Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de pós-graduação e pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT

O ciclo do ensino de trigonometria: Teoria, aplicações e uma proposta de intervenção na educação básica.

por

Wallisson Almeida Barros
Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Dr. Gerson Cruz Araujo

2023-08-16

Wallisson Almeida Barros

O ciclo do ensino de trigonometria: Teoria, aplicações e uma proposta de intervenção na educação básica.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Gerson Cruz Araujo

São Cristóvão

2023

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

B277c

Barros, Wallisson Almeida
O ciclo de ensino de trigonometria: teoria, aplicações e uma proposta de intervenção na educação básica / Wallisson Almeida Barros ; orientador Gerson Cruz Araujo. - São Cristóvão, 2023.
124 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2023.

1. Trigonometria. 2. Triângulo. 3. Funções trigonométricas. I. Araujo, Gerson Cruz orient. II. Título.

CDU 514.116.2

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

O ciclo do ensino da trigonometria: Teoria, aplicações e uma proposta de intervenção na educação básica

por

Wallisson Almeida Barros

Aprovada pela Banca Examinadora:

Gerson Cruz Araújo

Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo - UFS
Orientador

Lucas Rezende Valeriano

Prof. Dr. Lucas Rezende Valeriano - UFS
Primeiro Examinador

Crislene Santos da Paixão

Prof.ª Dr.ª Crislene Santos da Paixao - IFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 30 de Agosto de 2023.

Cidade Univ. Prof. José Aloísio de Campos, Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Bairro Rosa Elze, CEP 49107-230 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – Tel. (00 55 79) 3194-6887
E-mail:profmat@academico.ufs.br

Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar, por ter me dado a capacidade de nunca desistir e de sempre persistir em adquirir tal conhecimento, a ter me concedido o dom da vida. Logo em seguida agradeço a meus pais Antônio Carlos Barros e Maiza Almeida Barros , a minha esposa Tainá Bomfim Silva, a meu filho Thallisson Bomfim Barros, a meu irmão Wallas Almeida Barros e sua esposa Martha Helena, a meus sobrinhos Matheus Silva Barros e Júlia Silva Barros pelo incentivo que sempre me deram, o suporte necessário pra poder ter um pouco mais de tempo pra me dedicar, por compreender a minha ausência em boa parte do curso e aos demais parentes maternos e paternos que apesar de estarem menos presentes, mesmo assim demonstraram total apoio , e ao companheirismo dentro e fora do curso do grande amigo que tenho como um irmão Erivaldo Lima Santos , agradeço também ao meu compadre Jose Willian De Oliveira Junior por todo amparo que foi necessário nessa jornada .

Posteriormente a todos os meus professores por compartilhar momentos de conhecimentos e alegria, pela paciência que tiveram comigo nesse período de um pouco mais que dois anos, ao coordenador Disson Soares dos Prazeres pela paciência em tirar nossas duvidas e pelas orientações no decorrer do curso, agradeço imensamente ao meu orientador o Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo por ter compartilhado o seu conhecimento e ter me dado um norte na construção deste trabalho. Aos meus amigos de curso, que foram grandes companheiros nessa jornada e sem os quais esse momento creio que não seria realizado em especial a Erivaldo Lima Santos, Robson Francisco dos Santos e a Michel e por fim aos meus colegas de trabalho e aos meus alunos pela força que me deram.

Resumo

No presente trabalho, procurou-se descrever de forma sistemática o estudo de trigonometria versando desde abordagens usadas no ensino fundamental, médio, atingindo resultados advindos da graduação, compondo assim o propósito do PROFMAT, de capacitação do docente da rede básica de ensino. No texto é exposto de forma particular o estudo de trigonometria, partindo um pouco da história da teoria, mostrando como pode ser aplicado no cotidiano, deduzindo algumas fórmulas , trabalhando questões contextualizadas, tendo sempre como o objetivo sugerir um ponto de vista sobre o tema, nos diversos níveis de que a trigonometria é inserida. Tendo em vista, o processo de aquisição do conhecimentos foram trabalhadas diferentes formas de questões, desde os presentes nos livros didáticos, questões do ENEM, que teve como foco desmistificar um pouco o trauma do conteúdo e consequentemente a aprovação dos alunos para um curso superior e de problemas retirados dos cadernos de avaliações da OBMEP, essas elaboradas pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). Por fim, foram criadas situações empíricas que foram solucionadas pelos alunos através de um material manipuláel que foi modelado pelos mesmos com o monitoramento do professor.

Palavras Chaves: Trigonometria no triângulo retângulo; arco trigonométrico; funções trigonométricas; ENEM; OBMEP.

Abstract

In the present work, an attempt was made to systematically describe the study of trigonometry, ranging from approaches used in primary and secondary education, reaching results arising from graduation, thus composing the purpose of PROFMAT, of training teachers in the basic education network. In the text, the study of trigonometry is exposed in a particular way, starting from the history of the theory, showing how it can be applied in everyday life, deducing some formulas, working on contextualized questions, always having as an objective to suggest a point of view on the subject, at the various levels at which trigonometry is inserted. In view of the process of acquiring knowledge, different forms of questions were worked on, from those present in textbooks, ENEM questions, which focused on demystifying a little the trauma of the content and consequently the approval of students for a higher course and of problems taken from the OBMEP assessment notebooks, those elaborated by IMPA (Institute of Pure and Applied Mathematics). Finally, empirical situations were created that were solved by the students through a manipulable material that was modeled by them with the teacher's monitoring.

Key words: Trigonometry in the right triangle; trigonometric arc; trigonometric functions; ENEM; OBMEP.

Introdução

A Matemática, desde seus primórdios, entrelaça-se tão intimamente com a história da civilização que sua história é nao somente motivadora em termos de ensino como também muito rica em aspectos culturais.

A palavra *trigonometria* tem origem no grego trigonos (triângulos) mais meirum (medida), cujo principal objetivo e estudar relações entre os lados e ângulos de um triângulo, "nascendo"como resposta à necessidade da Astronomia e da Navegação.

A trigonometria desenvolveu-se como resultado de uma interação contínua e fértil entre a oferta e a demanda: a oferta de teorias matemáticas aplicáveis e técnicas acessíveis em qualquer momento e a demanda de uma unica ciência aplicada, a Astronomia. Assim, a história da trigonometria mostrou em seu interior o crescimento de três partes clássicas da matemática: algebra, análise e geometria.

Suscintamente, a trigonometria era baseada numa unica função, a corda de um arco de círculo ar- bitrário, onde identificou-se as primeiras sequências numéricas relacionadas com comprimentos de sombra com horas do dia. Por volta do século II d.C. essa função corda transformou-se em variações do seno. Somente por volta do século IX d.C, a nova função seno e as antigas funções sombra (tangente, cotangente, secante) foram tabuladas em sexagenários. Com isto, surgiu a primeira trigonometria genuína, utilizando como objeto de estudos o triângulo plano ou esférico, seus lados e ângulos. Após o período do denominado renascimento da civilização européia, no final do século XVIII, o notável, Leonhard Euler e outros já haviam apresentados todos os teoremas da trigonometria como corolários da teoria das funções complexas.

Sabemos que os diversos ramos da Matemática não se formaram nem evoluíram da mesma maneira e ao mesmo tempo, mas sim gradualmente. O desenvolvimento da trigonometria está intimamente ligado ao da geometria. Neste campo, a Grécia produziu grandes sábios; entre eles Thales (625 - 546 a.C.), com seus estudos de semelhança que embasam a trigonometria, e seu discípulo Pitágoras (570 - 495 a.C.). Conjectura-se que este último tenha feito a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: *"Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos".* Deste teorema deriva a relação fundamental da trigonometria.

A Trigonometria grega surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, para calcular o tempo, e para ser utilizada na navegação e na Geografia. Assim, os estudos da Trigonometria se concentravam na trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, isto e, triângulos sobre a superfície de uma esfera. No entanto, foi necessário para isso desenvolver partes da trigonometria plana. O estudo dos triângulos esféricos na Matemática grega vinha sendo feito desde os ultimos pitagóricos. O próprio Euclides, que viveu em torno de 300 a.C., em um de seus trabalhos, *Os Fenômenos*, estudou a Geometria esférica. Aproximadamente em 20 a.C..

Teodósio compilou o que os gregos conheciam sobre o assunto em seu livro Sobre a Esfera. Aristarco de Samos, que viveu em torno de 300 a.C., em seu livro Sobre as Distâncias do Sol e da Lua, baseando-se em observações, deduziu que:

1. A distância da Terra ao Sol e maior do que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da Terra à Lua. Na demonstração deste fato vemos pela primeira vez a aproximação do seno de um ângulo pequeno;

2. Os diâmetros do Sol e da Lua têm a mesma razão que suas distâncias da Terra;

3. A razão do diâmetro do Sol pelo diâmetro da Terra é maior do que 19 : 3 e menor do que 43 : 6.

Os erros cometidos por Aristarco devem-se aos dados experimentais que utilizou. Seus raciocínios estavam certos.

Pode-se dizer que o fundador da Trigonometria foi Hiparco de Nicéia, que viveu em torno de 120 a.C.. Semelhantemente a muitos matemáticos gregos, inclusive o próprio Euclides, pouco sabe-se sobre sua vida. A maior parte do que se conhece sobre ele e devida a Ptolomeu (100 - 180 d.C.) o qual cita vários resultados de Hiparco sobre Trigonometria e Astronomia, e a fragmentos de descrições de seus trabalhos contidos nas obras de outros autores gregos.

Hiparco foi o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocasos de várias estrelas, usando para isso a tabela de cordas (função sombra) por ele calculada. Construiu uma tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos entre 0 e 180 graus, a qual apresentava a correspondência entre o arco e a sua corda. Foram construídas para serem utilizadas na Astronomia.

É provável que a divisão do círculo em 360 graus, tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco. Ele provavelmente seguiu a ideia do matemático grego Hipsiclo, o qual por sua vez tinha dividido o dia em 360 partes, uma divisão possivelmente inspirada na astronomia babilônica.

A Trigonometria grega atingiu seu apice com Cláudio Ptolomeu (viveu em torno de 150 d.C.) em seu principal trabalho, o *Almagesto*. O *Almagesto* tinha por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar, supondo que a Terra estava em seu centro (teoria geocêntrica, que seria substituida no século XV pela teoria heliocêntrica, introduzida por Copérnico (1473 - 1543)). Ptolomeu desenvolveu a Trigonometria em dois capıtulos do *Almagesto*, sendo que em um deles apresenta a tabela de cordas (tabela de senos), que usou uma circunferência com um raio de 60 unidades.

Objetivamente, os conceitos de seno e cosseno tiveram sua origem no contexto da astronomia, tangente e cotangente emergiram das necessidades mais modestas da medição de alturas e distâncias.

Os árabes herdaram a trigonometria dos gregos e hindus, adotando o ponto de vista aritmético. Introduziram, para facilitar os cálculos, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante. O matemático árabe, Al-Battavi introduziu uma inovação, o círculo de raio unitário, e assim calculou as razões.

O interesse pela trigonometria entre gregos e árabes era motivado por suas aplicações à Astronomia. A partir do Renascimento, epoca da expansão marítima europeia que exigiu o desenvolvimento da cartografia, a trigonometria passou a ser utilizada em cartografia e em topografia, como já proposto por Fibonacci (1175 - 1250) em seu livro *Prática da Geometria*, de 1220.

Outro fator de desenvolvimento da trigonometria foi a necessidade de refazer todos os cálculos da Astronomia posicional, com a adoção progressiva do sistema heliocêntrico de Copérnico. A partir de Galileu (1564 - 1642), e com a descoberta da Geometria Analítica por Descartes (1596 - 1650) e por Fermat (1601 - 1665), o estudo das curvas desenvolveu-se muito. A curva seno foi introduzida nos estudos de Roberval 8$(1602 - 1675)$ sobre a ciclóide; no livro *Mecânica* de Wallis (1616 - 1703), publicado em 1670, há um gr afico de dois per ıodos da função seno. E o primeiro aparecimento de uma função trigonométrica. Pouco a pouco, as funções trigonométricas passaram a figurar frequentemente em Matemática, paralelamente ao uso de tabelas cada vez mais precisas para aplicações em Topografia, Navegação, Astronomia de posição. Já nos séculos $XVIII$ e XIX, foi visto serem elas essenciais para a solução de certos problemas de Matematica e de Física. A introdução das séries de Fourier mostrou a posição central destas funções na Análise Matematica moderna e em muitas de suas aplicações.

Na atualidade encontram-se aplicações para a trigonometria nas telecomunicações, na música, na determinação de distâncias entre estrelas, na medicina, na física, na sociologia e em muitas outras áreas cientificas. Como tal, o seu estudo e indispensável para engenheiros, físicos, informáticos e praticamente para todos os cientistas.

A construção deste trabalho teve como âmago central, exibir as facetas da trigonometria nas esferas do ensino, a saber, ensino básico, ensino médio e superior, executando o papel fundamental de um curso de capacitação como o PROFMAT, o de gerar no docente, novas pespectivas sobre temas pertinentes no seu ofício de educador, tentando promover dinâmicas de abordagens que possam futuramente, despertar o interesse dos alunos sobre os temas propostos.

Especificamente, a trigonometria para o discente, normalmente é vista como um conteúdo bem abstrato e de difícil entendimento, o que acarreta na seu total falta de afinidade e interesse por tal tema, isso leva os mesmos a estudarem de maneira decorativa e de forma superficial, com apenas o intuito da aprovação, sem parar pra analisar como tais conteúdos podem ser aplicados no nosso cotidiano e da sua grande importância na sequência de conhecimentos no nível superior. Outro fator que deve ser analisado é a forma como os professores normalmente abordam esse tema para os alunos, pois algumas vezes fundamenta-se apenas com exercícios com foco nos vestibulares, fazendo com que os alunos não despertem a curiosidade pela fascinante área de estudo, que é a base motivacional que impulsiona o interesse pelos estudos.

Esta dissertação, apresenta-se organizada da seguinte forma: o primeiro capítulo, propõe uma introdução da trigonometria no ensino fundamental, especificamente no nono ano, partindo do estudo de ângulos, arcos e das relações métricas no triângulo retângulo onde, a partir daí, será feita uma abordagem histórica do uso dessas ferramentas. Ainda no capítulo 1 iremos propor uma abordagem por meio de situações-problema práticas para que eles possam ver que o estudo e uso da trigonometria facilita diversas medições, finalizando com uma sistematização dos conceitos que foram trabalhados durante as atividades anteriores. O segundo capítulo, está focado no ensino médio, Esta parte do texto, pretende identificar as razões no círculo trigonométrico para que as medidas possam ser transportadas para o plano cartesiano, onde o enfoque é que os discentes e doscentes interessados sejam capazes de identificar e modelar alguns fenômenos periódicos. Logo, é necessário que seja feita uma abordagem das funções trigonométricas na forma geral para ser possível analisar a função de cada um de seus coeficientes. Para que a investigação da função de cada coeficiente da forma geral das funções trigonométricas seja feita de forma rápida e precisa. Sequencialmente, no capítulo 2, expomos no texto, relações fundamentais da trigonometria, soma e diferença de arcos, equações e inequações trigonométricas, dedução das leis dos cossenos e a lei dos senos, modelando fenômenos periódicos por meio das funções trigonométricas, para exibir o quanto é denso o uso de tal teoria. Por fim, tendo como fonte de pesquisa, exames que testam aptidões de conhecimentos nacionais, como o ENEM, assim como a OBM e OBMEP, visou-se observar como a trigonometria é usada em tais testes períodicos, exibindo algumas situações problemas e promovendo possíveis soluções. O terceiro capítulo é destinado a observar a trigonometria na análise matemática. Tal capítulo, tem por objetivo principal, utilizar as ferramentas que foram trabalhadas nas disciplinas realizadas no PROFMAT, principalmente os cursos de números e funções, e fundamentos do cálculo, para que sejam inseridas em resultados e teoremas da trigonometria, fazendo com que o leitor, tanto o docente, quanto o discente, tenham um ponto de vista analítico da teoria. No último capítulo, foi realizado uma proposta de intervenção no ensino básico, mais especificamente em uma escola pública do município de Aquidabã, Sergipe. Executamos um trabalho, com materias manipuláveis de baixo custo, para que os alunos no exercício de observação de estudo de campo, executassem o que foi explanado nas aulas teóricas, soluções de problemas sugeridos pelo orientador, exibindo de forma objetiva e sensorial o quanto o conhecimento da teoria, em particular, a trigonometria, torna-se imprescindível para resolução de situações advindas do contidiano.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Trigonometria no triângulo retângulo.

Neste capitulo, direcionamos no foco no ensino básico, mais especificamente, o último ano do ensino fundamental. No primeiro momento vamos dissertar um pouco a respeito da história sobre o desenvolvimento de trigonometria, a seguir, abordamos conceitos básicos sobre arcos, ângulos, uma unidade de medida de ângulos (grau) e instrumentos de medida ,temas comumente trabalhados no ensino fundamental e médio, como também as definições das principais razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Permita-nos enfatizar que para realização deste capítulo utilizamos os referências [1], [2], [3].

1.1 Um pouco da história

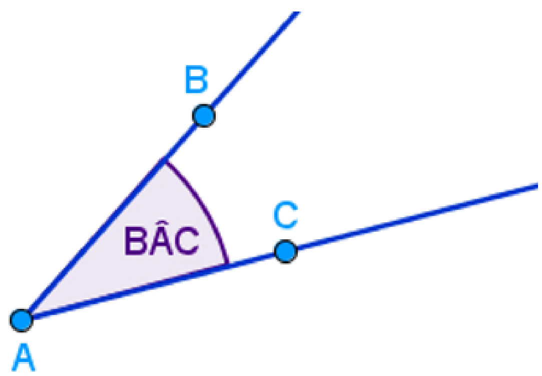
Quando abordamos o conteúdo da forma supracitada, estamos fazendo uma abordagem didática semelhante ao do início do século XX, onde os alunos eram meros reprodutores de técnicas, uma vez que, a sociedade necessitava ter pessoas qualificadas para trabalhar de forma mecânica na indústria. Porém, pensando na sociedade atual, que com a globalização desde o final do século XX, anseia por indivíduos com múltiplas inteligências, tanto no âmbito técnico, social, emocional, e não meramente reprodutoras de modelos e pensamentos já estabelecidos, o ensino deve auxiliar na formação de um cidadão que saiba questionar, compreender, aplicar, propor, sistematizar, relacionar, avaliar, inovar e, principalmente, produzir novos conceitos e soluções, de forma rápida, para situações cotidianas que envolvam processos industriais, sociais e políticos. Assim, é notório que essa abordagem mecanicista não contribui de forma satisfatória para essa formação dos cidadãos, que será exigida pelo mercado de trabalho e pela sociedade em geral.

De acordo com os estudos atuais, esse trabalho propõe que o ensino da trigonometria seja abordado com base em contextos históricos associados a questões socioeconômicas e culturais sobre o assunto, análise etimológica da palavra trigonometria e de sua nomenclatura, introdução por meio da construção dos conceitos das razões trigonométricas enfocando a manipulação e análise de regularidades no triângulo retângulo, análise da construção da tabela de valores das razões trigonométricas, aplicações 25 dessas razões em diversos contextos antigos e atuais, atividades práticas de medição e cálculo de distâncias, abordagem do círculo trigonométrico e análise dos valores assumidos pelas razões trigonométricas em cada quadrante associando a construção e análise das funções trigonométricas por meio de transferência de medidas desse círculo trigonométrico para o plano cartesiano, aplicações da trigonometria na Física com análise de fenômenos periódicos, manipulação dessas funções para levantar hipóteses a respeito das características de cada coeficiente das mesmas, estudo sistemático das razões trigonométricas da soma e diferença de arcos. Dessa forma, o aluno estará participando ativamente em todo o processo de formação e desenvolvimento do conteúdo, respeitando sua maturidade ao longo dos anos. Essa proposta indica pontos que vem sendo investigados e discutidos amplamente, tendo em vista a organização de um corpo de sugestões metodológicas que poderão nortear, de modo geral, não só o ensino de trigonometria, mas o ensino de Matemática como um todo. Faremos uma breve apresentação conceitual dos conteúdos matemáticos explorados por meio do jogo borboleta. Esses conceitos estão definidos na perspectiva de Macedo (2011).

1.2 Conceitos básicos

A fim de estabelecer um encaminhamento claro, preciso, porém conciso de algumas idéias matemáticas, primeiramente precisamos definir alguns dos elementos que serão bastante usados. Sendo assim, veremos a seguir algumas definições e classificações de substantivos muito usados na teoria do estudo de trigonometria. Começaremos pela definição de ângulos e suas características.

Definição 1.2.1. *Um ângulo é a região delimitada por duas semirretas ou segmentos de reta com ponto em comum (origem denominado de vértice).*

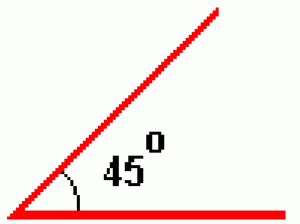


Podemos observar, a ideia de ângulo presente no nosso dia-a-dia, por exemplo, quando viramos em uma esquina, quando montamos uma tábua de passar roupas, entre os ponteiros de um relógio, na inclinação do telhado de uma casa, na abertura de uma tesoura, dentre outros (LIMA, 2014).

Vale ressaltar que os ângulos tem como uma das unidades de medida o grau, que é uma medida correspondendo a $\frac{1}{360}$ de uma circunferência. Os ângulos recebem suas classificações de acordo com o valor da sua medida. Vejamos:

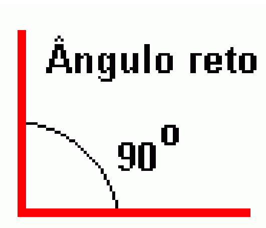
- Ângulo agudo: é o ângulo com medida menor que 90°.

  Ângulo de 45° :



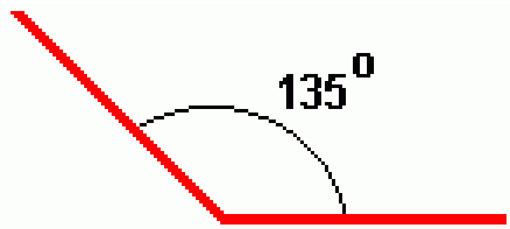
- Ângulo reto: é o ângulo com medida de 90°.

  Ângulo de 90° :



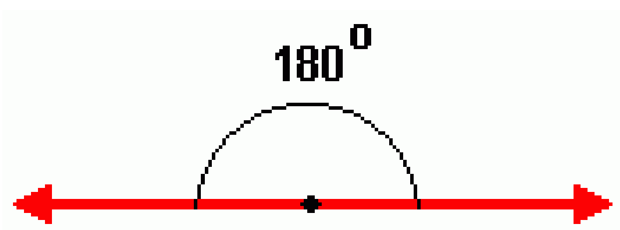
- Ângulo obtuso: é o ângulo com medida maior que 90° e medida menor que 180°.

  Ângulo de 135° :



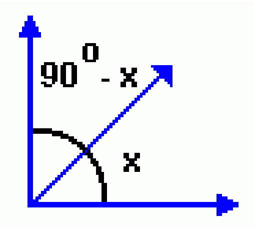
- Ângulos raso : Ângulo que mede exatamente 180°, os seus lados são semirretas opostas.

  Ângulo de 180° :



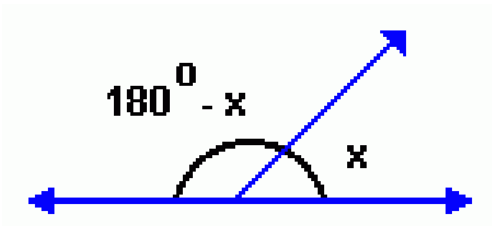
- Ângulos complementares: são dois ou mais ângulos que somados resultam em $90°$.

  Ângulos de $90° - x$ e x, onde $x < 90°$:



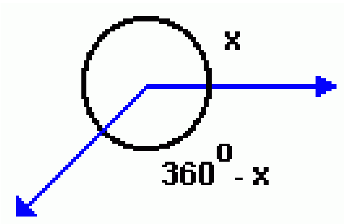
- Ângulos suplementares: são dois ou mais ângulos que somados resultam em $180°$.

  Ângulos de $180° - x$ e x, onde $x < 180°$



- Ângulos replementares: são dois ou mais ângulos que somados resultam em $360°$.

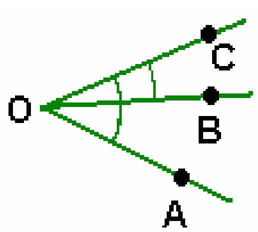
  Ângulos de $360° - x$ e x, onde $x < 360°$



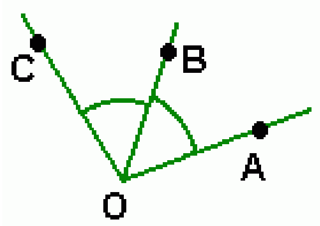
- Ângulos consecutivos e adjacentes

  Ângulos consecutivos: Dois ângulos são consecutivos se um dos lados de um deles coincide com um dos lados do outro ângulo.

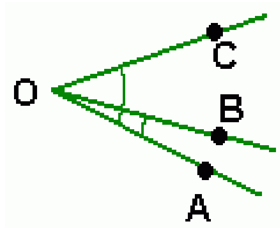
  1. $\angle AOC$ e $\angle BOC$ são consecutivos e OC é o lado comum.



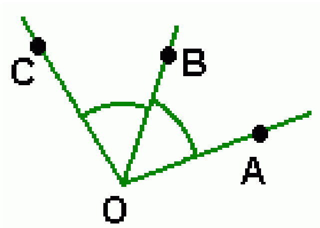
2. $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são consecutivos e OB é o lado comum.



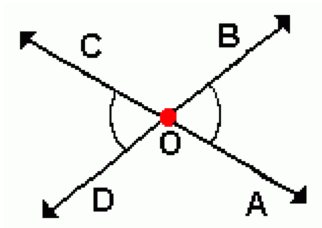
3. $\angle AOB$ e $\angle AOC$ são consecutivos e OA é o lado comum.



- Ângulos adjacentes: Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, não têm pontos internos comuns. Na figura em anexo $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são ângulos adjacentes.

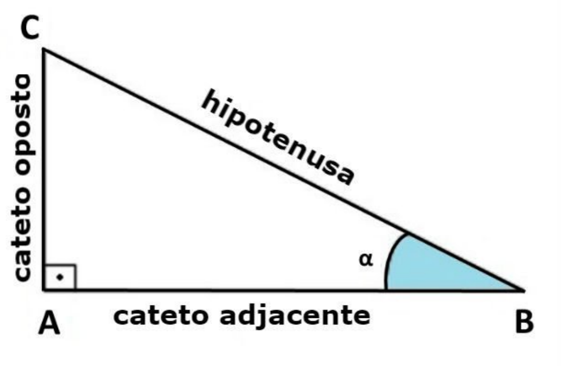


- Ângulos opostos pelo vértice (OPV): Consideremos duas retas concorrentes cuja interseção seja o ponto O. Estas retas determinam quatro ângulos. Os ângulos que não são adjacentes são opostos pelo vértice.



Dito isso, um ramo da matemática que relaciona o comprimento dos lados de um triangulo com seus ângulos é a trigonometria. Inicialmente veremos essas relações no triângulo retângulo, que é o triângulo que possui um ângulo interno reto.

Definição 1.2.2. *Dado um triângulo ABC retângulo em $\angle BAC$, em que o ângulo $\angle ABC$ é igual a α, identificamos seis razões entre os lados do triângulo ABC, que denominamos razões trigonométricas de α.*



Tais razões são:

Definição 1.2.3. *Seno de um ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida da hipotenusa.*

$$\text{sen}\alpha = \frac{cateto\,oposto}{cateto\,adjacente}$$

Definição 1.2.4. *Cosseno de um ângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente e a medida da hipotenusa.*

$$\cos\alpha = \frac{cateto\,adjacente}{hipotenusa}$$

Definição 1.2.5. *Tangente de um ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente.*

$$\text{tg}\alpha = \frac{cateto\,oposto}{cateto\,adjacente}$$

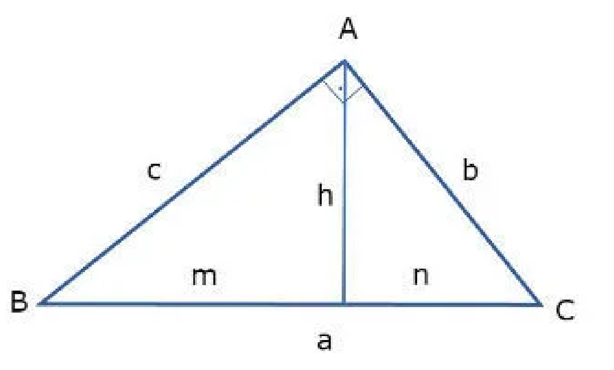
As razões denominadas cossecante, secante e cotangente são as respectivas inversas das razões anteriores e denotadas por $\text{cossec}\alpha$, $\text{sec}\alpha$ e $\text{cotg}\alpha$.

Exemplo:

Figura 3.6: Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

1.3 Relações métricas no triangulo retângulo

Veremos algumas relações métricas no triangulo retângulo que serão demostradas a seguir através de semelhança de triângulos:



Sendo:

a: medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90º);

b: cateto;

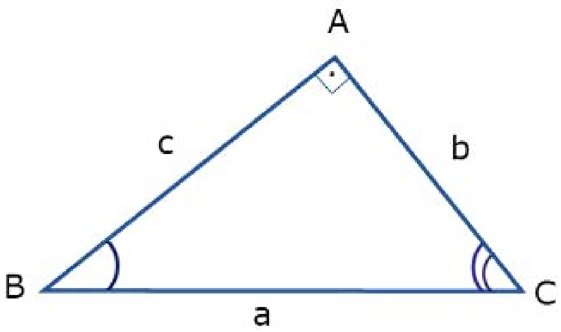
c: cateto;

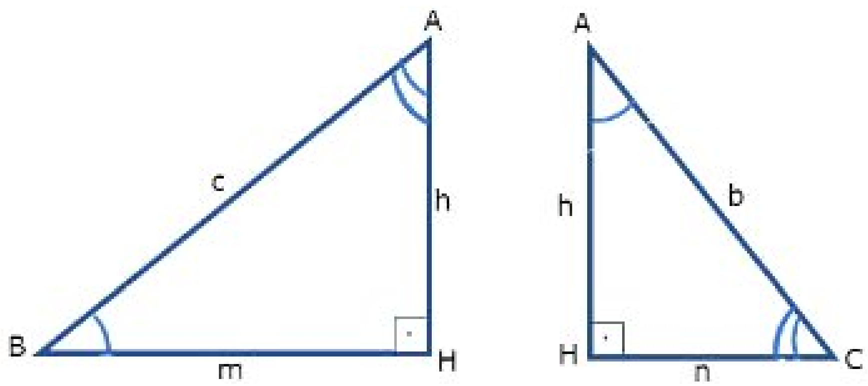
h: altura relativa à hipotenusa;

m: projeção do cateto c sobre a hipotenusa;

n: projeção do cateto b sobre a hipotenusa.

