SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CLAUDIA GALVÃO DA SILVA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE GEOMETRIA PARA AS OLIMPÍADAS BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP.

ORIENTADOR: PROF. DR. VALCIR JOÃO DA CUNHA FARIAS

BELÉM-PA
2013

CLAUDIA GALVÃO DA SILVA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE GEOMETRIA PARA AS OLIMPÍADAS BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Profissional de Matemática, da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática**.**

Orientador: PROF. DR. VALCIR JOÃO DA CUNHA FARIAS

BELÉM-PA

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Sistemas de Bibliotecas da UFPA

Silva, Cláudia Galvão, 1970 –
Resolução de problemas sobre Geometria para as Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP. / Cláudia Galvão da Silva. – 2013.

Orientador: Valcir João da Cunha Farias.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belem, 2013.

1. Geometria. 2. Olimpíadas- Matemática-Brasil. 3. Raciocínio. 4. Métodos Iterativos (Matemática). I. Título.

CDD 22. ed. 516

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CLAUDIA GALVÃO DA SILVA

Resolução de problemas sobre Geometria para as Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Profissional de Matemática, da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 28/ 06 / 2013
Conceito: APROVADO

Banca examinadora

PROF. DR. VALCIR JOÃO DA CUNHA FARIAS – ORIENTADOR - UFPA

PROF. DR. JOÃO PABLO PINHEIRO DA SILVA– MEMBRO - UFPA

PROF. DR. ARTUR DA COSTA ALMEIDA – MEMBRO – UFPA

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a vocês que sempre me fizeram acreditar na realização dos meus sonhos e trabalharam muito para que eu pudesse realizá-los, meus pais, Ramiro e Célia.

E em especial à você Fabiane Silva, minha afilhada, que é meu exemplo de vitória nos piores momentos.

AGRADECIMENTO

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada.

Dedico esta, bem como todas as minhas demais conquistas, aos meus amados pais (Ramiro e Célia), minha filha e irmãos (Renata, Márcio e Suely) e meus dois preciosos sobrinhos (Bruna e Paulinho)

Agradeço também a todos os professores que me acompanharam durante a fase da minha vida, em especial ao professor Valcir Cunha, responsáveis pela realização deste trabalho e aos meus amigos Mário, Augusto, Gilvan, Gilmar e Ronildo.

RESUMO

Pretendo fornecer neste trabalho a oportunidade de mostrar minha forma de resolução das questões sobre Geometria da **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas** (OBMEP), minha compreensão e aplicação dos conteúdos matemáticos. Os métodos numéricos por si só representam uma faceta essencial no raciocínio analítico e na compreensão das aplicações tecnológicas que estão na base da vida escolar. O domínio da parte teórico por detrás dos métodos torna-se uma competência importante a quando da recriação de soluções e inovação na resolução de novos problemas.

Deve-se desenvolver uma compreensão intuitiva das questões e do raciocínio da Matemática, proporcionando-lhe ao mesmo tempo treino na resolução de problemas, de forma que seja capaz de identificar um determinado problema, a análise e o resolva recorrendo aos conhecimentos matemáticos. Com este trabalho procuro transmitir os conhecimentos da geometria, fornecendo-lhes as resoluções no meu ponto de vista, minha análise e interpretação das questões.

Palavras-chave: Geometria, Métodos, Raciocínio.

ABSTRACT

I intend to give this work a chance to show my way of resolving issues on Geometry Mathematics Olympiad Public Schools (OBMEP), my understanding and application of mathematical content. Numerical methods alone represent an essential facet in analytical reasoning and understanding of technological applications that are the basis of school life. The domain of the theory behind the methods becomes an important competency to when recreating solutions and innovation in solving new problems.

Must develop an intuitive understanding of the issues and reasoning of mathematics, providing you while training in problem solving, in order to be able to identify a problem, analyze and solve using the mathematical knowledge. This work try to convey the knowledge of geometry, providing them with the resolutions in my point of view, my analysis and interpretation of the questions.

Key-words: Geometry, Methods, Wits.

SUMÁRIO

Introdução

Sabemos que a matemática como disciplina no currículo escolar da educação básica tanto pública como particular no Brasil é considerada mais difícil. A matemática desenvolvida nesse texto vem auxiliar o aprendizado do aluno que tem como objetivo a preparação para Olimpíadas Brasileira Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.

As provas da OBMEP são divididas em três níveis, a do nível 1 direcionada aos alunos da 5ª e 6ª séries do ensino fundamental, a do nível 2 é direcionada para os alunos da 7ª e 8ª séries do ensino fundamental, já a do nível 3 é para os alunos do 1º,2º e 3º ano do ensino médio.

Iniciada em 2005, a OBMEP vem crescendo a cada ano, criando um ambiente estimulante para o estudo da Matemática entre alunos e professores de todo o país. Em 2012, cerca de 19,1 milhões de alunos se inscreveram na competição e 99,4% dos municípios brasileiros estiveram representados. Os sucessivos recordes de participação fazem da OBMEP a maior Olimpíada de Matemática do mundo.

Os assuntos abordados na OBMEP são divididos em três temas: Aritmética, Análise Combinatória e Geometria. E é sobre Geometria que irei abordar, através da resolução de problemas, divididos cada um dos temas em três níveis como é feito na OBMEP.

Resolvi dez questões para cada nível do tema Geometria. Tentei adotar uma linguagem que permite trabalhar o raciocínio lógico, e evitando o máximo utilizar fórmulas prontas.

Capítulo 1 – Geometria

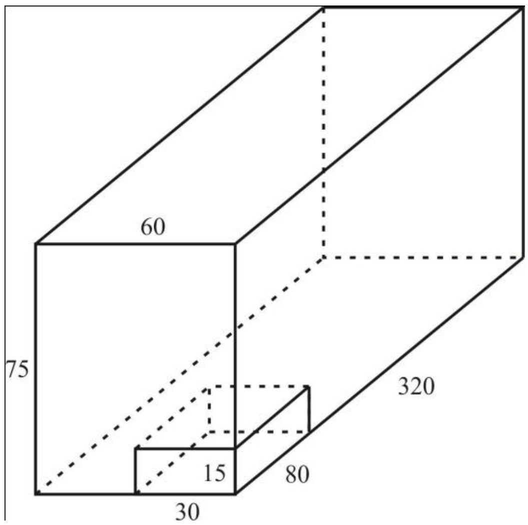
As questões de matemática da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, desde seu início, tem procurado avaliar e contribuir no conhecimento matemático do aluno nos aspectos básicos dessa disciplina. Não podemos considerar suficiente o domínio de técnicas e conteúdos isolados, bem como a habilidade para resolver exercícios; antes, é dada ênfase à resolução de problemas que existem a compreensão de uma proposta, em forma contextualizada com tabelas e gráficos, a transformação para a linguagem matemática, a aplicação de todo um conhecimento adquirido de resolução e uma clara compreensão do resultado para um resultado preciso.

Questões de Geometria da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Nível 1

Questão 1

Um bloco retangular de madeira tem 320 cm de comprimento, 60 cm de largura e 75 cm de altura. O bloco é cortado várias vezes, com cortes paralelos às suas faces, de modo a subdividi-lo em blocos também retangulares de 80 cm de comprimento por 30 cm de largura por 15 cm de altura.



a) Quantas peças foram obtidas?

b) Um metro cúbico dessa madeira pesa aproximadamente 900 quilogramas. Qual é o peso de cada uma dessas peças?

