



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA - UFRB  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM A  
UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE  
MATRIZES

TAÍSE DA SILVA REIS

Cruz das Almas - Bahia

MAIO DE 2023

UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM A  
UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE  
MATRIZES

TAÍSE DA SILVA REIS

Dissertação de Mestrado apresentada  
à Comissão Acadêmica Institucional do  
PROFMAT-UFRB como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientadora:** Profa. Dra. Rogelma Maria da  
Silva Ferreira

**Cruz das Almas - Bahia**

Maio de 2023

## FICHA CATALOGRÁFICA

R375p

Reis, Taise da Silva.

Uma proposta de sequência didática com a utilização da história da matemática no ensino de matrizes / Taise da Silva Reis. - Cruz das Almas, BA, 2023.

60f.; il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT.

Orientadora: Prof. Dra. Rogelma Maria da Silva Ferreira.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – História. 3. Matrizes (matemática) – Análise. I. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II. Título.

CDD: 510.9

# UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATRIZES

TAISE DA SILVA REIS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRB como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em dia mês e ano.

## Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente  
 **ROGELMA MARIA DA SILVA FERREIRA**  
Data: 24/08/2023 21:08:29-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Profa. Dra. Rogelma Maria da Silva Ferreira (Orientadora)

UFRB

Documento assinado digitalmente  
 **ANDRESSA LIMA DE SOUZA**  
Data: 24/08/2023 15:26:51-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Profa. Dra. Andrêssa Lima de Souza da Cruz

UFRB

Documento assinado digitalmente  
 **GIVANILDO DONIZETI DE MELO**  
Data: 08/08/2023 21:23:51-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Givanildo Donizeti de Melo

UFRB

*À minha família*

# Agradecimentos

Primeiramente, gratidão ao meu Deus. Não estaria nesta etapa da vida, se o Senhor Deus não estivesse ao meu lado. Ele sempre me sustenta, me direciona. Obrigada Deus!

Gratidão aos meus pais e irmão Neuza, Mirivaldo (In Memoriam) e Rubens, por ter proporcionado a mim todas as condições necessárias para que eu chegasse até aqui, por sempre me apoiar e sempre estar ao meu lado. Aos amigos que me acompanharam nessa etapa da vida.

Agradeço a toda a minha turma de mestrado PROFMAT/UFRB, em especial Zezi, Paulo, Sidney e Ricardo, que com a união seguimos todo o curso, com reuniões online, contribuindo uns com outros em cada atividade, dificuldades, momentos e fases do curso para que todos pudessem chegar até aqui. Desejo sucesso a todos e tenho orgulho de ter enfrentado esse desafio com pessoas tão competentes e bons profissionais. As aulas foram mais leves por causa da parceria de todos.

Agradeço de coração a todos os gestores, professores, funcionários e alunos do Colégio Estadual Normal de Serrinha, onde estive trabalhando por quase todo o tempo em que cursei este mestrado, por me inspirarem e me incentivarem a sempre me tornar uma profissional melhor, e por entender todas as minhas faltas nas quintas-feiras de AC.

Gratidão a minha orientadora, professora Dra. Rogelma Maria da Silva Ferreira, que sempre paciente me ajudou em todos os passos e momentos desde a escrita até o momento da defesa desta dissertação. Suas orientações são contribuições significativas não apenas para esta pesquisa, mas para a vida profissional. A professora Dra. Andrêssa de Souza Lima que recepcionou-me no primeiro dia do curso, obrigada pelo carinho, pelo incentivo e que junto com a minha orientadora, tornaram-se exemplos e inspirações para minha docência. Agradeço a UFRB, ao PROFMAT e aos professores que colaboraram para a minha formação.

Por fim, agradeço a todos que participaram diretamente ou indiretamente deste trabalho, muito obrigada!

*“A Matemática é a honra do espírito humano.” Gottfried Leibniz.*

# Resumo

Ao longo dos anos, várias abordagens didáticas são discutidas e inseridas no contexto escolar com o objetivo de melhorar e facilitar o ensino-aprendizagem de matemática. Devido as dificuldades encontradas para a introdução da história da matemática nas sala de aula, este trabalho tem por objetivo mostrar como o processo de ensino da Matemática, especificamente, o ensino de matrizes, pode ser facilitado com a utilização da história da matemática por meio de jogos matemáticos elaborados com base na BNCC. A motivação para a elaboração deste trabalho, consistiu no estudo de dois livros didáticos do Ensino Médio da rede pública, com o intuito de verificar a abordagem da história das matrizes nas referidas obras. Através de uma abordagem histórica do surgimento de matrizes e nos referenciais teóricos assim estudados, neste trabalho tem-se como proposta uma sequência didática, na intenção de utilização desta por professores nas suas salas de aula. Nesta sequência didática, apresentam-se três jogos matemáticos com o envolvimento do conteúdo relacionado às matrizes. Portanto, buscou-se demonstrar, a importância do jogo para o ensino-aprendizagem dos alunos, possibilitando, assim, uma aprendizagem significativa aos educandos.

**Palavras-chave:** Matrizes. História da matemática. Jogos Matemáticos. Sequência didática.

# Abstract

Over the years, several didactic approaches have been discussed and inserted in the school context, with the aim of improving and facilitating the teaching and learning of mathematics. Due to the difficulties encountered in introducing the history of mathematics into the classroom, this work aims to show how the process of teaching mathematics, specifically the teaching of matrices, can be facilitated with the use of the history of mathematics through mathematical games based on the BNCC. The motivation for the elaboration of this work, consisted in the study of two didactic books of the High School of the public net, with the intention of verifying the approach of the history of the matrices in the referred works. Through a historical approach to the emergence of matrices and the theoretical references thus studied, this work proposes a didactic sequence, with the aim of using it by teachers in their classrooms. In this didactic Sequence, three mathematical games are presented involving content related to matrices. Therefore, this work sought to demonstrate the importance of the game for the teaching-learning of students, thus enabling meaningful learning for students.

**Keywords:** Matrices. History of Mathematics. Math Games. Didactic Sequence.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Aspectos Históricos do Surgimento de Matrizes</b>	<b>4</b>
2.0.1	Um pouco sobre Cauchy, Cayley e Sylveste . . . . .	10
2.0.2	O método chinês e os nove capítulos da arte matemática . . . . .	14
2.0.3	O quadrado mágico . . . . .	18
<b>3</b>	<b>A BNCC e o Ensino de Matrizes</b>	<b>21</b>
3.0.1	Competências e habilidades para o ensino de matrizes segundo a BNCC . . . . .	21
3.0.2	A História da matemática em livros didáticos . . . . .	26
<b>4</b>	<b>A Abordagem de Matrizes no Livro Didático</b>	<b>30</b>
4.0.1	Livro 1: Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas. . .	31
4.0.2	Livro 2: Conexões: Matemática e suas tecnologias/Matrizes e geo- metria analítica. . . . .	34
<b>5</b>	<b>Proposta de aplicação dos jogos no ensino de matrizes</b>	<b>39</b>
5.1	A utilização de uma sequência didática . . . . .	41
5.1.1	Proposta para o ensino de matrizes . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Conclusões e Considerações Finais</b>	<b>55</b>
	<b>Referências</b>	<b>60</b>

# Capítulo 1

## Introdução

As dificuldades de aprendizagem da matemática representa um desafio significativo para muitos alunos, visto que, a matemática é uma disciplina que exige raciocínio lógico, habilidades de resolução de problemas e compreensão de conceitos abstratos. Todavia, faz-se importante o reconhecimento de que as dificuldades de aprendizagem da matemática não são um reflexo da inteligência de um aluno, ou seja, cada aluno possui habilidades e estilos de aprendizagem diferentes, e a matemática pode ser abordada de várias maneiras para se adequar às necessidades individuais. O suporte adequado, como instrução diferenciada, estratégias de ensino adaptativas e o incentivo ao uso de recursos, tais como, jogos, pode ajudar a superar essas dificuldades e promover a compreensão e o domínio da matemática.

De acordo com Baumgartel (2016), acredita-se que o motivo para que os estudantes tenham dificuldades seja o histórico de altos índices de reprovação associados à disciplina e, ainda, uma questão cultural, pois, pode-se notar que os alunos já apresentam uma aversão a disciplina mesmo que ainda não tenham passado por situações que revelem alguma grande dificuldade (BAUMGARTEL, 2016).

Uma forma de contornar esta dificuldade está relacionada com o uso da história da matemática como uma das tendências metodológicas de ensino e aprendizagem. Segundo Gulin e Rosário (2014), ao apresentar a matemática como uma criação humana e mostrar as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, o professor cria condições para que os alunos desenvolvam o pensamento crítico (GULIN; ROSARIO, 2014). Ao abordar problemas da história da matemática, o professor oportuniza aos alunos conhecerem a ciência como campo do conhecimento que se encontra em construção.

Por outro lado, a potencialidade dos jogos como recurso didático é enfatizada pelo envolvimento do aluno de forma ativa no processo de aprendizagem, através do desenvolvimento de autoconfiança e protagonismo, o que normalmente não ocorre em aulas

tradicionais, na qual prioriza-se a transmissão do conteúdo. Mesmo o mais simples dos jogos, como por exemplo, os jogos de memória, desenvolvem habilidades e competências que favorecem o processo de aprendizagem.

Neste contexto, este trabalho pauta-se em uma proposta de sequência didática no ensino de matrizes com o uso de jogos, em alinhamento com as competências da BNCC (Base Nacional Curricular Comum).

A seguir, uma descrição de cada capítulo do trabalho.

- O Capítulo 2 apresenta uma abordagem sobre os aspectos históricos do surgimento do conceito de matrizes, com os matemáticos Cauchy, Cayley e Sylveste, pouco conhecidos por alunos de ensino médio.
- O Capítulo 3 trata da BNCC e o ensino de matrizes, com as competências e habilidades para o ensino de matrizes.
- O Capítulo 4 apresenta um estudo sobre o assunto de matrizes no livro didático, com a utilização de dois livros.
- O Capítulo 5, ponto central deste trabalho, trata uma proposta de sequência didática com o uso de jogos e da história da matemática, no ensino de matrizes.
- No capítulo 6 estão as considerações finais e perspectivas deste trabalho.

## Capítulo 2

# Aspectos Históricos do Surgimento de Matrizes

Desde o seu surgimento e durante a sua evolução, a matriz tem um papel fundamental para resolver problemas associados as equações lineares, sendo um instrumento matemático proficiente em diversas áreas do conhecimento, tais como, física, biologia, dentre outras. O surgimento da matriz não tem uma data específica. Historicamente, as primeiras aparições da utilização das matrizes decorreu da resolução de problemas matemáticos envolvendo sistemas lineares e determinantes. Os sistemas lineares passaram por várias transformações ao longo do tempo com os conceitos e definições aperfeiçoados e melhorados, dando origem aos determinantes e sem demora, as matrizes.