Para poder encontrar as relações iremos utilizar a semelhança de triângulos. Considere os triângulos semelhantes ABC, HBA e HAC, que estão sendo representados nas imagens abaixo:





Como os triângulos ABC e HBA são semelhantes ($\Delta ABC \sim \Delta HBA$), temos as seguintes proporções:

$$\frac{a}{c} = \frac{g}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m$$

Usando que $\Delta ABC \sim \Delta HAC$ encontramos a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n$$

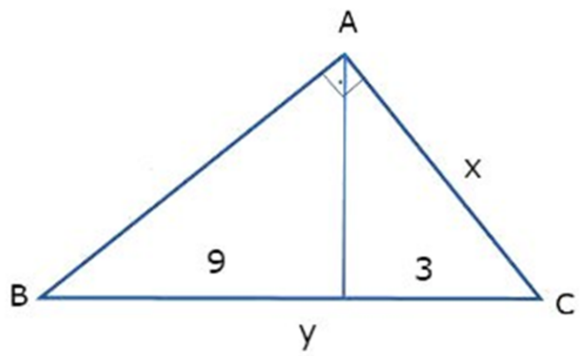
Da semelhança entre os triângulos HBA e HAC encontramos a proporção:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

Temos ainda que a soma das projeções m e n é igual a hipotenusa, ou seja: a = m + n

Algumas aplicações das relações métricas no triangulo retângulo

Exemplo 1.1. *Encontre o valor de x e de y na figura abaixo:*



Primeiro calcularemos o valor da hipotenusa, que na figura está representado por y. Usando a relação: $a = m + n$,

$$y = 9 + 3$$

$$y = 12$$

Para encontrar o valor de x, usaremos a relação $b^2 = a \cdot n$, assim:

$$x^2 = 12 \cdot 3 = 36$$

$$x = \sqrt{36} = 6$$

Exemplo 1.2. *A medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é 12 cm e uma das projeções mede 9 cm. Calcular a medida dos catetos desse triângulo. Primeiro vamos encontrar o valor da outra projeção usando a relação: $h^2 = m \cdot n$*

$$12^2 = 9 \cdot n \Rightarrow 144 = 9 \cdot n$$

$$n = \frac{144}{9} = 16$$

Vamos encontrar o valor da hipotenusa, usando a relação $a = m + n$

$$a = 16 + 9 = 25$$

Agora é possível calcular o valor dos catetos usando as relações $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$

$$b^2 = 26 \cdot 16 = 400$$

$$b = \sqrt{400} = 20$$

$$c^2 = 25 \cdot 9 = 225$$

$$c = \sqrt{225} = 15$$

1.4 Teorema de Pitágoras

A mais importante das relações métricas é o Teorema de Pitágoras. Pitágoras viveu há 2500 anos e não deixou obras escritas. O que se sabe de sua biografia e de suas ideias é uma mistura de lenda e história real. Acerca de 50 km de Mileto, na ilha Jônia de Samos, por volta de 589 aC. nasceu Pitágoras, que também esteve no Egito e, por desavenças com o tirano Polícrates, de Samos, mudou-se para Crotona ao sul da Península Itálica onde fundou uma sociedade voltada ao estudo da Filosofia, das Ciências Naturais e da Matemática, chamada Escola Pitagórica. Rapidamente, os membros desta sociedade passaram a ver números por toda a parte concluindo que o Universo era regido por uma inteligência superior essencialmente matemática.

Atualmente não há documentos que justifiquem a afirmação de que o Teorema de Pitágoras foi demonstrado pela primeira vez pelos Pitagóricos. Conjectura-se que os membros da mais antiga escola pitagórica conheciam muito bem a geometria dos babilônios, portanto, as idéias básicas do teorema poderiam ter suas origens em outras épocas bem mais remotas. O maior feito teórico dos pitagóricos foi a descoberta dos números irracionais, mas seu mérito máximo consiste em haverem provocado uma verdadeira epidemia de interesse pela matemática, que contagiou a maioria das cidadesestado da Grécia.

A seguir veremos um dos teoremas mais importante da matemática, o Teorema de Pitágoras.

Teorema 1.4.1. *Em um triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Podemos demonstrar o teorema usando a soma de duas relações encontradas anteriormente.

Demonstração. Vamos somar a relação $b^2 = a \cdot n$ com $c^2 = a \cdot m$, conforme mostrado abaixo:

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot (n + m)$$

Como $a = m + n$, substituindo na expressão anterior, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Assim, o Teorema de Pitágoras pode ser enunciado como: a hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos catetos. □

A seguir, expomos a tabela **trigonométrica** exibindo apenas ângulos notáveis, isto é, os ângulos de 30º, 45º e 60º.

Tabela de valores trigonométricos

	30º	45º	60º
Senθ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosθ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tgθ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

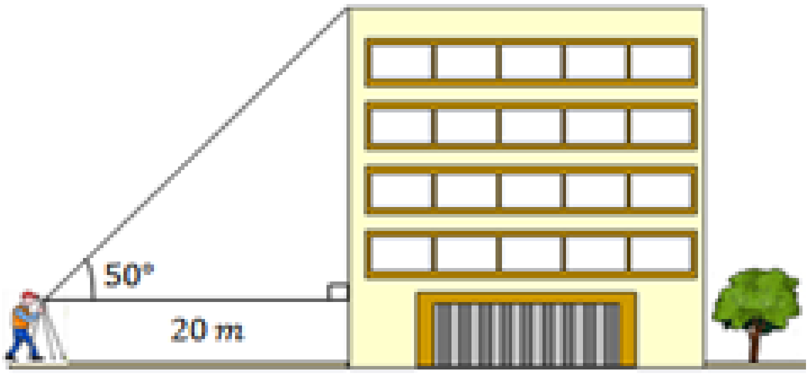
θ	Senθ	Cosθ	tgθ	θ	Senθ	Cosθ	tgθ	θ	Senθ	Cosθ	tgθ
1°	0,017	1	0,017	31°	0,515	0,857	0,601	61°	0,875	0,485	1,804
2°	0,035	0,999	0,035	32°	0,53	0,848	0,625	62°	0,883	0,469	1,881
3°	0,052	0,999	0,052	33°	0,545	0,839	0,649	63°	0,891	0,454	1,963
4°	0,07	0,998	0,07	34°	0,559	0,829	0,675	64°	0,899	0,438	2,05
5°	0,087	0,996	0,087	35°	0,574	0,819	0,7	65°	0,906	0,423	2,145
6°	0,105	0,995	0,105	36°	0,588	0,809	0,727	66°	0,914	0,407	2,246
7°	0,122	0,993	0,123	37°	0,602	0,799	0,754	67°	0,921	0,391	2,356
8°	0,139	0,99	0,141	38°	0,616	0,788	0,781	68°	0,927	0,375	2,475
9°	0,156	0,988	0,158	39°	0,629	0,777	0,81	69°	0,934	0,358	2,605
10°	0,174	0,985	0,176	40°	0,643	0,766	0,839	70°	0,94	0,342	2,747
11°	0,191	0,982	0,194	41°	0,656	0,755	0,869	71°	0,946	0,326	2,904
12°	0,208	0,978	0,213	42°	0,669	0,743	0,9	72°	0,951	0,309	3,078
13°	0,225	0,974	0,231	43°	0,682	0,731	0,933	73°	0,956	0,292	3,271
14°	0,249	0,97	0,249	44°	0,695	0,719	0,966	74°	0,961	0,276	3,487
15°	0,259	0,966	0,268	45°	0,707	0,707	1	75°	0,966	0,259	3,732
16°	0,276	0,961	0,287	46°	0,719	0,695	1,036	76°	0,97	0,242	4,011
17°	0,292	0,956	0,306	47°	0,731	0,682	1,072	77°	0,974	0,225	4,332
18°	0,309	0,951	0,325	48°	0,734	0,669	1,111	78°	0,978	0,208	4,705
19°	0,326	0,946	0,344	49°	0,755	0,656	1,15	79°	0,982	0,191	5,145
20°	0,342	0,94	0,364	50°	0,766	0,643	1,192	80°	0,985	0,174	5,671
21°	0,358	0,934	0,384	51°	0,777	0,629	1,235	81°	0,988	0,156	6,314
22°	0,375	0,927	0,404	52°	0,788	0,616	1,28	82°	0,99	0,139	7,115
23°	0,391	0,921	0,424	53°	0,799	0,602	1,327	83°	0,993	0,122	8,144
24°	0,407	0,914	0,445	54°	0,809	0,588	1,376	84°	0,995	0,105	9,514
25°	0,423	0,906	0,466	55°	0,819	0,574	1,428	85°	0,996	0,087	11,43
26°	0,438	0,899	0,488	56°	0,829	0,559	1,483	86°	0,998	0,07	14,3
27°	0,454	0,891	0,51	57°	0,839	0,545	1,54	87°	0,999	0,052	19,08
28°	0,469	0,883	0,532	58°	0,848	0,53	1,6	88°	0,999	0,035	28,63
29°	0,485	0,875	0,554	59°	0,857	0,515	1,664	89°	0,999	0,017	57,29
30°	0,5	0,866	0,577	60°	0,866	0,5	1,732				

Figura 1.1: Tabela de relação entre medidas angulares e medidas lineares

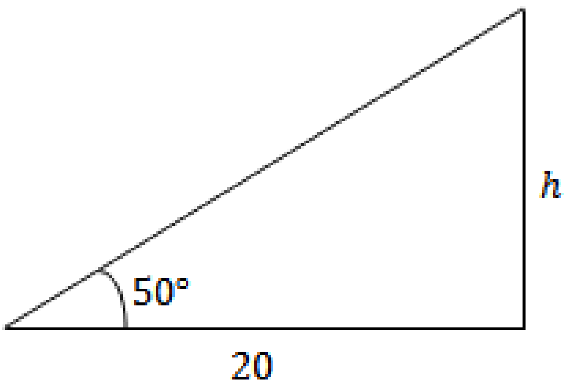
1.5 Situações problemas do ensino fundamental

As razões trigonométricas mencionadas anteriormente servem como base para resolver vários problemas no nosso cotidiano. Dentre estas aplicações podemos calcular distancias inacessíveis, como a altura de uma torre, a altura de uma pirâmide, distancia entre duas ilhas, o raio da terra, largura de um rio, entre outras.

Exemplo 1.3. *Uma pessoa com* $1,75m$ *de altura e que se encontra a* $20m$ *da base de um edifício vê o ponto mais alto dele sob um ângulo de* $50°$*. Qual a altura aproximada do edifício? (use:* $\text{sen}(50°) = 0,76$ *,* $\cos(50°) = 0,64$ *e* $\text{tg}(50°) = 1,19$*)*

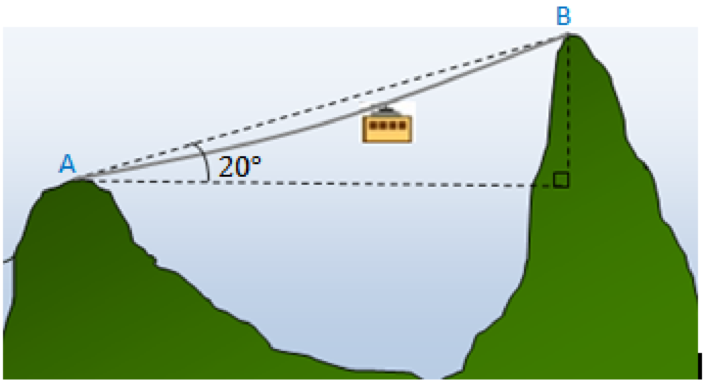


Resolução: seja h o comprimento, em metros, do segundo cateto do triângulo retângulo que aparece na figura.

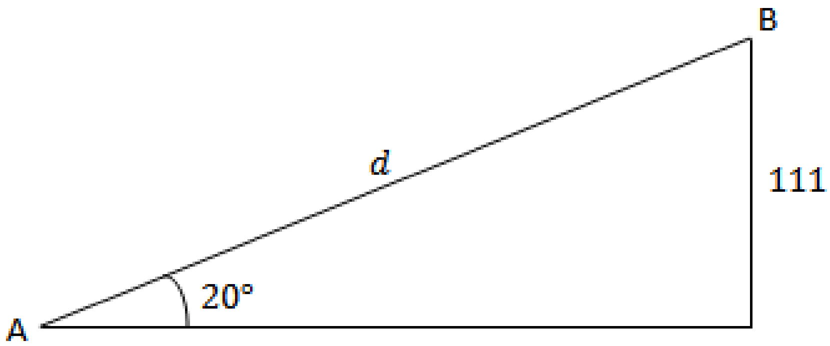


Assim, $\text{tg}(50°) = \dfrac{h}{20}$*, donde* $h = 20 \cdot \text{tg}(50°)$*. Portanto* $h \approx 23,84$ *e, então, a altura do edifício é, aproximadamente,* $25,6m$*.*

Exemplo 1.4. *A Secretaria de Turismo de uma cidade vai instalar um teleférico ligando os topos de duas montanhas, uma com* $872m$ *e a outra com* $761m$ *de altura, conforme a figura. Os engenheiros responsáveis pelo projeto mediram o ângulo de vértice* A *e calcularam que o cabo de aço que sustentará o teleférico tem curvatura e, por isso, seu comprimento é 7% maior que a medida do segmento de reta* $\overline{AB}$*. Assim, calculem o comprimento do cabo. (use:* $\text{sen}(20°) = 0,34$ *,* $\cos(20°) = 0,94$ *e* $\text{tg}(20°) = 0,36$*)*



Resolução: O desnível em metros entre os pontos A e B é a diferença $872 - 761$, ou seja, $111m$. Assim, temos o triângulo retângulo abaixo.



A distância d, em metros, entre os pontos A e B é, portanto, dada por $d = \dfrac{111}{\text{sen}(20°)}$ e assim $d \approx 324,54m$.

Como o comprimento do cabo deve ser 7% maior que a medida do segmento de reta $\overline{AB}$, então esse comprimento é, aproximadamente, $347,26m$.

Capítulo 2

Trigonometria no ensino médio: Estudo do ciclo trigonométrico, com identidades trigonométricas.

Neste capitulo, iremos enfatizar a teoria sobre a circunferência trigonométrica, unidade de medida de ângulo (radiano), congruência de arcos, funções trigonométricas, estudo dos quadrantes, relações trigonométricas, transformações trigonométricas, equações e inequações trigonométricas e resoluções de triângulos quaisquer, assuntos esses mencionados no liros didáticos do ensino médio.

Este capítulo foi baseado nas referências bibliográficas, [1], [2], [3], [7], [8], [9], [10].

2.1 Razões trigonométricas

No capitulo anterior abordamos uma definição para a unidade de medidas de ângulo que foi o grau, agora trataremos de uma nova unidade de medidas de ângulo que é o radiano (rad).

Definição 2.1.1. *O radiano (notação: rad) é definido como a medida de um ângulo central subentendido por um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco.*

A circunferência toda contém 2π radianos, o que significa que seu comprimento é igual a 2πR e que a medida dela correspondente ao arco de uma volta. É interessante observar que os egípcios chegaram ao valor aproximado de 3,16 para o π há 3500 anos partindo de um quadrado inscrito numa circunferência, cujo lado media nove unidades. Eles, então, dobraram os lados do quadrado para obter um polígono de oito lados e calcularam a razão entre os perímetros dos octógonos inscrito e circunscrito e o diâmetro da circunferência.

2.2 O Ciclo Trigonométrico

Uma circunferência que relaciona números reais a ângulos é denominada círculo trigonométrico, em que cada ponto dessa circunferência está associado a um número real, onde tal número representa um ângulo.

Para isso vamos considerar uma circunferência de raio unitário com centro na origem do sistema cartesiano ortogonal e o ponto $A = (1, 0)$. O ponto A será tomado como a origem dos arcos orientados nesta circunferência e o sentido positivo considerado será o anti-horário.

Assim, chama círculo trigonométrico ou ciclo trigonométrico, ao círculo orientado de raio unitário, cujo centro é a origem do sistema de coordenadas cartesianas, note que os eixos OX e OY decompõem o ciclo trigonométrico em quatro quadrantes que são enumerados como segue:

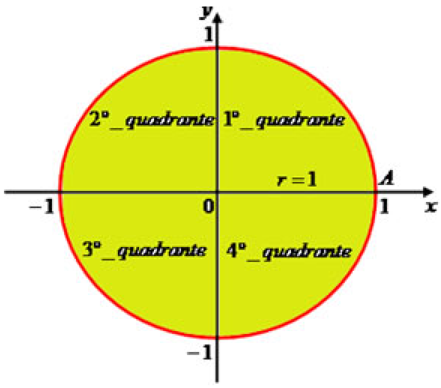


Figura 2.1: Ciclo trigonométrico

Obs.: Os quadrantes são usados para localizar pontos e a caracterização de ângulos trigonométricos. Por convenção, os pontos situados sobre os eixos não pertencem a qualquer um dos quadrantes.

Em muitos problemas relacionados a trigonometria nem sempre aparece arcos menores que 360°, as vezes precisamos levar em consideração que possuem arcos cujas medidas são maiores do que 360°. Observe que, tomando um ponto móvel que parte de um ponto A no sentido anti-horário sobre uma circunferência e para em um ponto M, formando assim, um arco AM. A medida deste arco (em graus) poderá ser menor ou igual a 360° ou ser maior do que 360°. Sendo menor ou igual a 360° a medida do arco, dizemos que este arco está em sua primeira determinação.

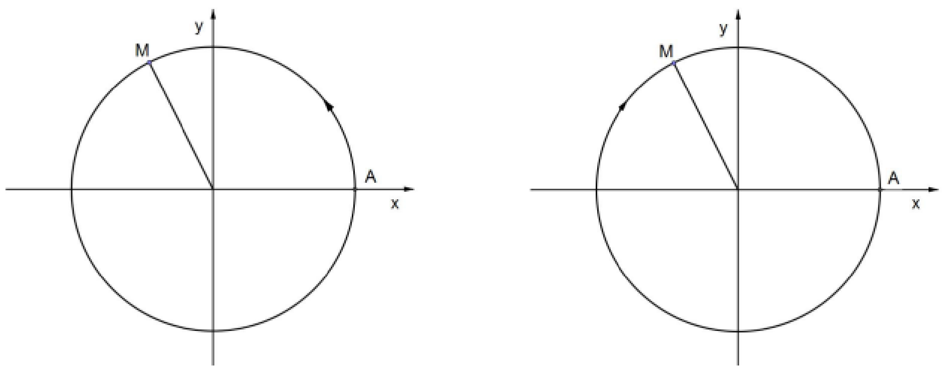


Figura 2.2: Orientação no ciclo trigonométrico

Observe que uma partícula ou um ponto móvel podem descrever uma infinidade de movimentos em uma circunferência. Sendo assim, em muito desses caminhos a circunferência poderá ser percorrida por um ponto móvel por uma ou mais vezes em um determinado sentido, antes de parar no ponto M, determinando arcos maiores do que 360º ou arcos com mais de uma volta. Daí temos que a partícula em suas trajetórias ira formar uma infinidade de arcos, porem apresentando medidas diferentes, cuja origem permanece no ponto A e cuja extremidade sendo o ponto M. ou seja, a partícula pode dar várias voltas no círculo, tanto no senti horário como no sentido anti-horário e permanecer no ponto M. Matematicamente falando seja o arco AM cuja primeira determinação tenha medida igual a m. Um ponto móvel que parte de A e pare em M, pode ter várias medidas algébricas, dependendo do percurso. Se o sentido for o anti-horário, o ponto M da circunferência trigonométrica será extremidade de uma infinidade de arcos positivos de medidas: m, $m + 2\pi$, $m + 4\pi$, $m + 6\pi$,....

Observe que caso o sentido tomado pela partícula seja o horário, o ponto M será extremidade de uma infinidade de arcos negativos de medidas: $m - 2\pi$, $m - 4\pi$, $m - 6\pi$....

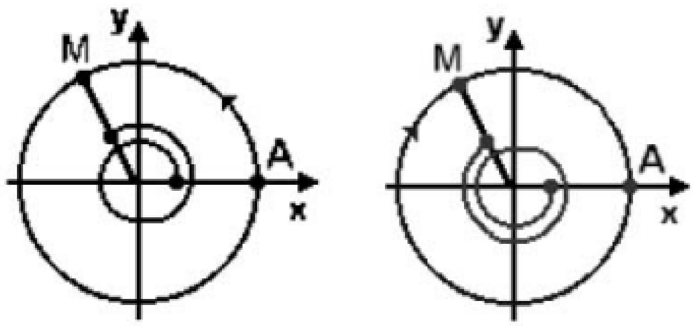


Figura 2.3: Relação de arcos no ciclo trigonométrico

Exemplo 2.1. *Se um arco de circunferência tem origem em A e extremidade em M, com a primeira determinação positiva medindo , então os arcos desta família AM, medem:*

Determinações positivas (sentido anti-horário)

$$\begin{aligned}
k &= 0\mu(AM) = \frac{\pi}{3}\\
k &= 1\mu(AM) = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}\\
k &= 2\mu(AM) = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}\\
k &= 3\mu(AM) = \frac{\pi}{3} + 6\pi = \frac{19\pi}{3}\\
&...\\
k &= n\mu(AM) = \frac{\pi}{3} + 2n\pi = \frac{(1+6n)\pi}{3}
\end{aligned}$$

Determinações negativas (sentido horário)

$$\begin{aligned}
k &= -1\mu(AM) = \frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{-5\pi}{3}\\
k &= -2\mu(AM) = \frac{\pi}{3} - 4\pi = \frac{-11\pi}{3}\\
k &= -3\mu(AM) = \frac{\pi}{3} - 6\pi = \frac{-17\pi}{3}\\
k &= -4\mu(AM) = \frac{\pi}{3} - 8\pi = \frac{-23\pi}{3}\\
&...\\
k &= -n\mu(AM) = \frac{\pi}{3} - 2n\pi = \frac{(1-6n)\pi}{3}
\end{aligned}$$

Dois arcos trigonométricos são ditos côngruos, quando a diferença entre eles é um número múltiplo de $360°$. Tomando x e y dois arcos trigonométricos, para que eles sejam côngruos , isso só ocorrerá se e somente se: $x - y = k.\ 360°$, sendo k um número inteiro. Portanto, para saber se dois arcos são côngruos, basta verificar se a diferença entre eles é um múltiplo de $360°$ (ou 2π radianos, pois $2\pi rad = 360°$).

Obs.: Arcos de uma mesma família são côngruos. Exemplo: Os arcos $2780°$ e $1700°$, são côngruos, pois: $2780° - 1700° = 1080°$ e como $1080°$ é divisível por $360°$, note que $\frac{1080°}{360°} = 3$.

Exemplo 2.2. *Calcular a primeira determinação positiva do conjunto de arcos de mesma extremidade que o arco A de medida: $A = 810°$.*

Resposta: Note que o arco de $810°$ pode ser escrito na forma: $810° = 2 \cdot 360° + 90°$

Isto significa que precisamos dar 2 voltas completas e mais $90°$ para completar o arco de $810°$. Portanto , a primeira determinação positiva é $90°$.

Exemplo 2.3. *Calcular a primeira determinação positiva do conjunto de arcos de mesma extremidade que o arco A de medida: $B = -1820°$.*

Resposta:

Note que o arco de $1820°$ pode ser escrito na forma: $1820 = 5(360) + 20$. Como a orientação é negativa, o ponto móvel se desloca no sentido horário Isto significa que precisamos dar 5 voltas completas e mais $20°$ no sentido horário para completar o arco de $1820°$.

Portanto, a primeira determinação positiva é $360° - 20° = 340°$

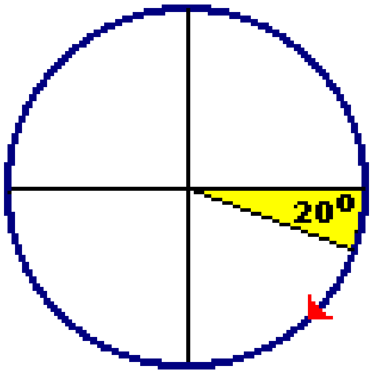


Figura 2.4: Ângulo no sentido anti-horário

Exemplo 2.4. *3) Verificar se os arcos de medidas* $\frac{7\pi}{3}$ *e* $\frac{19\pi}{3}$ *são arcos côngruos?*

Resposta:

Como a diferença entre as medidas de dois arcos dados é:

$$d = \frac{19\pi}{3} - \frac{7\pi}{3} = 4\pi,$$

que é um múltiplo de 2π*, então os arcos são côngruos.*

2.3 Funções Trigonométricas

Iniciaremos definindo as funções trigonométricas. Em seguida, apresentaremos o gráfico de cada uma delas. Durante a análise gráfica, discutiremos o período, a imagem e detalhes relevantes para melhor aproveitamento dos alunos nesse estudo.

2.3.1 Função seno:

Vimos que para qualquer número real x, podemos calcular o valor do seno de x. Sendo assim, o nosso domínio será o conjunto dos números reais e usaremos essa razão trigonométrica como lei de formação da função que definiremos a seguir:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \text{sen}(x) \end{aligned}$$

O gráfico da Função Seno:

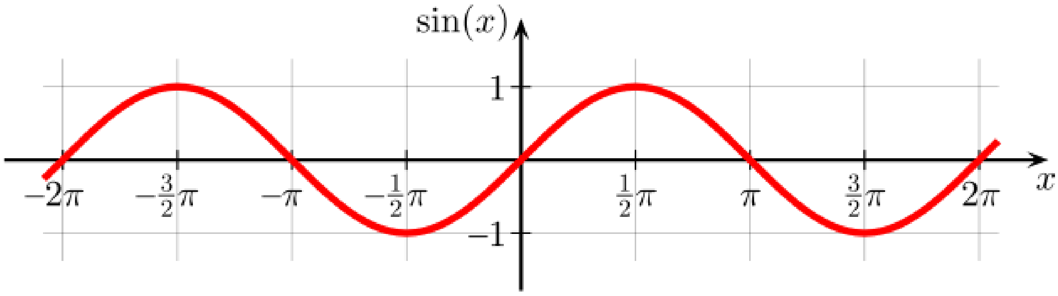


Figura 2.5: Gráfico da função senoidal

Primeiramente, pode ser discutido com os alunos, informalmente, o que acontece em cada um dos intervalos citados abaixo:

- No intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,a função é crescente e varia de 0 a 1.
- No intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, a função é decrescente e varia de 1 a 0.
- No intervalo $\left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, a função é decrescente e varia de 0 a -1.
- No intervalo $[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi]$ a função é crescente e varia de -1 a 0.

No círculo trigonométrico, o **sinal da função seno** é positivo quando x pertence ao primeiro e segundo quadrantes. Já no terceiro e quarto quadrantes, o sinal é negativo.

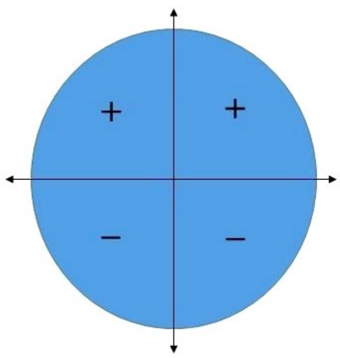


Figura 2.6: Positividade da função seno

Além disso, no primeiro e quarto quadrantes a função f é **crescente**. Já no segundo e terceiro quadrantes a função f é **decrescente**.

Vale ressaltar, após essa análise, que para valores de x maiores que 2π estaremos trabalhando com arcos congruentes, que nos darão consequentemente os mesmos valores já obtidos no primeiro ciclo, isto é, a análise se repete periodicamente. Com isso poderemos dizer que a Função Seno é periódica e que o período da mesma é 2π.

Período da Função Seno

Definição 2.3.1. *O **período** corresponde ao menor intervalo de tempo em que acontece a repetição de determinado fenômeno.*

Observe no gráfico que o período é 2π Paridade da função Em relação à simetria, a função seno é uma função ímpar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

2.3.2 Função cosseno

Domínio e imagem da função cosseno

Como os ângulos, em cos(x), podem variar dentro do conjunto dos números reais, entende-se que o domínio da função cosseno também é dado por $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Semelhantemente, no eixo y do círculo trigonométrico, o valor de $\cos x$ se estende entre -1 e 1, ou seja, $Im \cos x = [-1; 1]$. Observe no gráfico:

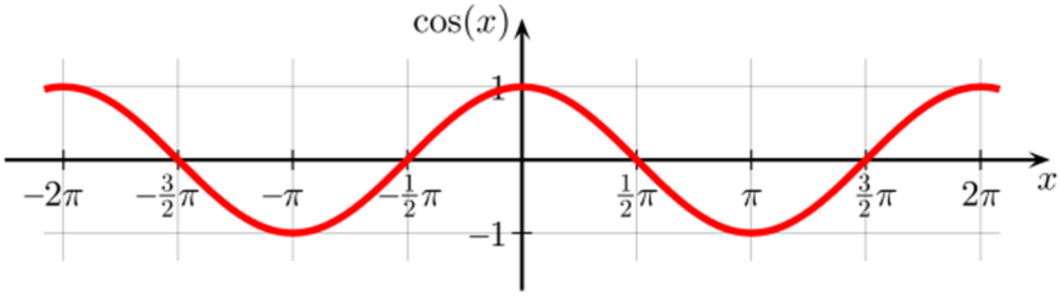


Figura 2.7: Gráfico da função cossenoidal

Primeiramente, pode ser discutido com os alunos, informalmente, o que acontece em cada um dos intervalos citados abaixo:

- No intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,a função é decrescente e varia de 1 a 0.
- No intervalo $[\dfrac{\pi}{2}, \pi]$, a função é decrescente e varia de 0 a -1.
- No intervalo $[\pi, \dfrac{3\pi}{2}]$, a função é crescente e varia de -1 a 0.
- No intervalo $[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi]$ a função é crescente e varia de 0 a 1.

A função cosseno é dada pela equação $f(x) = \cos(x)$. Sua variação no ciclo trigonométrico é regida pelo diâmetro horizontal, quando os valores estão no hemisfério direito, serão positivos. Na porção esquerda, negativos:

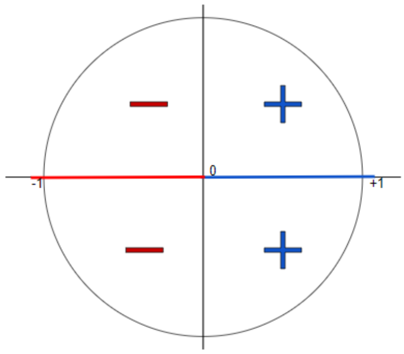


Figura 2.8: Positividade da função cosseno

Além disso, no primeiro e segundo quadrantes a função f é decrescente. Já no terceiro e quarto quadrantes a função f é crescente.

Período da Função cosseno

Observe no gráfico que o menor intervalo de tempo em que acontece a repetição dos valores da função cosseno que o período é 2π

Paridade da função

Em relação à simetria, a função cosseno é uma função par: cos(-x) = cos(x)

2.3.3 Função tangente

Como nas outras funções trigonométricas, a lei de formação da função tangente é tal que $f(x) = \text{tg}x$. Apesar de tal semelhança, essa equação possui muitas particularidades, já que é uma razão entre $\dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$.

Como, em uma divisão, o denominador não pode ser igual a zero, não existe resposta para $f(x) = \text{tg}x$ quando o $\cos x = 0$. Por tal motivo temos que todos os ângulos que faz com que o cosseno seja igual a zero, faz a função tangente não existir , ou seja, não são aceitos no domínio de $\tanh x$. Logo teremos que o domínio da função tangente é dado por $Dom(tg) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq +k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Isso indica que para $x = +k\pi$, a função tangente não será definida.

Já o conjunto da imagem da função tangente corresponde a $\mathbb{R}$, ou seja, o conjunto dos números reais, ela pode variar infinitamente, já que a reta que a define não está dentro do ciclo trigonométrico e sempre é crescente. Como você pode observar no gráfico abaixo, o valor de $\text{tg}x$ tende ao infinito:

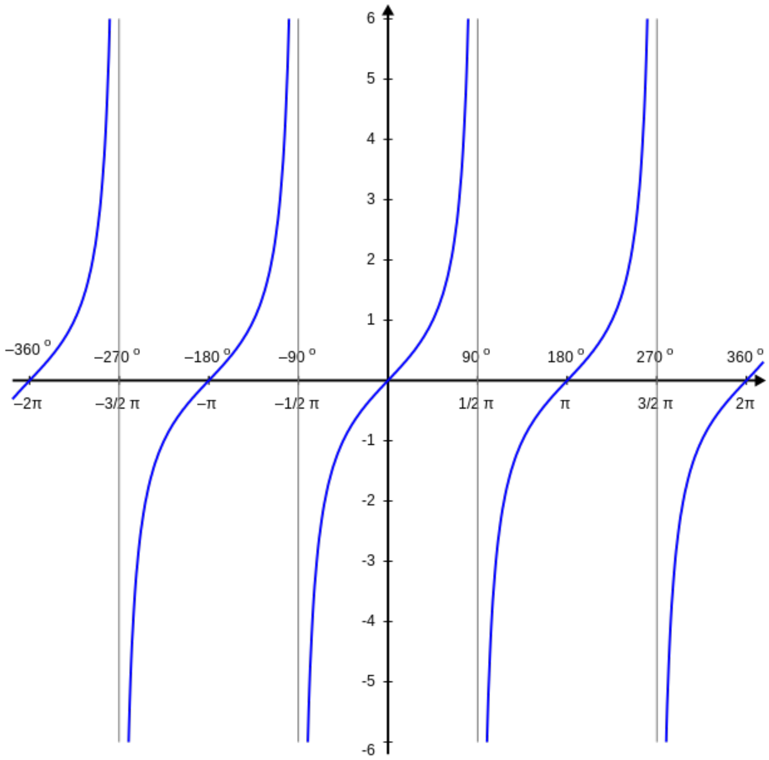


Figura 2.9: Gráfico da função tangente

Observando o gráfico acima percebemos que a função tangente é uma função periódica e seu período é π. No círculo trigonométrico, o sinal da função tangente é positiva quando x pertence ao primeiro e terceiro quadrantes. Já no segundo e quarto quadrantes, o sinal é negativo.