Resolução:

a) Para subdividir o bloco maior em *x* blocos menores podemos obter a seguinte relação entre seus volumes

$V = x \cdot v$

Substituindo os valores na fórmula, temos:

$$
\begin{aligned}
&320 \cdot 60 \cdot 75 = x \cdot 80 \cdot 30 \cdot 15 \\
&1440000 = 36000 \cdot x \\
&x = 40
\end{aligned}
$$

Resposta: 40 peças.

b) Calculando o volume da peça em metros cúbicos:

$$
\begin{aligned}
&v = 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,15 \\
&v = 0,036
\end{aligned}
$$

Aplicando regra de três:

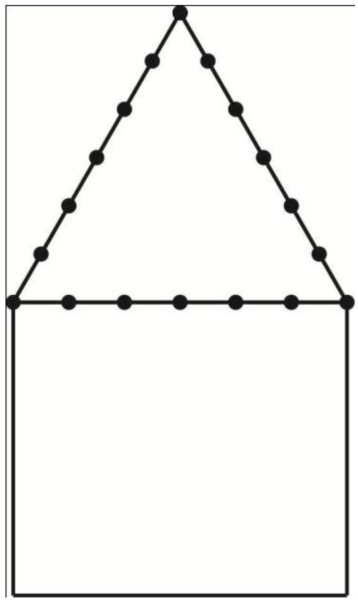
$$
\begin{array}{cc}
\text{volume}(\text{m}^3) & \text{peso(kg)} \\
1 & 900 \\
0,036 & y
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&y = 900 \cdot 0,036 \\
&y = 32,4
\end{aligned}
$$

Resposta: 32,4 quilogramas.

Questão 2

A figura a seguir é formada por um triângulo e um retângulo usando-se 60 palitos iguais. Para cada lado do triângulo são necessários 6 palitos. Se cada palito tem 5 cm de comprimento, qual é a área do retângulo da figura?



(A) 120 cm^2

(B) 540 cm^2

(C) 1350 cm^2

(D) 2700 cm^2

(E) 5400 cm^2

Resolução:

O total de palitos para construir o retângulo é obtido através da expressão 60 – 12 = 48.

O retângulo possui 6 palitos na base, logo b = 300 cm

Na altura serão usados 18 palitos, pois $2 \cdot 6 + 2 \cdot 18 = 48$, então h = 90.

Cálculo para área do retângulo:

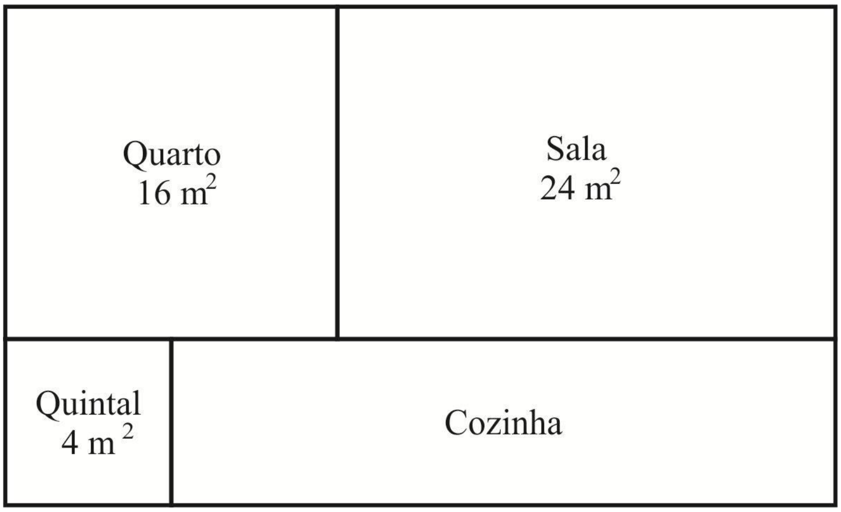
$$S = b \cdot h$$
$$S = 300 \cdot 90$$
$$S = 27000$$

Resposta: (E) 2700 cm^2.

Questão 3

A casa da Rosa

A figura mostra a planta da casa da Rosa. O quarto e o quintal são quadrados. Qual é área da cozinha?



Resolução:

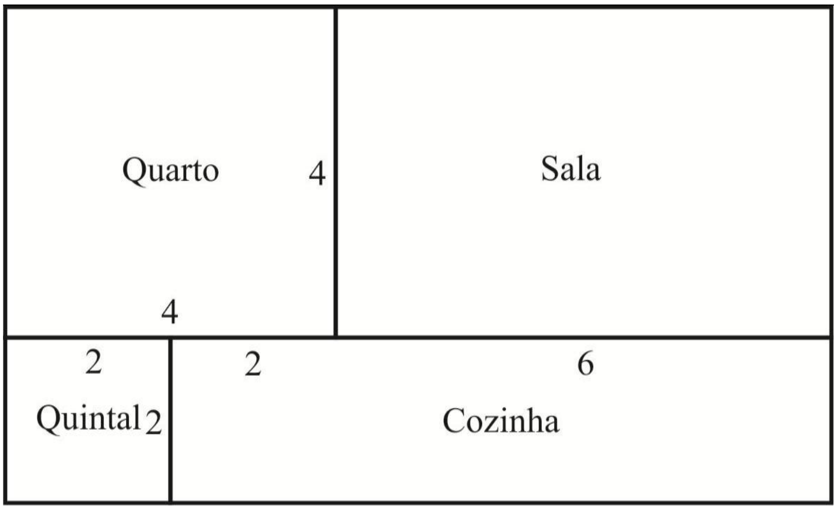
Área de quadrado é $S = l^2$

O quarto tem lado igual a 4 m e o quintal lado igual a 2 m.

Área de retângulo é $S = b \cdot h$, como a altura do retângulo é igual ao lado do quarto, h = 4. Então:

$$S = b \cdot h$$
$$24 = 4 \cdot b$$
$$b = 6$$

A cozinha tem base igual a 8 m e altura 2 m conforme figura.



Assim, $S = b \cdot h = 8 \cdot 2 = 16$

Resposta: 16 m^2.

Questão 4

A brincadeira do quadrado

Um quadrado de 1m de lado foi cortado, com cortes paralelos aos seus lados, em quadradinhos de 1mm de lado. Colocando-se lado a lado os quadradinhos, sem superposição, formou-se um retângulo de 1mm de largura. Qual o comprimento desse retângulo?

Resolução:

Inicialmente 1 m = 1.000 mm.

Serão feitos 1000 cortes na horizontal e 1.000 cortes na vertical. Com cada quadradinho de lado igual a 1 mm. Totalizando 1.000.000 quadradinhos.

Se colocarmos um quadradinho do lado de outro, teremos um retângulo de dimensão $1 \times 1.000.000$

Resposta: 1.000.000 mm

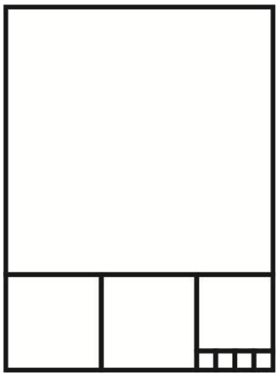
Questão 5

Quadrados dentro de um retângulo

O retângulo da figura está dividido em 8 quadrados. O menor quadrado tem lado 1 cm e o maior 14 cm.

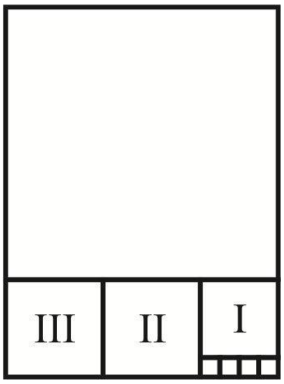
(a) Determine o lado dos outros quadrados.

(b) Qual é o perímetro do retângulo?



Resolução:

a)



Quadrado I. $$\begin{gathered} l = 4 \cdot 1 \\ l = 4 \end{gathered}$$

Quadrados II e III tem lados iguais.

$$l = \frac{14-4}{2} = 5$$

Resposta: 4 cm e 5 cm.

b) O retângulo tem base igual a soma dos lados dos quadrado I, II e III. Isto é 5 + 5 + 4 = 14. A altura igual a soma dos lados dos quadrados III e maior. Ou seja , 5 + 14 = 19

Assim, o perímetro (2*p*) será:

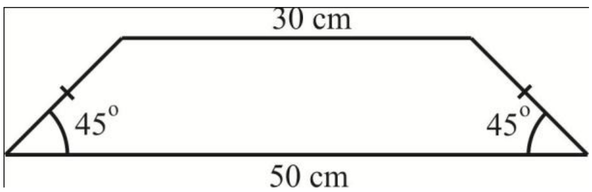
$$2p = 2(b+h)$$
$$2p = 2(14+19)$$
$$2p = 66$$

Resposta: 66 cm.

