UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Teoria dos Números: Uma Abordagem Olímpica a Luz da BNCC e da Metodologia de Resolução de Problemas.

José Cicero Gomes Farias

Instituto de Matemática

Maceió, Setembro de 2023.

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

JOSE CICERO GOMES FARIAS

Teoria dos Números: Uma Abordagem Olímpica a Luz da BNCC e da Metodologia de Resolução de Problemas

Maceió
2023

JOSE CICERO GOMES FARIAS

Teoria dos Números: Uma Abordagem Olímpica a Luz da BNCC e da Metodologia de Resolução de Problemas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Amauri da Silva Barros*

Maceió
2023

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Betânia Almeida dos Santos – CRB-4 – 1542

F224t Farias, José Cícero Gomes.
Teoria dos números : uma abordagem olímpica à luz da BNCC e da metodologia de resolução de problemas / José Cicero Gomes Farias. – 2023.
77 f. : il.

Orientador: Amauri da Silva Barros.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 76-77.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Métodos de ensino. 3. Sequência didática. 4. Teoria dos números – Método Pólya . I. Título.

CDU: 511: 372.851

Folha de Aprovação

JOSÉ CICERO GOMES FARIAS

TEORIA DOS NÚMEROS: UMA ABORDAGEM OLÍMPICA À LUZ DA BNCC E DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemá- tica da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 05 de Setembro de 2023.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br AMAURI DA SILVA BARROS
Data: 06/10/2023 17:46:18-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros – UFAL (Presidente)

Documento assinado digitalmente
gov.br ISNALDO ISAAC BARBOSA
Data: 10/10/2023 14:18:55-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa – UFAL (Examinador Interno)

Profa. Dra. Joelma Morbach – UFPA (Examinadora Externa)

Ao meu orientador, professor Dr. Amauri, aos meus pais, irmãos e amigos.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Amauri da Silva Barros, pela paciência e condução na orientação desse trabalho.

Ao meu amigo Patrick por ter sido um suporte nessa vida turbulenta de quem tem que conciliar estudo, trabalho e um deslocamento difícil até o polo.

Aos meus irmãos por fazer café pra mim e serem tão especiais.

Aos meus amigos do mestrado PROFMAT que tornaram esse percurso mais desfiador. Em especial aos OPALLAS (Jeferson e Horlando) e aqueles que deram exemplo de perseverança ao correr atrás do sonho de concluir esse mestrado (Rodolfo, Vanessa, Milena, Jerfesson, Fernando Lopes, Fernando, Yudi, Wesley e Sarah) e ao Thalles pela extrema coragem em decidir o que é melhor para si.

Aos professores do programa Abraão, Gregório, Xiaochuan Liu, Márcio Batista, Viviane, José Carlos e Hilário que conseguiram contribuir muito para minha formação profissional.

Aos Professor Isnaldo Isaac que embora não tenha sido meu professor, de disciplinas do mestrado, colaborou para a conclusão dessa etapa com apoio e conselhos valiosos.

A equipe gestora e pedagógica (professores e pessoal do apoio também) da Escola Estadual Doutor Emílio de Maia por me apoiar desde o ingresso ao mestrado. Em especial a Mônica pelas constantes e sutis palavras de apoio (em especialmente dias antes do ENQ).

Aos meus pais Gilberto de Farias e Luciene Gomes Farias que mesmo sem aprender a ler e escrever me permitiram ler o mundo e escrever meu próprio futuro. Agradeço a eles também pelo esforço de mesmo com pouco me proporcionar aquilo que estava a seu alcance para realizar meus pequenos e inacabados sonhos.

A matemática é a rainha das ciências e a Teoria dos Números é a rainha da matemática.

— CARL FRIEDRICH GAUSS

RESUMO

Nesta dissertação apresentaremos uma abordagem de tópicos elementares de teoria dos números sobre a perspectiva da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e norteada pela Metodologia de Resolução de Problemas, enfatizando o Método Pólya. Para isso foi realizado um estudo de cunho bibliográfico tanto sobre a construção da BNCC e de outros documentos oficiais quanto ao desenvolvimento da metodologia de resolução de problemas ao mesmo tempo que levantamos aspectos que vinculam as pesquisas a impactos reais na formação docente, no desenvolvimento integral dos estudantes e na abordagem adequada em sala de aula principalmente no que diz respeito a conceituação dos conteúdos e a resolução de problemas olímpicos, em paralelo refletimos sobre como trabalhar de forma prática os tópicos olímpicos de teoria dos números por meio de uma sequência didática.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Sequência Didática, OBMEP, Método Pólya.

ABSTRACT

In this dissertation we will present an approach to elementary topics of number theory from the perspective of the National Common Curricular Base (BNCC) and guided by the Problem Solving Methodology, emphasizing the Pólya Method. For this, a bibliographical study was carried out both on the construction of the BNCC and other official documents and on the development of the methodology for solving problems, at the same time that we raised aspects that link research to real impacts on teacher training, on the integral development of students and in the appropriate approach in the classroom, mainly with regard to the conceptualization of contents and the resolution of Olympic problems, in parallel we reflected on how to work in a practical way the Olympic topics of number theory through a didactic sequence.

Keywords: Mathematics Teaching, Didactic Sequence, OBMEP, Pólya Method.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino de matemática desempenha um papel fundamental na formação dos estudantes da educação básica pois permite com que eles dominem e aperfeiçoem habilidades que são extremamente necessárias para compreender e resolver problemas do cotidiano e como se dá o processo de abstração na matemática. Nesse contexto, se faz necessário entender os documentos oficiais que estabelecem os objetivos e as competências a serem desenvolvidas ao longo da educação básica.

Dentre os documentos que trazem esse tipo de abordagem podemos destacar a Base Nacional Comum Curricular como principal documento oficial dessa perspectiva pedagógica dentro da educação básica. Nesse importante documento há a abordagem de diversas áreas de conhecimento, dentre as quais destaca-se a área de Matemática e suas tecnologias, que tem como principal objetivo desenvolver o raciocínio lógico, a autonomia e a capacidade de solucionar problemas.

Nessa perspectiva, a teoria dos números acaba se apresentando como um campo de estudo muito relevante na educação matemática, pois dá continuidade ao estudo sistemático dos números inteiros e faz uma importante relação entre aritmética, álgebra e outros tópicos de matemática que devem ser abordados na educação básica.

Paralelamente, a abordagem olímpica de teoria dos números, por meio de tópicos específicos explorados em competições e desafios matemáticos, apresenta-se como uma maneira de ampliar o estudo e a compreensão dessa área e abrir um leque de novas possibilidades para a forma como ensinamos matemática por meio da resolução de problemas.

Considerando tudo que foi exposto e buscando compreender, focando em um conteúdo específico de matemática, formas de se abordar essa área em sala de aula voltada ao desenvolvimento pleno dos estudantes e ao aperfeiçoamento docente decidimos trabalhar nessa dissertação a abordagem olímpica de tópicos de teoria dos números, enfatizando o que preconiza a BNCC e como essa abordagem se dá quando utilizamos a metodologia de resolução de problemas para desenvolver competências e habilidades. Assim esse trabalho se divide em quatro capítulos com a seguinte construção.

O Primeiro Capítulo traz alguns tópicos recorrentes de teoria dos números em olimpíadas que podem ser abordados de forma parcial ou integral em turmas do ensino fundamental e médio e que trazem consigo uma visão de aprofundamento do conhecimento teórico sobre a temática.

Nesse capítulo o cuidado se volta a formalização dos conceitos e ao rigor matemático que pode ser ensinado em paralelo a problemas desafiadores de teoria dos números. Ele é voltado preferencialmente ao professor que deseja trabalhar esse conteúdo em sala de aula, por esse motivo ele é mais voltado as demonstrações e formalizações do conteúdo que o professor deve dominar para que assim compreenda bem como relacionar os resultados as aplicações abordadas em sala de aula.

No Segundo Capítulo é feito um estudo sobre a BNCC buscando expor sua previsão legal, os processos sociais que permitiram a sua discussão e construção colaborativa como política educacional, os impactos desse documento na área específica de matemática e suas tecnologias e também como, segundo a BNCC, deve ser realizado o ensino de teoria dos números no cerne educacional.

Já o Terceiro Capítulo, com base nas discussões expostas anteriormente, traz uma abordagem da metodologia de resolução de problemas focando principalmente nos aspectos teóricos que embasam essa metodologia, trabalhos como o de George Pólya podem contribuir para a formação dos profissionais de matemática da educação básica e também em como utilizar essa metodologia em sala de aula. Utilizando nesse caso específico plataformas digitais como os clubes de matemática da OBMEP para trabalhar problemas olímpicos de teoria dos números.

Enquanto isso, o Quarto Capítulo trás uma ideia de estruturação de uma sequência didática que pode ser utilizada tanto com estudantes do ensino fundamental quanto do ensino médio e cuja aplicação prática deve ser direcionada pelo que foi exposto nos capítulos anteriores. É importante salientar que esse ultimo capítulo não apresenta um modelo a ser seguido fielmente mas sim uma estrutura funcional a de uma proposta de sequência didática que pode ser adaptada a turma e a realidade educacional dos estudantes podendo inclusive ser aprimorada.

Nesse contexto, esta dissertação busca explorar a abordagem olímpica de teoria dos números à luz da BNCC e da metodologia de resolução de problemas, examinando sua contribuição para o ensino e aprendizagem da matemática. Através dessa análise, objetivamos compreender como a integração desses elementos pode enriquecer a formação matemática dos alunos, bem como promover o aprimoramento docente e uma educação matemática mais significativa e libertadora.

2. TÓPICOS ELEMENTARES DE TEORIA DOS NÚMEROS

Neste capítulo iremos apresentar alguns tópicos basilares da teoria dos números que figuram frequentemente em problemas de olimpíadas de matemática nacionais e internacionais. Dentre os tópicos olímpicos daremos ênfase particular aqueles abordados na OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, que atualmente é a principal ferramenta que promove a divulgação da matemática em larga escala na comunidade escolar do Brasil, e responsável também pela descoberta de novos talentos.

Trabalharemos portanto de tal forma que a ênfase será na abordagem resumida dos resultados mais importantes para resolver problemas olímpicos, que podem ser abordados em turmas olímpicas do ensino fundamental 2 e médio. Para isso focamos em três frentes:A conceituação precisa, as demonstrações dos resultados e a resolução de exercícios com nível de dificuldade razoável. Tudo isso é feito para que a escrita seja acessível tanto ao docente que pretende utiliza-lo em sala de aula quanto para o aluno que deseja se aventurar sozinho e já teve um primeiro contato com os tópicos apresentados.

Utilizaremos como norte os livros: Teoria dos Números: um passeio com primos e outros familiares pelo mundo inteiro (MARTINES; et al. 2018), Tópicos de Teoria dos Números - Coleção PROFMAT (MOREIRA; et al. 2021) Introdução à Teoria dos Números (SANTOS J. S. O. 2020) além do material produzido pelo Portal da OBMEP e pelos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo.

O objetivo é que o docente que ler esse material tenha acesso a abordagem teórica dos conteúdos que ele abordará na educação básica, e possa entender melhor os principais resultados apresentados neste capítulo.

Assim de mão dos tópicos basilares apresentados nesse capítulo introdutório será possível fazer um paralelo com os capítulos subsequentes e entender as relações existentes entre a importância da Teoria dos Números dentro da educação matemática, a sua abordagem frente a Base Nacional Comum Curricular e da metodologia de resolução de problemas, bem como sobre como trabalhar esse tema por meio de uma sequência didática.

Uma vez que o professor tenha acesso a esse apanhado de resultados ele poderá utilizar para revisar os conteúdos e selecionar aqueles que são adequados a sua turma, podendo fazer a transposição didática e selecionar quais problemas utilizará quando for utilizar o Método Pólya em suas aulas.

2.1. Divisibilidade

Dados dois inteiros quaisquer a e d, dizemos que d é divisor de a, ou a é multiplo de d, ou ainda que d divide a e escrevemos

$$d \mid a. \tag{2.1}$$

se existir $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = qd$. Caso tal inteiro não exista, escrevemos $d \nmid a$ para denotar que d não divide a.

Como consequência da divisibilidade de inteiros apresentaremos algumas propriedades importantes:

Lema 2.1.1. *Sejam* $a, b, c,$ e $d \in \mathbb{Z}$. *Então temos que:*

(I) Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid ax + by$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$.

(II) Se $d \mid a$, então $a = 0$ ou $|d| \leq |a|$.

(III) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

Demonstração (I).

Se $d \mid a$ e $d \mid b$ então podemos escrever $a = q_1 d$ e $b = q_2 d$, onde $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$.

Temos então que:

$$\begin{aligned} ax + by &= (q_1 d)x + (q_2 d)y \\ &= d(q_1 x) + d(q_2 y) \\ &= d(q_1 x + q_2 y) \\ &= q_3 d. \end{aligned}$$

Onde $q_3 = q_1 x + q_2 y \in \mathbb{Z}$. Logo $d \mid ax + by$. □

Demonstração (II). Vamos separar em dois casos:

(1.) $a = 0$

Caso $a = 0$ basta tomar $q = 0$ que teremos $a = qd$, o que implica que $d \mid a$

(2.) $a \neq 0$

Se $a \neq 0$ então $a = qd$, com $q \in \mathbb{Z}$, logo $|q| \geq 0$ e $|a| = |qd| = |q||d| \geq |d|$ Portanto

$$|d| \leq |a|.$$

$\square$

Demonstração (III).

Se $a \mid b$ e $b \mid c$ então existem $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = bq_1$ e $b = cq_2$. Logo:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 \\ &= (cq_2)q_1 \\ &= c(q_2q_1) \\ &= cq_3. \end{aligned}$$

Onde $q_3 = q_2q_1 \in \mathbb{Z}$. Assim concluímos que $a \mid c$. $\square$

Tais propriedades são bastante úteis para resolver alguns problemas que envolvem divisibilidade em sala de aula, eles apresentam a definição clássica de divisibilidade e trabalhar esse conceito de forma bem cuidadosa é primordial para que o estudante da educação básica consiga dominar bem conceitos e problemas mais complexos.

Vejamos a solução deste exemplo.

Exemplo 2.1.1. Dados $a, b, y \in \mathbb{Z}$, mostre que se $a \mid 2x - 3y$ e $a \mid 4x - 5y$, então $a \mid y$.

Solução:

Temos que:

$$a \mid 2x - 3y \Rightarrow 2x - 3y = k_1a.$$
$$a \mid 4x - 5y \Rightarrow 4x - 5y = k_2a.$$

Logo, usando o fato de que $2x - 3y = k_1a$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
2(2x-3y) = 2k_1a &\Rightarrow 4x-6y = 2k_1a \\
&\Rightarrow 4x-5y-y = 2k_1a \\
&\Rightarrow k_2a-y = 2k_1a \\
&\Rightarrow y = k_2a-2k_1a \\
&\Rightarrow y = a(k_2-2k_1) \\
&\Rightarrow y = k_3a.
\end{aligned}
$$

Temos portanto $k_3 = k_2 - 2k_1$ e podemos ter $k_3 = 0 \Rightarrow k_2 - 2k_1 = 0 \Rightarrow k_2 = 2k_1 \Rightarrow y = 0$, Caso $k_3 \neq 0$ temos que y é um múltiplo de a e portanto $a \mid y$.

Ou seja, nos dois casos possíveis y é um múltiplo de a e assim concluímos que $a \mid y$.

