializar o acesso à tecnologia e suas aplicações educacionais. Espaços dedicados aos professores estão igualmente contemplados nesse andar, juntamente com cinco outras salas de aula, contribuindo para um ambiente educacional completo e dinâmico.

É importante ressaltar que toda a infraestrutura foi concebida com acessibilidade em mente. A edificação integra recursos essenciais, tais como rampas de acesso, piso tátil e um elevador, assegurando que estudantes com necessidades especiais possam usufruir plenamente do ambiente escolar. Essa preocupação com a inclusão reforça o compromisso da escola em oferecer uma educação equitativa e acessível para todos os seus estudantes.

3 <https://images.app.goo.gl/6SNSFUKW9YcT7p6x6>. Acesso em: 20 mai. 2023.

Figura 2.5 – Obras da quadra de esportes nos fundos da escola.

Fonte: Google imagens[4].

Figura 2.6 – Vista frontal da escola.

Fonte: Google imagens[5].

4 <https://images.app.goo.gl/ScjBYfooR4a8pggMA>. Acesso em: 20 mai. 2023.
5 <https://images.app.goo.gl/k7SraMQmKzSTvVSA6>. Acesso em: 20 mai. 2023.

Na atualidade, a escola conta com uma equipe de 54 colaboradores dedicados e uma comunidade estudantil composta por 425 alunos, distribuídos ao longo de 19 turmas, abrangendo os níveis do 1º ao 9º ano do ensino fundamental.

O ambiente escolar é permeado por uma série de projetos dinâmicos, engajando tanto os estudantes como a comunidade local. Entre esses projetos, merecem destaque atividades como aulas de circo, flauta, dança, judô e tênis de mesa. Iniciativas educativas importantes, como o “Ativamente” e o “Educação no Trânsito”, também encontram espaço nesse cenário de aprendizado.

Privilegiadamente situada, a escola desfruta de uma localização que se aproxima de áreas verdes de preservação ambiental. As vias de acesso ao local são pavimentadas e asfaltadas, e as residências circundantes possuem infraestrutura básica bem estabelecida, incluindo sistemas de saneamento com redes de esgoto e fornecimento de água potável, além de fornecimento de energia elétrica. Complementando essa infraestrutura, a comunidade usufrui de um posto de saúde público, um parque infantil e uma quadra esportiva.

A comunidade estudantil, que exibe bons níveis culturais e sociais, além de rendas mensais consistentes acima do salário mínimo nacional, também tem um papel ativo e engajado na vida escolar. Em muitos casos, essas famílias têm uma história compartilhada com a escola, visto que muitos pais foram alunos da instituição no passado. Esse envolvimento se traduz em um ambiente escolar bem administrado e em um desempenho notável dos estudantes em avaliações externas. Tal fato é corroborado pelos resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) para os estudantes do 5º ano, cujos dados são detalhados na Tabela 2.1.

O Ideb, concebido em 2007 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), desempenha o papel crucial de avaliar a qualidade do aprendizado no Brasil e definir metas de aprimoramento educacional. Fundindo os conceitos de fluxo escolar e médias de desempenho em avaliações, o Ideb é uma métrica composta baseada em informações do Censo Escolar, da Prova Brasil e do Saeb, realizados anual e bianualmente, respectivamente. Com uma escala de avaliação de 0 a 10, o Ideb assegura um equilíbrio entre retenção e aprendizado, destacando áreas para melhoria no sistema educacional. Além de sua função de monitoramento, o Ideb influencia a formulação de políticas públicas para o aprimoramento da educação, servindo como um instrumento de estabelecimento de metas e monitoramento do progresso da educação básica. A meta estipulada para 2022 é alcançar uma média de 6, equivalente à qualidade dos sistemas educacionais de nações desenvolvidas (INEP, ).

Tabela 2.1 – Notas do IDEB para o 5º ano.

| ANO | RESULTADOS ESCOLA | RESULTADOS MUNICÍPIO | META PROJETADA |
|---|---|---|---|
| 2005 | 4,3 | 4,6 | — |
| 2007 | 5,3 | 4,9 | 4,4 |
| 2009 | 5,3 | 5,5 | 4,7 |
| 2011 | 6,0 | 5,8 | 5,1 |
| 2013 | 5,9 | 6,0 | 5,4 |
| 2015 | 6,1 | 6,1 | 5,7 |
| 2017 | 6,6 | 6,3 | 5,9 |
| 2019 | 6,7 | 6,2 | 6,2 |

Fonte: Projeto Político Pedagógico da Escola do ano de 2022.

Devido à recente incorporação do ensino fundamental II na unidade, com destaque para o 9º ano, não há registros na plataforma do INEP que detalhem o desempenho dos estudantes nessa faixa educacional.

## 2.2 DISCENTES

A pesquisa teve como foco os estudantes que ingressaram no 8º ano no período matutino no ano de 2022. A medida que o estudo progrediu e se aproximou de sua conclusão em 2023, esses estudantes haviam avançado para o 9º ano. As turmas, identificadas como 8º A e 8º B, eram compostas por 30 e 25 alunos, respectivamente. Dessas turmas, seis estudantes apresentavam laudos de inclusão, refletindo a abordagem inclusiva do ambiente educacional.

Excluindo-se dois estudantes que já haviam atingido 15 anos ao início das atividades, a maioria dos alunos possuía entre 13 e 14 anos, não demonstrando uma discrepância significativa entre a idade e a série correspondente. Durante o decorrer do estudo, apenas cinco alunos não continuaram o trabalho junto com a turma original. Destes, dois foram retidos e permaneceram no 8º ano, enquanto os outros três optaram por transferir-se para outras escolas. Além disso, uma nova matrícula foi registrada, adicionando um novo estudante ao grupo. Portanto, o trabalho teve início com 55 e foi concluído com 51 participantes.

## 2.3 DOCENTE

A autora trilhou sua jornada educacional em uma escola pública pertencente à rede municipal, desde os primeiros passos na educação infantil até a conclusão do ensino médio, abrangendo o período de 1990 a 2004. Posteriormente, buscou a formação acadêmica através da Licenciatura em Matemática, concluída em 2008, e da Engenharia Elétrica, finalizada em 2017, ambas realizadas em instituições de ensino superior privadas.

Em 2017, também ingressou em um desafiador caminho rumo ao exame nacional de acesso ao PROFMAT, um trajeto que incluiu duas tentativas sem sucesso. Apesar das adversidades intensificadas pela pandemia de COVID-19 no ano de 2021, conseguiu superar os obstáculos e obter a aprovação para ingresso no curso.

Seu início como educadora ocorreu entre 2009 e 2010, quando teve a oportunidade de trabalhar com turmas do programa ProJovem Urbano, que visava à formação e inclusão social de jovens entre 18 e 29 anos, auxiliando-os na conclusão do ensino fundamental. Essa experiência inaugural proporcionou uma valiosa lição sobre a importância da empatia em relação aos estudantes, revelando-se como um fator crucial, senão o mais essencial, para a promoção de um aprendizado significativo.

Em 2014, a autora conquistou a nomeação em concurso público para o cargo de professora na Prefeitura Municipal de Poços de Caldas. Essa trajetória prosseguiu em 2017, quando obteve aprovação no concurso da Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. Desde então, ela tem desempenhado o papel de educadora nas redes públicas de ensino municipal e estadual, contribuindo de maneira ativa para a disseminação do conhecimento e o enriquecimento das experiências educacionais de seus estudantes.

Além disso, atualmente, ela também dedica seu tempo como professora voluntária no programa POTI (Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo). Esse programa oferece cursos gratuitos de matemática a estudantes do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, bem como alunos de qualquer ano do ensino médio, que estejam interessados em participar das olimpíadas de matemática, como a OBMEP e a OBM.

# 3 IDEALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

## 3.1 SOBRE A OBMEP

A OBMEP, criada em 2005, é uma iniciativa de abrangência nacional que se destina a estimular o aprendizado da Matemática, a identificar potenciais talentos incentivando seu envolvimento com as esferas científicas e tecnológicas, bem como a fomentar a inclusão social por meio da difusão do conhecimento. Tal projeto é realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e promovido com recursos do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC) e do Ministério da Educação (MEC), com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

Os objetivos centrais da OBMEP compreendem:

- Estimular e fomentar o estudo da Matemática;

- Contribuir para aprimorar a qualidade do ensino básico, disponibilizando material didático de qualidade a um número mais amplo de estudantes brasileiros;

- Identificar jovens talentosos e estimular sua inserção nas esferas universitárias, notadamente nas áreas científicas e tecnológicas;

- Alavancar o desenvolvimento dos professores das escolas públicas, elevando assim a valorização profissional;

- Facilitar a conexão entre escolas brasileiras, instituições de ensino superior e de pesquisa, bem como sociedades científicas;

- Promover a inclusão social por meio da disseminação do saber.

Embora tenha tido inicialmente como alvo estudantes e professores do 6º ano do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio das redes públicas, desde 2017 a OBMEP passou a incluir participantes de escolas privadas. Entretanto, a distribuição de medalhas de ouro, prata, bronze e menção honrosa ocorre de maneira independente entre essas duas modalidades de ensino.

O processo avaliativo da OBMEP desdobra-se em três níveis: o nível 1 direciona-se aos estudantes do 6º e 7º anos, o nível 2 abrange os alunos do 8º e 9º anos, ambos do ensino fundamental, e o nível 3 é destinado aos estudantes do 1º, 2º e 3º anos do ensino médio. A avaliação é conduzida ao longo de duas etapas distintas. A primeira fase compreende uma prova classificatória constituída por 20 questões objetivas de múltipla escolha, sendo que a aplicação, avaliação e classificação dos 5% dos alunos que avançam para a segunda fase são incumbência da escola. Na segunda etapa, os participantes enfrentam uma prova discursiva com seis questões, sendo a aplicação, correção e avaliação exclusivamente de responsabilidade do IMPA.

A premiação dos participantes é baseada exclusivamente nas pontuações conquistadas na segunda fase e segue uma ordem decrescente de resultados. A Tabela 3.1 fornece uma visão detalhada da distribuição e quantidade de premiações a serem concedidas na 18ª edição da

OBMEP, a ser realizada em 2023.

Tabela 3.1 – Distribuição da premiação na 18ª OBMEP.

| Premiação | Escolas públicas | Escolas privadas | Total |
|---|---|---|---|
| Medalha de ouro | 500 | 150 | 650 |
| Medalha de prata | 1500 | 450 | 1950 |
| Medalha de bronze | 4500 | 1350 | 5850 |
| Menção honrosa | 45000 | 6000 | 51000 |

Fonte: Regulamento da 18ª OBMEP[1].

Com o intuito de expandir seu alcance, em 2018, o IMPA deu início ao processo de incorporação dos anos iniciais ao projeto da OBMEP, introduzindo a categoria Nível A, voltada para estudantes do 4º e 5º anos do ensino fundamental, exclusivamente em escolas públicas. No ano de 2022, a abrangência do projeto foi expandida para englobar também os alunos do 2º e 3º anos do ensino fundamental. Com isso, a iniciativa foi renomeada como Olimpíada Mirim - OBMEP, sendo dividida em duas categorias distintas: Mirim 1 (2º e 3º anos) e Mirim 2 (4º e 5º anos). A partir do ano de 2023, estudantes de escolas públicas ganharão a oportunidade de participar dessa modalidade da OBMEP, que conta com o apoio da B3 Social, da Capes, do CNPq e da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

Nesse contexto, a avaliação é conduzida ao longo de duas fases, ambas constituídas por provas objetivas e classificatórias com 15 questões cada. A aplicação, correção e classificação das provas são de responsabilidade das respectivas escolas.

Na escola onde o presente trabalho foi desenvolvido, o histórico de participação na OBMEP teve início no ano de 2013, contemplando, inicialmente, estudantes dos 6º e 7º anos. Em 2017, a participação foi expandida para incluir uma turma do 8º ano, e a partir de 2018, a escola passou a englobar estudantes dos quatro anos do ensino fundamental II, abrangendo do 6º ao 9º ano.

A Tabela 3.2 fornece uma visão detalhada do histórico de premiações da escola ao longo dos anos de sua participação na OBMEP.

1 <https://www.obmep.org.br/regulamento.htm>. Acesso em: 03 jun. 2023.

Tabela 3.2 – Histórico de premiação da EM Professor Júlio Bonazzi na OBMEP

| Ano | Classificados para a 2 fase | Ouro | Prata | Bronze | Menção honrosa |
|---|---|---|---|---|---|
| 2013 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2014 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2015 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2016 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2017 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2018 | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2019 | 11 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 2021 | 14 | 0 | 0 | 1 | 6 |
| 2022 | 14 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Fonte: Site OBMEP[2].

## 3.2 ESCOLHA DO TEMA

A autora, ao longo de sua educação básica, não teve a oportunidade de participar das edições anteriores da OBMEP, já que concluiu o Ensino Médio em 2004, enquanto a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas teve seu início no ano subsequente, em 2005. Contudo, desde o começo de sua carreira como professora na Escola Municipal Professor Júlio Bonazzi em 2014, ela tem consistentemente encorajado seus estudantes a se envolverem na competição, resultando, em alguns casos, em reconhecimentos por menções honrosas.

Tendo conhecimento da existência do programa OBMEP na escola, a autora se manteve atenta às datas de inscrição. Finalmente, no ano de 2019, participou do processo seletivo, foi aprovada e iniciou a formação para atuar como professora do programa no ano seguinte. Paralelamente às reuniões semanais do programa com os alunos selecionados, desde o começo do ano letivo, ela apresentava questões de provas anteriores a todos os estudantes de suas turmas regulares, desafiando-os a resolvê-las durante o fim de semana. No entanto, a interação presencial com os alunos foi interrompida devido à chegada da pandemia de COVID-19 e o início do período de isolamento. Ainda que as aulas com os estudantes tenham sido suspensas conforme diretrizes do programa, os professores continuaram a sua formação de forma remota. Quando o contato com os alunos foi retomado, de maneira virtual, a autora aproveitava as oportunidades para abordar os tópicos que havia aprendido na capacitação.

A pandemia interrompeu a edição de 2020 da OBMEP, mas a autora se esforçou para

[2] <https://www.obmep.org.br/escola/listagemAlunosPremiadosAnoPassado.DO?mecCode=31124915>. Acesso em: 03 jun. 2023.

que a maioria dos alunos pudesse participar em 2021, mesmo com as aulas ainda ocorrendo de maneira remota. Como resultado, a escola em que trabalha foi destacada como uma das mais premiadas entre as instituições públicas da cidade de Poços de Caldas na 16ª edição da OBMEP, e pela primeira vez, um de seus estudantes conquistou uma medalha. Nesse evento, a escola celebrou sua primeira estudante medalhista. Em 2022, uma nova alegria surgiu com a conquista de outra estudante medalhista na 17ª edição.

Essa experiência intensificou ainda mais o afeto da autora pela OBMEP. Ela constatou que a abordagem das atividades em sala de aula pode desempenhar um papel crucial em incentivar os estudantes e evidenciar que o aprendizado pode ser uma experiência divertida. Muitos estudantes costumavam ter aversão às provas da OBMEP em edições anteriores, mas agora, no início do ano, muitos procuram a autora para obter informações sobre a prova e buscar mais materiais de preparação. Essa mudança de atitude a incentivou a repensar sua abordagem tradicional ao ensino dos conteúdos do currículo comum.

Observando a estrutura das provas de anos anteriores, ela notou que as questões de geometria eram recorrentes, particularmente aquelas que envolvem o cálculo de áreas de polígonos. Dado que sua matéria preferida é geometria e considerando que muitos de seus alunos demonstravam aversão por esse conteúdo, ela decidiu focar em geometria em suas sequências didáticas. Seu objetivo foi desmistificar essa percepção de que geometria é difícil, e possivelmente descobrir as razões por trás dessa aversão.

Outro fator que norteou a escolha do tema foi o desempenho dos estudantes na avaliação diagnóstica feita pela Secretaria Muncipal de Educação no início do ano letivo de 2022. A análise dos resultados fornece uma visão do desempenho dos estudantes do 6º ao 9º ano nas unidades temáticas espaço e forma, assim como grandezas e medidas.

Os dados apresentados na Tabela 3.3 exibem o percentual de acertos que os alunos obtiveram em uma gama de descritores e habilidades relevantes da temática Geometria.

Chama a atenção a disparidade nos percentuais de acertos. Essa discrepância destaca a importância de abordagens pedagógicas que fortaleçam as competências geométricas, ressaltando a necessidade de uma abordagem mais estruturada, Dessa forma, os alunos se tornam mais confiantes para enfrentar as complexidades desse conteúdo.

Tabela 3.3 – Percentual de acertos na avaliação diagnóstica

| Etapa | Acertos | Descritor / habilidade |
|---|---|---|
| 6º ano | 75% | Corresponder figuras tridimensionais às suas planificações ou vistas. |
| | 41% | Corresponder uma figura plana desenhada em malha quadriculada à sua imagem, obtida por meio de uma redução ou uma ampliação. |
| | 36% | Utilizar o cálculo da medida do perímetro de uma figura bidimensional na resolução de problemas, em malha quadriculada. |
| 7º ano | 92% | Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas. |
| | 100% | Corresponder figuras tridimensionais às suas planificações ou vistas. |
| | 22% | Resolver problema envolvendo o cálculo do perímetro de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas. |
| 8º ano | 78% | Corresponder figuras tridimensionais às suas planificações ou vistas. |
| | 67% | Utilizar o cálculo da medida do perímetro de uma figura bidimensional na resolução de problemas. |
| | 37% | Utilizar o cálculo da medida da área de figuras bidimensionais na resolução de problemas. |
| 9º ano | 62% | Corresponder figuras tridimensionais às suas planificações ou vistas. |
| | 46% | Utilizar o cálculo da medida da área de figuras bidimensionais na resolução de problemas. |

Fonte: Relatório fornecido pela Secretaria Municipal de Educação de Poços de Caldas.

## 3.3 O CÁLCULO DE ÁREAS NA BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfoca, de maneira detalhada nos anos finais do Ensino Fundamental, na unidade temática intitulada “Grandezas e Medidas”, os objetos de conhecimento ligados ao cálculo da área de figuras planas. Essa abordagem busca efetivar o desenvolvimento das competências nesse tópico entre os estudantes, reforçando, assim, a relevância de explorá-lo de maneira abrangente dentro da sala de aula. As habilidades correspondentes estão elencadas de forma detalhada na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Habilidades da BNCC que envolvem o cálculo de áreas nos anos finais do Ensino Fundamental

| Etapa | Unidade temática | Objetos de conhecimento | Habilidades |
|---|---|---|---|
| 6º ano | Grandezas e medidas | Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume | (EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento. |
| 7º ano | Grandezas e medidas | Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros | (EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.<br>(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas. |
| 8º ano | Grandezas e medidas | Área de figuras planas<br>Área do círculo e comprimento de sua circunferência | (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos. |

Fonte: (Brasil. Ministério da Educação, 2017) Site BNCC[3].

## 3.4 ALGUNS EVENTOS DA HISTÓRIA DO CÁLCULO DE ÁREAS

A gênese da Geometria está intrinsecamente vinculada a atividades cotidianas relacionadas ao plantio, à construção e à observação dos astros, que demandavam cálculos de áreas, superfícies e volumes. Desde os primórdios da civilização até os avanços matemáticos

3 http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/matematica-no-ensino-fundamental-anos-finais-unidades-tematicas-objetos-de-conhecimento-e-habilidades. Acesso em: 17 jun. 2023.

contemporâneos, diferentes civilizações exploraram o cálculo de áreas por razões variadas, que iam desde a medição de terras até a busca pelo conhecimento matemático puro. O início da disciplina remonta à antiguidade, onde as civilizações egípcia e babilônica, por volta o segundo milênio a.C., deram os primeiros passos.

### 3.4.1 O Egito

Acredita-se que o Egito tenha sido um terreno fértil para seu desenvolvimento, haja vista a construção de monumentos grandiosos como as pirâmides, que requeriam sólidos conhecimentos geométricos (EVES, 2004).

As margens do Rio Nilo, considerado por séculos como a fonte vital do Egito, propiciaram o surgimento dos primeiros vestígios matemáticos. Quando as comunidades abandonaram o nomadismo e passaram a fixar residências nas proximidades do rio, condições ideais para a agricultura emergiram (EVES, 2004). Com o aumento populacional, surgiu a demanda por uma gestão mais eficiente das terras. Os escribas, nesse contexto, utilizaram o próprio corpo como unidade de medida, estabelecendo as primeiras bases de medidas padronizadas. Agrimensores ao serviço dos faraós efetuavam medidas de terra para cálculos de áreas e os agricultores eram submetidos à obrigação de pagar impostos de acordo com a extensão das terras cultivadas. No entanto, com as enchentes periódicas do rio Nilo, as margens se inundavam, resultando em partes das propriedades cobertas por água. Isso levava a uma situação injusta, onde os agricultores eram taxados pela área "perdida" de suas terras. Portanto, havia a necessidade de recalcularem a área para garantir uma avaliação precisa. Eles calculavam áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles, provavelmente pelo método de decomposição e recomposição de figuras.

Esse cenário de resolução prática de problemas foi fundamental para os egípcios se tornarem pioneiros na inovação matemática. Para registrar suas atividades de cálculo, os escribas começaram a utilizar folhas de papiro (BOYER, 2012).

Os papiros matemáticos mais notórios englobam o Papiro Rhind, Papiro de Moscou e Papiro de Berlim. O Papiro Rhind, datado aproximadamente de 1800 a.C., é o mais extenso e significativo. Com dimensões de 0,30 m de largura por 5 m de comprimento, ele é reconhecido como um manual prático, contendo 85 problemas e suas soluções. Isso o coloca em uma posição de destaque no panorama do conhecimento matemático do Antigo Egito. Os problemas retratam situações vivenciadas pelos trabalhadores da época.

Um exemplo representativo é o Problema 14, que aborda o cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada. A fórmula sugerida para calcular o volume assemelha-se à fórmula atualmente empregada para o cálculo de volumes de pirâmides.

Outra contribuição significativa do Papiro Rhind é o método adotado para calcular a área de um círculo. Os Problemas 48 e 50 mostram como os egípcios chegaram à fórmula para a

[4] <https://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus>. Acesso em: 18 ago. 2023.

Figura 3.1 – Fragmento do Papiro Rhind.

Fonte: Wikipedia[4].

área de um círculo. Os métodos envolvem comparações entre a área do círculo e a do quadrado circunscrito.

Estes problemas demonstram a eficácia das estratégias matemáticas adotadas pelos egípcios e oferecem perspectivas valiosas sobre o uso da matemática na vida quotidiana da época.

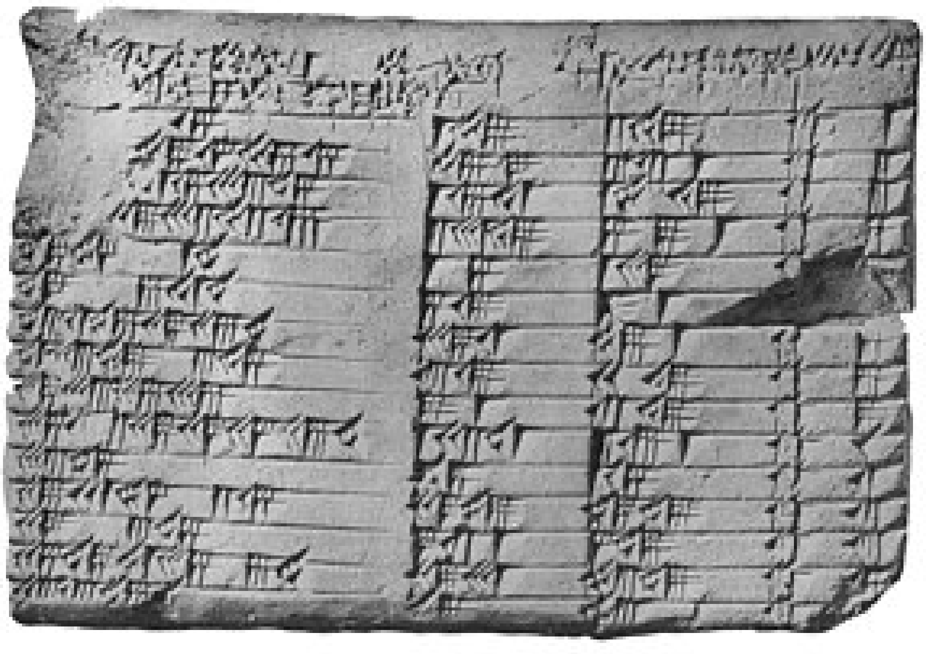
### 3.4.2 A Mesopotâmia

Muitos textos matemáticos da Mesopotâmia, encontrados em tábuas de argila, estão relacionados a questões hidráulicas, como a construção de canais e diques, além da medição de campos (GASPAR, 2003). Isso é compreensível devido ao desenvolvimento de um extenso sistema de irrigação artificial nessa região. Além disso, é evidente que o conhecimento matemático desses povos revela um alto domínio de técnicas de cálculo, possivelmente elaboradas para apoiar suas atividades comerciais em expansão.

No âmbito do conhecimento geométrico, esse povo demonstra uma origem prática. Junto com o cálculo de áreas de campos, surgem também os cálculos dos rendimentos totais dos terrenos, que dependem de fatores específicos, como a qualidade do solo. O cálculo de taludes com formato trapezoidal incorpora a determinação do número de trabalhadores necessários por jornada média de trabalho. Além disso, são registrados cálculos relacionados à construção de estruturas em anel, alicerces de templos, poços e canais. Evidências sugerem que os babilônios estavam familiarizados com regras para calcular áreas de retângulos, triângulos retângulos, triângulos isósceles e trapézios com um lado perpendicular às bases.

Destaca-se também que os documentos encontrados e analisados indicam, de acordo com alguns estudiosos, que a matemática babilônica não estava limitada a aplicações práticas. Eles apontam o início de um interesse teórico, ilustrado, por exemplo, pela tábua Plimpton 322, conhecida por conter uma lista de números organizados em colunas e linhas. A peculiaridade reside na natureza dos números e em como eles foram organizados. Os números registrados nessa tábua são representativos de "triplas pitagóricas", ou seja, números inteiros que satisfazem a relação do Teorema de Pitágoras.

Figura 3.2 – Tabuleta Plimpton 322.



Fonte: Wikipedia[5].

Na geometria babilônica, não se encontram teoremas explícitos ou provas. Apesar dos problemas geométricos envolverem cálculos numéricos, é possível notar, além do interesse teórico, a utilização de inter-relações entre o que atualmente identificamos como álgebra e geometria. Alguns estudiosos também sugerem que os problemas geométricos nos textos poderiam ter sido usados como exemplos para a aplicação de problemas algébricos específicos. Isso ocorre porque os maiores sucessos na geometria babilônica estão relacionados a dois

[5] <https://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322>. Acesso em: 18 ago. 2023.

tópicos nos quais eles exibiram notável habilidade algébrica: o Teorema de Pitágoras e a semelhança de triângulos. Tais trabalhos antecederam os esforços gregos por mais de mil anos.

### 3.4.3 A China

Os primeiros registros da geometria chinesa remontam ao século XI a.C., provavelmente durante o período da dinastia Zhou. Os textos clássicos, como o "K'ui-ch'ang Suan-shu", também conhecido como "Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática", são fundamentais para entender a geometria praticada na China antiga. Esses textos constam de 246 problemas que tratavam de diversos tópicos matemáticos como agricultura, procedimentos em negócios, engenharia, agrimensura, resolução de equações e propriedades de triângulos retângulos. O trabalho é particularmente significativo, datando do período Han, embora seja bastante provável que contenha material ainda mais antigo (EVES, 2004).

Os problemas abordados nos "Nove Capítulos", embora se originem de situações práticas, eles foram formalizados. Alguns problemas têm um caráter recreativo, e muitos são reconhecidos na matemática ocidental. Isso sugere um possível contato ao longo da "Rota da Seda", que ligava os mundos chinês e ocidental (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2012). A proporcionalidade parece ser a ideia central para esses matemáticos chineses antigos, tanto na geometria, como na álgebra, onde problemas eram resolvidos utilizando proporções. Muitos problemas geométricos eram abordados com métodos de "corte e cola". Equações de primeiro grau também eram tratadas utilizando proporcionalidade.

Durante a dinastia Han (206 a.C. - 220 d.C.), surgiram avanços notáveis na geometria chinesa. O matemático Liu Hui é famoso por sua abordagem inovadora para calcular a área do círculo, que se aproximava do valor da constante $\pi$. Ele também aperfeiçoou métodos de cálculo de áreas de figuras mais complexas, como polígonos regulares inscritos e circunscritos.

No entanto, a ênfase na aplicação prática da geometria muitas vezes limitou o desenvolvimento de teorias geométricas mais abstratas na China. Os matemáticos chineses estavam mais interessados nas soluções concretas para problemas do cotidiano do que nas explorações teóricas profundas.

A história da geometria chinesa é uma prova da diversidade de abordagens matemáticas ao redor do mundo. Enquanto as contribuições chinesas podem ter sido mais focadas em aplicações práticas, elas desempenharam um papel vital na engenharia, na arquitetura e em outras atividades cotidianas da sociedade chinesa.

### 3.4.4 A Índia

A evolução da geometria na Índia pode ser dividida em três fases distintas, cada uma revelando um enfoque particular. O período pré-ariano é marcado por evidências geométricas em achados arqueológicos, como a decoração com círculos e figuras intersectadas em cerâmicas encontradas nas ruínas de Mohenjo-Daro. O período Védico, posteriormente, mostrou um uso geométrico na construção de altares de sacrifício, como o Mahavedi. As regras precisas para construção desses altares foram registradas nos Sulbasutras, apêndices dos Vedas, indicando um avanço notável no conhecimento matemático. Os Sulbasutras, escritos pelos sulbakaras, apresentam métodos construtivos detalhados e até mesmo o Teorema de Pitágoras é mencionado. Datados aproximadamente entre 800 a.C. e 500 a.C., esses manuais para construção de altares, mesmo destinados a contextos religiosos, revelam um domínio geométrico notável. Enquanto os Sulbasutras não oferecem provas formais, esses registros oferecem uma visão fundamental da geometria na Antiga Índia, conectando-a a práticas religiosas e culturais (GASPAR, 2003).

A abordagem predominante na geometria dos Sulbasutras é construtiva, embora ocasionalmente se percebam formulações geométricas. As figuras geométricas, utilizadas para modelar os altares, compreendem triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, círculos, semicírculos e outras formas, todas ajustadas a dimensões ou áreas específicas. A precisão era essencial para a orientação, formas e áreas dos altares, sendo comparável à importância da pronúncia correta dos mantras védicos. Portanto, os métodos construtivos eram meticulosos, embora frequentemente os princípios geométricos subjacentes a essas construções não fossem explicitamente enunciados. Além das formas geométricas simples, as construções abrangiam figuras complexas, como tartarugas, pássaros em voo ou pássaros voando com a cauda inclinada. Para calcular as áreas dessas figuras, recorria-se à decomposição em partes com formas geométricas conhecidas e áreas facilmente calculáveis (GASPAR, 2003).

Figura 3.3 – Altar em forma de falcão escavado em Uttarkashi.

Fonte: Wikipedia[6].

[6] <https://en.wikipedia.org/wiki/Vedi_(altar)>. Acesso em: 18 ago. 2023.

### 3.4.5 A Grécia

Na Grécia Antiga, a geometria desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento matemático e na compreensão da natureza e do mundo ao redor. Os matemáticos gregos, mais notavelmente Euclides e Arquimedes, contribuíram significativamente para a formulação e sistematização dos princípios geométricos.

Euclides, que viveu por volta do século III a.C., é conhecido por seu trabalho "Elementos", uma coleção de treze livros que abordam diversas áreas da geometria. Esta compilação apresenta uma seleção de resultados matemáticos fundamentais da tradição grega, organizados em uma estrutura sistemática e expostos como um corpo de conhecimento dedutivo formal. A abordagem é concisa e eficaz. O livro inicia com uma série de definições, seguidas por postulados e "noções comuns" que Euclides considerava autoevidentes. A partir desse ponto, sucedem-se uma série de proposições, cada uma delas acompanhada de sua respectiva demonstração. Não há inserção de material de contexto, nem tentativas de motivação. À medida que progride, Euclides introduz novas definições e postulados ao abordar diferentes tópicos. Dessa forma, o escopo abrange tanto a geometria plana quanto a espacial.

Os "Elementos" consolidam, em um único compêndio, as conquistas mais significativas da matemática grega até aquele momento. Através de seu rigor lógico e dedutivo, Euclides estabeleceu os fundamentos para o cálculo de áreas de triângulos, retângulos e outros polígonos. Ele introduziu princípios como a congruência de triângulos e a proporcionalidade de áreas. Além disso, ele explora a divisibilidade de números inteiros, elabora uma teoria avançada de razões e estabelece uma classificação intricada de razões irracionais (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2012).