Questão 6

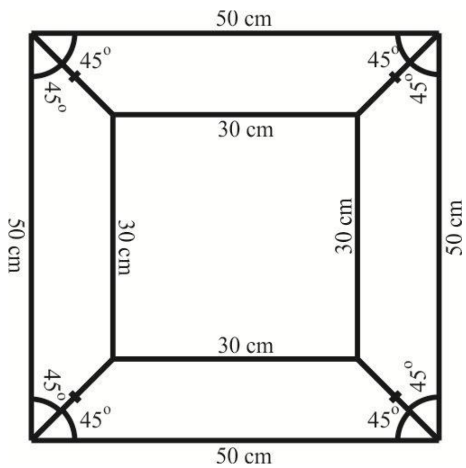
Área de trapézios

Unindo quatro trapézios iguais de bases 30 cm e 50 cm e lados não paralelos iguais, como o da figura, podemos formar um quadrado de área 2500 cm^2, com um "buraco" quadrado no meio. Qual é a área de cada trapézio, em cm^2?



Resolução:

Observando a figura abaixo, temos:



que para calcular a área do trapézio, em função das áreas dos quadrados formados, podemos a seguir equação:

$$S_{Trapézio} = \frac{S_{(Quadrado\ Maior)} - S_{(Quadrado\ Menor)}}{4}$$

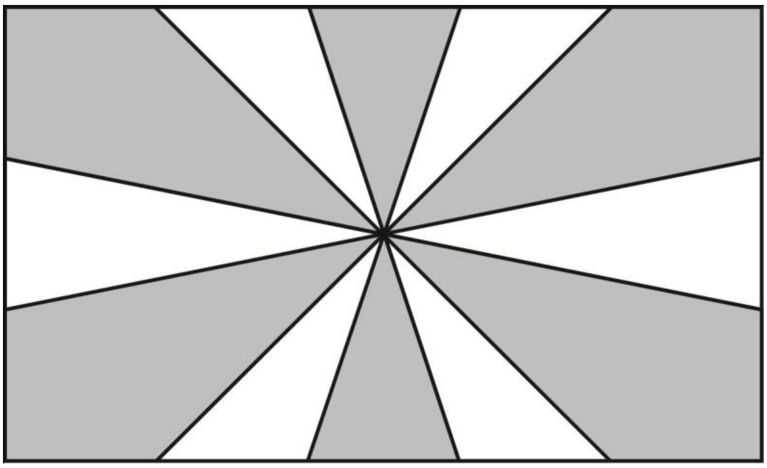
$$S_{Trapézio} = \frac{50^2 - 30^2}{4} = \frac{2500 - 900}{4} = \frac{1600}{4} = 400$$

Resposta: 400.

Questão 7

Bandeira do Tio Mané

O Tio Mané é torcedor doente do Coco da Selva Futebol Clube e resolveu fazer uma bandeira para apoiar seu time no jogo contra o Desportivo Quixajuba. Para isso, comprou um tecido branco retangular com 100 cm de largura e 60 cm de altura. Dividiu dois de seus lados em 5 partes iguais e os outros dois em 3 partes iguais, marcou o centro do retângulo e pintou o tecido da forma indicada na figura a seguir:



Qual é a área do tecido que Tio Mané pintou?

Resolução:

- Área tecido branco retangular (antes da pintura):

$S_{Tecido} = 100 \times 60$
$S_{Tecido} = 6000$

- Área das partes brancas (depois de pintada):

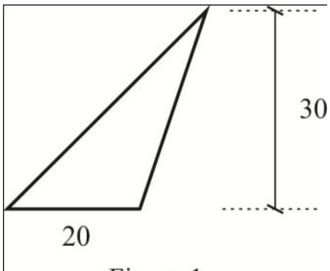


Figura 1

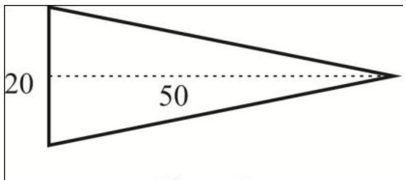


Figura 2

Corresponde a 4 vezes a área da Figura 1 e 2 vezes a área da Figura 2, então:

$$S_{Parte\ branca} = 4 \times \frac{20 \times 30}{2} + 2 \times \frac{20 \times 50}{2}$$
$$S_{Parte\ branca} = 1200 + 1000$$
$$S_{Parte\ branca} = 2200$$

- Área pintada:

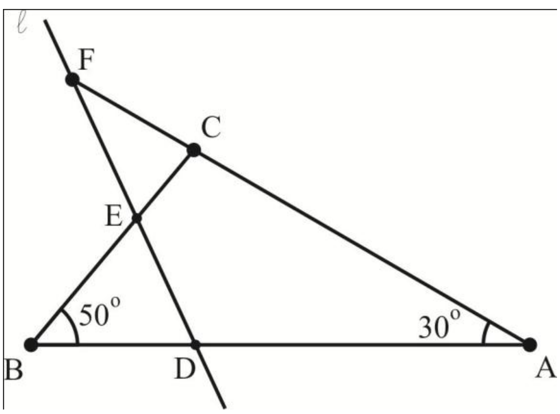
$$S_{Parte\ pintada} = S_{Tecido} - S_{Parte\ branca}$$
$$S_{Parte\ pintada} = 6000 - 2200$$
$$S_{Parte\ pintada} = 3800$$

Resposta: 3800 cm^2.

Questão 8

Triângulo Isósceles

Seja ABC um triângulo com $B\hat{A}C$ = 30º e $A\hat{B}C$ = 50º. A reta ℓ corta os lados AB, BC e o prolongamento de AC em D, E e F, respectivamente.



Se o triângulo BDE é isóscele, quais são as três possíveis medidas para o ângulo $C\hat{F}E$?

Resolução:

Se o triângulo BDE é isóscele, então $B\hat{E}D = B\hat{D}E = 65^o$, visto que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º e $E\hat{D}A = 180^o - 65^o = 115^o$.

Logo,

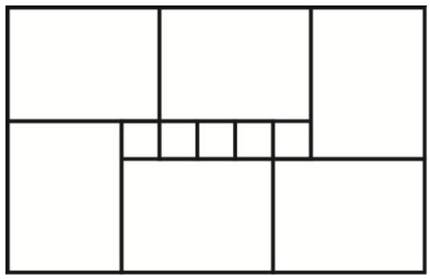
$$C\hat{F}E + C\hat{A}D + A\hat{D}E = 180^o$$
$$C\hat{F}E + 30^o + 115^o = 180^o$$
$$C\hat{F}E = 35^o$$

Resposta: CFE = 35º

Questão 9

Formando um Retângulo

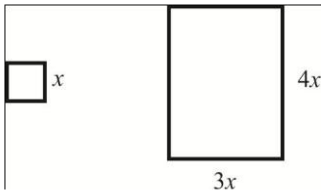
A partir de seis retângulos iguais e cinco quadrados iguais é formado um retângulo de perímetro 324 cm, como mostrado na figura a seguir.



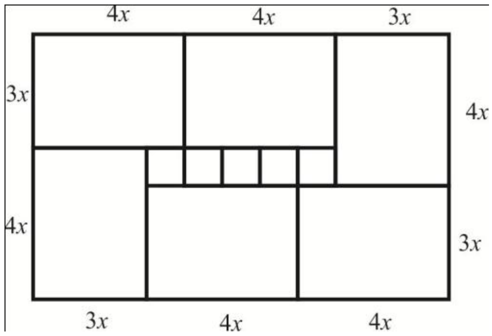
Determine a área do retângulo construído.

Resolução:

Adotando que o lado de cada quadrado é igual a *x*, a base de cada retângulo é 4*x* e a altura é 3*x*.