Não se sabe quem foi a primeira pessoa a trabalhar com os sistemas lineares, mas sabe-se que o seu uso pela humanidade já existia há mais de 2000 anos da necessidade de resolver problemas práticos do cotidiano. De acordo com Paques e Pedro (2022), esse fato pode ser encontrado na obra de Lui Hui, publicado em 200 a.C. na China, o livro intitulado por “K’ui-Ch’ang Suan-Shu” ou “Nove Capítulos sobre a Arte Matemática”, com a abordagem de problemas de resolução de equações lineares e exercícios de matrizes (PAQUES; PEDRO, 2022). Nesta obra os chineses apresentam os primeiros registros de um quadrado mágico, que segundo Lima (2018) , motivaram a relacionar esse diagrama em forma de quadrado, à resolução de sistemas lineares simultâneas (LIMA; PEREIRA; CHAQUIAM, 2018).

Foi no antigo oriente que apareceram os primeiros indícios do surgimento dos sistemas de equação lineares que deram origem inicialmente ao estudo dos determinantes e depois ao estudo de matrizes, iniciando no século II a.C. Em 1812, foi utilizada por Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) a palavra “determinante” pela primeira vez. Neste momento os determinantes apareciam na geometria. Nesta época a ideia de determinante era de um sistema linear e não determinante de uma matriz. As evidências mais antigas

é a representação dos sistemas lineares em barras de bambu presentes na Figura 1, sobre os quadrados de um tabuleiro que constam na referida obra e as inscrições em tabletas babilônicas feitas de argila datadas de cerca de 300 a.C., como mostra a Figura 2.



Figura 1: Sistemas lineares em barras de bambu.  
Fonte: (PAQUES; PEDRO, 2022).



Figura 2: Tabletas babilônicas feitas de argila.  
Fonte: (PAQUES; PEDRO, 2022).

Segundo Connor e Robertson (1996), um exemplar destas tabletas babilônicas, com a exposição de um problema com duas equações e duas incógnitas, está preservado e diz que:

Há dois campos cuja área total é de 1800 jardas quadradas. Um produz grãos na razão de dois terços de saca por jarda quadrada enquanto o outro produz grãos na razão de meia saca por jarda quadrada. Se o total produzido é mil e cem sacas, qual é o tamanho de cada campo? (CONNOR e ROBERTSON, 1996, p.1.)

De acordo com Prezotti Filho (2014), a forma de representação por varas de bambu em quadrados e esquemas de diagramas, levou os chineses a utilizarem a resolução de sistemas lineares com os coeficientes sendo representados por essas varas e o método de eliminação. Desta forma, descobriram o método de resolução por eliminação, hoje conhecido como método de eliminação de Gauss, o qual consiste em anular os coeficientes por meio de operações elementares. Os estudos feitos pelos babilônios resultaram como soluções sistemas lineares de duas variáveis, os quais estão marcados nesses tabletas de argila mostrados na Figura 2 (PREZOTTI, 2014).

As matrizes apareceram no século XIX no ano de 1858, através do inglês Arthur Cayley (1863-1895). De acordo com Milies (2013), o conceito de matriz foi introduzido por Cayley, através do seu estudo sobre transformações lineares (MILIES, 2013). Ainda segundo este autor, Cayley não chegou a noção de matriz através dos quatérnios, mas sim através dos determinantes como uma maneira de expressar as equações:

$$\begin{aligned} X_1 &= ax + by \\ Y_1 &= cx + dy \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por outro lado, de acordo com Bernades (2016), o termo matriz não foi introduzido por Cayley, e sim pelo matemático inglês James Joseph Sylvester, em 1850, no artigo “Um livro de memórias sobre a teoria das matrizes” publicado no “Philosophical Magazine”, dedicado a um problema de natureza geométrica (BERNARDES, 2016). Segundo Milies (2013), em 1858 o então amigo de Sylvester, Cayley, publicou seu segundo livro, sobre operações e propriedades das matrizes, a soma e os produtos escalares. Nesse momento, Cayley conseguiu visualizar um novo sistema algébrico. Em seu livro *A memoir on the theory of matrices*, em 1858, Cayley afirma,

Se verá que as matrizes (considerando apenas as da mesma ordem) se comportam como quantidades; elas podem ser somadas, multiplicadas ou compostas: a lei de adição de matrizes é precisamente semelhante aquela da adição de quantidades algébricas: no que diz respeito à sua multiplicação, existe a peculiaridade de que matrizes não são, em geral, comutativas (CAYLEY, 1858, p. 17)

Algumas dessas propriedades apresentadas por Cayley (1858), serão vistas no seguinte trecho do livro supracitado:

O termo matriz pode ser usado em um sentido mais geral, mas no presente livro de memórias considero apenas matrizes quadradas e retangulares, e o termo matriz usado sem qualificação deve ser entendido como significando uma matriz quadrada; neste sentido restrito, um conjunto de quantidades dispostas na forma de um quadrado. e. g. (CAYLEY, 1858, p. 17)

Cayley exemplifica,

$$(a, \quad b, \quad c) \tag{2.2}$$

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

onde segundo ele, as expressões (2.2) e (2.3), são consideradas uma matriz. A noção de tal matriz surge naturalmente de uma notação abreviada para um conjunto de equações lineares, a saber, as equações,

$$\begin{aligned} X &= ax \quad +by \quad +cz \\ Y &= a'x \quad +b'y \quad +c'z \\ Z &= a''x \quad +b''y \quad +c''z \end{aligned} \tag{2.4}$$

o que pode ser representado de forma mais simples por

$$(X, Y, Z) = (a, b, c)(x, y, z) \tag{2.5}$$

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

e a consideração de tal sistema de equações leva à maioria das noções fundamentais da

teoria das matrizes (CAYLEY, 1858).

Antes mesmo de conceituar e compreender a ideia de matrizes, Cayley fazia o produto de matrizes, sem utilizar a álgebra e sim a geometria. Ele começou a trabalhar com os sistemas de coordenadas, os eixos de coordenadas, e ainda, no intuito de que as equações das figuras geométricas fossem mais fáceis de serem manuseadas, Cayley fez mudanças de variáveis em gráficos de parábola, introduzindo novas variáveis, no sistema de coordenadas cartesianas.

Desta maneira Cayley introduziu um novo eixo  $X$  e um novo eixo  $Y$ , reescrevendo a equação em função de  $X'$  e em  $Y'$ , como podemos ver no exemplo mostrado na equação (2.7).

$$\begin{cases} X' = ax + by \\ Y' = cx + dy \end{cases} \quad (2.7)$$

Para Cayley, as matrizes surgiram ligadas à transformação linear do tipo supracitado (equação 2.7). Posteriormente, ele fez uma segunda mudança, reescrevendo em função de  $X''$  e  $Y''$ , usando as letras maiúsculas para diferenciar, como mostra a equação (2.8).

$$\begin{cases} X'' = Ax' + By' \\ Y'' = Cx' + Dy' \end{cases} \quad (2.8)$$

no intuito de relacionar o  $X'$  com  $X''$  e  $Y'$  com  $Y''$ , ele fez uma substituição de variável, chegando ao seguinte resultado,

$$\begin{cases} X'' = A(ax + by) + B(cx + dy) \\ Y'' = C(ax + by) + D(cx + dy) \end{cases} \quad (2.9)$$

aplicando a propriedade distributiva e agrupando, obteve o seguinte resultado,

$$\begin{cases} X'' = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ Y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases} \quad (2.10)$$

Cayley usava sempre os mesmos cálculos para resolver os seus problemas, percebendo que quando dispostas as variáveis em um forma de tabela, seria possível fazer uma multiplicação de linhas em colunas (conhecido hoje como multiplicação de matrizes), com a obtenção deste resultado final em seus cálculos.

Com a utilização da álgebra para manipulação do sistema de equação, Cayley alcançou a regra da multiplicação de matrizes, mesmo sem saber que aquela estrutura era uma matriz. O produto de matrizes surgiu antes mesmo do surgimento das matrizes, e as

matrizes surgiram da necessidade de um método para a resolução desses sistemas lineares. Os chineses já haviam pensado em um método de resolução dos sistemas, todavia, somente depois de Cayley, esse método foi desenvolvido. Ele foi um dos primeiros matemáticos a estudar matrizes, com a ideia de realizar operações nas matrizes como na álgebra. Diante do exposto, faz-se notório o grau de influência de Cayley no estudo das matrizes.

De acordo com Lima, Pereira e Chaquiam (2018), esta importância pode ser observada na definição de multiplicação matricial, na multiplicação por um escalar, na ideia de adição e subtração de matrizes de dimensões iguais, além das noções de matriz identidade e matriz nula. Além disso, de forma intuitiva, pode-se verificar uma caracterização inicial de matrizes, associada ao quadrado mágico (LIMA; PEREIRA; CHAQUIAM, 2018). De acordo com Bernades (2016), apesar dos trabalhos de Sylvester e de Cayley sobre matrizes, as representações matricial popularizou-se somente em 1920 (BERNARDES, 2016).

O matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), atribui o termo determinante no sentido atual. Em 1812, ele provou o teorema da multiplicação de determinantes com a utilização de permutações aperfeiçoando a notação de determinantes. Porém, a notação de duas barras verticais ladeando um quadrado de números para indicar determinante, foi apresentada somente em 1841 por Cayley.

De acordo com Sousa (2017), o primeiro a atribuir o termo matriz foi James Joseph Sylvester (1814-1897) em 1850, e logo depois, o seu amigo Cayley desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da teoria matricial com o aprofundamento dos seus estudos, promovendo significado a palavra matriz, com a definição de matriz como um lugar onde qual algo se gera ou cria. Nesse momento, Sylvester enxergava as matrizes como mero ingrediente dos determinantes, mas Cayley começou a desmistificar esse conceito, com a sua importância detectada, saindo da sombra do determinante e começando a ter vida própria. Ainda segundo o mesmo autor, não se tem certeza se Cayley foi o principal inventor da teoria de matriz, visto que os povos chineses usavam a noção de matrizes para resolver problemas de determinantes (SOUZA; SABINO, 2017).