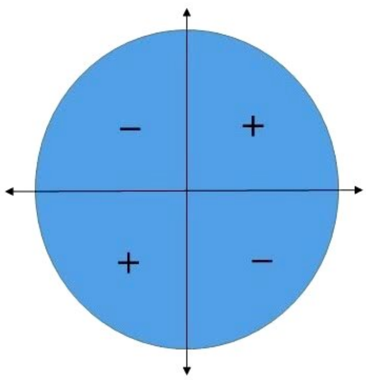


Figura 2.10: Positividade da função tangente.

Além disso, a função f definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$ é sempre crescente em todos os quadrantes do círculo trigonométrico.

Paridade da função

Em relação à simetria, a função tangente é uma função ímpar:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

2.3.4 Função cossecante

Definimos a função cossecante como $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen}x}, x \neq k\pi$. Lembrando alguns conceitos do Círculo Trigonométrico, fica claro que a função cossecante tem imagem $\mathbb{R}-]-1,1[$, ou seja $\text{cossec}x \leq -1$ ou $\text{cossec}x \geq 1$, para todo x real.

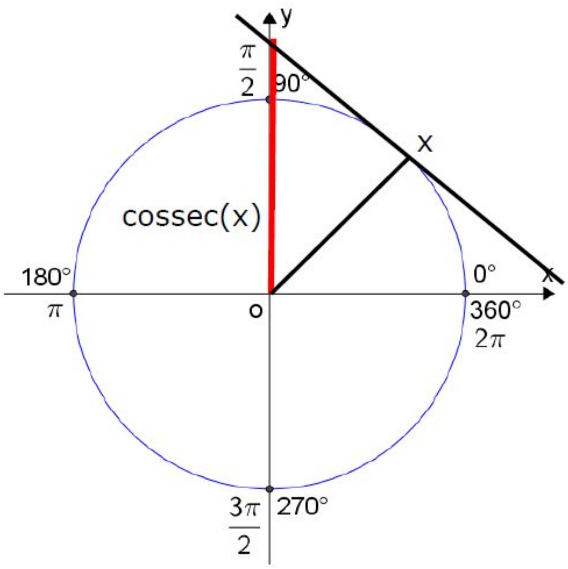


Figura 2.11: Cossecante no ciclo trigonométrico

A cossecante de um ângulo sempre estará sob o eixo das ordenadas OY. Nesse sentido, o cossecante de um ângulo será sempre positivo no 1º e 2º quadrantes e negativo no 3º e 4º quadrantes

Gráfico da função cossecante

Vamos ilustrar o gráfico da função cossecante. Para isso, vamos construir uma tabela e, a partir dela, o gráfico:

x	$f(x) = \text{cossec}x$
0	$\nexists$
$\dfrac{\pi}{2}$	1
π	$\nexists$
$\dfrac{3\pi}{2}$	-1
2π	$\nexists$

As retas onde a função cossecante não existe, $x = k\pi$ são chamadas de assíntotas.

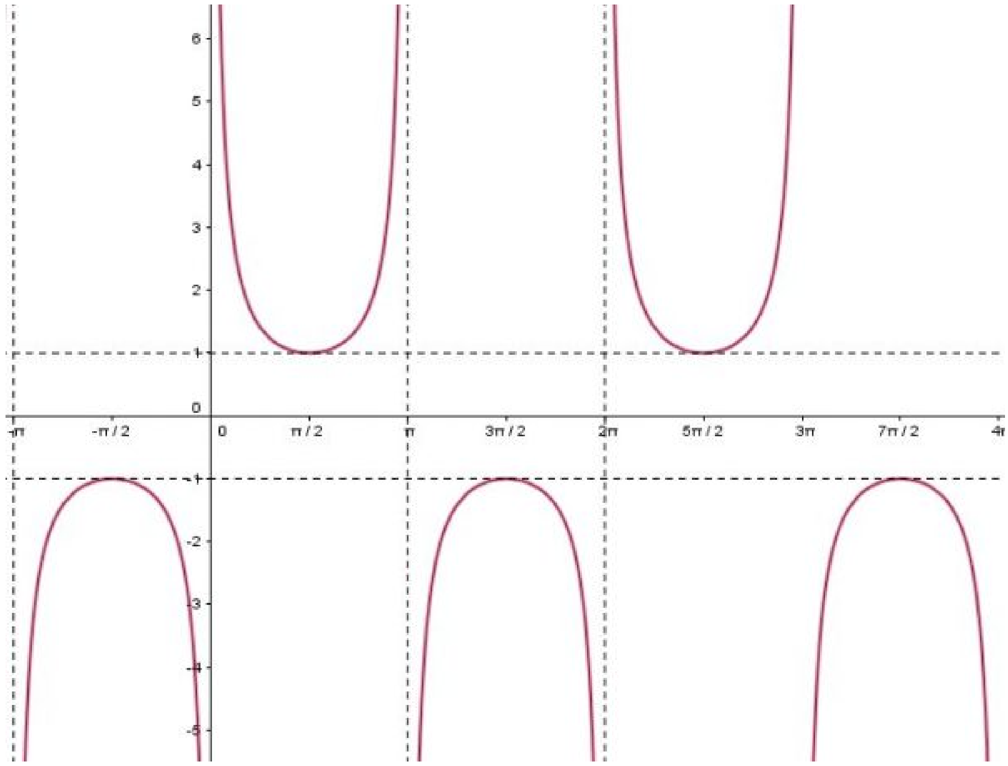


Figura 2.12: Grafico da Cossecante.

Sinal da cossecante

É possível percebermos, na representação no ciclo, que, para ângulos maiores que 0º e menores 180º, a cossecante será sempre positiva. Para ângulos acima de 180º, o sinal da cossecante será negativo, ou seja, a cossecante é positiva no 1º e 2º quadrantes e negativa no 3º e 4º quadrantes.

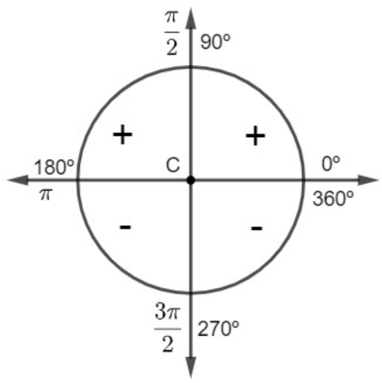


Figura 2.13: Positividade da função cossecante

2.3.5 Função Secante

Definimos a função secante como:

$$f(x) = \sec x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Lembrando alguns conceitos do Círculo Trigonométrico, fica claro que a função secante tem imagem $\mathbb{R}-]-1,1[$, ou seja $\sec x \leq -1$ ou $\sec x \geq 1$, para todo x real.

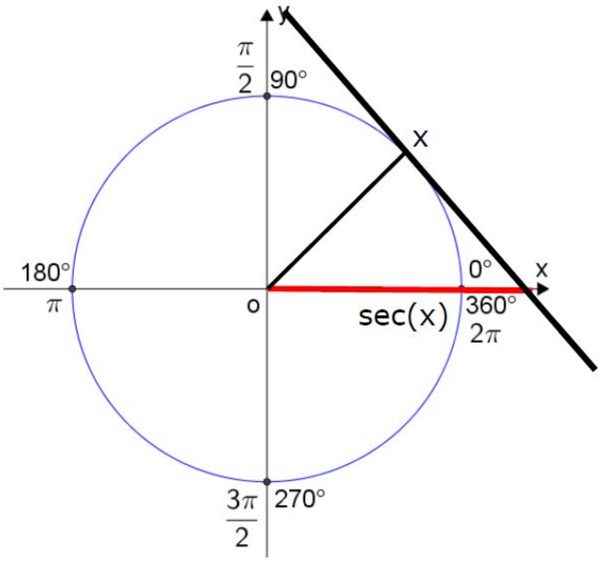


Figura 2.14: Secante no ciclo trigonométrico

Gráfico da função secante

Vamos ilustrar o gráfico da função secante. Para isso, vamos construir uma tabela e, a partir dela, o gráfico:

x	$f(x) = \sec x$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$
2π	1

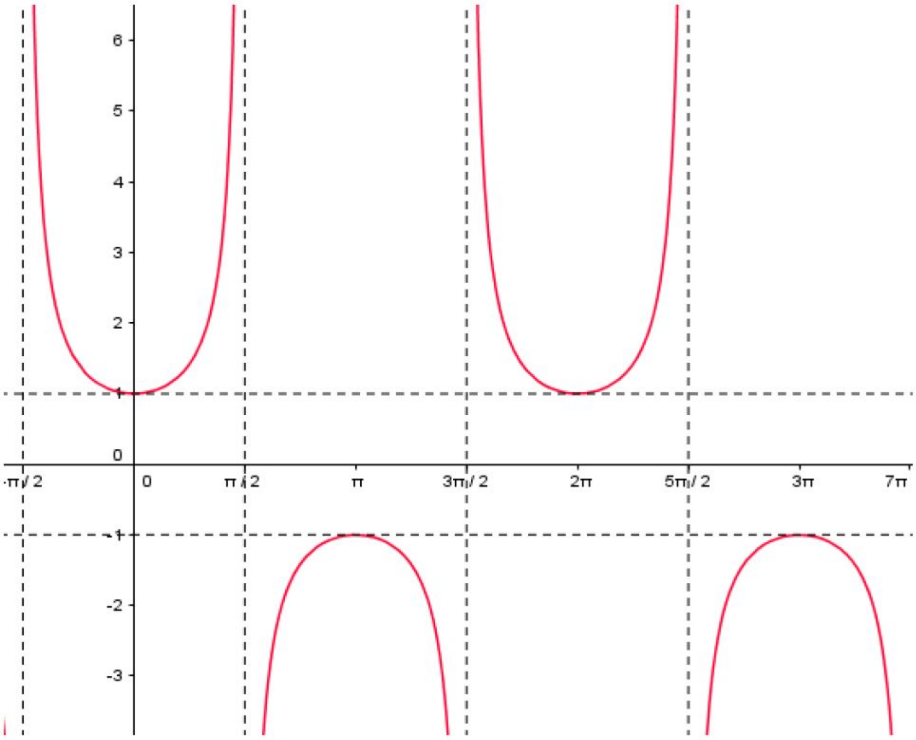


Figura 2.15: Grafico da função secante

As retas onde a função secante não existe, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ são chamadas de assíntotas.

Sinal da secante

Para ângulos maiores que 0° e menores 90° e para ângulos maiores que 270° e menores que 360°, a secante será sempre positiva. Para ângulos acima de 90° e menores que 270°, o sinal da secante será negativo, ou seja, a secante é positiva no 1° e 4° quadrantes e negativa no 2° e 3° quadrantes.

A secante de um ângulo sempre estará sob o eixo das abscissas OX. Nesse sentido, o secante de um ângulo será sempre positivo no 1° e 4° quadrantes e negativo no 2° e 3° quadrantes.

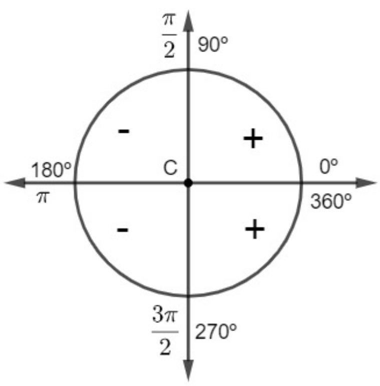


Figura 2.16: Positividade da função secante

2.3.6 Função cotangente

Definimos a função cotangente como:

$$f(x) = x, x \neq k\pi$$

Lembrando alguns conceitos do Círculo Trigonométrico, fica claro que a função cotangente tem imagem Real, ou seja, é válida para todo x real.

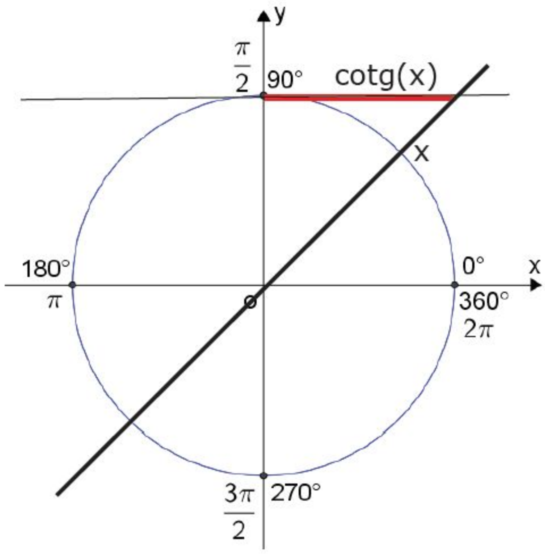


Figura 2.17: Cotagente no ciclo trigonométrico

Sinal da cotangente

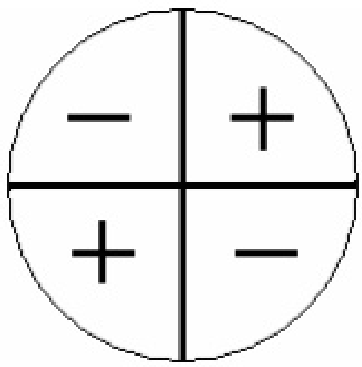


Figura 2.18: Positividade da cotagente

A cotangente de um ângulo sempre estará paralela ao eixo das abscissas (x). Nesse sentido, a cotangente de um ângulo será sempre positiva no 1° e 3° quadrantes e negativo no 2° e 4° quadrantes

Gráfico da função cotangente

Vamos ilustrar o gráfico da função cotangente. Para isso, vamos construir uma tabela e, a partir dela, o gráfico:

x	$f(x) = \text{cotg}x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$
2π	0

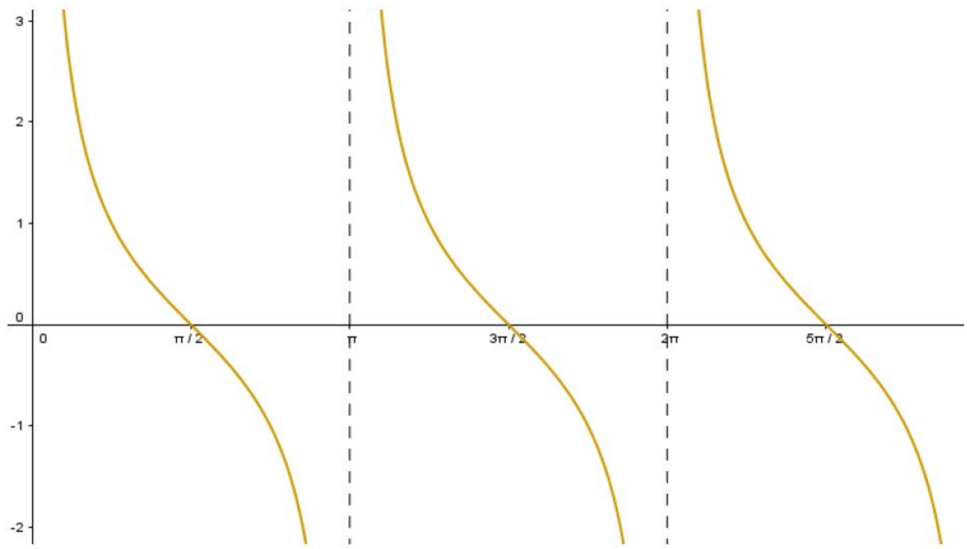


Figura 2.19: Esboço do grafico da cotagente

As retas onde a função cotangente não existe, $x = k\pi$, são chamadas de assíntotas.

Um situação problema

(Enem) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de certo produto sazonal pode ser descrito pela função

$$P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$$

onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro. Na safra, o mês de produção máxima desse produto éjaneiro. abril. junho. julho. outubro.

8) *Resposta.* Note que a safra irá atingir seu valor máximo quando o preço for o mínimo possível, e, para isso, o menor valor que o cosseno pode assumir é -1. logo, o ângulo que faz com que cos(a) = -1 é a = π, portanto,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) &= -1 \\
\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) &= \pi \\
\pi x - \pi &= 6\pi \\
\pi x &= 6\pi + \pi \\
\pi x &= 7\pi \\
x &= \frac{7\pi}{\pi} \\
x &= 7
\end{aligned}$$

Sabemos que o mês 7 é o mês de julho. □

2.4 Relações trigonométricas

Dando continuidade aos estudos de trigonometria, no 2° ano do ensino médio é necessário abordar as transformações, igualdades e inequações fundamentais. Ao estudar as fórmulas da adição, multiplicação e divisão, é importante a dedução dessas fórmulas para não ficar algo voltado somente à memorização, mas sim algo construído de forma consistente, uma vez que nessa etapa os alunos já estão mais maduros para lidar com conceitos abstratos e deduções lógicas.

Em geral, os livros trazem as fórmulas prontas e exercícios práticos que exigem a simples aplicação de tais fórmulas, fazendo com que o ensino de trigonometria fique restrito, muitas vezes, à mera memorização, mesmo sem significado. Esse tipo de abordagem contradiz a própria evolução histórica da trigonometria que se desenvolveu principalmente devido às questões práticas. Logo, é pertinente que seja feita uma discussão sobre a importância desses estudos para resolver problemas práticos em situações que exigem, principalmente, estimativas dos valores trigonométricos de ângulos não notáveis, mas que de certa forma podem ser decompostos em soma ou diferença de ângulos notáveis. Há também a necessidade de trabalharmos com triângulos não retângulos, uma vez que no cotidiano nos deparamos com triângulos de diversas formas. Para isso, programas gráficos de computador, como o Graphmatica, podem ser utilizados como instrumentos aliados na construção dos conhecimentos do aluno que deve ser motivado e encorajado a questionar, pesquisar e refletir sobre as ligações entre as abordagens algébrica e geométrica, fazendo uma análise crítica dos resultados.

Algumas equações envolvendo funções trigonométricas são verdadeiras para todos os ângulos e são conhecidas como identidades trigonométricas. Muitas expressam relações geométricas importantes. Por exemplo, as identidades Pitagoreanas são uma expressão do teorema de Pitágoras. Aqui há algumas das identidades mais comumente utilizadas, assim como as fórmulas mais importantes conectando ângulos e lados de um triângulo arbitrário e algumas demonstrações que podem ser desenvolvidas com os alunos no ensino médio.

2.4.1 Relação fundamental da trigonometria:

No círculo trigonométrico, os valores do seno são representados no eixo vertical, e os valores do cosseno pelo cosseno são representados no eixo horizontal. Ao determinarmos um ponto qualquer pertencente à circunferência, temos sua projeção no eixo dos senos e dos cossenos. Ao traçarmos um segmento de reta da origem dos eixos do círculo até o ponto determinado, formamos um ângulo θ, como mostram os esquemas a seguir: Com base no triângulo retângulo formado, aplicamos o teorema de Pitágoras, para verificar que: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. No caso acima temos θ no primeiro quadrante, mas caso ele esteja em qualquer outro quadrante chegamos à mesma relação lembrando que: $\operatorname{sen}\pi - \theta = \operatorname{sen}\theta$, $\operatorname{sen}\pi + \theta = -\operatorname{sen}\theta$, $\cos\pi - \theta = -\cos\theta$ e $\cos\pi + \theta = -\cos\theta$. Como $(\operatorname{sen}\theta)^2 = (-\operatorname{sen}\theta)^2$ e $(\cos\theta)^2 = (-\cos\theta)^2$, a relação fundamental continua válida.

2.4.2 Dedução da identidade fundamental da trigonometria

Observe o arco trigonométrico a seguir

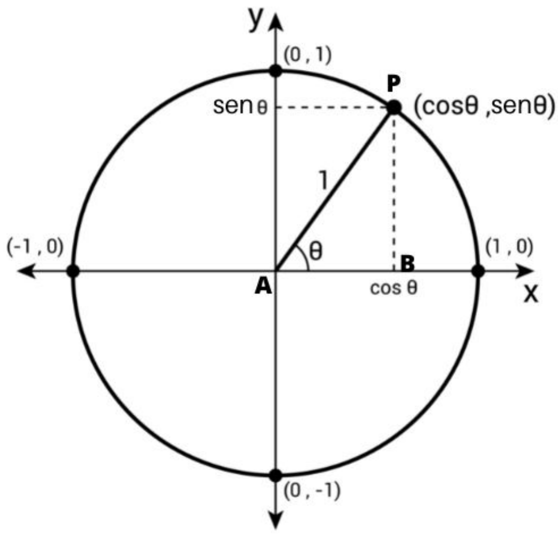


Figura 2.20: identidade fundamental da trigonometria

Note que , a demonstração da identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ também se baseia na circunferência trigonométrica. Na imagem anterior, observe que o triângulo ABP é retângulo em B e que $AB = \cos\theta$, $BP = \operatorname{sen}\theta$e $AP = 1$. Fazendo a Aplicação do teorema de Pitágoras nesse triângulo, temos que:

Hipotenusa $= AP$

Catetos $= AB$ e BP.

Logo, fazendo a aplicação temos:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

2.4.3 Atividade

1 1) Considerando que $\cos x = \frac{1}{3}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine $\operatorname{sen}x$.

Resposta.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
\operatorname{sen}^2 x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 &= 1 \\
\operatorname{sen}^2 x &= 1 - \frac{1}{9} \\
\operatorname{sen}^2 x &= \frac{9-1}{9} \\
\operatorname{sen}^2 x &= \frac{8}{9} \\
\sqrt{\operatorname{sen}^2 x} &= \sqrt{\frac{8}{9}} \\
\operatorname{sen}x &= \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Pelo fato de x pertencer ao primeiro quadrante temos que o seno é positivo.

Portanto o $\operatorname{sen}x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ □

2.4.4 Lei dos senos

De acordo com o triângulo ABC ilustrado na figura a seguir:

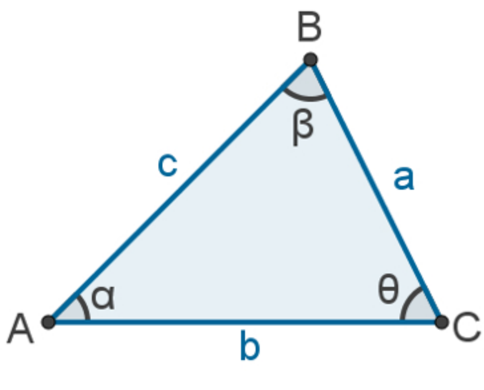


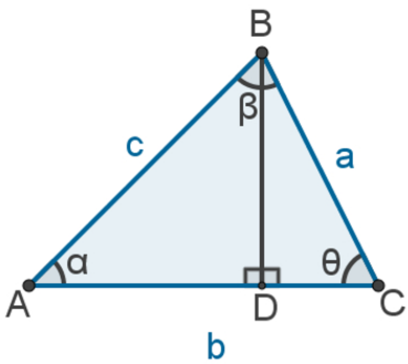
Figura 2.21: Lei dos senos

A lei dos senos garante que a razão entre cada lado do triangulo e o seno do seu respectivo lado é sempre proporcional, obedecendo a seguinte proporção:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\theta}$$

Dedução da lei dos senos

Primariamente para fazer a demonstração dessa propriedade, note a construção da altura desse triângulo, relativa à base AC.



Sabemos que a medida da base AC é igual a b. Observe que a altura BD corta o lado AC em duas partes que não necessariamente iguais. Porém , uma determinada altura sempre irá formar um ângulo de 90° com a base do triângulo. Daí temos a formação de dois triângulos retângulos na figura: o triângulo ABD e o triângulo BCD.

Fazendo o cálculo do seno do ângulo α, referente ao triângulo ABD, teremos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{BD}{c}$$

Daí temos, que a medida do lado BD mede:

$$\text{sen}\alpha \cdot c = BD$$

Fazendo o cálculo do seno do ângulo θ, referente ao triângulo BCD, teremos:

$$\text{sen}\theta = \frac{BD}{a}$$

Daí temos, que a medida do lado BD também mede:

$$\text{sen}\theta \cdot a = BD$$

Observando que tanto $\text{sen}\theta \cdot a$ como $\text{sen}\alpha \cdot c$ são iguais a BD, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$\text{sen}\theta \cdot a = \text{sen}\alpha \cdot c$$

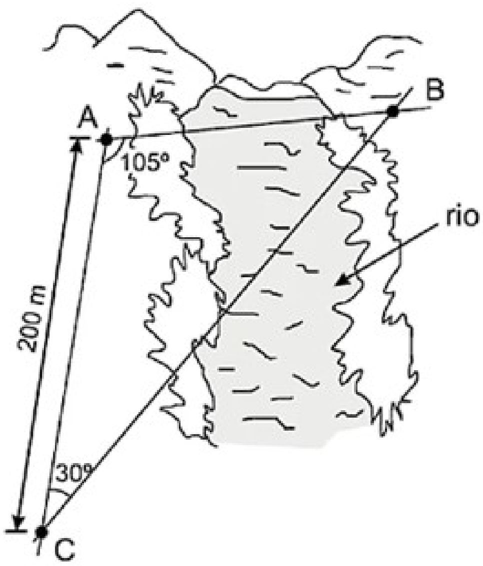
Logo,

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\theta}$$

Fazendo a construção da altura relativa a outro lado desse mesmo triângulo e realizando os cálculos análogos aos que foram apresentados, é possível encontrar a última fração usada na lei dos senos.

Exemplo 2.5. *(Lei dos senos)*

(UFPB — adaptado) A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, A e B, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, C, distante $200m$ do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos nos vértices C e A mediam, respectivamente, $30°$ e $105°$, conforme ilustrado na figura a seguir.



Com base nessas informações, qual a distância, em metros, do ponto A ao ponto B?

Resposta. Como a soma dos ângulos inteiros de um triângulo é $180°$, temos que $B = 45°$. Aplicando a lei dos senos:

$$\begin{aligned}\frac{c}{\text{sen}C} &= \frac{b}{\text{sen}B}\\ \frac{c}{\text{sen}30°} &= \frac{b}{\text{sen}45°}\\ c &= 100\sqrt{2}m\end{aligned}$$

□

Veja mais sobre "Lei dos senos"em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/lei-dos-senos.htm

2.4.5 Lei dos cossenos

Conhecemos como lei dos cossenos, ou teorema dos cossenos, uma **relação entre os lados e ângulos de um triângulo**. A lei dos cossenos mostra que o quadrado de um dos lados do triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto de ambos pelo cosseno do ângulo formado entre eles.

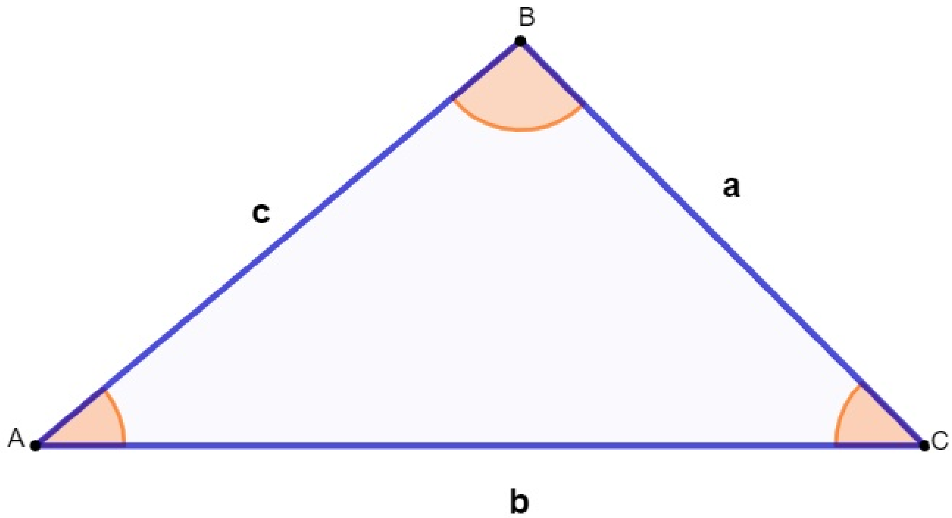


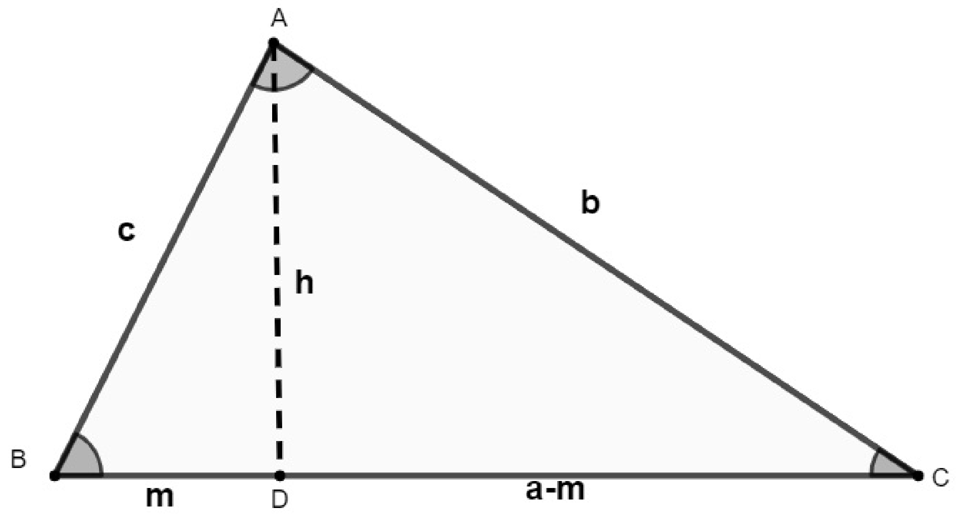
Figura 2.22: Lei dos cossenos

As fórmulas da lei dos cossenos são:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \end{aligned}$$

Dedução da lei dos cossenos

Primariamente **construiremos um triângulo** ABC **de lados com medidas** a ,b **e** c **respectivamente** opostos aos ângulos A, B e C, para fazer a demonstração dessa propriedade, note a construção da altura desse triângulo, relativa à base BC tocando no ponto D. O segmento DC mede $a – m$, como na imagem a seguir.



Iremos começar analisando o triângulo ABD, constatamos que:

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{m}{c} \\ c \cdot \cos B &= m \end{aligned}$$

Logo em seguida aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$c^2 = m^2 + h^2,$$

que pode ser reescrita como

$$h^2 = c^2 + m^2.$$

Fazendo agora a Aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo ACD:

$$b^2 = h^2 + (a - m)^2,$$

daí temos:

$$b^2 = h^2 + a^2 - 2am + m^2.$$

Note que $h^2 = c^2–m^2$, então fazendo a substituição de h^2 por $c^2–m^2$, obtemos:

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2–m^2 + a^2–2am + m^2 \\ b^2 &= c^2 + a^2–2am \end{aligned}$$

Sabemos também que $m = c \cdot \cos B$, então:

$$b^2 = c^2 + a^2–2a \cdot c \cdot \cos(B)$$

Portanto, fica demonstrada a lei dos cossenos. Para as demais relações, a forma de demonstração é análoga.

Exemplo 2.6. *Lei dos cossenos*

(Unifor) Um terreno de forma triangular tem frente de $10m$ *e* $20m$*, em ruas que formam, entre si, um ângulo de* $120°$*. A medida do terceiro lado do terreno, em metros, é:*

a) $10\sqrt{5}$

b) $10\sqrt{6}$

c) $10\sqrt{7}$

d) 26

e) $20\sqrt{2}$

Resposta. Perceba que são conhecidos dois lados do terreno triangular e o ângulo entre eles, mas buscamos o terceiro lado. Assim, podemos aplicar a lei dos cossenos:

$$c^2 = 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot \cos 120°,$$

Como $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$, então:

$$\begin{aligned} c^2 &= 100 + 400 + 200 \\ c^2 &= 700 \end{aligned}$$

Portanto concluímos que $c = 10\sqrt{7}$ □

2.5 Adição e Subtração de arcos

Pela grande dificuldade de demonstrar os resultados sobre adição e subtração de arcos, levam alguns professores a optarem por apenas apresentar e exercitar as propriedades por meio de exemplos de aplicação. Levando em consideração esse ponto de vista , tive como uma motivação a pesquisar e expor nesse trabalho métodos mais viáveis para fazer a demonstração de algumas destas relações.

2.5.1 Dedução da identidades da adição e subtração de arcos

Neste estudo, iremos demonstrar as seguintes relações trigonométricas:

i) $\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$;

ii) $\cos(a-b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$;

iii) $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(a)$;

iv) $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) - \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(a)$;

v) $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a) \cdot \operatorname{tg}(b)}$;

vi) $a - b = \dfrac{\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(b)}{1 + \operatorname{tg}(a) \cdot \operatorname{tg}(b)}$.