Observado a figura a seguir, o retângulo construído tem base $b = 11x$ e altura $h = 7x$, logo perímetro igual a $36x$.



Então,

$$36x = 324$$
$$x = 9$$

Assim, $b = 99$ e $h = 63$.

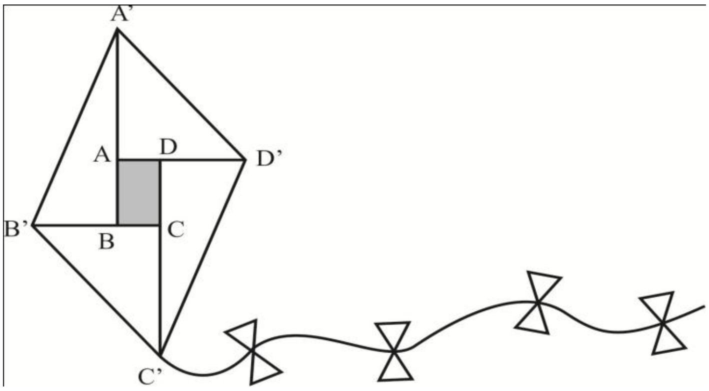
Portanto, $S = b \times h = 99 \times 63 = 6237$

Resposta: 6237 cm^2

Questão 10

Construindo uma Pipa

Para construir a pipa de papel representada na figura, Eduardo começou por pintar um retângulo ABCD numa folha de papel. Em seguida, prolongou cada um dos lados do retângulo triplicando o seu comprimento e obteve o quadrilátero A'B'C'D'.

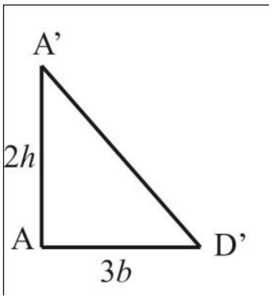


Sabendo que a área do retângulo ABCD é 200 cm^2, qual é a área da pipa construída por Eduardo?

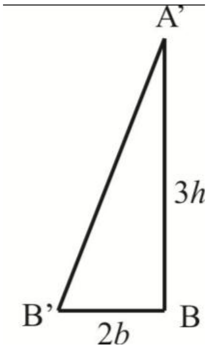
Resolução:

Considerando o retângulo ABCD com base *b* e altura *h*. Logo, $bh = 200$

$\Delta ABB' = \Delta C'DD'$ e $\Delta B'CC' = \Delta A'AD'$



$$S_{\Delta A'AD'} = \frac{3b \times 2h}{2} = 3bh$$



$$S_{\Delta ABB'} = \frac{2b \times 3h}{2} = 3bh$$

Assim,

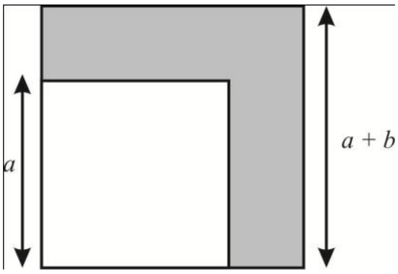
$$S_{Pipa} = 4 \times 3bh = 12 \times bh = 12 \times 200$$
$$S_{Pipa} = 2400$$

Resposta: 2400 cm^2

Nível 2

Questão 1

Na figura abaixo temos dois quadrados. O maior tem lado $a + b$ e o menor lado a. Qual é a área da região em cinza?



(A) b (B) $a + b$ (C) $a^2 + 2ab$ (D) b^2 (E) $2ab + b^2$

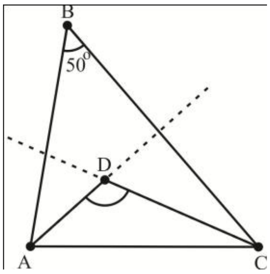
Resolução:

$$S = S_{Quadrado\ Maior} - S_{Quadrado\ Menor}$$
$$S = (a+b)^2 - a^2$$
$$S = \cancel{a^2} + 2ab + b^2 - \cancel{a^2}$$
$$S = 2ab + b^2$$

Resposta: (E) 2*ab* + *b*²

Questão 2

Na figura temos o $\hat{B} = 50^o$, AD e CD são as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ respectivamente. Qual a medida do ângulo $A\hat{D}C$?



(A) 90° (B) 100° (C) 115° (D) 122,5° (E) 125°

Resolução:

Observando o ΔABC, temos:

$\hat{A} + \hat{C} + \hat{B} = 180^o$

$\hat{A} + \hat{C} = 180^o - 50^o$

$\hat{A} + \hat{C} = 130^o$

Observando o ΔACD, e sabendo que AD e CD são, respectivamente, as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$, temos:

$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} + \hat{D} = 180^o$$

$$\hat{D} = 180^o - \left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right)$$

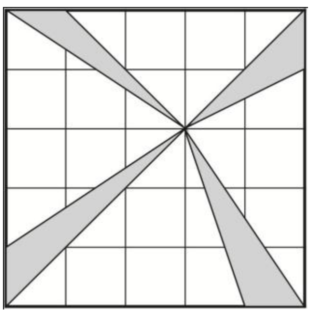
$$\hat{D} = 180^o - \left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}\right) = 180^o - \frac{130}{2} = 180^o - 65^o$$

$$\hat{D} = 115^o$$

Resposta: (C) 115°

Questão 3

A figura ao lado mostra uma grade formada por quadrados de lado 1cm . Qual é a razão entre a área sombreada e a área não sombreada?

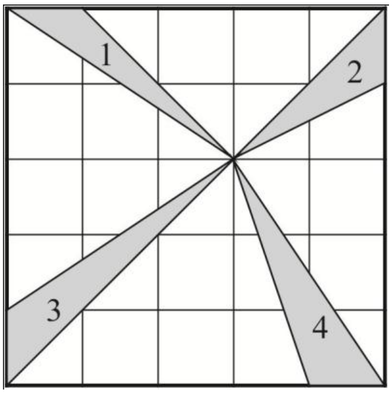


(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{5}$ (E) $\frac{2}{7}$

Resolução:

Área do quadrado: S = 25 cm^2.

Observando a figura, podemos calcular a área sombreada da seguinte forma:



- Triângulo 1: b = 1, h = 2

$$S_1 = \frac{1\times 2}{2} = 1$$

- Triângulo 2: b = 1, h = 2

$$S_2 = \frac{1\times 2}{2} = 1$$

- Triângulo 3: b = 1, h = 3

$$S_3 = \frac{1\times 3}{2} = \frac{3}{2}$$

- Triângulo 4: b = 1, h = 3

$$S_4 = \frac{1\times 3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_{Sombreada} = 1 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$

$$S_{Sombreada} = 5$$

Área não-sombreada: $S_{Não-sombreada} = 25 - 5 = 20$

$$\frac{S_{Sombreada}}{S_{Não-sombreda}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Resposta: (A) 1/4

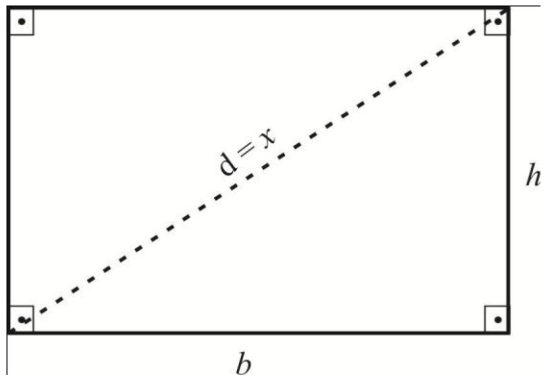
Questão 4

O perímetro de um retângulo é 100 cm e a diagonal mede x cm. Qual é a área do retângulo em função de x?