De acordo com Souza e Sabino (2017), o matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746) também contribuiu para a teoria dos determinantes, com a escrita do livro intitulado por “Um tratado sobre Álgebra”, em 1730 e publicado em 1748, no qual apresenta o “teorema geral” para eliminar incógnitas de sistemas lineares, mostrando para matrizes de ordem 2, 3 e 4, sem a generalização para as matrizes de ordem maiores que 4 (SOUZA; SABINO, 2017). De acordo com Souza e Sabino (2017) e Sá (2004), esse teorema é o que conhecemos hoje por regra de Cramer, que está apresentado no livro “Introdução à Análise de Curvas Algébricas”, de 1750, do matemático suíço Gabriel Cramer (1704 - 1752), na qual ele representa esses resultados de matrizes agora de ordem  $n$ , sem fazer demonstrações (SOUZA; SABINO, 2017; SA, 2004).

### 2.0.1 Um pouco sobre Cauchy, Cayley e Sylveste

Augustin Louis Cauchy foi um engenheiro matemático e físico francês que nasceu em Paris em 21 de agosto de 1789 e morreu na França em 1857. Seus pais eram Luis Francois Cauchy e Marie Madaleine de Sesso. Luis foi inicialmente um funcionário da polícia parisiense do antigo regime e Marie havia nascido em uma família política rica (SVERZUT; OTERO, 2014).



Figura 3: Augustin Louis Cauchy (1789-1857).  
Fonte: (WIKPEDIA, 2022).

Quando pequeno, foi educado pelo seu pai, recebendo a admiração de Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e Pierre-Simon Laplace (1749-1827) que eram amigos da sua família. Laplace interessado em instruir Cauchy em matemática, aconselhou ao seu pai a investir nos seus estudos em línguas. Desta forma, em 1802, Cauchy entrou na *École Centrale du Panthéon* para estudar línguas clássicas, onde ficou por dois anos.

Em 1805, ele entrou para a Escola Politécnica graduando-se em 1807, ingressando na escola de engenharia *École des Ponts et Chaussées* para estudar engenharia civil. Cauchy atuou como engenheiro até 1813. Neste ano ele foi aconselhado por Lagrange e Laplace a abandonar a engenharia e exercer a profissão de professor na Escola Politécnica, e assim o fez.

Nesta época, Cauchy já havia resolvido muitos problemas matemáticos, segundo Eves (2004), sobre a matemática pura e a matemática aplicada (EVES, 2004). Incentivado por Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833), Cauchy escreveu um artigo sobre polígonos e

poliedros e fez alguns estudos sobre determinantes. Ainda segundo Eves (2004), Cauchy escreveu vários livros e 789 longos artigos, que o fez ser muito criticado por sua produção excessiva e por sua redação apressada, ficando assim conhecido pela sua extraordinária produtividade (EVES, 2004). Como Cauchy publicava vários e extensos artigos, alguns excedendo 100 páginas, em 1835 a Academia de Ciências impôs restrições a quantidade de páginas por artigo. Essa restrição está em vigor até os dias atuais.

Segundo Eves (2004), Cauchy fez numerosas contribuições à matemática avançada, como pesquisas das condições da convergência e da divergência de sucessões de séries, teoria das funções reais e complexas, equações diferenciais, probabilidade, determinantes e estatística. Definiu uma integral independente do processo de diferenciação e por fim, desenvolveu a teoria da elasticidade (EVES, 2004). De acordo com a Universidade de Coimbra, a contribuição de Cauchy para a estatística destaca-se principalmente na distribuição de Cauchy, em sua homenagem, que se resume em uma distribuição de probabilidade dada pela função densidade de probabilidade (COIMBRA, 2022).

Na matemática, existem vários teoremas que levam o seu nome, tais como o teorema da integral de Cauchy, teoria das funções complexas, teorema de existência de Cauchy-Kovalevskaya, as equações de Cauchy-Riemann, transformada de Cauchy, a continuidade de Cauchy, teorema existente para a solução de equações diferenciais parciais, desigualdade de Cauchy, entre outros. Grande parte da abordagem do cálculo de Cauchy, encontra-se nos cálculos dos dias atuais, como nos eixos universitários com os conceitos básicos de limite e continuidade (EVES, 2004).

Eves (2004) enfatiza que Cauchy começou em 1812 a contribuir com a teoria dos determinantes, com um extensa memória de 84 páginas, onde pela primeira vez encontrou-se a demonstração do teorema que garante que se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas, ou seja, tem o mesmo número de linhas e colunas, então o determinante do produto de matrizes  $|AB| = |A||B|$ . Em meados de 1840, Cauchy foi o primeiro a introduzir a palavra “característica”, na teoria das matrizes, chamando assim de equação característica das matrizes, a famosa relação  $|A - \lambda I| = 0$ . Pelo fato de escrever muito sobre determinantes, Cauchy foi reconhecido como o matemático que mais contribuiu nesse contexto (EVES, 2004).

Arthur Cayley nasceu na cidade chamada de Richmond, situada em Londres capital da Inglaterra, em 16 de Agosto de 1821. Seu pai foi Henry Cayley e sua mãe Maria Antonia Doughty. Seu pai era primo de um engenheiro da aeronáutica George Cayley e também era descendente da família Yorkshire. Henry Cayley era comerciante, com isso, esperava que Cayley seguisse o mesmo caminho, dando continuidade ao negócio da família. Contudo, Cayley sempre demonstrou o seu gosto e habilidade em cálculo numérico.

Em meados de 1835, Cayley ingressou no King’s College School. Logo depois foi

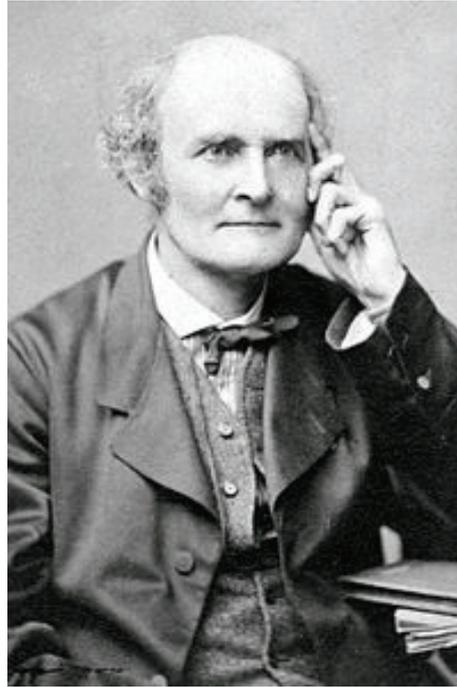


Figura 4: Arthur Cayley (1821-1894).  
Fonte: (WIKPEDIA, 2022).

para Trinity College onde graduou-se em 1842. No ano seguinte, trabalhou com a álgebra, a geometria não-euclideana, criando a geometria analítica no espaço  $n$ -dimensional, usando como elemento essencial os determinantes. Juntamente com Benjamin Peirce e Charles Peirce, Cayley foi o primeiro a estudar as matrizes, definindo a matriz nula e a matriz identidade, introduzindo as suas operações (LIMA; PEREIRA; CHAQUIAM, 2018).

Por outro lado, Cayley exerceu a advocacia por 14 anos, desde de 1849, período em que publicou entre 200 e 300 artigos durante sua prática jurídica, a maioria dessas publicações foi sobre a teoria dos invariantes algébricos. Apesar de gostar e ser muito bom nessa área, ele preferiu dar seguimento na sua vida como matemático. Nesta época, Cayley já era fluente em algumas línguas, tais com,o inglês, francês, grego, alemão e italiano. As suas contribuições para a matemática são diversas, na geometria analítica e de dimensão superiores, na teoria de determinantes, curvas e superfícies, estudo de formas binárias e ternárias, nas funções abelianas, elípticas e nas matrizes (LIMA; PEREIRA; CHAQUIAM, 2018).

Em Abril de 1852, usando a geometria analítica, ele apresentou o seu primeiro trabalho para a Philosophical Transactions of Royal Society of London: “Analytical Researches Connected with Steiner’s Extension of Malfatti’s Problem”, na qual foi recém eleito membro da Royal Society of London. Em 1858, publicou a obra ”Memoir on the Theory of Matrices”, com a introduziu das operações com matrizes. Este trabalho serviu como ferramenta matemática para o surgimento da mecânica quântica.

De acordo com Diniz (2011), Cayley está na terceira posição perdendo para Euler e Cauchy, como o escritor matemático mais conceituado, produtivo em toda a história da ciência (DINIZ, 2011). Ele veio a falecer em 26 de janeiro de 1895, em Cambridge, na Inglaterra.

James Joseph Sylvester foi um matemático britânico, nascido no dia 3 de setembro de 1814 em Londres, na Inglaterra, em uma família judia e conseqüentemente, criado na fé judaica. O seu pai era o comerciante Abraham Joseph. James Joseph Sylvester não tinha Sylvester como o seu sobrenome. Esse sobrenome foi adicionado pouco antes de iniciar seus estudos universitários, pelo motivo de que o seu irmão mais velho, decidiu emigrar para os Estados Unidos, e teria que ter pelo menos três nomes para poder obter residência, um nome próprio, um nome do meio e um sobrenome. A partir daí, o nome Sylvester foi adicionado a Jame Joseph.



Figura 5: James Joseph Sylvester (1814-1897).  
Fonte: (WIKPEDIA, 2022).

Segundo Guida (2022), em 1831 em St John's College, Cambridge, Sylvester começou os seus estudos em matemática. Em 1837, fez o exame de um curso chamado tripos matemáticos<sup>1</sup>, que teve como concorrentes outros dois matemáticos famosos Duncan Gregory e George Green, ficando em segundo lugar. Entretanto, não conseguiu obter o seu diploma, pois para isso seria necessário a inscrição nos "Trinta e Nove Artigos da Igreja da Inglaterra", o que era impossível decorrente da sua religião judaica. Desta forma, em

---

<sup>1</sup>Mathematical Tripos era um exame de matemática pelo qual todos os estudantes tinham que passar independente da formação, antes de se especializarem em um campo de interesse (CRILLY, 2011).

1838 passou a ocupar a cátedra de filosofia natural na Universidade de Londres, onde sua religião era permitida. Em 1841, Sylvester recebeu o seu diploma de bacharelado e um mestrado pelo Trinity College, em Dublin, liberado pela legislação, que dava o direito ao diploma aos católicos romanos e aos judeus (GUIDA, 2022).

De acordo com Bernardes (2016), Sylvester fez um importante trabalho na matemática, principalmente sobre matrizes, um tema no qual havia um grande interesse junto com o seu amigo de trabalho no âmbito da advocacia, Cayley (BERNARDES, 2016). Sylvester contribuiu para a criação da teoria dos divisores elementares das matrizes e utilizou a teoria das matrizes para estudar a geometria de alta dimensão.