2.2. MMC, MDC e Algorítimo de Euclides

Sejam a e b inteiros positivos, ambos não simultaneamente nulos, podemos associar a cada um desses números o conjunto formado por seus divisores positivos, que chamaremos aqui de D_a e D_b respectivamente. A intersecção destes, representada por $D_a \bigcap D_b$ é não vazia, já que $1 \mid a$ e $1 \mid b$, e finita pois D_a e D_b são conjuntos finitos.

O fato de ser finito faz com que $D_a \bigcap D_b$ tenha um elemento máximo, que será chamado de máximo divisor comum - MDC dos números a e b. As duas notações mais comuns para representar tal número é $mdc(a,b)$ ou (a,b). Quando temos $a = b = 0$ dizemos que $mdc(a,b) = 0$ por convenção, já quando $mdc(a,b) = 1$ dizemos que a e b são primos entre si.

Analogamente ao que fizemos anteriormente, se denotarmos por M_a e M_b os múltiplos positivos de a e b respectivamente, então teremos que a intersecção do conjunto dos múltiplos de a e b, denotada por $M_a \bigcap M_b$, é não vazia já que $|ab|$ está na intersecção.

Pelo princípio da boa ordem temos que $M_a \bigcap M_b$ possui um elemento mínimo. Tal número é chamado de mínimo múltiplo comum - MMC dos números a e b. As notações mais utilizadas para representar tal número é $mmc(a,b)$ ou $[a,b]$.

É natural que o trabalho de determinar quem é o $mdc(a,b)$ e , analogamente, o $mmc(a,b)$ seja realizado por um método mais direto do que listar os divisores de a e b para assim determinar o menor múltiplo e maior divisor comum a estes dois números (pois muitas vezes tal trabalho se torna muito longo e com pouca versatilidade prática, como por exemplo encontrar e listar todos os trinta divisores do número 2800).

Sendo assim, utilizamos um método mais eficiente para determinar o *mdc* e o *mmc* de dois números inteiros. Tal método é chamado de *algoritmo da divisões sucessivas* ou *algoritmo de Euclides* tal ferramenta utiliza o conceito de divisão euclidiana,que pode ser escrita da seguinte forma: Para $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$, existem q e $r \in \mathbb{Z}$, onde as condições abaixo

$$a = bq + r \qquad \text{e} \qquad 0 \leq r \leq |b|.$$

Determinam a existência e unicidade do quociente q e do resto r na divisão de a por b. Mas para usar tal técnica de forma eficiente precisamos lançar mão de alguns resultados.

Veremos mais adiante que o resto pode ser denotado de forma diferente quando estudarmos congruências.

Para determinarmos q e r iremos utilizar duas funções especiais definidas no conjunto dos números reais. Assim, para $x \in \mathbb{R}$, podemos definir a função piso ou parte inteira de x, denotada por $\lfloor x \rfloor$, como sendo o único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$.

Analogamente, definimos a função teto de x, denotada por $\lceil x \rceil$ como sendo o único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n-1 < x \leq n$.

Uma vez definidas tais funções nos reais podemos determinar q e r como segue:

$$q = \begin{cases} \lfloor \frac{a}{b} \rfloor & ,se \quad b > 0 \\ \lceil \frac{a}{b} \rceil & se \quad b < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r = a - bq.$$

Com a definição dessas duas funções especiais fica fácil verificar a unicidade de q e r na divisão de a por b.

Lema 2.2.1. *(Euclides) Se $a = bq + r$, então $mdc(a,b) = mdc(a,r)$.*

Demonstração. Queremos mostrar que $D_a \bigcap D_b = D_a \bigcap D_r$ pois conjuntos iguais possuem o mesmo máximo divisor comum. Assim temos que:

($\Rightarrow$) Se $d \in D_a \bigcap D_b$ então $d \mid a$ e $d \mid b$, assim utilizando o *Lema 1.1.1. (III)* temos que $d \mid a - bq$. Como $a = bq + r$ vemos que $d \mid a - bq \Leftrightarrow d \mid r$.Ou seja $d \in D_b \bigcap D_r$.

($\Leftarrow$) Analogamente, se $d \in D_b \bigcap D_r$ então $d \mid b$ e $d \mid r$, assim utilizando o *Lema 1.1.1. (III)* temos que $d \mid bq + r$. Como $a = bq + r$ vemos que $d \mid bq + r \Leftrightarrow d \mid a$. Ou seja $d \in D_a \bigcap D_b$.

Provando assim que os conjuntos são iguais e portanto $mdc(a,b) = mdc(b,r)$.

$\square$

Exemplo 2.2.1. Calcule $mdc(1995, 405)$.

Solução:

Aplicando o *Algoritmo de Euclides* temos que:

$$\begin{aligned} 1995 &= 405 \cdot 4 + 375 \\ 405 &= 375 \cdot 1 + 30 \\ 375 &= 30 \cdot 12 + 15 \\ 30 &= 15 \cdot 2 + 0. \end{aligned}$$

Logo, como consequência direta do Lema de Euclides, 2.2.1 , *vemos que:*

$$mdc(1995, 405) = mdc(405, 375) = mdc(375, 30) = mdc(30, 15) = 15.$$

E esta abordagem é muito interessante para ser feita em um primeiro contato pois todas as etapas do processo podem ser verificadas facilmente.

Teorema 2.2.1 (Bachet - Bézout)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, então existem $x, y \in \mathbb{Z}$ com*

$$ax + by = mdc(a, b). \tag{2.2}$$

Logo se existe $c \in \mathbb{Z}$ que atende respectivamente a propriedade de $c \mid a$ e $c \mid b$ então $c \mid mdc(a, b)$.

Demonstração.

Vamos separar a demonstração deste teorema em dois casos, No primeiro caso abordaremos a situação em que a e b são inteiros nulos, já no segundo caso abordaremos a situação em que a e b são inteiros mas são ambos não nulos.

(Caso I)

Nesta situação temos $a = b = 0$ que é trivial visto que todo $c \neq 0 \in \mathbb{Z}$ divide 0. E como a e b são ambos nulos temos que $mdc(a, b) = 0$.

(Caso II)

Sejam $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$, com a e b não ambos nulos, e seja I o conjunto formado pelas combinações lineares de a e b definido por:

$$I(a,b) = \{ax + by; x, y \in \mathbb{Z}.\}$$

Vamos tomar $d = ax_0 + by_0$ como sendo o menor elemento positivo de I. Seja $m = ax + by$ um elemento de I tal que $q, r \in \mathbb{Z}$ são, nesta ordem, o quociente e o resto da divisão de m por d tais que $m = dq + r$ e 0 e $0 \leq r < d$. Logo:

$$\begin{aligned} r = m - dq \Rightarrow r &= ax + by - [(ax_0 + by_0)q]. \\ \Rightarrow r &= ax - ax_0q + by - by_0q. \\ \Rightarrow r &= a(x - x_0q) + b(y - y_0q). \\ \Rightarrow r &\in I(a,b). \end{aligned}$$

Usando o fato de d ser o menor elemento de $I(a,b)$ junto a desigualdade $r < d$ vemos facilmente que $r = 0$ e consequentemente que $d \mid m$.

□

Corolário 2.2.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, então a equação*

$$ax + by = c. \tag{2.3}$$

admite solução inteira em x e y se, e somente se, $mdc(a,b) \mid c$.

Demonstração.

Se a equação $ax + by = c$ admite solução inteira, então pelo teorema de Bachet - Bézout, 2.2.1, $mdc(a,b) \mid ax + by$. Mas $ax + by = c \Rightarrow mdc(a,b) \mid c$.

Porém $mdc(a,b) \mid c \Leftrightarrow c = k \cdot mdc(a,b)$ onde $k \in \mathbb{Z}$. Utilizando novamente o teorema de Bachet - Bézout temos que existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + by_0 = mdc(a,b)$, multiplicando tudo por k obtemos:

$$k(ax_0 + by_0) = k \cdot mdc(a,b) \Leftrightarrow akx_0 + bky_0 = c.$$

Cuja solução é dada por $x = kx_0$ e $y = ky_0 \in \mathbb{Z}$.

□

Exemplo 2.2.2. *(Olimpíada de Lenigrado, 1990)* Sejam a e b números naturais tais que $b^2 + ab + 1$ divide $a^2 + ab + 1$. Prove que $a = b$ ou $b = 0$.

Demonstração.

Dado que $a, b \in \mathbb{N}$ temos que se $b^2 + ab + 1$ divide $a^2 + ab + 1$ então consequentemente $b^2 + ab + 1 \geq a^2 + ab + 1 \Rightarrow b^2 \geq a^2 \Rightarrow b \geq a$. Por outro lado $b^2 + ab + 1 \mid a^2 + ab + 1$ implica que:

$$
\begin{aligned}
b^2 + ab + 1 \mid \left(a^2 + ab + 1\right) - \left(b^2 + ab + 1\right) &= a^2 + ab + 1 - b^2 - ab - 1 \\
&= a^2 - b^2 \\
&= (a+b)(a-b) \\
&\Rightarrow b^2 + ab + 1 \mid (a+b)(a-b).
\end{aligned}
$$

Mas $b^2 + ab + 1 = b(a+b) + 1$ então $mdc(b^2 + ab + 1, a + b) = 1$, que nos leva a perceber que $b^2 + ab + 1 \not| a + b$. Como $b^2 + ab + 1 \mid (a+b)(a-b)$ temos, usando a constatação anterior, que $b^2 + ab + 1 \mid a - b$.

Agora, para simplificar o raciocínio, vamos separar a demonstração em dois casos:

Caso I: $(b = 0)$

Se $b = 0$ então basta substituir tal valor na expressão inicial e perceber que $1 \mid a^2 + 1$. Ou seja $b = 0$ satisfaz.

Caso II: $(b > 0)$

Se $b > 0$ então $b^2 + ab + 1 > ab + 1 > a > a - b \geq 0$.

Assim, como $b^2 + ab + 1 \mid a - b$ e $b^2 + ab + 1 > a - b \geq 0$ então $a - b$ é necessariamente igual a zero.

Ou seja $a - b = 0 \Rightarrow a = b$.

$\square$

Exemplo 2.2.3. *(IMO - International Mathematical Olympiad, 1998)* Determine todos os pares de inteiros positivos (x,y) tais que xy^2+y+7 divide x^2y+x+y.

Solução:

Se $xy^2+y+7 \mid x^2y+x+y$ então pelo *Lema 1.1.1 (I)*, ele divide qualquer combinação linear de xy^2+y+7 com x^2y+x+y. Em particular,

$$xy^2+y+7 \mid y(x^2y+x+y)-x(xy^2+y+7) = x^2y^2+xy+y^2-x^2y^2-xy-7x = y^2-7x.$$

Mas x,y são inteiros positivos, logo:

$$xy^2+y+7 \geq y^2+y+7 > y^2-7x.$$

Mas se $y^2-7x<0$ então $\left|y^2-7x\right| = 7x-y^2 < 7x$. Por outro lado $xy^2+y+7>7x$ se $y \geq 3$. Assim se $y \geq 3$ então $y^2-7x=0$.

Iremos portanto separar a demonstração em três casos:

Caso I: $(y=1)$

Se $y=1$ então substituindo em $xy^2+y+7 \mid x^2y+x+y$ temos que $x+8 \mid 1-7x = 57-7(x+8)$. Logo utilizando o Lema 1.1.1. , 2.1.1, percebemos que $x+8 \mid 58 = 3\cdot 19$ o que implica que $x+8 \in \{19,57\}$ que são os únicos divisores maiores ou iguais a 8 de 57.

Portanto temos as soluções $(x,y)=(11,1)$ e $(x,y)=(49,1)$ que podem ser facilmente verificadas.

Caso II: $(y=2)$

Se $y=2$ então substituindo em $xy^2+y+7 \mid x^2y+x+y$ temos que $4x+9 \mid 4-7x$. é fácil ver que $4-7x<0$, pois $x>1$.

Mas $|4-7x| = 7x-4 < 2(4x+9)$, assim se $4x+9 \mid 4-7x$ e $4-7x<0$ devemos ter necessariamente $4x+9 = 7x-4 \Rightarrow 3x=13 \Rightarrow x=13/3 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}^*$.

Logo, este caso não nos fornece nenhuma solução.

Caso III: $(y \geq 3)$

Se $y \geq 3$ então $y^2 - 7x = 0 \Rightarrow 7x = y^2$ o que nos diz que y é múltiplo de 7, ou seja existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $y = 7k$.

Assim temos:

$$\begin{aligned} 7x = y^2 &\Rightarrow 7x = (7k)^2 \\ &\Rightarrow 7x = 49k^2 \\ &\Rightarrow x = 7k^2. \end{aligned}$$

o que nos dá a solução $(x,y) = \left\{(7k^2, 7k); k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Portanto todos os pares ordenados (x,y) são tais que $(x,y) \in \{(11,1),(49,1)\} \bigcup \left\{(7k^2,7k) : k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2.3. Números Primos

Os números primos constituem um conceito que ocupa uma posição de destaque na teoria dos números e em toda a matemática. Tal destaque se dá pela ampla aplicação em diversas áreas da ciência e tecnologia, bem como também por figurar em muitos problemas importantes da matemática que, embora mentes brilhantes se debrucem sobre eles, ainda se encontram em aberto.

Podemos definir que um número n natural maior que 1 cujo os únicos divisores positivos são 1 e ele mesmo é chamado de numero primo. caso n não seja primo, ou seja existe um $d > 1 \in \mathbb{N}$ tal que $d \mid n$ mas $d \neq 1$ e $d \neq n$, então dizemos que tal número é composto.

Tomemos dois número primos p e q e um inteiro a qualquer, pela definição acima podemos concluir os seguintes fatos:

(I) Se $p \mid q$, então $p = q$.

De fato, como $p \mid q$ e q é primo, temos por definição que $p = 1$ ou $p = q$. Mas p também é primo, logo $p > 1$ o que nos mostra que $p = q$.

(II) Se $p \not| q$ então $mdc(p,q) = 1$

Tomemos $d \in \mathbb{Z}$ tal que $mdc(p,q) = d$, temos portanto que $d \mid p$ ou $d \mid q$. Mas $p \not| q$ isto faz portanto com que apenas duas possibilidades sejam possíveis para d, $d = p$ ou $d = 1$. Porem $d \neq p$ pois $p \not| q$, o que nos faz concluir que $d = 1$.

Portanto, todo número natural composto $n > 1$ é tal que existe um divisor n_1 de n tal que $1 < n_1 < n$. Assim, existirá n_2 natural, não necessariamente diferente de n_1, tal que:

$$n = n_1 n_2, \qquad \text{com} \qquad 1 < n_1 < n \text{ e } 1 < n_2 < n.$$

Temos por exemplo os números 4, 6, 8 e 10 que são compostos, enquanto 2, 3, 5 e 7 são primos.

Os números primos são entre os naturais os mais simples quanto a sua estrutura multiplicativa ao mesmo tempo em que, como veremos adiante, são suficientes para gerar todos os números inteiros não nulos.

Este último resultado se deve a fatoração dos inteiros exposta no Teorema Fundamental da Aritmética.

Lema 2.3.1. *(Lema de Euclides) Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$, com p primo. Se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.*

Demonstração.

Vamos inicialmente tratar do caso em que $p \mid ab$ e $p \nmid a$.