(A) $625 - x^2$ (B) $625 - x^2/2$ (C) $1250 - x^2/2$

(D) $250 - x^2/2$ (E) $2500 - x^2/2$

Resolução:

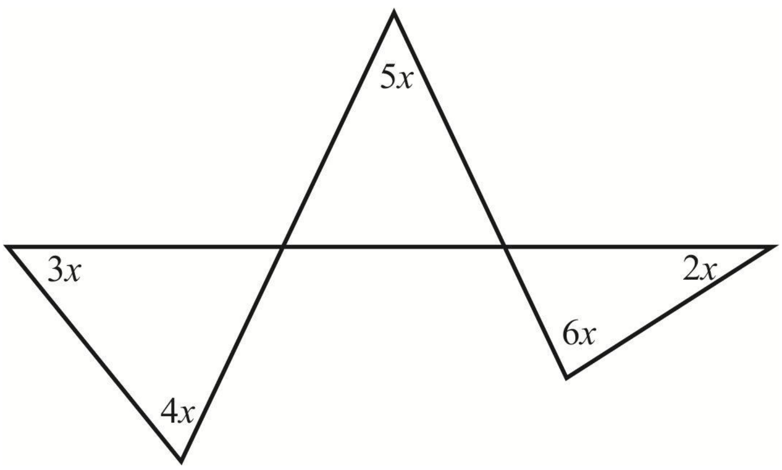


$$P_{retângulo} = 100 \qquad d_{retângulo} = \sqrt{b^2 + h^2}$$
$$2(b+h) = 100 \qquad x^2 = b^2 + h^2$$
$$b + h = 50$$
$$(b+h)^2 = 50^2$$
$$b^2 + 2bh + h^2 = 2500$$
$$2bh = 2500 - (b^2 + h^2)$$
$$2S_{retângulo} = 2500 - x^2$$
$$S_{retângulo} = 1250 - \frac{x^2}{2}$$

Resposta: (C) 1250 – x^2/2

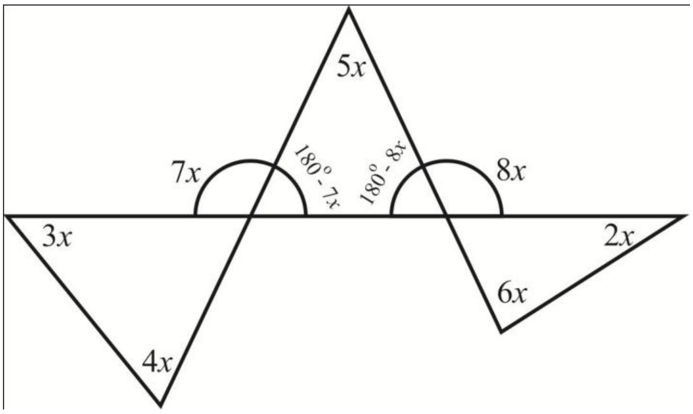
Questão 5

Na figura estão indicadas em graus as medidas de alguns ângulos em função de *x*. Quanto vale *x*?



(A) 6° (B) 12° (C) 18° (D) 20° (E) 24º

Resolução:

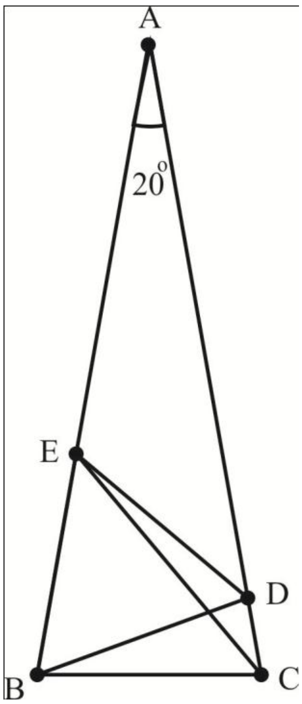


$$180^o - 7x + 5x + 180^o - 8x = 180^o$$
$$-7x + 5x - 8x = -180^o$$
$$-10x = -180^o$$
$$x = 18^o$$

Resposta: (C) 18°

Questão 6

Na figura o triângulo ABC é isósceles, o $B\hat{A}C = 20^o$ = 20 e BC = BD = BE.



Determine a medida do ângulo $B\hat{D}E$.

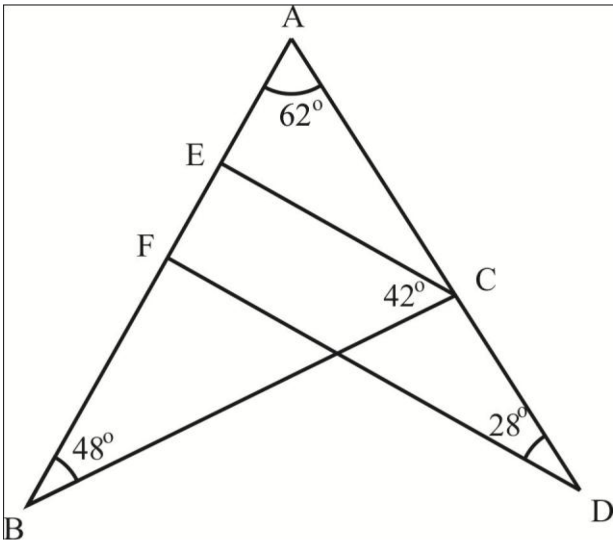
Resolução:

Observando o triângulo isósceles ABC

$$B\hat{A}C + E\hat{B}C + B\hat{C}D = 180^o$$
$$E\hat{B}C + B\hat{C}D = 180^o - 20^o$$
$$E\hat{B}C + B\hat{C}D = 160^o$$
$$E\hat{B}C = B\hat{C}D$$
$$E\hat{B}C = B\hat{C}D = 80^o$$

Questão 7

Na figura, as retas FD e EC são paralelas?



Resolução:

As retas EC e FD são paralelas se $A\hat{E}C = A\hat{F}D$, então:

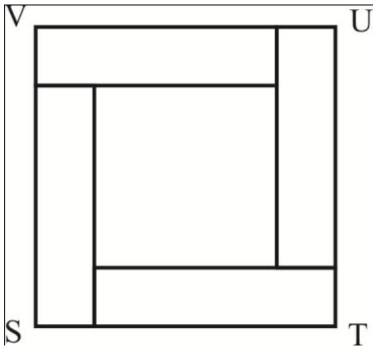
Observando o triângulo AFC, temos que $A\hat{F}D = 90^o \left(A\hat{F}D + 62^o + 28^o = 180^o \right)$

Observando o triângulo BEC, temos que $B\hat{E}C = 90^o \left(B\hat{E}C + 48^o + 42^o = 180^o \right)$ e $B\hat{E}C = A\hat{E}C = 90^o$.

Portanto, $A\hat{E}C = A\hat{F}D$, logo EC e FD são paralelas.

Questão 8

O quadrado STUV é formado de um quadrado limitado por 4 retângulos iguais. O perímetro de cada retângulo é 40 cm. Qual é a área, em cm^2, do quadrado STUV?



(A) 400 (B) 200 (C) 160 (D) 100 (E) 80

Resolução:

O perímetro de retângulo é 40, então $2b+2h=40$, logo $b+h=20$.

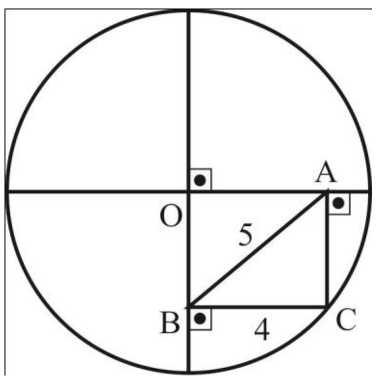
Área de quadrado é $S_{quadrado}=(lado)^2$, mas *lado* = *b* + *h*.

Então: $(b+h)^2=20^2=400$.

Resposta: (A) 400

Questão 9

Na figura, O é o centro do círculo e AB = 5 cm. Qual é o diâmetro desse círculo?