Arquimedes de Siracusa é amplamente reconhecido como um grande desenvolvedor e inovador de técnicas matemáticas no estudo de áreas. Sua contribuição para a matemática e para o cálculo de áreas foi marcante e influente, especialmente por meio do uso do método da exaustão e da aplicação de princípios geométricos avançados.

O método da exaustão foi uma abordagem revolucionária para calcular áreas e volumes de figuras curvas e sólidos. Esse método envolveu a divisão da figura em partes menores, mais facilmente compreensíveis e calculáveis, e, em seguida, aproximou-se da área ou volume total somando as áreas ou volumes das partes menores. Essa abordagem é uma precursora direta do cálculo integral moderno.

Arquimedes usou esse método para calcular a área de um segmento de parábola e a área de um setor de uma circunferência. Ele considerou um círculo como sendo circunscrito e inscrito por polígonos regulares com número de lados cada vez maiores. Ao aumentar o número de lados do polígono e calcular suas áreas, Arquimedes conseguiu aproximar a área do círculo com uma precisão notável.

Suas contribuições continuam a ser altamente valorizadas e estudadas até os dias atuais. Além disso, ele fez importantes contribuições para a geometria plana e espacial, estabelecendo teoremas sobre áreas e volumes de esferas, calotas esféricas e quádricas de revolução. Seu impacto na matemática é evidente em sua habilidade computacional, originalidade e rigor nas demonstrações, características que ecoam em trabalhos matemáticos modernos (EVES, 2004).

A geometria grega não apenas tinha implicações práticas para a medição e o cálculo de áreas em contextos reais, mas também era altamente valorizada como uma forma de pensamento abstrato e racional. Os matemáticos gregos buscavam entender a estrutura do espaço e a relação entre formas geométricas por meio de deduções e provas rigorosas.

### 3.4.6 Os povos originários brasileiros

Diferentes povos originários do Brasil, como Aratu/Sapucaí, Kadiweu, Kuikuro, Tiriyó, Wayana, Javaé, Karajá, Kayapó-Xikrin, Timbira, Xavante, Marubo, Ticuna, Aweti, Asurini do Xingu, Kaiabi, Suruí e outras, incorporam a geometria e o cálculo de áreas em diversas atividades cotidianas. Essa utilização é evidente na disposição de suas aldeias, que podem ter formas circulares, ovais ou em ferradura, frequentemente com anéis concêntricos de diferentes tamanhos. Essas áreas variam de tamanho, algumas chegando a centenas de milhares de metros quadrados.

Os moradores das aldeias aproveitam a geometria em suas criações artísticas, como nas pinturas corporais, máscaras rituais e ornamentos, utilizando padrões geométricos, formas abstratas e símbolos que têm significados mitológicos e culturais. As figuras geométricas não são apenas elementos decorativos, mas também veículos de comunicação e transmissão de conhecimento. Além disso, a arquitetura das aldeias é um exemplo notável de como a geometria e o cálculo de áreas são empregados para otimizar o espaço e a organização social (GASPAR, 2003).

A agricultura também é uma parte essencial da vida dessas povos, com o cultivo de diferentes tipos de culturas, como mandioca, milho, feijão, batata-doce e outras plantas. A seleção de locais para plantio e o manejo das roças também envolvem noções de geometria e áreas para maximizar a produção de alimentos.

Portanto, as aldeias indígenas do Brasil demonstram uma conexão intrínseca com a geometria e o cálculo de áreas em diversos aspectos de suas vidas, desde a organização espacial das aldeias até as atividades culturais e econômicas do dia a dia.

### 3.4.7 O cenário atual

Na contemporaneidade, o cálculo de áreas de figuras planas tornou-se uma tarefa significativamente facilitada e ampliada graças ao avanço da tecnologia. A disponibilidade de poderosos softwares e aplicativos matemáticos tem revolucionado a maneira como os profissionais e estudantes lidam com cálculos geométricos.

Um dos softwares mais notáveis nesse contexto é o Mathematica, desenvolvido pela Wolfram Research. Ele permite a realização de cálculos complexos, incluindo o cálculo de áreas de figuras geométricas, de forma precisa e eficiente. Além disso, o Mathematica oferece recursos para visualização gráfica, o que auxilia na compreensão das propriedades das figuras e no processo de cálculo.

Outra ferramenta influente é o GeoGebra, que combina geometria, álgebra e cálculo. O GeoGebra é amplamente utilizado em ambientes educacionais para ensinar e aprender matemática de maneira interativa. Ele permite a criação de construções geométricas dinâmicas, o que torna possível explorar visualmente conceitos relacionados ao cálculo de áreas.

Para engenheiros, arquitetos e profissionais da área técnica, softwares como o AutoCAD desempenham um papel vital no cálculo de áreas. Eles permitem a criação de desenhos e modelos precisos, nos quais é possível calcular áreas de regiões delimitadas com grande precisão. Isso é particularmente relevante para projetos de construção e design.

No campo da ciência de dados e análise estatística, o software R é amplamente utilizado para calcular áreas sob curvas em contextos como estudos de probabilidades e distribuições. Através da linguagem de programação R, é possível aplicar métodos numéricos avançados para calcular áreas de formas complexas.

Além dessas ferramentas, aplicativos móveis também têm ganhado popularidade na área de cálculos matemáticos. Aplicativos como Photomath permitem que os usuários tirem fotos de equações matemáticas e recebam respostas detalhadas, incluindo o cálculo de áreas, se for o caso.

Em resumo, a era moderna é marcada pela revolução tecnológica, que transformou a forma como realizamos cálculos de áreas e outras operações matemáticas. Softwares e aplicativos avançados têm simplificado e otimizado esse processo, ampliando as possibilidades de análise e compreensão das propriedades geométricas.

Compreender a evolução desses conceitos ao longo do tempo auxilia os estudantes a perceberem que o conhecimento matemático é construído, internalizado e perpetuamente atualizado ao longo da história.

## 3.5 ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES

O tema selecionado para este trabalho foi a geometria, mais especificamente, o cálculo de áreas de figuras planas. Para elaborar as sequências didáticas, baixamos as provas do nível 2, das primeiras e segundas etapas, das edições anteriores no site oficial da OBMEP. A partir disso, identificamos e separamos todas as questões relacionadas ao tema. Em seguida, agrupamos aquelas que tratavam do cálculo de áreas, subdividindo-as em subtemas denominados “cortar e montar” (problemas envolvendo a decomposição de figuras), “áreas e perímetros”, “altura fixa/deslizar” (problemas envolvendo triângulos e pontos deslizantes), “malhas”, “básicos 1” (problemas que utilizam a aplicação direta de fórmulas) e “básicos 2” (problemas que envolvem dobraduras).

Após essa etapa, escolhemos dois subtemas para um foco mais aprofundado: “cortar e montar” e “malhas”. Baseamos essa escolha na percepção de que esse tipo de atividade seria mais adequado e facilmente adaptável para a utilização de materiais manipuláveis em sala de aula.

O processo de desenvolvimento das atividades resultou na criação de um conjunto composto por cinco folhas de exercícios. Na primeira folha, encontram-se três questões dissertativas selecionadas da OBMEP, destinadas tanto ao diagnóstico inicial quanto à avaliação do aprendizado ao término da aplicação. As folhas subsequentes apresentam itens que, de maneira gradual, direcionam o estudante para o raciocínio necessário na resolução de questões objetivas. Vale ressaltar que a última folha se destaca por conter duas questões objetivas e uma questão dissertativa.

A seguir, fornecemos uma explicação detalhada sobre como as sequências foram concebidas e desenvolvidas.

### 3.5.1 Folha de atividades inicial/final

Para realizar um diagnóstico sobre os conhecimentos prévios da turma e avaliar o que foi aprendido durante o trabalho, selecionamos três questões das provas da segunda etapa da OBMEP. Optamos por questões dissertativas, pois dessa forma seria possível verificar as estratégias de raciocínio empregadas pelos estudantes. As questões escolhidas foram as de número 3, 2 e 3 das provas de 2018, 2017 e 2013, respectivamente. Os enunciados das questões estão disponíveis no APÊNDICE A , página 98.

Na questão 3 da prova de 2018 o objetivo foi avaliar a habilidade dos estudantes em estabelecer uma conexão entre a medida de área de um quadrado e a medida do comprimento de seu lado. Além disso, buscamos verificar se possuíam habilidades para lidar com sobreposições e realizar a decomposição de figuras.

Com a questão 2 da prova de 2017, o intuito foi avaliar a competência dos estudantes no emprego da decomposição de figuras, utilizando a malha quadriculada como estratégia na resolução de problemas. Adicionalmente, procuramos identificar a capacidade dos mesmos em reconhecer padrões e compor figuras através da justaposição.

Finalmente, por meio da exploração da questão 3 de 2013, almejamos avaliar a competência dos estudantes no cálculo das áreas de retângulos e triângulos. Novamente, a ênfase recaiu na habilidade de compor figuras por meio da justaposição, bem como na aplicação da malha quadriculada como ferramenta estratégica para solucionar problemas.

### 3.5.2 Folha de atividades 01 – Dedução das fórmulas das áreas de alguns polígonos

Na primeira folha, organizamos atividades que visam à construção do conceito da ideia de área pelo estudante, permitindo que o mesmo deduza, com o auxílio de material manipulativo, as fórmulas para calcular a área de diversos polígonos. Esses polígonos incluem retângulos, quadrados, paralelogramos, triângulos, losangos e trapézios. As definições dessas figuras estão disponibilizadas diretamente na folha de atividades, destacadas por meio de post-its para chamar a atenção durante a realização das tarefas.

Para explorar o cálculo da área de um retângulo, inserimos uma malha quadriculada, na qual o estudante deverá construir um retângulo com uma base de 4 cm e uma altura de 3 cm. Nessa malha, convencionamos que cada quadradinho possui uma área de $1cm^2$. Enquanto avançamos nos demais itens da atividade, conduzimos o estudante a relacionar a área do retângulo desenhado com o produto das medidas da base e da altura, denotadas por $b$ e $h$, respectivamente. A partir disso, guiamos o processo de generalização, levando-o a escrever uma fórmula para a área do retângulo e, subsequentemente, para a área do quadrado. A ênfase é em reconhecer que um quadrado é um caso especial de retângulo com lados congruentes. Para a representação dessas medidas, adotamos o símbolo $l$ para denotar o comprimento dos lados.

No caso do próximo polígono, orientamos o estudante a desenhar um paralelogramo com medidas predefinidas na malha quadriculada da seção principal. Além disso, pedimos que ele reproduza o paralelogramo na malha disponível no final da atividade, com o propósito de recortá-lo e colá-lo. Através dessa abordagem, o aluno compreende que, ao recortar e colar adequadamente, ele consegue formar um retângulo, cuja fórmula para a área já foi previamente deduzida.

Seguindo uma abordagem similar à anterior, para auxiliar o estudante na dedução da fórmula da área de triângulos, introduzimos diferentes classificações baseadas em ângulos, tais como acutângulos (com alturas internas), obtusângulos e retângulos (que podem ter alturas internas, externas ou coincidentes com lados). O aluno é solicitado a reproduzir dois triângulos de cada tipo na malha final e, após recortá-los, a posicioná-los de maneira estratégica para formar um paralelogramo. Através deste raciocínio, a fórmula da área do triângulo é deduzida, considerando que dois triângulos congruentes formam um paralelogramo.

Esse mesmo princípio foi aplicado à dedução da área de losangos. Solicitamos ao estudante que reproduza duas cópias do losango feito na malha da seção principal, recortando uma delas ao longo das diagonais e, em seguida, posicionando-as adequadamente para formar um retângulo. Novamente, o aluno é incentivado a escrever a fórmula da área do losango, observando que a formação do retângulo exigiu dois losangos congruentes e, o que anteriormente denotamos por $b$ e $h$, agora será representado por $D$ (diagonal maior) e $d$ (diagonal menor), respectivamente.

Por fim, na dedução da área de trapézios, repetimos o método adotado para os triângulos, abordando trapézios retângulos, isósceles e escalenos.

A fim de sintetizar e sistematizar os resultados alcançados ao longo de toda a atividade, elaboramos uma tabela que requer dos estudantes o registro dos elementos necessários e a respectiva fórmula para o cálculo da área de cada polígono.

A Folha de Atividades 01 encontra-se detalhada no APÊNDICE B , na página 101.

### 3.5.3 Folha de atividades 02 – Questão 13 – OBMEP 2007 – Nível 02

Para a criação da segunda folha de atividades, escolhemos como ponto culminante uma questão que envolve o cálculo de áreas a partir de uma figura construída com o do tangram. Iniciamos por compartilhar a história que permeia esse enigmático jogo, acompanhada por três lendas chinesas que relatam a origem das sete peças que o compõem.

Na sequência, apresentamos um guia passo a passo para a confecção do tangram utilizando uma folha de papel, incorporando algumas figuras que encorajam os estudantes a interagir com as formas geométricas e a se familiarizarem com suas configurações.

Prosseguindo com os itens subsequentes, nosso objetivo é permitir que os estudantes comparem as distintas peças entre si em termos de área, expressando suas conclusões e resultados através de frações e porcentagens inseridas em uma tabela designada para tal fim.

Dando sequência, integramos a atividade 13 da prova da primeira etapa da OBMEP do ano de 2007, nível 02. Nessa etapa, os conceitos previamente explorados se fazem essenciais para a resolução da questão em pauta.

Para encerrar, disponibilizamos um espaço no qual o estudante pode liberar sua imaginação e criar uma figura utilizando o tangram que ele próprio confeccionou.

A Folha de Atividades 02 encontra-se detalhada no APÊNDICE C , na página 109.

### 3.5.4 Folha de atividades 03 – Questão 07 – OBMEP 2015 – Nível 02

Elaboramos as atividades da terceira folha de forma a tomar como base a questão 07 da prova da primeira fase da OBMEP, nível 02, no ano de 2015. Nesta questão, uma figura é composta por dois quadrados e dois triângulos justapostos, em que a medida do comprimento do lado do quadrado é fornecida. A tarefa do estudante era calcular a medida da área da figura completa.

Inicialmente, disponibilizamos as peças que poderiam ser recortadas e manipuladas, com a expectativa de que os estudantes estabelecessem uma correlação entre o deslocamento vertical do quadrado e a altura do triângulo formado. Além disso, buscamos que os alunos compreendessem a relação entre a área dos dois triângulos quando combinados e a área do quadrado. Essa relação foi expressa por meio de uma razão. Posteriormente, após a exploração prática com o material manipulativo, orientamos a organização dos dados em tabelas e a dedução de uma fórmula para a área da figura final em termos do lado ($l$) do quadrado e de seu deslocamento vertical ($d$).

A partir das etapas anteriores, esperávamos que os estudantes estivessem prontos para enfrentar a atividade final com relativa facilidade.

A Folha de Atividades 03 encontra-se detalhada no APÊNDICE D , na página 113.

### 3.5.5 Folha de atividades 04 – Questões OBMEP 04/2011, 13/2010 e 04/2005 – Nível 02

Na quarta folha de atividades, estamos abordando três questões, sendo que duas delas são objetivas e a última é dissertativa. Selecionamos as questões 04/2011, 13/2010 e 04/2005, respectivamente, com base no critério de que elas envolvem a resolução de problemas relacionados a áreas utilizando malhas, mais especificamente, malhas quadriculadas.

Para simplificar os cálculos, decidimos estabelecer que, nas malhas quadriculadas das atividades propostas, cada quadradinho tem uma medida de área de $1cm^2$.

Na primeira atividade, buscamos que os estudantes desenvolvessem estratégias de cálculo da área de um polígono, mesmo quando a fórmula da área não é conhecida. Isso seria feito por meio da decomposição do polígono em figuras cujas fórmulas já foram definidas previamente. Nas duas atividades seguintes, o objetivo era calcular a área de triângulos posicionados em diferentes arranjos dentro da malha quadriculada. Para isso, os estudantes precisariam visualizar de forma apropriada as medidas da base e altura desses triângulos.

Na quarta atividade, continuamos com a ideia de decomposição do polígono, porém, agora a expectativa era que os estudantes calculassem a área através da diferença entre a área total da malha ao redor da figura e a área dos polígonos formados nesse entorno.

Com base nas atividades anteriores, a quinta tarefa direciona os estudantes para a construção de uma malha quadriculada sobre a figura dada, com o objetivo de facilitar os cálculos e a representação das razões entre as áreas.

Finalmente, apresentamos as questões retiradas das provas da OBMEP, nas quais os conhecimentos adquiridos nas etapas anteriores são aplicados para a resolução. A escolha de tornar a última questão dissertativa, em vez de objetiva como as demais, teve como propósito a verificação das estratégias de resolução utilizadas pelos estudantes nessa fase da atividade, após terem completado todas as sequências didáticas que foram preparadas.

A Folha de Atividades 04 está disponível no APÊNDICE E , na página 116.

Ao conduzirmos esse minucioso processo de concepção e desenvolvimento das sequências de atividades, nosso foco é construir um conjunto coeso e progressivo de materiais que possibilite a compreensão e aprimoramento das habilidades geométricas dos alunos.

# 4 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Com exceção da folha de atividades iniciais, que os estudantes realizaram individualmente no começo, visando avaliar o nível de domínio do tema pelos mesmos e, ao final, para avaliar o progresso da aprendizagem, as demais folhas de atividades foram feitas em grupos.

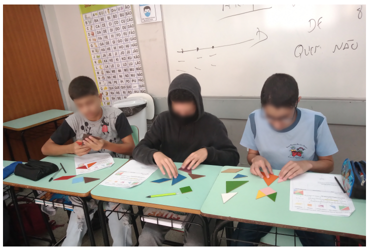
Devido à falta de familiaridade dos estudantes com a metodologia aplicada e o formato das atividades, enfrentamos algumas dificuldades na execução da primeira folha de atividades. Por essa razão, ela exigiu um pouco mais de tempo do que o esperado para ser concluída.


(a) Atividade inicial/final


(b) Atividade 1

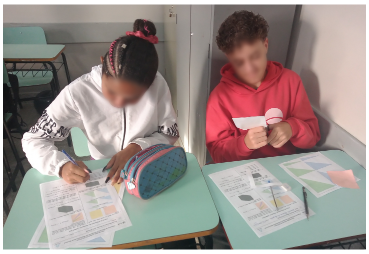

(c) Atividade 2


(d) Atividade 2


(e) Atividade 2


(f) Atividade 2


(g) Atividade 3


(h) Atividade 3


(i) Atividade 4

Figura 4.1 – Registros das aplicações das atividades.

## 4.1 CRONOGRAMA

Iniciamos a aplicação das atividades no final do quarto bimestre letivo do ano de 2022, precisamente em 07 de novembro, durante o período em que os estudantes estavam matriculados no 8º ano. Devido ao cronograma escolar, não conseguimos concluir todas as atividades dentro do mesmo ano letivo, o que resultou em uma extensão da aplicação para o primeiro bimestre de 2023, quando já estavam no 9º ano. A Tabela 4.1 apresenta o cronograma das aplicações.

Tabela 4.1 – Cronograma de aplicação das atividades.

| Atividade | Data | Número de aulas necessárias |
|---|---|---|
| Folha de atividades iniciais | 07/11/2022 | 1 |
| Folha de atividades 01 | 08/11/2022<br>09/11/2022<br>10/11/2022<br>16/11/2022<br>17/11/2022 | 5 |
| Folha de atividades 02 | 21/11/2022<br>22/11/2022 | 2 |
| Folha de atividades 03 | 13/02/2023<br>14/02/2023 | 2 |
| Folha de atividades 04 | 27/03/2023<br>28/03/2023<br>29/03/2023 | 3 |
| Folha de atividades finais | 12/04/2023<br>13/04/2023 | 2 |

Fonte: Autora.

Cada um dos dias mencionados na Tabela 4.1 consistiu de uma aula com a duração de 50 minutos em cada turma.

## 4.2 QUANTITATIVO DE ATIVIDADES ENTREGUES

A maioria das atividades foi desenvolvida em sala de aula, com exceção dos estudantes que enfrentaram dificuldades com o tempo de execução e precisaram concluí-las em casa. Dos 55 estudantes que iniciaram as atividades em 2022, cinco deles não puderam prosseguir devido a reprovação ou à solicitação de transferência. Em 2023, uma nova estudante se juntou à turma, totalizando, assim, 51 estudantes. Destes, 34 entregaram as atividades completas, enquanto 17 as entregaram de forma incompleta. A quantidade de atividades entregues está registrada na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Quantitativo de atividades entregues.

| Atividade | Entregues | Não entregues |
|---|---|---|
| Folha de atividades iniciais | 49 | 2 |
| Folha de atividades 01 | 49 | 2 |
| Folha de atividades 02 | 50 | 1 |
| Folha de atividades 03 | 39 | 12 |
| Folha de atividades 04 | 43 | 8 |
| Folha de atividades finais | 49 | 2 |

Fonte: Autora.

## 4.3 ANÁLISE

Neste capítulo, nos dedicamos à análise das resoluções feitas pelos estudantes em cada item das folhas de atividades, avaliando se conseguimos alcançar os objetivos propostos. Além disso, discutiremos as modificações realizadas durante a aplicação das atividades e identificaremos quais ajustes podem ser implementados para aprimorar as folhas de atividades em aplicações futuras.

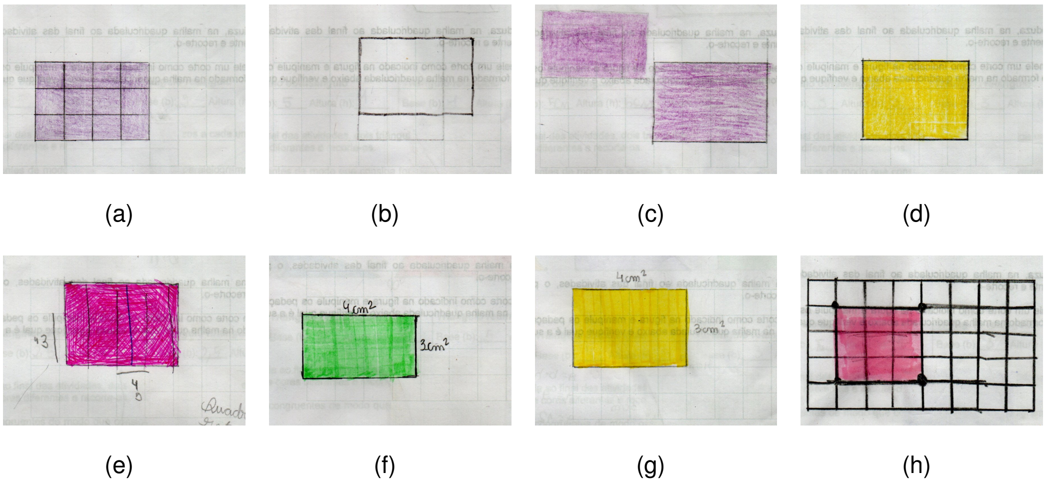
Ao longo da aplicação das atividades, duas perguntas comuns surgiram repetidamente: “O que é para fazer, professora?” e “Está correto assim?”. Tornou-se evidente a ausência do hábito de leitura e a dependência dos estudantes em relação à orientação e validação por parte do professor. Nesse contexto, fizemos leituras conjuntas para que eles se sentissem mais confiantes e conseguissem avançar de forma autônoma.

### 4.3.1 Folha de atividades 01 – Dedução das fórmulas das áreas de alguns polígonos

#### 4.3.1.1 Retângulo

No primeiro item da folha de atividades, referente ao retângulo, a maioria dos estudantes foi capaz de executar o que foi solicitado sem enfrentar dificuldades significativas (Figura 4.2(a)). No entanto, um estudante se confundiu em relação à localização da base e altura do retângulo (Figura 4.2(b)). Alguns desenharam fora da malha quadriculada (Figura 4.2(c)), enquanto outros utilizaram o espaço interior da malha, porém não alinharam corretamente os vértices do retângulo com os vértices da malha (Figuras 4.2(d) e 4.2(e)). Adicionalmente, dois estudantes desenharam o retângulo, porém não utilizaram a unidade de medida apropriada (Figuras 4.2(f) e 4.2(g)). Apenas um estudante não conseguiu reproduzir o retângulo com as medidas solicitadas no enunciado (Figura 4.2(h)).

Durante a análise das atividades envolvendo malhas quadriculadas, notamos que a impressão das mesmas foi realizada com uma tonalidade de cor muito clara, o que dificultou a compreensão do que foi solicitado por parte dos estudantes. Para aprimorar esse processo, recomendamos considerar o uso de uma cor mais intensa e a inclusão de pontos para demarcar os vértices da malha. Tais medidas podem facilitar a execução dos itens e proporcionar uma compreensão mais nítida dos enunciados dos exercícios.




(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g) (h)

Figura 4.2 – Registros da Atividade 01 sobre retângulos - item 01.

Nos itens dois, três e quatro, observamos que muitos estudantes conseguiram alcançar o objetivo de deduzir uma fórmula para calcular a área de um retângulo. Isso é evidenciado pelas Figuras 4.3(a) e 4.3(b), onde várias respostas diretas ou um pouco mais detalhadas foram fornecidas.

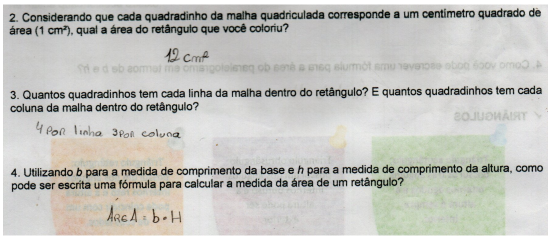
No entanto, algumas respostas revelaram certo grau de confusão conceitual. A Figura 4.3(c) ilustra um caso no qual o estudante somou incorretamente as medidas dos lados do retângulo no item 02, mas corrigiu esse equívoco nos itens 03 e 04.

A Figura 4.3(d) demonstra que, embora o estudante tenha reconhecido corretamente que a área do retângulo era $12cm^2$ e tenha registrado a multiplicação $4 \cdot 3 = 12$ no item 03, ele erroneamente contou as linhas da malha sob o retângulo. Isso revela uma falta de compreensão dos conceitos de linhas e colunas em uma malha ou tabela. No item 04, tentou registrar a fórmula para a área de um retângulo, mas como já havia fornecido a resposta correta no item 02 (12), ocorreu uma manipulação dos números mencionados no item 01, o que pode ter levado a confusões com fórmulas estudadas anteriormente.

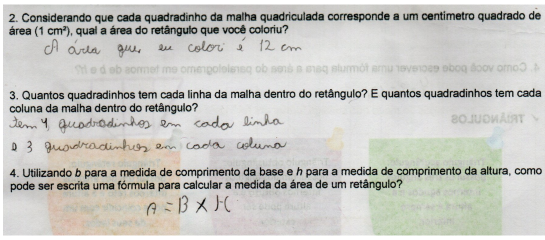
A Figura 4.3(e) apresenta um caso no qual o estudante registrou corretamente os itens 02 e 03, inclusive destacando a multiplicação das dimensões da base e altura do retângulo. No entanto, ao escrever a fórmula, cometeu um equívoco ao expressá-la como $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Por fim, na Figura 4.3(f), outro estudante registrou corretamente os itens 02 e 03, mas não compreendeu corretamente que o cálculo da área de um retângulo envolve a multiplicação das dimensões. Os registros $B^4$ e $H^3$ revelam uma completa incompreensão da maneira correta de expressar a fórmula, evidenciando a falta de habilidade com a linguagem algébrica.

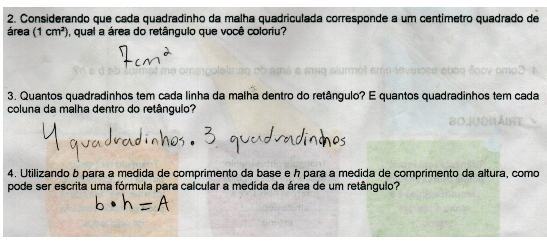
Para mitigar as dificuldades dos estudantes em assimilar a necessidade de multiplicar as medidas da base e altura para calcular a área de um retângulo, poderia ter sido inclusa a seguinte pergunta no item 03: “Ao multiplicar o número de quadradinhos de uma linha pelo número de quadradinhos de uma coluna, qual resultado você obtém? Esse resultado coincide com o valor calculado no item anterior?”.



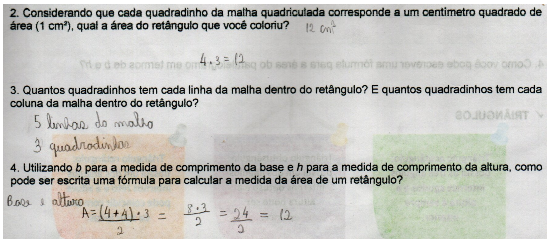

(a)



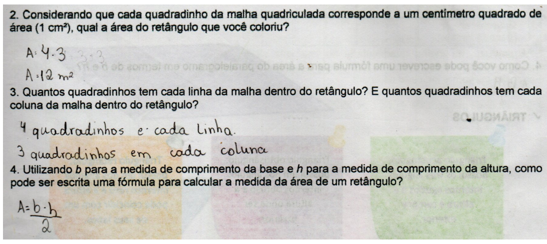

(b)



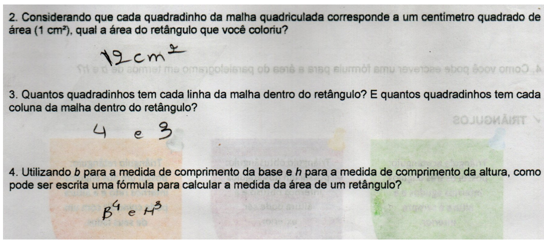

(c)




(d)



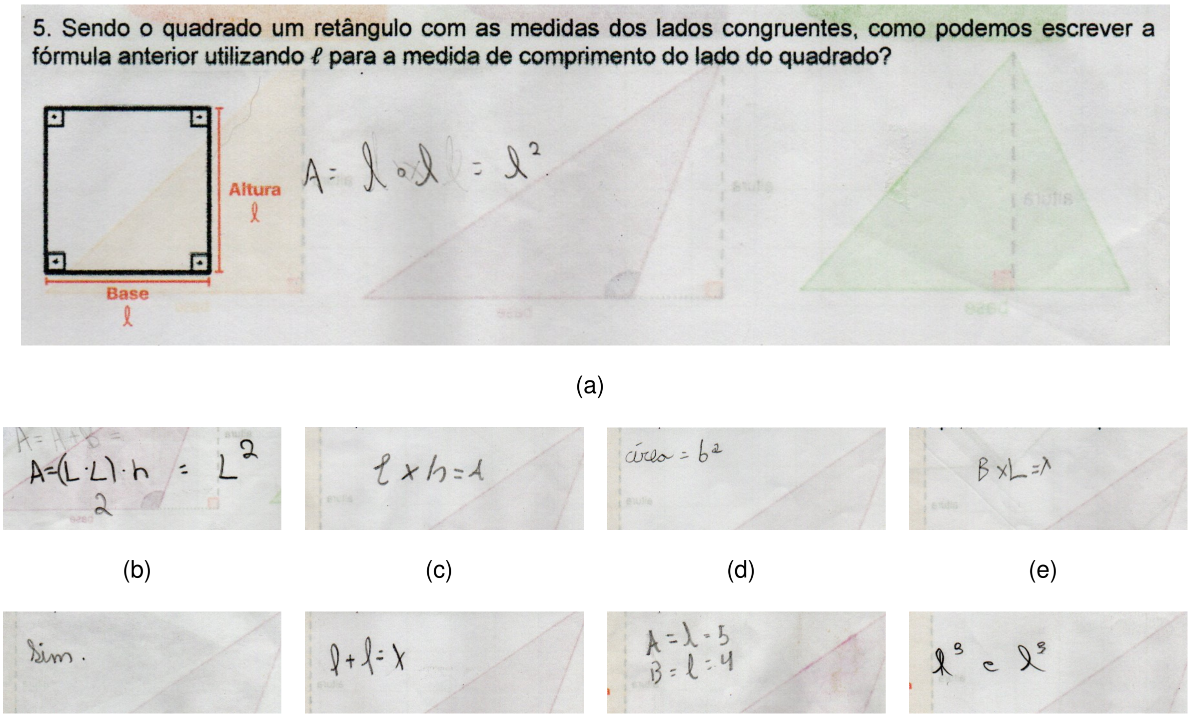

(e)




(f)

Figura 4.3 – Registros da Atividade 01 sobre retângulos - itens 02, 03 e 04.

No item 05, quatro estudantes optaram por não preencher a resposta. Embora a maioria tenha registrado a fórmula da área do quadrado em função de *l*, conforme solicitado e ilustrado na Figura 4.4(a), alguns ainda apresentaram equívocos, como evidenciado pelas Figuras 4.4(b) até 4.4(i).