Em 1851, junto com Arthur Cayley, Sylvester fez um importante trabalho sobre a teoria das matrizes, desenvolvendo a Álgebra das matrizes. Sylvester também estabeleceu a teoria dos invariantes algébricos e dos determinantes. Ele fez importantes contribuições para a teoria das matrizes, para a teoria dos números, teoria da partição e combinatória (BERNARDES, 2016). Segundo Guida (2022), Sylveste descobriu um critério que determina o número de tipo de soluções para equação de grau 3, usando pela primeira vez o termo “discriminates”, em uma equação quadrática e em equações de ordem superior, com a obtenção de um método de eliminação de uma incógnita entre duas equações, criando assim um vocabulário matemático (GUIDA, 2022).

Sylvester era o segundo presidente da Sociedade de Matemática de Londres. Foi o criador da palavra “totiente”, na qual foi usada por Leonhard Euler para provar o Pequeno Teorema de Fermat, utilizada em teoria dos números, conhecida pela função totiente de Euler. Em 1878, foi fundador do American Journal of Mathematics, com um papel fundamental na matemática nos Estados Unidos, quando professor da Universidade Johns Hopkins. Em 1883 assumiu o cargo de professor Geometria na Universidade de Oxford, onde permaneceu até a sua morte em 15 de março de 1897.

## 2.0.2 O método chinês e os nove capítulos da arte matemática

O método chinês era uma ferramenta matemática utilizada para resolver problemas do dia a dia. Esse método foi apresentado no livro “K’ui-ch’ang Suanshu”, ou “Os nove capítulos da arte matemática” de Liu Hui, um dos maiores matemáticos chineses, considerado o Euclides Chinês. Publicado na China durante o século I da era cristã, e segundo Eves (2004) o mais importante dos livros de matemática chinês (EVES, 2004). A Figura 7 traz uma página do referido livro.

Antes da aparição dessa obra, os povos chineses já tinham um raciocínio matemático avançado no campo da lógica, com discussões com o mesmo teor que os paradoxos de Zenão <sup>1</sup> (séc. V a.C.), e também na área da astronomia com campo de maior

---

<sup>1</sup>Zenão de Eleia (490-430 AEC) é bem conhecido por causa de seus paradoxos, como da corrida de

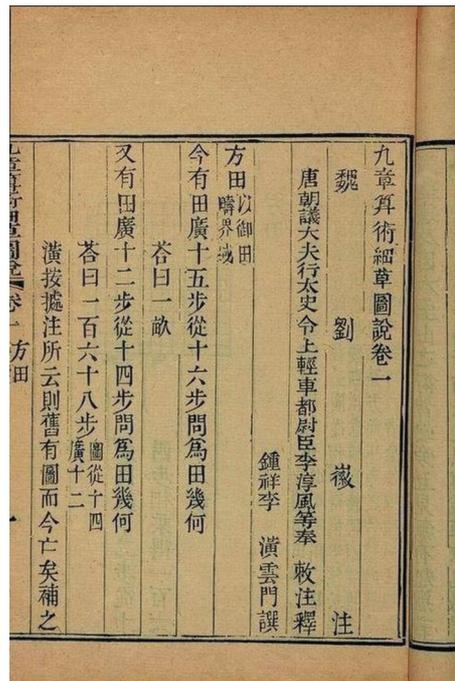


Figura 6: Página do livro K'ui-ch'ang Suanshu.  
Fonte: (WIKIPEDIA, 2022).

interesse, através da descoberta de um teorema: O Teorema de Kou Ku/Gougu. De acordo com Chao Chung Ching,

O imperador Yu domina inundações, aprofunda rios e correntes, observa a forma das montanhas e vales, contempla lugares altos e baixos, alivia as maiores calamidades e salva as pessoas do perigo [...]. Isto é possível pelo Teorema de Gougu (PESSOA, 2019).

O livro Chui Changsuan-shu ou Nove Capítulos sobre a arte da Matemática surgiu no período da Dinastia Zhou, composto por várias gerações de estudiosos do século II e I a.C., sendo seu último estágio do século II d.C. A obra trata de 246 problemas matemáticos relacionados à mensuração de terras, nos negócios, na agricultura, nos impostos, nos cálculos e propriedades do triângulo retângulo. O trabalho apresenta as regras, mas não apresenta as suas demonstrações. De acordo com Eves (2004), este livro é uma síntese do conhecimento matemático chinês antigo, contendo os traços da matemática antiga da China: cálculos orientados, com teoria e prática ligadas numa sequência de problemas aplicados (EVES, 2004).

O povo chinês preferia coisas padronizadas. A partir do surgimento do quadrado Aquiles com a tartaruga. De fato, escreveu um livro com em torno de 40 paradoxos.

mágico, o autor desse livro resolveu o sistema de equações lineares simultâneas efetuando operações sobre colunas e matrizes. De acordo com Sá (2004), no capítulo 8 encontram-se alguns exemplos de problemas com o uso de sistema lineares (SA, 2004). Vejamos um problema contido neste texto: Existem três tipos de milho, dos quais três feixes é do primeiro tipo, dois do segundo e um do terceiro fazem 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro fazem 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidos em um pacote de cada tipo? (SA, 2004)

Ainda de acordo com Sá (2004), para esse problema simples, Liu Hui organizou os coeficientes em três equações lineares colocados em forma de uma tabela como mostrado abaixo:

$$\begin{array}{rcc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array} \quad (2.11)$$

Percebe-se que as equações lineares foram escritas no formato de colunas, como mostrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Nesta obra, o autor pede para que o leitor faça algumas operações com essa matriz. Primeiramente Liu Hui instrui que o leitor multiplique a segunda coluna por 3, depois subtraia a segunda coluna pela multiplicação da terceira coluna por o maior número que for necessário. Assim,

$$\begin{array}{rcc} 1 & 6 - 2.3 & 3 \\ 2 & 9 - 2.2 & 2 \\ 3 & 3 - 2.1 & 1 \\ 26 & 102 - 2.39 & 39 \end{array} \quad (2.13)$$

$$\begin{array}{rcc} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array} \quad (2.14)$$

seguimos com a multiplicação da primeira coluna por 3, e depois subtraindo com a terceira

coluna. Chegando a esse resultado,

$$\begin{array}{r}
 1.3 - 3 \quad 0 \quad 3 \\
 2.3 - 2 \quad 5 \quad 2 \\
 3.3 - 1 \quad 1 \quad 1 \\
 26.3 - 39 \quad 24 \quad 39
 \end{array} \tag{2.15}$$

$$\begin{array}{r}
 0 \quad 0 \quad 3 \\
 4 \quad 5 \quad 2 \\
 8 \quad 1 \quad 1 \\
 39 \quad 24 \quad 39
 \end{array} \tag{2.16}$$

por fim, multiplica-se a primeira coluna por 5 e subtrai 4 vezes a segunda coluna. Com a obtenção do resultado final,

$$\begin{array}{r}
 0 \quad 0 \quad 3 \\
 20 - 4.5 \quad 5 \quad 2 \\
 40 - 4.1 \quad 1 \quad 1 \\
 195 - 4.24 \quad 24 \quad 39
 \end{array} \tag{2.17}$$

$$\begin{array}{r}
 0 \quad 0 \quad 3 \\
 0 \quad 5 \quad 2 \\
 36 \quad 1 \quad 1 \\
 99 \quad 24 \quad 39
 \end{array} \tag{2.18}$$

Portanto, surge a solução para o problema proposto, com as equações  $36z = 99$ ;  $5y + z = 24$  e  $3x + 2y + z = 39$ . Encontra-se o valor do terceiro milho, a incógnita  $z$ , logo depois, utilizando as substituições encontra-se o valor do segundo, a incógnita  $y$  e por fim, do terceiro milho,  $x$ .

Assim, nota-se uma caracterização inicial de matrizes, de forma intuitiva, associada ao diagrama do quadrado mágico. Com isso, soluciona-se o sistema de equações lineares simultâneas por meio do escalonamento. Esse método foi usado por Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), que de acordo com Roque (2012), foi um alemão matemático, astrônomo e físico que contribuiu para a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica, em seu trabalho de órbita do asteroide Pallas entre 1803 e 1809 (ROQUE, 2012).

Os chineses consideraram somente problemas envolvendo o mesmo número de situações descritas e valores desconhecidos a serem calculados. As soluções para esses problemas, baseavam-se em dois métodos: o shinjutsu ou método direto e o kyojutsu ou

método indireto, que segundo Batista (2004), shinjutsu ou método direto significa substituição direta de valores às incógnitas e kyojutsu ou método indireto, significa simplificação de equações (BATISTA; SIMONE, 2004).

### 2.0.3 O quadrado mágico

Melo e Machado (2018) afirma que o gosto por diagramas em formato de quadrados é notório nas obras chinesas. Os antigos chineses, hindús e árabes foram os primeiros a trabalhar com os quadrados mágicos, com o exemplo mais antigo do quadrado mágico, chamado lo-shu, tratando-se de um quadrado mágico de ordem 3 que data de 2850 a.C (MELO; SAMUEL, 2018). Ainda segundo Melo e Machado (2018), há uma lenda que o imperador Yo, em torno de 2200 a.C., foi o primeiro a ver um quadrado mágico desenhado na carapaça de uma tartaruga, que era considerado um animal sagrado, nas margens do rio Lo. A imagem que estava escupida em forma de nós, em um material tipo barbante, posteriormente foi transformada em números, em um diagrama em forma de quadrado, como pode ser observado na Figura número 7.

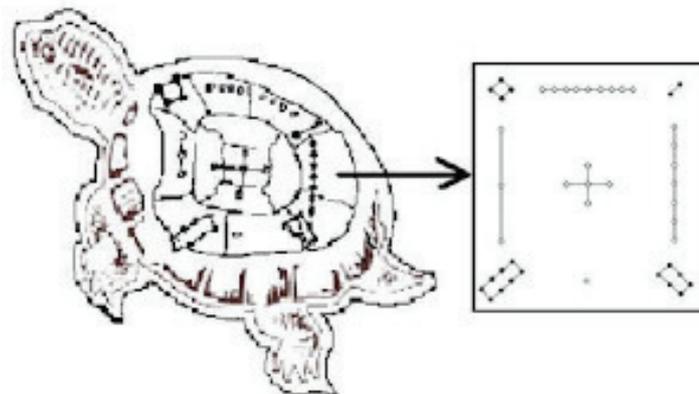


Figura 7: Representação do quadrado mágico na carapaça de uma tartaruga.  
Fonte: (MATEMATICANAAREA, 2009).