Demonstração. Considere o círculo trigonométrico de raio 1 abaixo:

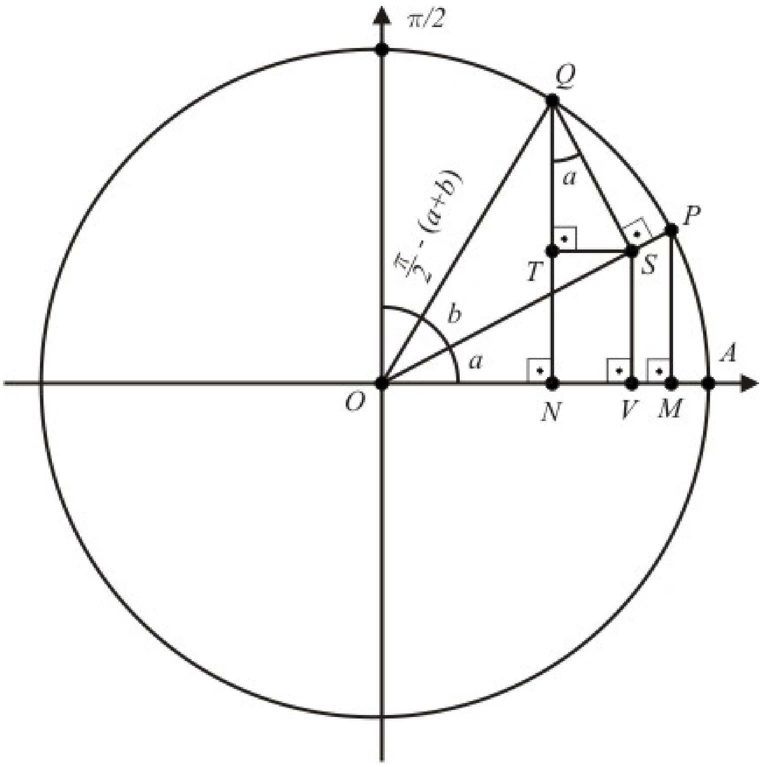


Figura 2.23: Dedução de identidades trigonométricas fundamentais.

Seja o arco $\widehat{AP}$ com determinação a e o arco $\widehat{PQ}$ com determinação b. O arco $\widehat{AQ}$ tem determinação $(a+b)$.

Observando as construções geométricas no círculo trigonométrico acima, podemos deduzir que os triângulos OMP, OVS e QTS são retângulos e semelhantes. Então, podemos construir algumas relações:

$$\overline{OM} = \cos(a) \tag{2.1}$$
$$\overline{OS} = \cos(b) \tag{2.2}$$
$$\overline{MP} = \text{sen}(a) \tag{2.3}$$
$$\overline{SQ} = \text{sen}(b) \tag{2.4}$$
$$\overline{ON} = \cos(a+b) \tag{2.5}$$
$$\overline{NQ} = \text{sen}(a+b) \tag{2.6}$$
$$\overline{OP} = 1(\text{que é o raio de tamanho unitário}) \tag{2.7}$$

Os triângulos OVS e OMP são semelhantes, logo:

$$\begin{aligned} \Delta OVS &\sim \Delta OMP \\ \frac{OV}{OM} &= \frac{OS}{OP} \end{aligned}$$

Substituindo as relações (2.1), (2.2), (2.7) na igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{OV}{\cos(a)} &= \frac{\cos(b)}{1} \\ \overline{OV} &= \cos(a)\cdot\cos(b) \qquad (2.8) \end{aligned}$$

Os triângulos QTS e OMP são semelhantes, logo:

$$\begin{aligned} \Delta QTS &\sim \Delta OMP \\ \frac{TS}{MP} &= \frac{SQ}{OP}. \end{aligned}$$

Substituindo as relações (2.3), (2.4) e (2.7) na igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{TS}{\mathrm{sen}(a)} &= \frac{\mathrm{sen}(b)}{1} \\ \overline{TS} &= \mathrm{sen}(a)\cdot\,\mathrm{sen}(b) \qquad (2.9) \end{aligned}$$

Agora que já construímos algumas relações principais, vamos às deduções:

i) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \mathrm{sen}(b)\,\mathrm{sen}(a)$.

Observando o círculo trigonométrico da figura acima, notamos que:

$$\overline{ON} = \overline{OV} - \overline{NV}$$

Podemos concluir também que:

$$\overline{NV} = \overline{TS}$$

Se substituirmos as relações (2.5) e (2.8) na igualdade acima, obteremos:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \,\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b). \qquad (2.10)$$

ii) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \,\mathrm{sen}(b)\,\mathrm{sen}(a)$.

Da relação (2.10) temos que:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \,\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)$$

Se quisermos determinar $\cos(a–b)$, podemos escrever a relação acima como:

$$\cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \,\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(-b)$$

Mas, se observarmos o círculo trigonométrico da 2.5.1, deduzimos que:

$$\cos(b) = \cos(-b)$$

Então:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(-b)$$

Em contrapartida, podemos escrever:

$$\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen}(b)$$

Então teremos:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b). \tag{2.11}$$

iii) $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$.

Sabemos que:

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{2.12}$$

Se fizermos $\theta = (a+b)$, teremos:

$$\cos(a+b) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right)$$

Da mesma forma, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right)\\ \operatorname{sen}(a+b) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b)\right)\end{aligned}$$

Temos aqui um cosseno da diferença entre dois arcos e é dado pela relação (2.11), logo:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\operatorname{sen}(b) \tag{2.13}$$

Mas, observando a relação (2.12), vemos algumas similaridades coma relação (2.13) e podemos escrevê-la assim:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a). \tag{2.14}$$

iv) $\operatorname{sen}(a–b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b)–\operatorname{sen}(b)\cos(a)$.

Da relação (2.14) temos que:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

Se quisermos determinar sen(a − b), podemos escrever a relação acima como:

$$\operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen}(a)\cos(-b) + \operatorname{sen}(-b)\cos(a)$$

No entanto:

$$\cos(-b) = \cos(b)$$

e

$$\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen}(b)$$

Fazemos:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a). \tag{2.15}$$

v) $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}.$

Sabemos que a tangente de um ângulo é dada pela divisão entre o seno e o cosseno deste ângulo:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Então, a tangente de (a + b) será dada por:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}\\ &= \frac{\operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}\end{aligned}$$

Manipulando a igualdade acima, vamos dividir o numerador e o denominador do segundo membro por $\cos(a)\cos(b) \neq 0$:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}}\\ &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)} + \dfrac{\operatorname{sen}(b)}{\cos(b)}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}}\\ &= \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)} \qquad (2.16)\end{aligned}$$

vi) $\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(b)}{1 + \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}.$

Sabemos que a tangente de um ângulo é dada pela divisão entre o seno e o cosseno deste ângulo:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Então, a tangente de (a – b) será dada por:

$$\begin{aligned}\text{tg}(a-b) &= \frac{\text{sen}(a-b)}{\cos(a-b)}\\ &= \frac{\text{sen}\,\text{sen}(a)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)}\end{aligned}$$

Manipulando a igualdade acima, vamos dividir o numerador e o denominador do segundo membro por $\cos(a)\cos(b) \neq 0$:

$$\begin{aligned}\text{tg}(a-b) &= \frac{\dfrac{\text{sen}(a)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}}\\ &= \frac{\dfrac{\text{sen}(a)}{\cos(a)} - \dfrac{\text{sen}(b)}{\cos(b)}}{1 + \dfrac{\text{sen}(a)\,\text{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}}\\ &= \frac{\text{tg}(a) - \text{tg}(b)}{1 + \text{tg}(a)\,\text{tg}(b)} \qquad (2.17)\end{aligned}$$

□

A seguir, alguns problemas oriundos de exames de avaliações nacionais para verificação da teoria imposta nestes tipos de testes.

1) (OBMEP - Nível 1 - 2011) O cosseno do arco de medida 255° é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

c) $\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Resposta. O valor do cosseno de 255° é desconhecido por nós, mas pode ser obtido a partir da soma de arcos. Uma das possibilidades é desmembrar o ângulo de 255° na soma 180° + 75°. Os valores de seno e cosseno de 180° são conhecidos, entretanto, precisamos encontrá-los para o ângulo de 75°, o que pode ser feito a partir da soma dos arcos de 30°

e 45°:

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\\
\cos(30^\circ+45^\circ) &= \cos(30^\circ)\cos(45^\circ) - \operatorname{sen}(30^\circ)\operatorname{sen}(45^\circ)\\
\cos(75^\circ) &= \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2} - \frac{1\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2}\\
&= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Vamos agora encontrar o valor do cosseno de 255°:

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\\
\cos(180^\circ+75^\circ) &= \cos(180^\circ)\cos(75^\circ) - \operatorname{sen}(180^\circ)\operatorname{sen}(75^\circ)\\
\cos(255^\circ) &= (-1)\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - 0\cdot\operatorname{sen}(75^\circ)\\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

Concluímos então que a alternativa correta é a letra **e)**. □

2) (PUC/SP -(2005)) Se $\operatorname{tg}(x+y) = 33$ e $\operatorname{tg}(x) = 3$, então $\operatorname{tg}(y)$ é igual a:

a) 0,2

b) 0,3

c) 0,4

d) 0,5

e) 0,6

Resposta. O cálculo da adição de arcos da tangente é dado por:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)}{1 - \operatorname{tg}(x)\cdot\operatorname{tg}(y)}$$

Sabendo que $\operatorname{tg}(x+y) = 33$ e $\operatorname{tg}(x) = 3$, temos:

$$\begin{aligned}
3 &= \frac{3+\operatorname{tg}(y)}{1-3\cdot\operatorname{tg}(y)}\\
33 - 99\cdot\operatorname{tg}(y) &= 3+\operatorname{tg}(y)\\
100\cdot\operatorname{tg}(y) &= 30\\
\operatorname{tg}(y) &= \frac{30}{100}\\
&= 0,3
\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **b)**. □

2.6 Aplicações da trigonometria em exames nacionais .

Neste capítulo exibiremos resoluções para as questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Inicialmente teceremos alguns comentários sobre o papel do professor como facilitador no sentido de resolução de questões e da avaliação como diagnóstico da aprendizagem. Note que a Matemática, em suas variadas abordagens, procura descrever e produzir uma "leitura de mundo". Ela, em sua perspectiva escolar, é uma ferramenta de compreensão e resolução das diversas situações-problemas, dos exercícios e das atividades por meio da quantificação, da mediação, da conjectura, da representação no espaço, do reconhecimento de formas e propriedades, da observação e da manipulação de regularidades e padrões. O professor tem um grande papel de proporcionar o acesso a essas diferentes abordagens Matemáticas e ser um mediador no processo de ensino aprendizagem, fazendo com que os educandos sejam capazes de adquirir habilidades e conhecimentos a fim de relacionar a Matemática experimentada em suas práticas sociais, bem como reconhecer a essência da Matemática em si.

As conquistas pessoais dos alunos, as atividades extraclasse e as atividades na sala de aula estão presentes no processo de avaliação qualitativa no qual envolve a aprendizagem escolar. A análise dos instrumentos, dos argumentos e da solução proposta pelos alunos na resolução das situações problemas, propostas pelo professor, é um ponto importante para avaliar a aprendizagem dos alunos. A forma como os alunos argumentam sua resolução mostram as habilidades adquiridas e possibilita ao professor intervir adequadamente, se necessário, agindo de maneira eficaz para atender às necessidades reais dos alunos. Um importante meio para isso é aplicação de situações que exigem mais da criatividade do aluno, com o nível adequado à sua realidade, temos como exemplo, as questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Este capítulo foi baseado nas referências [7], [8] e [9].

2.6.1 Um pouco da história

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação - MEC e do Ministério de Ciência, Tecnologia e Inovação - MCTI.

Foi fundada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área, a OBMEP tem como objetivos principais:

- Estimular e promover o estudo da Matemática;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;

- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;

- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;

- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;

- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

O público-alvo da OBMEP é composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até último ano do Ensino Médio.

No ano de 2018 foi realizado a primeira edição da avaliação da OBMEP NÍVEL A destinada a alunos que cursam o 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental. O sucesso em sua realização motivou o IMPA a criar a OLIMPÍADA MIRIM, tendo como objetivo a busca de novos talentos da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A primeira edição da OLIMPÍADA MIRIM foi realizada no ano de 2022.

A primeira edição do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) foi no ano de 1998, onde registrou 157.221 inscrições e contou com 115.575 participantes no dia 20 de agosto. Deste total, 83% tinha isenção da taxa de inscrição, no valor de R$ 20. Entre os inscritos, 53% tinha 18 anos de idade ou menos, e 9% vinha de escolas públicas. Embora o uso das notas do Enem fosse válido apenas para duas instituições de educação superior, as provas foram aplicadas em 184 municípios brasileiros.

No ano de 1999 o Enem mostra sua credibilidade. Em um ano de realização, o número de instituições de educação superior que utilizavam os resultados no Enem subiu de 2 para 93. São criados os Comitês Técnicos e Consultivos, o Boletim da Escola e o banco de dados do desempenho dos participantes. Após firmar parceria com a Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos, sete mil agências dos Correios foram habilitadas a realizar inscrições para o exame. A aplicação foi em 29 de agosto, em 162 municípios.

Em 2000 foi garantido atendimento especializado para 376 pessoas com necessidades especiais, marcando o início da oferta de recursos de acessibilidade. A aplicação do Enem passa a ser acompanhada por observadores indicados pelas secretarias estaduais de educação e credenciados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). A edição contou com 390.180 inscritos, sendo 66,5% concluintes do ensino médio. As provas foram aplicadas em 27 de agosto, em 187 municípios.

O Programa Universidade para Todos (ProUni), lançado em 2004, começou a usar a nota do Enem para concessão de bolsas de estudos integrais e parciais aos participantes. A inclusão do campo de Cadastro de Pessoa Física (CPF) na ficha de inscrição abriu a possibilidade de acompanhamento da trajetória dessa população, ao longo dos anos, mediante estudos realizados pelo Inep. Neste ano, dos 1.552.316 inscritos, 63% eram concluintes do ensino médio e 68% tiveram direito à isenção. As provas foram realizadas em 29 de agosto, em 608 municípios.

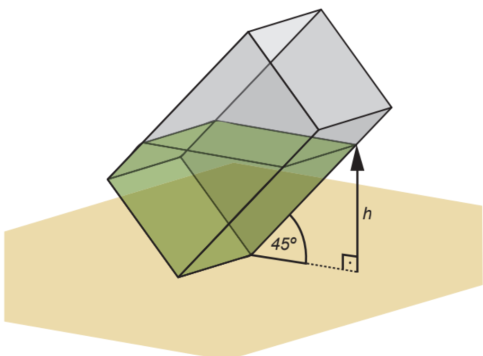
Com a criação do Sistema de Seleção Unificada (Sisu), em 2009, o Enem muda de formato. O exame passa a ter 180 questões objetivas, 45 para cada área do conhecimento, e a redação. A aplicação passa a ser em dois dias e o exame começa a certificar a conclusão do ensino médio. Além disso, as matrizes de referência são reformuladas com base nas Matrizes de Referência do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (Encceja). Nesta edição, 4.138.025 pessoas se inscreveram no Enem, aplicado em 5 e 6 de dezembro, em 1.830 cidades. A edição de 2009 também foi marcada pelo vazamento da prova, que exigiu a preparação de um novo instrumento.

O Enem ganhou um logotipo comemorativo pelos seus 20 anos de existência, além de um documentário histórico e uma série de cinco minidocumentários sobre os bastidores do exame. A solicitação de isenção da taxa de inscrição passou a ser uma fase anterior à inscrição, e os isentos ausentes no ano anterior tiveram de justificar o motivo da falta para garantir a gratuidade novamente. A mudança trouxe bons resultados: o Enem 2018 teve o menor índice de faltosos desde 2009, quando assumiu o formato em dois dias. O segundo domingo de aplicação ganhou 30 minutos a mais de duração e o quantitativo de detectores de ponto eletrônico aumentou cinco vezes. O número de instituições de educação superior portuguesas que usam as notas do Enem chegou a 35.

Vamos agora resolver e analisar algumas questões das OBMEP que aborda o assunto de trigonometria, que é objetivo principal do nosso trabalho.

2.6.2 Resolução de questões

Questão 01 (OBMEP 2021 – questão 4 – segunda fase) [4] Uma lata medindo $20cm \times 10cm \times 10cm$, sem tampa, é sustentada por um suporte, de modo que uma de suas arestas mais curtas fique apoiada no plano horizontal e as arestas mais longas formem um ângulo de 45° com o plano horizontal, conforme mostra a figura. Suponha que um líquido seja colocado na lata, até a altura em relação ao plano horizontal, também como indicado na figura.



a) Qual é o volume total da lata?

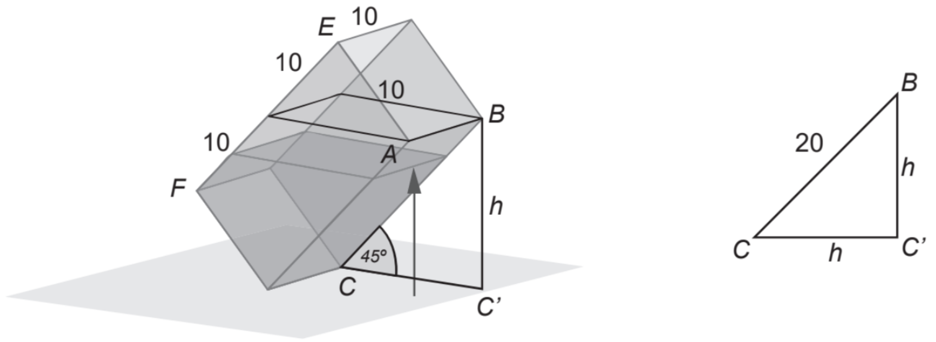
b) Explique por que a altura máxima que o líquido vai atingir é $10\sqrt{2}cm$ e calcule o volume de líquido na lata quando essa altura é atingida.

c) Faça o gráfico da função V que fornece o volume $V(h)$ de líquido na lata, em , quando sua superfície está na altura h, em cm.

Resposta. .

Item A) O volume total da lata é dado pelo produto das três dimensões do solido, assim é igual a $20 \times 10 \times 10 = 2.000cm^3$.

Item B) Item B A altura máxima é atingida pelo líquido quando ele alcança a aresta AB indicada na figura 4.2.



(a partir desse instante, o líquido transborda). Nesse mesmo instante, o líquido atinge o ponto médio da aresta EF.

Notamos na figura exposta, que o triângulo $CC'B$ é retângulo em C' e isósceles de base CB, logo $C'B = CC' = h$, onde h é a altura máxima atingida pelo líquido, sendo a hipotenusa do triângulo $CC'B$ medindo $20cm$. Logo, $h^2 + h^2 = 20^2$, o que fornece $h = 10\sqrt{2}cm$.

O volume pedido é a diferença entre o volume da lata e o volume aser preenchido, o volume da lata que deixa de ser preenchido quando o líquido atinge essa altura é o volume de um prisma triangular, que é igual à metade do volume de um paralelepípedo retângulo de arestas iguais a 10. Logo, o volume não preenchido é igual a $\dfrac{10 \times 10 \times 10}{2} = 500cm^3$ e, portanto, o volume de líquido, nesse instante, é igual a $2.000 - 500 = 1.500cm^3$.

Item C) Até atingir o vértice F (quando $h = 5\sqrt{2}$) o líquido ocupa um prisma triangular, que corresponde à metade do volume de um paralelepípedo retângulo de arestas

Logo, temos

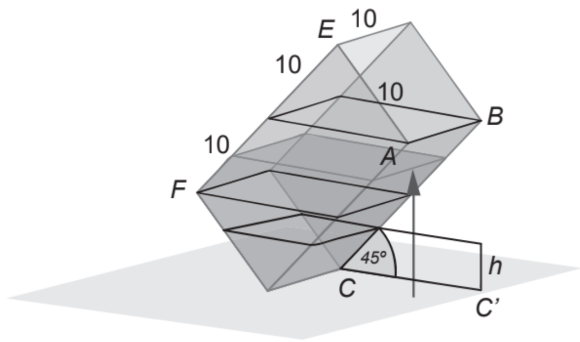
$$v(h) = \frac{1}{2}h\sqrt{2} \times h\sqrt{2} \times 10 = 10h^2, \text{ se } 0 \le h \le 5\sqrt{2}$$

(função quadrática).

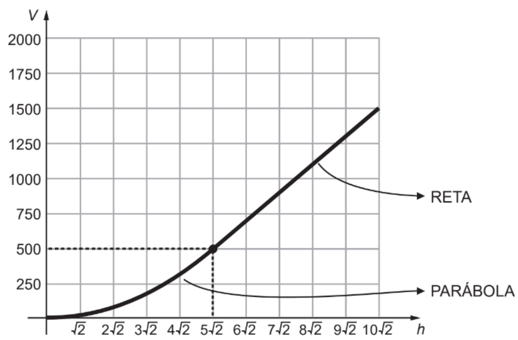
Observe na figura sugerida que, quando o vértice F é atingido, o volume de líquido é $v(5\sqrt{2}) = (5\sqrt{2})^2 \times 10 = 50 \times 10 = 500cm^3$. A partir desse ponto, o líquido adicional ocupa um prisma cuja base é um retângulo de lados medindo $10cm$ e $10\sqrt{2}$ e cuja altura é $(h - 5\sqrt{2})$. Logo,

$$v(h) = 500 + 10 \times 10\sqrt{2} \times (h - 5\sqrt{2} = 100h\sqrt{2} - 500 \text{ , se } 5\sqrt{2} < h \leq 10\sqrt{2}$$

(função linear).

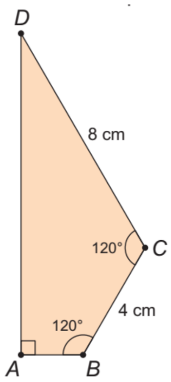


O gráfico de v está representado na figura abaixo:



□

Questão 02 (OBMEP 2017 – questão 13 – nível 3) [4] Na figura, os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ medem $120°$, o ângulo $\angle BAD$ é reto, e os segmentos BC e CD medem $4cm$ e $8cm$, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $ABCD$ em cm^2?



A) $14\sqrt{3}$

B) $28\sqrt{3}$

C) $32\sqrt{3}$

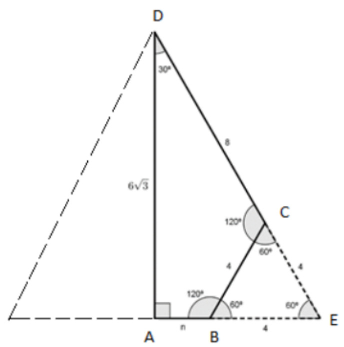
D) $36\sqrt{3}$

E) $40\sqrt{3}$

Resposta. Prolongando-se dois lados do quadrilátero, obtemos um triângulo equilátero de lado $4cm$ e um triângulo retângulo grande DAE que é metade de um triângulo equilátero de lado $12cm$, como indicado na figura proposta do problema.

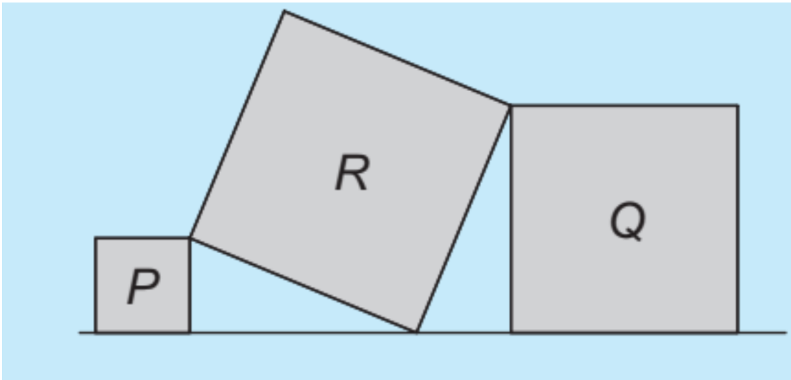
Pelo Teorema de Pitágoras, a altura de um triângulo equilátero de lado l é $h = \dfrac{\sqrt{3}l}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{área de } ABCD &= (\text{ área do triângulo retângulo } DAE) - (\text{área do triângulo equilátero} CBE) \\ &= \frac{6 \times 6 \times \sqrt{3}}{2} - \frac{16\sqrt{3}}{4} \\ &= 14\sqrt{3}cm^2. \end{aligned}$$



□

Questão 3 (OBMEP 2016 – questão 3 – nível 3) [4] Na figura, as áreas dos quadrados P e R são iguais a $24cm^2$ e $168cm^2$, respectivamente. Qual é a área do quadrado Q?



A) $96cm^2$

B) $100cm^2$

C) $121cm^2$

D) $144cm^2$

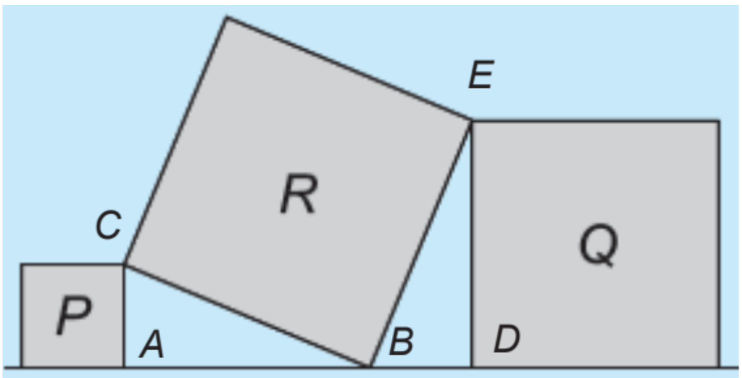
E) $156cm^2$

Respostas. Primeiramente observe que os triângulos ABC e DEB são congruentes pelo caso ALA e, portanto, o segmento AB tem a mesma medida do lado DE do triângulo Q. Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos que

$$\text{área de } R = \text{ área de } P + \text{ área de } Q.$$

Portanto, a área de Q é

$$168 - 24 = 144cm^2.$$



□

Questão 04 (OBMEP – Banco de Questões 2019 – Questão 30) [3] O triângulo dobrado

Na figura a seguir, ABC é um triângulo equilátero de papel com lado $1m$ que foi dobrado ao longo do segmento EF de modo que o vértice A caísse sobre o lado BC, onde está o ponto D na figura. Suponha que DF é perpendicular a BC.

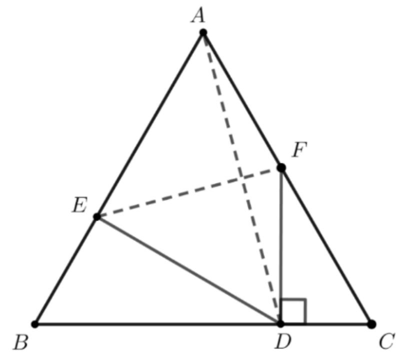


Figura 2.24: O triângulo dobrado

a) Determine o ângulo $\angle AED$.

b) Determine o comprimento do segmento CD.

c) Determine a razão entre as áreas dos triângulos AEF e ABC.

Resposta. .

Item a Como $\angle FDC = 90°$, segue que

$$\angle DBA = 60°,$$

$$\angle EAF = \angle EDF = 60°,$$

assim

$$\angle BDE = 180° - \angle FDC - \angle DFC = 180° - 90° - 60° = 30°.$$

O Ângulo

$$\angle BED = 180° - \angle DBE - \angle BDE = 180° - 60° - 30° = 90°.$$

Logo, o ângulo pedido é

$$\angle DEA = 180° - \angle BED = 180° - 90° = 30°.$$

Item b Como $\angle DFC = 30°$, tomando x o comprimento de CD, então

$$\frac{CD}{CF} = \text{sen}30° = \frac{1}{2}$$

e assim

$$CF = 2x.$$

Além disso,

$$\frac{DF}{CF} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo,

$$AF = DF = \sqrt{3}x$$

Portanto, $1 = AF + FC = \sqrt{3}x + 2x$ implica $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})m.$

Item c Como $\angle EAF = \angle EDF = 60°$, segue que

$$\angle EDB = 30°.$$

Além disso,

$$\angle BED = 180° - 90° = 90°$$

e

$$BD = 1 - CD = 1 - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1.$$

Portanto, de

$$\frac{BE}{BD} = \text{sen}30° = \frac{1}{2},$$

temos

$$BE = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

e

$$AE = 1 - BE = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{A_{AEF}}{A_{ABC}} &= \frac{\frac{AE \cdot AF \cdot \text{sen}\angle EAF}{2}}{\frac{AB \cdot AC \cdot \text{sen}EAF}{2}} \\ &= \frac{(3 - \sqrt{3})(2\sqrt{3} - 3)}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{3} - 15}{2} \end{aligned}$$

□

Questão 05 (Enem 2020) [5]. No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme a figura a seguir:

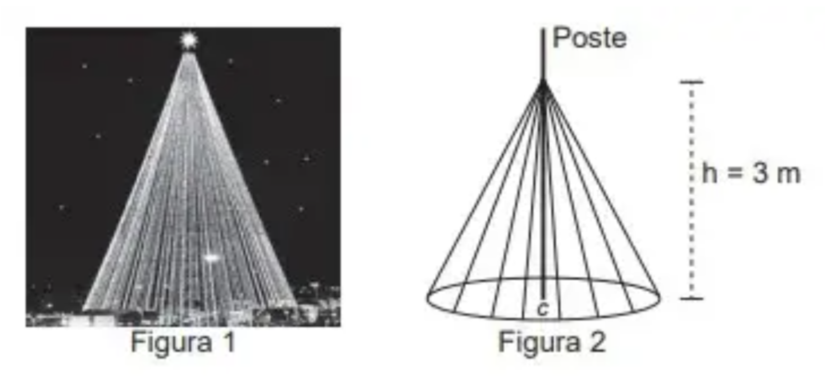


Figura 2.25: Árvore de Natal

A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a $3m$ de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto C (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.

Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de $100m$ de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente $100m$ e deixar o restante como reserva. Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de

a) 4,00.

b) 4,87.

c) 5,00.

d) 5,83.

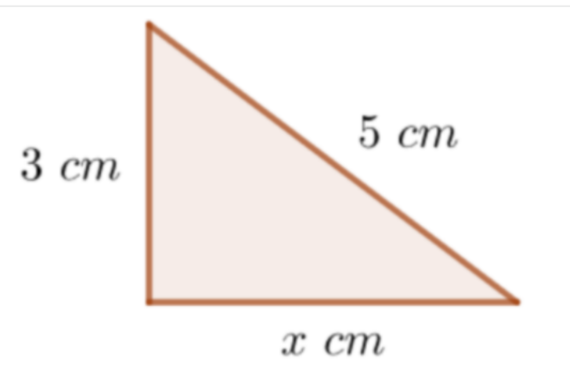
e) 6,26.

Resposta. Como a circunferência foi dividida em 20 arcos iguais, assim o comprimento do segmento de reta formado pelos pedaços de mangueira terá as seguintes medidas:

$$\frac{100}{200} = 5m$$

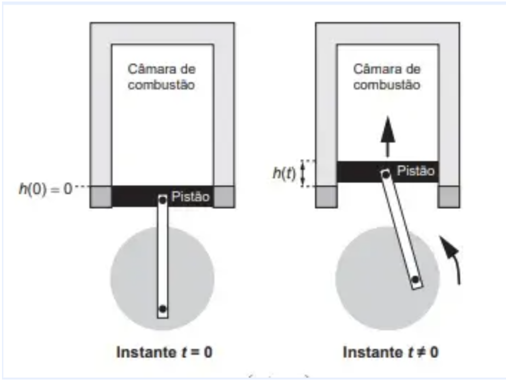
Observando a figura 2.6.2, temos um triângulo retângulo em C. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} 5^2 &= 3^2 + x^2 \\ x &= \sqrt{25-9} \\ x &= 4 \end{aligned}$$



□

Questão 06 (Enem 2018) [5]. Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura:



$$h(t) = 4 + 4\,\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \text{ definida para } t \geq 0$$

Descreve como varia a altura h, medida em centímetros, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundos. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de $6cm$. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

a) 2

b) 4

c) 5

d) 8

Resposta. O enunciado afirma que $h(t)$ deve alcançar três vezes o valor de 6 cm. Então vamos estudar quando que acontece de $h(t)$ ser igual a 6.

$$\begin{aligned} 6 &= 4 + 4\,\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ 2 &= 4\,\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Então, para que seja igual a 6, o valor do seno deve ser $\frac{1}{2}$. Além disso, o enunciado diz que deve alcançar três vezes o valor 6. Para que isso aconteça, o seno deve alcançar três vezes o valor $\frac{1}{2}$.