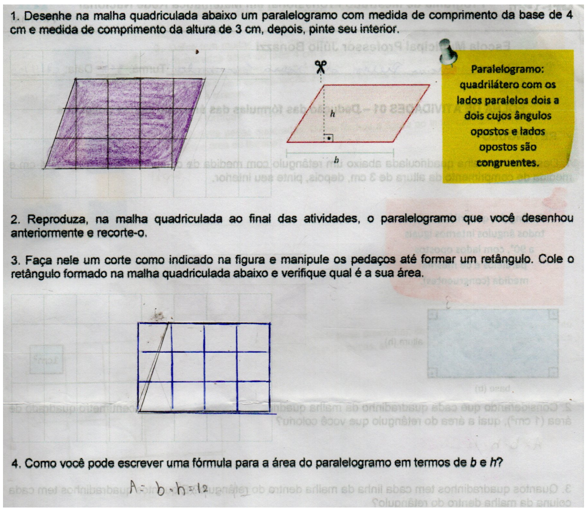

(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)

Figura 4.4 – Registros da Atividade 01 sobre retângulos - item 05.

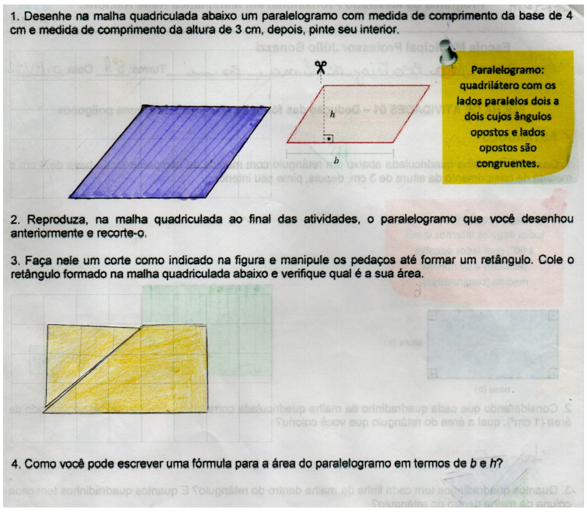
#### 4.3.1.2 Paralelogramo

O item 01 foi concluído de maneira correta por todos os estudantes, como mostra a Figura 4.5(a). Apenas um aluno deixou de responder aos itens de 02 a 04. Além disso, entre os demais estudantes, um total de 12 não apresentou a resposta para o item 04, possivelmente por não terem percebido sua inclusão, mesmo após terem finalizado os itens 02 e 03.

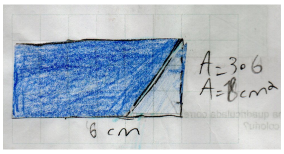
Observamos um desafio em relação à reprodução precisa do paralelogramo na malha quadriculada para recorte, o que é evidenciado pelas Figuras 4.5(b) e 4.5(c). Nesses casos, os estudantes selecionaram uma base maior do que aquela utilizada no item 01. Adicionalmente, um estudante não conseguiu unir com sucesso as partes recortadas do paralelogramo na malha, conforme observado na Figura 4.5(d). Esse contratempo dificultou o cálculo da área correspondente e subsequentemente a escrita da fórmula. Dois estudantes não efetuaram o recorte solicitado para a recomposição do retângulo, conforme ilustrado nas Figuras 4.5(e) e 4.5(f).



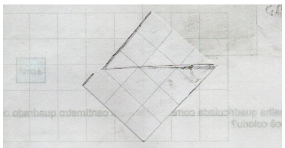

(a)



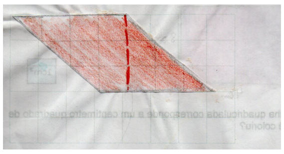

(b)



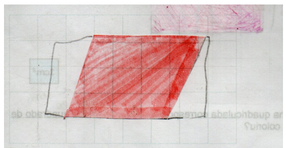

(c)



(d)



(e)



(f)

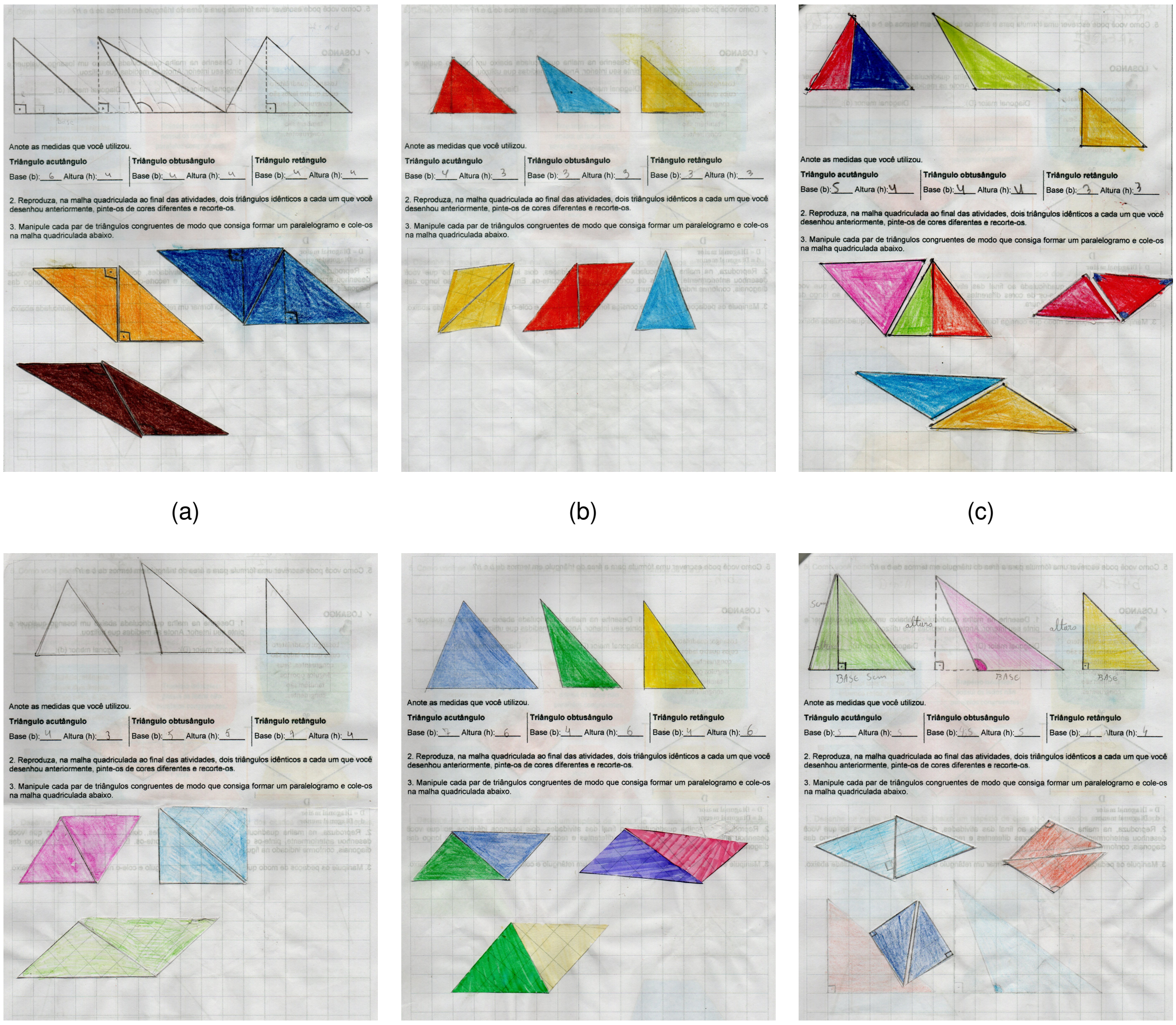
Figura 4.5 – Registros da Atividade 01 sobre paralelogramos.

#### 4.3.1.3 Triângulo

Quatro estudantes optaram por não realizar os itens 2 e 3.

Em relação ao item 01, todos os estudantes conseguiram concluí-lo com relativa facilidade, embora alguns tenham deixado de alinhar corretamente os vértices dos triângulos com os pontos da malha.

Identificamos, no entanto, uma dificuldade notável na justaposição dos triângulos obtusângulos. Em geral, a posição da base do triângulo construído no item 01 não foi preservada. Somente um estudante conseguiu manter essa base, como demonstrado na Figura 4.6(a). As Figuras 4.6(b) até 4.7(e) ilustram algumas das abordagens utilizadas pelos estudantes para realizar as atividades.



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

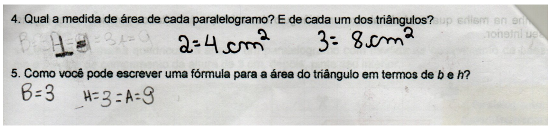
Figura 4.6 – Registros da Atividade 01 sobre triângulos - itens 01, 02 e 03.

A falta de execução precisa do item 03 teve impactos nas respostas fornecidas para os itens 04 e 05. Entre os estudantes, dez deixaram esses itens em branco, enquanto outros dez realizaram registros que não estabeleciam relação com o que era solicitado no enunciado, conforme retratado na Figura 4.7(a).

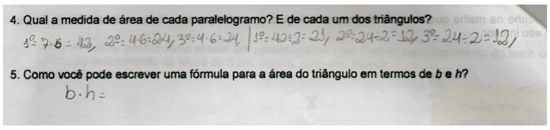
Dezoito estudantes notaram que a união de dois triângulos congruentes formava um paralelogramo. No entanto, muitos não conseguiram compreender que para calcular a área de um único triângulo, seria necessário dividir a área do paralelogramo por dois. Assim, eles inseriram no item 05 a fórmula $A = b \cdot h$ ou, em alguns casos, até forneceram uma descrição, mas sem a fórmula correspondente, como exemplificado nas Figuras 4.7(b), 4.7(c) e 4.7(d).

Apenas onze estudantes conseguiram registrar de maneira precisa, realizando os cálculos tanto para as áreas dos paralelogramos quanto para as dos triângulos individuais. Além disso, eles corretamente incluíram a fórmula adequada para calcular a área de um triângulo: $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$, conforme demonstrado na Figura 4.7(e). Outros alunos adotaram abordagens como $A = b \div 2 \cdot h$

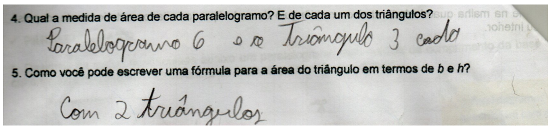
ou $A = b \cdot h \div 2$, conforme ilustrado na Figura 4.7(f).



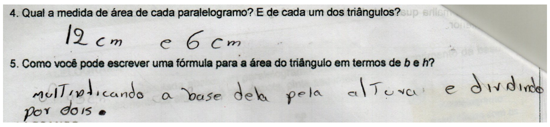

(a)



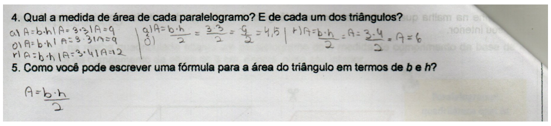

(b)



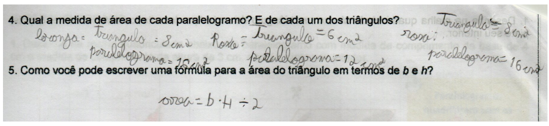

(c)




(d)




(e)

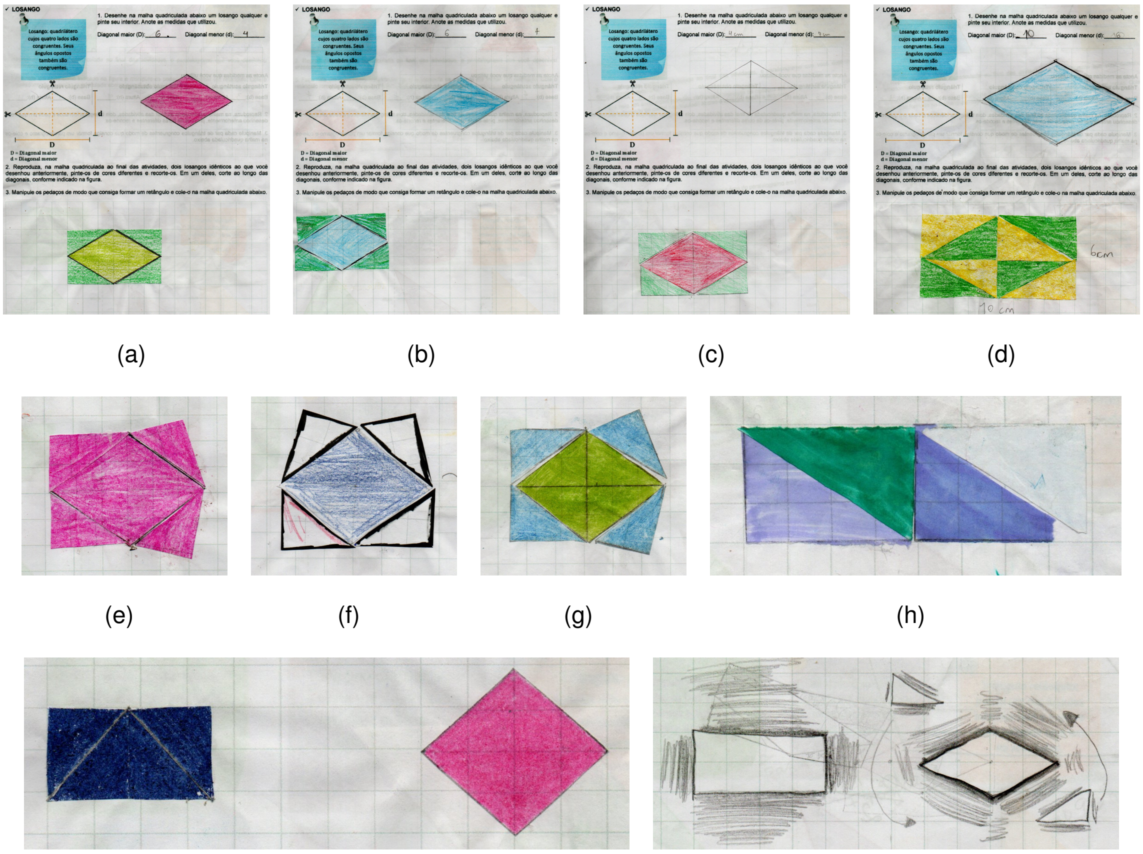



(f)

Figura 4.7 – Registros da Atividade 01 sobre triângulos - itens 04 e 05.

### 4.3.1.4 Losango

Somente cinco estudantes optaram por não realizar as atividades relacionadas ao losango. Aqueles que participaram não enfrentaram grandes desafios ao concluir os itens de 01 a 03, conforme evidenciado pelas Figuras 4.8(a) até 4.8(d). No entanto, no item 03, alguns encontraram dificuldades durante o processo de colagem, o que resultou na falha ao alcançar a forma retangular desejada, como ilustrado pelas Figuras 4.8(e), 4.8(f) e 4.8(g). Dois estudantes conseguiram formar o retângulo, mas utilizando apenas um dos losangos, como é observado nas Figuras 4.8(h) e 4.8(i). Além disso, chamou a atenção uma abordagem interessante adotada por um estudante que optou por não fazer o recorte físico. Em vez disso, ele apresentou uma ilustração que representava o raciocínio utilizado para atingir o formato retangular, embora também tenha utilizado apenas um dos losangos, como exemplificado na Figura 4.8(j).



(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g) (h)

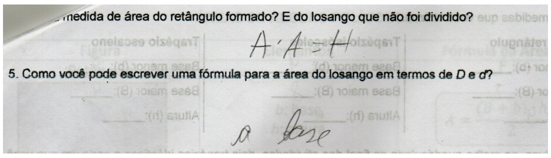
(i) (j)

Figura 4.8 – Registros da Atividade 01 sobre losangos - itens 01, 02 e 03.

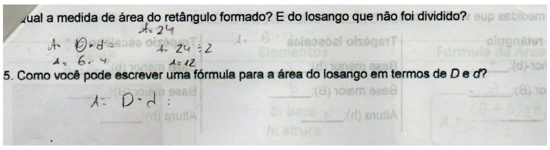
Treze estudantes optaram por não preencher os itens 04 e 05 e sete fizeram registros que não correspondem ao enunciado, conforme retratado na Figura 4.9(a).

Nove estudantes realizaram corretamente os cálculos numéricos para a área do retângulo e do losango. No entanto, eles esqueceram de incluir a divisão por dois ao escrever a fórmula para o losango, como é evidente nas Figuras 4.9(b) e 4.9(c). Novamente, houve estudantes que reconheceram adequadamente a necessidade de dividir a área do retângulo por dois, mas enfrentaram dificuldades ao formalizar isso em formato algébrico, optando por uma descrição textual, como exemplificado na Figura 4.9(d).

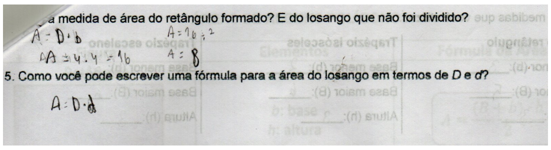
Outros estudantes alcançaram com sucesso o objetivo de expressar a fórmula do losango como $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$, conforme ilustrado na Figura 4.9(e). Além disso, algumas abordagens adotadas pelos alunos incluíram notações como $A = D \cdot d \div 2$, como mostrado na Figura 4.9(f).



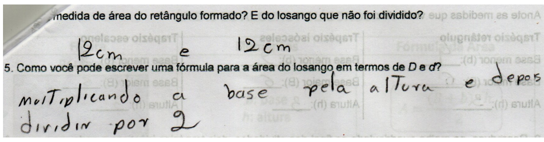

(a)



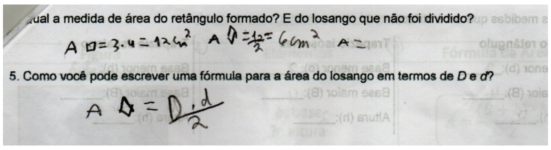

(b)



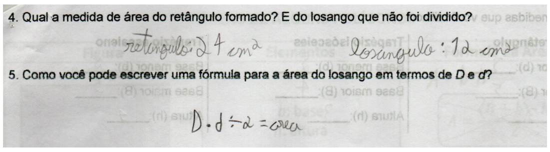

(c)




(d)




(e)

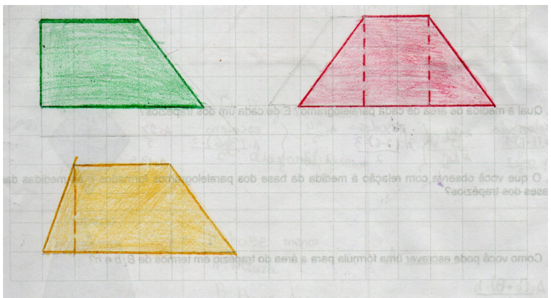



(f)

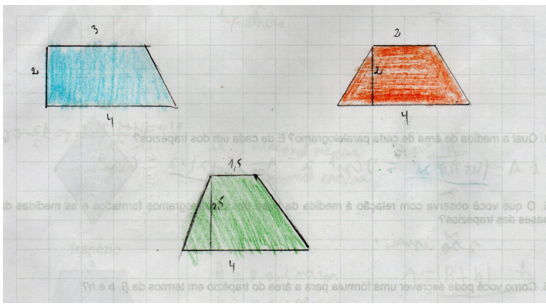
Figura 4.9 – Registros da Atividade 01 sobre losangos - itens 04 e 05.

#### 4.3.1.5 Trapézio

Seis estudantes optaram por não completar o item 01, enquanto os demais demonstraram competência na realização dessa etapa. É notável que, após receberem orientações intensas nas atividades anteriores, eles souberam empregar adequadamente os vértices da malha quadriculada para construir e dimensionar suas figuras, como é evidente nas Figuras 4.10(a) e 4.10(b).



(a)

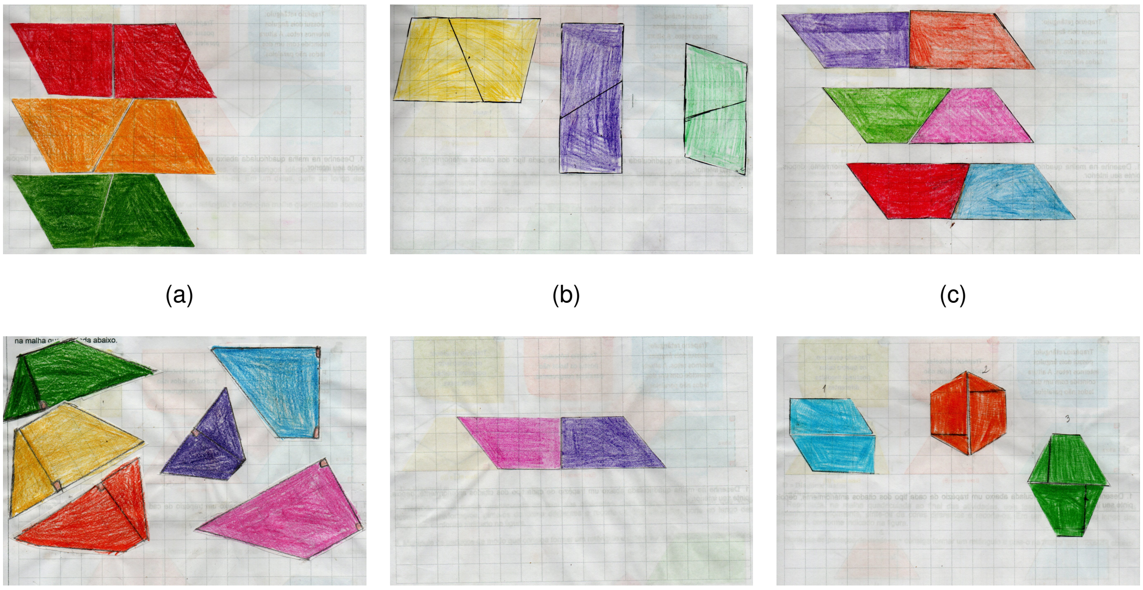


(b)

Figura 4.10 – Registros da Atividade 01 sobre trapézios - item 01.

Embora não tenham enfrentado grandes desafios ao lidar com o item 01, dezessete estudantes deixaram em branco os itens de 02 a 06. Somente dezenove estudantes executaram o item 3 conforme indicado pelo enunciado, formando três pares de trapézios congruentes, como mostram as Figuras 4.11(a), 4.11(b) e 4.11(c).

Dentre os demais, houve estudantes que simplesmente colaram os trapézios de forma aleatória, como exemplificado na Figura 4.11(d), outros que fizeram com um único trapézio, conforme mostrado na Figura 4.11(e), e também aqueles que justapuseram suas bases maiores sem formar paralelogramos, como ilustrado na Figura 4.11(f).



(a) (b) (c)

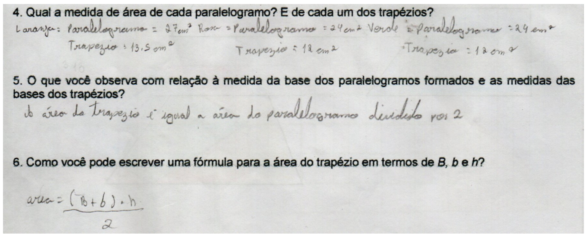
(d) (e) (f)

Figura 4.11 – Registros da Atividade 01 sobre trapézios - item 03.

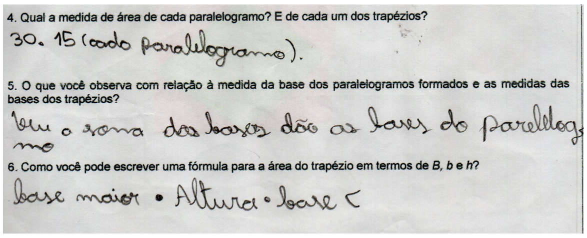
A dificuldade dos estudantes em concluir o item 03 teve um impacto nas respostas fornecidas para os itens de 04 a 06. Somente 13 estudantes foram capazes de completar essa sequência e registrar a fórmula para calcular a área do trapézio, como apresentado na Figura 4.12(a).

Dentro de um grupo de oito estudantes, alguns perceberam que, para formar a base do paralelogramo, era necessário unir as bases maior e menor do trapézio. Alguns até calcularam corretamente a área, reconhecendo que uma era o dobro da outra. No entanto, esses alunos enfrentaram dificuldades ao transpor seu raciocínio para o registro da fórmula, como ilustrado nas Figuras 4.12(b) e 4.12(c).

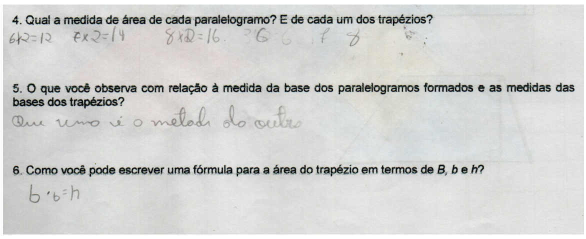
Outros dez estudantes fizeram algum tipo de registro, mas não conseguiram atingir o objetivo da atividade, conforme demonstrado na Figura 4.12(d). Adicionalmente, dezoito estudantes optaram por não preencher os itens em questão.


4. Qual a medida de área de cada paralelogramo? E de cada um dos trapézios?
Laranja: Paralelogramo = 27 cm² Rosa = Paralelogramo = 24 cm² Verde = Paralelogramo = 24 cm²
Trapezio = 13.5 cm² Trapezio = 12 cm² Trapezio = 12 cm²
5. O que você observa com relação à medida da base dos paralelogramos formados e as medidas das bases dos trapézios?
a área do trapezio é igual a área do paralelogramo dividido por 2
6. Como você pode escrever uma fórmula para a área do trapézio em termos de *B*, *b* e *h*?
área = $\frac{(B+b) \cdot h}{2}$

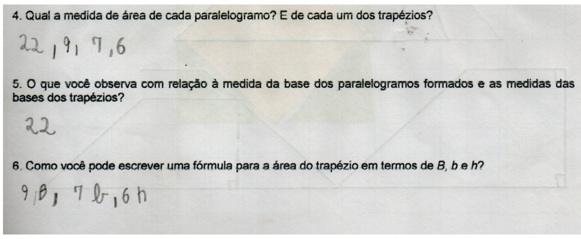
(a)


4. Qual a medida de área de cada paralelogramo? E de cada um dos trapézios?
30. 15 (cada paralelogramo).
5. O que você observa com relação à medida da base dos paralelogramos formados e as medidas das bases dos trapézios?
que a soma das bases dão as bases do parallelogramo
6. Como você pode escrever uma fórmula para a área do trapézio em termos de *B*, *b* e *h*?
base maior • Altura • base ᑕ

(b)


4. Qual a medida de área de cada paralelogramo? E de cada um dos trapézios?
6x2=12 7x2=14 8x2=16. 3 6 6 7 8
5. O que você observa com relação à medida da base dos paralelogramos formados e as medidas das bases dos trapézios?
Que uma é o metade do outro
6. Como você pode escrever uma fórmula para a área do trapézio em termos de *B*, *b* e *h*?
b·b=h

(c)


4. Qual a medida de área de cada paralelogramo? E de cada um dos trapézios?
22, 9, 7, 6
5. O que você observa com relação à medida da base dos paralelogramos formados e as medidas das bases dos trapézios?
22
6. Como você pode escrever uma fórmula para a área do trapézio em termos de *B*, *b* e *h*?
9 B, 7 b, 6 h

(d)

Figura 4.12 – Registros da Atividade 01 sobre trapézios - itens 04, 05 e 06.

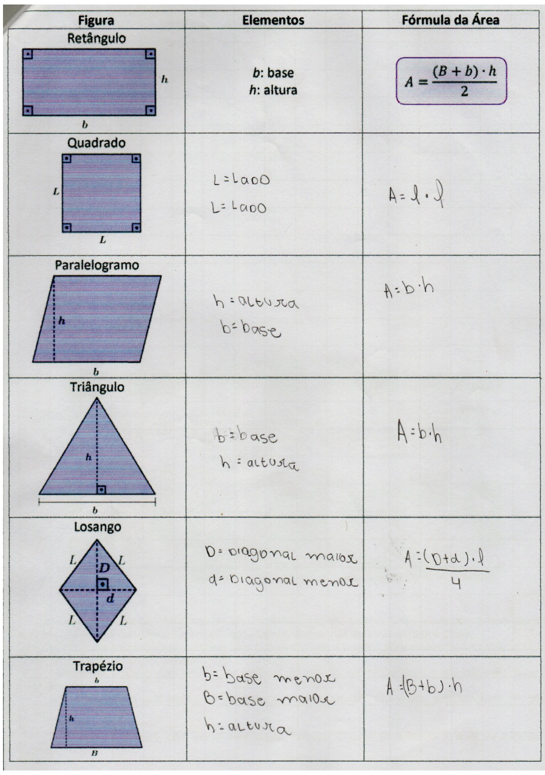
#### 4.3.1.6 Formulário

Antes de os estudantes preencherem o formulário, conduzimos com eles uma revisão completa de todas as atividades que haviam realizado até aquele ponto.

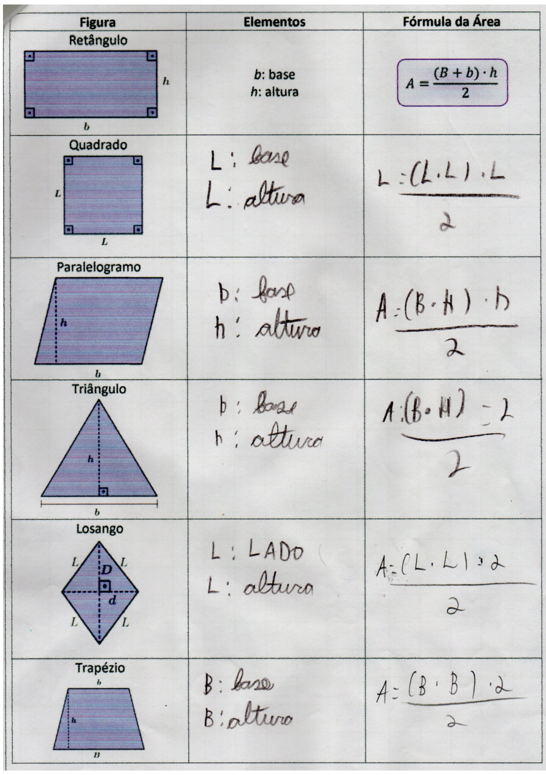
Infelizmente, cometemos um equívoco durante a elaboração da folha do formulário, no qual a fórmula para o cálculo da área do trapézio foi inserida onde deveria estar a fórmula para o cálculo da área do retângulo. Assim que percebemos o erro, informamos aos estudantes e lhes fornecemos orientações para inserir a fórmula correta.

Sete alunos deixaram os campos em branco, enquanto outros dez tiveram um desempenho intermediário, como mostram as Figuras 4.13(a), 4.13(b) e 4.13(c). Por outro lado, trinta e dois estudantes acertaram todas as respostas e conseguiram concluir com sucesso o preenchimento do formulário, conforme exemplificado na Figura 4.13(d).

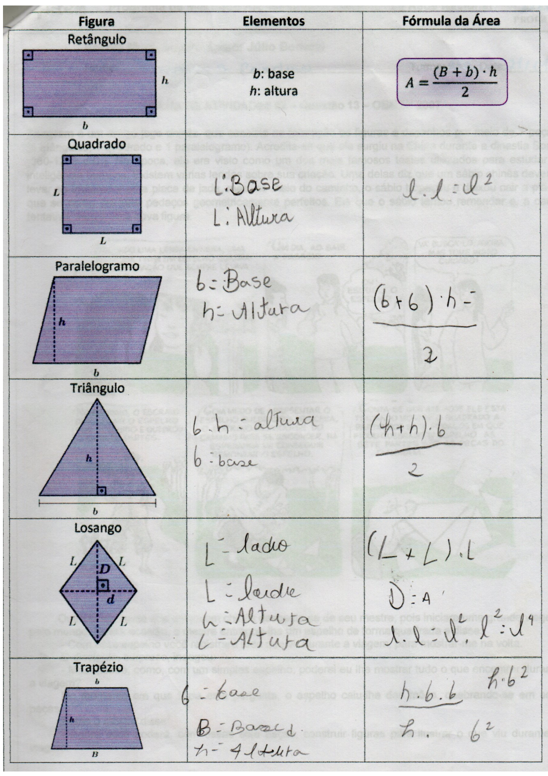
Ao finalizar a aplicação dessa primeira série de atividades, ficou evidente que, ao longo do processo, os estudantes amadureceram e desenvolveram as habilidades que eram o objetivo central. Notamos que, ao abordarem atividades relacionadas ao cálculo de áreas no livro didático, eles claramente recordavam as atividades da folha e, de forma imediata, lembravam-se das fórmulas. Além disso, observamos que a proficiência deles em trabalhar com a malha quadriculada aumentou significativamente.