Yo percebeu que a soma das linhas, colunas e diagonal somavam quinze em todas as direções, como se fossem algarismos mágicos. Como podemos notar,

$$\begin{array}{ccc} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{array} \quad (2.19)$$

Lopes (2011) pontua que o famoso quadrado Lo-Shu era visto como um importante

símbolo místico, ou seja, era separado pelos números pares, ímpares e o número 5. Os pares representavam o Yin, o princípio feminino; os ímpares o Yang, o princípio masculino; e o número 5 a representação da Terra, cercado pelos elementos água representado por 1 e 6, fogo 2 e 7, madeira 3 e 8 e os metais 4 e 9 (DUARTE, 2011).

Foi encontrado um quadrado mágico de ordem 3, no final do século VIII, em um manuscrito árabe. Já no século XI foi encontrado pintado no assoalho em um dos templos de Khajuraho na Índia, um quadrado de ordem 3. O quadrado de ordem 4, encontra-se em uma das obras do artista alemão Albrecht Dürer (1471-1528), intitulada Melancolia. Foi a primeira aparição desse quadrado no Ocidente, como mostra a Figura 8. Observa-se que o ano em que a gravura foi feita, 1514, aparece no centro da última linha da matriz como 15 e 14.

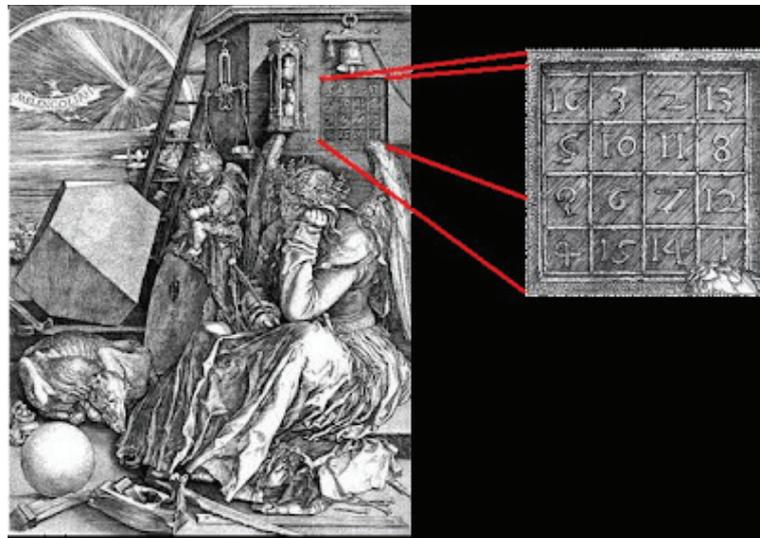


Figura 8: Melancolia

Fonte: (MATEMATICANAAREA, 2009)

De acordo com Melo e Machado (2018), o quadrado mágico é uma fonte motivadora do estudo de matrizes e sistema lineares, na qual fornecem exemplos de matrizes intercalados com os sistemas lineares. No quadrado mágico, pode-se abordar tópicos referentes aos tipos de matrizes e operações. No sistema linear, pode-se trabalhar técnicas de resolução de sistemas, tais como a substituição e o escalonamento (MELO; MACHADO, 2018). O quadrado mágico é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , onde temos o mesmo número de linhas e colunas, organizados de modo que a soma de cada linha, de cada coluna ou de cada uma das duas diagonais, será sempre uma constante. Temos como exemplo, o quadrado mágico mais famoso, o Sudoku, mostrado na Tabela.

De acordo com Santos (2018), o Sudoku foi criado em 1979 por Howard Garns, um arquiteto americano de 74 anos de idade. O jogo foi publicado pela primeira vez no Japão no ano de 1984, ganhando popularidade, passando a ser uma fonte de estudos

5	3	4
6	7	2
1	9	8

Tabela 1: Um típico problema de Sudoku.

para os matemáticos. Santos (2018) ainda pontua que há uma diferença entre o sudoku e o quadrado mágico, pois no sudoku não precisa ser feita operações aritméticas como deve-se fazer no quadrado mágico para se determinar a solução. O sudoku é um jogo de raciocínio lógico e experimentação (SANTOS, 2018).

# Capítulo 3

## A BNCC e o Ensino de Matrizes

### 3.0.1 Competências e habilidades para o ensino de matrizes segundo a BNCC

Com a intenção de utilizar atividades em sala de aula, o professor pode estimular os alunos a desenvolver as competências recomendadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esse documento, elaborado pelo MEC de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BNCC, 2018)”.

Segundo a BNCC, as competências do ensino de matrizes são definidas a partir da mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BNCC, 2018).

A Matemática na BNCC apresenta competências e habilidades associadas com o ato de raciocinar, de representar, comunicar e argumentar matematicamente. Esses conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo. A BNCC destaca dez competências gerais da educação básica proposta para as três etapas da educação. Abaixo, segue as competências que serão desenvolvidas nos alunos através das contribuições deste trabalho (BNCC, 2018):

- Competência 1: Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção da sociedade; Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar

soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

- Competência 4: Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
- Competência 10: Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Em conjunto com competências gerais da Educação Básica, a área de Matemática e suas Tecnologias garante aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas. Assim, fazendo uma ligação com as competências, temos as habilidades que devem ser alcançadas por cada uma delas. O documento da BNCC apresenta cinco habilidades específicas, sendo destacadas aqui àquelas que se adequem à discussão apresentada acerca do ensino de matrizes na sala de aula e o seu uso na história da matemática para os alunos do 2º do ensino médio.

- Competência 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral ( BNCC, 2018, p.532)

De acordo com a BNCC, o desenvolvimento da competência 1 envolvem habilidades que podem ajudar na interpretação e compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceito de diferentes partes da matemática. Além disso, almeja o desenvolvimento por parte dos alunos do letramento matemático e leitura crítica de mundo, na sabedoria ao aplicar conceitos e procedimentos matemáticos apresentados pelo professor na sala de aula. Dentro da competência, almeja-se que os estudantes alcancem algumas habilidades, como a que veremos a seguir,

Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais ( BNCC, 2018, p. 533).

Trata-se de interpretação matemática, perante situações do dia a dia do aluno, e consequentemente, sendo foco de estudos nas salas de aula, com leitura, interpretação e análise de dados, podendo ser transformados em símbolos e equações matriciais.

Um outra competência pertinente para esse trabalho é a Competência 3:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente ( BNCC, 2018, p. 535).

Para a aplicação desta competência, a BNCC propõe um processo de resolução de problemas. Trata-se do desenvolvimento do aluno em busca de uma solução, interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos, conectando as diferentes áreas da matemática com o cotidiano do aluno, levando-o a identificar os conceitos e fórmulas necessários para usar na resolução e na modelagem. Esta competência apresenta algumas habilidades para o ensino de matriz. Entre essas habilidades, será destacada uma a seguir,

Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais ( BNCC. 2018, p. 536).

Nessa habilidade, a BNCC destaca a necessidade de relacionar matriz com as situações do cotidiano do aluno. Como exemplo, temos situações em que possível introduzir o assunto matriz com situações do dia a dia do aluno, colher essas informações, construir tabelas, e a partir daí modelar para a formulação de matrizes, resultando a resolução de problemas e aplicações no cotidiano, dando espaço para a interdisciplinaridade.

Outro competência importante para esse trabalho é a Competencia 5:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas ( BNCC, 2018, p. 540).

Essa competência propõe uma coleção de habilidades direcionadas para que o aluno consiga entender e desenvolver a capacidade de ser um cidadão crítico matematicamente, argumentativo, investigativo, através de observações matemáticas. A partir disso, o aluno pode utilizar a resolução de problemas para alcançar as capacidades e também fazer o uso das tecnologias digitais, superando assim algumas outras dificuldades.

Podemos assim destacar, a habilidade encontrada na Competência 5:

Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. (BNCC, 2018, p. 541).

As competências e habilidades apresentadas para a matemática do 2º do ensino médio, e conseqüentemente, para o ensino de matrizes, possibilita ao aluno o desenvolvimento da construção, pensamento crítico e um conhecimento prévio. Desse modo, há o estímulo de conhecimentos matemáticos indispensáveis para a relação da teoria e prática vivenciada pelos alunos na sala de aula e fora dela.

O livro didático tem um importante papel no processo de ensino/aprendizagem dos alunos e dos professores. Segundo Biehl e Bayer (2009), o livro didático desempenha um papel merecedor de uma análise cuidadosa, visto que auxilia o docente na condução das práticas pedagógicas, sendo uma ferramenta que direciona o ponto de partida do estudo, e em alguns casos passa a ser o único suporte para o professor preparar as suas aulas.

O livro sugere caminhos e sequências lógicas para o ensino, serve como um auxílio para traçar caminhos e montar sequências para uma melhor aprendizagem. O livro didático também é um importante aliado para o desenvolvimento educacional e para o acesso a cultura. Em muitos casos, ele passa a ser o primeiro contato com a educação levando o aluno ao hábito da leitura. As funções mais importantes do livro didático na relação com o aluno, tomando como base Gérard e Roegiers (2008), são:

- favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes;
- propiciar o desenvolvimento de competências cognitivas, que contribuam para aumentar a autonomia;
- consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos;
- auxiliar na auto-avaliação da aprendizagem;
- contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania (PNLD 2008, p.11).

De acordo com PNLD (2008), as funções supracitadas são histórica e socialmente situadas e, assim, sujeitas a limitações e contradições. Portanto, cabe aos professores uma análise das situações propostas com a utilização do livro na sua sala de aula, observando as suas funções para que alcance os objetivos, tendo, que o livro é um recurso auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. Sendo assim não deve ser o único suporte do trabalho pedagógico do professor.

O livro vem passando por inúmeras transformações com o acompanhamento de novas dinâmicas em sala de aula e contribuição para uma aprendizagem significativa. Constitui-se um importante aparato de assistência ao trabalho do professor e referência na formação das crianças e dos adolescentes das instituições públicas e privadas. Bastos (2004), afirma que,

O livro didático deve ser visto como um instrumento auxiliar do processo ensino-aprendizagem e não como fim do processo, se faz necessário que seja um texto que, além de respeitar o desenvolvimento cognitivo do aluno, não apresente conceitos errados e não reduza a matemática a um conjunto de regras e definições sem ligação lógica entre si (BASTOS, 2004).