O seno atinge o valor de $\frac{1}{2}$ quando a medida do arco é $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ e aos arcos côngruos a esses arcos. No início, $t = 0$. Nesse instante, substituindo t por zero na expressão.

$$\frac{\beta \times 0}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Então no instante inicial, o ângulo $\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}$ vale $-\frac{\pi}{2}$.

Com o passar do tempo, o valor do ângulo $\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}$ aumenta. Eventualmente, o ângulo vai atingir o valor de $\frac{\pi}{6}$. Nesse instante, o seno irá valer $\frac{1}{2}$ pela primeira vez. E consequentemente, $h(t)$ irá valer 6 pela primeira vez. Depois disso, passando mais tempo, o ângulo vai continuar aumentando. Uma hora o ângulo vai atingir o valor de $\frac{5\pi}{6}$. Nesse momento, o seno irá valer $\frac{1}{2}$ pela segunda vez.

Para que o seno atinja $\frac{1}{2}$ pela terceira vez, é necessário que dê uma volta completa no círculo, e depois ande mais $\frac{\pi}{6}$. Sabendo que uma volta completa equivale a 2π.

Então, o ângulo procurado é $2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$.

Quando o ângulo atinge $\frac{13\pi}{6}$, o seno terá o valor de $\frac{1}{2}$ pela terceira vez. Consequentemente, terá o valor de 6 pela terceira vez.

O enunciado diz que em menos de 4 segundos, $h(t)$ deve atingir o valor de $6cm$ pela terceira vez. Logo, o ângulo atingirá $\frac{13\pi}{6}$ antes do instante $t = 4$.

Daí temos que no instante $t = 4$, o ângulo será maior que $\frac{13\pi}{6}$, gerando a seguinte inequação $\frac{\beta \times t}{2} - \frac{\pi}{2} > \frac{13\pi}{6}$.

Agora, vamos montar a inequação:

$$\frac{\beta \times t}{2} - \frac{\pi}{2} > \frac{13\pi}{6}$$

No instante t = 4, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\beta \times t}{2} - \frac{\pi}{2} &> \frac{13\pi}{6} \\
\beta \times 2 - \frac{\pi}{2} &> \frac{13\pi}{6} \Leftrightarrow \\
\beta \times 2 &> \frac{13\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \\
\beta \times 2 &> \frac{13\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} \Leftrightarrow \\
\beta &> \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Mas, o enunciado diz que podemos utilizar 3 como aproximação para π. Então:

$$\beta > 4.$$

Como o enunciado pede o menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β e $\beta > 4$. Logo,

$$\beta = 5$$

□

Questão 07 (Enem 2017) [5]. Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos kt$ em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$

b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$

c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$

d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$

e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

Resposta. Inicialmente iremos descobrir os valores de A, B e k.

Sabemos que o cosseno varia de -1 até 1, ou seja, sua pressão mínima será quando o cosseno for -1. Então:

$$A + B(-1) = 78A - B = 78$$

Pressão máxima, cosseno valendo 1:

$$A + B(1) = 120A + B = 120$$

Temos então o sistema de equações:

$$\begin{cases} A + B = 120 \\ A - B = 78 \end{cases}$$

Adicionando as equações do sistema, membro a membro, temos:

$$\begin{aligned} 2A &= 198 \\ A &= 99 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de A na equação $A + B = 120$, teremos:

$$\begin{aligned} 99 + B &= 120 \\ B &= 21 \end{aligned}$$

Sendo de $\frac{90}{60} = \frac{3}{2}$ a frequência cardíaca por minutos, temos então que o período é $t = \frac{2}{3}$, assim:

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{2\pi}{k} \\
\frac{2}{3} &= \frac{2\pi}{k} \\
k &= 3\pi
\end{aligned}
$$

Substituindo $A = 99$, $B = 21$ e $k = 3\pi$ em $P(t) = A + B\cos(kt)$. Portanto,

$$P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t).$$

□

Questão 04 (Enem 2014 - 3ª aplicação) [5]. A quantidade de certa espécie de crustáceos, medida em toneladas, presente num trecho de mangue, foi modelada pela equação

$$Q(t) = \frac{600}{6 + 4\,\mathrm{sen} wt}$$

Onde t representa o número de meses transcorridos após o início de estudo e w é uma constante. O máximo e o mínimo de toneladas observados durante este estudo são, respectivamente,

a) 600 e 100

b) 600 e 150

c) 300 e 100

d) 300 e 60

e) 100 e 60

Resposta. Como o $\mathrm{sen}(wt)$ varia de -1 a 1, então:

Para $\mathrm{sen}(wt = -1$, temos:

$$Q(t) = \frac{600}{6 + 4(-1)} = \frac{600}{2} = 300$$

Para $\mathrm{sen}(wt = 1$, temos:

$$Q(t) = \frac{600}{6 + 4 \cdot 1} = \frac{600}{10} = 60$$

Logo, o máximo é 300 toneladas e o mínimo 60 toneladas. □

Capítulo 3

Trigonometria no ensino superior: Formalismo das funções trigonométricas.

O âmago deste capítulo é expor de forma mais criteriosa o estudo de funções trigonométricas. para isto precisaremos de conceitos obtidos em um curso de análise do curso da graduação, ou de Fundamentos do Cálculo nos cursos do PROFMAT, como limite de funções, derivação e integração de funções, continuidade, periodicidade entre outros resultados.

Um dos propósitos principais deste capítulo é usar as ferramentas matemáticas presentes ao longo do curso e extender o conhecimento para uma percepção mais sólida do conteúdo estudado, algo imprescindível para os ingressos no programa, uma capacitação qualificada como profissional.

Permita-nos informar que, as principais referência foram: [3], [4], [5], [6].

3.1 Informações gerais.

Nesta seção, apresentaremos definições e resultados que serão utilizados em toda este capítulo. É importante destacar que, todos estes conceitos e proposições podem ser encontrados comumente em livros de introdução à Análise na reta, no livro do PROFMAT de Fundamentos do cálculo e em trabalhos relacionados ao conteúdo abordado em um curso de Cálculo,

As referências [3], [4], [5] e [6] foram usadas para elaborar esse capítulo.

3.1.1 Definições

Nesta subseção, serão apresentadas algumas definições e notações primordiais para o entendimento deste capítulo.

Definição 3.1.1. *Uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $x(n) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, é denominada uma sequência de números reais. Neste caso, a imagem x_n de um dado número $n \in \mathbb{N}$ é chamada n-ésimo termo da sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Notação: $x = (x_n)$.*

Definição 3.1.2. *Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que o limite de x_n é $x \in \mathbb{R}$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\forall n \geq N, \ \text{com } n \in \mathbb{N}, \ \text{tem-se } x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Neste caso, escreveremos lim $x_n = x$.

Definição 3.1.3. *Dizemos que um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$é limitado inferiormente (respectivamente, limitado superiormente) se existe $c \in \mathbb{R}$ (respectivamente, existe $d \in R$) tal que $c \leq x$ (respectivamente, $x \leq d$), $\forall x \in X$. Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito limitado se este é limitado inferior e superiormente.*

Definição 3.1.4. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de X se $\exists (x_n) \subseteq X$ x tal que lim $x_n = x$. O conjunto dos pontos de acumulação de X será denotado por X', isto é,*

$$X' = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto de acumulação de } X\}.$$

Definição 3.1.5. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $y \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação à direita (respectivamente, à esquerda) de X, e escrevemos $y \in X'_+$ (respectivamente, $y \in X'_-$), quando existe $(x_n) \subseteq X$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > y$ (respectivamente, $x_n < y$), e $\lim x_n = y$.*

Definição 3.1.6. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real, onde $X \subseteq \mathbb{R}$. Seja $y \in X'$. Dizemos que $l \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende a y, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in X$ que satisfaz $0 < |x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - l| < \varepsilon$. Neste caso, escrevemos*

$$\lim_{x \to y} f(x) = l.$$

Definição 3.1.7. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente. Dizemos que $f(x)$ tende a l quando x tende a ∞, quando dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que*

$$\forall x \in X \ \text{com } x > A, \ \text{conclui-se } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Neste caso, ecrevemos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l.$$

Definição 3.1.8. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é ilimitado inferiormente. Dizemos que $f(x)$ ende al quando x tende a $-\infty$, quando dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que*

$$\forall x \in X \ \text{com } x < -A, \ \text{infere-se } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Neste caso, ecrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l.$$

Definição 3.1.9. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $y \in X'$. Dizemos que $f(x)$ tende a ∞ quando x tende a y se dado $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x \in X com 0 < |x - y| < \delta, \text{ tem-se } f(x) > A.$$

Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \to y} f(x) = \infty.$$

Definição 3.1.10. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $y \in X'$. Dizemos que $f(x)$ tende a $-\infty$ quando x tende a y se dado $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x \in X \text{ com } 0 < |x - y| < \delta, \text{ tem-se } f(x) < -A.$$

Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \to y} f(x) = -\infty.$$

Definição 3.1.11. *Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação e $y \in X'_+$. Dizemos que o limite à direita de $f(x)$ quando x tende a y é l, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x \in X \cap (y, y + \delta), \text{ tem-se } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \to y^+} f(x) = l.$$

Definição 3.1.12. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $y \in X'_-$. Dizemos que o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende a y é l, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x \in X \cap (y - \delta, y), \text{ tem-se } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Neste caso, temos

$$\lim_{x \to y_-} f(x) = l.$$

Definição 3.1.13. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X$. Dizemos que f é contínua no ponto $y \in X$, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x \in X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Caso contrário, f é dita descontínua em $y \in X$. f é dita contínua se for contínua em todos os pontos de seu domínio.

Definição 3.1.14. *Dizemos que uma função $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente (respectivamente, inferiormente) se $f(X)$ é um conjunto imitado superiormente (respectivamente, inferiormente). Além disso, f é dita limitada se $f(X)$ é um conjunto limitado.*

Definição 3.1.15. *Seja $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. As seguintes definições serão adotadas:*

i) *f é crescente se $x_1 < x_2$, com $x_1, x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;*

ii) *f é decrescente se $x_1 < x_2$, com $x_1, x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;*

iii) *f é n ao decrescente se $x_1 < x_2$, com $x_1, x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;*

iv) *f é n ao crescente se $x_1 < x_2$, com $x_1, x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Dizemos que f é estritamente monótona se uma das duas primeiras condições for satisfeita. Caso um dos dois últimos itens seja verdadeiro, então f é chamada monótona.

Definição 3.1.16. *Considere uma função $f : X \subseteq \mathbb{R}- \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Dizemos que f é derivável em a se o limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Neste caso, denotamos este limite por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

e chamamos este número de derivada de f no ponto a. Dizemos que f é derivável se esta é derivável em todo ponto de $X \cap X'$. Aqui a função que transforma um ponto $a \in X \cap X'$ no valor $f'(a)$ é chamada função derivada de f e é denotada por f'.

Definição 3.1.17. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é n-vezes derivável em I quando $f^{(n)}(y)$ existe, $\forall y \in I$. Aqui, $f^{(n)}(y)$ é denominada n-ésima derivada de f no ponto y e é indutivamente definida por*

$$f^{(0)}(y) = f(y), f''(y) = (f')'(y) \text{ e } f^{(n)}(y) = (f^{(n-1)})'(y), \forall n = 2, 3, ...$$

Definição 3.1.18. *Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo. Dizemos que*

i) *f é convexa em I se*

$$x_1, x_2, x \in I, x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) - f(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1);$$

ii) *f é estritamente convexa em I se*

$$x_1, x_2, x \in I, x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) - f(x_1) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1);$$

iii) *f é côncava em I se*

$$x_1, x_2, x \in I, x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) - f(x_1) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1);$$

iv) *f é estritamente côncava em I se*

$$x_1, x_2, x \in I, x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) - f(x_1) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1);$$

Definição 3.1.19. *Um subconjunto finito $P = t_0, t_1, ..., t_N \subseteq [a, b]$ do intervalo $[a, b]$ é denominado uma partição deste intervalo se $a, b \in P$. Por convenção, consideraremos que $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$. Denotaremos a partição P por*

$$P : a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b.$$

Definição 3.1.20. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos as somas inferior e superior de f em relação à partição $P : a = t_0 < ... < t_N = b$, respectivamente, por*

$$^f(P) = \sum_{i=1}^{N} m_i^f (t_i - t_{i-1})$$

e

$$S^f(P) = \sum_{i=1}^{N} M_i^f (t_i - t_{i-1}),$$

onde $m_i^f = inf f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i] e M_i^f = sup f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i], \forall i = 1, 2, ..., N.$

Definição 3.1.21. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. As integrais inferior e superior de f são definidas e denotadas, respectivamente, por*

$$\underline{\int_a^b} f = sup\{s^f(P) : P \text{ partição de } [a,b]\}$$

e

$$\overline{\int_a^b} f = sup\{S^f(P) : P \text{ partição de } [a,b]\}.$$

Definição 3.1.22. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Dizemos que f é integrável a Riemann, ou simplesmente integrável, se*

$$[\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f].$$

Neste caso, definimos e denotamos a integral de f por

$$[\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f].$$

3.1.2 Resultados Importantes

Agora, enunciaremos alguns resultados, sem provas, que serão utilizados ao longo do objeto estudado (para mais detalhes ver [1], [2] e [6]).

Teorema 3.1.23. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Considere as funções f, $F : I- \to \mathbb{R}$, onde f é contínua. Então são equivalentes os seguintes itens:*

i) *$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\, d), \forall x \in I;$*

ii) *$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$*

Em i) e ii) F é denominada integral indefinida e primitiva de f , respectivamente.

Teorema 3.1.24. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ derivável em (c,d), com derivada contínua e $h([c,d]) \subseteq [a,b]$. Então vale a seguinte fórmula de mudança de variável:*

$$\int_{h(c)}^{h(d)} f(y)dy = \int_c^d (h(x))h'(x)dx.$$

Teorema 3.1.25. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$ tais que $f(X) \subseteq Y$ e $f(a) = b$. Se f e g são deriváveis, respectivamente, em a e b, então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em a, com*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Teorema 3.1.26. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset R$. Então, existem a, $b \in X$ tais que*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in X.$$

Em particular, isto nos diz que f é limitada.

Teorema 3.1.27. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Considere que é derivável em (a, b). Então, existe $\theta \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(\theta)(b - a).$$

Teorema 3.1.28. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$. Então,*

$$\int_a^b f \geq 0.$$

Teorema 3.1.29. *Sejam I um intervalo que contenha mais de um ponto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Então,*

i) *f' é não negativa em $I \Leftrightarrow f$ é não descrescente em I.*

ii) *f' é não positiva em $I \Leftrightarrow f$ é não crescente em I.*

iii) *f' é positiva em $I \Leftrightarrow f$ é crescente em I.*

iv) *f' é negativa em $I \Leftrightarrow f$ é decrescente em I.*

Teorema 3.1.30. *Sejam I um intervalo que contenha mais de um ponto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável. Então,*

i) *f'' é não negativa em $I \Leftrightarrow f$ é convexa em I.*

ii) *f'' é não positiva em $I \Leftrightarrow f$ é côncava em I.*

iii) *f'' é positiva em $I \Leftrightarrow f$ é estritamente convexa em I.*

iv) *f'' é negativa em $I \Leftrightarrow f$ é estritamente côncava em I.*

Teorema 3.1.31. *Se f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)].$$

Teorema 3.1.32. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $c \in \mathbb{R}$. Se $f(a) < c < f(b)$, então existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.*

Teorema 3.1.33. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente. Então:*

i) $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ *existe* $\Leftrightarrow f$ *é limitada superiormente. Neste caso, temos*

$$\lim_{x\to b-} f(x) = supf(x) : x \in (a, b).$$

Por outro lado, se f é ilimitada superiormente, então

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \infty;$$

ii) $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ *existe* $\Leftrightarrow f$ *é limitada inferiormente. Neste caso, temos*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = inff(x) : x \in (a, b).$$

Por outro lado, se f é ilimitada inferiormente, então

$$\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty;$$

Aqui $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a = -\infty$ *ou* $b = \infty$.

Teorema 3.1.34. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função não crescente. Então:*

i) $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ *existe* $\Leftrightarrow f$ *é limitada inferiormente. Neste caso, temos*

$$\lim_{x\to b-} f(x) = inff(x) : x \in (a, b).$$

Por outro lado, se f é ilimitada inferiormente, então

$$\lim_{x\to b-} f(x) = -\infty;$$

ii) $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ *existe* $\Leftrightarrow f$ *é limitada superiormente. Neste caso, temos*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = supf(x) : x \in (a, b).$$

Por outro lado, se f é ilimitada superiormente, então

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \infty;$$

Aqui $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a = -\infty$ *ou* $b = \infty$.

Teorema 3.1.35. *Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua injetiva. Então, a função inversa $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ é contínua. Além disso, f é estritamente monótona em I e $f(I)$ é um intervalo.*

Teorema 3.1.36. *Seja $f : X \to Y$ uma função bijetora, onde X, $Y \subseteq R$. Considere $g = f^{-1} : Y \to X$. Se f é derivável em $c \in X \cap X'$ e g é contínua em $f(c)$. Então, g é derivável em $f(c)$ se, e somnete se, $f'(c) \neq= 0$. Neste caso, tem-se*

$$g'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Teorema 3.1.37. *Sejam $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Considere que $a \in I$ e que g' é não nula em I (exceto possivelmente em a). Suponha que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \, e \, \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

ou

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \, e \, \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty,$$

Então,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Se o limite das derivadas existir.

3.2 Construção das Funções Seno, Cosseno e Tangente

Nesta seção, nossa meta é descrever precisamente como conceituar as funções trigonométrica seno, cosseno e tangente. O ponto chave na obtenção precisa destas definições é utilizar uma integral já conhecida do cálculo como sendo a aplicação arcotangente.

3.2.1 Função Arcotangente

Estamos interessados em definir, a partir do conceito de função arcotangente, as aplicações seno, cosseno e tangente. Em adição, mostraremos um caminho alternativo, através dos conceitos estudados em um curso de Análise na Reta, de como obter as propriedades elementares estudadas no ensino elementar e em cursos introdutórios da licenciatura em Matemática para tais aplicações.

Em ordem a estabelecer precisamente a definição da função arcotangente, considere uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Claramente φ é contínua (ver Definição 3.1.13), já que esta é dada por operações elementares de funções deste mesmo tipo. Assim sendo, defina $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela seguinte lei de transformação:

$$\operatorname{arctg}(x) := \int_0^x \varphi(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

A função arctg estabelecida acima é denominada função arcotangente. É fácil notar, por utilizar as propriedades elementares de integrais, que

$$\operatorname{arctg}(0) = \int_0^0 \varphi(t)dt = 0. \tag{3.3}$$

Além disso, aplicando o fato que $\varphi(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$(ver (3.1)), pode-se inferir que

$$\operatorname{arctg}(x) > 0, \forall x > 0.$$

Por outro lado, é verdade que

$$\int_0^x \varphi(t)dt = -\int_0^x \varphi(t)dt \leq 0, \; para \, x < 0,$$

ver Teorema 3.1.28 e definição 3.1.1. Assim sendo, obtemos

$$\operatorname{arctg}(x) < 0, \; se \, x < 0.$$

Após observar o comportamento do sinal da função arcotangente, estabeleceremos a seguir algumas propriedades satisfeitas por esta aplicação.

Teorema 3.2.1. *Seja φ a função definida em (3.1). Então, as seguintes afirmações envolvendo a aplicação arcotangente são verdadeiras:*

i) *Arcotangente é derivável em $\mathbb{R}$, e sua derivada é dada pela seguinte igualdade*

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}; \tag{3.4}$$

ii) *Arcotangente é crescente em $\mathbb{R}$. Além disso, esta mesma função é estritamente convexa em $(-\infty, 0)$ e estritamente côncava em $(0, \infty)$.*

iii) *Arcotangente é uma função ímpar e limitada em $\mathbb{R}$;*

iv) *Se $\pi := 2 \; sup\{\operatorname{arctg}(x) : x \in (0, \infty)\}$, então*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg}(x) = \pm\frac{\pi}{2}. \tag{3.5}$$

v) *Dado $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{arctg}(x) = y$. Em outras palavras, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ é uma função bijetiva.*

Demonstração. Note que, por utilizar o item ii) do Teorema 3.1.23 e o fato que φ é contínua em $\mathbb{R}$, tem-se

$$arctan'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R},$$

ver (3.1) e (3.2). Com isso, a prova de i) está completa.

Por outro lado, usando (3.4), inferimos que a derivada do arcotangente é sempre positiva. Dessa forma, pelo item iii) estabelecido no Teorema 3.1.29, o arcotangente é crescente em $\mathbb{R}$. Além disso, derivando mais uma vez a função arcotangente, obtemos

$$arctan''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, analisando o sinal desta segunda e ultilizando os itens iii) e iv) do Teorema 3.1.30, inferimos que a função arcotangente é convexa em $(-\infty, 0)$ e estritamente ccôncava em $(0, \infty)$. Isto prova ii).

Para provar que a aplicação é arcotangente é ímpar, note que

$$\widehat{\operatorname{tg}}(-x) = \int_0^{-x} \varphi(t)dt = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2}dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando o Teorema 3.1.24 à última integral acima com s = -t , obtemos

$$\widehat{\operatorname{tg}}(-x) = -\int_0^x \frac{1}{1+s^2}ds = -\int_0^x \varphi(s)ds = -\operatorname{arctg}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, a função arcotangente é ímpar. □

Agora vamos estudar a limitação de arctg em $\mathbb{R}$. Inicialmente, observe que a função arcotangente é limitada nos intervalos $[-1,0]$ e $[0,1]$ através do uso dos Teoremas 3.1.23 e 3.1.26 (ver (3.2)). Por outro lado, em ordem a garantir essa limitação em $(1,\infty)$ é suficiente aplicar os Teoremas 3.1.27 e 3.1.31. Com efeito, por este penúltimo resultado e (3.4), temos que existe $c \in (0,1)$ tal que

$$\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0) = arctan'(c) = \frac{1}{1+c^2}. \tag{3.6}$$

Consequentemente, $\operatorname{arctg}(1) < 1$ desde que$1/(1+c^2) < 1e\operatorname{arctg}(0) = 0$. Por outro lado, escolhemos $x \in (1,\infty)$ e aplicamos o Teorema 3.1.31 (com $g : [1,x] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = -1/t$) para obter

$$\frac{\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(1)}{g(x)-g(1)} = \frac{\operatorname{arctg}'(\theta)}{g'(\theta)} = \frac{\theta^2}{1+\theta^2} \text{ , onde } \theta \in (1,x),$$

ver (3.4). Dessa forma,

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(x) &= \frac{\theta^2}{1+\theta^2}\cdot(g(x)-g(1)) + \operatorname{arctg}(1) \\ &= \frac{\theta^2}{1+\theta^2}\cdot(-\frac{1}{x+1}) + \operatorname{arctg}(1). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como $\theta^2/(1+\theta^2) < 1, -1/x+1 > 0$ e $\operatorname{arctg}(1) < 1$, concluímos que

$$\operatorname{arctg}(x) < -\frac{1}{x} + 1 + 1 = 2 - \frac{1}{x} < 2.$$

Por isso $0 < \operatorname{arctg}(x) < 2, \forall x \in (1,\infty)$.

Resta somente verificar que arctg é limitada em $(-\infty,-1)$. Contudo, pelo que foi feito acima e usando a condição de que arctan é uma aplicação ímpar, é verdade que

$$0 < \widehat{\operatorname{tg}}(-x) < 2, \forall x \in (-\infty,-1)$$

. Deste modo,

$$-2 < \operatorname{arctg}(x) < 0, \forall x \in (-\infty,-1)$$

. Portanto, a função arcotangente é limitada em $\mathbb{R}$. Isto completa a prova de iii).

Agora, defina $\pi \in \mathbb{R}$ por

$$\pi := 2sup\{\operatorname{arctg}(x) : x \in (0,\infty)\},$$

onde este número é de fato real pelos itens demonstrados anteriormente. Por conseguinte, usando o fato que arctan é crescente em $(0, \infty)$, concluímos que

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg}(x) = sup\{\operatorname{arctg}(x) : x \in (0, \infty)\} = \frac{\pi}{2},$$

ver Teorema 3.1.33. Novamente usufruindo do fato que arctan é ímpar, chegamos a

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\lim_{y \to \infty} \operatorname{arctg}(y) = -\frac{\pi}{2},$$

através da mudança de variável $y = -x$ (ver Teorema 3.1.33). Estes argumentos estabelecem a prova de iv).

Por fim, para demonstrar v) é suficiente verificar que arctan é injetiva e sobrejetiva (quando o contradomínio está restrito ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$).

A injetividade segue simplesmente do fato da função arcotangente ser monótona. Já para a sobrejetividade aplicaremos o Teorema 3.1.32. Antes de tudo, verificamos acima os seguintes limites:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg}(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Os quais podem ser traduzidos matematicamente pelas afirmações abaixo:

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tal que } \forall x > A, \text{ tem-se } \left| \operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{2} < \varepsilon \right|. \tag{3.8}$$

e

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tal que } \forall x < -A, \text{ tem-se } \left| \operatorname{arctg}(x) + \frac{\pi}{2} < \varepsilon \right|. \tag{3.9}$$

Estamos prontos para verificar a sobrejitividade relatada acima. Assim sendo, considere que $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ e seja $\varepsilon = \pi/2 - y > 0$. Aplicando este valor de ε em (3.8), encontramos x_1 suficientemente grande tal que

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - y\right) < \operatorname{arctg}(x_1).$$

Consequentemente, $y < \operatorname{arctg}(x_1)$. Por outro lado, supondo que $\varepsilon = y + \pi/2 > 0$ inferimos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{arctg}(x_0) < -\frac{\pi}{2} + \left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Logo, $\operatorname{arctg}(x_0) < y$.

Sabemos que a função arcotangente é contínua (ver Teorema 1.23) e acabamos de mostrarque $\operatorname{arctg}(x_0) < y < \operatorname{arctg}(x_1)$, onde $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$. Portanto, pelo Teorema 3.1.32, existe algum $x \in (x_0, x_1)$ tal que $\operatorname{arctg}(x) = y$. Isto mostra que arctan é uma aplicação sobrejetiva. Isto completa a prova do Teorema 3.2.1.

Através do Teorema 3.2.1 é possível encontrar o seguinte gráfico para a função arcotangente.

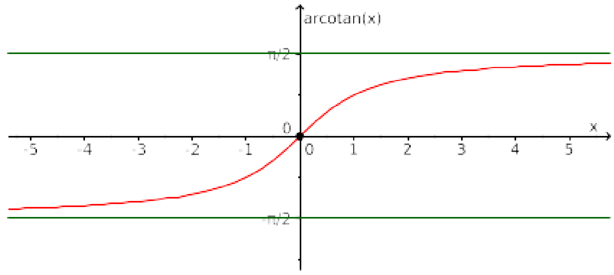


Figura 3.1: Gráfico da função arcotangente

Uma Estimativa para π

Como aplicação das propriedades elementares, estabelecidas na seção anterior, da função arcotangente, estamos interessados em estabelelcer uma estimativa para o valor de π. Sabemos que $\pi = 2 sup \operatorname{arctg}(x) : x \in (0, \infty)$ (ver Teorema 3.2.1 iv)) e, além disso, na demonstração do Teorema 3.2.1 iii), vimos que $\operatorname{arctg}(x) < 2$ para todo $x \in (1, \infty)$. Como arctan é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ (ver Teorema 3.2.1 ii)), então $2 \cdot \operatorname{arctg}(x) < 4$ para todo $x \in (0, \infty)$. Deste modo, concluímos que $\pi \leq 4$.

Por outro lado, usando (3.6), encontramos

$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{1}{1+c^2},$$

para algum $c \in (0, 1)$. Consequentemente, $\operatorname{arctg}(1) > 1/2$ desde que $1/(1+c^2) > 1/2$.

Para encontrar uma estimativa inferior para π, escolha $x \in (1, \infty)$ e aplique (3.7) em ordem a obter a seguinte desigualdade envolvendo $\theta \in (1, x)$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(x) &= \operatorname{arctg}(1) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\right) \\ &> 1 - 12x, \end{aligned}$$

pois $\theta^2/(1+\theta^2) > 1/2$. Dessa forma,

$$2 \cdot \operatorname{arctg}(x) > 2 - \frac{1}{x}, \forall x \in (1, \infty).$$

Portanto, passando ao limite quando $x \to \infty$, obtemos

$$\lim_{x\to\infty} (2 \cdot \operatorname{arctg}(x)) \geq \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2.$$

Como, pelo Teorema 3.2.1 iv), $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \pi/2$, então $\pi \geq 2$. Por fim, encontramos aseguinte estimativa para π:

$$2 \leq \pi \leq 4.$$

A seguir, examinaremos algumas funções trigonométricas conhecidas do ensino elementar como, por exemplo, tangente, seno e cosseno. Começaremos analisando a função tangente,e tendo esta como base abordaremos as propriedades satisfeitas pelas demais.

3.2.2 Função Tangente

Vimos na subseção anterior que a função $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ é bijetiva (ver Teorema 3.2.1 v)). Este fato garante a existência de sua inversa, a qual é denominada função tangente e é denotada por $\operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$. Esta aplicação associa $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ a um valor real $\operatorname{tg}(x)$. Além disso, $\operatorname{tg}(x)$ pode ser obtido através da seguinte equivalência:

$$\operatorname{tg}(x) = y, \text{ com } x \in (-\pi 2, \pi 2) \Leftrightarrow \operatorname{arctg}(y) = x, \text{ com } y \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Note que $\operatorname{tg}(x) > 0 parax \in (0, \pi/2)$, enquanto $\operatorname{tg}(x) < 0$ para $x \in (-\pi/2, 0)$. Com efeito, se $\operatorname{tg}(x) = y$ com $x \in (0, \pi/2)$, temos que $\operatorname{arctg}(y) = x > 0$. Portanto, pelo que foi discutido na seção anterior, concluímos que $y > 0$. Isto nos informa que $\operatorname{tg}(x) > 0$. O outro caso é análogo. Em adição, desde que $\operatorname{arctg}(0) = 0$ (ver (3.3) , temos a igualdade $\operatorname{tg}(0) = 0$.

Abaixo, permita-nos listar algumas propriedades elementares satiafeitas pela função tangente.

Teorema 3.2.2. *As seguintes afirmações envolvendo a função tangente são verdadeiras:*

i) *A função tangente é derivável em $(-\pi/2, \pi/2)$, e sua derivada satisfaz a relação a seguir:*

$$\operatorname{tg}'(x) = 1 + [\operatorname{tg}(x)]^2, \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \tag{3.11}$$

ii) *A função tangente é crescente em $(-\pi/2, \pi/2)$. Em adição, esta aplicação é estritamente côncava em $(-\pi/2, 0)$ e estritamente convexa em $(0, \pi/2)$;*

iii) *A função tangente é ímpar em $(-\pi/2, \pi/2)$;*

iv) *Se $\pi = 2sup\{\operatorname{arctg}(x) : x \in (0, \infty)\}$, então*

$$\lim_{x \to \left(\pm\frac{\pi}{2}\right)^{\mp}} \operatorname{tg}(x) = \pm\infty. \tag{3.12}$$

Demonstração. Usando a caracterização da função tangente dada em (3.10) e o Teorema 3.1.36, o item i) deste resultado segue facilmente. De fato, sabemos que arctg é derivável em qualquer ponto $y \in \mathbb{R}$ e sua derivada é dada por $\operatorname{arctg}'(y) = 1/(1 + y^2) > 0$ (ver (3.4)). Assim sendo, se aplicarmos o Teorema 3.1.36, concluímos que tg é derivável em $(-\pi/2, \pi/2)$ e sua derivada satisfaz as seguintes igualdades:

$$\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(y)) = \frac{1}{arctan'(y)} = 1 + y^2, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Assim sendo, para $x = \operatorname{arctg}(y)$ inferimos que $\operatorname{tg}(x) = y$ e consequentemente,

$$\operatorname{tg}'(x) = 1 + [\operatorname{tg}(x)]^2, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

A igualdade acima também nos mostra que $\operatorname{tg}'(x) > 0$ parar todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Dessa forma, aplicando o Teorema 3.1.29 podemos concluir que a função tangente é crescente em $(-\pi/2, \pi/2)$.