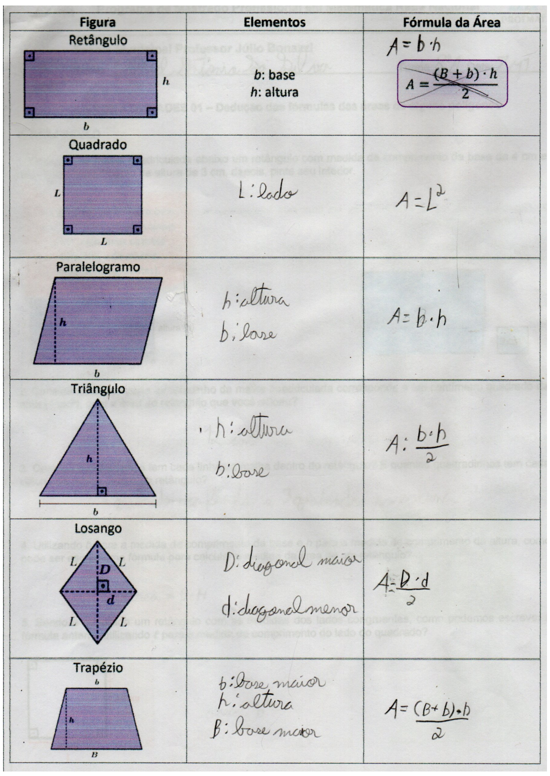

(a)




(b)




(c)




(d)

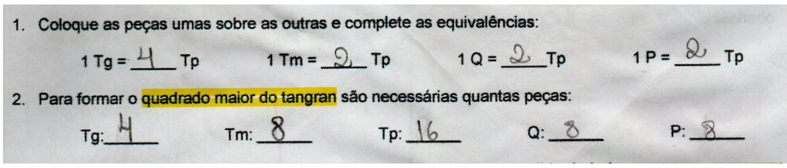
Figura 4.13 – Registros da Atividade 01 - Formulário.

### 4.3.2 Folha de atividades 02 – Questão 13 – OBMEP 2007 – Nível 02

Na escola onde foi conduzido o projeto, conjuntos de tangram em madeira estavam disponíveis e foram utilizados como uma ferramenta para familiarizar os estudantes com o jogo. Inicialmente, eles montaram diversas figuras usando as peças do tangram. Posteriormente, utilizaram essas mesmas peças para realizar as comparações solicitadas nos itens 01 e 02 da atividade.

Apenas um estudante entregou a atividade completamente em branco.

Quanto ao item 01, todos os estudantes conseguiram com êxito concluir as comparações solicitadas. No entanto, no item 02, houve uma interpretação dupla do enunciado. Trinta estudantes responderam de acordo com o que era esperado, ou seja, quantas peças de cada tipo seriam necessárias para formar ou cobrir todo o quadrado do tangram, como é evidenciado na Figura 4.14(a). Por outro lado, sete estudantes responderam à pergunta de quantas peças de cada tipo formam o conjunto do tangram, como exemplificado na Figura 4.14(b). Além disso, doze estudantes registraram respostas que não estavam em conformidade com o enunciado.



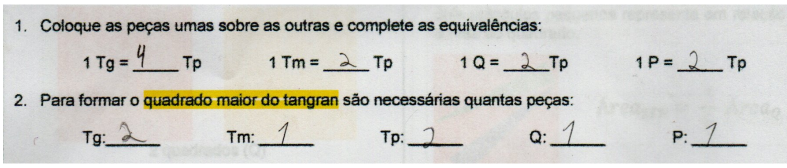
1. Coloque as peças umas sobre as outras e complete as equivalências:

1 Tg = 4 Tp    1 Tm = 2 Tp    1 Q = 2 Tp    1 P = 2 Tp

2. Para formar o quadrado maior do tangran são necessárias quantas peças:

Tg: 4    Tm: 8    Tp: 16    Q: 8    P: 8

(a)



1. Coloque as peças umas sobre as outras e complete as equivalências:

1 Tg = 4 Tp    1 Tm = 2 Tp    1 Q = 2 Tp    1 P = 2 Tp

2. Para formar o quadrado maior do tangran são necessárias quantas peças:

Tg: 2    Tm: 1    Tp: 2    Q: 1    P: 1

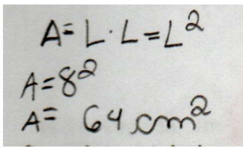
(b)

Figura 4.14 – Registros da Atividade 02 - itens 01 e 02.

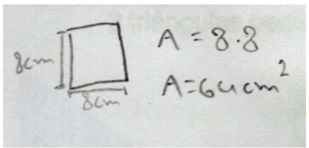
Quanto ao item 03, nove estudantes optaram por não realizar, enquanto somente um fez o registro sem obter sucesso. Por outro lado, os demais estudantes não enfrentaram dificuldades e, de fato, aplicaram o conhecimento adquirido na atividade anterior. Isso é ilustrado claramente nas Figuras 4.15(a) e 4.15(b).

Dois estudantes deixaram a tabela do item 04 em branco. Quatro estudantes (formando duas duplas) cometeram erros durante o preenchimento da tabela, e suas estratégias não puderam ser identificadas com clareza, como demonstrado na Figura 4.16(a).

No entanto, um número reduzido de estudantes cometeu erros ao registrar as áreas e as frações equivalentes, ilustrado na Figura 4.16(b). No caso dos demais estudantes, inclusive aqueles que interpretaram o enunciado do item 02 de forma distinta, foram capazes de preencher a tabela com precisão, como ilustrado nas Figuras 4.16(c) e 4.16(d).

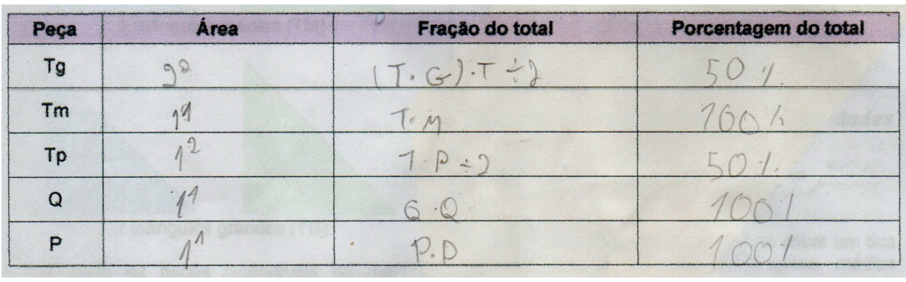



(a)



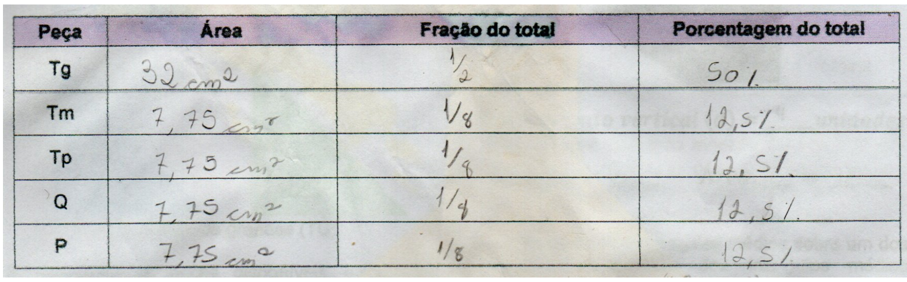

(b)

Figura 4.15 – Registros da Atividade 02 - item 03.



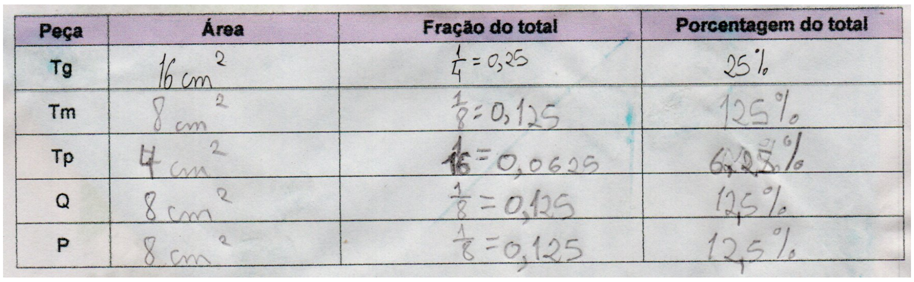
| Peça | Área | Fração do total | Porcentagem do total |
|---|---|---|---|
| Tg | $2^2$ | (T · G) · T ÷ 2 | 50% |
| Tm | $1^1$ | T · M | 100% |
| Tp | $1^2$ | T · P ÷ 2 | 50% |
| Q | $1^1$ | G · Q | 100% |
| P | $1^1$ | P . D | 100% |

(a)



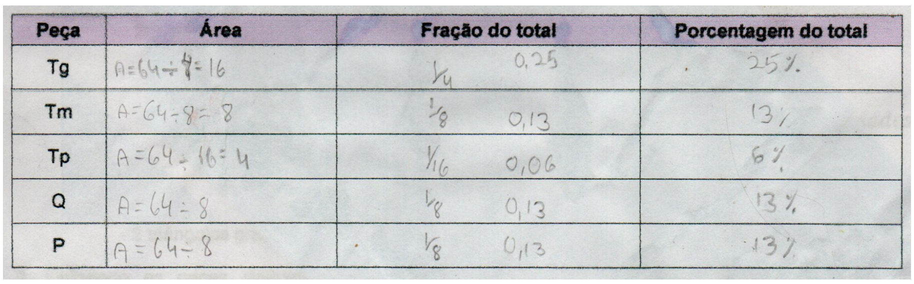
| Peça | Área | Fração do total | Porcentagem do total |
|---|---|---|---|
| Tg | $32\ cm^2$ | $1/2$ | 50% |
| Tm | $7,75\ cm^2$ | $1/8$ | 12,5% |
| Tp | $7,75\ cm^2$ | $1/8$ | 12,5% |
| Q | $7,75\ cm^2$ | $1/8$ | 12,5% |
| P | $7,75\ cm^2$ | $1/8$ | 12,5% |

(b)



| Peça | Área | Fração do total | Porcentagem do total |
|---|---|---|---|
| Tg | $16\ cm^2$ | $\frac{1}{4} = 0,25$ | 25% |
| Tm | $8\ cm^2$ | $\frac{1}{8} = 0,125$ | 125% |
| Tp | $4\ cm^2$ | $\frac{1}{16} = 0,0625$ | 6,25% |
| Q | $8\ cm^2$ | $\frac{1}{8} = 0,125$ | 12,5% |
| P | $8\ cm^2$ | $\frac{1}{8} = 0,125$ | 12,5% |

(c)



| Peça | Área | Fração do total | Porcentagem do total |
|---|---|---|---|
| Tg | A = 64 ÷ 4 = 16 | $1/4$ 0,25 | 25% |
| Tm | A = 64 ÷ 8 = 8 | $1/8$ 0,13 | 13% |
| Tp | A = 64 ÷ 16 = 4 | $1/16$ 0,06 | 6% |
| Q | A = 64 ÷ 8 | $1/8$ 0,13 | 13% |
| P | A = 64 ÷ 8 | $1/8$ 0,13 | 13% |

(d)

Figura 4.16 – Registros da Atividade 02 - item 4.

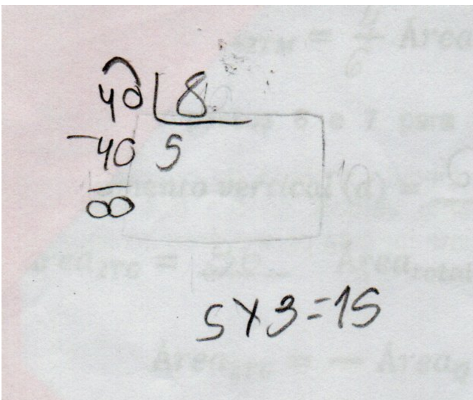
Na seção “Aplique Seus Conhecimentos”, os estudantes enfrentaram a questão 13 da OBMEP 2007, cuja resposta correta era a letra ***C***. Esse momento evidenciou que as atividades prévias tiveram um impacto positivo na compreensão da questão, visto que 74% dos estudantes responderam corretamente, conforme relatado na Tabela 4.3.

A Figura 4.17 ilustra algumas das estratégias empregadas pelos estudantes para resolver a questão.

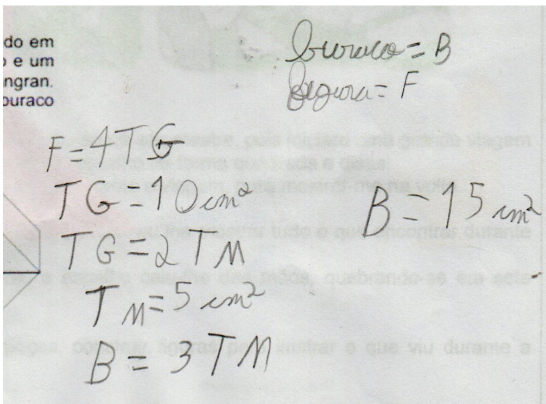
Tabela 4.3 – Respostas dos estudantes para a questão 13 da OBMEP 2007

| **Item** | **Respostas** | **%** |
|---|---|---|
| A | 1 | 2% |
| B | 4 | 8% |
| C | 37 | 74% |
| D | 1 | 2% |
| E | 0 | 0 |
| Não responderam | 7 | 14% |

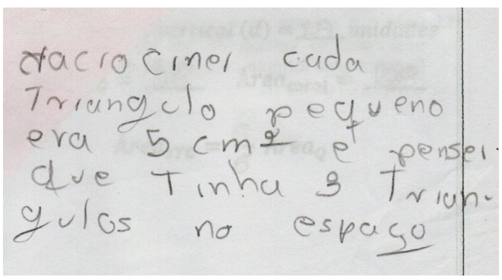
Fonte: Autora.



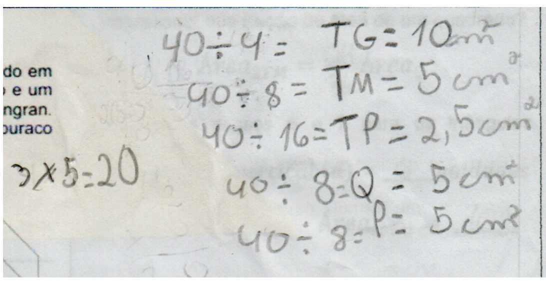

(a)




(b)



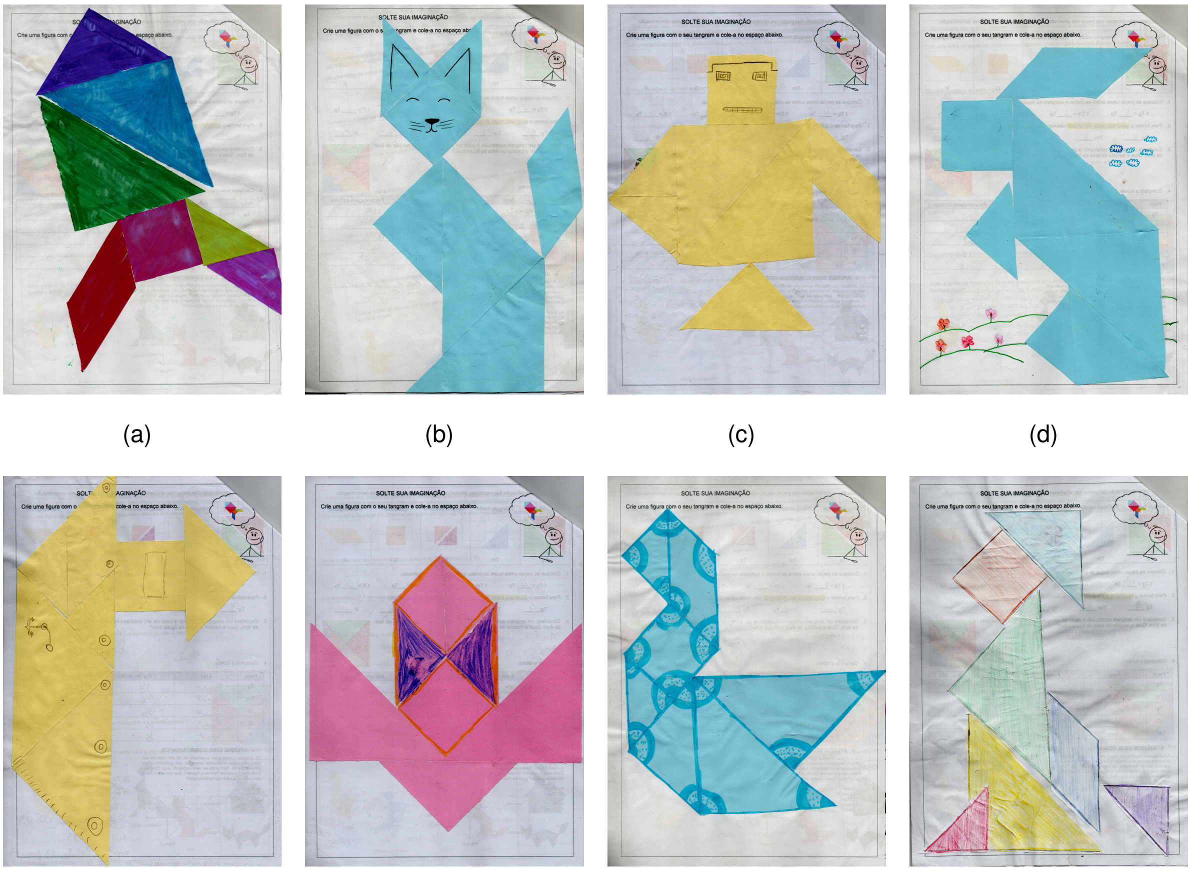

(c)




(d)

Figura 4.17 – Registros da Atividade 02 - Seção aplique seus conhecimentos.

Ao final da atividade, os estudantes desfrutaram de outro momento lúdico, durante o qual construíram um tangram utilizando uma folha de sulfite e, em seguida, montaram uma figura de sua preferência. A Figura 4.18 apresenta alguns exemplos das figuras criadas por eles. Apenas três estudantes optaram por não fazer a colagem.



(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g) (h)

Figura 4.18 – Registros da Atividade 02 - Construção de figuras com o tangram.

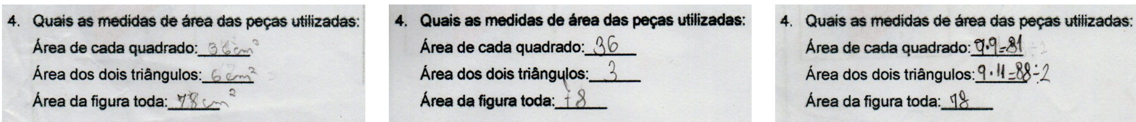
### 4.3.3 Folha de atividades 03 – Questão 07 – OBMEP 2015 – Nível 02

Apenas um estudante entregou a folha completamente em branco.

Após realizarem o recorte das figuras conforme instruído no primeiro item, montar a figura proposta no segundo item configurou um desafio para os estudantes. Embora empregassem o mesmo princípio abordado na atividade anterior com o tangram, no qual as peças precisavam ser colocadas adjuntas, nesta atividade, não foi explicitado se todas as peças disponíveis eram necessárias. No início, muitos estudantes tinham a intenção de usar todas as peças disponíveis. Entretanto, depois que um dos grupos percebeu que nem todas as peças eram essenciais, os demais logo também conseguiram montar a figura com sucesso.

No item 03, quatro estudantes mencionaram que precisaram deslocar o quadrado 2 unidades verticalmente. Isso possivelmente ocorreu porque eles consideraram uma unidade abaixo e outra acima do quadrado. Todos os outros estudantes responderam corretamente, indicando que deslocaram uma unidade.

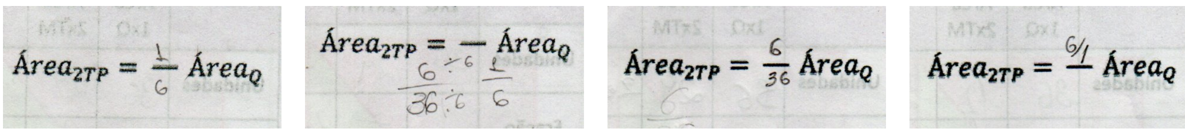
Quanto ao item quatro, houve uma variedade de respostas. Vinte e três estudantes responderam corretamente, enquanto cinco registraram corretamente a área do quadrado e dos triângulos, porém cometeram um equívoco ao calcular a área da figura completa, esquecendo de somar a área dos triângulos ou adicionando duas vezes a área dos mesmos, conforme ilustrado na Figura 4.19(a). Seis estudantes não observaram que a solicitação era para calcular a área dos dois triângulos juntos e, portanto, inseriram apenas a área de um único triângulo, como exemplificado na Figura 4.19(b). Quatro estudantes fizeram o registro, mas não conseguiram acertar, conforme a Figura 4.19(c).




(a) (b) (c)

Figura 4.19 – Registros da Atividade 03 - item 04.

No que diz respeito às respostas do item 05, os estudantes demonstraram uma abordagem acertada ao empregar as peças sobrepostas para avaliar a fração correspondente dos triângulos em relação ao quadrado. Essa abordagem refletiu-se em registros precisos, tanto com quanto sem simplificação, como evidenciado pelas Figuras 4.20(a), 4.20(b) e 4.20(c), apesar de terem cometido equívocos no item anterior. Somente três estudantes trocaram o numerador pelo denominador, conforme ilustrado na Figura 4.20(d).



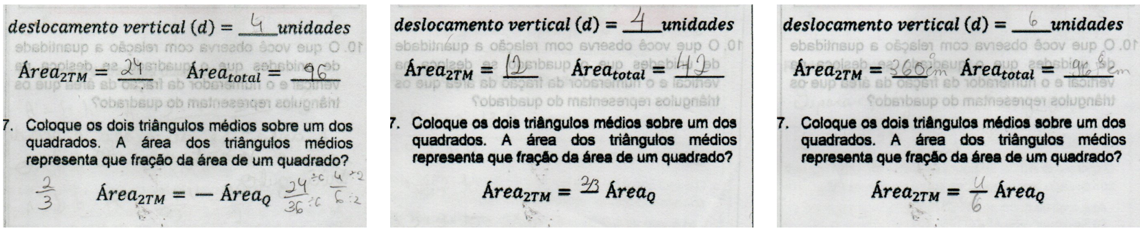
(a) (b) (c) (d)

Figura 4.20 – Registros da Atividade 03 - item 05.

No item 06, vinte e nove estudantes registraram corretamente, enquanto cinco cometeram um equívoco ao calcular a área dos dois triângulos, inserindo novamente a área de apenas um triângulo. Isso, por consequência, resultou em um erro na área total. Adicionalmente, quatro estudantes não conseguiram efetuar os registros com êxito.

No item 07, mais uma vez, devido à utilização do material manipulável para resolver a questão, até mesmo aqueles que não registraram corretamente o item 06 conseguiram acertar a fração correspondente da área dos triângulos em relação à área do quadrado. Apenas os quatro estudantes mencionados anteriormente não conseguiram acertar.

A Figura 4.21 apresenta alguns dos registros dos itens 06 e 07.



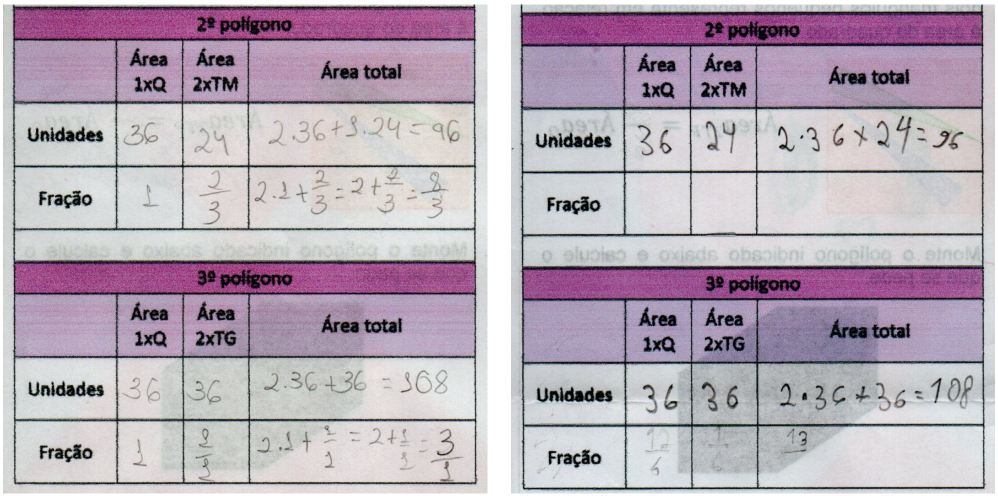

(a) (b) (c)

Figura 4.21 – Registros da Atividade 03 - itens 06 e 07.

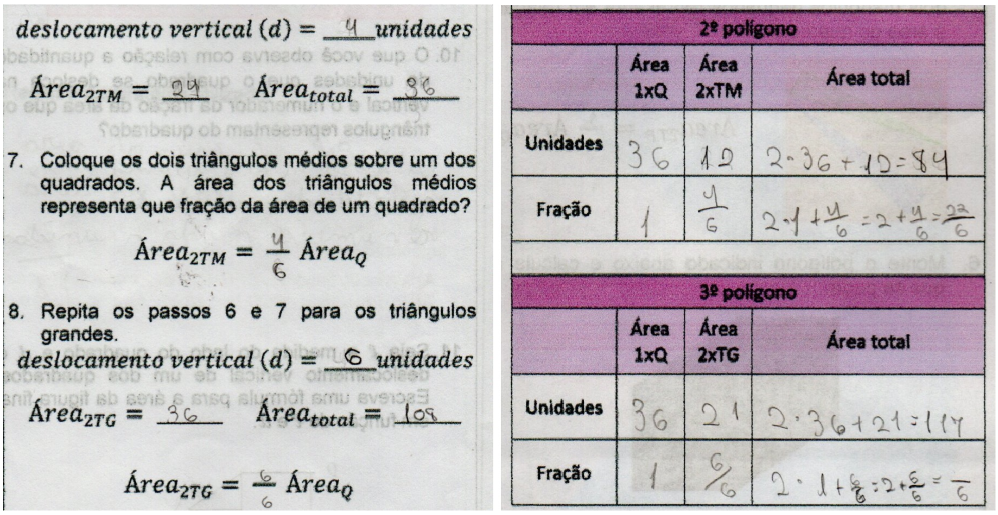
No item 08, seis estudantes cometeram equívocos ao registrar o deslocamento, enquanto quatro erraram ao preencher a fração equivalente. Somente um estudante registrou a área de um único triângulo em vez da área de ambos.

O preenchimento das tabelas do item 09 se apresentou como um desafio para os estudantes. A maior dificuldade foi a necessidade de utilizar resultados obtidos anteriormente, e muitas vezes eles não conseguiram localizar a informação na folha. Houve também problemas relacionados com resultados incorretos em questões anteriores e a falta de familiaridade com operações envolvendo frações. Apenas nove estudantes conseguiram preencher a tabela corretamente, como evidenciado na Figura 4.22(a). Cinco estudantes preencheram a tabela de forma parcial, deixando em branco a linha das frações, como ilustrado na Figura 4.22(b).

Na Figura 4.22(c), é possível observar que o mesmo aluno acertou os itens 06, 07 e 08, mas enfrentou dificuldades ao transferir esses dados para a tabela. Além disso, ele não teve êxito em realizar os cálculos com frações.



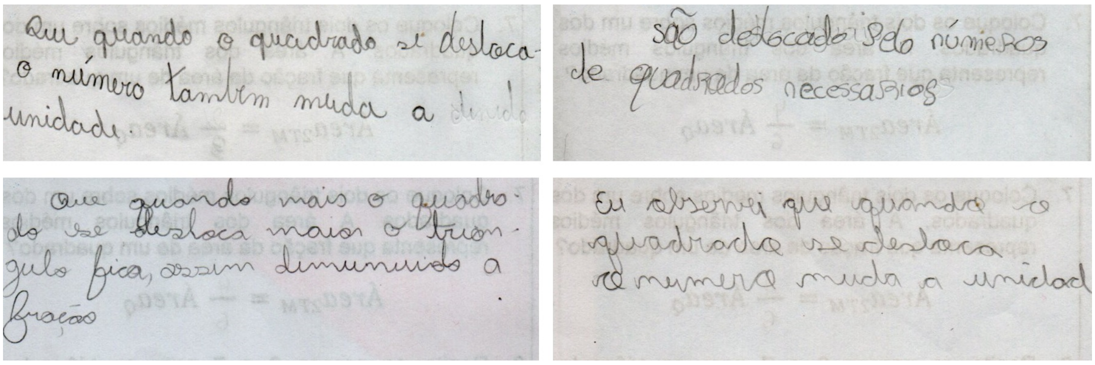

(a) (b)



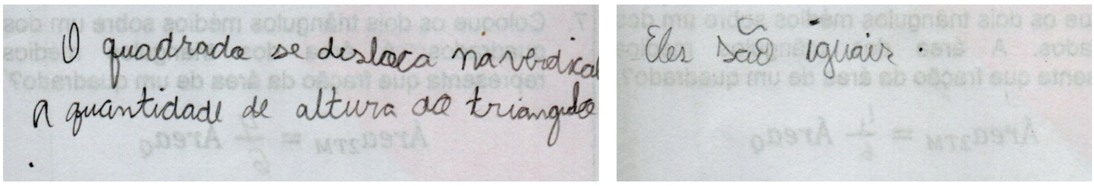

(c)

Figura 4.22 – Registros da Atividade 03 - item 09.

No item 10, quatorze estudantes deixaram o espaço em branco. Sete deles fizeram algum tipo de registro, mas não ficou claro se perceberam a coincidência entre a altura do triângulo, o deslocamento do quadrado e o numerador da fração, como ilustrado na Figura 4.23(a). Os demais tiveram sucesso no registro, conforme demonstrado na Figura 4.23(b).



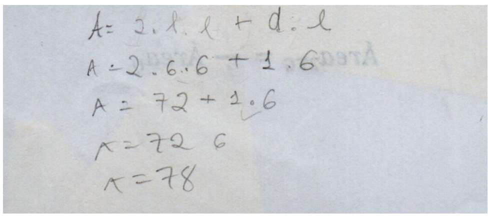

(a)



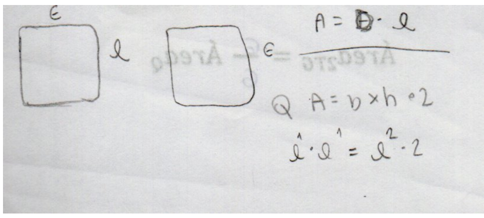

(b)

Figura 4.23 – Registros da Atividade 03 - item 10.

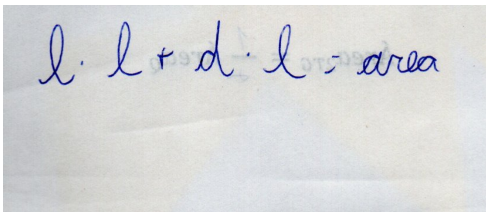
Realizar a generalização algébrica da fórmula para a área da figura em função do lado do quadrado e do deslocamento revelou-se uma tarefa difícil para os estudantes. Dezessete deles deixaram o espaço em branco, e somente nove obtiveram êxito ao escrever a fórmula demonstrada na Figura 4.24(a). No entanto, dois deles deixaram separados a área do quadrado e dos triângulos, como mostrado na Figura 4.24(b). Os demais fizeram algum tipo de registro, mas esqueceram de multiplicar a área do quadrado por dois ou mesmo de somar a área dos quadrados na fórmula, como evidenciado nas Figuras 4.24(c) e 4.24(d), respectivamente.



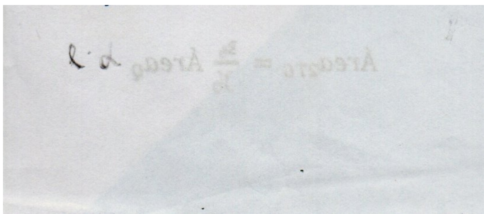

(a)




(b)




(c)




(d)

Figura 4.24 – Registros da Atividade 03 - item 11.