Barbosa e Farias (2018) evidenciam que o livro não pode ser visto como um papel dominante no processo de ensino e aprendizagem e sim ocupar o papel de auxílio. Segundo esses autores, o livro pode ser um instrumento eficiente nesse processo, com o professor consciente de sua importância, para que o objetivo de se obter uma educação com qualidade seja alcançada (FARIAS; BARBOSA, 2018). De acordo com Miguel e Miorim (2005), a história da matemática nos livros didáticos, deve ser adequadamente composto com fins pedagógicos e inteiramente acertado com as variáveis que influenciam no processo de ensino e aprendizagem. Esse processo interfere positivamente na construção de pontos de referência para a problematização pedagógica da escola, da matemática e da educação

matemática.

Segundo Biehl (2009), o livro é um aparato importante para o âmbito escolar em todos os níveis de ensino. A utilização do livro didático é um tema recorrente nos trabalhos de educação matemática, pois sua discussão e análise contribui positivamente para o seu efeito perante ensino e aprendizagem. A discussão sobre os livros didáticos no Brasil começou com a legislação do livro didático, em 1938 implementada pelo Decreto-Lei 1006, de Franco 1992, sendo o livro visto, nesse momento, como fundamental para educação política e ideológica. Ainda segundo Biehl, a escolha do livro era feita pelos professores por meio de uma lista pré-determinada, fundamentado pela regulamentação do Art. 208, Inciso VII da Constituição Federal do Brasil na qual ficava acordado o dever do Estado com a educação por meios de programas (BIEH; BAYER, 2009).

Biehl também pontua que os meios que regulamentam a legalidade da questão do livro foi instituído no decreto 91 542/85, responsável pela implementação do PNLD ( programa Nacional do Livro Didático). Ele ainda afirma que a Resolução/ CD/FNDE nº 603, de 21 de Fevereiro de 2001, organiza e regula o Plano Nacional sobre o Livro Didático. Desta forma, o MEC (Ministério da Educação e Cultura), criou ações para a avaliação dos livros didáticos (BIEH; BAYER, 2009). Segundo o MEC, as medidas agora adotadas é uma chamada pública para professores participarem da avaliação do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2021 – Ensino Médio. Os professores selecionados formam parte de equipes que serão responsáveis pelas escolhas das obras didáticas adotadas nas instituições (MEC, 2023).

### 3.0.2 A História da matemática em livros didáticos

Nota-se um aumento na inserção da história da matemática nos livros didáticos, podendo variar desde das datas de acontecimentos importantes ou nomes de matemáticos que entraram para a história ao logo do desenvolvimento dos conceitos. A história da matemática nos livros didáticos desempenha um papel de auxiliar ao aluno no desenvolvimento do raciocínio matemático, com o conhecimento de como os conteúdos matemáticos foram desenvolvidos, em que momento e situação isso ocorreu e o por quê de existir certos conhecimentos matemáticos.

Segundo Gasperi (2008), a história da matemática possibilita entender que essa área do conhecimento é uma construção humana, construída ao longo do tempo através da compreensão da origem das ideias que deram forma à cultura, e também analisar as características humanas de seu desenvolvimento, a sua criação e as condições nas quais aconteceu o desenvolvimento da matemática (GASPERI; PACHECO, 2008).

A inserção da história da matemática no ensino pode ser considerada como uma

prática importante para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Nunes (2016), pontua que uma constante abordagem que tem sido realizada nas aulas ou nos livros didáticos de matemática, trata-se do contexto histórico referente a um determinado tema, mesmo que esta seja utilizada apenas para ilustrar os grandes matemáticos envolvidos na construção de alguma teoria matemática ou para mostrar como este conhecimento se desenvolveu ao longo dos séculos (NUNES, 2016).

Segundo Roque e Pintombeira (2013), a matemática se desenvolveu e continua a se desenvolver a partir de problemas. De acordo com os autores, a história da matemática tem o papel de mostrar esses problemas, e os resultados obtidos a partir deles. Além de reproduzir esses conceitos com a intenção de obter o interesse dos alunos, é possível reinventar o ambiente no qual os conceitos foram criados (ROQUE; BOSCO, 2013).

De acordo com Miguel e Miorim (2005, p.10), no Brasil, o movimento acerca da História da Matemática, apareceu nos meados da década de 80 e impulsionou em 1999, em Vitória (ES), após a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), no III Seminário nacional de História da Matemática (MIGUEL; ÂNGELA, 2004). A História da Matemática apareceu em 1998 nos PCN'S (1998) (Parâmetros Curriculares Nacionais), na qual afirmava,

Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno frente ao conhecimento matemático. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se em veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural ( PCN, p. 42) (BRASIL, 1998).

De acordo com Nunes (2016), a inclusão da história da matemática nas salas de aulas é um pouco antiga. Segundo o autor, esse debate no cenário educacional brasileiro passou por mudanças desde do século XIX e XX, com o Movimento da Matemática Moderna (NUNES, 2016). As movimentações entre o ensino de matemática e a história da matemática, é um assunto que tem sido amplamente discutido nos últimos tempos. Os primeiros livros de matemática apresentavam a história de uma maneira superficial, fazendo

o papel apenas de caráter de leitura, ou seja, trazendo a bibliografia dos matemáticos importantes para aquele determinado assunto ou destacando alguns fatos acontecidos considerando interessantes para aquele público. Portanto, a história da matemática era considerada pelos autores de livros como um simples aspecto ilustrador dos fatos matemáticos.

De acordo com Oliveira e Souza (2018), Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCM), destacam a história da matemática como uma possível área do conhecimento a ser abordada em sala de aula. Conseqüentemente, as OCM (2006) orientam que por meio da história da matemática, os professores estarão ajudando os alunos a compreender a matemática de forma contextualizada e mais humanizada, como construção social e cultural” (OLIVEIRA; SOUZA, 2018).

No meio da Educação Matemática, há um crescimento da pesquisas e propostas acerca do tema inserção da História da Matemática nas aulas. Podemos pontuar esse fato no trabalho de Oliveira e Souza (2018), no qual cita três propostas de autores que tem concepções diferentes sobre a utilização da história nas aulas de matemática. A começar por Mendes (2009), que aborda a inclusão da história por meio da perspectiva da investigação histórica. Para esse autor, as atividades devem partir de uma junção do diálogo com as ideias matemáticas desenvolvidas e organizadas historicamente e a perspectiva investigatória que caracteriza a construção do conhecimento. Esse modelo de investigação histórica presume a participação do aluno na sua construção em sala de aula como um aspecto preponderante nesse procedimento didático (MENDES, 2018).

Outra proposta é defendida por Saito e Dias (2013), a partir de uma interface entre história e ensino de matemática. Esses autores consideram produções que promovam um diálogo entre historiadores e educadores da matemática, considerando a construção dessa interface, a união de um conjuntos de ações e produções que promova a reflexão sobre o processo histórico da construção do conhecimento matemático para elaborar atividades didáticas que busquem articular história e ensino de matemática. Essa proposta não tem a intenção de utilizar a história no ensino como algo que pode acumular temas e propósitos, pois a finalidade não é transformar a aula de matemática em aula de história, mas uma construção por parte dos alunos, do conhecimento matemático, possibilitando ao professor propor atividades com a utilização da história em favorecimento da aprendizagem (SAITO; DIAS, 2013).

Os autores destacam também as ideias de Miguel e Brito (1996), que discutem a função do estudo da história da matemática na formação do professor de matemática, lamentando a ausência dessa disciplina. Defendem também a ideia de que a história da matemática não deve se resumir em apenas uma disciplina isolada na formação do

professor da matemática, mas uma ligação entre a matemática e história da matemática e entre o lógico e o histórico (MIGUEL; BRITO, 1996; OLIVEIRA; SOUZA, 2018).

Para se obter um livro didático entre os guias analisados e disponíveis no PNLD, os mesmos devem atender a alguns requisitos, sendo a matemática é um deles. Os PCNs enunciam que a história mostra que a matemática é uma criação humana, e que e assim responder certos “porquês” já mencionados(BIFFI, 2016).

# Capítulo 4

## A Abordagem de Matrizes no Livro Didático

Nesse trabalho foi realizado um estudo das formas de organização do conteúdo de matrizes, determinantes e sistemas lineares em duas coleções dos livros didáticos indicados pelo guia de livros didáticos PNLD 2021. Inicialmente houve uma apresentação acerca das estruturas das obras analisadas. Portanto, para a escolha dos livros didáticos foram analisados alguns critérios que determinantes para a abordagem desse trabalho, a exemplo da presença de matrizes e determinantes em seus conteúdos e materiais que fossem frequentemente utilizados em escola públicas. Os livros escolhidos foram:

- Livro 1: Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas.

Autor: Joamir Roberto de Souza

Edição: 1<sup>a</sup>

Ano de publicação: 2020

Editora: FTD

PNLD: 2021

Nível de Ensino: 2<sup>o</sup> ano do ensino médio da rede pública (JOAMIR, 2020).

Os capítulos do referido livro apresentam as seguintes estruturas de tópicos:

- Texto introdutório (texto contextualizado, com questionário sobre o a leitura proposta ao aluno).
- Definição do assunto.
- Atividade respondida.
- Exercícios.

- ☐ Conexões (bibliografias e sites interessantes a cerca do assunto estudado).
- ☐ Integrando (atividade diversificada, envolvendo outras matérias e assuntos).
- ☐ Você conectado (atividades de construção com gráficos, tabelas e informática).
- ☐ O que estudei (atividade envolvendo os assuntos estudados).
- Livro 2: Conexões: Matemática e suas tecnologias/Matrizes e geometria analítica.  
 Autor: Fábio Martins de Leonardo  
 Edição: 1<sup>a</sup>  
 Ano de publicação: 2020  
 Editora: Moderna  
 PNLD: 2021  
 Nível de Ensino: 2<sup>o</sup> ano do ensino médio da rede pública (MARTINS, 2020).

Os capítulos do referido livro apresentam a seguinte estrutura de tópicos:

- ☐ Introdução do assunto a ser tratado com texto introdutório exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula;
- ☐ Exercícios propostos (permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e softwares de construção de gráfico e de geometria dinâmica);
- ☐ Exercícios complementares (exercício para ser desenvolvido pelo aluno).
- ☐ Questões para autoavaliação (questões e uma tabela para análise de acertos);
- ☐ Compreensão de texto (problemas do cotidiano envolvendo os assuntos estudados);

#### **4.0.1 Livro 1: Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas.**

O livro 1 (JOAMIR, 2020) está subdividido em quatro capítulos. O estudo sobre matriz e sistemas lineares é apresentado no terceiro capítulo. O assunto determinantes, não está sendo abordado nesse livro. O capítulo 3 é iniciado com a abordagem do conceito de grafos e com um pouco da história e da aplicação. Em seguida, segue-se com um questionário a ser respondido e uma situação hipotética, que logo depois é representada e forma de grafos. Faz também uma analogia com a tabela através do seguinte texto: “considere um grupo de pessoas que se comunicam por meio de uma rede social: Ana (A)

é amiga de Beto (B) e Carla (C), que também são amigos entre si; já Davi (D) é amigo apenas de Carla (JOAMIR, 2020)”.