Do fato de $p \mid ab$ podemos concluir que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $ab = kp$. Já olhando para o fato de $p \nmid a$ concluímos que $mdc(p, a) = 1$, logo pelo Teorema de Bachet - Bézout, 2.2, existem inteiros m e n tais que:

$$mp + na = 1.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $b \in \mathbb{Z}$ obtemos

$$mpb + nab = b.$$

Substituindo ab por kp obtemos

$$mpb + nkp = b \Rightarrow b = p(mb + nk).$$

Ou seja, $p \mid b$.

O caso em que $p \mid ab$ e $p \nmid b$ é análogo e por isso não será demonstrado. $\square$

Teorema 2.3.1 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** *Todo inteiro maior do que 1 pode ser escrito de maneira única, a menos da ordem, como um produto de fatores primos.*

Demonstração.

Seja n um inteiro qualquer, se n é primo então não há o que se demonstrar.

Suponhamos então que n é composto. Seja p_1 , com $p_1 > 1$, o menor dos divisores positivos de n. Podemos afirmar que p_1 é primo pois, se assim não fosse, existiria p tal que $1 < p < p_1$ com $p \mid n$, ou seja p seria o menor divisor de n. Assim, $n = p_1 n_1$.

Se n_1 for primo conseguimos escrever n como o produto de primos e a prova está encerrada. Porém, caso n_1 seja um número composto, tomamos p_2 como sendo o menor divisor positivo de n_1. Utilizando o argumento aplicado a p_1, p_2 é primo e temos $n = p_1 p_2 n_2$.

Procedendo de forma análoga iremos obter uma sequência decrescente de inteiros $n_1, n_2, ..., n_k$. Já que todos eles são inteiros positivos maiores que 1, esse processo é finito. Sendo assim, cada primo da sequência $p_1, p_2, ..., p_k$, obtidos pelo raciocínio aplicado anteriormente, podem ser iguais ou não, qualquer inteiro n pode ser escrito da seguinte forma:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

O que mostra a existência de tal fatoração.

Usando indução em n mostraremos a unicidade de tal fatoração. Para $n = 2$ a afirmação é evidentemente verdadeira, pois 2 é primo. Vamos supor agora, que ela é verdadeira para todo inteiro $k \in 1 < k < n$ e testar a veracidade para $k = n$.

Se k é primo então só existe uma única forma de escrever tal número em fatores primos.

Consideremos agora que k seja composto, e que admita duas fatorações, a saber,

$$k = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_r.$$

Iremos mostrar que $s = r$ e que cada p_i é igual a um q_j. Vamos dividir n por p_1, assim obtemos:

$$\frac{n}{p_1} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_s}{p_1} = \frac{q_1 q_2 \cdots q_r}{p_1}$$

Assim, como $p_1 \mid q_1q_2\cdots q_r$ ele divide algum q_j com, $1 \leq j \leq r$. Vamos supor então que $p_1 \mid q_1$, mas p_1 e q_1 são ambos primos e este fato nos faz concluir que $p_1 = q_1$.

Portanto $n/p_1 = p_2p_3\cdots p_s = q_2q_3\cdots q_r$, como $1 < n/p_1 < n$, concluimos pela hipótese de indução que, a menos da ordem, as duas fatorações são identicas, ou seja $s = r$. Provando assim a unicidade da fatoração de um inteiro em fatores primos.

$\square$

Exemplo 2.3.1. *(POTI - Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo)* Determine o número de divisores positivos de 2008^8 que são menores que 2008^4.

Solução:

Temos que $2008 = 2^3 \cdot 251$ e esta fatoração em primos é única pelo Teorema Fundamental da Aritmética. Então $2008^8 = (2^3 \cdot 251)^8 = 2^{24} \cdot 251^8$ que tem $(24+1)(8+1) = 25 \cdot 9 = 225$ divisores positivos.

Mas queremos na verdade é determinar quantos desses divisores são menores que 2008^4. Percebemos facilmente que $2008^4 = \sqrt{2008^8}$, logo 2008^8 é um quadrado perfeito.

Seja então d um divisor positivo qualquer de 2008^8, sabemos que $\frac{2008^8}{d}$ também é um divisor positivo de 2008^8.Pois tais divisores vem aos pares.

Logo:

$$\text{Se } d < 2008^4, \quad \text{então} \quad \frac{2008^8}{d} > 2008^4.$$
$$\text{Se } d > 2008^4, \quad \text{então} \quad \frac{2008^8}{d} < 2008^4.$$

Ou seja, excetuando 2008^4, dentre os divisores positivos de 2008^8 restantes metade são maiores que 2008^4 enquanto os outros são menores que 2008^4.

Assim temos:

$$\frac{225-1}{2} = \frac{224}{2} = 112.$$

Divisores positivos de 2008^8 que são menores que 2008^4.

2.4. Congruências

Dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$ inteiros quaisquer. Dizemos que a é congruente a b módulo n, e escrevemos

$$a \equiv b \ \ mod \ \ n. \tag{2.4}$$

se $n \mid a-b$, ou seja, se a e b deixam exatamente o mesmo resto na divisão por n. Como por exemplo $13 \equiv 6 \ \ mod \ \ 7$.

Proposição 2.4.1. *Sejam a, b, c, d, $n \in \mathbb{Z}$ temos as seguintes propriedades:*

(I) *(Reflexividade)* $a \equiv a \ \ mod \ \ n$;

(II) *(Simetria)* Se $a \equiv a \ \ mod \ \ n$, então $b \equiv a \ \ mod \ \ n$;

(III) *(Transitividade)* Se $a \equiv b \ \ mod \ \ n$ e $b \equiv c \ \ mod \ \ n$, então $a \equiv c \ \ mod \ \ n$;

(IV) *(Compatibilidade com a soma e diferença)* Podemos sempre somar e subtrair membro a membro.

$$\begin{cases} a \equiv b \ \ mod \ \ n \\ c \equiv d \ \ mod \ \ n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+c \equiv b+d \ \ mod \ \ n. \\ a-c \equiv b-d \ \ mod \ \ n. \end{cases}$$

E de forma particular, se $a \equiv b \ \ mod \ \ n$, e $k \in \mathbb{Z}$, então $a^k \equiv b^k \ \ mod \ \ n$;

(V) *(Compatibilidade com o produto)* Podemos sempre multiplicar membro a membro.

$$\begin{cases} a \equiv b \ \ mod \ \ n \\ c \equiv d \ \ mod \ \ n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad ac \equiv bd \ \ mod \ \ n.$$

E de forma particular, se $a \equiv b \ \ mod \ \ n$, e $k \in \mathbb{Z}$, então $ka \equiv kb \ \ mod \ \ n$;

(VI) *(Cancelamento)* Se $mdc(c, n) = 1$, então

$$ac \equiv bc \ \ mod \ \ n \quad \Leftrightarrow \quad a \equiv b \quad mod \quad n;$$

Exemplo 2.4.1. *(Portal da OBMEP)* Encontre os restos da divisão de:

A. $2^{84} por 123$.

B. $7^{5^{25}} por 9$.

Solução:

A. $2^{84} por 123$.

Vamos analisar os restos que potências de 2 deixam na divisão por 123, a parir da análise desses restos vamos utilizar uma combinação de congruências com propriedades de potenciação para resolver o problema.

$$\text{Como } 2^7 = 128 \equiv 5 \mod 123 \text{ e } 5^3 = 125 \equiv 2 \mod 123$$

temos que:

$$\begin{array}{rcl} 2^7 \equiv 5 \mod 123 & \Leftrightarrow & (2^7)^3 \equiv 5^3 \mod 123 \\ 2^{21} \equiv 125 \mod 123 & \Leftrightarrow & 2^{21} \equiv 2 \mod 123 \\ (2^{21})^4 \equiv 2^4 \mod 123 & \Leftrightarrow & 2^{84} \equiv 16 \mod 123 \end{array}$$

Logo vemos que o resto da divisão de 2^{84} *por 123 é igual a 16.*

B. $7^{3^{25}}$ *por* 9.

Vamos analisar os restos que potências de 7 deixam na divisão por 9, assim como fizemos no exercício anterior, e a parir da análise desses restos vamos utilizar uma combinação de congruências com propriedades de potenciação para resolver o problema.

Para encontrar o resto da divisão de $7^{3^{25}}$ *por 9 , notemos primeiro que:*

$$\begin{array}{l} 7^1 \equiv 7 \mod 9 \\ 7^2 \equiv 5 \mod 9 \\ 7^3 \equiv 1 \mod 9 \end{array}$$

Portanto como:

$$7^{3^{25}} \equiv 1^{25} \mod 9 \quad \Leftrightarrow \quad 7^{3^{25}} \equiv 1 \mod 9$$

Logo vemos que o resto da divisão de $7^{3^{25}}$ *por 9 é igual a 1.*

Exemplo 2.4.2. *(POTI - Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo)* Mostre que a equação $x^3 - 117y^3 = 5$ não possui solução inteira.

Solução:

Observando que 117 é múltiplo de 9, temos que qualquer solução inteira da equação deve deixar resto 5 na divisão por 9, ou seja:

$$x^3 - 117y^3 \equiv 5 \quad mod \quad 9.$$

Mas,

$$x^3 - 117y^3 \equiv 5 \quad mod \quad 9 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3 \equiv 5 \quad mod \quad 9$$

Assim x só pode deixar resto 0, 1, 2, ..., 7, 8 na divisão por 9. Analisando cada um dos casos temos:

$$\begin{array}{lcl}
x \equiv 0 \quad mod \quad 9 & \Rightarrow & x^3 \equiv 0 \quad mod \quad 9 \\
x \equiv 1 \quad mod \quad 9 & \Rightarrow & x^3 \equiv 1 \quad mod \quad 9 \\
x \equiv 2 \quad mod \quad 9 & \Rightarrow & x^3 \equiv 8 \quad mod \quad 9 \\
x \equiv 3 \quad mod \quad 9 & \Rightarrow & x^3 \equiv 0 \quad mod \quad 9 \\
x \equiv 4 \quad mod \quad 9 & \Rightarrow & x^3 \equiv 1 \quad mod \quad 9 \\
x \equiv 5 \quad mod \quad 9 & \Rightarrow & x^3 \equiv 8 \quad mod \quad 9 \\
x \equiv 6 \quad mod \quad 9 & \Rightarrow & x^3 \equiv 0 \quad mod \quad 9 \\
x \equiv 7 \quad mod \quad 9 & \Rightarrow & x^3 \equiv 1 \quad mod \quad 9 \\
x \equiv 8 \quad mod \quad 9 & \Rightarrow & x^3 \equiv 8 \quad mod \quad 9
\end{array}$$

Ou seja, x^3 só pode deixar resto 0, 1 ou 8 na divisão por 9. $x^3 \equiv 5 \quad mod \quad 9$ é uma equação impossível e a equação $x^3 - 117y^3 = 5$ não possui soluções inteiras.

2.5. Bases

Os números naturais são escritos em uma base numérica chamada de base 10 pois utiliza apenas os algarismos $0,1,2,3,...,9$ que utiliza um sistema posicional. Podemos por exemplo escrever o número 27564 da seguinte forma:

$$27564 = 2 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

De modo geral podemos escrever qualquer sequência de dígitos de um número $n = a_0a_2a_3...a_{k-2}a_{k-1}a_k$ na base 10 da seguinte forma:

$$n = \sum_{k \geq 0} a_k 10^k$$

Esse resultado não vale apenas para a base 10, o teorema que apresentaremos abaixo mostra como escrever qualquer natural em qualquer base d e generaliza o resultado.

Teorema 2.5.1. *seja $n \geq 0$ e $d \geq 1$. Então há uma, e somente uma, sequência formada pelos dígitos do número n na base d ($a_0a_2a_3...a_{k-2}a_{k-1}a_k...$) que atende as propriedades abaixo:*

(I) para todo $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_k < d$;

(II) Existe um natural m tal que se $k \geq m$ então $a_k = 0$;

(III) $n = \sum_{k \geq 0} a_k d^k$;

Exemplo 2.5.1. Encontre os últimos dois dígitos na representação decimal de 3^{200}.

Solução:

Observando que:

$$(a_n...a_1a_0)_{10} = 10^2(a_n \cdot 10^{n-2} + ... + a_2) + (10 \cdot a_1 + a_0) = 100 \cdot (a_{n-2}...a_2)_{10} + (a_1a_0)_{10}.$$

Percebemos que o número formado pelos dois últimos dígitos de $(a_n...a_1a_0)_{10}$ é resto da divisão deste número por 100. Assim o problema agora pode ser resolvido calculando o resto da divisão de 3^200 por 100.

Vamos utilizar congruências, o teorema apresentado anteriormente e o binômio de Newton para resolver o problema de forma mais direta.

Temos que:

$$3^{200} = 9^{100} = (10-1)^{100} = \sum_{0 \leq k \leq 100} \binom{100}{k} 10^{100-k}(-1)^k.$$

Portanto, $3^{200} \equiv -\binom{100}{99} + \binom{100}{100} \quad mod \quad 100$ ou seja $3^{200} \equiv 1 \quad mod \quad 100.$

Daí chegamos a conclusão que os dois últimos dígitos de 3^{200} são 01.

Como vimos no desenvolver desse capítulo todos os tópicos podem e devem ser abordados na educação básica. Conseguimos até o momento a apresentação de uma sequência lógica desses tópicos basilares de teoria dos números e um aprofundamento teórico que é extremamente necessário ao professor que pretende abordar esses tópicos em sala de aula.

Contudo como docentes é natural que nos perguntemos sobre qual a base legal que dá respaldo a abordagem desses conteúdos, em que séries devemos introduzir e/ou aprofundar e principalmente como esta temática pode contribuir para a formação integral do discente.

Baseando-se nestes questionamentos e em outros que surgirão durante a leitura deste trabalho que os próximos capítulos foram construídos e são necessários para mesclar a abordagem dos conteúdos com os porquês por trás de sua abordagem.

3. A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR E O ENSINO DE TEORIA DOS NÚMEROS

Vimos no capítulo anterior uma abordagem teórica sobre os principais tópicos de teoria dos números que são abordados na educação básica. Buscando entender qual o respaldo teórica da abordagem desses temas esse capítulo tem como objetivo explorar os aspectos gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com foco nas competências e habilidades específicas da área de matemática, bem como investigar os tópicos de Teoria dos Números que são abordados nesse documento.

A BNCC representa um marco regulatório importante para a educação básica no Brasil e desempenha um papel fundamental na definição dos objetivos de aprendizagem para os estudantes em diferentes etapas educacionais e por isso devemos entender melhor sua estruturação legal e pedagógica.

Inicialmente, será apresentada uma visão geral da BNCC, discutindo sua origem, estrutura e propósito. Será analisado o processo de elaboração da BNCC, incluindo as consultas públicas e as contribuições da sociedade, além de destacar os princípios norteadores e os pilares fundamentais que embasam essa política educacional. Será enfatizado o papel da BNCC na definição de um conjunto comum de conhecimentos, competências e habilidades que todos os estudantes devem desenvolver ao longo de sua trajetória na educação básica.

Daremos ênfase especial para as competências e habilidades específicas da área de matemática e suas tecnologias contidas na BNCC. Será destacada a importância do ensino de matemática para a formação integral dos estudantes, enfatizando a necessidade de desenvolver habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas e raciocínio lógico. Serão discutidas as competências que englobam a educação infantil e o ensino fundamental, assim como as competências que devem ser desenvolvidas pelos estudantes durante o ensino médio, visando a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos matemáticos.