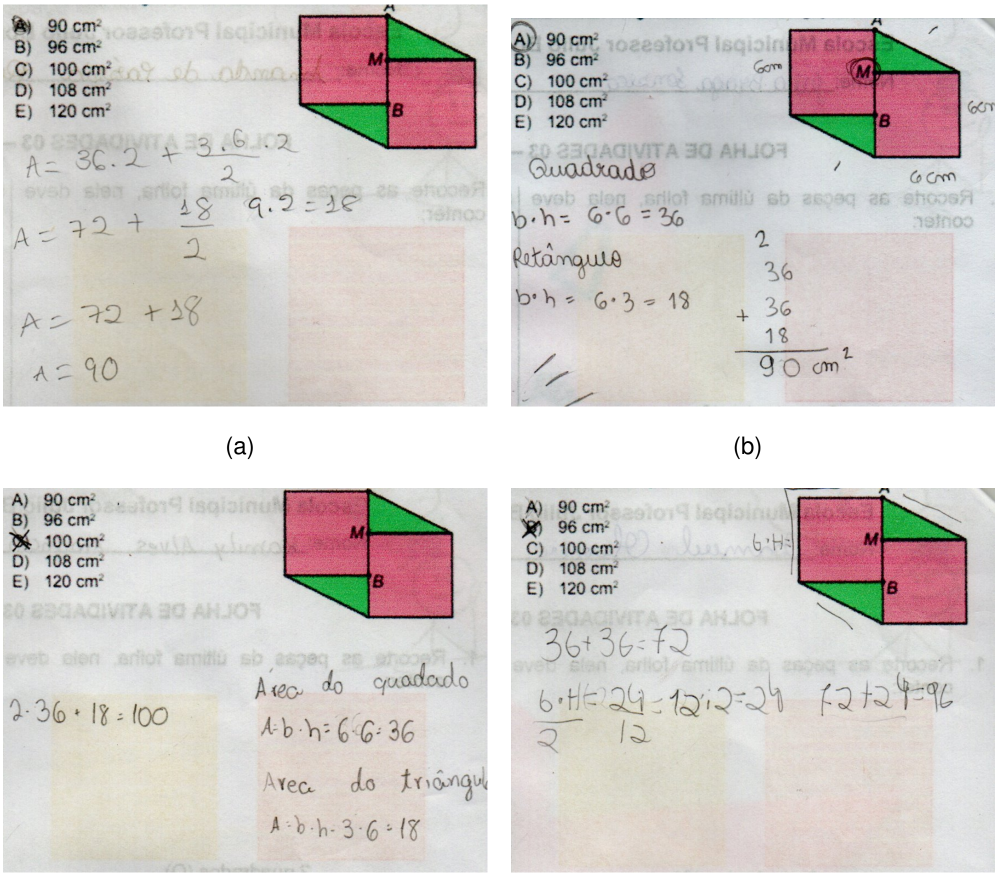
Na seção “Aplique Seus Conhecimentos”, os estudantes resolveram a questão 07 da OBMEP 2015, cuja resposta correta era a letra ***A***. A Tabela 4.4 sintetiza as respostas dadas pelos estudantes.

Tabela 4.4 – Respostas dos estudantes para a questão 07 da OBMEP 2015

| **Item** | **Respostas** | **%** |
|---|---|---|
| A | 18 | 47,37% |
| B | 8 | 21,05% |
| C | 2 | 5,26% |
| D | 7 | 18,42% |
| E | 0 | 0 |
| Não responderam | 3 | 7,90% |

Fonte: Autora.

Nenhum dos estudantes que marcou a alternativa “A” chegou a utilizar explicitamente a fórmula obtida no item 11. Em vez disso, eles desmembraram a figura e realizaram os cálculos separadamente, como visto nas Figuras 4.25(a) e 4.25(b). É interessante notar que os dois estudantes que optaram pela alternativa “C” demonstraram o raciocínio correto, mas cometeram erros na multiplicação e divisão, como demonstrado na Figura 4.25(c). Não fica claro qual foi a estratégia adotada pelos estudantes que escolheram as alternativas “B” e “D”. Possivelmente eles tenham sido influenciados pelas respostas registradas na tabela do item 9, mas não perceberam a diferença no deslocamento vertical do quadrado, como sugerido na Figura 4.25(d).



(a) (b) (c) (d)

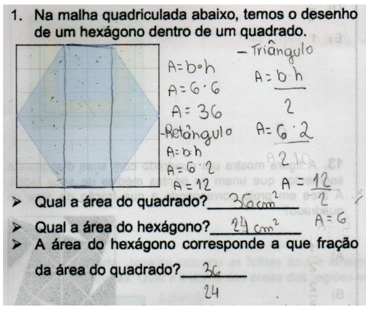
Figura 4.25 – Registros da Atividade 03 - Seção aplique seus conhecimentos.

O desempenho abaixo do esperado dos estudantes nessa seção aponta para a importância de introduzir mais questões com abordagens diversas antes de apresentar o problema da OBMEP em si. Além disso, pode ser benéfico revisitar o conceito e a prática de operações com frações. É possível que, uma vez que as peças não foram coladas durante essa atividade e permaneceram soltas, os estudantes não conseguiram visualizar claramente a relação entre o deslocamento do triângulo e a área total da figura final.

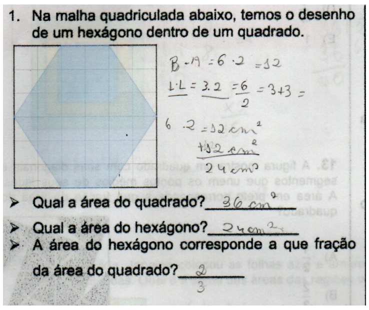
### 4.3.4 Folha de atividades 04 – Questões OBMEP 04/2011, 13/2010 e 04/2005 – Nível 02

Dos quarenta e dois estudantes que completaram a folha de atividades 04, todos conseguiram calcular as áreas do quadrado e do hexágono conforme solicitado no item 01, utilizando diversas estratégias para alcançar esse objetivo. Muitos optaram por utilizar diretamente as fórmulas deduzidas na primeira folha de atividades, dividindo o hexágono em um retângulo e dois triângulos, como evidenciado nas Figuras 4.26(a) e 4.26(b), ou subdividindo-o exclusivamente em triângulos, como mostrado na Figura 4.26(c). Além disso, houve estudantes que empregaram a diferença entre a área do quadrado e a soma das áreas dos triângulos adjacentes ao hexágono para calcular sua área, conforme apresentado na Figura 4.26(d). Outra abordagem adotada foi a de deslocar as figuras de modo a preencher a malha quadriculada, como demonstram as Figuras 4.26(e) e 4.26(f).

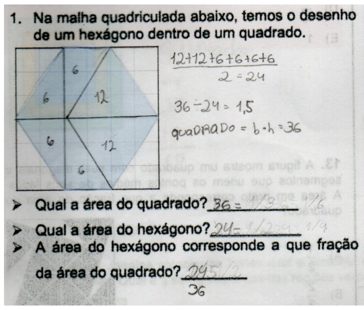
Apesar de não terem enfrentado dificuldades no cálculo das áreas, alguns estudantes demonstraram dificuldade em registrar corretamente a razão entre as áreas. Doze deles trocaram o numerador com o denominador, como mostrado na Figura 4.26(a), e dois deixaram a resposta em branco.



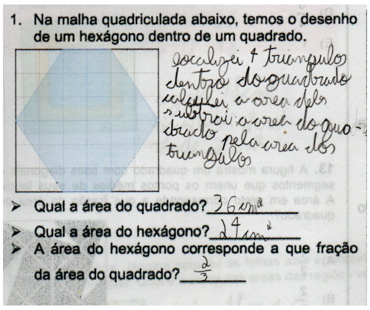

(a)



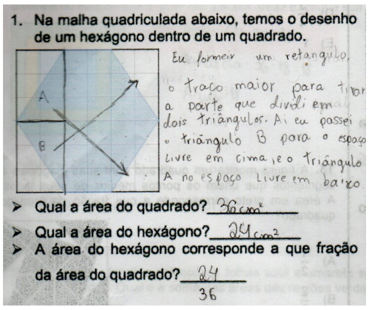

(b)



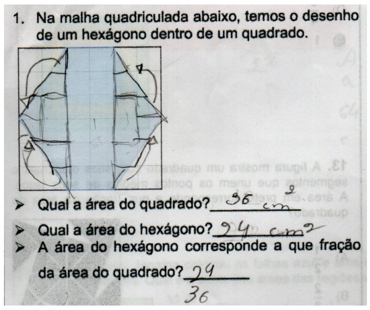

(c)




(d)




(e)



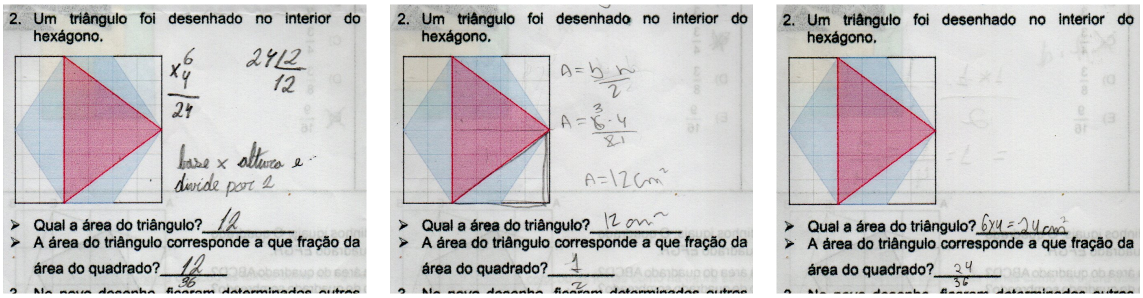

(f)

Figura 4.26 – Registros da Atividade 04 - item 01.

No item 02, que envolve a sobreposição de um triângulo sobre o hexágono, trinta dos estudantes conseguiram realizar os registros com sucesso referentes à área do triângulo. De maneira geral, aqueles que fizeram uso das fórmulas não enfrentaram dificuldades significativas. Observamos também que, mesmo que alguns não tenham formalizado a fórmula do triângulo, já eram capazes de recordar o cálculo necessário e o registraram, como exemplificado na Figura 4.27(a).

Dentro desse grupo, sete estudantes cometeram novamente o erro de registrar a razão de maneira equivocada. Dois deles inverteram o numerador com o denominador, enquanto cinco afirmaram erroneamente que a área do triângulo equivale à metade da área do quadrado. Isso pode indicar que eles talvez não tenham percebido a necessidade de fazer uma comparação com a área do hexágono, como evidenciado na Figura 4.27(b). Além disso, outros cinco estudantes multiplicaram a base pela altura ao calcular a área do triângulo, mas não dividiram o resultado por 2, conforme observado na Figura 4.27(c). Sete estudantes realizaram o registro, mas não obtiveram a resposta correta.

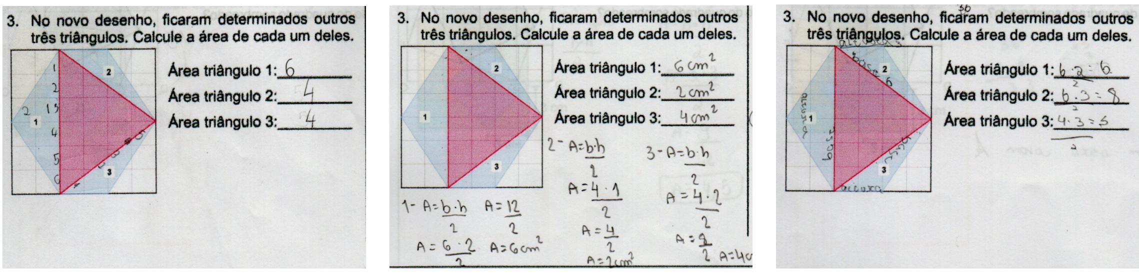
Neste item, considerando que a figura apresentasse somente o quadrado e o triângulo em seu interior, o entendimento por parte dos estudantes poderia ter sido facilitado, reduzindo os equívocos no cálculo da área.




(a) (b) (c)

Figura 4.27 – Registros da Atividade 04 - item 02.

No item 03, apenas nove estudantes conseguiram registrar corretamente a área dos três triângulos. Os triângulos obtusângulos se mostraram um desafio para eles, uma vez que tiveram dificuldade em identificar corretamente suas bases e alturas na malha. Por sua vez, dezesseis estudantes registraram áreas de 6, 4 e 4 para os triângulos 1, 2 e 3, respectivamente. A Figura 4.28 ilustra as possíveis estratégias que adotaram para identificar base e altura. Isso indica uma falta de consolidação do conceito de altura do triângulo, além de evidenciar aproximações das medidas da base que não correspondiam exatamente às linhas da malha quadriculada.

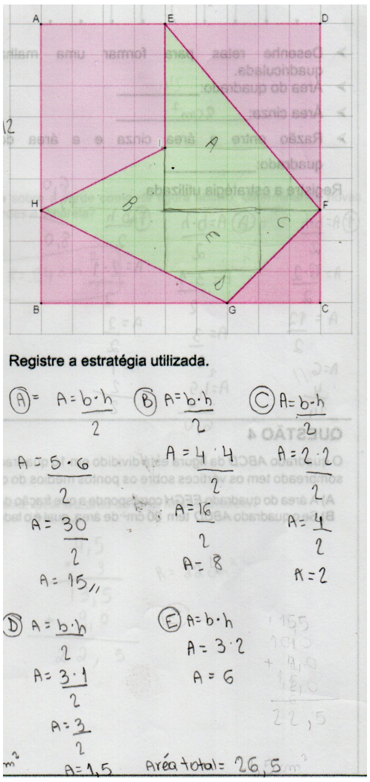



(a) (b) (c)

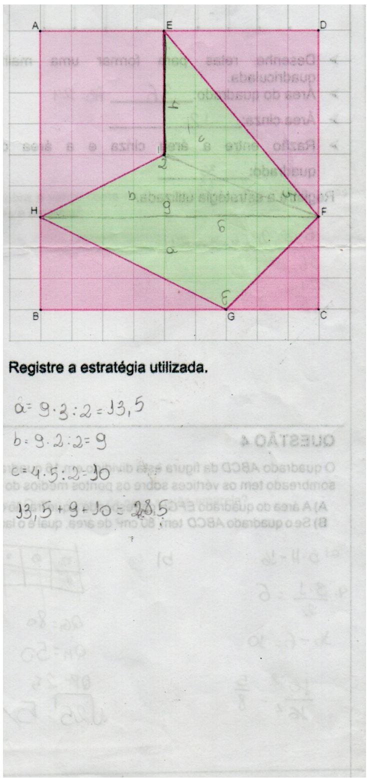
Figura 4.28 – Registros da Atividade 04 - item 03.

No item 4, a estratégia mais comum adotada pelos estudantes foi decompor a figura em polígonos cujas fórmulas para cálculo de área eram conhecidas, como ilustrado nas Figuras 4.29(a) e 4.29(b). A abordagem para realizar essa divisão variou amplamente, resultando em métodos diversos. Contudo, alguns não conseguiram fazer a divisão de forma precisa ao usar a malha quadriculada, o que levou a uma medição aproximada, como visto na Figura 4.29(c).

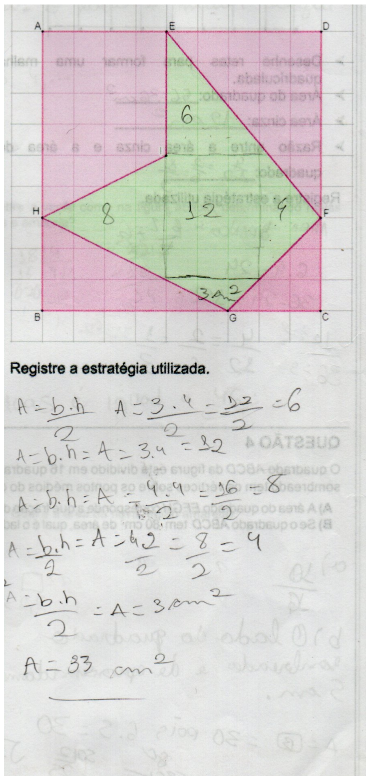
Outra estratégia observada foi o cálculo da área total do quadrado e a subsequente subtração das áreas dos polígonos rosas que estão externos ao polígono verde para encontrar a área deste último, como representado na Figura 4.29(d). Também notamos que um estudante descreveu passo a passo seu raciocínio para chegar ao resultado, embora não tenha registrado as fórmulas, como evidenciado na Figura 4.29(e). Além disso, outro estudante adotou a estratégia de deslocar partes do polígono verde para recompor espaços da malha quadriculada e, assim, calcular sua área, como demonstrado na Figura 4.29(f).



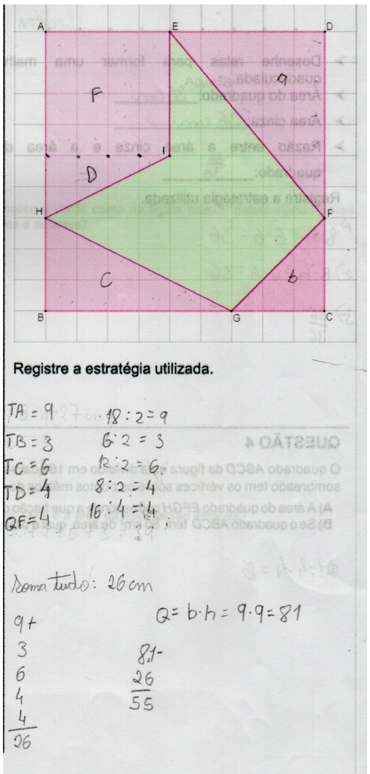

(a)



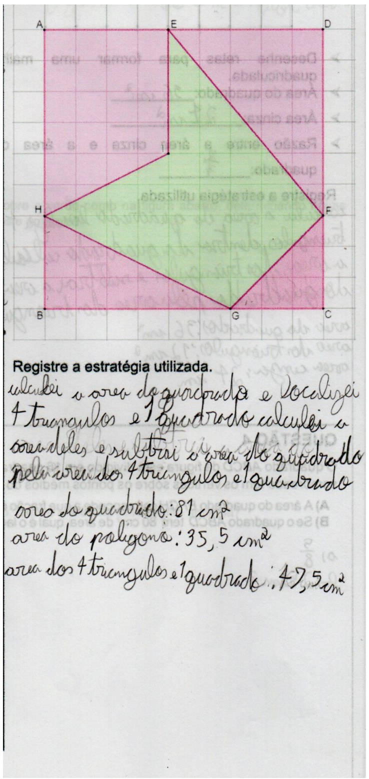

(b)



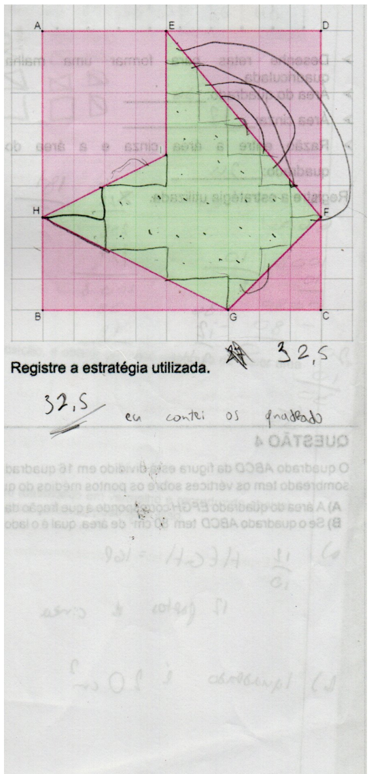

(c)




(d)




(e)



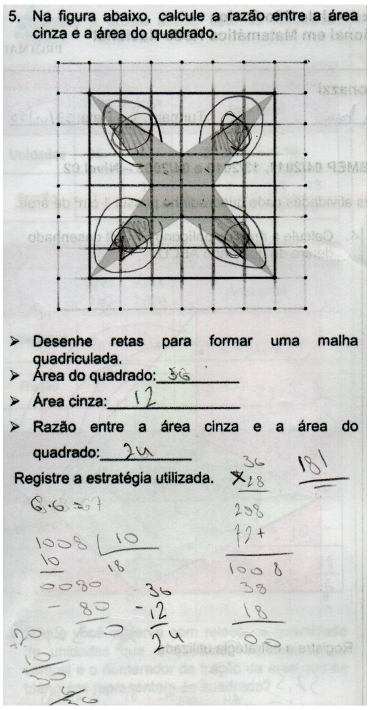

(f)

Figura 4.29 – Registros da Atividade 04 - item 04.

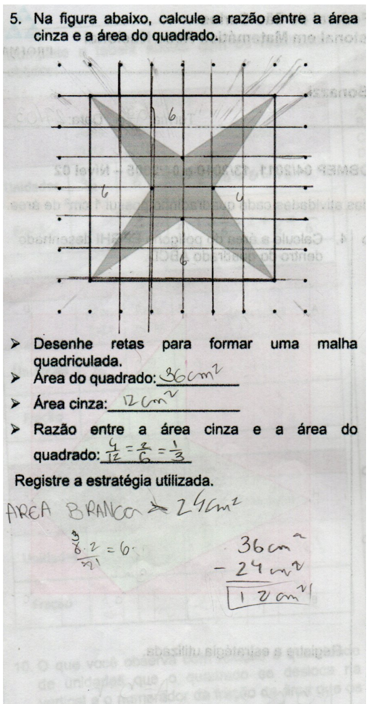
Dois estudantes optaram por não responder o item 05. Vinte e três estudantes acertaram a área do quadrado e a área da figura cinza. Entre eles, um utilizou a estratégia de juntar as partes cinzas para formar um pequeno quadrado da malha, como pode ser observado na Figura 4.30(a). No entanto, a abordagem mais comum foi calcular a área dos quatro triângulos brancos ao redor da figura e, em seguida, subtrair essa área da área total do quadrado, como ilustrado nas Figuras 4.30(b) e 4.30(c).

Nove estudantes conseguiram calcular corretamente a área do quadrado, mas cometeram um equívoco na determinação da área cinza. A Figura 4.30(d) apresenta o registro de um estudante que desenvolveu o raciocínio correto, porém, cometeu um erro na forma de registro. Por sua vez, a Figura 4.30(e) mostra uma estratégia que envolve o cálculo direto da área cinza, mas houve uma confusão na identificação da base e altura dos triângulos nos quais a figura foi subdividida.

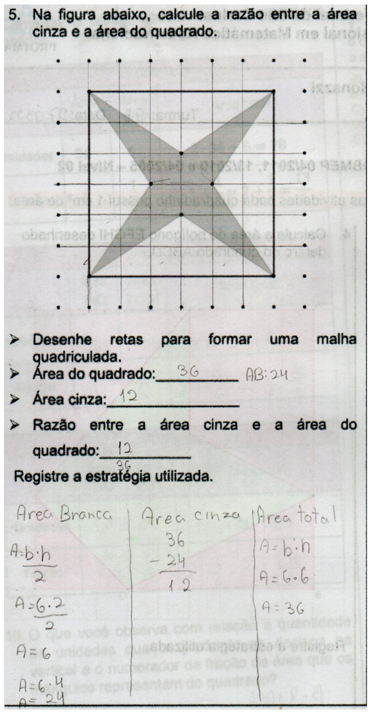
Algumas complicações adicionais surgiram quando um estudante, ao criar a malha quadriculada e calcular a área do quadrado, considerou partes externas da figura inicial devido à disposição dos vértices, como ilustrado na Figura 4.30(f). Para evitar essa dificuldade, uma sugestão de melhoria seria posicionar os vértices sobre os lados do quadrado, em vez de na parte externa.



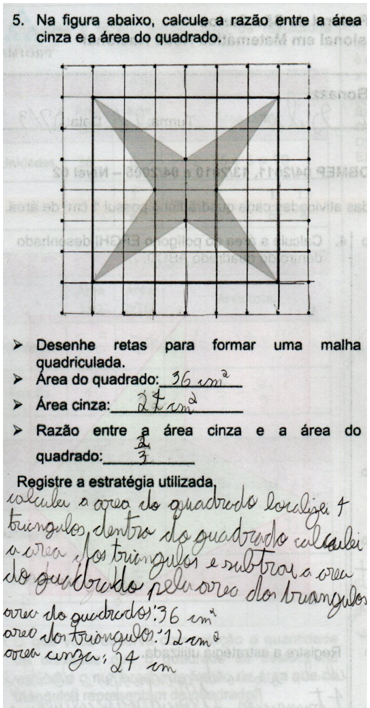

(a)



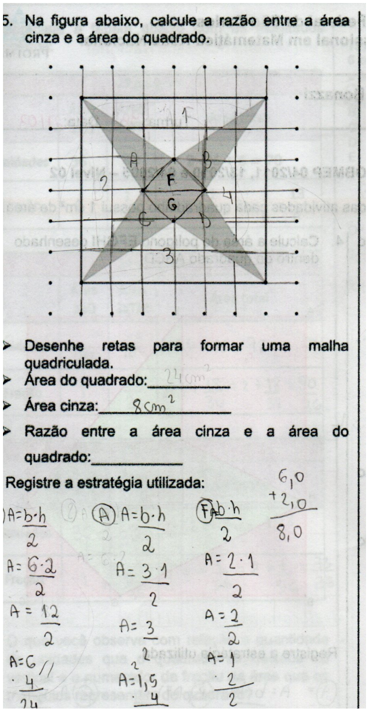

(b)



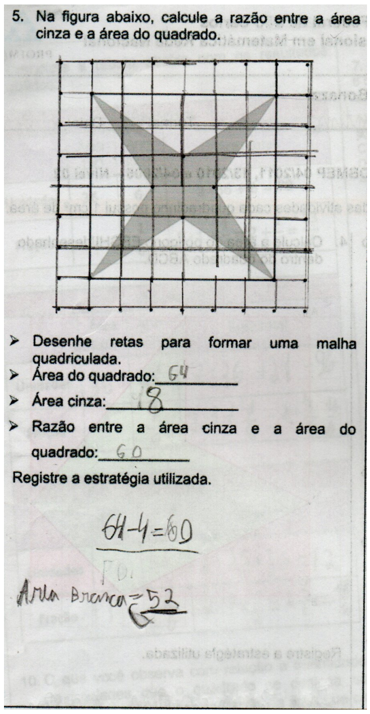

(c)




(d)




(e)




(f)

Figura 4.30 – Registros da Atividade 04 - item 05.

Na seção “Aplique Seus Conhecimentos”, apresentamos aos estudantes duas questões objetivas, questões 04 e 13 da OBMEP 2011 e 2010, respectivamente, e uma questão dissertativa, a de número 04 da OBMEP 2005.

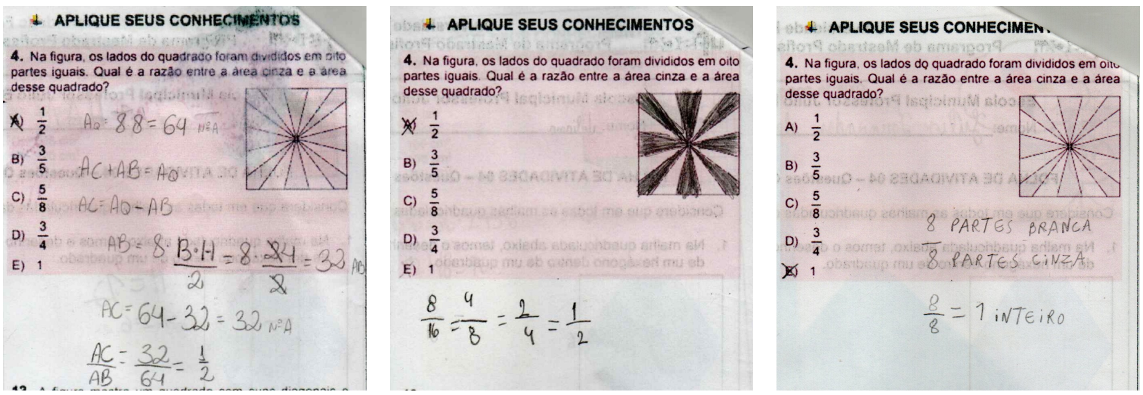
As Tabelas 4.5 e 4.6 trazem o quantitativo das respostas dadas pelos estudantes nas duas primeiras questões cujas respostas corretas eram as letras ***A*** e ***C***, respectivamente.

Tabela 4.5 – Respostas dos estudantes para a questão 04 da OBMEP 2011

| Item | Respostas | % |
|---|---|---|
| A | 20 | 46,51% |
| B | 1 | 2,33% |
| C | 3 | 6,98% |
| D | 0 | 0% |
| E | 14 | 32,56% |
| Não responderam | 5 | 11,62% |

Fonte: Autora.

Embora muitos estudantes que responderam à alternativa ***A*** tenham feito os cálculos corretamente, como mostrado na Figura 4.31(a), uma parcela significativa deles calculou a razão entre a quantidade de áreas cinzas e a área total, o que, por coincidência, resultou na resposta correta, conforme exemplificado na Figura 4.31(b). Por outro lado, os alunos que escolheram a alternativa ***E*** cometeram um erro na interpretação do enunciado, calculando a razão entre a área cinza e a área branca, como demonstrado na Figura 4.31(c).




(a) (b) (c)

Figura 4.31 – Registros da Atividade 04 - Seção aplique seus conhecimentos - Q04/2011.

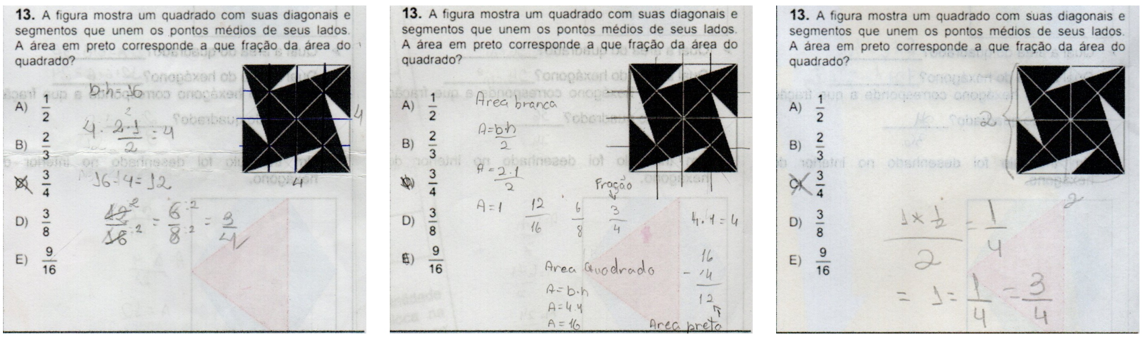
Tabela 4.6 – Respostas dos estudantes para a questão 13 da OBMEP 2010

| Item | Respostas | % |
|---|---|---|
| A | 2 | 4,65% |
| B | 0 | 0% |
| C | 22 | 51,16% |
| D | 2 | 4,65% |
| E | 12 | 27,91% |
| Não responderam | 5 | 11,63% |

Fonte: Autora.

Dentre os estudantes que acertaram a questão, duas estratégias de resolução se destacaram. Uma delas foi a subdivisão da figura através da construção de outra malha quadriculada sobre ela, semelhante ao que fizeram na atividade do item 05. Usando essa abordagem, eles calcularam a área da figura total, dos triângulos brancos, e subtraíram essa última da primeira para obter a área da região preta, como ilustrado nas Figuras 4.32(a) e 4.32(b).

Outra estratégia que chamou a atenção foi a de um estudante que considerou que o lado da figura media 2 unidades, tornando-a dividida em 4 quadrados com 1 unidade de medida de área e com os mesmos desenhos internos. Com base nisso, calculou a razão entre a área preta e o total de apenas um desses quadrados, que seria equivalente à razão da figura inteira. Dessa maneira, ele calculou apenas a área de um triângulo e subtraiu essa área da unidade, obtendo assim o resultado final, como representado na Figura 4.32(c)

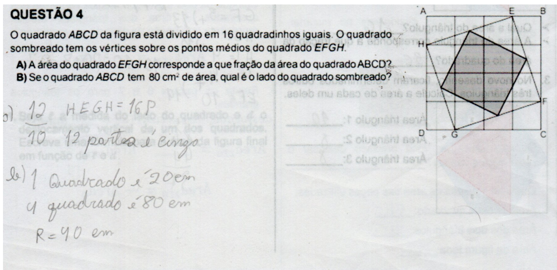


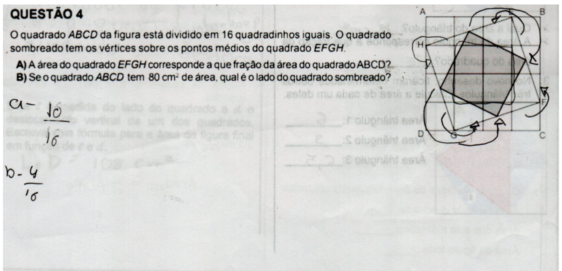

(a) (b) (c)

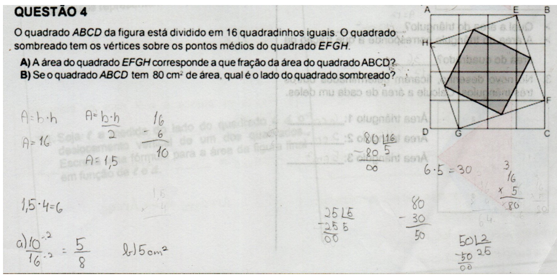
Figura 4.32 – Registros da Atividade 04 - Seção aplique seus conhecimentos - Q13/2010.

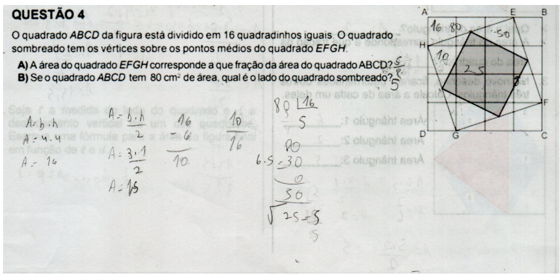
A última questão, de natureza dissertativa e com um nível de complexidade mais elevado, apresentou um desafio maior para os estudantes. Quinze deles optaram por não respondê-la. Quatro alunos responderam apenas ao item *a*, enquanto nove estudantes elaboraram um registro, como mostrado na Figura 4.33(a), no entanto, a estratégia adotada não pôde ser claramente identificada. Um estudante tentou uma abordagem de movimentação das partes e preenchimento dos quadrados na malha, porém, apesar de obter êxito no item *a*, essa estratégia não se mostrou tão eficaz para o item *b* quanto em atividades anteriores, conforme ilustrado na Figura 4.33(b). Esse caso específico revelou que o estudante ainda não havia desenvolvido a habilidade de abstração necessária para lidar com problemas mais elaborados.