Agora, analisando o sinal da segunda derivada podemos concluir que a função tangente é estritamente côncava em $(-\pi/2, 0)$ e estritamente convexa em $(0, \pi/2)$. Com efeito, as operações elementares envolvendo derivadas nos levam a concluir que

$$\mathrm{tg}''(x) = 2 \cdot \mathrm{tg}(x)\{1 + [\,\mathrm{tg}(x)]^2\}, \forall x \in (-\pi/2, \pi/2),$$

basta utilizar (3.11). Como $1 + [\,\mathrm{tg}(x)]^2 > 0$, então só nos resta analisar o sinal do fator $\mathrm{tg}(x)$. Todavia, vimos acima que $\mathrm{tg}(x) > 0$ se $x \in (0, \pi/2)$. Assim sendo, segue que tg é estritamente convexa em $(0, \pi/2)$ (ver Teorema 3.1.30). E, por outro lado, $\mathrm{tg}(x) < 0$ se $x \in (-\pi/2, 0)$. Por conseguinte, tg é estritamente cônvava em $(-\pi/2, 0)$ (ver novamente o Teorema 3.1.30). Isto completa a prova de ii).

Usando (3.10) e o Teorema 3.2.1 iii), obtemos, para $\mathrm{tg}(x) = y$ com $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ (i.e., $\mathrm{arctg}(y) = x$), que

$$\mathrm{tg}(-x) = \mathrm{tg}(-\,\mathrm{arctg}(y)) = \mathrm{tg}(\,\mathrm{arctg}(-y)) = -y = -\,\mathrm{tg}(x).$$

Portanto, tg é ímpar e iii) segue.

Por fim, note que tg é ilimitada pelo simples fato que sua imagem é $\mathbb{R}$. Assim sendo, usando o fato que a função tangente é crescente e aplicando o Teorema 3.1.33, concluímos que

$$\lim_{x \to \left(\pm\frac{\pi}{2}\right)} \mp\,\mathrm{tg}(x) = \pm\infty.$$

$\square$

O Teorema 3.2.2 nos permite encontrar o seguinte gráfico para a função tangente definida em $(-\pi/2, \pi/2)$.

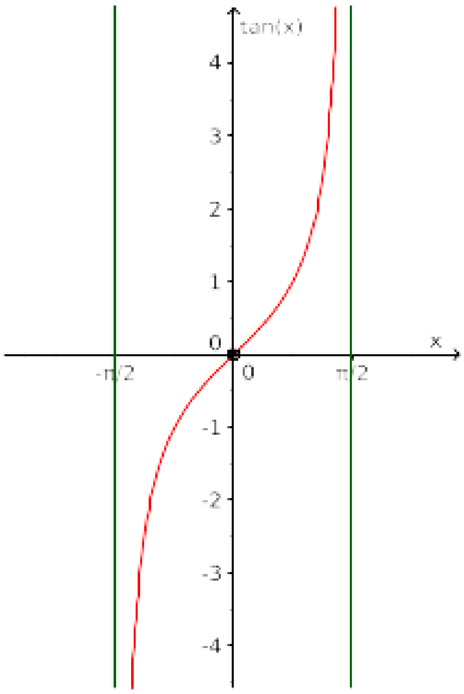


Figura 3.2: Gráfico da função tangente sobre $(-\pi/2, \pi/2)$

Após estabelecer os resultados acima para a função tangente, estamos aptos a definir as funções seno e cosseno.

3.2.3 Funções Seno e Cosseno

Nesta subseção, definiremos as funções trigonométricas seno e cosseno como consequência do conceito da aplicação tangente. Em adição, estabeleceremos algumas propriedades básicas das mesmas. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 3.2.3. *As aplicações* $\operatorname{sen}, \cos : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ *que associam um número* $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ *aos números reais* $\operatorname{sen}(x)$ *e* $\cos(x)$*, os quais são definidos, respectivamente, por*

$$\operatorname{sen}(x) := \frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg}(x)]^2}}, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.13}$$

e

$$\operatorname{sen}(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg}(x)]^2}}, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.14}$$

são chamadas seno e cosseno.

Usando o resultado visto no início da seção anterior, onde $\tan(0) = 0$, e aplicando a Definição 3.2.3, obtemos

$$\operatorname{sen}(0) = \frac{\operatorname{tg}(0)}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg}(0)]^2}} = 0, \tag{3.15}$$

E, analogamente, chegamos a

$$\cos(0) = \frac{1}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg}(0)]^2}} = 1. \tag{3.16}$$

O resultado a seguir contém informações sobre as propriedades elementares satisfeitas pela função seno.

Teorema 3.2.4. *As seguintes afirmações sobre a função seno são válidas:*

i) *A função seno é ímpar em* $(-\pi/2, \pi/2)$*;*

ii) *A função seno é limitada em* $(-\pi/2, \pi/2)$*. Mais precisamente,* $0 < \operatorname{sen}(x) < 1$ *para todo* $x \in (0, \pi/2)$ *e* $-1 < \operatorname{sen}(x) < 0$ *para todo* $x \in (-\pi/2, 0)$*. Em particular,* $-1 < \operatorname{sen}(x) < 1$ *para todo* $x \in (-\pi/2, \pi/2)$*;*

iii) $\lim\limits_{x \to \left(\pm\frac{\pi}{2}\right)^{\mp}} \mp \operatorname{sen}(x) = \pm 1$*;*

iv) *A função seno é derivável em* $(-\pi/2, \pi/2)$*, e sua derivada é dada por*

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x), \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

v) *A função seno é crescente em* $(-\pi/2, \pi/2)$*. Além disso, esta mesma aplicação é estritamente convexa em* $(-\pi/2, 0)$ *e estritamente côncava em* $(0, \pi/2)$*.*

Demonstração. Por utilizar a Definição 3.2.3, obtemos

$$\operatorname{sen}(-x) = \frac{\operatorname{tg}(-x)}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg}(-x)]^2}} = -\frac{tan(x)}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg}(x)]^2}} = -\operatorname{sen}(x) \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

basta aplicar o Teorema 3.2.2 iii). Isto completa a prova de i).

Como já foi discutido na seção anterior, $\operatorname{tg}(x) > 0$ com $x \in (0, \pi/2)$ e $\operatorname{tg}(x) < 0$ com $x \in (-\pi/2, 0)$. Consequentemente,

$$0 < \operatorname{sen}(x) = \frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{1 + [tan(x)]^2}} < 1, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, para $x \in (-\pi/2, 0)$, encontramos $0 < \operatorname{sen}(-x) < 1$. Mas, sen é uma função ímpar. Logo, $-1 < \operatorname{sen}(x) < 0$. Isto prova o item ii).

Agora, analisemos os seguintes limites:

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{sen}(x), \quad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{sen}(x)$$

Em relação ao primeiro limite acima, podemos aplicar a Definição 3.2.3 em ordem a encontrar

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg} x]^2}} = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(x)\sqrt{\frac{1}{[\operatorname{tg} x]^2} + 1}},$$

pois $\operatorname{tg}(x) > 0$, quando $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$. Então,

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{sen}(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{[\operatorname{tg} x]^2} + 1}}.$$

Aplicando o Teorema 3.2.2 iv), obtemos

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{sen}(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{[\operatorname{tg} x]^2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$$

De modo análogo a verificação anterior, e novamente usando o Teorema 3.2.2 iv) com a condição $tan(x) < 0$, considerando que $x \to (-\pi/2)^+$, obtemos as seguintes igualdades:

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{sen}(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\operatorname{tg}(x)}{-\operatorname{tg}(x)\sqrt{\frac{1}{[\operatorname{tg} x]^2}+1}} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{[\operatorname{tg} x]^2}+1}} = -1.$$

Sendo assim, concluímos a demostração do item iii).

Para determinar que a função seno é derivável em $(-\pi/2, \pi/2)$ e encontrar sua derivada, é suficiente aplicar a regra da derivação do quociente, o Teorema 3.2.2 i) e a Definição 3.2.3. De fato,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}'(x) &= \frac{(1+[\operatorname{tg}(x)]^2)(1+[\operatorname{tg}(x)]^2)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{tg}(x)\frac{1}{2}(1+[\operatorname{tg}(x)]^2)^{-\frac{1}{2}} 2\operatorname{tg}(x)(1+[\operatorname{tg}(x)]^2)}{1+[\operatorname{tg}(x)]^2} \\
&= \frac{(1+[\operatorname{tg}(x)]^2)(1+[\operatorname{tg}(x)]^2)^{\frac{1}{2}} - [\operatorname{tg}(x)]^2(1+[\operatorname{tg}(x)]^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+[\operatorname{tg}(x)]^2} \\
&= (1+[\operatorname{tg}(x)]^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{[\operatorname{tg}(x)]^2)}{1+[\operatorname{tg}(x)]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+[\operatorname{tg}(x)]^2}} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, ver Definição 3.2.3. portanto, está provado o item iv).

Pelo item anterior, podemos afirmar que a primeira derivada da função seno é positiva no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Logo, pelo Teorema 3.1.29, podemos concluir que a sen é crescente no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Agora, derivando mais uma vez, tem-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}''(x) &= \frac{\frac{-1}{2}(1+[\operatorname{tg}(x)]^2)^{-\frac{1}{2}} 2\operatorname{tg}(x)(1+[\operatorname{tg}(x)]^2)}{(1+[\operatorname{tg}(x)]^2)} \\
&= -\frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{1+[\operatorname{tg}(x)]^2}} \\
&= -\operatorname{sen}(x),
\end{aligned}$$

para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ (ver Definição 3.2.3). Por fim, analisando o sinal da segunda derivada, nota-se que, pelo Teorema 3.1.30 e item ii) acima, a função seno é estritamente convexa em $(-\pi/2, 0)$ e estritamente côncava em $(0, \pi/2)$. $\square$

Por utilizar o Teorema 3.2.4, chegamos ao gráfico abaixo para a função seno definida sobre $(-\pi/2, \pi/2)$.

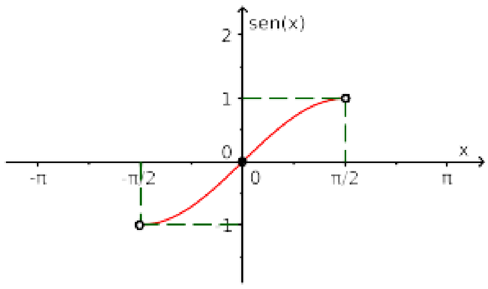


Figura 3.3: Gráfico da função seno em $(-\pi/2, \pi/2)$

De modo similar ao que foi estudado para a função seno, listaremos a seguir algumas propriedades elementares satisfeitas pela função cosseno definida no início desta seção (ver Definição 3.2.3).

Teorema 3.2.5. *As seguintes afirmações sobre a função cosseno são válidas:*

i) *A função cosseno é par em* $(-\pi/2, \pi/2)$*;*

ii) *A aplicação cosseno é limitada em* $(-\pi/2, \pi/2)$*. Mais precisamente,* $0 < \cos(x) \leq 1$ *para todo* $x \in (-\pi/2, \pi/2)$*;*

iii) $\displaystyle\lim_{x \to \left(\pm\frac{\pi}{2}\right)^{\mp}} \cos(x) = 0$*;*

iv) *A função cosseno é derivável em* $(-\pi/2, \pi/2)$*, e sua derivada é dada por*

$$\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x), \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

v) *A função cosseno é crescente em* $(-\pi/2, 0)$ *e decrescente em* $(0, \pi/2)$*. Além disso,* cos *é estritamente côncava em* $(-\pi/2, \pi/2)$*.*

Demonstração. Para verificar que a função cosseno é ímpar em $(-\pi/2, \pi/2)$, basta observar a Definição 3.2.3 e as seguintes igualdades:

$$\cos(-x) = \frac{1}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg}(-x)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + [-\operatorname{tg}(x)]^2}} = \cos(x),$$

onde foi aplicado item iii) do Teorema 3.2.2. Coseguindo assim, a verificação de i).

Através da Definição 3.2.3, obtemos

$$0 < \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg}(x)]^2}} \leq 1, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.17}$$

Isto nos informa que cos é uma aplicação limitada em seu domínio. Isto completa a prova do item ii).

Agora, usando o resultado da função tangente obtido no Teorema 3.2.2 iv), chegamos a

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{\sqrt{1 + [\,\mathrm{tg} x]^2}} = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{\mathrm{tg}(x)\sqrt{\frac{1}{[\,\mathrm{tg} x]^2} + 1}} = 0,$$

desde que $\mathrm{tg}(x) > 0$, quando $x \in (0, \pi/2)$. Por outro lado,

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \cos(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{1 + [\,\mathrm{tg} x]^2}} = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1}{-\,\mathrm{tg}(x)\sqrt{\frac{1}{[\,\mathrm{tg} x]^2} + 1}} = 0,$$

pois $\mathrm{tg}(x) < 0$, quando $x \in (-\pi/2, 0)$. Desse modo, iii) está demonstrado.

Aplicando a regra da derivada do quociente à definição do cosseno (ver Definição 3.2.3), concluímos que cos é derivável em $(-\pi/2, \pi/2)$ e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \frac{\frac{-1}{2}(1 + [\,\mathrm{tg}(x)]^2)^{-\frac{1}{2}} 2\,\mathrm{tg}(x)(1 + [\,\mathrm{tg}(x)]^2)}{(1 + [\,\mathrm{tg}(x)]^2)} \\ &= -\frac{\mathrm{tg}(x)}{\sqrt{1 + [\,\mathrm{tg}(x)]^2}} \\ &= -\,\mathrm{sen}(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ (ver Definição 3.2.3). Na primeira igualdade acima, usamos o Teorema 3.2.2 i). Isto estabelece iv).

Por aplicar o Teorema 3.2.4 ii) e a derivada do cosseno encontrada acima, temos que esta aplicação é crescente em $(-\pi/2, 0)$, e decrescente em $(0, \pi/2)$ (ver Teorema 3.1.29).

Agora, analisando a segunda derivada de cos, obtemos

$$\cos''(x) = -\,\mathrm{sen}'(x) = -\cos(x), \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.18}$$

ver Teorema 3.2.4 iv).

Por fim, por usar ii) e (3.18), concluímos que a função cosseno é estritamente côncava em $(-\pi/2, \pi/2)$ (ver Teorema 3.1.30). Sendo assim, v) está verificado.

$\square$

Em ordem a construir o gráfico da função cosseno em $(-\pi/2, \pi/2)$, usamos o Teorema 3.2.5 e chegamos a

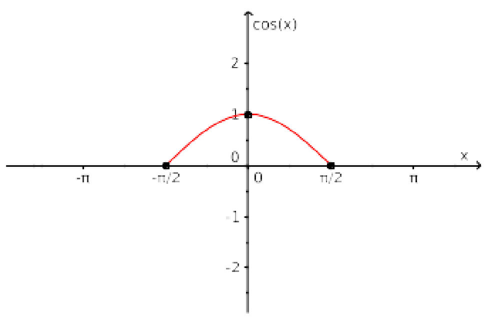


Figura 3.4: Gráfico da função cosseno em $(-\pi/2, \pi/2)$

Para concluir esta seção, observamos que, através da Definição 3.2.3, podemos representara função tangente como esta é conhecida no ensino elementar. Com efeito,

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} := \frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{1+[\operatorname{tg}(x)]^2}}\sqrt{1+[\operatorname{tg}(x)]^2} = \operatorname{tg}(x), \forall x \in (-\pi 2, \pi 2). \tag{3.19}$$

3.3 Extensões das Funções Seno, Cosseno e Tangente

Nesta seção, apresentaremos definições e resultados que garantem a extensão das funções trigonométricas estudadas no capítulo anterior. Em adição, mostraremos como obter algumas identidades fundamentais estabelecidas em cursos elementares que discutem temas relacionados a trigonometria.

3.3.1 Extensões das Funções Seno e Cosseno

Primeiramente, podemos notar que, através da Definição 3.1.16 e igualdades já obtidas neste texto; tais como: $\operatorname{sen}(0) = 0$, $\operatorname{sen}'(0) = 1$, $\cos(0) = 1$ e $\cos'(0) = 0$, encontramos os seguintes limites

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1 \, e \, \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0$$

(Os resultados acima podem também ser vistos como uma simples aplicação da regra de L'Hospital).

Em ordem a estender as aplicações sen e $\cos$, definimos as imagens das funções seno e cosseno no valor $\pi/2$ da seguinte forma

$$\operatorname{sen}(\pi/2) := 1 \, e \, \cos(\pi/2) := 0. \tag{3.20}$$

Assim sendo, defina as aplicações $\operatorname{sen}, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo

$$\operatorname{sen}(x) := -\operatorname{sen}(x+\pi), \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.21}$$

e

$$\cos(x) := -\cos(x+\pi), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

O resultado a seguir estabelece como generalizar (3.2) e (3.3) dadas acima.

Lema 3.3.1. *As seguintes igualdades são verdadeiras para todo $x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}$.*

$$\operatorname{sen}(x) = (-1)^m \operatorname{sen}(x+m\pi) \, e \, \cos(x) = (-1)^m \cos(x+m\pi).$$

Demonstração. Provaremos primeiramente que

$$\operatorname{sen}(x) = (-1)^m \operatorname{sen}(x+m\pi), \forall x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}. \tag{3.23}$$

Para essa demonstração, usaremos indução matemática. Sendo assim, considere que $m = 1$. Logo,

$$\operatorname{sen}(x) := -\operatorname{sen}(x+\pi) = (-1)^1 \operatorname{sen}(x+1\pi), \forall x \in \mathbb{R},$$

ver (3.2). Em seguida, suponha que (3.4) seja verdadeira. Portanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= (-1)^m \operatorname{sen}(x+m\pi) \\
&:= (-1)^m(-1) \operatorname{sen}((x+m\pi)+\pi) \\
&= (-1)^{m+1} \operatorname{sen}(x+(m+1)\pi), \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Isto completa a prova da afirmação (3.4).

Agora, para verificar que

$$\operatorname{sen}(x) = (-1)^m \operatorname{sen}(x+m\pi), \forall x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, \tag{3.24}$$

basta considerar que m é um natural negativo para obter, por (3.4), as igualdades abaixo

$$\operatorname{sen}(x) = (-1)^{-m} \operatorname{sen}(x+(-m)\pi), \forall x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Novamente aplicando indução, temos, para $m = 1$, que

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}((x+(-1)\pi)+\pi) =: (-1)^{-1} \operatorname{sen}(x+(-1)\pi), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

Supondo que a afirmação (3.6) é válida, faremos a verificação desta para o caso $m+1$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= (-1)^{-m} \operatorname{sen}(x+(-m)\pi) \\
&= (-1)^{-m}(-1)^{-1} \operatorname{sen}((x+(-m)\pi)+(-1)\pi) \\
&= (-1)^{-(m+1)} \operatorname{sen}(x-(m+1)\pi),
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos (3.7). Por fim,

$$(-1)^0 \operatorname{sen}(x+0\pi) = \operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Com isso,

$$\operatorname{sen}(x) = (-1)^m \operatorname{sen}(x+m\pi), \forall x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}.$$

De maneira análoga, prova-se o resultado envolvendo a função cosseno.

□

O próximo resultado estabelece algumas propriedades satisfeitas pela função seno definida sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 3.3.2. *As seguintes afirmações sobre a função seno são válidas:*

i) *A função* $\operatorname{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é periódica, com período* 2π*;*

ii) *A função* $\operatorname{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é ímpar;*

iii) $\operatorname{sen}(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = n\pi$ *para algum* $n \in \mathbb{Z}$*;*

iv) *A função seno é derivável em* $\mathbb{R}$ *e sua derivada é dada por*

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

A aplicação $\operatorname{sen}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é também derivável, e sua derivada é dada por*

$$\operatorname{sen}''(x) = -\operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R};$$

v) *A função* $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é infinitamente derivável e, para* $n \in \mathbb{N}$*, sua n-ésima derivada é dada por*

$$\operatorname{sen}^(2n)(x) = (-1)^n \operatorname{sen}(x)\, e\, \operatorname{sen}^{(2n-1)}(x) = (-1)n - 1\cos(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

Demonstração. Para mostrar que a função seno é periódica, e tem como periódo 2π, basta observar que

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}((x + \pi) + \pi) := -\operatorname{sen}(x + \pi) =: \operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Isto completa a prova de i).

Já foi estudado que a função seno é ímpar no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ (ver Teorema 3.2.4). Além disso,

$$\mathbb{R} := \cup_{n\in\mathbb{Z}} \left[(2n + 1)\frac{\pi}{2}, (2n + 3)\frac{\pi}{2}\right]. \tag{3.28}$$

Dessa forma, dado $x \in \mathbb{R}$, existe $n_x \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(2n_x + 1)\frac{\pi}{2} \leq x \leq (2n_x + 3)\frac{\pi}{2}.$$

Como o objetivo é encontrar um $z \in (-\pi/2, \pi/2)$ e aplicar o Teorema 3.2.4, faremos algumas manipulações aritméticas. Note que

$$(2n_x + 1)\frac{\pi}{2} + y \leq x + y \leq (2n_x + 3)\frac{\pi}{2} + y, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Escolheremos o valor de y, através da igualdade

$$(2n_x + 1)\frac{\pi}{2} + y = -\frac{\pi}{2},$$

ou seja,

$$y = -\frac{\pi}{2} - (2n_x + 1)\frac{\pi}{2} = -(n_x + 1)\pi.$$

Sendo assim,

$$(2n_x + 1)\frac{\pi}{2} - (n_x + 1)\pi \leq x - (n_x + 1)\pi \leq (2n_x + 3)\frac{\pi}{2} - (n_x + 1)\pi$$

se transforma em $-\pi/2 \leq x-(n_x+1)\pi \leq \pi/2$. Por outro lado, usando o Lema 3.3.1, encontramos

$$\operatorname{sen}(x) = (-1)^{n_x+1} \operatorname{sen}(x - (n_x + 1)\pi) = -(-1)^{n_x+1} \operatorname{sen}(-x + (n_x + 1)\pi) = -\operatorname{sen}(-x),$$

desde que $x - (n_x + 1)\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1 = -\operatorname{sen}(-\pi/2)$. Pontanto, concluímos que a função seno é ímpar em $\mathbb{R}$.

Agora vamos provar que $\operatorname{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$ com $n \in \mathbb{Z}$. De fato, basta utilizar o Lema 3.3.1 e tomar $x = 0$, em ordem a obter

$$\operatorname{sen}(n\pi) = \operatorname{sen}(0 + n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen}(0) = 0, n \in \mathbb{Z}.$$

Reciprocamente, se $\operatorname{sen}(x) = 0$, temos, também pelo Lema 3.3.1, que

$$0 = \operatorname{sen}(x) = (-1)^{n_x+1} \operatorname{sen}(x - (n_x + 1)\pi),$$

onde $n_x \in \mathbb{Z}$ foi encontrado em (3.9). Como $x-(n_x+1)\pi \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $\operatorname{sen}(x-(n_x+1)\pi) = 0 = \operatorname{sen}(0)$, então

$$x = (n_x + 1)\pi, n_x \in \mathbb{Z},$$

pois sen é injetiva em $(-\pi/2, \pi/2)$ (ver Teorema 3.2.4). Isto completa a prova do item iii).

Já foi demonstrado que sen é derivável em $(-\pi/2, \pi/2)$, e sua derivada é dada pela seguinte igualdade:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x), \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

ver Teorema 3.2.4. Por outro lado, observe que

$$\mathbb{R} \setminus (2n + 1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}((2n + 1)\pi/2, (2n + 3)\pi/2) \tag{3.29}$$

Consequentemente, dado $x \in \mathbb{R} \setminus (2n + 1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}$ temos que existe $n_x \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(2n_x + 1)\frac{\pi}{2} < x < (2n_x + 3)\frac{\pi}{2}.$$

O objetivo agora é determinar um $y \in \mathbb{R}$ de forma que $x + y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Para isso, basta acrecentar y as desigualdades acima e obter como resultado o seguinte:

$$(2n_x + 1)\frac{\pi}{2} + y < x + y < (2n_x + 3)\frac{\pi}{2} + y.$$

Determinando o valor de y como desejado acima, encontramos

$$y = (-n_x - 1)\pi.$$

Por conseguinte, $-\pi/2 < x + (-n_x - 1)\pi < \pi/2$. Agora, usando o Teorema 3.2.4, obtemos

$$\operatorname{sen}'(x + (-n_x - 1)\pi) = \cos(x + (-n_x - 1)\pi),$$

pois $x + (-n_x - 1)\pi \in (-\pi/2, \pi/2)$.Aplicando o Lema 3.3.1, chegamos a

$$\operatorname{sen}(x) = (-1)^{n_x+1} \operatorname{sen}(x + (-n_x - 1)\pi)$$

e também

$$\cos(x) = (-1)^{n_x+1} \cos(x + (-n_x - 1)\pi).$$

Pelo Teorema 3.1.25, inferimos

$$\text{sen}'(x) = (-1)^{n_x+1}\,\text{sen}'(x + (-n_x - 1)\pi) = (-1)^{n_x+1}\cos(x + (-n_x - 1)\pi) = \cos(x).$$

Portanto,

$$\text{sen}'(x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Para concluir a demonstração, vamos provar que a função seno é derivável em $\{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}$. Com efeito, usando novamente o Lema 3.3.1 e (3.1), temos

$$\text{sen}((2n+1)\pi/2) = \text{sen}(\pi/2 + n\pi) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Assim sendo, usando limites laterais, concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]-} \frac{\text{sen}(x) - \text{sen}((2n+1)\frac{\pi}{2})}{x - (2n+1)\frac{\pi}{2}} &= \lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]-} \frac{\text{sen}(x) - (-1)^n}{x - (2n+1)\frac{\pi}{2}} \\ &= \lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]-} \cos(x),\end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos a regra de L'Hospital. Se realizarmos a mudança de variável $y = x - n\pi$, obtemos, através do Lema 3.3.1, que

$$\lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]-} \cos(x) = \lim_{y\to(\pi/2)-} \cos(y + n\pi) = \lim_{y\to(\pi/2)-} (-1)^n \cos(y) = (-1)^n \cdot 0 = 0,$$

onde na penúltima igualdade utilizamos o Teorema 3.2.5.

Do mesmo modo encontraremos o limite à direita. De fato, considerando a mesma mudança de variável $y = x - n\pi$, temos que

$$\lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]+} \frac{\text{sen}(x) - \text{sen}((2n+1)\frac{\pi}{2})}{x - (2n+1)\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]+} \cos(x) = (-1)^n \lim_{y\to(\pi/2)+} \cos(y),$$

Como a função cosseno é par, tem-se

$$\lim_{y\to(\pi/2)+} \cos(y) = \lim_{y\to(\pi/2)+} \cos(-y).$$

Por fim, fazendo a substituição $z = -y$, obtemos

$$\lim_{y\to(\pi/2)+} \cos(-y) = \lim_{y\to(-\pi/2)+} \cos(z) = 0,$$

ver Teorema 3.2.5. Dessa forma, pelo Lema 3.3.1, encontramos as igualdades

$$\text{sen}'((2n+1)\pi/2) = 0 = \cos((2n+1)\pi/2), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Analogamente ao que foi feito acima, considere que $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}$. Logo, $existe n_x \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(2n_x + 1)\frac{\pi}{2} < x < (2n_x + 3)\frac{\pi}{2},$$

ver (3.10). Portanto,

$$-\frac{\pi}{2} < x + (-n_x - 1)\pi < \frac{\pi}{2}.$$

Pelo Teorema 3.2.4, temos que

$$\cos'(x + (-n_x - 1)\pi) = -\operatorname{sen}(x + (-n_x - 1)\pi)$$

e, aplicando o Lema 3.3.1, encontramos

$$\cos(x) = (-1)^{n_x+1}\cos(x + (-n_x - 1)\pi).$$

Consequentemente, pelo Teorema 3.1.25, obtemos

$$\begin{aligned}
\cos'(x) &= (-1)^{n_x+1}\cos'(x + (-n_x - 1)\pi) \\
&= -(-1)^{n_x+1}\operatorname{sen}(x + (-n_x - 1)\pi) \\
&= -\operatorname{sen}(x). \\
\cos'(x) &= -\operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Permita-nos estabelecer a derivada do cosseno para os valores $(2n+1)\pi/2$, com $n \in \mathbb{Z}$. Note que, usando o Lema 3.3.1 e (3.1), obtemos

$$\cos((2n+1)\pi/2) = \cos(\pi/2 + n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]-}\frac{\cos(x) - \cos((2n+1)\frac{\pi}{2})}{x - (2n+1)\frac{\pi}{2}} = -\lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]-}\operatorname{sen}(x),$$

onde na última igualdade usamos a regra de L'Hospital. Aplicando as mesma substituições utilizadas no Teorema 3.2.4, encontramos

$$\lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]-}\operatorname{sen}(x) = \lim_{y\to(\pi/2)-}\cos(y + n\pi) = (-1)^n\lim_{y\to(\pi/2)-}\operatorname{sen}(y) = (-1)^n,$$

onde usamos o Lema 3.3.1 na penúltima igualdade. Portanto,

$$\lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]-}\frac{\cos(x) - \cos((2n+1)\frac{\pi}{2})}{x - (2n+1)\frac{\pi}{2}} = (-1)^{n+1}.$$

O limite lateral à direita pode ser encontrado através das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]+}\frac{\cos(x) - \cos((2n+1)\frac{\pi}{2})}{x - (2n+1)\frac{\pi}{2}} &= \lim_{z\to[(\pi/2)+}\operatorname{sen}(z + n\pi) \\
&= (-1)^{n+1}\lim_{z\to[(\pi/2)+}\operatorname{sen}(z) \\
&= (-1)^n\lim_{z\to[(\pi/2)+}\operatorname{sen}(-z) \\
&= (-1)^n\lim_{z\to[(\pi/2)+}\operatorname{sen}(y) \\
&= (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos o fato que a função seno é ímpar sobre $\mathbb{R}$ e na última o Teorema 3.2.4. Por fim,

$$\cos'((2n+1)\pi/2) = (-1)^{n+1} = -\operatorname{sen}((2n+1)\pi/2), \forall n \in \mathbb{Z},$$

ver Lema 3.3.1. Deste modo, obtemos

$$\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

Consequentemente,

$$\operatorname{sen}''(x) = -\operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Isto completa a prova de iv).

Em ordem a estabelecer uma prova para v), utililizaremos o príncipio de indução matemática. Dessa forma, para $n = 1$, obtemos

$$\operatorname{sen}^{(2)}(x) = -\operatorname{sen}(x)\, e\, \operatorname{sen}'(x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Considere, agora, que (3.8) seja válida. Logo,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^{[2(n+1)]}(x) &= \operatorname{sen}^{(2n+2)}(x) = (\operatorname{sen}^{(2)})^{(2n)}(x) = (-\operatorname{sen})(2n)(x)\\ &= (-1)^{n+1}\operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Também temos que,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^{[2(n+1)-1]}(x) &= \operatorname{sen}^{(2n+1)}(x) = (\operatorname{sen}^{(2n)})'(x) = (-1)^n \operatorname{sen}'(x)\\ &= (-1)^n \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Note que, usando a figura 3.3, o Lema 3.3.1 e o Teorema 3.3.2, podemos obter o seguinte gráfico para a função seno definida em toda a reta.

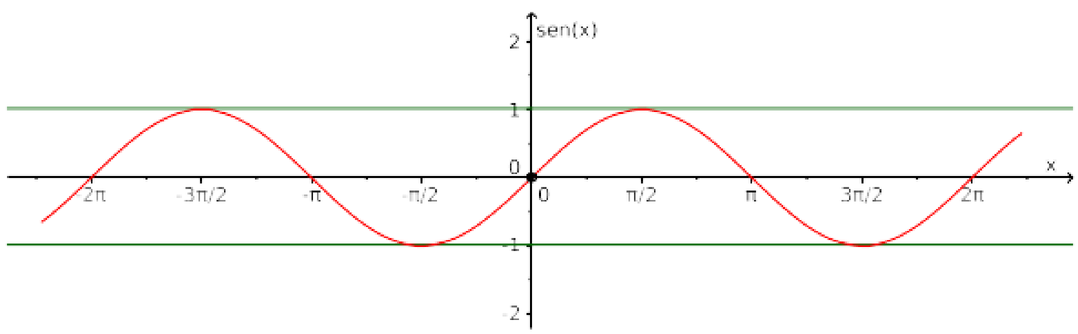


Figura 3.5: Gráfico da função seno

Veremos a seguir, algumas propriedades da função cosseno sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 3.3.3. *As seguintes afirmações sobre a função* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são verdadeiras:*

i) *A função* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é periódica, com período* 2π*;*

ii) *A função* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é par;*

iii) $\cos(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = (2n+1)\pi/2$ *para algum* $n \in \mathbb{Z}$*;*

iv) *A função cosseno é derivável em* $\mathbb{R}$*, e sua derivada é dada por*

$$\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R};$$

v) *A função* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é infinitamente derivável e, para* $n \in \mathbb{N}$*, sua n-ésima derivada é dada por*

$$\cos^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos(x) \cos^{(2n-1)}(x) = (-1)^n \operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.31}$$

Demonstração. De modo similar ao que foi feito para a função seno, usando (3.3), encontramos as seguintes igualdades:

$$\cos(x+2\pi) = \cos((x+\pi)+\pi) = -\cos(x+\pi) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por isso, a função cosseno é periódica, e tem período 2π. Chegando assim a demonstrar o item i).