Neste ponto, será investigada a abordagem de tópicos de Teoria dos Números na BNCC. Será analisado como esses conteúdos são apresentados e progressivamente desenvolvidos ao longo das etapas da educação básica, desde a introdução dos conceitos básicos até a exploração de temas mais avançados. Será destacada a importância da Teoria dos Números no desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de abstração e da resolução de problemas.

3.1. Aspectos Gerais da BNCC

Desde que foi homologada em 14 de dezembro de 2018 pela ministra da educação Rossieli Soares a BNCC – Base Nacional Comum Curricular vem sendo amplamente estudada e debatida pelos profissionais de educação com a finalidade de compreender melhor o documento como um todo e adequar os currículos escolares as mudanças apresentadas em sua construção.

Essa adequação passa por uma importante (re)formulação das competências e habilidades essenciais para um desenvolvimento pleno dos estudantes. Nesse sentido é preciso perceber que a BNCC deve ajudar, principalmente, a superar a grande fragmentação das políticas educacionais ao mesmo tempo em que se torna um elo para fortalecer cava vez mais o trabalho colaborativo entre união, estados e municípios servindo como balizadora da qualidade da educação.

A importância da criação de um documento tão relevante para o sistema educacional foi enfatizada inicialmente na Constituição Federal de 1988 (CF) como também em normativas posteriores como o Plano Nacional de Educação (PNE) e mais especificamente na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN).

Inicialmente a previsão de construção de uma base comum para nortear os currículos da educação básica estava embasada no artigo 210 da Constituição Federal onde fala que "serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais. " (BRASIL, 2012, p. 191). Nesse aspecto tratou-se mais sobre o objetivo geral do documento e também de sua estrutura base, que foi mais bem detalhada com a criação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional em 1996.

Vemos posteriormente que a LDBEN acaba descrevendo com maiores detalhes o que foi previsto no artigo 210 da Constituição Federal quando o corpo do texto do artigo 26 do capítulo II, que trata da educação básica, diz que:

> Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. (BRASIL, 2018, p. 19)

Ou seja, os currículos de todas as etapas da educação básica devem seguir uma base comum que além de definir aprendizagens básicas a cada etapa ainda tem como característica principal a rigidez e a flexibilidade. Rigidez no sentido de estabelecer conhecimentos e habilidades comuns a todos os estudantes de uma mesma etapa da educação básica e flexibilidade no sentido de entender as especificidades regionais, culturais e individualidades dos sistemas de ensino para a construção de diferentes arranjos curriculares que convirjam para uma educação integral.

Essa necessidade fica muito mais evidenciada quando comparamos o ensino médio com as etapas anteriores. Pois ele tem uma organização e composição curricular ligeiramente distinta daquela que vemos na educação infantil e no ensino fundamental. A organização a que nos referimos é prevista no artigo 36 da LDBEN que estabelece que:

> O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. (BRASIL, 2018, p. 26)

Vemos, portanto, uma nova estrutura nesta etapa que permite a construção de arranjos curriculares distintos entre escolas de uma mesma unidade federativa, rede de ensino ou cidade. Pois no contexto dos itinerários formativos, a BNCC permite a flexibilização e personalização do currículo, possibilitando que os estudantes escolham percursos de aprendizagem de acordo com seus interesses, aptidões e projetos de vida.

Esses itinerários podem abranger diferentes áreas do conhecimento, como ciências humanas, ciências da natureza, matemática e linguagens podendo ser também o resultado da combinação de mais de uma área do conhecimento. O documento, no entanto, não traz propostas de como as redes de ensino devem fazer para conseguir de fato ofertar um leque adequado de itinerários dada a sua realidade regional, estrutura e recursos humanos, mas não iremos nos debruçar aqui sobre essa importante reflexão.

A tarefa de construção dos itinerários é de extrema relevância para uma educação que seja de fato integral, pois as escolas devem se adequar as diretrizes estabelecidas pela BNCC, realizando uma análise criteriosa das competências e habilidades a serem desenvolvidas e principalmente do percurso pedagógico a ser trilhado.

É importante também que haja um diálogo constante entre professores, gestores escolares, estudantes e famílias para identificar as demandas locais e regionais, levando em conta as especificidades e contextos socioculturais.

Além disso, é fundamental oferecer aos estudantes uma variedade de opções de itinerários formativos principalmente em cidades onde há apenas uma escola que oferte o ensino médio. Esses itinerários podem ser construídos de forma que seja possível promover a interdisciplinaridade e a conexão entre os saberes. Quando pensamos na construção dos itinerários formativos vemos que eles podem, na sua estrutura pedagógica, incluir projetos, atividades práticas, estágios, visitas técnicas, entre outras estratégias, que estimulem o protagonismo estudantil e a aplicação dos conhecimentos em situações pertencentes a sua realidade.

A criação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também foi prevista no Plano Nacional de Educação (PNE), estabelecido pela Lei nº 13.005/2014, e, portanto, posterior a LDBEN mas que endossa a necessidade de parametrizar a construção dos currículos da educação básica. Tal previsão é relevante pois o PNE é uma importante política pública que define metas e estratégias para a melhoria da educação no Brasil em um horizonte de dez anos através de 20 metas a serem cumpridas até 2024.

Dentre as 20 metas presentes no documento a que trata da criação de uma base comum curricular é a meta 7 do PNE. Essa meta trata do fomento a uma educação de qualidade em todas as etapas e modalidades da educação básica, da melhoria do fluxo escolar e dos objetivos a serem alcançados nas médias nacionais do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

Nessa meta é citado na primeira estratégia que a União, os Estados, os Municípios e o Distrito Federal deverão adotar de forma conjunta, que é:

> Estabelecer e implantar, mediante pactuação Inter federativa, diretrizes pedagógicas para a educação básica e a base nacional comum dos currículos, com direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento dos(as) alunos(as) para cada ano do ensino fundamental e médio, respeitada a diversidade regional, estadual e local. (BRASIL, 2014, p. 61)

A previsão da criação da BNCC no Plano Nacional de Educação demonstra a importância atribuída a essa política educacional como um instrumento de equidade, qualidade e garantia do direito à educação. Pois essa abordagem reconhece a diversidade regional, estadual e local, permitindo a adaptação das diretrizes às necessidades e peculiaridades de cada contexto educacional.

Ao considerar a diversidade, é possível promover uma educação mais inclusiva e contextualizada, que atenda às demandas específicas de cada região, ao mesmo tempo em que mantém um referencial comum de direitos e objetivos de aprendizagem para todos os estudantes.

A proposta de pactuação inter-federativa enfatiza a importância da colaboração e do diálogo entre os diferentes níveis de governo na definição das diretrizes pedagógicas. Esse processo envolve a participação ativa de representantes das esferas municipal, estadual e federal, permitindo uma construção conjunta que considera as particularidades de cada contexto educacional.

Ao promover essa articulação, busca-se fortalecer a cooperação entre os entes federados e garantir a implementação efetiva das diretrizes, contribuindo para a melhoria da qualidade e da equidade da educação básica em todo o país. Podemos citar também a importância do papel da Conferência Nacional de Educação ocorrida em 2010 que foi fundamental para a criação do PNE e ampliando a discussão sobre a necessidade de construção colaborativa da BNCC.

Em resumo o processo de elaboração desse importante documento pode ser descrito, cronologicamente, por algumas etapas importantes que mostram todo o trajeto de reflexão, análise de impacto e construção da Base Nacional Curricular:

- **1988** – A promulgação da Constituição Federal que prevê, em seu artigo 210, a criação de um documento que estabeleça a construção colaborativa de uma base nacional para a educação básica.

- **1996** – A aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional que regulamenta em seu artigo 26 uma base comum para toda a educação básica.

- **1997** – O lançamento dos dez volumes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o ensino fundamental do 1º ao 5º ano. Que seriam utilizados para auxiliar as equipes escolares no desenvolvimento de seus currículos, mas esses documentos não tinham caráter de seguimento obrigatório pelas redes de ensino.

- **1998** – O lançamento dos dez volumes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o ensino fundamental do 6º ao 9º ano. Com mesma finalidade daqueles lançados no ano anterior.

- **2000** – São lançados os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio que além de orientar as equipes escolares no que tange aos currículos ainda deveria orientar o professor na busca de abordagens metodológicas novas.

- **2008** – Foi criado o Programa Currículo em Movimento que tem por objetivo melhorar a qualidade da educação básica por meio da construção do currículo de cada uma das etapas da educação básica.

- **2010** – Ocorre a Conferência Nacional de Educação (CONAE), que conta com a presença de diversos especialistas para realizar um debate amplo sobre a educação básica. Como consequência desta conferência foi redigido o documento que fala da necessidade da BNCC como parte de um Plano Nacional de Educação. Neste mesmo ano foram definidas as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) gerais e para a educação infantil.

- **2011** – Foi fixado, por meio da resolução nº 7 de 14 de dezembro de 2010, as Diretrizes Curriculares Nacionais para o ensino fundamental de nove anos.

- **2012** – Instituiu-se o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) e também as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

- **2013** – Por meio da portaria nº 1.140 de 22 de novembro de 2013 foi instituído o Pacto Nacional de Fortalecimento do Ensino Médio (PNFEM).

- **2014** – Quatro anos após a realização da primeira CONAE ocorre a 2ª edição da CONAE que refrete sobre a mobilização para a construção de Base Nacional Comum Curricular meses após a Lei nº 13.005 de 25 de junho de 2014 regulamentar o Plano Nacional de Educação.

- **2015** – Ocorreu no dia 16 de setembro deste ano a publicação da primeira versão da BNCC e em dezembro do mesmo ano uma mobilização nacional para discutir a versão preliminar da BNCC.

- **2016** – Foi publicada no dia 3 de maio de 2016 uma segunda versão da BNCC e nos meses de junho a agosto ocorreram seminários com especialistas, gestores e professores com o objetivo de debater a versão recente do documento.

- **2017** – Ocorreu a homologação da versão final da BNCC e suas orientações para implantação em todas as escolas de educação básica.

Os dados históricos mencionados são de extrema importância para entender o percurso realizado até a criação da Base Nacional Comum Curricular. Eles demonstram um processo gradual e consistente de construção das diretrizes e referências para a educação básica no Brasil.

Desde a promulgação da Constituição Federal de 1988 e a regulamentação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional em 1996 até o lançamento do Plano Nacional de Educação em 2014, fica evidente a busca por uma base comum para a educação, que garanta a equidade e a qualidade do ensino em todo o país.

O lançamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais nos anos de 1997 e 1998 para o ensino fundamental e em 2000 para o ensino médio representam um esforço em oferecer orientações e referências para as equipes escolares na elaboração dos currículos.

Além disso, a criação de programas como o Currículo em Movimento em 2008 e o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) em 2012 reforçam o compromisso com a melhoria da qualidade educacional desde a primeira infância e esse tipo de política é fundamental para prever e evitar deficiências no processo de ensino-aprendizagem.

A realização da Conferência Nacional de Educação em 2010 e 2014 demonstra o engajamento e a participação de diversos especialistas no debate sobre a necessidade da BNCC como parte de um Plano Nacional de Educação.

A publicação das versões preliminares da BNCC em 2015 e 2016, seguidas por seminários e discussões com especialistas e professores, reflete o esforço de construção coletiva e participativa desse documento orientador para a educação básica. Essas primeiras versões foram fundamentais para entender o que precisava ser adequado, retirado ou adicionado no documento para uma educação integral.

Portanto, esses dados históricos ressaltam a trajetória cronológica de construção da BNCC, destacando a importância do diálogo entre os atores envolvidos, o embasamento em legislações e a busca por uma educação mais equitativa e de qualidade.

É claro que precisamos pensar em como melhorar esse documento a fim de garantir que a educação básica esteja de fato em diálogo com o desenvolvimento integral do aluno, as demandas contemporâneas da sociedade e as alterações da legislação educacional.

3.2. Competências e Habilidades na Área de Matemática e suas Tecnologias.

Se buscarmos entender o que seria a BNCC chegamos à conclusão de que ela é um documento de caráter normativo que define um conjunto orgânico e progressivo das aprendizagens essenciais que devem ser integralmente desenvolvidas por todos os alunos da educação básica.

Nela entendemos que as aprendizagens, portanto, devem convergir para um mesmo fim: garantir que todo e qualquer estudante possa desenvolver dez competências gerais básicas, comuns a todas as etapas da educação básica como também a competências específicas a cada área de conhecimento que devem ser desenvolvidas em paralelo sem apresentar uma hierarquia. Ao realizar o estudo da BNCC vemos que as dez competências gerais a que nos referimos são as seguintes:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico−cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens − verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital −, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
>
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
>
> 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
>
> 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
>
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. (BRASIL, 2018, p. 09)

Essas competências são transversais a todas as áreas do conhecimento e devem ser desenvolvidas desde o ingresso do estudante na creche até o último ano do ensino médio, ou seja, nas três etapas da educação básica. Elas estabelecem basicamente aquilo que todo estudante da educação básica deve ter desenvolvido ao longo de sua trajetória escolar.

Quando falamos da área de matemática e suas tecnologias vemos que há na BNCC competências e habilidades específicas desta área do conhecimento organizadas por etapa da educação básica da seguinte forma: Primeiro são apresentadas competências que englobam a educação infantil e todo o ensino fundamental, essas competências são basilares para a construção do pensamento lógico − Matemático e demandam a necessidade de desenvolvimento de algumas habilidades.

Posteriormente, considerando aquilo que foi construído nas etapas anteriores, são apresentadas as competências e suas respectivas habilidades a serem desenvolvidas por todos os estudantes do ensino médio visando a consolidação e o aprofundamento do conhecimento matemático e sua relação com a sociedade.

Quando voltamos nosso olhar para o ensino fundamental vemos que o documento aponta oito competências específicas para a área de matemática e suas tecnologias. Essas competências então devem ser utilizadas para nortear o trabalho docente e precisam, obrigatoriamente, ser desenvolvidas ao longo dos nove anos do ensino fundamental através de estratégias pedagógicas diversas.

De acordo com a própria BNCC as competências previstas na área matemática e suas tecnologias para o ensino fundamental são:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
>
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
>
> 7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.
> (BRASIL, 2018, p. 267)

Vemos acima que as competências para o ensino fundamental na área de Matemática e suas tecnologias são fundamentais para preparar os alunos para lidar com desafios do mundo contemporâneo.

Estas competências visam desenvolver habilidades cognitivas, raciocínio lógico e também capacidades práticas que são fundamentais para a compreensão e aplicação da matemática no cotidiano e em diferentes contextos sociais, além de estimular uma construção colaborativa do conhecimento.

Percebe-se, através das competências, um destaque a importância de reconhecer a Matemática como uma ciência humana e viva, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas ao longo da história assim como também compreender que esta ciência está presente nas práticas sociais e tecnológicas da nossa sociedade.

Além disso, essas habilidades visam desenvolver o raciocínio lógico, o espírito investigativo e a capacidade de gerar argumentos convincentes, utilizando o conhecimento matemático como ferramenta para entender e agir no mundo. Estas competências potenciam a capacidade de resolução de problemas de forma crítica e criativa, estimulando o pensamento autônomo e a tomada de decisões com base numa análise crítica da realidade.

Outro ponto importante é o desenvolvimento da habilidade de compreender a relação entre diferentes áreas da matemática, como aritmética, álgebra, geometria, estatística e probabilidade, e com outras áreas do conhecimento. Essa compreensão permite que o aluno se sinta seguro na construção e aplicação do conhecimento matemático, desenvolve a autoestima e a perseverança na busca de soluções, além de ampliar sua visão interdisciplinar e integradora do conhecimento.