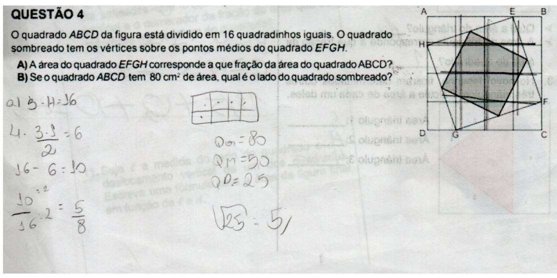
Quatorze estudantes conseguiram responder com êxito aos dois itens, *a* e *b*. Dentre esses, é notável que quase todos conseguiram apresentar de maneira clara os cálculos realizados, evidenciando as fórmulas utilizadas, como pode ser observado nas Figuras 4.33(c), 4.33(d) e 4.33(e). É interessante destacar que um dos estudantes atribuiu nomenclaturas especiais a cada um dos quadrados, uma abordagem semelhante à que foi usada na atividade com o tangram, como exemplificado na Figura 4.33(f).


(a)


(b)


(c)


(d)


(e)

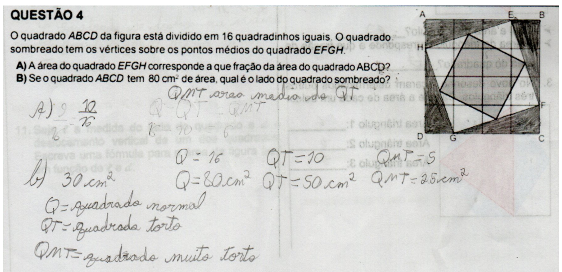

(f)

Figura 4.33 – Registros da Atividade 04 - Seção aplique seus conhecimentos - Q4/2005.

Dado que essa atividade não envolvia elementos manipulativos e exigia maior capacidade de abstração por parte dos estudantes, o trabalho com a malha quadriculada para fundamentar os cálculos de áreas e proporções equivalentes apresentou os maiores desafios. Seria benéfico desenvolver mais atividades semelhantes antes dessa questão, a fim de consolidar melhor tal habilidade.

### 4.3.5 Folha de atividades inicial/final

#### 4.3.5.1 Questão 03 - item *a* - OBMEP 2018 - $2^{a.}$ fase

A Tabela 4.7 apresenta a síntese das respostas dos estudantes nas folhas de atividades inicial e final para o item *a* da questão 03 da OBMEP 2018, $2^{a.}$ fase.

Tabela 4.7 – Respostas das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *a* - 2018.

| Respostas | Corretas | Erradas | Em branco |
|---|---|---|---|
| Inicial | 22 | 17 | 10 |
| Final | 27 | 18 | 4 |

Fonte: Autora.

De modo geral, os estudantes que cometeram erros na atividade final também apresentaram erros na atividade inicial, exceto por dois casos em que inicialmente responderam corretamente, mas depois erraram.

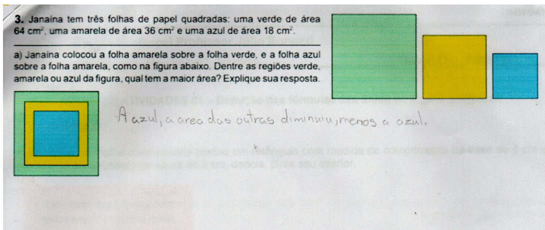
Por outro lado, sete estudantes alcançaram sucesso na segunda tentativa de resolução, como evidenciado nas Figuras de 4.34(a) até 4.34(d).

Observamos que muitos estudantes, a princípio, expressaram suas respostas de maneira empírica, como visto nas Figuras 4.34(e) e 4.34(g). Contudo, na folha final, demonstraram a capacidade de justificar suas respostas com cálculos, indicando o desenvolvimento da habilidade de calcular com medidas de área, conforme observado nas Figuras 4.34(f) e 4.34(h).

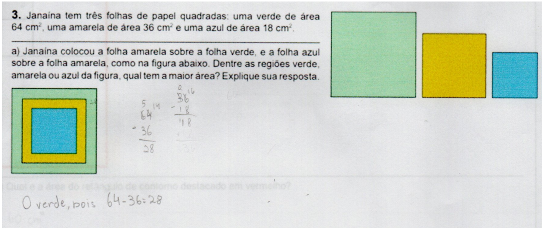
Quanto às respostas do estudante 05, conforme apresentado nas Figuras 4.34(i) e 4.34(j), é possível verificar o cálculo das áreas visíveis dos quadrados. No entanto, devido a um equívoco no cálculo na atividade inicial, ele não obteve sucesso na questão.

Vale destacar que alguns estudantes que acertaram a resposta da questão apenas mencionaram que o quadrado verde possuía a maior área, sem considerar a sobreposição dos quadrados amarelo e azul, conforme ilustrado na Figura 4.34(k). Por outro lado, muitos dos que erraram justificaram que, como não havia figura sobre o quadrado azul, ele possuía a maior área, como mostra a Figura 4.34(l).

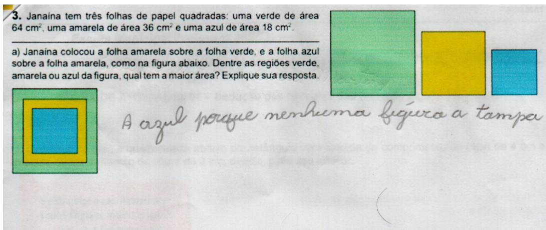
É válido ressaltar o progresso de estudantes que, na atividade inicial, simplesmente optaram por deixar as respostas em branco e, posteriormente, ao menos tentaram fazer algum tipo de registro expressando seu raciocínio.



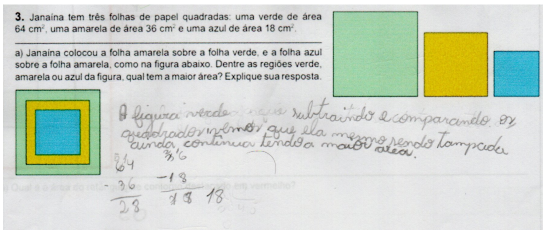

(a) Estudante 01 - inicial



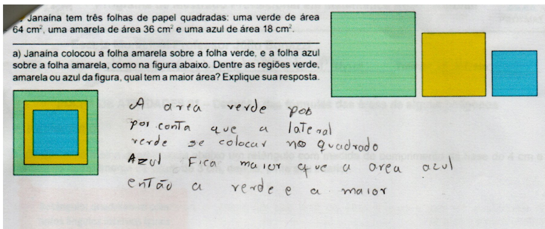

(b) Estudante 01 - final



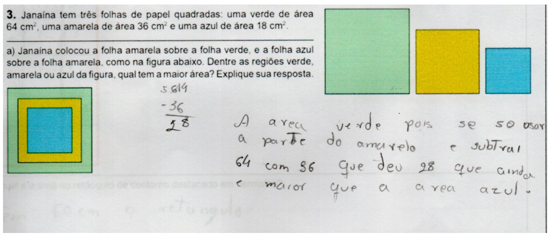

(c) Estudante 02 - inicial



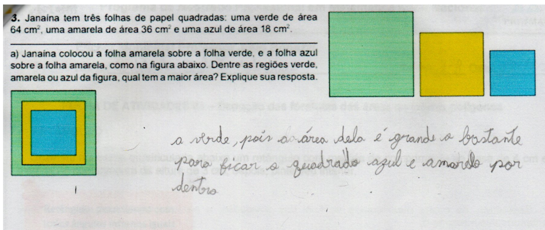
(d) Estudante 02 - final



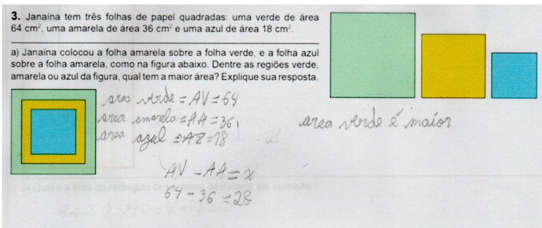
(e) Estudante 03 - inicial



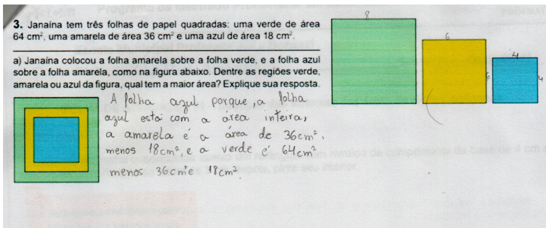
(f) Estudante 03 - final



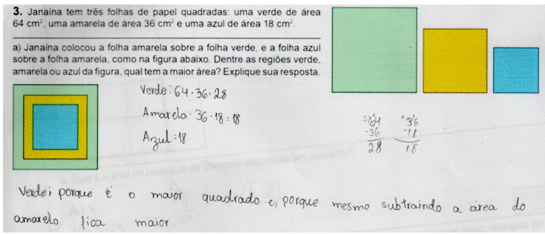

(g) Estudante 04 - inicial



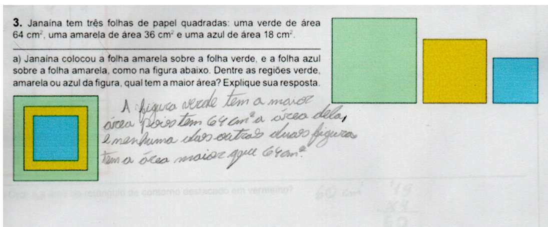

(h) Estudante 04 - final



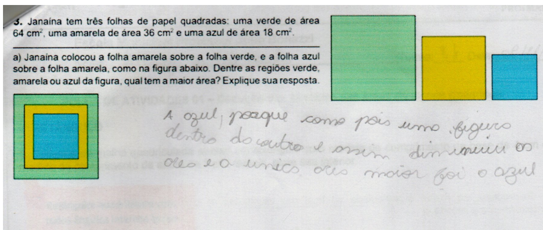
(i) Estudante 05 - inicial



(j) Estudante 05 - final



(k) Estudante 06 - final



(l) Estudante 07 - inicial

Figura 4.34 – Registros das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *a* - 2018.

#### 4.3.5.2 Questão 03 - item *b* - OBMEP 2018 - $2^{a.}$ fase

A Tabela 4.8 apresenta a síntese das respostas dos estudantes nas folhas de atividades inicial e final para o item *b* da questão 03 da OBMEP 2018, $2^{a.}$ fase.

Tabela 4.8 – Respostas das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *b* - 2018.

| **Respostas** | **Corretas** | **Erradas** | **Em branco** |
|---|---|---|---|
| Inicial | 3 | 32 | 14 |
| Final | 13 | 28 | 8 |

Fonte: Autora.

De modo geral, este item apresentou maior complexidade para os estudantes, no entanto, foi evidente a melhora em suas estratégias de raciocínio e na habilidade de registro ao longo da resolução.

Muitos estudantes não tiveram êxito na questão devido ao fato de somarem as áreas dos quadrados verde e amarelo sem considerar que um estava sobre o outro, tornando necessário calcular a área visível, como ilustrado nas Figuras 4.35(a) e 4.35(b). Notoriamente ocorreu um erro de interpretação do enunciado.

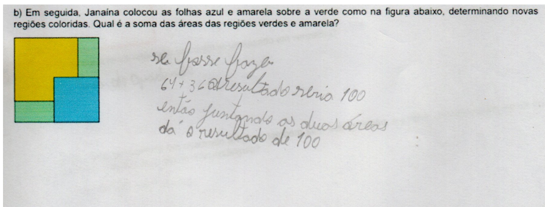
No entanto, observamos que, apesar de muitos não terem acertado o resultado em nenhuma das duas tentativas, houve um progresso nos registros e na elaboração do raciocínio da primeira para a segunda tentativa. Vários estudantes tentaram usar a estratégia de decompor a figura maior para compor a área solicitada, conforme exemplificado nas Figuras 4.35(c) até 4.35(f).

É perceptível que muitos estudantes assumiram que o retângulo verde possuía uma altura com medida igual à metade do lado do quadrado azul. Isso levou a muitos erros no cálculo da área desejada. No entanto, nas Figuras 4.35(g) e 4.35(h), é possível ver que o mesmo estudante que cometeu esse erro obteve êxito no cálculo na atividade final.

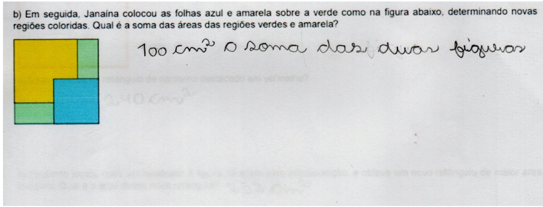
Destacamos que um único estudante resolveu o problema com a estratégia de verificar o quanto da área verde sobraria ao ser tapada com o quadrado amarelo e, em seguida, subtrair a área azul do resultado. No entanto, isso faria com que a parte amarela coberta pelo quadrado azul fosse retirada duas vezes. Portanto, ele somou novamente o valor equivalente a essa parte e obteve êxito no resultado final, conforme mostrado na Figura 4.35(i).

Outro estudante tentou utilizar a mesma estratégia, e, apesar do resultado final estar correto, a anotação feita na figura sugere que ele interpretou erroneamente o resultado dos cálculos, como visto na Figura 4.35(j).

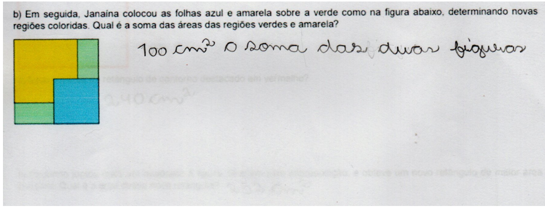
Por fim, embora não seja possível estabelecer qual estratégia foi utilizada na resolução da folha final, na folha inicial é perceptível que o estudante mediu com uma régua e utilizou as dimensões obtidas para realizar os cálculos, desconsiderando que a figura não estava desenhada em escala 1 : 1, como indicado nas Figuras 4.35(l) e 4.35(l).



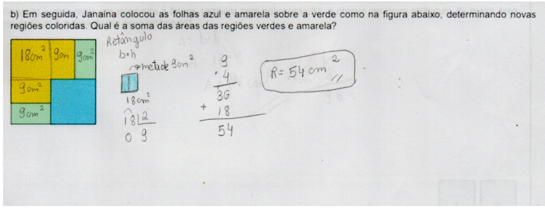

(a) Estudante 01 - inicial



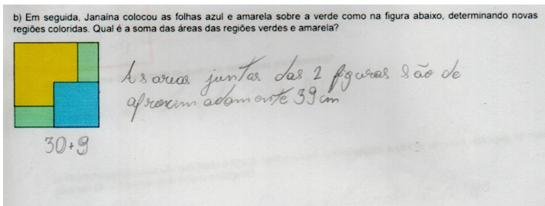

(b) Estudante 02 - inicial



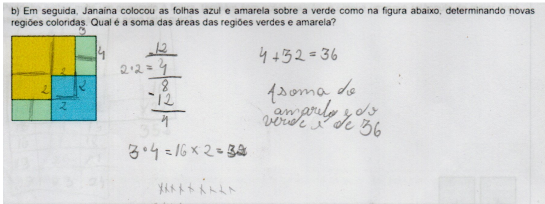

(c) Estudante 03 - inicial



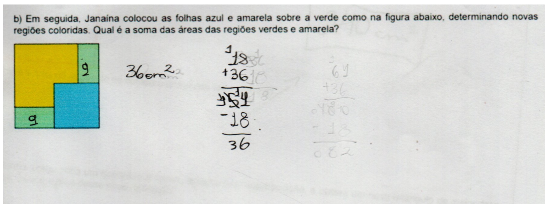

(d) Estudante 03 - final



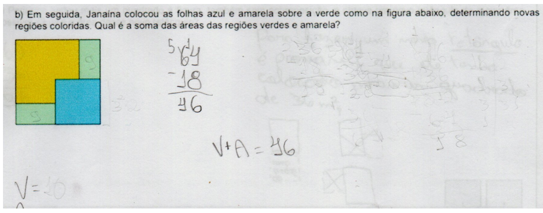

(e) Estudante 04 - inicial



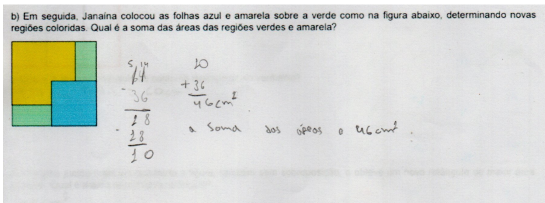

(f) Estudante 04 - final



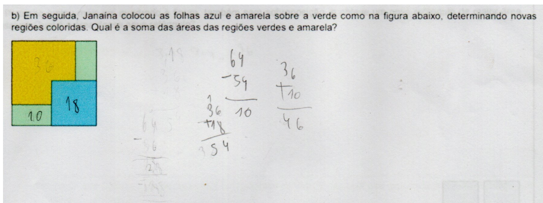

(g) Estudante 05 - inicial



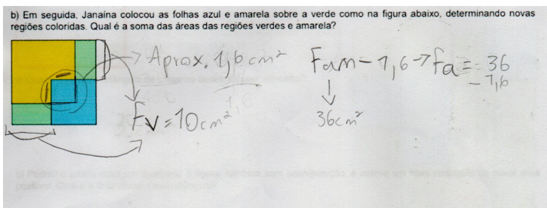

(h) Estudante 05 - final



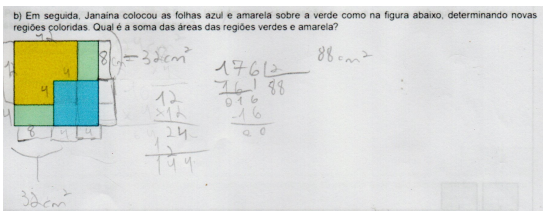

(i) Estudante 06 - inicial




(j) Estudante 07 - final




(k) Estudante 08 - inicial




(l) Estudante 08 - final

Figura 4.35 – Registros das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *b* - 2018.

#### 4.3.5.3 Questão 03 - item *c* - OBMEP 2018 - $2^{a.}$ fase

A Tabela 4.9 apresenta a síntese das respostas dos estudantes nas folhas de atividades inicial e final para o item *c* da questão 03 da OBMEP 2018, $2^{a.}$ fase.

Tabela 4.9 – Respostas das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *c* - 2018.

| Respostas | Corretas | Erradas | Em branco |
|---|---|---|---|
| Inicial | 0 | 23 | 33 |
| Final | 0 | 26 | 16 |

Fonte: Autora.

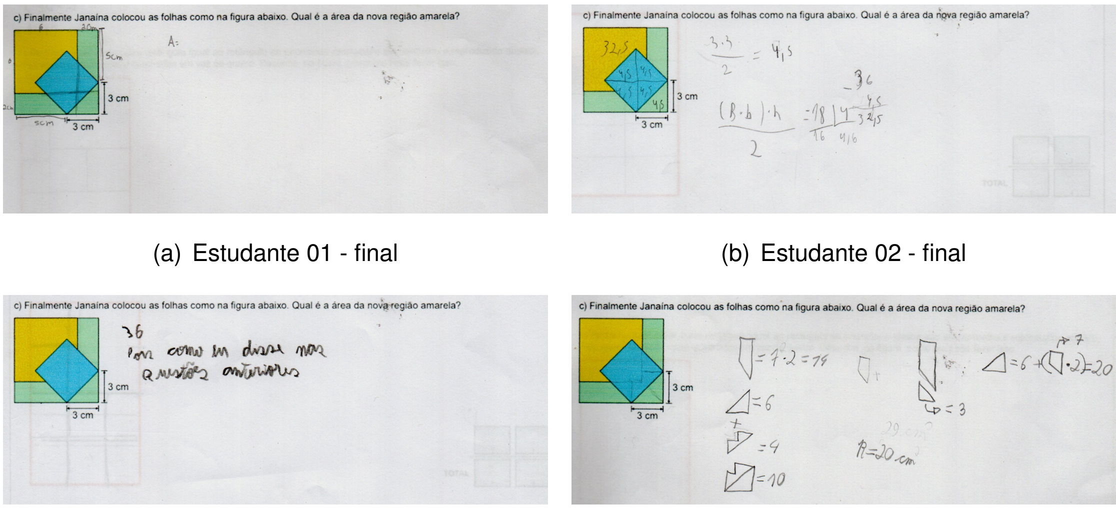
O item *c* se mostrou bastante desafiador para os estudantes, nenhum deles acertou a resposta, e muitos optaram por deixá-lo em branco. No entanto, observamos que, na segunda aplicação, houve um aumento no número de estudantes que tentaram resolver o item, sugerindo que eles tenham tido alguma ideia de como abordá-lo e registraram suas tentativas.

Algumas tentativas incluíram a ideia de dividir a figura com a ajuda de uma malha, mas essas estratégias não foram continuadas, como exemplificado na Figura 4.36(a).

Outra abordagem recorrente foi a tentativa de dividir o quadrado azul em quatro triângulos, conforme visto na Figura 4.36(b), mas, infelizmente, essa estratégia não levou ao cálculo correto da área desejada.

O Estudante 3, ao longo da resolução de todos os itens da atividade, parece não ter considerado que, quando uma figura é sobreposta a outra, a área visível é alterada, como evidenciado em sua resposta na Figura 4.36(a).

Apesar de não ter obtido sucesso no resultado final, o Estudante 4 trouxe uma abordagem interessante, decompondo a figura e calculando as áreas separadamente, como ilustrado na Figura 4.36(d).




(a) Estudante 01 - final (b) Estudante 02 - final

(c) Estudante 03 - final (d) Estudante 04 - final

Figura 4.36 – Registros das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *c* - 2018.

#### 4.3.5.4 Questão 02 - item *a* - OBMEP 2017 - 2ª fase

A Tabela 4.10 apresenta a síntese das respostas dos estudantes nas folhas de atividades inicial e final para o item *a* da questão 02 da OBMEP 2017, 2ª fase.

Tabela 4.10 – Respostas das Atividades inicial/final - Questão 02 - item *a* - 2017.

| **Respostas** | **Corretas** | **Erradas** | **Em branco** |
|---|---|---|---|
| Inicial | 13 | 25 | 11 |
| Final | 18 | 22 | 9 |

Fonte: Autora.

Os dados apresentados na Tabela 4.10 não refletem, mas surpreendentemente, observamos que um número considerável de estudantes acertou na folha inicial e cometeu erros na final, totalizando oito casos. As razões para essa confusão variaram, com cada estudante cometendo um erro distinto. Um exemplo disso pode ser observado nas Figuras 4.37(a) e 4.37(b), onde o erro cometido foi utilizar a medida de área como medida de lado do quadrado inicial.

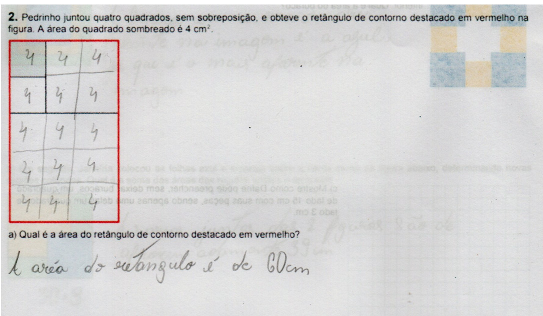
Chama a atenção o método utilizado pelo Estudante 2 para calcular a área solicitada, evidenciando alguma dificuldade na realização da multiplicação, conforme ilustrado na Figura 4.37(c).

O Estudante 3 deixou a resposta em branco na primeira tentativa e, em seguida, expressou um entendimento parcial, ao dividir corretamente a figura na malha, porém, cometeu um erro no cálculo da área final, como demonstrado na Figura 4.37(d).

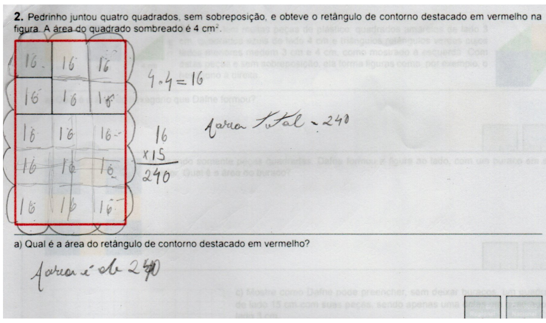
Observamos que o Estudante 4, na primeira resolução, possivelmente também confundiu os conceitos de área e comprimento do lado do quadrado, como evidenciado na Figura 4.37(e). No entanto, na segunda resolução, fica evidente que ele adquiriu o entendimento e a habilidade necessária para calcular corretamente o comprimento do lado do quadrado a partir da medida de sua área, como mostrado na Figura 4.37(f). Além disso, outros estudantes obtiveram sucesso em suas tentativas posteriores, como pode ser visto nos exemplos das Figuras 4.37(g) e 4.37(h).

O Estudante 6 tentou dividir a figura utilizando uma malha quadriculada, mas não obteve sucesso devido a não manutenção das medidas de comprimento dos lados dos quadrados, conforme a Figura 4.38(a). Por outro lado, o Estudante 7, apesar de conseguir dividir a figura corretamente, cometeu um erro no cálculo da área, como ilustrado na Figura 4.38(b).

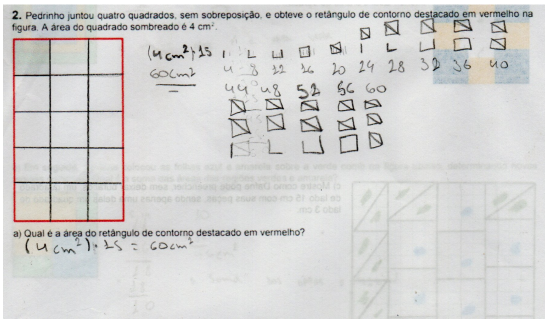
Foi observado que o Estudante 8 usou uma régua para verificar o comprimento dos lados do retângulo, sem levar em consideração a informação da área fornecida no enunciado e a escala, que não era de 1 : 1, conforme representado na Figura 4.38(c). Finalmente, na Figura 4.38(d), as anotações do Estudante 9 indicam que ele utilizou algum tipo de comparação para realizar os cálculos, mas a estratégia exata não ficou clara.



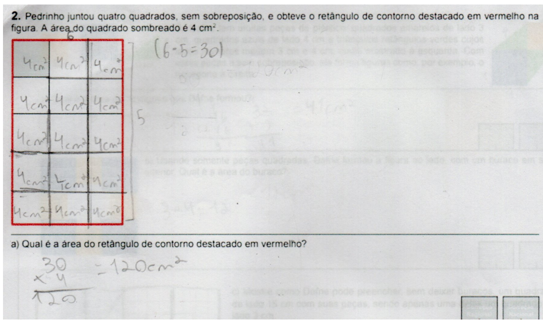

(a) Estudante 01 - inicial



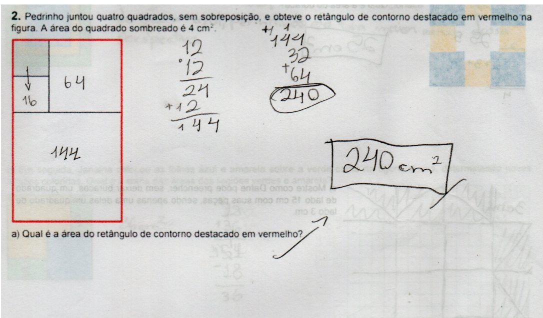

(b) Estudante 01 - final



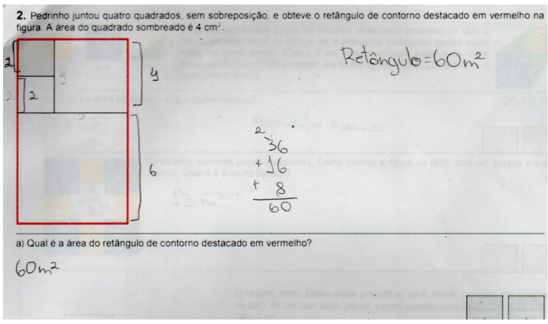

(c) Estudante 02 - inicial



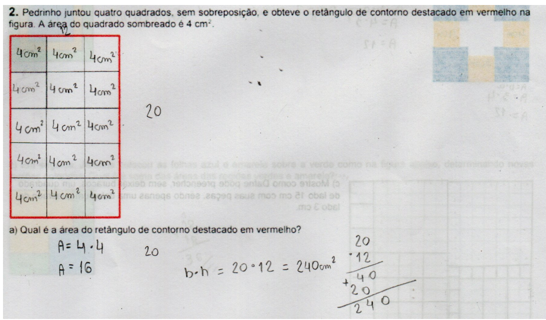

(d) Estudante 03 - final



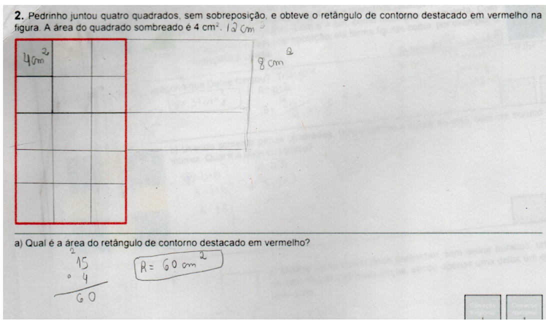

(e) Estudante 04 - inicial




(f) Estudante 04 - final

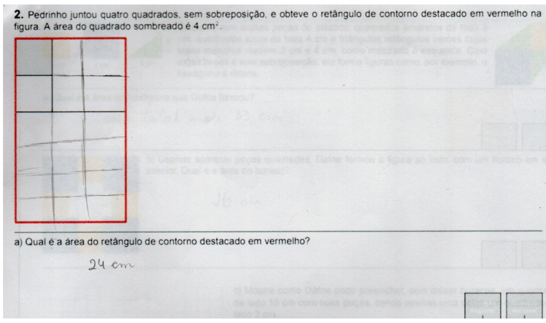



(g) Estudante 05 - inicial

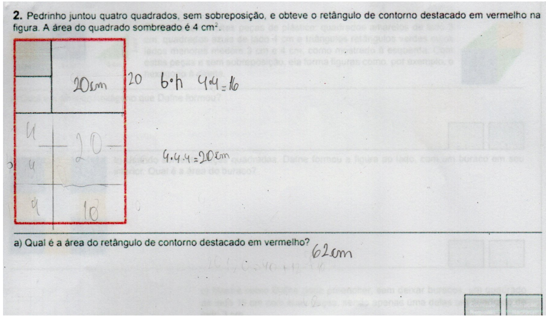



(h) Estudante 05 - final

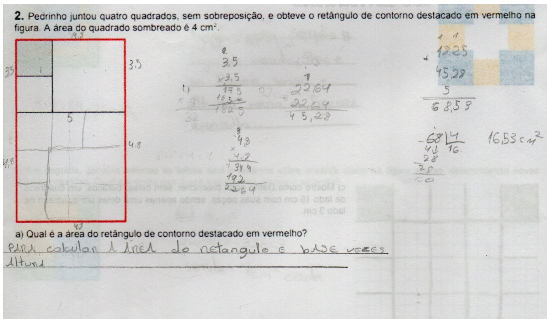
Figura 4.37 – Registros das Atividades inicial/final - Questão 02 - item *a* - 2017 (parte 01).



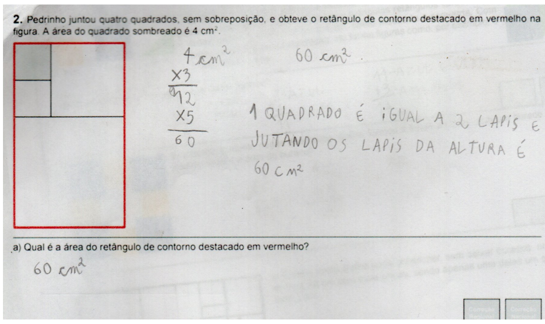

(a) Estudante 06 - final




(b) Estudante 07 - final




(c) Estudante 08 - inicial




(d) Estudante 09 - final

Figura 4.38 – Registros das Atividades inicial/final - Questão 02 - item *a* - 2017 (parte 02).

### 4.3.5.5 Questão 02 - item *b* - OBMEP 2017 - 2ª fase

A Tabela 4.11 apresenta a síntese das respostas dos estudantes nas folhas de atividades inicial e final para o item *b* da questão 02 da OBMEP 2017, 2ª fase.

Tabela 4.11 – Respostas das Atividades inicial/final - Questão 02 - item *b* - 2017.