Utilizaremos novamente o Lema 3.3.1 para monstrar que a função cosseno é par.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Assim, por (3.9), existe $n_x \in \mathbb{Z}$ tal que $(x-(n_x+1)\pi) \in [-\pi/2, \pi/2]$. Por outro lado, aplicando o Lema 3.3.1, obtemos

$$\cos(-x) = (-1)^{n_x+1} \cos(-x+(n_x+1)\pi) = (-1)^{n_x+1} \cos(x-(n_x+1)\pi) = \cos(x),$$

desde que $\cos(\pi/2) = 0 = \cos(-\pi/2)$ e cos é par em $(-\pi/2, \pi/2)$. O item ii) está provado.

Agora, demonstremos iii).

Vimos no início desta seção que a função cosseno se anula em $\pi/2$ (ver (3.1)). Por conseguinte, aplicando o Lema 3.3.1, inferimos

$$\cos((2n+1)\pi/2) = \cos(\pi/2+n\pi) = (-1)^n \cos(\pi/2) = 0, n \in \mathbb{Z}.$$

Reciprocamente, considere que $\cos(x) = 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Deste modo, encontramos $n_x \in \mathbb{Z}$ tal que $x-(n_x+1)\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$ (ver (3.9)), e consequentemente,

$$0 = \cos(x) = (-1)(n_x+1)\cos(x-(n_x+1)\pi), n_x \in \mathbb{Z}.$$

Então,

$$\cos(x-(n_x+1)\pi) = \cos(\pi/2) = \cos(-\pi/2) = 0, com x-(n_x+1)\pi \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Como $\cos(x) > 0$, para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, ver Teorema 3.2.5, então

$$\frac{\pi}{2} = x - (n_x + 1)\pi \; ou \; -\frac{\pi}{2} = x - (n_x + 1)\pi,$$

ou equivalentemente,

$$x = [2(n_x + 1) + 1]\frac{\pi}{2} \; ou \, x = [2n_x + 1]\frac{\pi}{2}.$$

Com isso, concluímos a demonstração de iii).

Veja que iv) segue diretamente de (3.11).

Para provar v), usaremos novamente o príncipio de indução matemática. Assim sendo, para $n = 1$, temos que

$$\cos^{(2)}(x) = -\cos(x) \; e \; \cos'(x) = -\operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suponha que (3.12) seja verdadeiro. Assim,

$$\begin{aligned}
\cos^{[2(n+1)]}(x) &= \cos^{(2n+2)}(x) \\
&= (\cos^{(2)})^{(2n)}(x) \\
&= (-cos)^{(2n)}(x) \\
&= (-1)^{n+1}\cos(x), \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Também temos que,

$$\begin{aligned}
\cos^{[2(n+1)-1]}(x) &= \cos^{(2n+1)}(x) \\
&= (\cos^{(2n)})'(x) \\
&= (-1)^n \cos'(x) \\
&= (-1)^{n+1}\operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

O resultado segue. □

Usando o gráfico 2.3, aplicando o Lema 3.3.1 e o Teorema 3.3.3, enciontramos o gráfico abaixo para a função cosseno definida em toda a reta.

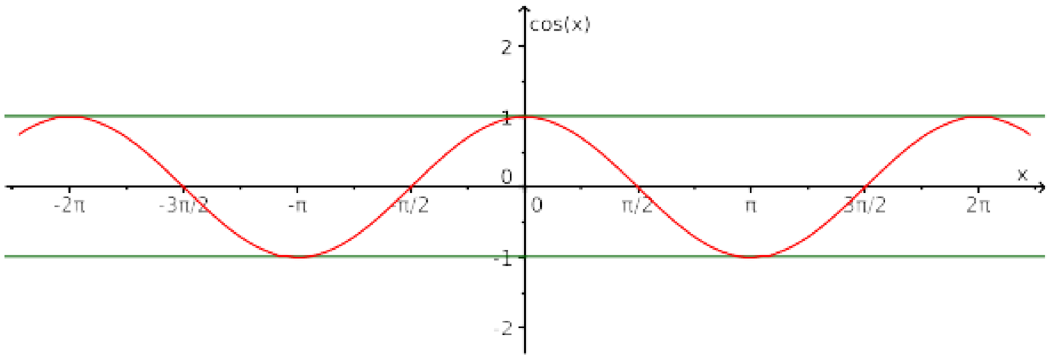


Figura 3.6: Gráfico da função cosseno

3.3.2 Extensão da Função Tangente

Conhecidas as funções seno e cosseno definidas sobre $\mathbb{R}$, podemos estabelecer uma extensão para a função tangente sobre um subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual desconsideramos os valores onde cos se anula (ver Teorema 3.3.3 iii)). Sendo assim,

$$\operatorname{tg}(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}, \tag{3.32}$$

o que está de acordo com (3.19).

A partir dos resultados estabelecidos nos Teoremas 3.3.2 e 3.3.3, podemos concluir algumas informações sobre a extensão da função tangente.

Teorema 3.3.4. *As seguintes afirmações sobre a função* $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *são verdadeiras:*

i) *A função* $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *é periódica, com período* π*;*

ii) *A função* $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *é ímpar;*

iii) $\operatorname{tg}(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = n\pi$ *para algum* $n \in \mathbb{Z}$*;*

iv) *A função tangente é derivável em* $\mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}$*, e sua derivada é dada por*

$$\operatorname{tg}'(x) = 1 + [\operatorname{tg}(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\};$$

v) *Para cada* $n \in \mathbb{Z}$*, tem-se*

$$\lim_{x \to [(2n+1)\pi/2]^{\pm}} \operatorname{tg}(x) = \mp\infty.$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(x+\pi) &= \operatorname{sen}(x+\pi)\cos(x+\pi) \\
&:= -\operatorname{sen}(x) - \cos(x) \\
&= \operatorname{tg}(x), \forall x \in \mathbb{R}\{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\},
\end{aligned}$$

ver (3.2) e (3.3). Isto nos informa que a aplicação tangente é periódica, com período π. De forma análoga, temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(-x) &= \operatorname{sen}(-x)\cos(-x) \\
&= -\operatorname{sen}(x)\cos(x) \\
&= -\operatorname{tg}(x), \forall x \in \mathbb{R}\{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\},
\end{aligned}$$

onde usamos os Teoremas 3.3.2 e 3.3.3. Este fato estabelece ii).

Também do Teorema 3.3.2, podemos inferir que

$$\operatorname{tg}(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x)\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, paraalgumn \in \mathbb{Z}.$$

Isto prova iii).

Para provar iv), note que a função tangente é obtida de uma operação elementar entre duas funções deriváveis. Logo, esta também é derivável em seu domínio, e sua derivada pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{[\cos(x)]^2 + [\operatorname{sen}(x)]^2}{[\cos(x)]^2} = 1 + [\operatorname{tg}(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Isto completa a demonstração de iv).

Em ordem a verificar v), primeiramente observe que

$$\lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]^-} \operatorname{tg}(x) = \lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]^-} \frac{\operatorname{sen}(x-n\pi)}{\cos(x-n\pi)}$$

onde na última igualdade utilizamos o Lema 3.3.1. Aplicando a mudança de variável $y = x - n\pi$, encontramos

$$\lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]^-} \frac{\operatorname{sen}(x-n\pi)}{\cos(x-n\pi)} = \lim_{y\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg}(y) = \infty,$$

onde usamos o Teorema 3.2.2.

Por outro lado, é fácil ver que

$$\lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]^+} \operatorname{tg}(x) = \lim_{x\to[(2n+1)\pi/2]^+} \operatorname{tg}(x-(n+1)\pi) = \lim_{y\to(-\pi/2)^+} \operatorname{tg}(y)$$

onde usamos o Lema 3.3.1 e o Teorema 3.2.2. □

Através da figura 3.2 e do Teorema 3.3.4, o seguinte gráfico representa a função tangente em toda a reta.

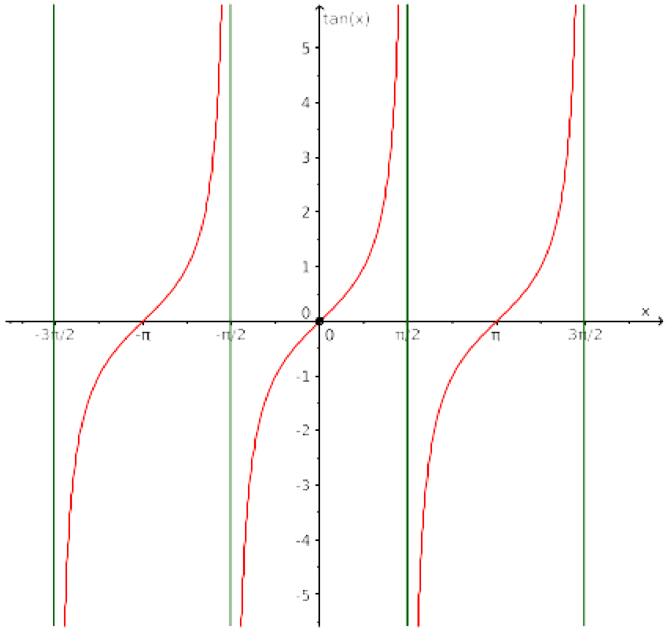


Figura 3.7: Gráfico da função tangente

Na seção seguinte, usaremos as extensões das funções seno e cosseno para obter identidades bem conhecidas do ensino elementar.

3.3.3 Relações Fundamentais Envolvendo as Funções Seno e Cosseno

Estabeleceremos algumas identidades fundamentais envolvendo as funções seno e cosseno, as quais nos permitem determinar, por exemplo, a resolução de equações trigonométricas. Listaremos algumas dessas fórmulas e em seguida as demonstraremos.

Enunciaremos a seguir a relação fundamental da trigonometria.

Teorema 3.3.5. *A seguinte igualdade, envolvendo as funções seno e cosseno, é válida:*

$$[\operatorname{sen}(x)]^2 + [\cos(x)]^2 = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Primeiramente, defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = [\operatorname{sen}(x)]^2 + [\cos(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando a regra da cadeia e os Teoremas 3.3.2 e 3.3.3, concluímos que f é derivável e sua derivada é dada por

$$f'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - 2\cos(x)\operatorname{sen}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, $f \equiv c$, onde c é uma constante. Por outro lado, para $x = 0$, temos que

$$f(0) = [\operatorname{sen}(0)]2 + [\cos(0)]2 = 0 + 1 = 1.$$

Portanto, $f \equiv 1$ e, por conseguinte, tem-se que

$$[\operatorname{sen}(x)]^2 + [\cos(x)]^2 = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\square$

Teorema 3.3.6. *Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Então, as seguintes igualdades são verdadeiras:*

i) $\operatorname{sen}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2) \pm \operatorname{sen}(x_2)\cos(x_1)$;

ii) $\cos(x_1 \pm x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) \mp \operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2)$.

Demonstração. Usando uma argumentação análoga a realizada na demonstração do Teorema 3.3.5 podemos provar este resultado. Com efeito, defina $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos(x)\operatorname{sen}(x + x_2) - \operatorname{sen}(x)\cos(x + x_2), \\ h(x) &= \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x + x_2) + \cos(x)\cos(x + x_2), \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde $x_2 \in \mathbb{R}$ está fixo. Pelos Teoremas 3.3.2 e 3.3.3, temos que g e h são deriváveis e suas derivadas são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x + x_2) + \cos(x)\cos(x + x_2) - \cos(x)\cos(x + x_2) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x + x_2), \\ h'(x) &= \cos(x)\operatorname{sen}(x + x_2) + \operatorname{sen}(x)\cos(x + x_2) - \operatorname{sen}(x)\cos(x + x_2) - \cos(x)\operatorname{sen}(x + x_2). \end{aligned}$$

Assim,

$$g'(x) = h'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, $g \equiv c_g$ e $h \equiv c_h$, onde c_g, c_h são constantes. Considerando $x = -x_2$, encontramos

$$g(x) = g(-x_2) = \operatorname{sen}(x_2), h(x) = h(-x_2) = \cos(x_2),$$

onde usamos os fatos que as funções seno e cosseno são ímpar e par, respectivamente (ver Teoremas 3.3.2 e 3.3.3). Por outro lado, para $x = x_1$, obtemos

$$\begin{aligned} g(x_1) &= \cos(x_1)\operatorname{sen}(x_1 + x_2) - \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_1 + x_2), \\ h(x_1) &= \operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_1 + x_2) + \cos(x_1)\cos(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Como $g(x_1) = g(x_2)$ e $h(x_1) = h(x_2)$, então

$$\begin{aligned} \cos(x_1)\operatorname{sen}(x_1 + x_2) - \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_1 + x_2) &= \operatorname{sen}(x_2), \\ \operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_1 + x_2) + \cos(x_1)\cos(x_1 + x_2) &= \cos(x_2). \end{aligned}$$

Considerando que $y = \operatorname{sen}(x_1 + x_2)$ e $t = \cos(x_1 + x_2)$, segue o seguinte sistema com variáveis y e t:

$$\begin{cases} \cos(x_1)y - \operatorname{sen}(x_1)t = \operatorname{sen}(x_2) \\ \operatorname{sen}(x_1)y + \cos(x_1)t = \cos(x_2) \end{cases}$$

Para resolver o sistema acima, é suficiente multiplicar a primeira equação por $\cos(x_1)$, e a segunda por $\operatorname{sen}(x_1)$. De fato,

$$\begin{cases} [\cos(x_1)]^2 y - \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_1)t = \operatorname{sen}(x_2)\cos(x_1)\operatorname{sen}(x_1) > \mathrm{sen(x_1)} \\ {}^2 y + \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_1)t = \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2) \end{cases}$$

Somando as duas equações acima, tem-se que

$$\{[\cos(x_1)]^2 + [\operatorname{sen}(x_1)]^2\}y = \operatorname{sen}(x_2)\cos(x_1) + \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2).$$

Por i), obtem-se que $y = \operatorname{sen}(x_2)\cos(x_1) + \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2)$. Logo,

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2) + \operatorname{sen}(x_2)\cos(x_1). \tag{3.33}$$

Isolando t e substitutindo o valor de y na segunda equação do sistema acima, obtemos

$$\begin{aligned} t &= \frac{\cos(x_2) - \operatorname{sen}(x_1)y}{\cos(x_1)} \\ &= \frac{\cos(x_2) - \operatorname{sen}(x_1)[\operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2) + \operatorname{sen}(x_2)\cos(x_1)]}{\cos(x_1)} \\ &= \frac{\cos(x_2) - [\operatorname{sen}(x_1)]2\cos(x_2) - \cos(x_1)\operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2)}{\cos(x_1)} \\ &= \frac{\cos(x_2)[\cos(x_1)]2 - \cos(x_1)\operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2)}{\cos(x_1)} \\ &= \cos(x_1)\cos(x_2) - \operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2), \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos o Teorema 3.3.5. Assim, estabelecemos a igualdade abaixo:

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) - \operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2) \tag{3.34}$$

Aplicando os resultados obtidos em (3.14) e (3.15), encontramos

$$\operatorname{sen}(x_1 - x_2) = \operatorname{sen}(x_1 + (-x_2)) = \operatorname{sen}(x_1)\cos(-x_2) + \operatorname{sen}(-x_2)\cos(x_1)$$

e também

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos(x_1 + (-x_2)) = \cos(x_1)\cos(-x_2) - \operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(-x_2).$$

Usando novamente o fato que as funções seno e cosseno são ímpar e par (ver Teoremas 3.3.2 e 3.3.3), respectivamente, podemos deduzir as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x_1 - x_2) &= \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2) - \operatorname{sen}(x_2)\cos(x_1), \\ \cos(x_1 - x_2) &= \cos(x_1)\cos(x_2) + \operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, completamos as provas de i) e ii).

□

O resultado a seguir é uma consequˆencia imediata do Teorema 3.3.6.

Teorema 3.3.7. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Então, as igualdades abaixo são válidas:*

i) $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$;

ii) $\cos(2x) = [\cos(x)]^2 - [\operatorname{sen}(x)]^2$.

Demonstração. Por utilizar (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2x) &= \operatorname{sen}(x+x) \\ &= \operatorname{sen}(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(x) \\ &= 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) \end{aligned}$$

e também, por (3.15), chegamos a

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos(x+x) \\ &= \cos(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x) \\ &= [\cos(x)]^2 - [\operatorname{sen}(x)]^2. \end{aligned}$$

□

Aplicando os Teoremas 3.3.5 e 3.3.7 de duas maneiras distintas, chegamos ao seguinte resultado.

Teorema 3.3.8. *Sejam $x \in \mathbb{R}$. Então, as seguintes igualdades são verdadeiras:*

i) $[\operatorname{sen}(x)]^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$;

ii) $[\cos(x)]^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

Demonstração. Utilizando os Teoremas 3.3.5 e 3.3.7, obtemos

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= [\cos(x)]^2 - [\operatorname{sen}(x)]^2 \\ &= 1 - 2[\operatorname{sen}(x)]^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$[\operatorname{sen}(x)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Podemos também, através dos Teoremas 3.3.5 e 3.3.7, encontrar

$$\cos(2x) = [\cos(x)]^2 - [\operatorname{sen}(x)]^2 = 2[\cos(x)]^2 - 1.$$

Por fim,

$$[\cos(x)]^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Isto estabelece i) e ii).

□

Em ordem a finalizar esta seção, descreveremos como encontrar a soma e a subtração de imagens de senos e também de cossenos.

Teorema 3.3.9. *Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Então, as igualdades a seguir são válidas:*

i) $\operatorname{sen}(x_1) \pm \operatorname{sen}(x_2) = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x_1 \pm x_2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x_1 \mp x_2}{2}\right)$;

ii) $\cos(x_1) + \cos(x_2) = 2\cos\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)$;

iii) $\cos(x_1) - \cos(x_2) = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)$.

Demonstração. Demonstração. Cosiderando as mudanças de variáveis

$$p = \frac{(x_1 + x_2)}{2}, q = \frac{(x_1 - x_2)}{2},$$

chegamos ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2p \\ x_1 - x_2 = 2q \end{cases}$$

Tal sistema tem como solução, nas variáveis x_1, x_2, $x_1 = p + q$, $x_2 = p - q$. Substituindo estes valores no Teorema 3.3.6, concluímos que

$$\begin{aligned}
[]\operatorname{sen}(p+q) + \operatorname{sen}(p-q) &= \operatorname{sen}(p)\cos(q) + \operatorname{sen}(q)\cos(p) + \operatorname{sen}(p)\cos(q) - \operatorname{sen}(q)\cos(p) \\
&= 2\operatorname{sen}(p)\cos(q) \\
&= 2\operatorname{sen}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(p+q) - \operatorname{sen}(p-q) &= \operatorname{sen}(p)\cos(q) + \operatorname{sen}(q)\cos(p) - \operatorname{sen}(p)\cos(q) + \operatorname{sen}(q)\cos(p) \\
&= 2\operatorname{sen}(q)\cos(p) \\
&= 2\operatorname{sen}\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(p+q) + \cos(p-q) &= \cos(p)\cos(q) - \operatorname{sen}(p)\operatorname{sen}(q) + \cos(p)\cos(q) + \operatorname{sen}(p)\operatorname{sen}(q) \\
&= 2\cos(p)\cos(q) \\
&= 2\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)
\end{aligned}$$

e, por fim,

$$\begin{aligned}
\cos(p+q) - \cos(p-q) &= \cos(p)\cos(q) - \operatorname{sen}(p)\operatorname{sen}(q) - \cos(p)\cos(q) - \operatorname{sen}(p)\operatorname{sen}(q) \\
&= -2\operatorname{sen}(p)\operatorname{sen}(q) \\
&= -2\operatorname{sen}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Finalizando a demonstração do Teorema 3.3.9.

□

3.4 Funções Secante, Cossecante, Cotangente e Inversas das Funções Trigonométricas

Nesta seção, mostraremos como definir as três funções trigonométricas recíprocas, relacionadas as funções seno, cosseno e tangente. Mais precisamente, serão demonstradas algumas relações importantes envolvendo a secante, cossecante e cotangente. No fim, estabeleceremos as definições das funções arcosseno e arcocosseno e derivaremos algumas propriedades inerentes a estas aplicações.

3.4.1 Funções Secante, Cossecante e Cotangente

Iniciemos definindo as aplicações secante, cossecante e cotangente.

Definição 3.4.1. *As funções* $\operatorname{cossec} : \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\sec : \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *e* $\operatorname{cotg} : \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, *denominadas cossecante, e cotangente, respectivamente, são dadas por:*

$$\operatorname{cossec}(x) := \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}, \tag{3.35}$$

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}, \tag{3.36}$$

$$\operatorname{cotg}(x) := \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.37}$$

É interessante observar que, por (3.13), temos

$$\operatorname{cotg}(x) = 1 \operatorname{tg}(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}.$$

É também importante ressaltar que as aplicações seno, cosseno, tangente, cossecante, secante, e cotangente são conhecidas como funções trigonométricas.

Veremos a seguir, algumas afirmações importantes envolvendo a função secante, definida acima. De imediato, percebe-se que os resultados demonstrados abaixo são consequências do estudo, realizado neste trabalho, para a função cosseno.

Teorema 3.4.2. *São válidas as seguintes propriedades elementares relacionadas a função secante:*

i) *A função* $\sec : \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *é periódica, com período* 2π*;*

ii) *A função* $\sec : \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *é par;*

iii) *A função secante é derivável em* $\mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}$*, e sua derivada é dada por*

$$\sec'(x) = \operatorname{tg}(x) \cdot \sec(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\};$$

iv) *A seguinte igualdade vale:*

$$[\operatorname{tg}(x)]^2 + 1 = [\sec(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\};$$

v) *A função secante é não decrescente nos intervalos* $[0, \pi/2)$ *e* $(\pi/2, \pi]$*. Além disso, esta mesma aplicação é estritamente convexa em* $[0, \pi/2)$ *e estritamente côncava em* $(\pi/2, \pi]$*;*

vi) $\lim\limits_{x \to (\pi 2)\pm} \sec(x) = \mp\infty.$

Demonstração. Demonstração. Usando (4.2) e o Teorema 3.3.3, temos que

$$\begin{aligned} \sec(x + 2\pi) &= \frac{1}{\cos(x + 2\pi)} \\ &= \frac{1}{\cos(x)} \\ &= \sec(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

i.e., segue facilmente do fato que a função cosseno é periódica, e tem como período 2π, que a secante também é periódica e seu período é dado por 2π.

Aplicando novamente o Teorema 3.3.3, obtemos

$$\begin{aligned} \sec(-x) &= 1 \cos(-x) \\ &= 1 \cos(x) \\ &= \sec(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Provando assim, o item ii).

Como cos é derivável em $\mathbb{R}$ (ver Teorema 3.3.3), então sec também é derivável. Além disso, a derivada da secante é dada por

$$\begin{aligned} \sec'(x) &= \frac{0 \cdot \cos(x) - [-\operatorname{sen}(x)]}{[\cos(x)]^2} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{[\cos(x)]^2} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \\ &= \operatorname{tg}(x) \cdot \sec(x), (4.4) \end{aligned} \tag{3.38}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}$.Isto completa a prova de iii).

Dividindo a igualdade encontrada no Teorema 3.3.5 por $\cos(x)]^2$, inferimos

$$\frac{[\operatorname{sen}(x)]^2}{[\cos(x)]^2} + \frac{[\cos(x)]^2}{[\cos(x)]^2} = \frac{1}{[\cos(x)]^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\},$$

ou equivalentemente,

$$[\operatorname{tg}(x)]^2 + 1 = [\sec(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Vimos em (4.4) que

$$\sec'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{[\cos(x)]^2}, \forall x \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big)].$$

Por outro lado, o Teorema 3.2.4 nos informa que $\operatorname{sen}(x) \geq 0, \forall x \in [0, \pi/2)$, e $\operatorname{sen}(x) \leq 0$, $\forall x \in (-\pi/2, 0]$. Usando o Lema 3.3.1, concluímos que

$$\sec'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{[\cos(x)]^2} \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Consequentemente, pelo Teorema 3.1.29, temos que $\sec$ é não decrescente nos intervalos $[0, \pi/2)$ e $(\pi/2, \pi]$. Derivando mais uma vez a função secante, encontramos

$$\sec''(x) = \frac{1 + [\operatorname{sen}(x)]^2}{[\cos(x)]^3}, \forall x \in [0, \pi 2) \cup (\pi 2, \pi]. \tag{3.39}$$

Vimos no Teorema 3.2.5 que $\cos(x) > 0$, $\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Pelo Lema 3.3.1, temos que $\cos(x) > 0$, $\forall x \in [0, \pi/2)$, e $\cos(x) < 0$, $\forall x \in (\pi/2, \pi]$. Portanto, pelo Teorema 3.1.30 e (4.8) inferimos que $\sec$ é estritamente convexa em $[0, \pi/2)$ e estritamente côncava em $(\pi/2, \pi]$. Isto completa a prova de v).

Os limtes do item vi) seguem diretamente das propriedades satisfeitas pelo cosseno. $\square$

Em ordem a aplicar os resultados obtidos para a função seno, enunciaremos algumas afirmações sobre a cossecante.

Teorema 3.4.3. *São válidas as seguintes propriedades relacionadas a função cossecante:*

i) *A função* $\operatorname{cossec} : \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *é periódica, com período* 2π*;*

ii) *A função* $\operatorname{cossec} : \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *é ímpar;*

iii) *A função cossecante é derivável em* $\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$*, e sua derivada é dada por*

$$\operatorname{cossec}'(x) = -\operatorname{cotg}(x) \cdot \operatorname{cossec}(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\};$$

iv) *A identidade abaixo é verdadeira*

$$1 + [\operatorname{cotg}(x)]^2 = [\operatorname{cossec}(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\};$$

v) *A função cossecante é não crescente nos intervalos* $[-\pi/2, 0)$ *e* $(0, \pi/2]$*. Além disso, esta mesma aplicação é estritamente convexa em* $(0, \pi/2]$ *e estritamente côncava em* $[-\pi/2, 0)$*.*

vi) $\lim_{x \to 0\pm} \operatorname{cossec}(x) = \pm\infty$*.*

Demonstração. Por (4.1) e pelo Teorema 3.3.2, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{cossec}(x + 2\pi) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(x + 2\pi)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \\ &= \operatorname{cossec}(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Assim, o item i) está provado.

Por outro lado, usando novamente o Teorema 3.3.2, conclui-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{cossec}(-x) &= 1(-x) \\
&= 1 - \operatorname{sen}(x) \\
&= -1 \operatorname{sen}(x) \\
&= -\operatorname{cossec}(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Portanto, a função cossecante é ímpar.

Como o seno é uma função derivável (ver Teorema 3.3.2), então a função cossecante também o é. Além disso,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cossec}'(x) &= \frac{-\cos(x)}{[\operatorname{sen}(x)]^2} \\
&= \frac{-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \\
&= -\operatorname{cotg}(x) \cdot \operatorname{cossec}(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}. \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

Dividindo a relação fundamental da trigonometria, encontrada no Teorema 3.3.5, por $[\operatorname{sen}(x)]^2$, chegamos a

$$\frac{[\operatorname{sen}(x)]^2}{[\operatorname{sen}(x)]^2} + \frac{[\cos(x)]^2}{[\operatorname{sen}(x)]^2} = \frac{1}{[\operatorname{sen}(x)]^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\},$$

ou seja,

$$1 + [\operatorname{cotg}(x)]^2 = [\operatorname{cossec}(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Por (4.6), temos que

$$\operatorname{cossec}'(x) = -\cos(x)[\operatorname{sen}(x)]^2, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Por outro lado, o Teorema 3.2.4 nos informa que $\operatorname{sen}(x) > 0$, $\forall x \in (0, \pi/2]$, e $\operatorname{sen}(x) < 0$, $\forall x \in [-\pi/2, 0)$. Já o Teorema 3.2.5 nos diz que $\cos(x) \geq 0$, $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cossec}'(x) &= -\frac{\cos(x)}{[\operatorname{sen}(x)]^2} \leq 0, \forall x \in [-\pi 2, 0) \cup (0, \pi 2], \\
\operatorname{cossec}''(x) &= \frac{1 + [\cos(x)]^2}{[\operatorname{sen}(x)]^3} < 0, \forall x \in [-\pi 2, 0).
\end{aligned}$$

e

$$\operatorname{cossec}''(x) = \frac{1 + [\cos(x)]^2}{[\operatorname{sen}(x)]^3} > 0, \forall x \in (0, \pi 2]. \qquad (3.41)$$

Consequentemente, pelos Teoremas 3.1.29 e 3.1.30, temos que cossec é não crescente nos intervalos $[-\pi/2, 0)$ e $(0, \pi/2]$, estritamente convexa em $(0, \pi/2]$ e estritamente côncava em $[-\pi/2, 0)$. Isto completa a prova de v).

Os limtes do item vi) seguem diretamente das propriedades satisfeitas pelo seno. Assim, completamos a prova do Teorema 3.4.3.

□

Em seguida, a partir dos estudos realizados para a função tangente, encontraremos propriedades importantes relacionadas a função cotangente.

Teorema 3.4.4. *As seguintes propriedades elementares relacionadas a função cotangente são válidas:*

i) *A função* $\operatorname{cotg} : \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *é periódica, com período* π.

ii) *A função* $\operatorname{cotg} : \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *é ímpar.*

iii) $\operatorname{cotg}(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = (2n+1)\pi/2$ *para algum* $n \in \mathbb{Z}$.

iv) *A função cotangente é derivável em* $\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$, *e sua derivada é dada por*

$$\operatorname{cotg}'(x) = -[\operatorname{cossec}(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}.$$

v) *A função cotangente é decrescente nos intervalos* $(-\pi/2, 0)$ *e* $(0, \pi/2)$. *Além disso, esta mesma aplicação é estritamente convexa em* $(0, \pi/2)$ *e estritamente côncava em* $(-\pi/2, 0)$.

vi) $\lim\limits_{x \to 0\pm} \operatorname{cotg}(x) = \pm\infty$ *e* $\lim\limits_{x \to (\pm\frac{\pi}{2})\mp} \operatorname{cotg}(x) = 0$.

Demonstração. Observe que

$$\operatorname{cotg}(x+\pi) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x+\pi)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} = \operatorname{cotg}(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\},$$

ver Teorema 3.3.4 e a definição (3.13). Com isso, comprovamos que a função cotangente é periódica, de período π.

Usando novamente o Teorema 3.3.4, encontramos

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}(-x) &= \frac{1}{\operatorname{tg}(-x)} \\ &= \frac{1}{-\operatorname{tg}(x)} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg}(x)} \\ &= -\operatorname{cotg}(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Desse modo, demonstramos ii).

Agora, pelo Teorema 3.3.3, podemos inferir que

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = (2n+1)\pi/2, \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Isto prova iii).

A função cotangente é derivável, pois é definida por operações elementares de funções deriváveis, e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}'(x) &= \frac{-[\operatorname{sen}(x)]^2 - [\cos(x)]^2}{[\operatorname{sen}(x)]^2} \\ &= -\frac{1}{[\operatorname{sen}(x)]^2} \\ &= -[\operatorname{cossec}(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Por iv), temos que $\operatorname{cotg}'(x) < 0$, $\forall x \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$. Dessa forma, cotg é decrescente nos intervalos $(-\pi/2, 0)$ e $(0, \pi/2)$ (ver Teorema 3.1.29).

Por outro lado, o Teorema 3.2.4 nos informa que $\operatorname{sen}(x) > 0$, $\forall x \in (0, \pi/2)$, e $\operatorname{sen}(x) < 0$, $\forall x \in (-\pi/2, 0)$. Já o Teorema 3.2.5 nos diz que $\cos(x) > 0$, $\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Porém,

$$\operatorname{cotg}''(x) = 2\frac{\cos(x)}{[\operatorname{sen}(x)]^3}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.42}$$

Por conseguinte, temos que cotg é estritamente convexa em $(0, \pi/2)$ e estritamente côncava em $(-\pi/2, 0)$ (ver Teorema 3.1.30). Isto completa a prova de v).

Os limtes do item vi) seguem diretamente das propriedades satisfeitas pela tangente e pelo seno.