Resolução:

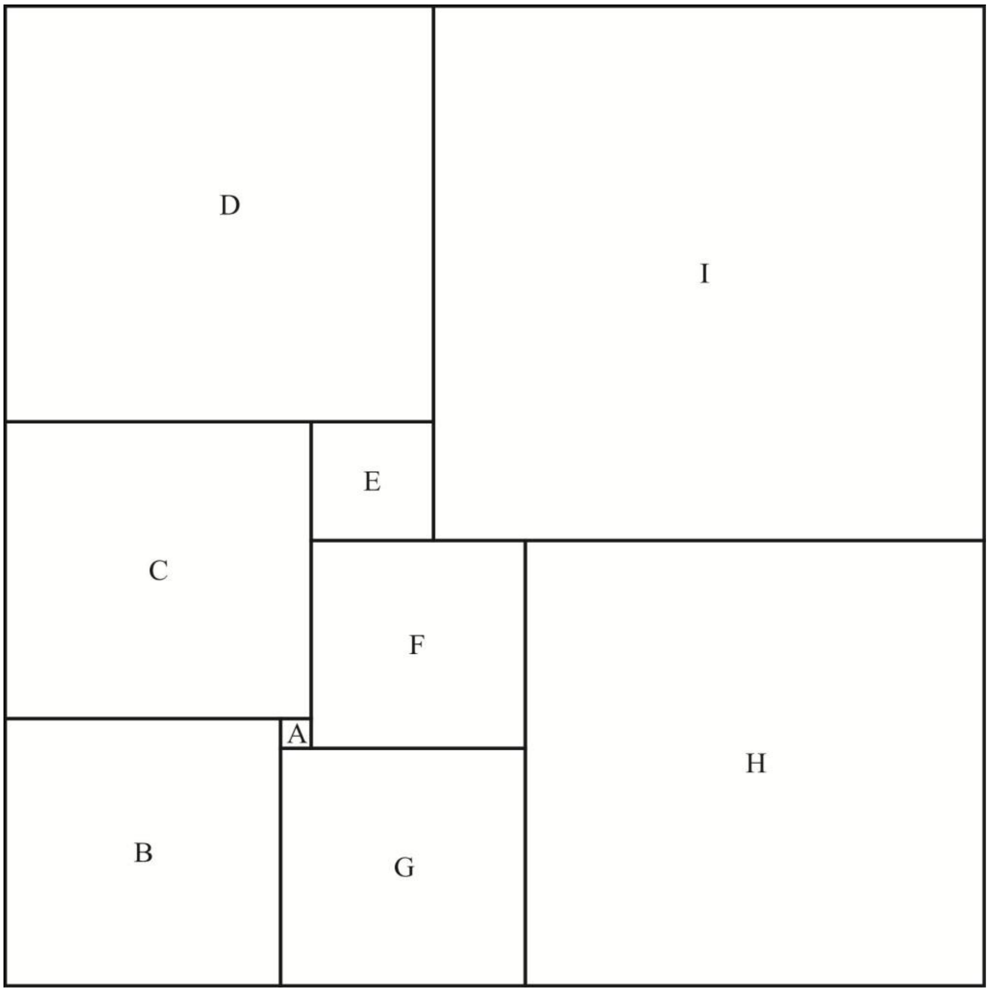
Se observarmos a figura, temos um retângulo AOBC de diagonal igual a 5cm e o raio do círculo é igual a diagonal, logo raio igual a 5 cm.

Diâmetro de círculo é o dobro do raio, então diâmetro igual a 10 cm.

Resposta: 10 cm.

Questão 10

Na figura mostra nove quadrados. A área do quadrado A é $1cm^2$ e do quadrado B é $81cm^2$. Qual a área do quadrado I em centímetros quadrados?



(A) 196 (B) 256 (C) 289 (D) 324 (E) 361

Resolução:

$S_A = 1 \rightarrow l_A = 1$

$S_B = 81 \rightarrow l_B = 9$

$l_C = l_A + l_B = 1 + 9 = 10$

$l_G = l_B - l_A = 9 - 1 = 8$

$l_F = l_G - l_A = 8 - 1 = 7$

$l_E = l_B + l_C - l_F - l_G = 9 + 10 - 8 - 7 = 4$

$l_D = l_C + l_E = 10 + 4 = 14$

$l_I = l_D + l_E = 14 + 4 = 18$

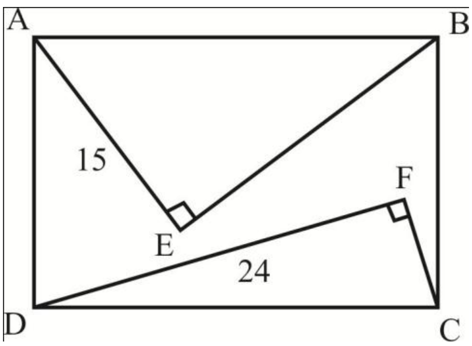
Então área do quadrado I será $S_I = l_I^2 = 18^2 = 324$

Resposta: (D) 324

Nível 3

Questão 1

Na figura ao lado ABCD é um retângulo e ABE e CDF são triângulos retângulos. A área do triângulo ABE é 150 cm^2 e os segmentos AE e DF medem, respectivamente, 15 cm e 24 cm. Qual o comprimento do segmento CF?



Resolução:

$$S_{\Delta ABE} = \frac{AE \times BE}{2}$$
$$\frac{15 \times BE}{2} = 150$$
$$BE = 20$$

Aplicando Teorema de Pitágoras ΔABE :

$$AB^2 = AE^2 + BE^2$$
$$AB^2 = 15^2 + 20^2$$
$$AB = 25$$

$$AB = CD = 25$$

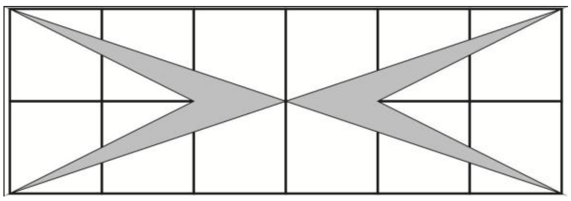
Aplicando Teorema de Pitágoras no ΔCDF :

$$CD^2 = CF^2 + DF^2$$
$$25^2 = 24^2 + DF^2$$
$$DF^2 = 625 - 576 = 49$$
$$DF = 7$$

Resposta: DF = 7 cm.

Questão 2

A figura ao lado foi montada com 12 azulejos quadrados de lados iguais a 10 cm. Qual é a área da região hachurada?



Resolução:

A parte hachurada consiste em 4 triângulos de base e altura iguais a 10. Então:

$$S_{triângulo} = \frac{b \times h}{2} = \frac{10 \times 10}{5} = 20$$

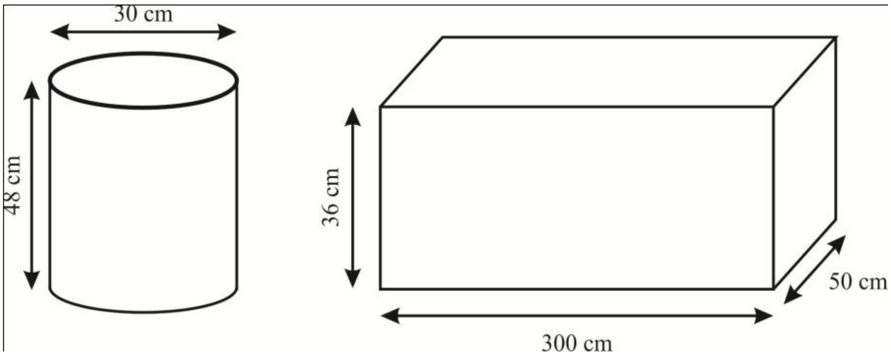
Assim,

$$S_{hachurada} = 4 \times S_{triângulo}$$
$$S_{hachurada} = 80$$

Resposta: 80 cm².

Questão 3

Para encher de água um tanque em forma de um bloco retangular de 300 cm de comprimento, 50 cm de largura e 36 cm de altura, um homem utiliza um balde cilíndrico, de 30 cm de diâmetro em sua base e 48 cm de altura, para pegar água numa fonte. Cada vez que ele vai à fonte, ele enche 4/5 do balde e no caminho derrama 10% do seu conteúdo. Estando o tanque inicialmente vazio, quantas viagens à fonte o homem terá que fazer para que a água no tanque chegue a 3/4 de sua altura?