Não menos importante, podemos ressaltar a utilização de processos e ferramentas matemáticas, incluindo tecnologias digitais disponíveis como ferramentas de geometria dinâmica, aplicativos, jogos e etc. na educação básica. Pois quando utilizadas adequadamente os alunos podem desenvolver habilidades como modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados. Isso estimula o pensamento crítico, a capacidade de abstração e a adaptação às transformações tecnológicas que permeiam a sociedade atual.

Em resumo, as competências para o ensino fundamental na área de matemática e suas tecnologias são fundamentais para o desenvolvimento de habilidades matemáticas, raciocínio lógico e aplicação prática dos conhecimentos adquiridos. Pois elas permitem aos alunos compreender a importância da matemática em diferentes contextos, resolver problemas de forma crítica e criativa, estabelecer relações com outras áreas do conhecimento e utilizar tecnologias para aprimorar suas habilidades matemáticas. Dessa forma, busca-se preparar os alunos para um mundo cada vez mais complexo e tecnológico, onde a matemática desempenha um papel fundamental.

Assim como ocorre no ensino fundamental a BNCC também prevê competências e habilidades para o ensino médio. Nessa etapa da educação básica as competências aprecem interligadas as da etapa anterior e acaba desempenhando o papel tanto de desenvolver novas habilidades quanto de enriquecer o entendimento o desenvolvimento daquelas que foram construídas no ensino fundamental. A ideia, portanto, é de continuidade.

No entanto, no ensino médio reduzimos o número de competências para um total de cinco competências que são as seguintes:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
>
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
>
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531)

As competências são, portanto, considerando a definição de Perpereno (2015), “ uma capacidade de mobilizar diversos recursos cognitivos para enfrentar um tipo de situação”. Ou seja, as competências ocupam uma dimensão mais ampla dentro daquilo que se espera atingir em determinado nível e/ou etapa da educação básica.

Nessa perspectiva são necessários utilizar alguns recursos cognitivos, na BNCC tais recursos recebem o nome de Habilidades. Mas a estrutura geral do documento apresenta a presença de Habilidades, Objetos de Conhecimento e Unidades Temáticas. Logo para associar cada um desses elementos a competências específicas, independente da área de conhecimento, o documento descreve que:

> Para garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades. Essas habilidades estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento – aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos –, que, por sua vez, são organizados em unidades temáticas (BRASIL, 2018, p. 28).

Basicamente as unidades temáticas funcionam como um arranjo, dentre vários possíveis, para otimizar a organização dos Objetos de Conhecimento em cada etapa da educação básica. No entanto, para melhorar a forma como cada objeto de conhecimento é trabalhado dentro de uma unidade temática são estabelecidas habilidades que devem ser desenvolvidas no aluno. Portanto, é importante entender como essas habilidades são apresentadas.

Na área de matemática e suas tecnologias existem tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio cinco unidades temáticas, a saber: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. A cada unidade temática há diversos objetos de conhecimento a serem abordados e para essa abordagem são consideradas as habilidades a serem desenvolvidas.

Para facilitar a identificação das habilidades e sua estrutura dentro da BNCC é utilizado um código alfanumérico que é estruturado da seguinte forma:

$$L_1L_2N_1N_2L_3L_4L_5N_3N_4N_5, \text{ onde } L_i \text{ são letras e } N_i \text{ são números.}$$

- L_1L_2 – A primeira sequência de letras representa que etapa da educação básica pertence a habilidade.
- N_1N_2 – A primeira sequência de números se refere a que séries podem ser desenvolvidas as habilidades.
- $L_3L_4L_5$ – A segunda sequência de letras indica a que componente curricular a habilidade está associada.
- $N_3N_4N_5$ – A segunda sequência de números qual competência específica do componente curricular está associada a habilidade.

Podemos exemplificar (EF08MAT302) que representa a segunda habilidade associada a competência específica 3 do componente curricular Matemática e que deve ser trabalhada exclusivamente na oitava série do Ensino Fundamental. Outro exemplo é (EM13MAT510) que representa a décima habilidade associada a competência específica 5 do componente curricular Matemática e que deve trabalhada da primeira a terceira série do ensino médio.

Esse código alfanumérico é muito útil pois conseguimos a partir de uma habilidade específica saber a competência, a etapa, o componente curricular e as séries que devemos promover o desenvolvimento da habilidade. Na prática ele serve como importante ferramenta de localização e entendimento da habilidade dentro da BNCC.

3.3. O Ensino de Teoria dos Números.

A Teoria dos Números pode ser entendida como a área da matemática que estuda as relações e propriedades entre os números inteiros e seus amigos. Esta área da matemática, embora seja muitas vezes vista como uma área muito técnica da matemática, pode trazer contribuições significativas no processo de construção do conhecimento matemático em estudantes da educação básica.

No ensino fundamental, por exemplo, a abordagem adequada de tópicos elementares de teoria dos números – Previstos na BNCC e que veremos com mais detalhes a diante – pode ser bastante útil para despertar no aluno o interesse pela matemática, como também para compreender melhor conceitos previamente ensinados e também para desenvolver habilidades de resolução de problemas.

Já no ensino médio a ideia é aprofundar o estudo da Teoria dos Números por meio de tópicos mais complexos como Congruências e bases e Equações Modulares; para que o aluno possa ampliar a forma como ele olha para os problemas desta área e consiga ter uma base sólida para relacionar os conceitos matemáticos apresentados com outras áreas como, por exemplo, álgebra e geometria que também fazem parte do currículo da educação básica. O aprofundamento também é necessário pois esses tópicos desafiam os alunos a pensar de forma abstrata, a aplicar a lógica matemática e a solucionar problemas mais desafiadores, promovendo o desenvolvimento de habilidades analíticas e críticas que são fundamentais.

A BNCC, no entanto, prevê explicitamente a abordagem de tópicos elementares de teoria dos números apenas nos anos finais do ensino fundamental. Pois quando realizamos a leitura do documento percebemos que a abordagem desses tópicos, no referido documento, é prevista no sexto e sétimo ano do ensino fundamental especificamente na unidade temática Números e acaba sendo retomada no ensino médio ao trabalhar objetos de conhecimento ligados a algorítimos.

Especificamente no sexto ano do ensino fundamental, vemos na unidade temática intitulada Números as primeiras habilidades da BNCC que iniciam a abordagem de tópicos de teoria dos números como paridade de um número natural, ideias introdutórias do conceito de múltiplos e divisores de um número natural, números primos e compostos e critérios de divisibilidade.

As habilidades que trabalham esses objetos de conhecimento nessa etapa da educação básica são (EF06MA04), (EF06MA05) e (EF06MA06) transcritas abaixo como:

> **(EF06MA04).** Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).
>
> **(EF06MA05).** Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
>
> **(EF06MA06).** Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor. (BRASIL, 2018, p. 301).

Essas habilidades são abordadas como uma continuidade da representação dos números naturais que são muito presentes nos anos iniciais do ensino fundamental e apresentam métodos que permitem entender melhor as propriedades dos números naturais. Porém, nesse primeiro momento, devemos trabalhar os conceitos em paralelo com situações problema que foquem não somente na conceituação como também na manipulação e aplicação pois isso serve para que a habilidade seja trabalhada de forma adequada.

Essa base construída no ensino fundamental vai ser extremamente necessária para que o educador consiga fazer o devido aprofundamento e manutenção das habilidades que os alunos desenvolveram, tanto na unidade temática de Números quanto em outras unidades temáticas.

Em paralelo as habilidades citadas acima podemos voltar exemplificar como devemos trabalhar conceitos como múltiplos, divisores e números primos em sala de aula, pois de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Conceitos como os de múltiplo e divisor de um número natural ou o conceito de número primo podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver. (BRASIL, 1998, p. 66).

A ideia que o documento traz é portanto de continuidade, de construção gradativa do conhecimento matemático pelo estudante para que cada habilidade desenvolvida funcione como um tijolo que pode ser utilizado para dar estrutura as paredes da formação dos estudantes que são as competências, e o conjunto dessas paredes só são de fato uma obra arquitetônica se existir um teto que é a formação integral.

Como continuidade e ampliação desses conceitos, ainda na mesma unidade temática, é apresentada a habilidade (EF07MA01) que trabalha com a interpretação e aplicação dos conceitos de máximo divisor comum e mínimo divisor comum de um número natural. Estes conceitos utilizam simultaneamente os trabalhados nas habilidades citadas acima.

Porém o foco está no desenvolvimento de estratégias que permitam ver os problemas de diferentes formas. Podemos ver claramente ao ler a habilidade, pois esta prevê que o discente seja capaz de “ (EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos”.

Como podemos ver através da leitura da BNCC e de suas respectivas competências e habilidades a abordagem de tópicos de teoria dos números no ensino fundamental se restringe aos conceitos mais elementares.

No ensino médio não há nenhuma habilidade explicita na BNCC que prevê o aprofundamento dos conceitos trabalhados ou até mesmo a abordagem de novos conceitos de teoria dos números, mas há as habilidades EM13MAT315 e EM13MAT405 que utilizam objetos de conhecimento introdutórios de teoria dos números, bem como seus respectivos aprofundamentos, para trabalhar com a compreensão e construção de algorítimos. Vemos também que a própria BNCC enfatiza que uma das finalidades do ensino médio é, citando o artigo 34 $-$ I da LDBEN, “a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos”.

Porém a ideia de aprofundamento proposta pela BNCC não está relacionada a uma abordagem que busca trabalhar apenas tópicos mais avançados de teoria dos números ou qualquer outro tópico matemático. A ideia portanto está alinhada ao que é preconizado nos Parâmetros Curriculares Nacionais quando fala que:

> O que se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos. (BRASIL, 1998, p. 23).

Isso reforça a necessidade de buscar abordagem metodológicas, recursos e instrumentos que permitam que seja possível ampliar o conhecimento adquirido no ensino fundamental, ao qual se inclui aqueles relativos a teoria dos números partindo do conhecimento prévio dos estudantes e trazendo novas abordagens e aplicações que de fato façam sentido para o estudante.

Dentre as diversas maneiras de se fazer esse trabalho podemos destacar a abordagem de problemas de teoria dos números voltados para olimpíadas de matemática e em especial aquelas voltadas a estudantes da educação básica.

Tal abordagem se mostra fértil pois as essas competições proporcionam um ambiente desafiador, competitivo e de muita troca de experiências, além de trazer problemas diversificados que incentivam os alunos a explorarem conceitos mais avançados, ter acesso a diferentes aplicações práticas daquilo que está sendo estudado e a resolver problemas mais complexos de teoria dos números.

Outro fator relevante é que ao mesmo tempo em que a participação nessas competições estimula a dedicação, a criatividade e a resiliência dos alunos diante de desafios matemáticos eles permitem fazer com que o estudante veja aquilo que eles está trabalhando sobre diferentes óticas dando a eles a oportunidade de estar em constante processo de reaprendizagem da matemática.

Além disso, as olimpíadas de matemática promovem a interação entre estudantes com habilidades matemáticas distintas, permitindo que eles troquem experiências e aprendam uns com os outros. Essa colaboração estimula o aprofundamento dos conhecimentos em Teoria dos Números e o também o desenvolvimento de uma comunidade matemática ativa dentro dos muros da escola.

Podemos então dizer que o ensino de teoria dos números na educação básica é fundamental para o desenvolvimento sólido das habilidades matemáticas dos alunos. A sua abordagem gradual dos conceitos desde o ensino fundamental até o ensino médio por meio de problemas olímpicos pode ser uma importante ferramenta para construir uma visão mais positiva e construtiva da matemática da educação básica, onde a aplicação a situações reais, a linguagem própria da matemática e as generalizações fazem sentido para o discente.

Desta forma podemos refletir sobre como garantir que de fato nossos jovens aprendizes possam ter acesso a uma educação plena, também possam desenvolver suas potencialidades e consigam enxergar a matemática como uma área indispensável nesse importante processo.

A partir dessa reflexão podemos ser direcionados para novos questionamentos, um deles é sobre quais metodologias posso utilizar para alcançar os objetivos de aprendizagens que são fundamentais aos nossos docentes e, consequentemente, quais ferramentas vou utilizar para conseguir contribuir com a formação deles. Veremos no próximo capítulo um exemplo de metodologia que pode ser utilizada em sala de aula e trazer bons resultados quando trabalhada de forma devida.

4. A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Vemos constantemente, dentro e fora da universidade, que muito se discute sobre a formação e aperfeiçoamento dos professores. Como consequência desses questionamentos cada dia mais frequentes foram surgindo novas pesquisas no campo da educação matemática sobre esse tema. Quando voltamos nossa ótica sobre a formação e aperfeiçoamento dos professores de matemática da educação básica vemos que há uma associação entre como trabalhar a resolução de problemas em sala de aula e a formação docente.

Nesse contexto, destaca-se a relevância do trabalho realizado por George Pólya no âmbito da resolução de problemas, dando ênfase as contribuições desse trabalho para a formação e abordagem metodológica dos professores de matemática da educação básica.

O método Polya, que será abordado nesse capítulo, é reconhecido por sua abordagem estruturada e eficaz na resolução de problemas matemáticos, proporcionando aos estudantes a construção e aperfeiçoamento de habilidades essenciais para o pensamento crítico, a criatividade e a tomada de decisões enquanto permite que o professor possa analisar o que está trabalhando e fazer intervenções para estimular o aluno a construir seu conhecimento. Por esse motivo vamos explorar nesse capítulo as contribuições do método Polya para a formação e aperfeiçoamento docente, assim como analisar o seu uso na sala de aula.

Atualmente, é perceptível dentro ou fora dos centros de pesquisas que a metodologia de resolução de problemas tem ganhado destaque como uma abordagem pedagógica promissora para o ensino da matemática.

Essa ênfase se justifica pelo fato de que tal metodologia permite que tanto professor quanto o aluno amplie sua visão sobre e para a matemática, pois ao envolver os alunos em situações desafiadoras e autênticas, a resolução de problemas proporciona uma aprendizagem significativa, que vai além da mera memorização de fórmulas e procedimentos e o professor precisa também desenvolver uma visão mais ampla sobre o que ele está ensinando e seu impacto na formação dos estudantes. Nesse sentido, investigar o uso dessa metodologia em sala de aula é fundamental para compreender sua efetividade e impacto no processo de ensino-aprendizagem.

Dentre as diferentes formas de se abordar essa metodologia iremos nesse capítulo dar atenção especial a abordagem por meio de problemas olímpicos de teoria dos números como uma estratégia enriquecedora para o ensino da matemática.

Os problemas olímpicos de teoria dos números apresentam desafios complexos que exigem dos alunos o desenvolvimento de habilidades analíticas, lógicas e de criatividade. Explorar a utilização desses problemas em sala de aula permite aos estudantes ampliar seu repertório matemático, aprofundar seus conhecimentos e a desenvolver estratégias eficazes para enfrentar problemas desafiadores.

Outro recurso valioso no contexto da metodologia de resolução de problemas é o Clube de Matemática da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). O Clube de Matemática é uma plataforma online de acesso público voltada para a preparação inicial para olimpíadas de matemática que proporciona um ambiente colaborativo e estimulante, onde os alunos podem aprofundar seus estudos em matemática, explorar problemas desafiadores e participar de atividades enriquecedoras.