Representação por grafo na Figura 9, e representação de tabela na Figura 10. Na representação de tabela, foi usado o número 1 para indicar quando há relação entre duas pessoas, e o número 0 para indicar quando não há relação:

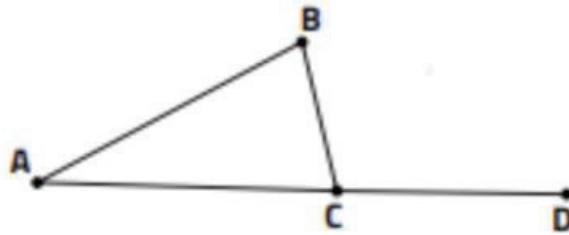


Figura 9: Representação do grafo.  
Fonte: (JOAMIR, 2020).

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	1	0
C	1	1	0	1
D	0	0	1	0

Figura 10: Representação tabela.  
Fonte: (JOAMIR, 2020).

Com a noção de grafo e tabela e como os dados na tabela estão organizados em linhas (fileiras horizontais) e colunas (fileiras verticais), o autor apresenta a ideia de matriz, transformando a tabela em uma matriz 4x4. Como mostrado na Figura 11.

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	1	0
C	1	1	0	1
D	0	0	1	0

 $\rightarrow$ 

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 11: Representação da tabela em forma de matriz.  
Fonte: (JOAMIR, 2020).

A ideia de fazer a ligação entre tabelas e matrizes, mostra-se uma interessante contextualização com a presença do assunto no cotidiano do aluno. No decorrer do capítulo, essa comparação é utilizada pelo autor para introduzir a noção de algumas operações com

matrizes e resolver exercícios propostos, sendo esse um caminho que vem a facilitar a compreensão dos conteúdos por parte dos alunos.

Na sequência, o autor apresenta o conceito geral de uma matriz de ordem  $n \times m$ , mostrando a sua representação matricial. Por conseguinte, é apresentada um breve texto sobre a história da matriz, dando destaque para os primeiros pessoas a utilizarem a ideia de matriz, apresentando também o recorte da imagem de uma página do livro. Os nove capítulos sobre a arte da matemática, como mostrado na Figura 12.

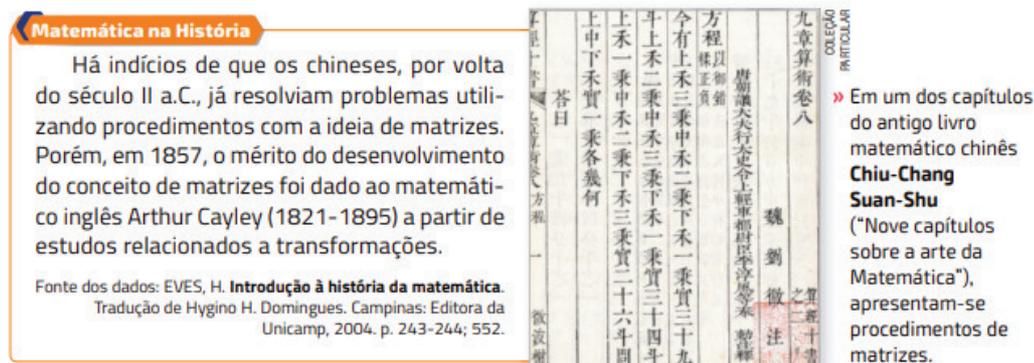


Figura 12: Recorte do livro/História do surgimento da matriz.  
Fonte: (JOAMIR, 2020).

Segundo Paiva (2018), trazer a história desse conteúdo é interessante ao aprendizado dos alunos, pois desperta um interesse sobre o surgimento da matriz, mostrando a evolução dos conceitos e das ideias ao longo do tempo. Leva, também, o aluno a perceber que a ciência está sempre evoluindo e se transformando, principalmente que os saberes da matemática são evoluções decorrentes de processos históricos (BORGES, 2018). Contudo, a história da matemática não aparece no capítulo, o que nos leva a uma breve crítica, dado que foi utilizada somente na introdução do assunto ao longo do capítulo, simplesmente como uma curiosidade, sem um maior aprofundamento epistemológico, o que pode levar a um esquecimento e desinteresse por parte dos alunos.

Após apresentação da Figura 12, o autor expõe alguns exemplos de matrizes com o encerramento do tópico com a definição geral de matriz. No tópico seguinte foi apresentado a igualdade de matrizes com definições exemplos e ainda, algumas atividades contextualizadas já resolvidas.

Apesar de serem feitas boas definições, faltou diferenciar o que é uma matriz nula, uma matriz identidade, matriz diagonal, matriz coluna e matriz linha, dado que são cobrados tais conceitos nas atividades. Um ponto positivo é o fato de algumas atividades serem contextualizadas e envolverem tabelas, levando o aluno a associá-las com matrizes.

Na sequência, o autor expõe as operações com matrizes, mostrando a sua definição a partir de uma contextualização, exercícios resolvidos e exercícios propostos. No entanto o autor não aborda o assunto de determinantes, sendo este um outro ponto negativo, visto

que o estudo está associado com o estudo de matriz. O autor deveria introduzir o assunto do determinante com o uso da história, mostrando o seu surgimento e as suas curiosidades, através dos matemáticos mais importantes da história da matriz, com Cauchy, Sylvester e Cayley.

Ainda neste livro, há uma discussão sobre sistemas lineares, na qual não foi encontrada nenhuma abordagem envolvendo a história. O tópico segue com uma contextualização, apresentando a definição, seguindo com conteúdo, exemplos e atividades propostas. Por outro lado, sabe-se que os sistemas lineares foram importantes para o surgimento da matriz. Através dos chineses, os quais representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro, como visto no Capítulo 2 deste trabalho.

#### **4.0.2 Livro 2: Conexões: Matemática e suas tecnologias/Matrizes e geometria analítica.**

A segunda obra, livro 2, está subdividida em quatro capítulos (MARTINS, 2020). Matrizes e determinantes são apresentados no primeiro capítulo e sistemas lineares no segundo capítulo. No primeiro capítulo foi inserida uma contextualização de um jogo de futebol feminino com tabelas de pontuações e, a partir disso, a definição da matriz, com a sua representação matricial  $m \times n$ . Por conseguinte, segue-se com exemplos matemáticos através da definição de igualdades de matriz e definições de algumas matrizes, como matriz nula e matriz identidade. Até esse momento não se observa a presença da história da matemática nas abordagens.

Logo em seguida, as operações com matrizes aparecem sem nenhuma contextualização. Por outro lado, nesse momento é trabalhado com as tabelas, fazendo ligações com as matrizes. Nesse sentido, segundo Giovanni (2002), as matrizes são tabelas de números reais utilizadas em quase os ramos da ciência e engenharia (GIOVANNI, 2002). No entanto, poderia também ser abordada a história, as curiosidades acerca do surgimento das operações, citando Cayley, pioneiro da multiplicação entre matrizes, na qual fazia o produto das matrizes utilizando sistemas lineares. Referente a essas operações, o autor limita-se em apresentá-las com uma única contextualização de multiplicação entre matrizes, através do problema da poluição do planeta e com os valores, foi elaborada algumas tabelas, como pode-se observar na Figura 13.

A partir da tabela mostrada na Figura 13, foi montado dois sistemas lineares e, conseqüentemente, foram criadas duas tabelas. A partir destas, foi apresentada a operação de multiplicação entre duas matrizes, finalizando com a sua definição. O livro segue com exemplos resolvidos e atividades para serem desenvolvidas pelo aluno. Não foi encontrado,

nesse momento, nenhuma outra contextualização ou a presença da história da matemática.

	Quantidade (em tonelada) de materiais reciclados			
	Papelão	Latas de alumínio	Plástico rígido	Embalagens longa vida
1ª semana	15,5	9,2	8	6,4
2ª semana	12,3	14	5,1	7
3ª semana	13	15,7	10,3	8,5
4ª semana	12,8	10	8,9	5,6

Dados fictícios.

Figura 13: Tabela sobre poluição.  
Fonte: (MARTINS, 2020).

Na finalização do primeiro capítulo, foi abordado o conceito de determinante, o que vem a ser um ponto positivo para a obra. Cabe destacar que esse assunto não aparece no livro 1 (JOAMIR, 2020). De acordo com Valente (2010),

A introdução de Matrizes constituiu exemplo do que poderíamos denominar novos conteúdos acrescidos à matemática escolar do colégio. A presença desse conteúdo parece ter representado uma das principais iniciativas para a escolarização da Álgebra Moderna no ensino elementar. Com a sua introdução, uma nova dimensão didático-pedagógica, e mesmo epistemológica, foi dada ao papel dos determinantes (VALENTE, 2010).

Ao introduzir o assunto de determinantes, o autor enfatiza que o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 pode ser calculado por um método chamado regra de Sarrus. Com isso, ele apresenta uma breve observação sobre o matemático Pierre Frédéric Sarrus, como pode-se ver na Figura 14.

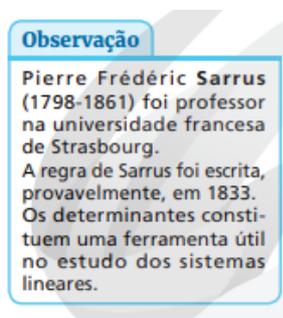


Figura 14: Recorte do livro 2.  
Fonte: (MARTINS, 2020).

O autor apesar de trazer apenas um pouco da história do determinante, apresenta

uma contextualização sobre planilhas eletrônicas envolvendo o excel, mostrando ao aluno como trabalhar com matriz e determinantes utilizando esse software, o que vem a deixar o estudo mais empolgante e prazeroso. Em seguida, são apresentadas as atividades complementares. Ao final do capítulo, nos deparamos com um texto interessante sobre a criptografia: As cifras de Hill, como mostra a Figura 15.

**As cifras de Hill**

A troca de mensagens há muito tempo é utilizada pelos seres humanos. Para maior segurança, foi inventada a criptografia, que consiste em métodos para codificar mensagens, ou seja, torná-las ilegíveis no caso de interceptações.