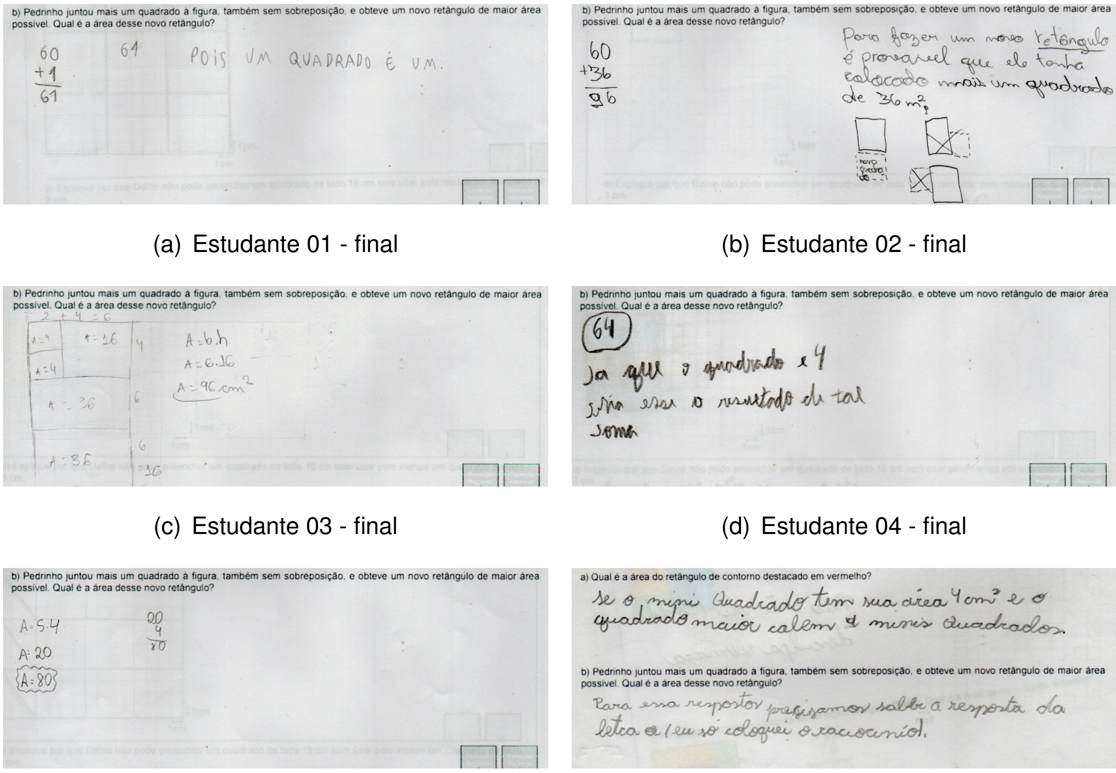
| Respostas | Corretas | Erradas | Em branco |
|---|---|---|---|
| Inicial | 0 | 37 | 12 |
| Final | 0 | 34 | 15 |

Fonte: Autora.

Foi observado que a orientação de acrescentar outra figura sem sobreposição à já existente não ficou clara para a maioria dos estudantes. Isso pode ser evidenciado, por exemplo, na Figura 4.39(a).

Alguns estudantes conseguiram adicionar um quadrado ao lado do retângulo já existente, mas utilizaram a medida do lado menor, de 6$cm$, em vez dos 10$cm$, como mostrado nas Figuras 4.39(b) e 4.39(c). Outros, como o Estudante 4, simplesmente acrescentaram o quadrado inicial mencionado no item *a*, que tinha uma área de $4cm^2$, como representado na Figura 4.39(d). O Estudante 5, por sua vez, adicionou uma nova coluna de quadrados, cada um com uma área de $4cm^2$, conforme visto na Figura 4.39(e), e o mesmo ocorreu com outros estudantes.

É interessante notar que o Estudante 6 reconheceu que, para resolver o item *b*, precisaria ter resolvido o item *a* primeiro e, como não o fez, percebeu que não conseguiria calcular a resposta, conforme indicado na Figura 4.39(f).




(a) Estudante 01 - final

(b) Estudante 02 - final

(c) Estudante 03 - final

(d) Estudante 04 - final

(e) Estudante 05 - final

(f) Estudante 06 - inicial

Figura 4.39 – Registros das Atividades inicial/final - Questão 02 - item *b* - 2017.

#### 4.3.5.6 Questão 02 - item *c* - OBMEP 2017 - 2ª fase

A Tabela 4.12 apresenta a síntese das respostas dos estudantes nas folhas de atividades inicial e final para o item *c* da questão 02 da OBMEP 2017, 2ª fase.

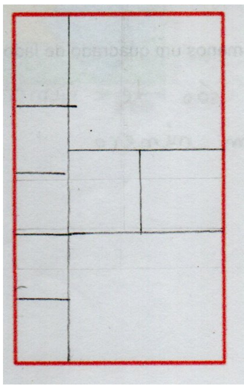
Tabela 4.12 – Respostas das Atividades inicial/final - Questão 02 - item *c* - 2017.

| Respostas | Corretas | Erradas | Em branco |
|---|---|---|---|
| Inicial | 7 | 35 | 7 |
| Final | 4 | 30 | 15 |

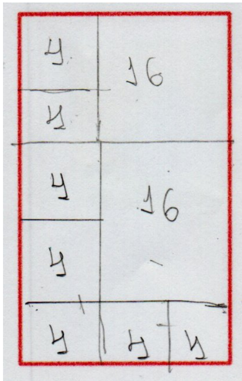
Fonte: Autora.

Observamos que muitos estudantes dividiram o retângulo em outros nove retângulos, mas nem todos esses retângulos eram quadrados. Poucos foram aqueles que acertaram essa divisão, e curiosamente, alguns que tiveram sucesso na primeira folha erraram ou deixaram em branco a folha final. As Figuras de 4.40(a) até 4.40(d) mostram alguns exemplos de acertos, enquanto as Figuras de 4.40(e) até 4.40(n) ilustram formas errôneas de dividir o retângulo que não condizem com o enunciado.

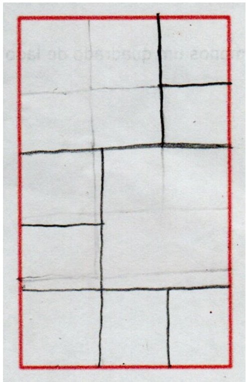
Todos os estudantes que realizaram a atividade fizeram as divisões dentro do retângulo fornecido pela questão, com exceção de um estudante que adotou uma estratégia de desenhar um quadrado ao lado, assemelhando-se ao que foi solicitado no item *b*, conforme ilustrado na Figura 4.40(o).



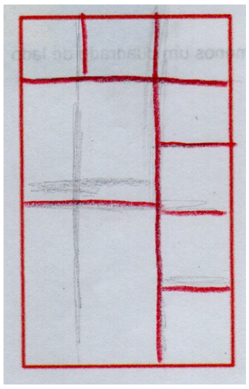
(a)



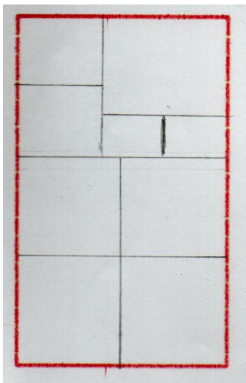

(b)



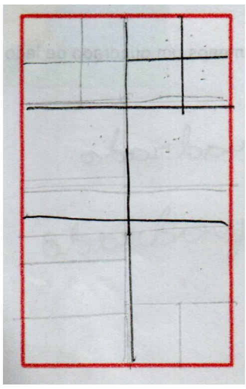
(c)



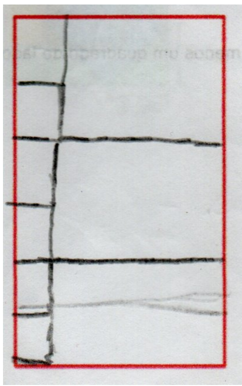
(d)



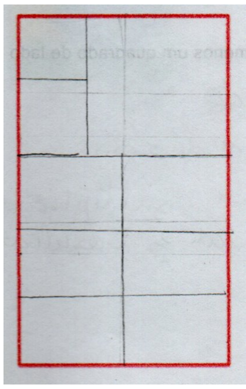
(e)



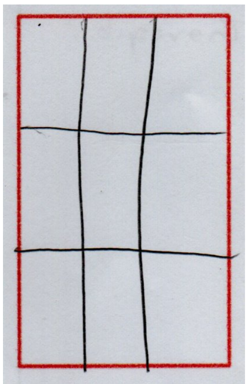
(f)



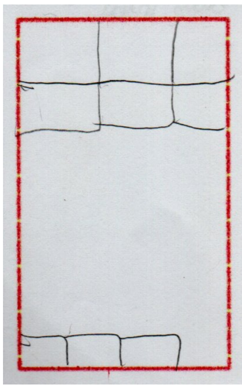
(g)



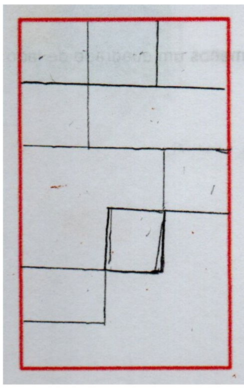
(h)



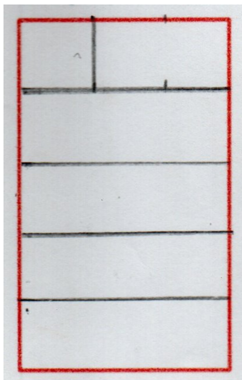
(i)



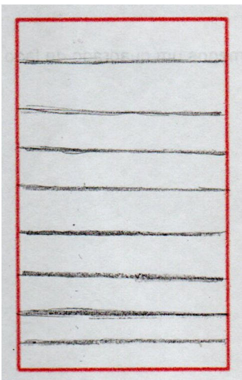
(j)



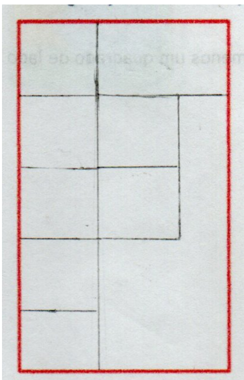
(k)



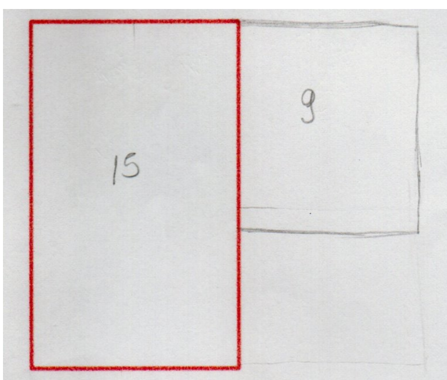
(l)



(m)



(n)




(o)

Figura 4.40 – Registros das Atividades inicial/final - Questão 02 - item *c* - 2017.

#### 4.3.5.7 Questão 03 - item *a* - OBMEP 2013 - $2^{a.}$ fase

A Tabela 4.13 apresenta a síntese das respostas dos estudantes nas folhas de atividades inicial e final para o item *a* da questão 03 da OBMEP 2013, $2^{a.}$ fase.

Tabela 4.13 – Respostas das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *a* - 2013.

| Respostas | Corretas | Erradas | Em branco |
|---|---|---|---|
| Inicial | 2 | 28 | 19 |
| Final | 8 | 23 | 18 |

Fonte: Autora.

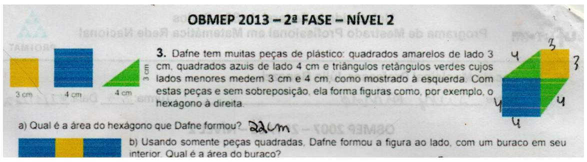
Ficamos surpresos com a quantidade de erros e questões em branco neste item. A princípio, não esperávamos que ela representasse um desafio tão significativo para os estudantes na segunda aplicação. Afinal, tratava-se do cálculo de áreas de um quadrado e de um triângulo, algo que já havia sido amplamente abordado ao longo da sequência de atividades anteriores. Um possível motivo para essa dificuldade pode ter sido o tempo limitado que os estudantes tiveram para completar as três questões da atividade final, que ocorreu durante uma única aula de 50 minutos. Como esta era a última questão, eles podem não ter tido tempo suficiente para analisá-la com mais cuidado.

O erro mais comum na folha inicial foi o cálculo do perímetro da figura. Na folha final, muitos estudantes cometeram o equívoco de esquecer de duplicar a área do triângulo.

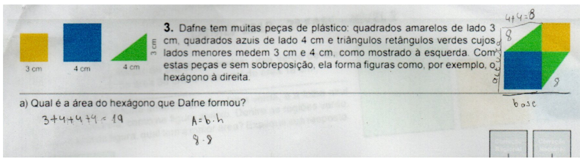
Notamos que alguns estudantes ainda confundem as definições de perímetro e área. Na Figura 4.41(a) podemos verificar que o Estudante 1 tentou calcular o perímetro do hexágono.

O Estudante 2 tentou usar a estratégia de calcular a área do retângulo, mas não obteve êxito. No entanto, sua abordagem foi única, como evidenciado na Figura 4.41(b).

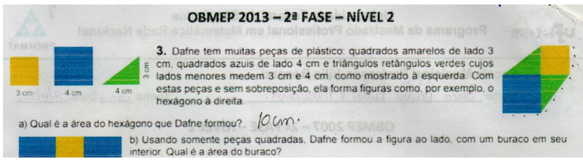
As respostas do Estudante 3 indicam que, inicialmente, ele não seguiu um caminho que o levaria à resposta correta. Os pontilhados que fez no hexágono, destacados na Figura 4.41(c), indicam que ele tentou calcular o perímetro da figura. No entanto, a Figura 4.41(d) mostra que ele foi capaz de expressar sua estratégia por meio de cálculos, com o único equívoco de não duplicar a medida da área do triângulo verde. Isso mostra um desenvolvimento na habilidade de cálculo de áreas de quadrados e triângulos. O mesmo padrão ocorreu com o Estudante 4, conforme ilustrado nas Figuras 4.41(e) e 4.41(f). Por outro lado, o Estudante 5 adotou uma estratégia semelhante, mas chegou ao resultado correto no final, como demonstrado nas Figuras 4.41(g) e 4.41(h).



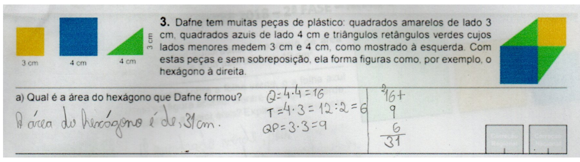
(a) Estudante 01 - final



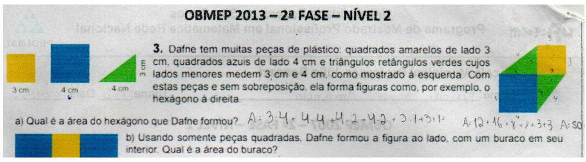
(b) Estudante 02 - inicial



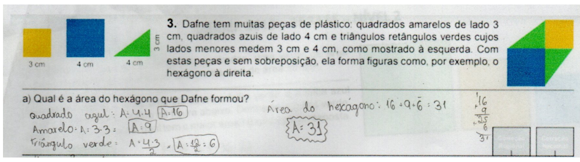
(c) Estudante 03 - inicial



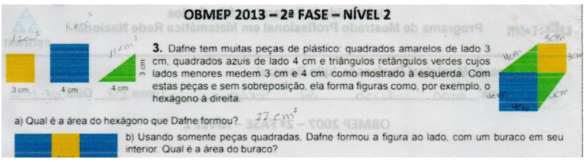
(d) Estudante 03 - final



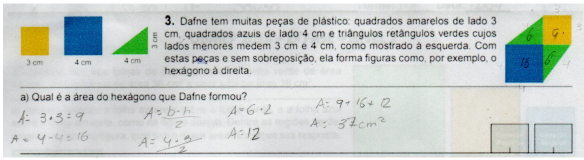
(e) Estudante 04 - inicial



(f) Estudante 04 - final



(g) Estudante 05 - inicial



(h) Estudante 05 - final

Figura 4.41 – Registros das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *a* - 2013.

#### 4.3.5.8 Questão 03 - item *b* - OBMEP 2013 - 2ª fase

A Tabela 4.14 apresenta a síntese das respostas dos estudantes nas folhas de atividades inicial e final para o item *b* da questão 03 da OBMEP 2013, 2ª fase.

Tabela 4.14 – Respostas das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *b* - 2013.

| **Respostas** | **Corretas** | **Erradas** | **Em branco** |
|---|---|---|---|
| Inicial | 2 | 35 | 12 |
| Final | 3 | 24 | 22 |

Fonte: Autora.

Na análise dos dados, notamos que dois estudantes que haviam acertado na folha inicial optaram por deixar a folha final em branco. Esse comportamento também foi observado em muitos outros estudantes. Supomos que a falta de tempo hábil para a resolução de todas as questões tenha sido um fator contribuinte para essa decisão.

Ao analisarmos o desempenho do Estudante 1, percebemos que inicialmente tentou calcular o perímetro do buraco, conforme ilustra a Figura 4.42(a). Essa estratégia foi a mesma que ele utilizou no item *a*. No entanto, posteriormente, ele adotou a estratégia de sobrepor uma malha quadriculada à figura e obteve sucesso na resposta, como mostrado na Figura 4.42(b).

O Estudante 2 também optou por usar uma malha quadriculada, mas não dividiu a malha corretamente de acordo com a medida do lado do quadrado, como visto na Figura 4.42(c).

Já o Estudante 3 observou que, se o buraco fosse um quadrado, teria um lado de $5cm$, e calculou sua área. No entanto, ele esqueceu de subtrair a área dos quatro quadrados ao redor do buraco, como evidenciado na Figura 4.42(d).

Um erro comum foi tentar calcular a área do buraco considerando que ele é um quadrado com lado de 3 cm, como fez o Estudante 4(Figura 4.42(e)). Na segunda folha, ele percebeu que o quadrado $3x3$ estava dentro do buraco e somou sua área à dos retângulos ao redor, obtendo assim a resposta correta, como ilustrado na Figura 4.42(f).

O Estudante 5 conseguiu calcular a área dos quadrados ao redor do buraco, mas esqueceu de subtrair essa área da área total do quadrado maior, conforme a Figura 4.42(g). Já na Figura 4.42(h), observamos que o Estudante 6 fez a subtração necessária e chegou à resposta correta.

Na Figura 4.42(i), temos outro exemplo em que o Estudante 7 inicialmente calculou o perímetro do buraco e, posteriormente, obteve sucesso no cálculo de sua área, como na Figura 4.42(j).

(a) Estudante 01 - inicial (b) Estudante 01 - final

(c) Estudante 02 - final (d) Estudante 03 - inicial

(e) Estudante 04 - inicial (f) Estudante 04 - final

(g) Estudante 05 - final (h) Estudante 06 - inicial

(i) Estudante 07 - inicial (j) Estudante 07 - final

Figura 4.42 – Registros das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *b* - 2013.

### 4.3.5.9 Questão 03 - item *c* - OBMEP 2013 - 2ª. fase

A Tabela 4.15 apresenta a síntese das respostas dos estudantes nas folhas de atividades inicial e final para o item *c* da questão 03 da OBMEP 2013, 2ª. fase.

Tabela 4.15 – Respostas das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *c* - 2013.

| **Respostas** | **Corretas** | **Erradas** | **Em branco** |
|---|---|---|---|
| Inicial | 8 | 26 | 15 |
| Final | 8 | 16 | 25 |

Fonte: Autora.

Novamente, observamos que alguns estudantes que haviam acertado na folha inicial optaram por deixar a folha final em branco.

Alguns estudantes simplesmente desenharam um quadrado 3*x*3 no centro da malha quadriculada, como mostra a Figura 4.43(a).

Houve um estudante que reproduziu na malha uma figura semelhante à do item *a*, o que evidencia que ele não interpretou corretamente o enunciado, como visto na Figura 4.43(b).

Nas Figuras de 4.43(c) até 4.43(l), estão alguns exemplos de respostas incorretas, todas elas evidenciando falhas na interpretação do enunciado e algumas tentativas frustradas de preenchimento.

A partir da Figura 4.43(m) até 4.43(p), temos alguns exemplos de respostas corretas.

Uma resposta inusitada foi a de um estudante que escreveu um pedido de desculpas por não ter conseguido entender o enunciado na folha inicial, mas que obteve êxito na folha final, como pode ser visto nas Figuras 4.43(q) e 4.43(r).

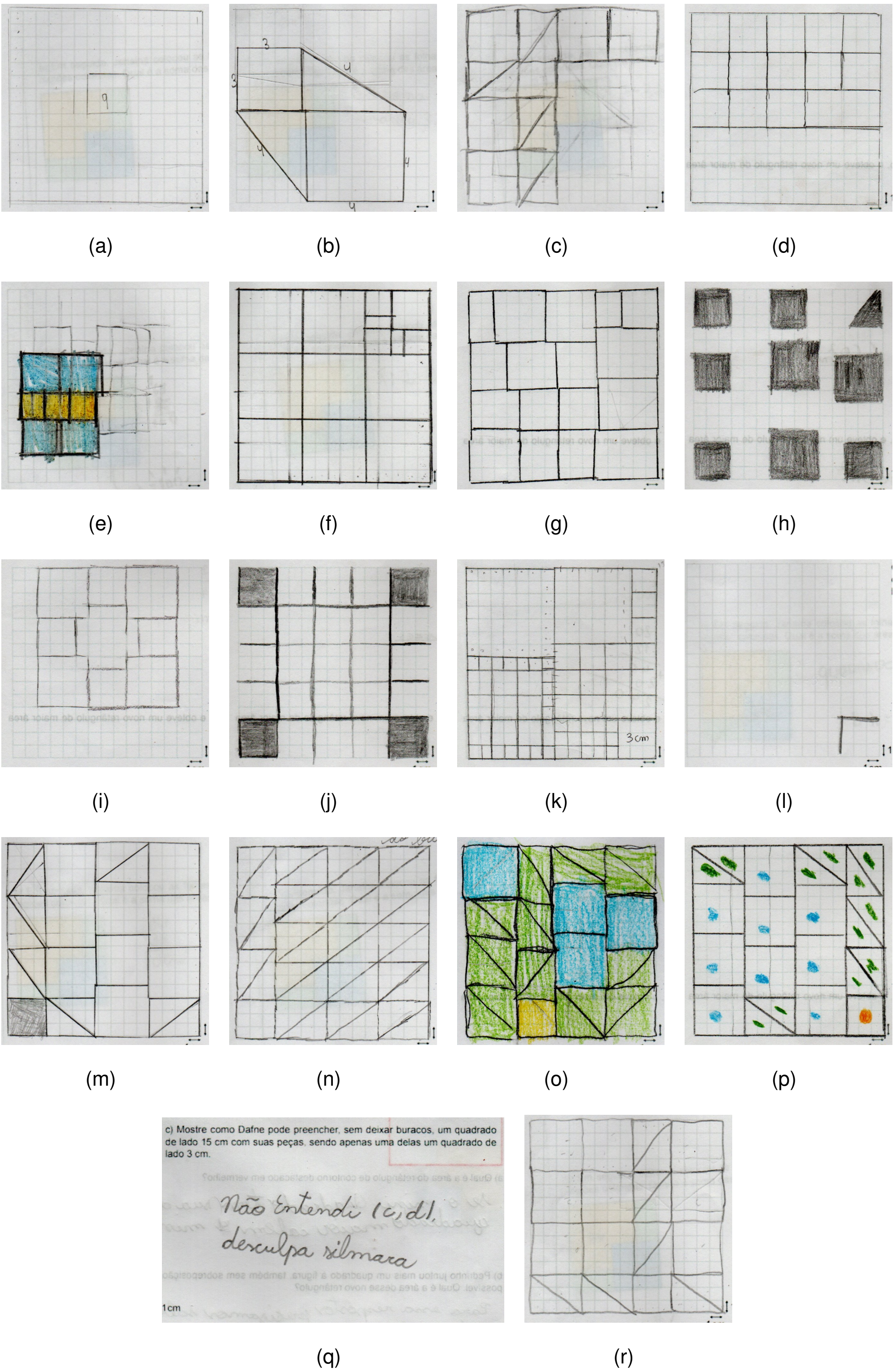



Figura 4.43 – Registros das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *c* - 2017.

#### 4.3.5.10 Questão 03 - item *d* - OBMEP 2013 - $2^{a.}$ fase

A Tabela 4.16 apresenta a síntese das respostas dos estudantes nas folhas de atividades inicial e final para o item *c* da questão 03 da OBMEP 2013, $2^{a.}$ fase.

Tabela 4.16 – Respostas das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *d* - 2013.

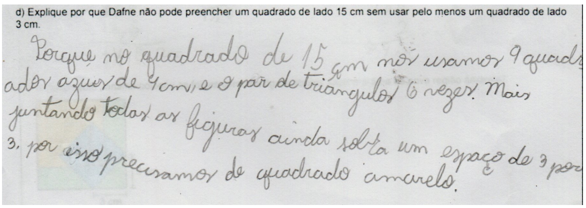
| **Respostas** | **Corretas** | **Erradas** | **Em branco** |
|---|---|---|---|
| Inicial | 5 | 22 | 22 |
| Final | 5 | 15 | 29 |

Fonte: Autora.

Observamos que a maioria dos estudantes registrou respostas semelhantes às evidenciadas nas Figuras 4.44(a) e 4.44(b), onde eles justificaram que havia um espaço vazio e que deveria ser preenchido com o quadrado $3x3$.

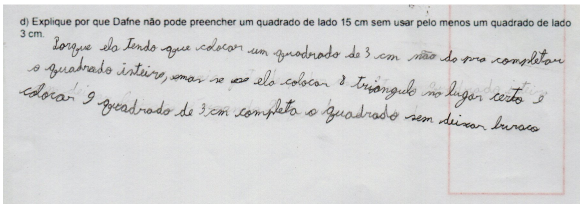
Alguns estudantes registraram a observação de que o lado do quadrado maior tinha uma medida ímpar, mas não chegaram a uma conclusão definitiva, como mostram as Figuras 4.44(c) e 4.44(d). Nestes casos, na Tabela 4.16, consideramos as respostas como corretas.

Apenas dois estudantes conseguiram registrar a resposta, justificando claramente por que não era possível preencher o quadrado de lado $15cm$ sem usar o quadrado $3x3$, como visto nas Figuras 4.44(e) e 4.44(f).


d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

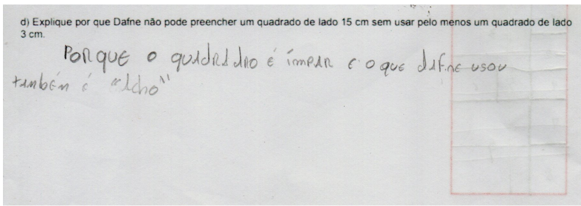
Porque no quadrado de 15 cm nós usamos 9 quadr
ados azuis de 4cm, e o par de triângulos 6 vezes. Mais
juntando todas as figuras ainda solta um espaço de 3 por
3, por isso precisamos do quadrado amarelo.

(a)


d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

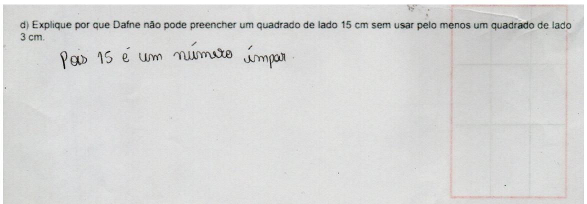
Porque ela tendo que colocar um quadrado de 3 cm não dá pra completar
o quadrado inteiro, mas se ela colocar 8 triângulo no lugar certo e
colocar 9 quadrado de 3 cm completa o quadrado sem deixar buraco

(b)


d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

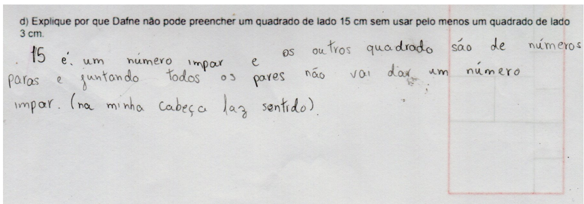
Porque o quadrado é impar e o que dafne usou
também é "ldho"

(c)


d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

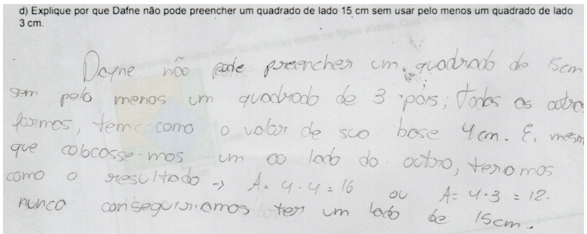
Pois 15 é um número ímpar.

(d)


d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

15 é um número impar e os outros quadrado são de números
paras e juntando todos os pares não vai dar um número
impar. (na minha cabeça faz sentido)

(e)


d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

Dafne não pode preencher um quadrado de 15cm
sem pelo menos um quadrado de 3 pois; Todas as outras
formas, tem como o valor de sua base 4cm. E, mesmo
que colocasse-mos um ao lado do outro, teriamos
como o resultado → A= 4 · 4 = 16 ou A= 4 · 3 = 12.
nunca conseguiriamos ter um lado de 15cm.

(f)

Figura 4.44 – Registros das Atividades inicial/final - Questão 03 - item *d* - 2013.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No cenário educacional, frequentemente nos deparamos com aquela famosa pergunta dos estudantes: "Isso vai contar ponto?". É interessante observar que, desde o primeiro momento, na nossa primeira atividade, enfatizamos que não se tratava de um trabalho para pontuação, mas sim de uma oportunidade de avaliar se a abordagem adotada os auxiliaria na resolução dos desafios. Alguns estudantes, é verdade, talvez não tenham se comprometido plenamente, mas, em geral, ficamos impressionados com o nível de engajamento e cooperação, especialmente por parte dos estudantes com dificuldades de aprendizagem.

Ficou evidente que muitos dos alunos que normalmente se saem bem nas aulas de matemática lidaram com as tarefas com relativa facilidade. No entanto, o que mais nos surpreendeu foi o entusiasmo dos estudantes que costumam ser classificados como "médios" em desempenho. Neles, pudemos perceber um interesse e dedicação que raramente demonstram em situações cotidianas. Isso nos leva a refletir sobre como a abordagem do conteúdo, o uso de materiais didáticos manipulativos e o trabalho em equipe podem influenciar positivamente o aprendizado.

Também é importante notar que o fato de não haver pontuação atrelada às atividades desempenhou um papel significativo. Os estudantes se sentiram livres para errar e experimentar, sem o peso da nota no boletim. Essa abordagem permitiu que eles explorassem novas estratégias e abrissem suas mentes para desafios matemáticos de uma maneira mais descontraída.

Entretanto, ao abordarmos a última folha de atividades de forma individual, percebemos que, mesmo com o desenvolvimento de várias habilidades ao longo do processo, muitos estudantes estavam desanimados. Eles haviam se acostumado a resolver questões em grupo, onde podiam discutir estratégias com os colegas. Quando se viram diante de dificuldades sem a possibilidade de conversar com um colega, alguns optaram por deixar as questões em branco. Além disso, subestimamos o tempo necessário para essa última tarefa, reservando apenas uma aula de 50 minutos, o que claramente não foi suficiente.

Isso nos leva a uma conclusão importante: é fundamental um trabalho contínuo com esse tipo de atividade para que os estudantes possam desenvolver habilidades de resolução de problemas de maneira progressiva. Eles precisam de tempo para se familiarizar com diferentes tipos de questões e enunciados, algo que pode ser particularmente relevante para provas como a OBMEP.

Esse processo também destaca a importância de os educadores saírem da zona de conforto, explorarem novas metodologias e não terem medo de experimentar abordagens inovadoras. O aprendizado é uma jornada em constante evolução, e estar disposto a adaptar-se às necessidades dos estudantes é fundamental para promover um ambiente de aprendizado eficaz e inspirador.

# REFERÊNCIAS


ARTIGUE, M. Engenharia didática. **Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget**, p. 193–217, 1996. Citado na página 13.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática através dos tempos:um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. 2. ed. São Paulo-SP: Blucher, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo-SP: Editora Edgar Blücher Ltda, 2012. Citado na página 30.

Brasil. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2017. Acessado em 17 de junho de 2023. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Citado na página 29.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, v. 13, n. 1, p. 87–120, 2005. Citado na página 13.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 3. ed. Campinas-SP: Editora UNICAMP, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 30, 33 e 36.

GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2003. Acessado em 19 de agosto de 2023. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/102085>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 34 e 36.

INEP. **Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)**. Acessado em 20 de maio de 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/ideb>. Citado na página 21.

OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. 2023. Acessado em 24 de setembro de 2022. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/>. Citado na página 14.

SAINT-EXUPéRY, A. de. **O Pequeno Príncipe**. 48. ed. Rio de Janeiro: Agir, 2006. Citado na página 5.