Analisar o uso do clube de matemática da OBMEP como uma estratégia para promover a resolução de problemas em sala de aula é fundamental para compreender seus impactos na aprendizagem dos alunos e na formação docente, os problemas de teoria dos números do Clube de Matemática da OBMEP são ideais para introduzir os alunos da educação básica num ambiente olímpico.

Portanto, este capítulo tem como objetivo investigar as contribuições do método Polya para a formação e aperfeiçoamento docente, analisar o uso da metodologia de resolução de problemas em sala de aula, com ênfase no uso de problemas olímpicos de teoria dos números e no Clube de Matemática da OBMEP.

A partir dessa análise, busca-se compreender os benefícios e desafios relacionados à implementação dessas práticas, bem como suas influências no processo de ensino-aprendizagem e no desenvolvimento dos alunos como solucionadores de problemas matemáticos.

4.1. Aspectos Legais e Teóricos

Ainda sobre forte influência da BNCC que destaca a importância da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem da matemática abordaremos neste capítulo alguns aspectos sobre a Metodologia de Resolução de Problemas. Essa metodologia é muito estudada por diversos teóricos da educação matemática, dentre os quais se destacam os trabalhos do matemático George Polya.

Quando falamos sobre a importância dada a metodologia de resolução de problemas podemos citar ONUCHIC (1999) que em seus estudos enfatiza que:

> A importância dada a Resolução de Problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção. [...] hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade. (ONUCHIC, p. 203, 1999)

O autor acaba fazendo tais afirmações tomando como base a crescente presença de documentos que corroboram a necessidade de trabalhar a resolução de problemas dentro do ambiente escolar. Podemos mencionar por exemplo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (PCNEF) que já em 1988 nos alertava que:

> A prática mais frequente na Resolução de Problemas consiste em ensinar um conceito, um procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, técnicas e demonstrações.
>
> [...] A Resolução de Problemas na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que tem dos problemas, da Matemática, do mundo geral e desenvolver sua autoconfiança. (BRASIL, 1998, p. 40).

Além dos PCN´s outros documentos oficiais como as Diretrizes Curriculares Nacionais e, mais recentemente, a própria Base Nacional Comum Curricular enfatizavam a relevância da metodologia de resolução de problemas na educação básica. As DCN´s por exemplo estabelecem que dadas as demandas sociais a educação básica deve ofertam uma educação ampla que promova "maior capacidade de raciocínio, autonomia intelectual, pensamento crítico, iniciativa própria e espírito empreendedor, bem como capacidade de visualização e resolução de problemas. "

Em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais a BNCC também destaca que a metodologia de resolução de problemas deve ser apresentada em sala de aula com o objetivo de aprender matemática para o desenvolvimento de competências mais complexas, pois como vimos no capítulo anterior, apesar área de matemática ser apresentada em unidades temáticas distintas é preciso que haja uma articulação entre as elas. Assim, ao ensinar matemática aos estudantes:

> [...] espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (BRASIL, 2018, p. 263).

A abordagem de resolução de problemas já é incentivada pela BNCC desde o início do ensino fundamental funcionando como um suporte extremamente necessário ao ensino de matemática, pois segundo este mesmo documento:

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. (BRASIL, 2018, p. 266).

Essa perspectiva de envolver os alunos em atividades de resolução de problemas são essenciais para que educadores proporcionem em sala de aula uma experiência de aprendizagem significativa, na qual os estudantes podem aplicar seu conhecimento matemático em situações que permitem compreender o que ele está estudando, testar seu domínio do conhecimento matemático para além da mera utilização de fórmulas, estabelecer e validar estratégias, refletir sobre a abordagem utilizada e principalmente ter autonomia para criar novos problemas matemáticos.

4.2. O Método POLYA: Contribuições Para a Formação e Aperfeiçoamento Docente

George Pólya foi um matemático húngaro bastante conhecido na atualidade por seu trabalho com a teoria de resolução problemas, teoria essa que vem se mostrando até os dias atuais muito promissora no que diz respeito a novas abordagens no ensino de matemática. Porém, Pólya não foi o primeiro a refletir sobre a conexão entre os problemas abordados em sala de aula e sua relação prática com a realidade e com a formação docente, pois de acordo com ONUCHIC e MORAIS (2013):

> Anterior a Polya, em 1908, Félix Klein no livro Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis, já havia manifestado preocupação com a formação docente, alegando que jovens universitários, recém-formados, eram confrontados com problemas na sala de aula que não se referiam, em nenhum aspecto, às coisas com as quais eles haviam sido envolvidos na escola. Até aquele momento, a prioridade dos professores de Matemática, em sua maioria homens, voltava-se à ciência sem nenhuma preocupação com a matemática escolar.

Porem George Pólya acabou desenvolvendo um trabalho muito mais amplo sobre o assunto e criou uma metodologia didática de resolução de problemas bastante estudada até os dias atuais. Apesar de ter publicado diversos trabalhos, sua fama mundial foi consequência da publicação em 1945 do seu livro intitulado How to Solve It publicado aqui no Brasil como A Arte de Resolver Problemas que apresenta uma metodologia de resolução de problemas que utiliza princípios e estratégias que permitem uma visão ampla do problema abordado. Essa metodologia não se limita a apenas buscar soluções para os problemas, mas também desenvolver o pensamento crítico e criativo.

No Prefácio de seu livro mais popular, citado no parágrafo anterior, PÓLYA (2006) faz uma alerta sobra a metodologia utilizada em sala de aula pelo professor, exemplificando a resolução de problemas e enfatizando que a depender da forma como trabalhamos matemática com os estudantes podemos estar matando seu interesse pela disciplina ou fazendo-os ver a matemática como algo atraente, motivador e criativo.

Por isso ele acaba reforçando quão rica é a abordagem de problemas no ensino de matemática, e que mesmo que a abordagem em si da resolução de problemas não seja um fator determinante para uma aprendizagem significativa a característica investigativa dos problemas quando associada a uma abordagem adequada, a objetivos claros e a uma metodologia concisa pode ser muito positiva na formação integral dos discentes e para o aperfeiçoamento docente. Pois segundo POLYA (2006), usaremos aqui a versão mais atual do livro publicado em 1945:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.
> (POLYA, 2006, p.5).

Faz-se então necessário repensar a forma como ensinamos matemática buscando métodos adequados de trabalhar a resolução de problemas em sala de aula para não levar o aluno a sentir desinteresse pela matemática. Para que o trabalho com resolução de problemas de fato funcione o professor precisa atuar como um curador dos problemas e conceitos abordados em sala de aula. Pois é necessário encontrar problemas que sejam adequados aos estudantes de acordo com os objetivos de aprendizagem, delimitar quais conceitos ou procedimentos que serão construídos a partir do estudo dos problemas e principalmente qual será a abordagem metodológica utilizada.

Como não há apenas uma abordagem de se trabalhar com a resolução de problemas, iremos tratar aqui daquela que é mais conhecida e possuem mais estudos sobre sua aplicação prática em sala de aula, o método de resolução de problemas proposto por Pólya, que põe o aluno como sujeito ativo do processo e o professor no papel de moderador, fazendo os direcionamentos e questionamentos necessários para que haja uma construção de conhecimento de fato significativa.

Esse método é estruturado em quatro etapas: (1) Compreensão do problema, (2) Elaboração de um plano de resolução, (3) Execução do plano e (4) Retrospecto. Iremos agora descrever cada uma dessas etapas considerando aquilo que foi descrito por PÓLYA (2006).

A primeira etapa consiste em compreender o problema proposto através de uma leitura atenta do enunciado, da identificação correta das informações que são de fato relevantes e o que é solicitado. Nessa etapa não se pergunta ao discente como proceder na resolução, mas sim o que eu quero resolver e quais dados eu tenho a minha disposição para entender o problema.

Uma vez entendido o problema e juntada as informações relevantes, a continuidade do trabalho realizado pelo aluno se dá pela construção de um plano de resolução do problema. Essa etapa é realizada principalmente para orientar o raciocínio e evitar abordagens não produtivas, mas para isso o professor precisa orientar os alunos a: entender e criar as conexões existentes entre os dados fornecidos e a incógnita do problema, quando uma conexão direta entre os dados e a incógnita não for estabelecida recorrer a problemas auxiliares, estruturar bem o plano com as ideias devidamente fundamentadas de quais abordagens ou algoritmos devem ser utilizados para resolver o problema.

Tendo finalizado a construção do plano cabe agora a sua execução. Nessa terceira etapa é onde se exige do estudante um misto de conhecimento sobre o assunto abordado, concentração e persistência.

Pois o discente precisará analisar cuidadosamente os dados do problema, utilizar as diferentes estratégias previstas no plano, realizar com riqueza de detalhes as operações geométricas e algébrica necessárias, ter controle do tempo empregado, uma vez finalizada a resolução fazer a validação dos processos e caso haja erros recomeçar se assim for necessário.

Assim que as etapas anteriores são finalizadas cabe fazer um retrospecto do plano que consiste em analisar e aperfeiçoar a resolução obtida pelo estudante. Nessa etapa ele reflete sobre como melhorar sua resolução, que outros caminhos eram possíveis seguir, sobre as relações que esse problema em específico tem com outros que ele conhece e como o processo de resolução do problema contribuiu para o seu aprendizado.

Essas etapas propostas por Pólya são excelentes para levar o aluno a fazer reflexões necessárias sobre o problema como: questionar porquê de fato a solução funciona, questionar sobre como construir ele mesmo todo o processo de resolução, buscar entender o que ele domina e se as ferramentas matemáticas que ele tem em mão são suficientes e principalmente compreender todo o processo ativo de construção do conhecimento matemático.

O processo, portanto, de trabalhar essa metodologia em sala de aula traz a necessidade de o docente compreender como os alunos estão reagindo a essa nova metodologia, como eles estão aprendendo, quais dificuldades estão surgindo e qual a origem dessas dificuldades e principalmente auto avaliar sua prática em sala de aula. Para que a cultura de resolução de problemas dê bons resultados é preciso que o cuidado e auxílio aos estudantes seja constante.

Assim a formulação e escolha dos problemas deve ser realizada de forma criteriosa, para que os problemas trabalhados não sejam apenas do tipo fórmula e aplicação senão não se faz sentido algum para o aluno aplicar um método com vários processos em um problema de resolução direta. Devemos, portanto, selecionar problemas que necessitem ser interpretados e que a extração das informações para solução não seja tão direta, exigindo que o aluno mergulhe na situação problema e vê-la de diferentes óticas, testando hipóteses e estratégias.

Ao trabalhar com esse método o professor precisa ter bastante cuidado para que sua intervenção, suporte e direcionamentos não sejam escassos ou excessivos. Pois a escassez de suporte ao estudante pode fazer com que ele se convença que não consegue resolver problemas matemáticos e desestimula-lo a prosseguir, já o excesso de suporte tira do aluno a capacidade investigativa e inibe o desenvolvimento de um censo crítico sobre o problema e suas consequências. Afinal, como bem é destacado por Pólya:

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho.
> (POLYA, 2006, p. 1).

É bastante natural que os alunos não consigam perceber todas as informações necessárias para a resolução do problema, não consiga relacionar de forma adequada o que ele estudou com o problema ou até mesmo que ele que tentar resolver logo lançando mão de fórmulas ou algoritmos. De frente a essa situação, o professor precisa entrar em cena para guiar o aluno no processo de resolução de problemas, apontando caminhos e fazendo-o entender seus erros e acertos e porquê o processo é importante. Para isso conforme aponta Sousa (2020) ao citar Cai e Lester:

> Para ajudarem os alunos a se tornarem eficientes solucionadores de problemas, os professores devem aceitar que as habilidades dos alunos em resolver problemas frequentemente se desenvolvem lentamente, exigindo assim, uma atenção assistida, em longo prazo, para tornar a resolução de problemas uma parte integrante do programa de matemática. Além disso, os professores devem desenvolver uma cultura de resolução de problemas em sala de aula para fazer da resolução de problemas uma parte regular e consistente de sua prática de sala de aula.
> (CAI e LESTER apud SOUSA, 2020, p.39).

Quando se trabalha a metodologia de resolução de problemas, que foi abordada aqui baseada nos trabalhos de George Pólya, se faz necessária algumas mudanças frente a forma como se aprende matemática, talvez a mais importante dessas mudanças seja a que diz respeito a postura do professor e a dos estudantes.

O aluno precisa se livrar das amarras da aprendizagem passiva e enxergar as novas possibilidades de construir e/ou reconstruir seu próprio conhecimento, ao mesmo tempo, o professor precisa deixar de ser apenas um porta voz do conhecimento para uma plateia de expectadores para se tornar um elo entre o aluno e suas potencialidades: mediando, incentivando e semeando questionamentos necessários a formação dos estudantes.

4.3. Abordagem da Metodologia de Resolução de Problemas em Sala de Aula

Quando falamos em utilizar a metodologia de resolução de problemas em sala de aula nos deparamos com alguns desafios, dentre eles podemos listar: a escolha do método a ser utilizado, a seleção dos problemas adequados a maturidade dos estudantes, qual material didático utilizaremos em sala de aula, quais recursos utilizaremos em sala de aula para atingir os objetivos de aprendizagem dentre outros desafios.

Focaremos nessa subseção na resolução de problemas de teoria dos números retirados de dois recursos distintos e voltados a área de teoria dos números que abordamos no capítulo anterior. Essa ênfase se justifica porque apesar da baixa abordagem de conteúdos ligados a teoria dos números no ensino fundamental e a ausência deles no ensino médio essa área do conhecimento está sempre presente em olimpíadas de matemática é muito rica em problemas práticos que podem ser muito úteis tanto para a abordagem da metodologia de resolução de problemas.

O primeiro recurso utilizado são as provas antigas e o banco de questões da OBMEP, principalmente aqueles problemas que se relacionam com os tópicos introdutórios de teoria dos números, previstos na BNCC, ou que são um aprofundamento e/ou aplicação desses conceitos.

Já o segundo recurso utilizado será os Clubes de Matemática da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas que é uma plataforma aberta a alunos e professores que disponibiliza problemas interessantes de matemática em diferentes níveis em um ambiente interativo. Os Clubes podem ser interessantes tanto para utilizar todos os seus recursos com os alunos tanto para focar nas salas de problemas por exemplo.

4.3.1 O Uso de Problemas Olímpicos de Teoria dos Números via Clubes de Matemática da OBMEP

Vamos ver alguns exemplos de problemas presentes nos Clubes de Matemática da OBMEP da área de aritmética e teoria dos números. Esses problemas foram retirados das salas de problemas e podem ser consultados por qualquer estudante ou professor interessado.

A ideia é que o professor possa utilizar alguns dos problemas interessantes do clube para ambientar os alunos na resolução de problemas e estimular sua preparação para olimpíadas.

Para isso apresentamos dois exemplos de problemas e suas soluções ponderando como seria a abordagem de resolução de problemas utilizando o método Pólya. Esses problemas são interessantes para se trabalhar aritmética e teoria dos números e podem ser utilizados em sala de aula com objetivo de apresentar como são os problemas olímpicos para os alunos e apresenta-los aos Clubes de Matemática da OBMEP.

Problema 1: (Os Filhos do Senhor T) A idade de cada um dos filhos do Sr. Triângulo é um número inteiro. A soma desses inteiros é 12 e o produto é 30. Qual a idade de cada um dos filhos do Sr. Triângulo?

Resolução:

1. **Compreensão do Problema**
   (a) Qual a Incógnita?
      - Idade dos Filhos do Sr. Triângulo (que são divisores de 30 a serem estabelecidos).