Resolução:

Volume do balde ocupado por água:

$$V_a = \frac{4}{5} V_b = \frac{4}{5} \pi R^2 H = \frac{4}{5} \text{[illegible]}$$

Total de água colocado no tanque após a perda de 10%:

$$V_{90\%} = 0{,}9 V_a = \text{[illegible]}$$

Volume do tanque a ser ocupado:

$$V_{tanque} = \frac{3}{4} V_{bloco} = \frac{3}{4} \text{[illegible]}$$

Quantidade de viagem:

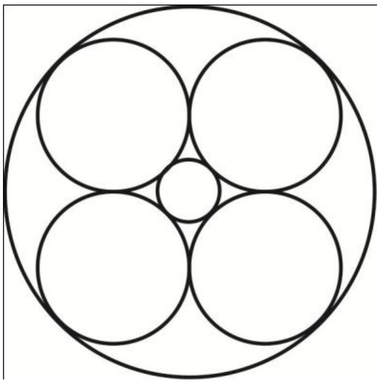
$$n = \frac{V_{tanque}}{V_{90\%}} = \text{[illegible]}$$

Logo, o homem necessita fazer 17 viagens.

Resposta: 17 viagens.

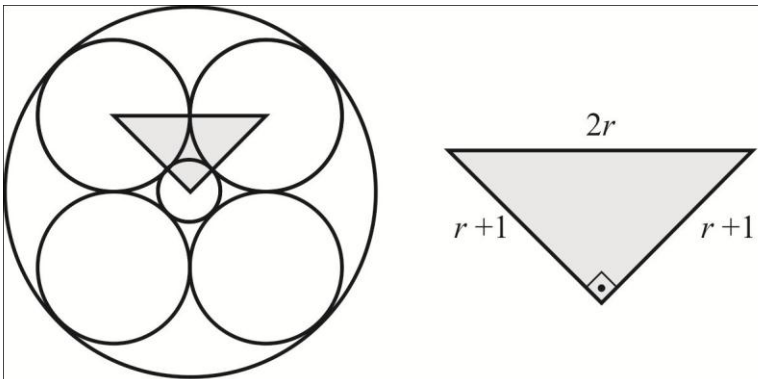
Questão 4

A figura mostra a marca de uma empresa, formada por dois círculos concêntricos e outros quatro círculos de mesmo raio, cada um deles tangente a dois dos outros e aos dois círculos concêntricos. O raio do círculo menor mede 1 cm. Qual é, em centímetros, o raio do círculo maior?



Resolução:

Construindo um triângulo indicado na figura abaixo, onde os vértices são os centros dos círculos, teremos um triângulo retângulo.



Podemos aplicar Teorema de Pitágoras:

$$(2r)^2 = 2(r+1)^2$$

$$4r^2 = 2(r^2+2r+1)$$

$$r^2 - 2r - 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

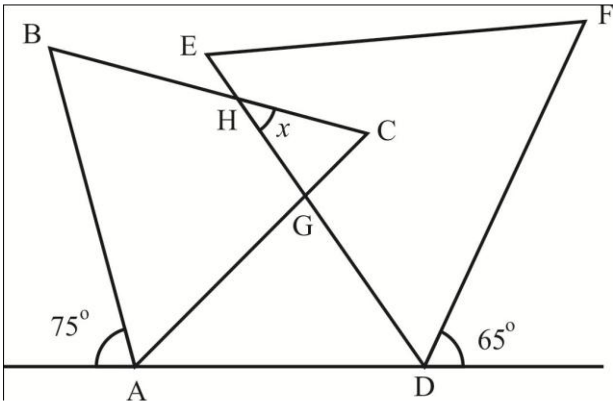
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} r' = 1 + \sqrt{2} \\ \cancel{r'' = 1 - \sqrt{2}} \text{ não convém} \end{cases}$$

O raio do círculo maior será $1 + 2r = 1 + 2(1+\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$.

Questão 5

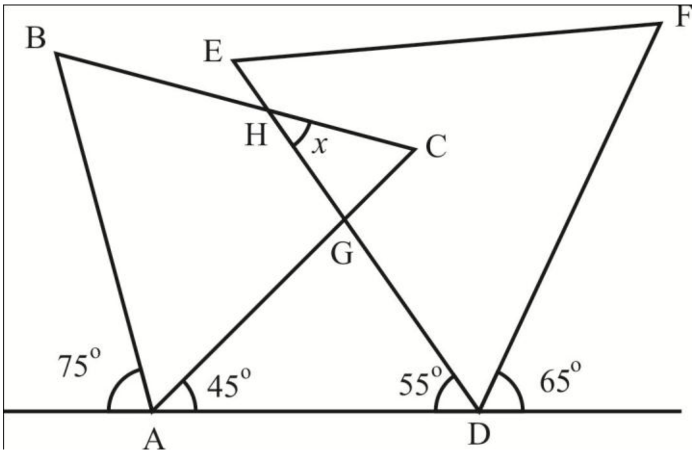
Na figura, os dois triângulos ABC e FDE são eqüiláteros. Qual é o valor do ângulo *x*?



(A)30º (B) 40º (C) 50º (D) 60º (E) 70º

Resolução:

Cada triângulo é equilátero então:



Assim, [illegible]

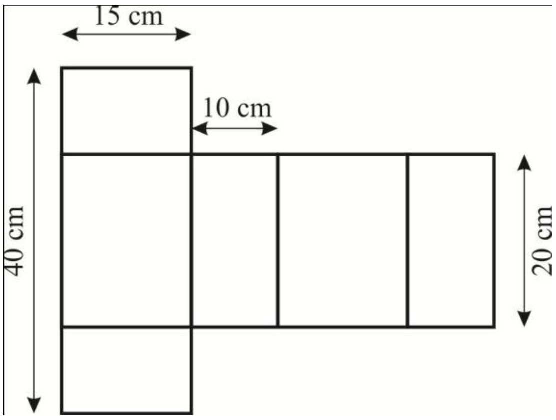
Então, [illegible]

[illegible]

Resposta: (B) 40º.

Questão 6

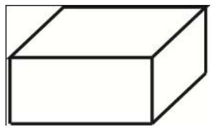
O desenho mostra um pedaço de papelão que será dobrado e colado ao longo das bordas para formar uma caixa retangular. Os ângulos nos cantos do papelão são todos retos. Qual será o volume da caixa em 3 cm ?



(A) 1500 (B) 3000 (C) 4500 (D) 6000 (E) 12000

Resolução:

Montando o sólido temos:



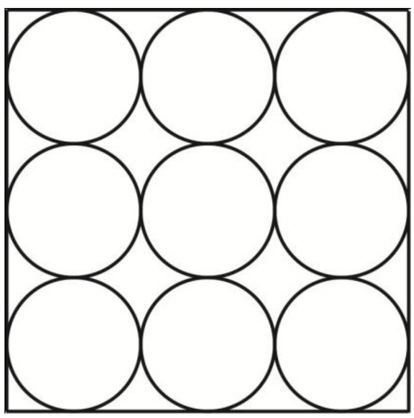
Cujas dimensões são 20 cm, 15 cm e 10 cm. Logo:

$$V = 20 \cdot 15 \cdot 10 = 3000\,cm^3$$

Resposta: (B) 3000

Questão 7

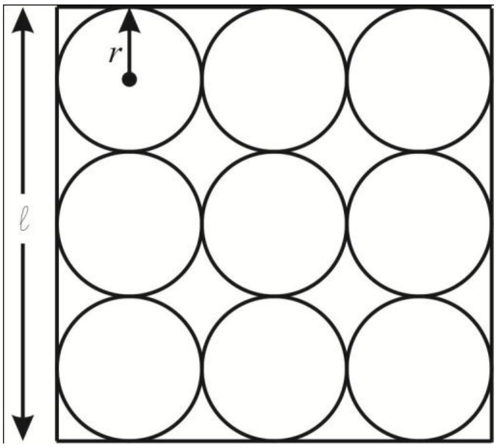
Para fabricar 9 discos de papelão circulares para o Carnaval usam-se folhas quadradas de 10 cm de lado como indicado na figura. Qual a área do papel não aproveitado?