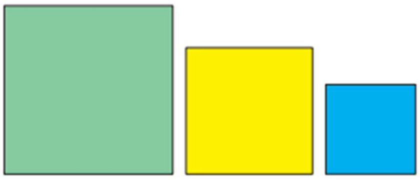
# APÊNDICE A – FOLHA DE ATIVIDADES INICIAIS

ESCOLA MUNICIPAL PROFESSOR JÚLIO BONZZI

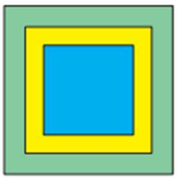
Nome:__________________________________________________Turma:______ Data:_______

**OBMEP 2018 – 2ª FASE – NÍVEL 2**

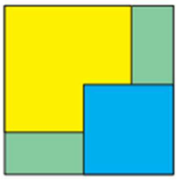
**3.** Janaína tem três folhas de papel quadradas: uma verde de área 64 cm², uma amarela de área 36 cm² e uma azul de área 18 cm².



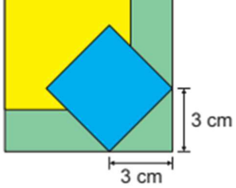
a) Janaína colocou a folha amarela sobre a folha verde, e a folha azul sobre a folha amarela, como na figura abaixo. Dentre as regiões verde, amarela ou azul da figura, qual tem a maior área? Explique sua resposta.



b) Em seguida, Janaína colocou as folhas azul e amarela sobre a verde como na figura abaixo, determinando novas regiões coloridas. Qual é a soma das áreas das regiões verdes e amarela?

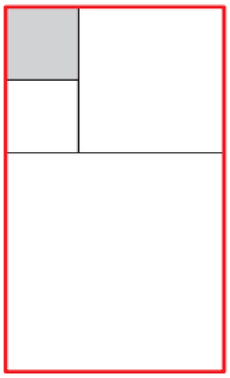


c) Finalmente Janaína colocou as folhas como na figura abaixo. Qual é a área da nova região amarela?



**OBMEP 2017 – 2ª FASE – NÍVEL 2**

**2.** Pedrinho juntou quatro quadrados, sem sobreposição, e obteve o retângulo de contorno destacado em vermelho na figura. A área do quadrado sombreado é 4 $cm^2$.

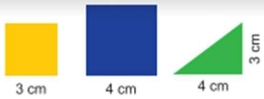


a) Qual é a área do retângulo de contorno destacado em vermelho?

b) Pedrinho juntou mais um quadrado à figura, também sem sobreposição, e obteve um novo retângulo de maior área possível. Qual é a área desse novo retângulo?

c) Pedrinho quer obter outro retângulo igual ao retângulo do enunciado (destacado em vermelho e reproduzido abaixo), mas agora juntando nove quadrados em vez de quatro. Desenhe, na figura, como ele pode fazer isso.

## OBMEP 2013 – 2ª FASE – NÍVEL 2



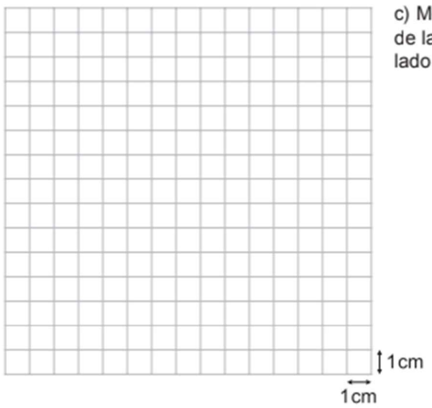

**3.** Dafne tem muitas peças de plástico: quadrados amarelos de lado 3 cm, quadrados azuis de lado 4 cm e triângulos retângulos verdes cujos lados menores medem 3 cm e 4 cm, como mostrado à esquerda. Com estas peças e sem sobreposição, ela forma figuras como, por exemplo, o hexágono à direita.

a) Qual é a área do hexágono que Dafne formou?

Correção Regional | Correção Nacional

b) Usando somente peças quadradas, Dafne formou a figura ao lado, com um buraco em seu interior. Qual é a área do buraco?

Correção Regional | Correção Nacional




c) Mostre como Dafne pode preencher, sem deixar buracos, um quadrado de lado 15 cm com suas peças, sendo apenas uma delas um quadrado de lado 3 cm.

Correção Regional | Correção Nacional

d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

# APÊNDICE B – FOLHA DE ATIVIDADES 01

**Universidade Federal de São Carlos**
**Programa de Mestrado Profissional em Matemática Rede Nacional**

PROFMAT

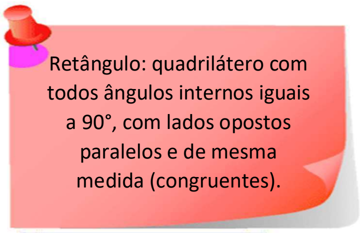
**Escola Municipal Professor Júlio Bonazzi**

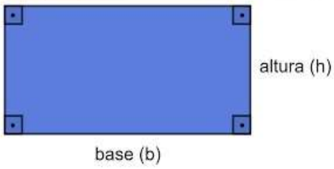
Nome:_______________________________________________Turma:_____ Data:________

**FOLHA DE ATIVIDADES 01 – Dedução das fórmulas das áreas de alguns polígonos**

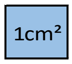
✓ **RETÂNGULO**

1. Desenhe na malha quadriculada abaixo um retângulo com medida de comprimento da base de 4 cm e medida de comprimento da altura de 3 cm, depois, pinte seu interior.





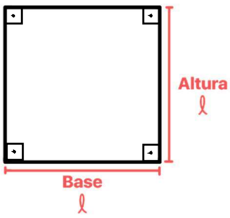




2. Considerando que cada quadradinho da malha quadriculada corresponde a um centímetro quadrado de área (1 cm²), qual a área do retângulo que você coloriu?

3. Quantos quadradinhos tem cada linha da malha dentro do retângulo? E quantos quadradinhos tem cada coluna da malha dentro do retângulo?

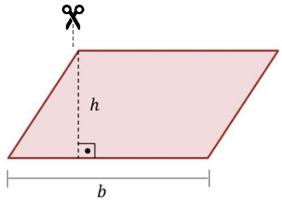
4. Utilizando *b* para a medida de comprimento da base e *h* para a medida de comprimento da altura, como pode ser escrita uma fórmula para calcular a medida da área de um retângulo?

5. Sendo o quadrado um retângulo com as medidas dos lados congruentes, como podemos escrever a fórmula anterior utilizando $\ell$ para a medida de comprimento do lado do quadrado?



### ✓ PARALELOGRAMO

1. Desenhe na malha quadriculada abaixo um paralelogramo com medida de comprimento da base de 4 cm e medida de comprimento da altura de 3 cm, depois, pinte seu interior.




Paralelogramo: quadrilátero com os lados paralelos dois a dois cujos ângulos opostos e lados opostos são congruentes.

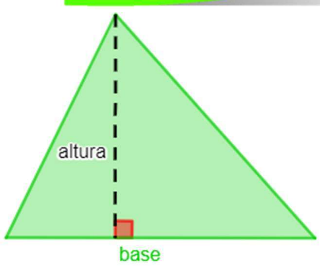
2. Reproduza, na malha quadriculada ao final das atividades, o paralelogramo que você desenhou anteriormente e recorte-o.

3. Faça nele um corte como indicado na figura e manipule os pedaços até formar um retângulo. Cole o retângulo formado na malha quadriculada abaixo e verifique qual é a sua área.

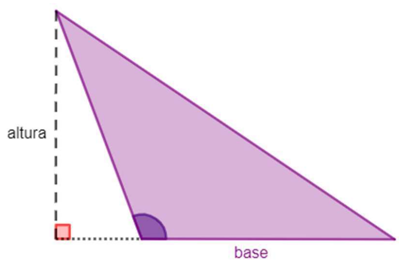
4. Como você pode escrever uma fórmula para a área do paralelogramo em termos de *b* e *h*?

### ✓ TRIÂNGULOS

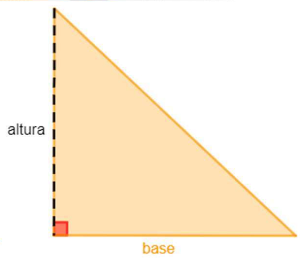
Triângulo acutângulo: possui os três ângulos internos agudos e a altura é sempre interior.




Triângulo obtusângulo: possui um dos ângulos internos obtuso e a altura pode ser exterior.




Triângulo retângulo: possui um dos ângulos internos reto e a altura pode coincidir com um de seus lados.



1. Desenhe na malha quadriculada abaixo um triângulo de cada tipo dos citados anteriormente, depois, pinte seu interior.

Anote as medidas que você utilizou.

| **Triângulo acutângulo** | **Triângulo obtusângulo** | **Triângulo retângulo** |
|---|---|---|
| Base (b):_____ Altura (h):______ | Base (b):_____ Altura (h):______ | Base (b):_____ Altura (h):______ |

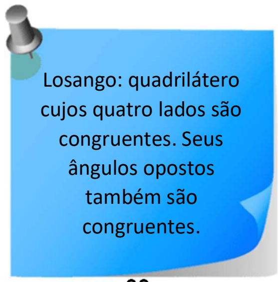
2. Reproduza, na malha quadriculada ao final das atividades, dois triângulos idênticos a cada um que você desenhou anteriormente, pinte-os de cores diferentes e recorte-os.

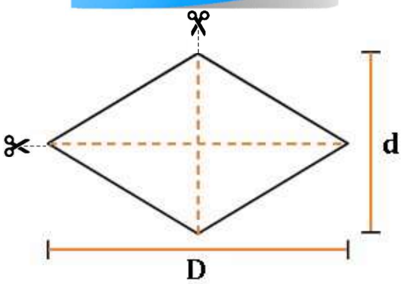
3. Manipule cada par de triângulos congruentes de modo que consiga formar um paralelogramo e cole-os na malha quadriculada abaixo.

4. Qual a medida de área de cada paralelogramo? E de cada um dos triângulos?

5. Como você pode escrever uma fórmula para a área do triângulo em termos de *b* e *h*?

✓ **LOSANGO**




D = Diagonal maior
d = Diagonal menor

1. Desenhe na malha quadriculada abaixo um losango qualquer e pinte seu interior. Anote as medidas que utilizou.

Diagonal maior (D):__________ Diagonal menor (d):__________

2. Reproduza, na malha quadriculada ao final das atividades, dois losangos idênticos ao que você desenhou anteriormente, pinte-os de cores diferentes e recorte-os. Em um deles, corte ao longo das diagonais, conforme indicado na figura.

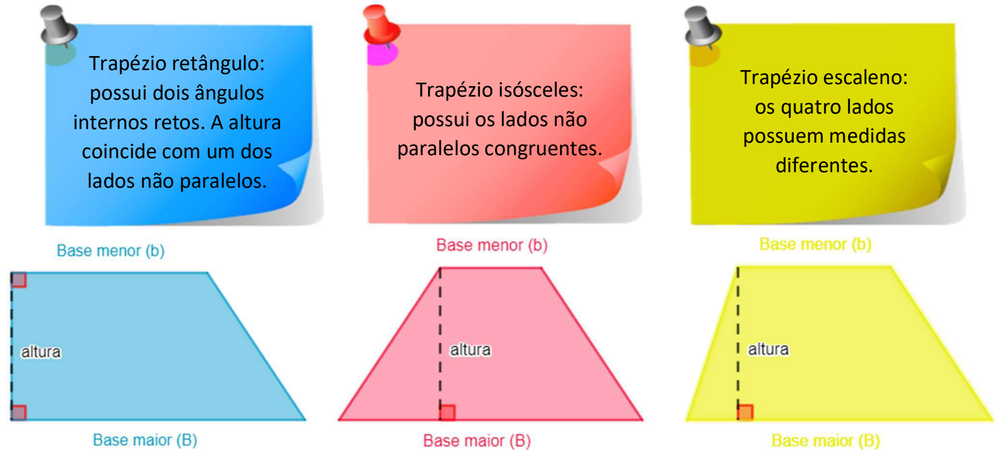
3. Manipule os pedaços de modo que consiga formar um retângulo e cole-o na malha quadriculada abaixo.

4. Qual a medida de área do retângulo formado? E do losango que não foi dividido?

5. Como você pode escrever uma fórmula para a área do losango em termos de *D* e *d*?

✓ **TRAPÉZIO**

Trapézio: quadrilátero com dois lados paralelos, denominados bases, e outros dois lados não paralelos.




1. Desenhe na malha quadriculada abaixo um trapézio de cada tipo dos citados anteriormente, depois, pinte seu interior.

Anote as medidas que você utilizou.

**Trapézio retângulo**

Base menor (b):______

Base maior (B):______

Altura (h):______

**Trapézio isósceles**

Base menor (b):______

Base maior (B):______

Altura (h):______

**Trapézio escaleno**

Base menor (b):______

Base maior (B):______

Altura (h):______

2. Reproduza, na malha quadriculada ao final das atividades, dois trapézios idênticos a cada um que você desenhou anteriormente, pinte-os de cores diferentes e recorte-os.

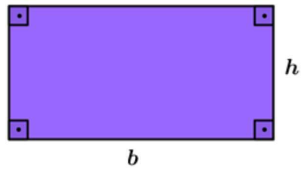
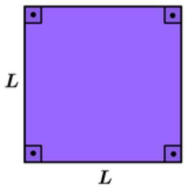
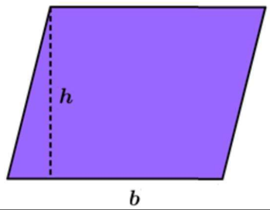
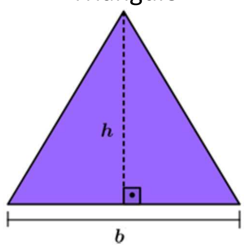
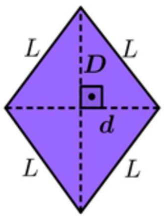
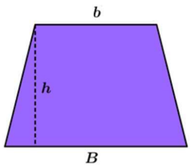
3. Manipule cada par de trapézios congruentes de modo que consiga formar um paralelogramo e cole-os na malha quadriculada abaixo.

4. Qual a medida de área de cada paralelogramo? E de cada um dos trapézios?

5. O que você observa com relação à medida da base dos paralelogramos formados e as medidas das bases dos trapézios?

6. Como você pode escrever uma fórmula para a área do trapézio em termos de *B, b* e *h*?

**ÁREAS DE ALGUNS POLÍGONOS**

| Figura | Elementos | Fórmula da Área |
|---|---|---|
| Retângulo  | $b$: base<br>$h$: altura | $A = B.h$ |
| Quadrado  | | |
| Paralelogramo  | | |
| Triângulo  | | |
| Losango  | | |
| Trapézio  | | |

# APÊNDICE C – FOLHA DE ATIVIDADES 02

**Universidade Federal de São Carlos**
**Programa de Mestrado Profissional em Matemática Rede Nacional**

**Escola Municipal Professor Júlio Bonazzi**

Nome:________________________________________Turma:_____ Data:________

**FOLHA DE ATIVIDADES 02 – Questão 13 – OBMEP 2007 – Nível 02**

**Tangram** é um antigo jogo chinês, que consiste na formação de figuras e desenhos por meio de 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo). Acredita-se que ele surgiu na China durante a dinastia Song (960-1279 d.C.). Na época, ele era visto como um dos mais famosos testes utilizados para estudar a inteligência humana. Existem várias lendas sobre sua criação. Uma delas diz que um sábio chinês deveria levar ao Imperador uma placa de jade, mas, no meio do caminho, o sábio tropeçou e deixou cair a placa que se partiu em sete pedaços geometricamente perfeitos. Eis que o sábio tentou remendar e, a cada tentativa, surgia uma nova figura.


Outra lenda conta que um jovem chinês despedia-se de seu mestre, pois iniciara uma grande viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou-lhe um espelho de forma quadrada e disse:

- Com esse espelho você registrará tudo que vir durante a viagem, para mostrar-me na volta.

O discípulo, surpreso, indagou:

- Mas mestre, como, com um simples espelho, poderei eu lhe mostrar tudo o que encontrar durante a viagem?

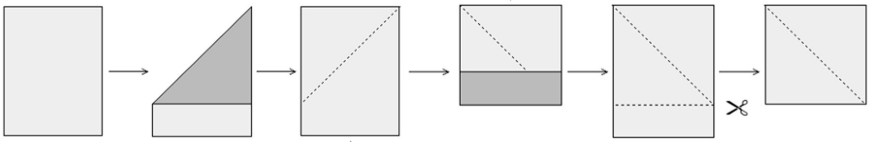
No momento em que fazia esta pergunta, o espelho caiu-lhe das mãos, quebrando-se em sete peças.

Então o mestre disse:

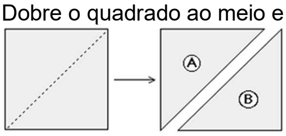
- Agora você poderá, com essas sete peças, construir figuras para ilustrar o que viu durante a viagem.

1. Construindo seu próprio tangram. Um vídeo com o passo a passo da construção pode ser visto no link a seguir ou no QR code ao lado. [https://youtu.be/7mtf0NVWPFU](https://youtu.be/7mtf0NVWPFU)

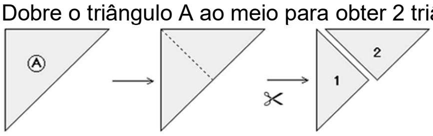
Com uma folha de papel A4, obtenha um quadrado, através das seguintes dobras e recorte.



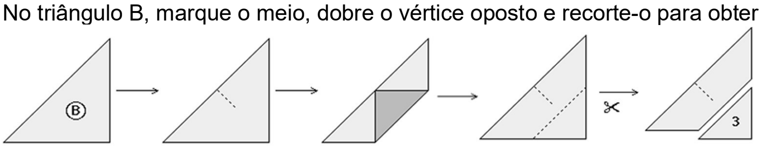
Dobre o quadrado ao meio e recorte-o para obter 2 triângulos (A e B).



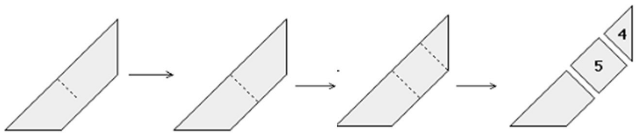

Dobre o triângulo A ao meio para obter 2 triângulos menores (1 e 2).

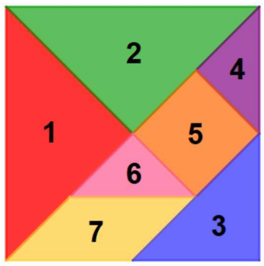



No triângulo B, marque o meio, dobre o vértice oposto e recorte-o para obter o triângulo 3.

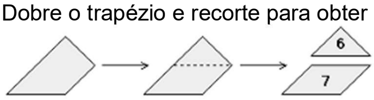



Dobre o trapézio ao meio, volte a dobrar uma das partes e recorte-o de modo a obter o triângulo 4 e o quadrado 5.

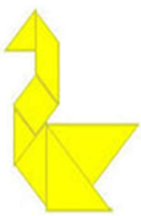



Dobre o trapézio e recorte para obter o triângulo 6 e o paralelogramo 7.



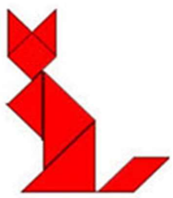

Volte a juntar as figuras do tangram e construa o quadrado novamente. Após, tente montar algumas das figuras a seguir.



Cisne

Homem dançando

Chinês andando



Gato

**DESAFIOS**

Para facilitar a identificação das peças nas atividades a seguir, vamos usar a seguinte denominação:

| Triângulo grande | Triângulo médio | Triângulo pequeno | Quadrado | Paralelogramo |
|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |
| Tg | Tm | Tp | Q | P |

1. Coloque as peças umas sobre as outras e complete as equivalências:

   1 Tg = _____ Tp    1 Tm = _____ Tp    1 Q = _____Tp    1 P = _____ Tp

2. Para formar o quadrado maior do tangran são necessárias quantas peças:

   Tg:______    Tm: ______    Tp: ______    Q: ______    P: ______

3. Considere um tangram construído a partir de um quadrado com medida de lado de 8cm. Qual a medida de área da figura toda?

4. Complete a tabela:

| Peça | Área | Fração do total | Porcentagem do total |
|---|---|---|---|
| Tg | | | |
| Tm | | | |
| Tp | | | |
| Q | | | |
| P | | | |

### APLIQUE SEUS CONHECIMENTOS

13. A figura I mostra um quadrado de 40 cm² cortado em cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo, formando as sete peças do jogo Tangran. Com elas é possível formar a figura II, que tem um buraco sombreado. Qual é a área do buraco?

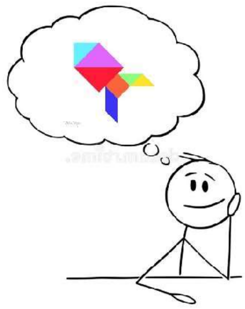
A) 5 cm²
B) 10 cm²
C) 15 cm²
D) 20 cm²
E) 25 cm²

Figura I

Figura II

SOLTE SUA IMAGINAÇÃO

Crie uma figura com o seu tangram e cole-a no espaço abaixo.



# APÊNDICE D – FOLHA DE ATIVIDADES 03

**Universidade Federal de São Carlos**
**Programa de Mestrado Profissional em Matemática Rede Nacional**

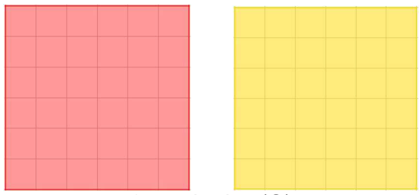
PROFMAT

**Escola Municipal Professor Júlio Bonazzi**

Nome:_______________________________________________Turma:_____ Data:________

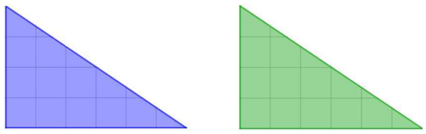
**FOLHA DE ATIVIDADES 03 – Questão 07 – OBMEP 2015 – Nível 02**

1. Recorte as peças da última folha, nela deve conter:

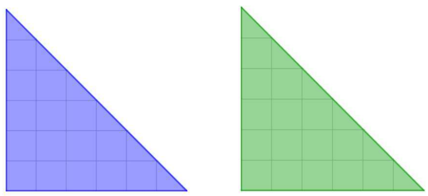


2 quadrados (Q)

2 triângulos pequenos (TP)



2 triângulos médios (TM)



2 triângulos grandes (TG)

2. Utilizando as peças disponíveis no material, monte um polígono de 6 lados, conforme a figura abaixo.

3. Quantas unidades você precisou deslocar o quadrado na vertical? ______________________

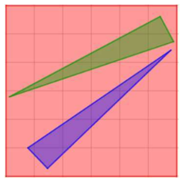
4. Quais as medidas de área das peças utilizadas:

   Área de cada quadrado:______

   Área dos dois triângulos:______

   Área da figura toda:______

5. Coloque os dois triângulos sobre um dos quadrados e tente calcular que fração a área dos dois triângulos pequenos representa em relação à área do quadrado.



$$\text{Área}_{2TP} = \text{—}\ \text{Área}_{Q}$$

6. Monte o polígono indicado abaixo e calcule o que se pede.

$$deslocamento\ vertical\ (d) = \_\_\_\_unidades$$

$$\text{Área}_{2TM} = \_\_\_\_ \qquad \text{Área}_{total} = \_\_\_\_\_$$

7. Coloque os dois triângulos médios sobre um dos quadrados. A área dos triângulos médios representa que fração da área de um quadrado?

$$\text{Área}_{2TM} = \text{—}\ \text{Área}_{Q}$$

8. Repita os passos 6 e 7 para os triângulos grandes.

$$deslocamento\ vertical\ (d) = \_\_\_\_unidades$$

$$\text{Área}_{2TG} = \_\_\_\_\_ \qquad \text{Área}_{total} = \_\_\_\_\_$$

$$\text{Área}_{2TG} = \text{—}\ \text{Área}_{Q}$$

9. Complete a tabela abaixo com os resultados obtidos:

| 1º polígono | | | |
|---|---|---|---|
| | Área 1xQ | Área 2xTP | Área total |
| Unidades | 36 | 6 | $2 \cdot 36 + 6 = 78$ |
| Fração | 1 | $\frac{1}{6}$ | $2 \cdot 1 + \frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$ |

| 2º polígono | | | |
|---|---|---|---|
| | Área 1xQ | Área 2xTM | Área total |
| Unidades | | | |
| Fração | | | |

| 3º polígono | | | |
|---|---|---|---|
| | Área 1xQ | Área 2xTG | Área total |
| Unidades | | | |
| Fração | | | |

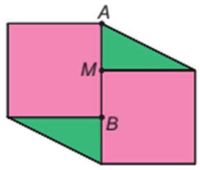
10. O que você observa com relação a quantidade de unidades que o quadrado se desloca na vertical e o numerador da fração da área que os triângulos representam do quadrado?

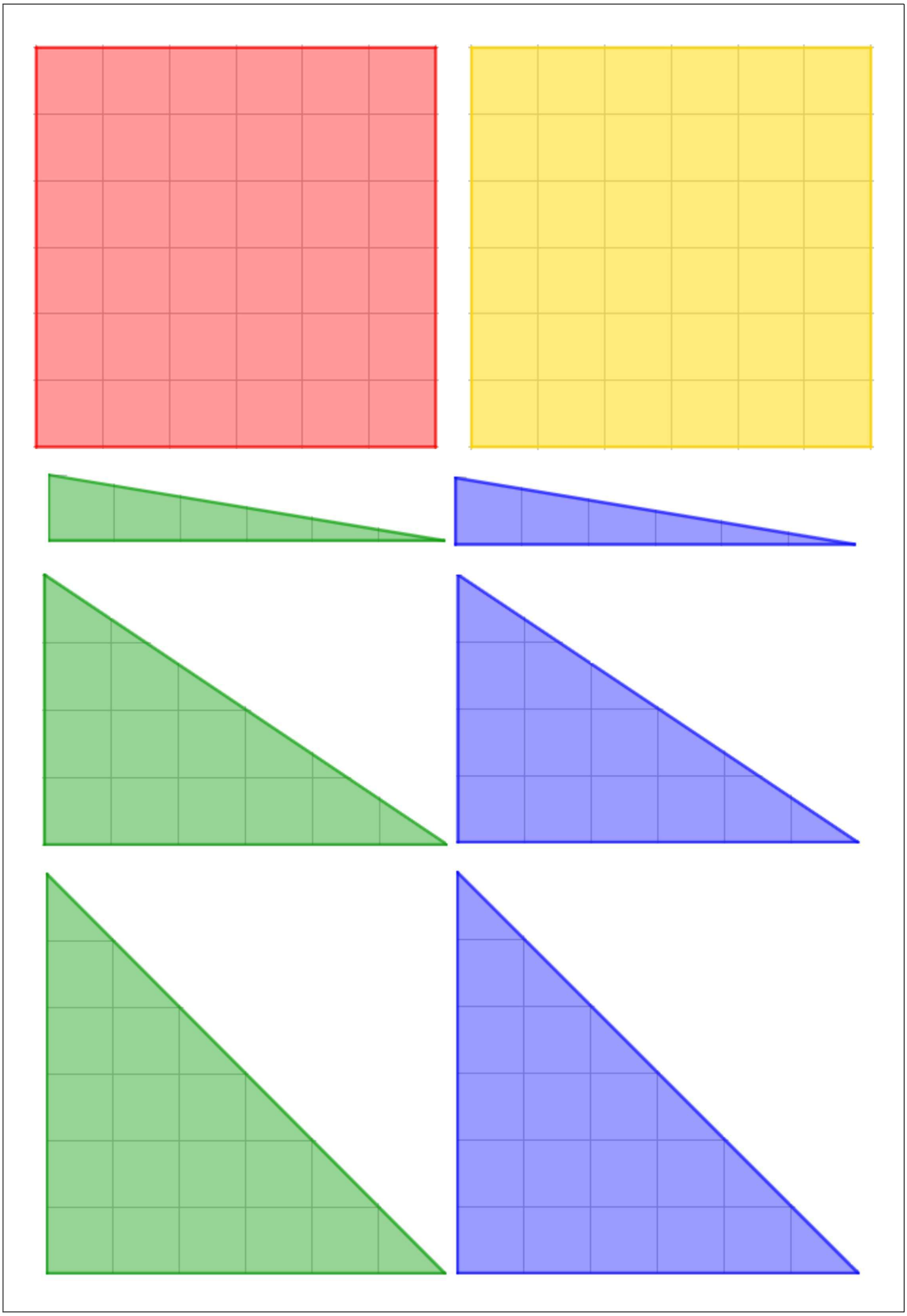
11. Seja $\ell$ a medida do lado do quadrado e $d$ o deslocamento vertical de um dos quadrados. Escreva uma fórmula para a área da figura final em função de $\ell$ e $d$.

## APLIQUE SEUS CONHECIMENTOS

**7.** A figura abaixo é formada por dois quadrados de lado 6 cm e dois triângulos. Se *M* é o ponto médio de *AB*, qual é a área total da figura?

A) 90 $cm^2$
B) 96 $cm^2$
C) 100 $cm^2$
D) 108 $cm^2$
E) 120 $cm^2$





# APÊNDICE E – FOLHA DE ATIVIDADES 04

**Universidade Federal de São Carlos**
**Programa de Mestrado Profissional em Matemática Rede Nacional**

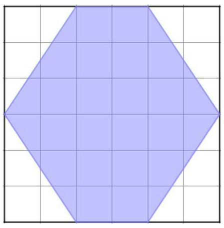
**Escola Municipal Professor Júlio Bonazzi**

Nome:_______________________________________________Turma:_____ Data:________

**FOLHA DE ATIVIDADES 04 – Questões OBMEP 04/2011, 13/2010 e 04/2005 – Nível 02**

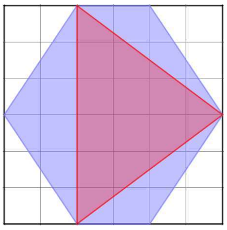
Considere que em todas as malhas quadriculadas das atividades cada quadradinho possui 1 cm² de área.

1. Na malha quadriculada abaixo, temos o desenho de um hexágono dentro de um quadrado.



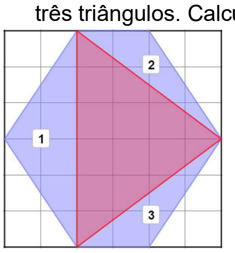
- Qual a área do quadrado?___________
- Qual a área do hexágono?___________
- A área do hexágono corresponde a que fração da área do quadrado?________

2. Um triângulo foi desenhado no interior do hexágono.



- Qual a área do triângulo?___________
- A área do triângulo corresponde a que fração da área do quadrado?________

3. No novo desenho, ficaram determinados outros três triângulos. Calcule a área de cada um deles.

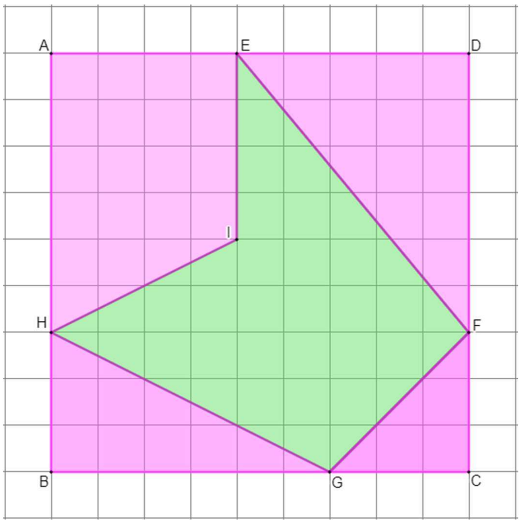



Área triângulo 1:_________

Área triângulo 2:_________

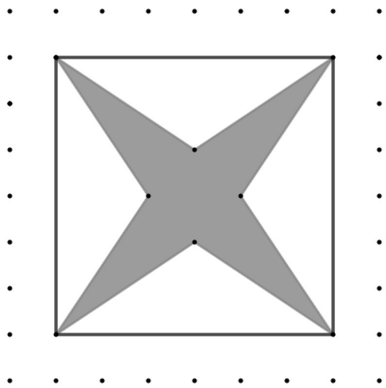
Área triângulo 3:_________

4. Calcule a área do polígono EFGHI desenhado dentro do quadrado ABCD.




Registre a estratégia utilizada.

5. Na figura abaixo, calcule a razão entre a área cinza e a área do quadrado.

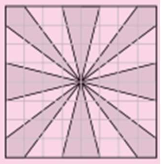


- Desenhe retas para formar uma malha quadriculada.
- Área do quadrado:__________
- Área cinza:________________
- Razão entre a área cinza e a área do quadrado:___________

Registre a estratégia utilizada.

**APLIQUE SEUS CONHECIMENTOS**

**4.** Na figura, os lados do quadrado foram divididos em oito partes iguais. Qual é a razão entre a área cinza e a área desse quadrado?



A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{5}{8}$

D) $\frac{3}{4}$

E) 1

**13.** A figura mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{9}{16}$

## QUESTÃO 4

O quadrado *ABCD* da figura está dividido em 16 quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado *EFGH*.

**A)** A área do quadrado *EFGH* corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?
**B)** Se o quadrado *ABCD* tem 80 cm² de área, qual é o lado do quadrado sombreado?