(b) Dados Importantes:

- Os números que representam as idades são divisores de 30.
- A soma e o produto das idades deve ser, respectivamente, igual a 12 e 30.
- A soma e produto precisam ser obedecidas ao simultaneamente.

2. **Elaboração de um Plano de Resolução**

(a) Primeiras Indagações:

- Já resolveu algum problema semelhante?
- Vislumbra alguma abordagem que permita enfrentar o problema?
- Qual conceito matemático está sendo abordado nesse problema?

(b) Perguntas Pertinentes feitas pelo Professor:

- O professor pode estimular os alunos a refletir se é mais viável listar os números inteiros cuja soma é igual a 12 ou se é melhor listar os divisores de 30 para tentar encontrar aqueles que satisfação as duas propriedades simultaneamente.
- Dada a lista da situação mais viável, testar um por um é uma boa abordagem?
- O método de resolução está adequado as informações e aos conteúdos abordados?

3. **Execução do Plano**

- Primeiramente, percebendo que a idade de cada filho é um divisor de 30, podemos chamar de d uma dessas idades. Assim temos que:

$$d = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 \text{ ou } 30.$$

- Dentre os valores de d escolhemos 3 que satisfazem a soma 12 e o produto igual a 30. Lembrando que esses valores de d não precisam ser necessariamente distintos pois há a possibilidade de haver gêmeos.
- Cabe agora analisar os possíveis valores assumidos por d.
- d precisa ser menor ou igual a 10, pois caso contrário a soma das idades seria superior a 12.
- Quando $d = 10$, as outras idades precisam sem ambas iguais a 1 para que a soma seja igual a 12, porem nessa situação o produto é igual a 10 e, portanto, não satisfaz corretamente.

- Quando $d = 6$, vemos que as outras idades podem ser 5 e 1 anos ou 3 e 3 anos, mas a única combinação que satisfaz a soma e a multiplicação é quando a primeira opção que nos fornece as idades dos filhos do senhor Triângulo como sendo 6, 5 e 1 anos respectivamente.
- Buscando outras possíveis soluções vemos que quando $d = 5$ a soma das idades dos outros dois filhos é igual a 7 e pela lista dos divisores de 30 temos apenas os números 5 e 2 que satisfazem a soma, mas nesse caso a multiplicação não é atendida.
- Já se $d = 3$ o produto dos três divisores será no máximo 27 e nesse caso não há solução.

4. **Retrospecto**

    - Agora o professor pode auxiliar os alunos a avaliar sua solução e explicar por que sua estratégia deu certo.
    - Deve ser questionado também se não havia outros caminhos para resolução do problema e se essa solução é mais eficaz.
    - Podemos também incentivar o aluno na construção de problemas que usam resultado semelhante, mas que não sejam uma cópia do problema trabalhado.

Problema 2: (Primos Trigêmeos) Prove que $(3,5,7)$ é a única terna de primos naturais trigêmeos.

– Lembramos que três primos consecutivos são chamados primos trigêmeos se o módulo da diferença entre dois primos consecutivos da terna é 2.

Resolução:

1. **Compreensão do Problema**

    (a) Qual a Incógnita?

    - A existência ou não de mais ternas de primos trigêmeos.

(b) Dados Importantes:

- A definição de números primos trigêmeos.
- Perceber que dados três inteiros consecutivos quaisquer um e apenas um é múltiplo de 3 e o número 3 é primo.
- Formas úteis de se escrever um número natural qualquer.
- A percepção de que dois primos trigêmeos possuem módulo da diferença igual a 2.

2. **Elaboração de um Plano de Resolução**

(a) Primeiras Indagações:

- Já resolveu algum problema semelhante?
- Vislumbra alguma abordagem que permita enfrentar o problema?
- Qual conceito matemático está sendo abordado nesse problema?

(b) Perguntas Pertinentes feitas pelo Professor:

- O professor pode questionar os alunos sobre a estrutura do conjunto dos números primos de uma forma geral para estimular o aluno a perceber que apenas números primos impares estão na terna.
- A segunda e quarta informação importante é fundamental para resolver o problema, o professor pode orientar o aluno a utilizar a terna presente no enunciado do problema para reescrever os números e tentar perceber uma estrutura mais geral.
- Perguntar ao aluno se ele já trabalhou com problemas que envolvia números primos especiais e como ele construiu a estratégia de resolução, isso pode ser útil para que o aluno estabeleça algumas hipóteses que costumam funcionar.

3. **Execução do Plano**

- Primeiramente, vamos usar que o fato de que qualquer número natural a poder ser escrito de apenas umas das formas: $a = 3k$, $a = 3k+1$ ou $a = 3k+2$, onde k pertence aos naturais.
- Usando o fato de que o módulo da diferença entre dois primos trigêmeos consecutivos quaisquer é igual a 2, vamos perceber que a terna $(a, a+2, a+4)$ mas isso não garante que esses números são sempre primos.
- Usando as três formas possíveis de reescrever a temos:

I. Se $a = 3k$, então a é múltiplo de 3, mas $a+2$ e $a+4$ não são pois $3k+2 \equiv 2 \mod 3$ e $3k+4 = (3k+3)+1 \equiv 1 \mod$.

II. Se $a = 3k+1$, então $a+2$ é múltiplo de 3, mas a e $a+4$ não são pois $3k+1 \equiv 1 \mod$ e $(3k+1)+4 = 3k+5 \equiv 2 \mod$.

III. Se $a = 3k+2$, então $a+4$ é múltiplo de 3, mas a e $a+2$ não são pois $3k+2 \equiv 2 \mod$ e $(3k+2)+2 = 3k+4 \equiv 1 \mod$.

- Vemos, portanto, que a terna na terna $(a, a+2, a+4)$, para todo natural a, existe apenas um múltiplo de 3.
- Por outro lado, primos trigêmeos são da forma $p, p+2, p+4$; e com todos são primos e um deles é múltiplo de 3 vemos que só existe um múltiplo de 3 que é primo que é o próprio número 3.
- Como 3 é o menor número primo impar temos obrigatoriamente p=3. O que nos fornece a solução $(3,5,7)$ como sendo a única possível. Provando assim o que queríamos.

4. **Retrospecto**

- Agora o professor pode auxiliar os alunos a avaliar sua solução e explicar por que sua estratégia deu certo.
- Deve ser questionado também se não havia outros caminhos para resolução do problema e se essa solução é mais eficaz.

Ao apresentar esses dois exemplos retirados dos Clubes de Matemática da OBMEP apresentando como eles podem ser explorados via metodologia de resolução de problemas em sala de aula nos propomos a fazer questionamentos que são muito ricos quando bem direcionados aos estudante.

No entanto, o verdadeiro impacto da educação se dá quando direcionamos esses questionamentos a prática. Por isso faz-se necessário construir um produto educacional que consiga fazer com que o professor tenha a oportunidade de fazer uma intervenção prática no chão da escola.

5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A abordagem educacional contemporânea tem se destacado pela busca de estratégias pedagógicas que promovam a aprendizagem significativa e engajadora dos alunos. Nesse contexto, a construção e implementação de sequências didáticas se tornaram ferramentas fundamentais para proporcionar uma educação mais dinâmica e contextualizada. Ao elaborar sequências didáticas, os educadores se comprometem não apenas em transmitir conteúdos, mas também em instigar a curiosidade, a reflexão e a participação ativa dos alunos no processo de aprendizado.

A sequência didática, como uma abordagem metodológica, visa a conduzir os estudantes por uma jornada de descobertas, explorando de maneira estruturada um conjunto de conhecimentos e habilidades específicas. Por meio da organização sequencial de atividades, problemas e interações, essa abordagem permite a construção gradativa do conhecimento, culminando em uma compreensão mais profunda e conectada dos conteúdos abordados.

Além disso, as sequências didáticas proporcionam uma maneira eficaz de contextualizar o aprendizado, tornando-o mais relevante para a vida dos alunos e facilitando a transferência de conceitos para situações práticas.

No âmbito da educação matemática, a utilização de sequências didáticas assume um papel crucial na exploração de conceitos complexos, como é o caso da Teoria dos Números. Através de uma sequência cuidadosamente planejada, é possível guiar os alunos em uma jornada pela fascinante área dos números inteiros, primos, divisibilidade e outras propriedades, permitindo-lhes não apenas entender esses conceitos abstratos, mas também aplicá-los de forma concreta em situações desafiadoras. A combinação da metodologia de resolução de problemas com sequências didáticas oferece uma abordagem poderosa para estimular o pensamento crítico, a criatividade e a colaboração, habilidades essenciais para o sucesso dos alunos no mundo atual.

5.1. Estruturação da Sequência Didática

Apresentaremos a seguir a proposta de uma sequência didática para o ensino tópicos elementares de teoria dos números, destinada à turmas tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio e subdividida em quatro aulas. Essa sequência didática é apresentada, prioritariamente, ao professor de matemática da educação básica que poderá usá-la como um modelo possível de aplicação em sala de aula.

Para construi-la vamos tanto nos apoiar tanto no que abordamos em capítulos anteriores, como a metodologia de resolução de problemas de Polya, a BNCC, os PCN´s, e a legislação educacional vigente, como também em estudos realizados por alguns teóricos como Zabala (2007) e Dolz et al. (2004).

O conceito propriamente dito sequência didática, de acordo com Zabala (2007, p. 18), pode ser como sendo “[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, com um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”. Assim vemos que esta atividade precisa ser trabalhada sempre de forma que os objetivos a sejam efetivamente alcançados.

Pensando em como estruturar a criação de uma sequência didática Dolz et al. (2004) criou um modelo que a divide em três etapas e que pode ser descrito da seguinte forma:

Apresentação da situação

$\Downarrow$

Produção Inicial

$\Downarrow$

Módulos

$\Downarrow$

Produção Final

Na primeira etapa há uma apresentação do objeto de estudo, dos problemas motivadores e de situações-problemas que podem ser interpretados de forma prática por meio dos temas abordados. Nessa primeira etapa podemos contemplar tanto a apresentação da situação quanto a produção inicial. Pois esse momento serve tanto para dar ênfase a importância do que está sendo abordado quanto para realizar uma avaliação diagnóstica para direcionar as atividades seguintes.

A segunda etapa pode ser dividida em módulos e serve exatamente para organizar como será as intervenções realizadas após a avaliação diagnóstica. Enquanto isso, a terceira etapa é o produção final que serve exatamente para permitir que o aluno possa colocar em prática as noções aprendidas e testar as habilidades desenvolvidas nos módulos por meio de uma avaliação somativa.

Na primeira etapa há uma apresentação do objeto de estudo, dos problemas motivadores e de situações-problemas que podem ser interpretados de forma prática por meio dos temas abordados. Nessa primeira etapa podemos contemplar tanto a apresentação da situação quanto a produção inicial. Pois esse momento serve tanto para dar ênfase a importância do que está sendo abordado quanto para realizar uma avaliação diagnóstica para direcionar as atividades seguintes.

A segunda etapa pode ser dividida em módulos e serve exatamente para organizar como será as intervenções realizadas após a avaliação diagnóstica. Enquanto isso, a terceira etapa é o produção final que serve exatamente para permitir que o aluno possa colocar em prática as noções aprendidas e testar as habilidades desenvolvidas nos módulos por meio de uma avaliação somativa.

Apresentaremos a seguir a nossa proposta de sequência didática dividida em quatro aulas, realizadas preferencialmente a cada 8 dias, onde a etapa 1 será desenvolvida na aula 1, a etapa 2 dois nas aulas 2 e 3 e a etapa 3 será desenvolvida na aula 4. É claro que o professor interessado em utilizar a proposta de sequência didática poderá fazer suas próprias alterações para adequar a proposta a sua realidade escolar.

Um ponto a ser destacado é que a primeira aulas da sequência foram montadas pensando na utilização de problemas oriundos da OBMEP ou construidos no mesmo formato e que apresentem boa contextualização e aplicação prática. Essa abordagem é muito útil para promover uma familiaridade do discente com o raciocínio lógico-matemático.

Nas aulas seguintes é possível dar uma ênfase maior as generalizações e demonstrações, mas é importante retomar sempre que for necessário aos problemas iniciais.

5.1.1 Aula 01: Alguns Problemas Interessantes

Objetivos

- Introduzir os alunos a problemas intrigantes e envolventes de Teoria dos Números.
- Estimular o pensamento criativo, a análise lógica e a resolução de problemas.
- Realizar uma avaliação diagnóstica dos estudantes.

Roteiro

Esta Primeira aula pode ser dividida da seguinte forma:

I. Em um primeiro momento o professor pode conversar com seus alunos sobre desafios matemáticos e estratégias de resolução desses problemas.

II. Posteriormente o professor pode dividir a sala de aula em grupos de no máximo 5 alunos e entregar a cada grupo 3 problemas diferentes que podem ser resolvidos sem a utilização de fórmulas e deixá-los discutir sobre as estratégias de resolução.

III. Durante o processo de resolução dos problemas o professor deve circular entre os grupos fazendo alguns questionamentos para realizar a avaliação diagnóstica e estimular o interesse dos estudantes.

IV. Uma vez transcorrido o tempo estimado para as resoluções o ideal é que cada grupo apresente o problema mais interessante que foi resolvido pela sua equipe explicando o passo a passo da estratégia de resolução.

V. Depois da socialização das resoluções o professor pode introduzir os conceitos que os alunos utilizaram na resolução dos problemas de forma indireta e direcionar pesquisas/ videoaulas sobre o assunto no portal da OBMEP, no POTI ou nos Clubes de Matemática da OBMEP.

Descrição das questões

As questões precisam necessáriamente ser do tipo que não utilizam aplicações diretas de fórmulas e sim a capacidade lógico-mátemática dos estudantes de resolver problemas.

É importante também que o grau de dificuldade não seja muito alto para que nesse primeiro contato as situações problemas não acabem desestimulando o estudante por não conseguir responder.

Temos dois exemplos de problemas que podem der utilizados:

1. **(Plantando Flores)** Um jardineiro está plantando flores em seu jardim. Ele tem 80 sementes de uma flor e 120 sementes de outra flor. Ele deseja plantá-las em fileiras com a maior quantidade possível de sementes em cada fileira. Quantas sementes ele pode plantar em cada fileira?

2. (**Terrenos Quadrados**) Um fazendeiro possui um terreno retangular de 105 metros de comprimento e 84 metros de largura. Ele deseja dividir o terreno em quadrados de mesma área. Qual é o maior tamanho de quadrados que ele pode criar?

3. (**Reencontro de Amigos**) Dois irmãos Diego Marques e Carlos Gustavo, residentes em Carneiros no interior de Alagoas, saem para trabalhar em Maceió e por conta das diferentes funções acabam tendo jornadas de trabalho diferentes. Diego retorna a carneiros a cada 15 dias, já Carlos só consegue retornar a cada 24 dias. Sabendo que os dois sairão justos de Carneiros no dia 01/01/2023 descubra quando eles irão estar juntos novamente em sua cidade natal.

Como podemos ver os exemplos apresentam uma formulação semelhante a problemas disponíveis nos Clubes de Matemática da OBMEP. A similaridade se dá exatamente para que o professor possa explorar essa ferramenta, selecionar alguns desafios interessantes e possa direcionar os alunos a conhecerem também.