(A) 25 cm^2 (B) 22,5cm^2 (C) 21,5 cm^2 (D) 21cm^2 (E) 22 cm^2

Resolução:

Observando a figura temos:



$$\ell = 6r$$

$$r = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}\text{ cm}$$

Área dos 9 discos:

$$S_{discos} = 9S_{disco} = 9\pi\left(\frac{5}{3}\right)^2 = 9\pi\frac{25}{9} = 25\pi \approx 78{,}5\text{ cm}^2$$

Área da folha:

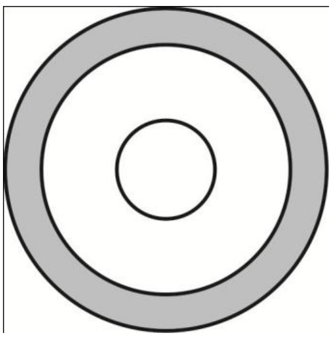
$$S_{folha} = S_{quadrado} = \ell^2 = 10^2 = 100\text{ cm}^2$$

Área do papel não aproveitado: $S_{não\ aproveitado} = S_{folha} - S_{discos} = 100 - 78{,}5 = 21{,}5\text{ cm}^2$

Resposta: (C) 21,5 cm².

Questão 8

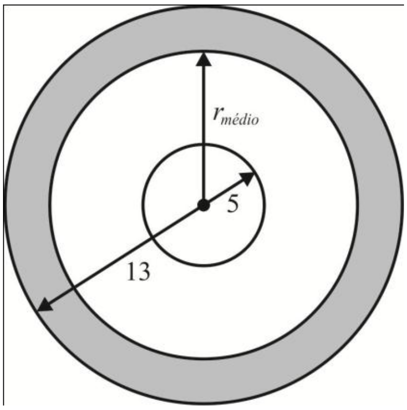
Na figura, os três círculos são concêntricos, e as áreas do menor círculo e do maior anel (em cinza) são iguais. O raio do menor círculo é 5 cm e do maior 13 cm. Qual o raio do círculo intermediário?



(A) 12 (B) 11 (C) $10\sqrt{65}$ (D) $5\sqrt{3}$ (E) $12\sqrt{2}$

Resolução:

Observando a figura, temos:

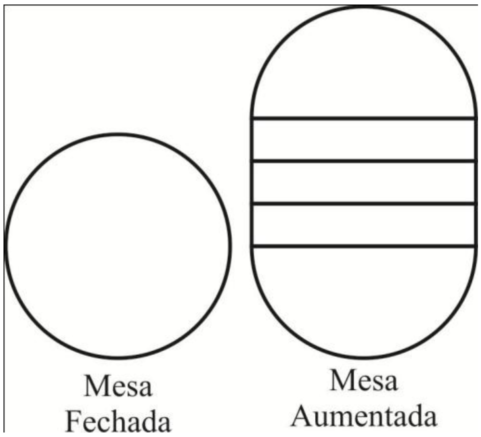


$$S_{cinza} = S_{círculo\ menor}$$
$$S_{círculo\ maior} - S_{círculo\ médio} = S_{círculo\ menor}$$
$$\pi \cdot 13^2 - \pi \cdot r_{médio} = \pi \cdot 5^2$$
$$169\cancel{\pi} - \cancel{\pi} \cdot r_{médio}^2 = 25\cancel{\pi}$$
$$r_{médio}^2 = 169 - 25 = 144$$
$$r_{médio}^2 = 12\ cm$$

Resposta: (A) 12

Questão 9

A mesa redonda - Uma mesa redonda tem 1,40m de diâmetro. Para uma festa, a mesa é aumentada colocando-se três tábuas de 40 cm de largura cada uma, como mostra a figura. Se cada pessoa à mesa deve dispor de um espaço de 60 cm, quantos convidados poderão se sentar na mesa?



Resolução:

Se perímetro da mesa aumenta como mostra a figura, então:

[illegible]

O número de convidados sentados será:

$$n = \frac{679,6}{60} \approx 11,3$$

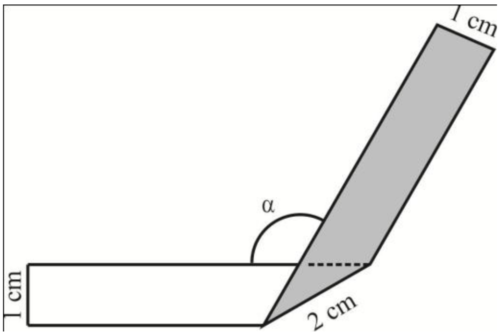
O número de convidados sentados é igual a 11.

Resposta: 11

Questão 10

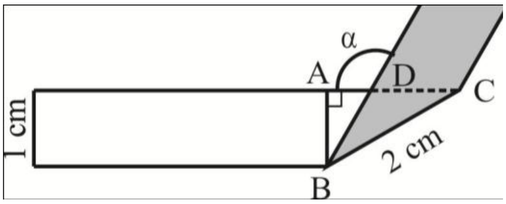
Papel dobrado

Uma tira de papel retangular, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura. Qual é a medida do ângulo α ?



Resolução:

Observando a figura, temos:



Um triângulo retângulo ABC, com cateto e hipotenusa iguais a 1 cm e 2 cm, respectivamente. Assim:

$$\text{sen}\,A\hat{C}B = \frac{1}{2} \Rightarrow A\hat{C}B = 30^\circ = C\hat{B}D$$

Logo,

$$B\hat{D}C + A\hat{C}B + C\hat{B}D = 180^\circ$$
$$B\hat{D}C + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$
$$B\hat{D}C = 120^\circ$$

mas, $B\hat{D}C = \alpha$ pois são ângulos oposto pelo vértice, então $\alpha = 120^o$.

Resposta: α = 120º

Considerações Finais

Este trabalho resultou das resoluções da disciplina MA 21 – Resolução de Problemas, na Universidade Federal do Pará, no curso do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Enfatizando a importância das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e a metodologia de ensino nas aulas de Matemática que necessitamos, para poder resolvê-las, da utilização de conhecimentos matemáticos.

Tentei abordados principais temas de geometria nas Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, através de resolução de problemas. Sabemos que a OBMEP, além de medir a qualidade do ensino da matemática nas escolas públicas, tem ainda um papel de incentivador, tanto para alunos como para professores. Acreditamos que com este trabalho possamos ajudar mais pessoas a despertar o amor pela matemática.

Referências Bibliográficas

DOLCE. OSVALDO, Fundamentos de Matemática Elementar, vol 9: Geometria Plana / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo, - 8ª Ed. – São Paulo: Atual, 2005.

DOLCE. OSVALDO, Fundamentos de Matemática Elementar, vol 10: Geometria Espacial / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo, - 6ª Ed. – São Paulo: Atual, 2005.

LIMA, ELON LAGES, A Matemática do Ensino Médio vol 3 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cesar Morgado. -6ª Ed.- Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MEGA, ÉLIO, Olimpíadas Brasileiras de Matemática 1ª a 8ª - problemas e resolução / Élio Mega, Renate Watanabe, - 1ª Ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2009.

MORREIRA, CARLOS GUSTAVO, Olimpíadas Brasileiras de Matemática 9ª a 16ª - problemas e resolução / Carlos Gustavo Moreira, Edmilson Motta, Eduardo Tengan, Luiz Amâncio, Nicolau Saldanha, Paulo Rodrigues, - 1ª Ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2009.

MORGADO, AUGUSTO CESAR, Temas e Problemas /Augusto Cesar Morgado, Elon Lages Lima, Paulo Casar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner. – 3ª Ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2001.

SHINE, CARLOS YUZO, 21 Aulas de Matemática Olímpica / Carlos Yuzo Shine, - 1ª Ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2009.