□

3.4.2 Funções Inversas das Funções Trigonométricas

Nesta subseção, faremos um estudo sobre como justificar a existência das inversas das funções trigonométricas estudadas anteriormente. Em ordem a alcançar tal objetivo, é importante ressaltar que uma função é inversível se, e somente se, esta é uma aplicação bijetora. Por este motivo, nem todas as funções trigonométricas possuem inversas em seus domínios de definição, porém podemos considerar restrições com o intuito de obter aplicações injetoras e sobrejetoras.

Note que não mencionamos acima a inversão da função tangente. Isto não é necessário, desde que já mostramos através da Teorema 3.2.1 que $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ é uma aplicação bijetiva e, em particular, tem como inversa a função $\operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ definida em (3.10). Resta-nos, então, verificar em qual domínio as funções seno, cosseno, secante, cossecante e cotangente são bijetoras.

Teorema 3.4.5. *A função* $\operatorname{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ *é bijetora.*

Demonstração. Como já foi visto que a função sen é estritamente crescente em $(-\pi/2, \pi/2)$ (ver Teorema 3.2.4), logo esta aplicação é injetora, quando restrita a $(-\pi/2, \pi/2)$. Além disso, vimos que $-1 < \operatorname{sen}(x) < 1 \forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$ (ver Teorema 3.2.4 e (3.15)). Porém, $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ e $\operatorname{sen}(-\pi/2) = -1$. Como um resultado, obtemos que sen é injetora em $[-\pi/2, \pi/2]$.

Permita-nos verificar a sobrejetividade da função $\operatorname{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$. Faremos esta prova em três casos.

1º caso) Considere que $y \in (0,1)$.

Sabemos, a partir do Teorema 3.2.1, que $x = \operatorname{arctg}(\sqrt{\dfrac{y^2}{1-y^2}}) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Por conseguinte, $\operatorname{tg}(x) = \sqrt{\dfrac{y^2}{1-y^2}}$ (ver 2.10)). Assim sendo, por (3.13), temos que

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{1+[\operatorname{tg}(x)]^2}} = \frac{\sqrt{\dfrac{y^2}{1-y^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{y^2}{1-y^2}}} = y.$$

2º caso) Considere que $y \in (-1,0)$. Através do 1○ caso, existe $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\operatorname{sen}(x) = -y$. Logo, como a função seno é ímpar, concluímos que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) = y$, onde $-x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

3º caso) Considere que $y = -1$ e $z = 1$.

Neste caso, $\operatorname{sen}(-\pi/2) = -1 = y$ e $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1 = z$.

Portanto, $\operatorname{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ é sobrejetiva. Deste modo, completamos a prova do Teorema 3.4.5.

□

Pelo Teorema 3.4.5 acima, a função $\operatorname{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ possui inversa. Tal aplicação será denotada por $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, e a chamaremos função arcoseno. é fácil perceber que os valores desta aplicação podem ser determinados através da seguinte equivalência:

$$\operatorname{sen}(x) = y, \text{ com } x \in [-\pi/2, \pi/2] \Leftrightarrow \operatorname{arcsen}(y) = x, com y \in [-1,1]. \tag{3.43}$$

Pelo Teorema 3.1.35, a função arcoseno é contínua em $[-1,1]$. Na verdade, pelos Teoremas 3.2.4, 3.1.36 e 3.3.5, arcsen é derivável e sua derivada é dada por

$$\operatorname{arcsen}'(y) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-[\operatorname{sen}(x)]^2}} = \frac{1}{1-y^2}, \tag{3.44}$$

$\forall y \in (-1,1)$, com $y = \operatorname{sen}(x)$. Por conseguinte, pelo Teorema 3.1.23, temos que

$$\operatorname{arcsen}(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz, \forall y \in (-1,1), \tag{3.45}$$

desde que $\operatorname{arcsen}(0) = 0$.

A partir das igualdades (4.10) e (4.11), podemos inferir os seguintes resultados envolvendo a função arcoseno.

Teorema 3.4.6. *As afirmações abaixo são verdadeiras:*

i) *Arcoseno é derivável em (-1, 1), e sua derivada é dada pela seguinte igualdade:*

$$\operatorname{arcsen}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \forall y \in (-1,1); \tag{3.46}$$

ii) *Arcoseno é crescente em $(-1,1)$. Além disso, esta mesma função é estritamente convexa em $(0,1)$ e estritamente côncava em $(-1,0)$.*

iii) *Arcoseno é uma função ímpar em $[-1,1]$;*

iv) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \operatorname{arcsen}(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ *e* $\lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{arcsen}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Demonstração. Note que, a verificação de i) segue diretamente de (4.10) encontrada acima.

Observe também que, através do item i) acima, a derivada do arcoseno é positiva nointervalo $(-1,1)$. Assim sendo, esta aplicação é crescente em $(-1,1)$ (ver Teorema 3.1.29). Além disso, derivando mais uma vez arcsen, obtemos

$$\operatorname{arcsen}''(y) = \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)^3}}, \forall y \in (-1,1).$$

Consequentemente, a derivada segunda da função arcoseno é positiva em $(0,1)$, e negativa em $(-1,0)$. Portanto, o item ii) segue do Teorema 3.1.30.

Note que

$$\operatorname{arcsen}(-y) = \int_0^{-y} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz = -\int_0^{y} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\operatorname{arcsen}(y),$$

onde $y \in (-1,1)$. Também temos que

$$\operatorname{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2} = -\operatorname{arcsen}(1).$$

Logo, a função arcoseno é ímpar em [-1, 1]. Com isso, completamos a prova do item iii).

Por fim, por ii) e Teorema 3.1.33, é fácil ver que

$$\lim_{x\to(-1)^+} \operatorname{arcsen}(x) = inf\,\{\operatorname{arcsen}(x) : x \in (-1,1)\} = inf\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

e também

$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arcsen}(x) = sup\{\operatorname{arcsen}(x) : x \in (-1,1)\} = sup(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Como queríamos demonstrar.

□

A partir do Teorema 3.4.6, é possível construir o seguinte gráfico.

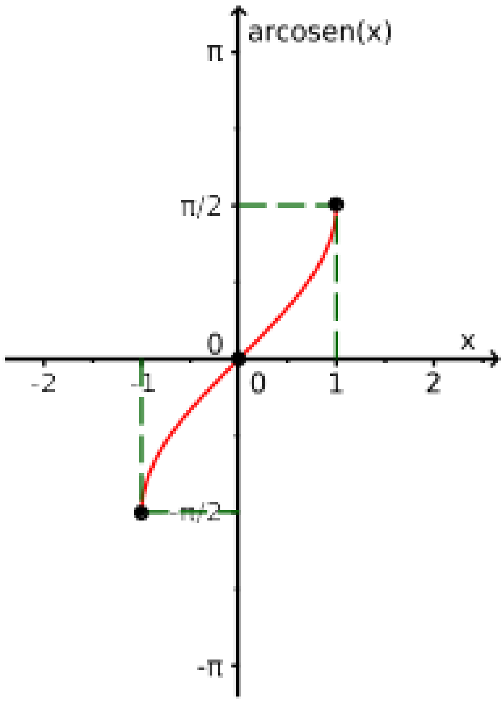


Figura 3.8: Gráfico da função arcoseno em $[-1,1]$

Faremos a seguir, um estudo relacionado a função arcocosseno, conhecendo também, como no caso anterior, algumas propriedades elementares relacionadas a esta aplicação.

Teorema 3.4.7. *A função* $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ *é bijetora.*

Demonstração. Primeiramente, vamos verificar que $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ é injetora. Suponha que $\cos(x) = \cos(y)$, com $x,\, y \in [0,\pi]$. Para estes valores de x e y, temos que $x-\pi/2, y-\pi/2 \in [-\pi/2,\pi/2]$. Por outro lado, usando o Teorema 3.3.6, inferimos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{2}) &= -\cos(x) \\ &= -\cos(y) \\ &= \operatorname{sen}(y-\frac{\pi}{2}), \text{ para } x-\frac{\pi}{2}, y-\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 3.4.5, obtemos que $x-\pi/2 = y-\pi/2$. Logo, $x = y$. Dessa forma, $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ é injetora.

A sobrejetividade de $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ segue da sobrejetividade da função $\operatorname{sen} : [-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$. Com efeito, para $y \in [-1,1]$ temos que existe um único $x \in [-\pi/2,\pi/2]$ tal que $\operatorname{sen}(x) = y$. Por fim,

$$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \operatorname{sen}(x) = y, \text{ onde } \frac{\pi}{2}-x \in [0,\pi],$$

onde utilizamos o Teorema 3.3.6 na primeira igualdade. Com isso, $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ é sobrejetora. Como queríamos demonstrar. $\square$

Pelo Teorema acima temos que a função cosseno é bijetora, quando restrita a $[0, \pi]$. Logo, esta aplicação tem uma inversa. Tal função será chamada arcocosseno e a denotaremos $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Como um resultado, é fácil ver que os valores do arcocosseno podem ser caracterizados por

$$\cos(x) = y, \text{ com } x \in [0, \pi] \Leftrightarrow \arccos(y) = x, \text{ com } y \in [-1, 1]. \tag{3.47}$$

Pelo Teorema 3.1.35, a função arcocosseno é contínua. Mais é verdade, por usar os Teoremas 3.1.36 e 3.3.5, $\arccos$ é derivável e sua derivada é dada por

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(x)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - [\cos(x)]^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \tag{3.48}$$

$\forall y \in (-1, 1)$, $y = \cos(x)$ e $x \in (0, \pi)$. Em adição, aplicando o Teorema 3.1.23, chegamos a

$$\arccos(y) = \frac{\pi}{2} - \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} dz, \forall y \in (-1, 1),$$

pois $\arccos(0) = \pi/2$.

Aplicando (4.14), é possível afirmar alguns resultados envolvendo a função arcocosseno.

Teorema 3.4.8. *As afirmações abaixo são verdadeiras:*

i) *Arcocosseno é derivável em $(-1, 1)$, e sua derivada é dada pela seguinte igualdade:*

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \forall y \in (-1, 1);$$

ii) *Arcocosseno é decrescente em $(-1, 1)$. Além disso, esta mesma função é estritamente convexa em $(-1, 0)$ e estritamente côncava em $(0, 1)$;*

iii) $\lim_{x \to (-1)^+} \arccos(x) = \pi$ *e* $\lim_{x \to 1^-} \arccos(x) = 0$.

Demonstração. Claramente o item i) segue das igualdades obtidas em (4.14).

Por conseguinte, podemos concluir que a função arcocosseno é decrescente e, além disso,

$$\arccos(y)'' = -y\sqrt{}(1 - y2)3, \forall y \in (-1, 1).$$

Por conseguinte, o Teorema 3.1.30 nos garante a veracidade de ii).

Por fim, por ii) e Teorema 3.1.34, obtemos

$$\lim_{x \to (-1)^+} \arccos(x) = \sup\{\arccos(x) : x \in (-1, 1)\} = \sup(0, \pi) = \pi$$

e também

$$\lim_{x \to 1^-} \arccos(x) = \inf\{\arccos(x) : x \in (-1, 1)\} = \inf(0, \pi) = 0.$$

$\square$

Por usar o Teorema 3.4.8 acima, encontramos o seguinte gráfico para a função arcocosseno.

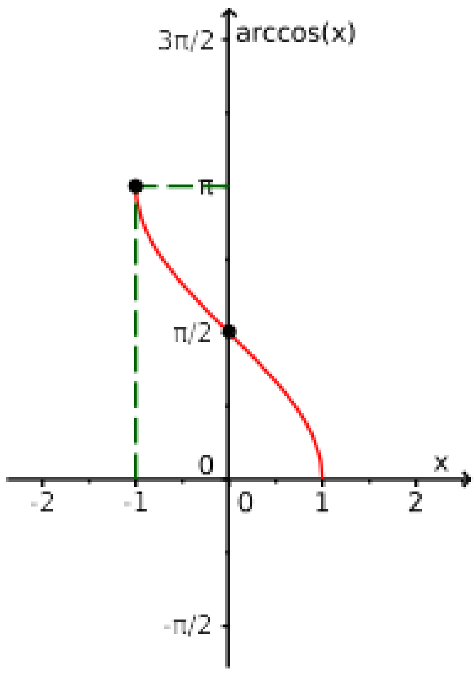


Figura 3.9: Gráfico da função arcocosseno em $[-1, 1]$

Para finalizar esta monografia estabeleceremos uma observação que garante a existência das funções inversas para as funções trigonométricas secante, cossecante e cotangente. Em adição, acrescentamos os graficos destas mesmas aplicações.

Observação 3.1. *Podemos cocluir, através dos Teoremas 3.4.5, 3.4.7, 3.2.1 e relação (3.10), que* $\text{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1], \cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *e* $\text{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ *são funções bijetoras. Portanto, as aplicações* $\text{cossec} : [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2] \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, $\sec : [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi] \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ *e* $\text{cotg} : (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2) \to (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ *são também bijetoras. Portanto é possível definir suas respectivas inversas.*

Usando a observação acima e o Teorema 3.4.2, concluímos que a função secante é crescente em $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ e, consequentemente, o gráfico desta aplicação pode ser respresentado por

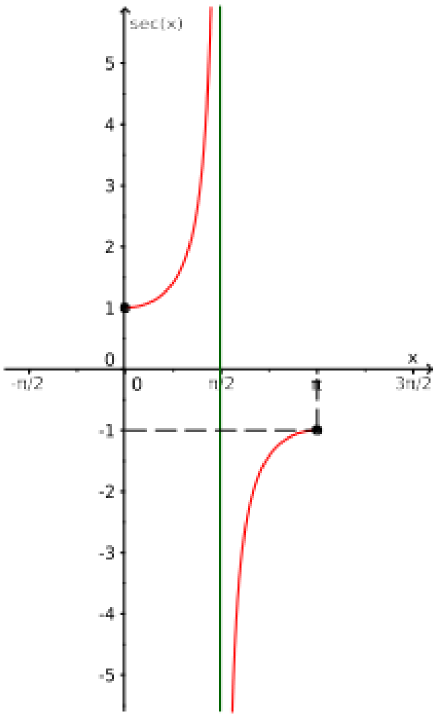


Figura 3.10: Gráfico da função secante em $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

Analogamente, através dos Teoremas 3.4.3 e 3.4.4, juntamente com a observação acima, encontramos os seguintes gráficos para as funções cossecante e cotangente.

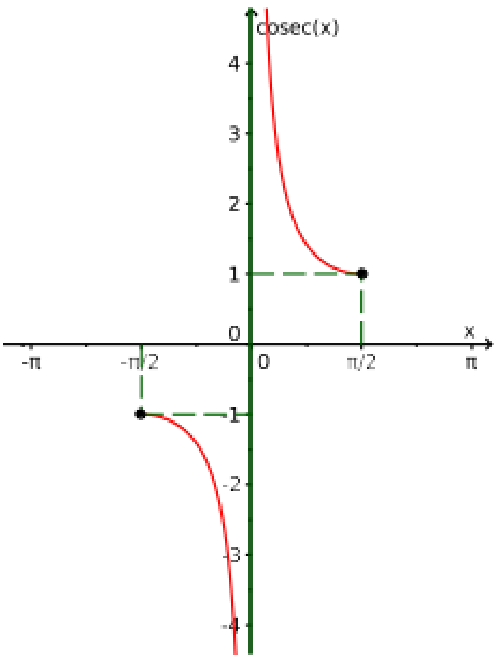


Figura 3.11: Gráfico da função cossecante em $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$

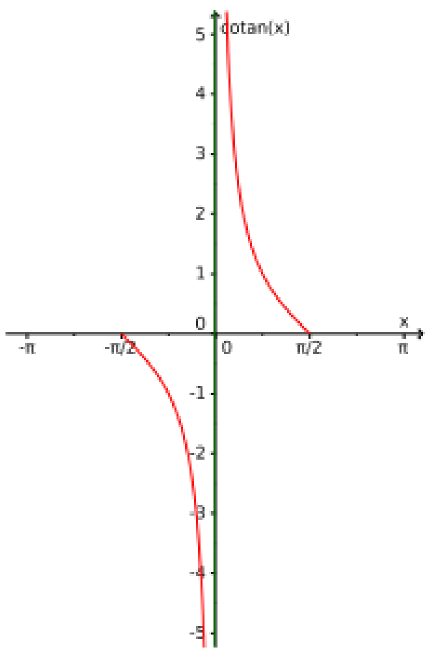


Figura 3.12: Gráfico da função cotangente em $(-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$

Por fim, utilizando o Lema 3.3.1, os gráficos acima e os Teoremas 3.4.2, 3.4.3 e 3.4.4, podemos construir os gráficos das funções secante, cossecante e cotangente, definidas em toda a reta.

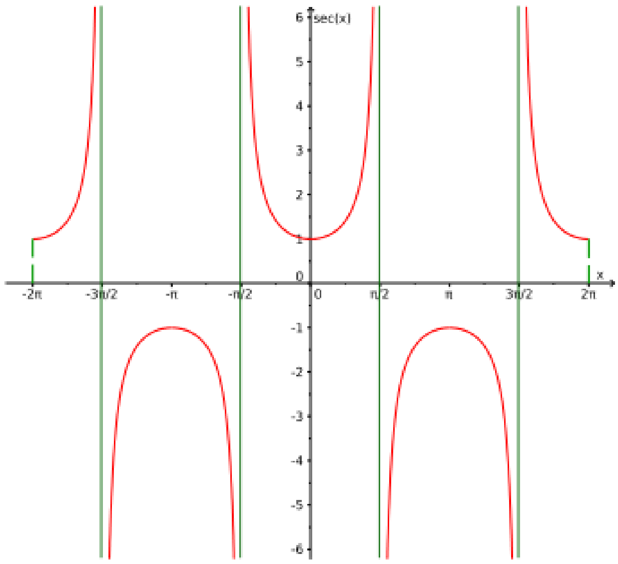


Figura 3.13: Gráfico da função secante

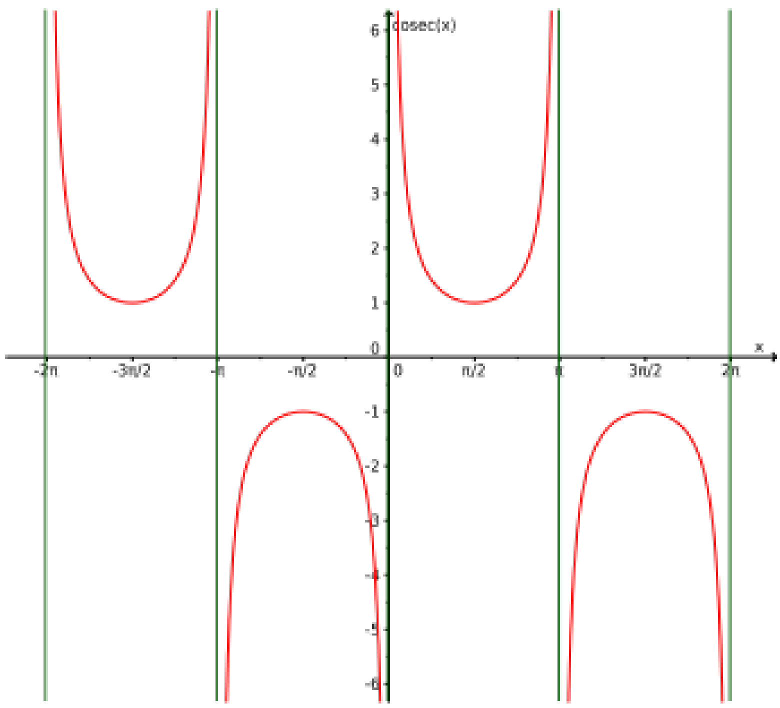


Figura 3.14: Gráfico da função cossecante

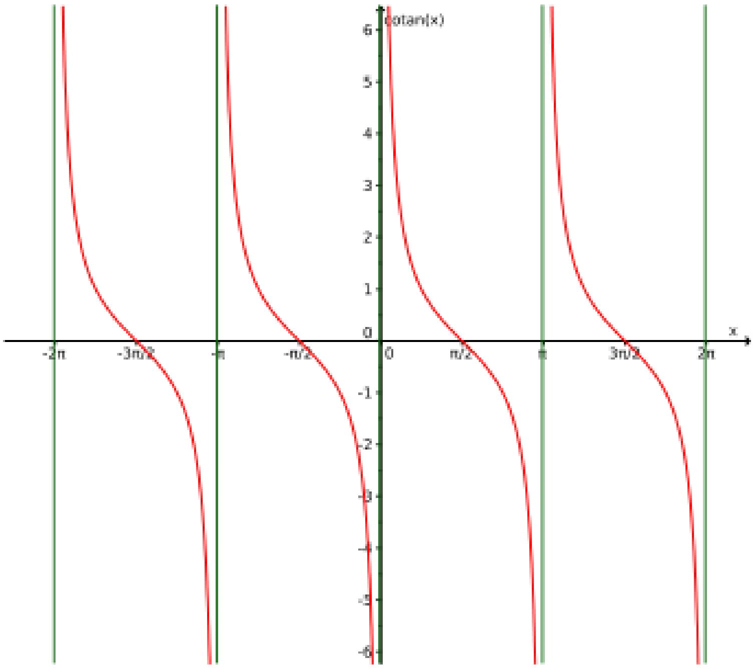


Figura 3.15: Gráfico da função cotangente

Capítulo 4

Intervenção no ensino básico: A prática para formalizar conceitos e dedução de fórmulas trigonómetricas.

Nessa seção apresentaremos a experiência da aplicação de três problemas, que envolvem a aplicação do teorema de Pitágoras e as leis trigonométricas no triângulo retângulo, as aplicações foram ordenadas pelo nível de dificuldade e nas resoluções foi usado um instrumento elaborado pelos alunos, acompanhados do professor, os objetos usados na construção foram resto de cano PVC e um transferidor de madeira. O conteúdo aplicado foi trabalhado em aulas anteriores ao trabalho desenvolvido e o público-alvo foram os alunos da Escola Nossa Senhora da Conceição, escola privada do estado de Sergipe.

Cada situação foi trabalhada em cinco etapas, a primeira foi a apresentação de um texto que fala sob Pitágoras e os Pitagóricos, a segunda foi a construção do instrumento usado na resolução dos problemas e a explicação de como é usado, a terceira, a quarta e a quinta etapas foram as resoluções dos problemas apresentados aos alunos.

4.1 Metodologia das Aplicações em Sala de Aula

O trabalho foi realizado com alunos do 2° ano do ensino médio da educação básica de uma escola privada, no município de Aquidabã, estado de Sergipe. A turma tinha 25 alunos, ressaltando que a média de presença dos alunos na aula foi de mais 100% e que a faixa etárias desses participantes foram dos 14 aos 16 anos.

O projeto em questão foi aplicado durante as aulas de matemática pelo professor regente da sala. O trabalho foi um instrumento facilitador no processo de ensino aprendizagem que auxiliou ao professor aplicar toda a contextualização vista em sala de aula, com o uso de metodologias diversificadas, de forma prazerosa ao educando. O desenvolvimento do projeto foi em um período de uma semana, 5 aulas, onde a aplicação das atividades foi desafiadora, para todos os participantes do projeto, fazendo com que a interação entre eles, na resolução dos problemas, tivesse uma maior intensidade fazendo com que eles levantassem algumas hipóteses e tentando chegar a suas respectivas conclusões.

4.2 Estudo realizado

Inicialmente foi apresentado um texto a respeito de Pitágoras e dos Pitagóricos, foi solicitado que um dos alunos fizesse a leitura do texto, em seguida os demais alunos, posicionados em círculo, expuseram suas opiniões a respeito do que foi apresentado, o professor explanou a respeito das opiniões abordadas pelos alunos. No final da aula foi solicitado aos educandos que, caso tenham em suas residências, trouxessem pedaços de cano de PVC e parafusos.

Na aula seguinte, com muita curiosidade, os alunos perguntaram o objetivo dos restos de materiais solicitados, o professor mostrou um transferidor de madeira e apresentou um projeto, figura 4.1, para que eles pudessem fazer a construção, por solicitação da direção da escola, o corte dos canos e a construção dos orifícios do mesmo, com o auxílio da furadeira, este foi realizado pelo professor. Logo após, os alunos observando o projeto desenhado no quadro, fizeram a montagem do aparelho. Um dos meninos indagou qual a finalidade do instrumento, foi exposto pelo orientador que ele serve para medir ângulos de onde são observados a altura de um determinado objeto e que na aula seguinte seria feita sua utilização.

Figura 4.1: Confecção do instrumento

Foi apresentado a primeira situação problema, "descobrir a altura da trave do ginásio da escola, figura 4.2, usando o instrumento construído, uma tabela trigonométrica, impressa pelo professor, e uma trena métrica de $50m$. Foi estipulado $20min$ para que os alunos encontrassem uma forma de determinar essa altura, eles com o uso da trena, mediram a altura da trave sem usar o aparelho, o professor questionou, se fosse a altura do ginásio, como colocaria a trena no telhado?

Figura 4.2: Medindo altura da trave

Sem conseguirem calcular altura da trave a primeira atividade foi direcionada, posicionaram o instrumento a uma determinada distância da trave, mediram esse comprimento, fizeram a determinação do ângulo e foi sugerido que eles transcrevessem no caderno, um esboço, do que eles estavam fazendo, perceberam que gerou um triângulo retângulo, onde já tinha sido determinado o cateto adjacente ao ângulo de observação e que tinham que descobrir a altura que é justamente o cateto oposto ao ângulo.

Portanto, chegaram à conclusão que usando a tangente do ângulo encontrariam um valor da altura da trave diferente da medida inicial. Um dos alunos observando os valores, viu que a diferença entre essas medidas era justamente o comprimento do ponto centro do transferidor até o solo. Daí chegaram a conclusão que é só acrescentar ao valor determinado, com o uso do instrumento, o valor de $1m$. Posteriormente, foi solicitado que determinasse a altura da cesta de basquete, usando o mesmo procedimento, da situação anterior, encontraram o ângulo de observação, a distância do instrumento à cesta de basquete, ver (figura 4.2), após, aplicaram a tangente e ao resultado obtido adicionaram $1m$, apresentado na figura 4.2, resolução feita pelo aluno. Foi posicionado uma escada na cesta de basquete e feita a medida dessa altura, assim foi comprovado que o objeto usado na resolução dos problemas dá um valor aproximado na determinação das alturas.

Figura 4.3: Altura da cesta de basquete

Na quarta aula foi apresentado as seguintes atividades:

i) Determinar a altura do ginásio da escola;

ii) Determinar o comprimento do cabo de aço que estabiliza as colunas que sustentam a quadra.

Uma das alunas da sala perguntou se pode usar o instrumento, tendo sim como resposta, foi utilizado e encontraram a altura do ginásio, figura 4.4, de forma análoga as questões anteriores. Na determinação do comprimento do cabo eles tiveram uma maior dificuldade ao modelarem a solução, o orientador do estudo de campo, pediu para que recordassem da solução de uma questão trabalhada em sala, onde eles determinavam o comprimento de um cabo conhecendo a altura de uma torre e o comprimento da distância do pé da torre ao suporte inferior do cabo, figura 4.5. Rapidamente um aluno percebeu que o problema pode ser solucionado com a aplicação do Teorema de Pitágoras. Desta forma, determinaram o comprimento da distância do suporte inferior do cabo ao pé do ginásio e usaram a altura do ginásio, encontrada anteriormente.

Figura 4.4: Altura do ginásio

Veio uma pergunta muito pertinente:

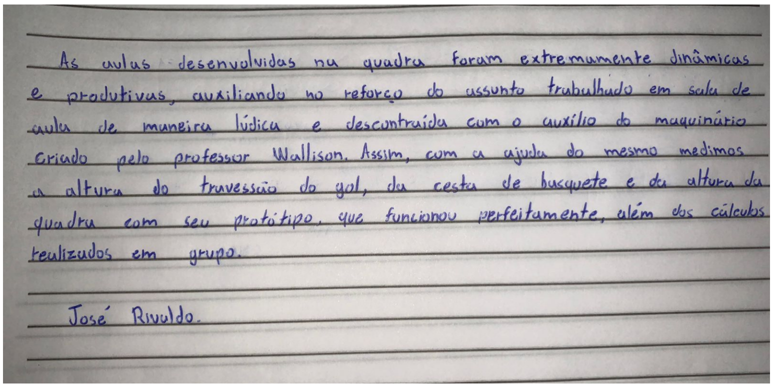
"Podemos encontrar o comprimento do cabo usando o aparelho posicionado no suporte inferior do cabo? "

O orientador do experimento explicou que, com o uso do aparelho fica um pouco complicado, se usar somente o transferidor para medir o ângulo de inclinação e a distância entre o pé da coluna e a haste de sustentação do cabo, mas é só aplicar o cosseno do ângulo do observador.

Assim foi encerrada a aula.

Figura 4.5: Distância do suporte inferior do cabo até a base da coluna

Na última aula, o professor fez um breve agradecimento pela participação dos alunos no projeto e solicitou que usassem a aula para elaborar um relatório sobre o que acharam da aplicação do instrumento na abordagem de conteúdos que já foram abordados em sala de aula, imagem 5.6.



As aulas desenvolvidas na quadra foram extremamente dinâmicas e produtivas, auxiliando no reforço do assunto trabalhado em sala de aula de maneira lúdica e descontraída com o auxílio do maquinário criado pelo professor Wallison. Assim, com a ajuda do mesmo medimos a altura do travessão do gol, da cesta de basquete e da altura da quadra com seu protótipo, que funcionou perfeitamente, além dos cálculos realizados em grupo.

José Rivaldo.

Figura 4.6: Relatório de um dos alunos participantes

4.3 Conclusão

No período de aplicação da atividade, foi visto a motivação dos alunos em transformar situações problemas do cotidiano em problemas quantitativos, o poder que a argumentação tem na construção do pensamento e a forma prazerosa de fazer matemática.

Percebe-se que sutis ações elaboradas e desenvolvidas em parceria com os discentes, induz o orientando que a matemática é uma ferramenta extraordinária para justificar fenômenos naturais e sociais pertinentes na sociedade.

Considerações Finais.

Esse trabalho teve como finalidade apresentar uma abordagem do estudo da trigonometria, o assunto é suma importância pois faz parte do programa do ensino médio, além de ser muito utilizado no ensino superior, é de elevada importância para se trabalhar o pensamento cognitivo do aluno. Foi explorado os ângulos e suas classificações, as relações trigonométricas, o Teorema de Pitágoras, as leis trigonométricas, as funções trigonométricas, os limites e derivadas trigonométricas, correlacionando a história aos conteúdos estudados. Foram comentamos resultados que deram suporte na resolução de outros problemas relacionados a trigonometria.

Foram demonstrados todos os teoremas apresentados do trabalho, foi feita a apresentação da história da OBMEP e do ENEM, mencionamos a importância que elas possuem na educação matemática e solucionamos suas questões que necessitam de trigonometria nas suas resoluções. Apresentamos situações problema que podem ser trabalhadas em sala de aula, com material reciclado, e que puderam ser trabalhados de forma prazerosa e educativa.

Note que é de tremenda importância as ideias disponibilizadas nesse trabalho de pesquisa para estudo de professores da Educação Básica, para temas de cursos de formação docente, para alunos de graduação e pós-graduação, que busquem expandir seu conhecimento.

Finalizamos ressaltando a importância que a trigonometria tem em modelar situações do cotidiano, em uma linguagem matemática, fazendo com que o aprender matemática tenha sentido. E, por conseguinte, melhorarmos os rumos da educação matemática no Brasil.

Bibliografia

[1] BIANCHINI, Edwaldo. **Coleção Ensino Médio**. São Paulo: Moderna, 2006.

[2] BORGES, C. F. Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico: Uma sequência para o ensino. Tese (Doutorado) — PUC/SP, 2009.

[3] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. São Paulo: Ática, 2013.

[4] FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise I**. 2. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[5] GHORPADE, Sudhir R.; LIMAYE, Balmohan V. **A Course in Calculus and Real Analysis**, 1. ed. New York: Springer, 2006.

[6] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. vol.1, 12. ed., Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[7] MELO, Wilberclay Gonçalves. Análise na Reta. Notas de Aula, UFS, 2013.

[8] OBMEP, IMPA: Provas e Soluções. https://www.obmep.org.br/provas.htm, obmep. provas.

[9] OBMEP, IMPA: Banco de Questões. https://www.obmep.org.br/provas.htm, obmep. provas.

[10] INEP Enem: Provas e Gabaritos. https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos.prova, aplicação.

[11] WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira; CARMO, Manfredo Perdigão, Trigonometria e Números Complexos. SBM.