5.1.2 Aula 02: Familiarizar com Primos

Objetivos

- Desenvolver uma compreensão profunda dos números primos, explorar suas propriedades e resolver problemas desafiadores relacionados a números primos, adequados para competições de matemática.
- Familiarizar os alunos com as propriedades básicas dos números primos, como o fato de terem exatamente dois divisores distintos: 1 e eles mesmos.
- Despertar o interesse dos alunos pela teoria dos números, mostrando como os números primos desempenham um papel fundamental nessa área da matemática.

Roteiro

A segunda aula pode ser dividida da seguinte forma:

I. No primeiro contato o professor pode retomar os tópicos de divisibilidade e estimular os alunos a perceberem que alguns números apresentam apenas dois divisores positivos.

II. Em sequência o docente pode apresentar o Crivo de Eratóstenes aos discentes como uma primeira ferramenta que pode ser utilizada para encontrar números primos mas sem explicar porquê ele funciona.

III. Para complementar o professor pode apresentar o Teorema fundamental da aritmética e trabalhar alguns problemas de fatoração de números inteiros. Podendo levar exemplos mais desafiadores e contextualizados.

IV. A ultima atividade com o estudantes pode ser trabalhar o porquê o Crivo de Erastóstenes funciona utilizando divisibilidade e o Teorema fundamental da aritmética.

V. Ao Finalizar a aula o professor pode sempre direcionar as ações visando a aula seguinte. Nesse caso específico incentivar os alunos a entender algumas demonstrações dos resultados apresentados e o motivo pelo qual as demonstrações são necessárias ao ensinar matemática.

Descrição das questões

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50

Tabela 5.1 Crivo de Eratóstenes

Temos quatro exemplos de problemas que podem der utilizados:

1. **(Segurança Digital)** Em criptografia, a segurança de muitos sistemas modernos se baseia na dificuldade de fatorar números grandes em seus primos constituintes. Suponha que um sistema de criptografia use o número 143 como parte de sua chave. Determine se 143 é um número primo. Se não for, fatorize-o em seus primos constituintes.

2. (**Números Primos em Família**) Em uma família, o pai tem 41 anos e a mãe tem 37 anos. Se a soma das idades dos pais é um número primo, qual é a idade de um dos filhos para que a soma das idades de todos na família seja um número primo também?

3. (**Primos Especiais**) Encontre todos os primos naturais que são, ao mesmo tempo, uma soma e uma diferença de dois primos.

4. (**Partilha de Chocolates**) Você tem uma barra de chocolate comum que consiste em um retângulo dividido em quadrados pequenos. Se a barra de chocolate tem 35 quadrados, qual é o maior tamanho possível que você pode cortar a barra de chocolate de modo que cada pedaço tenha um número primo de quadrados?

5.1.3 Aula 03: Porquê os resultados funcionam?

Objetivos

- Desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos abordados através da exploração e análise detalhada de provas e demonstrações.
- Aprimorar o raciocínio lógico e analítico dos alunos ao guiá-los na construção de argumentos coerentes e na identificação de conexões entre diferentes etapas de uma demonstração.
- Estimular o pensamento criativo ao desafiar os alunos a encontrar abordagens alternativas para resolver problemas e a pensar fora dos padrões convencionais.

Roteiro

Esta aula pode ser dividida da seguinte forma:

I. Primeiro poderá ser realizada uma discussão sobre as pesquisas realizadas pelos alunos sobre demonstrações matemáticas e porquê esses resultados não funcionam.

II. Num segundo momento o professor pode apresentar a demonstração dos principais resultados apresentados nas aulas anteriores. É extremamente importante que o docente tenha muito cuidado em adaptar a forma como apresenta as demonstrações ao nível do aluno.

III. Depois de apresentada algumas demonstrações é interessante incentivar os alunos a tentarem provar alguns resultados e explorarem um pouco mais da sua capacidade interpretativa e raciocínio lógico - matemático.

IV. Finalizar a aula falando da atividade que será realizada na próxima aula e direcionar por onde os alunos devem estudar em casa.

Descrição das questões

As demonstrações dos resultados apresentados em sala de aula podem ser um apanhado dos teoremas apresentados no capítulo 1 e complementados por alguns problemas interessantes da OBMEP.

5.1.4 Aula 04: Trilha de Desafios

Objetivos

- Desenvolver habilidades de abstração e generalização ao aplicar técnicas aprendidas em novos contextos.

- Estimular a persistência e a resiliência na resolução de problemas desafiadores, cultivando uma atitude positiva em relação a desafios matemáticos.

- Aprimorar a habilidade de comunicação matemática ao explicar soluções e estratégias de forma clara e concisa.

- Melhorar a capacidade de formular conjecturas e justificar suas validades por meio de argumentos sólidos.

Roteiro

Nessa última aula da sequência didática é interessante realizar uma competição entre os discentes com problemas olímpicos de diferentes graus de dificuldade. Esse momento serve exatamente para introduzi-los de fato em uma competição que simule o tempo e a abordagem de questões olímpicas.

I. Ao iniciar a prova o docente pode apresentar rapidamente as regras para responder as questões olímpicas da trilha de desafios e como será calculada a pontuação. Nesse caso podemos adotar a mesma ideia de correção da segunda fase da OBMEP.

II. O próximo passo é a aplicação da prova que pode durar até 2,5 horas. Nesse dia é importante que o professor consiga, em acordo com a coordenação da escola, no mínimo 4 aulas seguidas.

III. Ao finalizar a aplicação da trilha de desafios o professor pode falar mais sobre como resolver questões olimpicas de matemática pode ser uma experiência desafiadora. Falar a eles sobre suas evoluções durante as aulas e estimular a continuação desses estudos.

Descrição das questões

Aqui temos sete questões com estrutura olímpica que podem ser utilizadas na trilha de desafios que foram selecionadas do banco de questões da OBMEP. Selecionamos elas por apresentar uma abordagem mais contextualizada e poderem ser respondidas por alunos com pouco ou nenhum contato a resolução de problemas olímpicos.

1. **(Banco de Questões da OBMEP - 2019 : Divisibilidade por 7)** Uma maneira de verificar se um número é divisível por 7 é subtrair, do número formado pelos algarismos restantes após a retirada do algarismo das unidades, o dobro do algarismo das unidades, verificando se este número é divisível por 7.

   Por exemplo, 336 é divisível por 7, pois $33-2\cdot 6=21$ é divisível por 7, mas 418 não é pois, $41-2\cdot 8=25$ deixa resto 4 na divisão por 7.

   a. Utilize este método para verificar se 4.578 é divisível por 7.

   b. Se A e B são algarismos, quantos são os números de três algarismos do tipo AB5 que são divisíveis por 7?

2. **(Banco de Questões da OBMEP - 2016 : Fazendo o Máximo Divisor Comum com Idades)** Paulinho estava estudando o Máximo Divisor Comum (mdc) na escola e decidiu praticar em casa. Ele chamou de a,b e c as idades de três pessoas que moram com ele. Em seguida, fez algumas operações com os fatores primos deles e obteve os máximos divisores comuns dos 3 pares de números. Alguns dias depois, ele esqueceu as idades a,b e c, mas encontrou os seguintes resultados anotados:

$$\begin{aligned} a\cdot b\cdot c &= 2^4\cdot 3^2\cdot 5^3,\\ mdc(a,b) &= 15,\\ mdc(a,c) &= 5,\\ mdc(b,c) &= 20 \end{aligned}$$

   Ajude Paulinho a determinar os valores de a,b e c.

3. **(Banco de Questões da OBMEP - 2015 : Descobrindo os Números Curiosos)** Sejam a e b dois dígitos diferentes de zero não necessariamente diferentes. O número de dois dígitos $\bar{ab}$ é chamado de curioso, se ele for um divisor do número $\bar{ba}$, que é formado pela troca da ordem dos dígitos de $\bar{ab}$. Ache todos os números curiosos.

   Observação: O traço sobre os números serve para distinguir o produto $a \cdot b$ do número de dois dígitos $\bar{ab}$.

4. **(Banco de Questões da OBMEP - 2013 : Número Ímpar de Divisores)** O número natural preferido por Vladas possui uma quantidade ímpar de divisores. Mostre que esse número é um quadrado perfeito.

   Observação: Note que se o número d é um divisor do número n, então $\frac{n}{d}$ também é divisor de n. Por exemplo, 6 é divisor de 24. Logo, $\frac{24}{6}$ = 4, que também é divisor de 24.

5. **(Banco de Questões da OBMEP - 2014: Par ou Ímpar Maluco)** Artur e Dinah vão disputar o jogo do par ou ímpar maluco. Dinah escolhe "par"e Artur escolhe "ímpar". Em seguida, cada um escreve um número inteiro positivo em uma folha de papel sem que o outro a veja. Emílio recolhe as duas folhas, multiplica os números e declara Dinah vencedora se o resultado for par e Artur vencedor se for ímpar.

   a. Como deve fazer Dinah para que ela sempre ganhe o jogo?

   Emílio sugere uma modificação na disputa. Primeiramente ele pede que Artur e Dinah escrevam apenas números que não sejam divisíveis por três. Ele recolhe as folhas, multiplica os dois números, divide o resultado por três e declara Dinah vencedora se o resto da divisão for igual a 1 e Artur vencedor se esse resto for igual a 2.

   b. Mostre que Dinah não pode mais ter uma estratégia vencedora.

6. **(Banco de Questões da OBMEP - 2008 : Adivinhe o Número)** Um número quando dividido por 3, tem resto 1; por 4 tem resto 2; por 5 tem resto 3; por 6, tem resto 4.

   Qual o menor número inteiro positivo que satisfaz tais propriedades?

7. **(Banco de Questões da OBMEP - 2017 : Equação com o mdc)** Quantos são os pares ordenados (a,b), com a e b inteiros positivos, tais que

$$a+b+mdc(a,b) = 33?$$

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante desse trabalho realizado e das leituras necessárias para construção dessa dissertação foi possível, a priori, perceber que ensinar e aprender matemática é um exercício desafiador e que exige de nós, professores e alunos, a capacidade de entender as diversas formas como a matemática se apresenta na atualidade e como ela se desenvolveu através dos séculos.

Foi possível ver ao escrever cada capítulo o quanto a matemática ensinada nas escolas é fruto das demandas sociais (o que aprender, porquê aprender, como aprender, quais competências devo desenvolver) e que a Base Nacional Comum Curricular e os demais documentos oficiais que tratam da educação nada mais são do que a personificação dessas demandas, mas que também são neles que se estabelecem novas demandas e se reflete sobre seus impactos na realidade escolar.

Mas a realidade educacional na maioria das vezes está muito distante daquilo que é vislumbrado nos documentos oficiais, nos programas educacionais e até mesmo das projeções de desempenho escolar. Essa situação se agrava, principalmente, quando se olha a realidade do ensino de matemática em escolas da educação básica buscando entender porquê os alunos não se sentem motivados a aprender matemática e qual postura os professores devem tomar diante de tal situação.

Somos apresentados, a priori, a uma realidade que nos contempla com a existência de vários aspectos que influenciam nesse resultado negativo. todos extremamente relevantes, porem talvez o que mais chama a atenção seja que um desses aspectos está diretamente associado a forma com a matemática é ensinada aos alunos.

O que geralmente ocorre é que o estudante desempenha o papel de receptor e não de autor do conhecimento e esse tipo de abordagem não estimula a capacidade criativa e crítica dos discentes e acaba pondo a matemática numa zona de pouca relevância prática para os estudantes.

Assim se faz necessário que nós, docentes da educação básica, percebamos que os estudantes precisam tomar para si o desafio de aprender e que o papel do professor é exatamente o de fazer com quê ele aprenda a fazer as perguntas certas.

Por esse motivo, trabalhamos nesse trabalho buscando entender, simultaneamente, onde o conhecimento matemático ensinado em sala de aula encontra respaldo legal e teórico, se existe uma metodologia que permite por o aluno como personagem principal do processo de ensino e como algumas ferramentas podem potencializar nosso trabalho com a matemática além de propor uma intervenção prática.

Para buscamos compreender como a combinação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com a metodologia de resolução de problemas, focada nos tópicos olímpicos de teoria dos números podem ser utilizadas para melhorar a forma como ensinamos matemática na atualidade.

Vemos assim que quando focamos em uma subárea da matemática podemos entender melhor como ela deve ser abordada em sala de aula, quais ferramentas utilizar para possibilitar o desenvolvimento integral do aluno e fazer uma análise mais detalhada do processo educativo como um todo para assim conseguir construir uma abordagem em sala de aula que de fato surta efeitos práticos, seja ela por meio de uma sequência didática, da construção de eletivas ou de projetos.

As olímpiadas podem e devem ser utilizadas em sala de aula para estimular os estudantes a ver a matemática de forma divertida e desafiadora. A articulação entre a BNCC, a metodologia de resolução de problemas de George Pólya e os tópicos olímpicos de teoria dos números podem ser bastante férteis quando pensamos em como ensinar matemática, visto que ao mesmo tempo em que ajuda os alunos a ampliar sua compreensão daquilo que está sendo estudado ainda permite que professores e alunos trabalhem ativamente e troquem experiências.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Bra01] BRASIL. Ministério da Educação. Plano Nacional de Educação (PNE). Lei Federal n.º 10.172, de 9/01/2001. Brasília. 2001.

[Bra18] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 600 páginas, 2018.

[Bra88] BRASIL. Constituição da República Federativa do Brasil de 1988. Brasília. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 04 de outubro de 2022.

[Bra98] BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental - Matemática. Brasilia. *MEC/SEF*, 152 páginas, 1998. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pcn/matematica.pdf . Acesso em: 01 de novembro de 2022.

[Ine21] INEP. Sistema Nacional de Avaliação Básica -SAEB. *MEC*. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb . Acesso em: 01 de outubro de 2022.

[MTMS18] Carlos Gustavo Moreira, Eduardo Tengan, Fábio Martinez & Nicolau Saldanha . Teoria dos Números – Um Passeio com Primos e outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro. *IMPA*, 500 páginas, 2018.

[MMS21] Carlos Gustavo Moreira, Fábio Martinez & Nicolau Saldanha . Tópicos de Teoria dos Números (Coleção PROFMAT). *IMPA*, 229 páginas, 2021.

[OM13] Lourdes de La Rosa Onuchic & Rosilda dos Santos Morais. Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores Matemática. *REVISTA PUCSP*, 21 páginas, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/download/16951/pdf/0 . Acesso em: 09 de janeiro de 2023.

[Onu99] Lourdes de La Rosa Onuchic. Ensino – Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas. São Paulo. *EDITORA UNESP*, 315 páginas, 1999.

[Per00] Philippe Perrenound. 10 novas competências para ensinar: convite à viagem. Porto Alegre. *ARTES MÉDICAS.*, 180 paginas, 2000.

[Pol06] George Polya. A Arte de Resolver Ploblemas. *EDITORA INTERCIÊNCIA*, 180 páginas, 2006.

[San20] José Plinio de Oliveira Santos. Introdução à Teoria dos Números. *IMPA*, 128 páginas, 2020.

[Sou20] Levi Rodrigo Pinto de Sousa. Sequência Didática e OBMEP: Uma Proposta para o Ensino de Áreas e Perímetros de Polígonos por Meio da Resolução de Problemas. Dissertação de Mestrado (PROFMAT) – Universidade Federal Rural do Semi – Árido. Mossoró/RN. 134 páginas. 2020. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5799&id2=171052826 . Acesso em: 13 de junho de 2023.

[Zab07] Antoni Zabala. A Prática Educativa: Como Ensinar. Porto Alegre. *ARTMED*, 221 páginas, 2007.