Um antigo exemplo de criptografia são as Cifras de César, que têm como base o deslocamento do alfabeto em um número  $n$  de posições. No quadro a seguir, a letra A foi codificada como a letra D, a letra B, como E, e assim por diante.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Observe a codificação de uma frase com o uso do quadro.

Texto comum: A RESPOSTA CORRETA É A LETRA D  
 Texto codificado: D UHVS RVWD FRU UHWD H D OHWUD G

Esse método é considerado fácil de ser decifrado, pois, em um texto, a ocorrência de determinadas letras é maior que outras, o que facilita a descoberta das substituições feitas.

O matemático e professor estadunidense Lester Sanders Hill (1890-1961) inventou outro método de cifragem chamado Cifras de Hill. Verifique como podemos usá-lo para codificar a palavra "AURORA".



Figura 15: Recorte do Livro 2 sobre as Cifras de Hill. As cifras de Hill.

Fonte: (MARTINS, 2020).

Segundo Brandão (2017), as cifras são mensagens que utilizam chaves simétricas para serem criptografadas, podem ser enviadas em blocos ou de forma contínua. Ainda segundo esse autor, a criptografia tem como principal objeto ocultar o significado da mensagem, e não literalmente ocultar a mensagem em questão (BRANDÃO, 2017).

Nesse texto, o autor mostra um exemplo de criptografia que são as Cifras de César, de Júlio Cesar (100 a. C. - 44 a. C.), com base no deslocamento do alfabeto em um número  $n$  de posições e logo depois, segue com o matemático e professor estadunidense Lester Sanders Hill (1890-1961), inventor do outro método de cifragem chamado Cifras de Hill. Esse momento tornam-se interessante, pois é apresentado como podem ser utilizadas as Cifras de Hill para codificar a palavra "AURORA", através da exposição do passo-a-passo e com atividades para que o aluno possa resolver utilizando essa criptografia.

Todavia, percebe-se a ausência da história dos matemáticos Júlio César e Hill citados no livro, e além disso, ausência do desenvolvimento destes matemáticos na criptografia e a relevância da sua cifra na matemática.

Nesse mesmo tópico, o livro 2 apresenta a imagem do monumento denominado "The Enigma Code Breakers", em homenagem aos matemáticos poloneses Jerzy Rozycki, Marian Rejewski e Henryk Zygalski, tendo sido os primeiros a quebrarem os códigos da máquina criptográfica alemã Enigma, usada na Segunda Guerra Mundial. Na Figura 16 é possível observar esse monumento.



Figura 16: Recorte do Livro 2 com o monumento The Enigma Code Breakers, Posnânia, Polônia, 2018.

Fonte: (MARTINS, 2020).

Na abordagem de matriz realizada no Livro 2, percebe-se que o autor trabalhou com a história da matemática no assunto de determinantes, contudo de maneira superficial. Existe a ausência de uma abordagem sobre os matemáticos envolvidos com a história dos determinantes, através de sua origem e a sua importância, com uma ligação, sobre o estudo de sistemas de equações lineares que deu origem inicialmente ao estudo dos determinantes e posteriormente, ao das matrizes (SOUZA; SABINO, 2017). Além disso, percebe-se um apagamento da história dos matemáticos poloneses, os primeiros que decifraram o código éigma.

No segundo capítulo do Livro 2, é apresentado os sistemas lineares através de um texto intitulado por: “Fotografia tirada da Estação Espacial Internacional”, transformando os dados obtidos em uma tabela, e logo depois em equação linear. Logo em seguida, há uma exposição do assunto, atividades resolvidas e exercícios propostos. Em todo o tópico, não encontramos a história da matemática e nenhuma outra contextualização.

Depois de expor o conteúdo, o Livro 2 apresenta a atividade acerca da solução de um sistema usando um software de construção de gráficos, na qual mostra ao aluno a possibilidade de trabalhar com os gráficos dos sistemas lineares utilizando software. Depois de apresentar todo o conteúdo e trabalhar com exercícios, o autor finaliza o capítulo com o texto intitulado por: “Montando uma dieta alimentar com sistemas lineares”, transformando os dados em tabela, conseqüentemente em sistemas lineares, e por fim, com uma atividade a ser desenvolvida pelo aluno.

De acordo com a abordagem sobre cada Livro, seguem-se os quadros 1 e 2, em que

são apontadas páginas nas quais foram encontradas a história da matemática nos Livros didáticos analisados neste trabalho.

<b>Página</b>	<b>Matemático</b>
93	Arthur Cayley (1821-1895)
135	Maurits Cornelis Escher ( 1898-1972)
140	Frank Albert

Quadro 1: Relação das páginas do Livro de Joamir Souza (2020).

<b>Página</b>	<b>Matemático</b>
30	Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861)
36	Lester Sanders Hill (1890-1961)
37	Henryk Zygalski, Marian Rejewski e Jerzy Rózycki
61	René Descartes (1596-1650)
146	Maurits Cornelis Escher (1898-1972)

Quadro 2: Relação das páginas do Livro e Fábio Martins de Leonardo (2021).

Nota-se que a presença da história da matemática nos dois livros didáticos analisados faz-se pequena.

A seguir, apresenta-se a Tabela número 3, com uma síntese de informações sobre os livros analisados neste trabalho.

<b>Livros</b>	<b>Livro 1</b>	<b>Livro 2</b>
Ano de publicação	2020	2020
Nível de ensino	2 <sup>o</sup> ano do ensino médio	2 <sup>o</sup> ano do ensino médio
Matriz	X	X
Determinante		X
Sistemas lineares	X	X

Tabela número 3: Síntese dos Livros 1 e 2.

## Capítulo 5

# Proposta de aplicação dos jogos no ensino de matrizes

Diante do cenário educacional atual, com a necessidade de delinear novas práticas pedagógicas para a vida dos alunos, o lúdico surge como uma alternativa para ser utilizado em sala de aula, no intuito de quebrar as barreiras do ensino mecânico e por sua vez, desestimulante. O lúdico consiste em jogos e brincadeiras presente no comportamento do universo infanto-juvenil, no qual pode ser utilizado como práticas pedagógicas na sala de aula. Silva (2012), aponta que a utilização do lúdico na educação é apresentado enquanto ferramenta indispensável na construção da afetividade para assimilação de conteúdos, bem como, propulsor do desejo de aprender (SILVA, 2012).

O processo de ensino e aprendizagem não precisa ser algo monótono e tedioso. Uma das ferramentas que podem ser utilizadas nesse processo são os jogos educacionais, os quais servem como um facilitador de aprendizagem. Segundo Alvares (2004), os jogos educacionais são criados com a dupla finalidade de entreter e possibilitar a aquisição de conhecimento. Esses jogos são elaborados para divertir e potencializar a aprendizagem de conceitos, conteúdos e habilidades embutidas no jogo (ALVARES, 2004). Desde cedo, o lúdico deve ser inserido na vida da crianças, dado o seu papel importante de desenvolver habilidades, configurando um fator de contribuição no âmbito cognitivo e comportamental. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998, p. 46),

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas (BRASIL, 1998, p. 46 (BRASIL, 1998)).

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (1998), os jogos provocam desafios, gerando interesse e prazer, sendo interessante que os mesmos façam parte do ensino e do âmbito escolar dos alunos. Os jogos como um ensino aprendizagem passam a ser um acessório de desenvolvimento do conhecimento, favorecendo uma oportunidade para os alunos empregarem suas habilidades matemáticas de outras formas.

A matemática é uma ciência que está sempre em evolução e o lúdico tem a função de auxiliar no processo de aprendizagem. Faz com que alunos sintam-se capazes de aprender e comecem a se familiarizar com o ensino de uma forma mais lúdica, vivenciando a matemática, associando e entendendo o seu significado, chegando assim a um entendimento de maneira menos árdua e mais prazeroso. De acordo com Freitas e Bittar (2004),

Embora possa ser caracterizado como uma atividade lúdica, o jogo pode também ser utilizado como meio para aprender matemática. O jogo em sala de aula pode ser eficaz para aumentar a concentração e a atividade mental e assim contribuir para o envolvimento das crianças em atividades matemáticas. Além disso, o fato de possuir regras próprias, às quais os participantes devem obedecer, gera ordem, pois a desobediência de qualquer regra “estraga o jogo”. Da mesma forma, no aprendizado da Matemática, a percepção da existência de regras gerais e de propriedades é de fundamental importância (FREITAS; BITTAR, 2004).

Utilizar os jogos como um recurso educacional, requer uma organização prévia, estabelecendo os objetivos da utilização dos jogos como metodologia de ensino, para que este possa servir como um auxílio nesse processo. Os PCNs ressaltam que o professor em sala de aula deve direcionar a aprendizagem e saber conduzir adequadamente os jogos, dado que o uso desta metodologia poderá trazer desafios e dificuldades a ser enfrentada pelo professor.

O lúdico não encerra-se somente no ensino com jogos, mas sim no contexto de seleção de conteúdos, da organização, do incentivo a criatividade. Com isso, discussões sobre o ato de brincar, devem ser feitas. Segundo Rolim (2008), no resultante da influência no desenvolvimento infantil, o brincar tem se tornado uma fonte de pesquisa na psicologia. A brincadeira, tão característico da infância, traz inúmeras vantagens para a construção da criança, proporcionando a capacitação de uma série de experiências que irão contribuir para o seu desenvolvimento (ROLIM; GUERRA; MOTA, 2008). Portanto, deve ser construído uma melhor visão sobre o brincar, tendo a ideia de um conceito histórico, capaz de realizar transformações no decorrer do desenvolvimento das sociedades. De acordo com Vygotsky (1998):

A essência do brincar é a criação de uma nova relação entre o campo do significado e o campo da percepção visual, ou seja, entre situações no pensamento e situações reais”. Essas relações irão permear toda a atividade lúdica da criança. Será também importante indicador do desenvolvimento da mesma, influenciando sua forma de encarar o mundo e suas ações futuras (VYGOTSKY, 1998).

Os jogos e as brincadeiras matemáticas desenvolvem o cognitivo do aluno e o intelectual. Para Vygotsky, eles são importantes fonte de desenvolvimento e aprendizado para as crianças, dada a possibilidade de que os mesmos satisfaçam seus desejos por meio da imaginação e do “faz de conta”. Diante disso, o jogo deve ser visto como um importante instrumento que favorece a aprendizagem matemática do aluno.

De acordo Teixeira (2014), o jogo utilizado como um material didático, cria um ambiente descontraído, promovendo uma aprendizagem significativa através da observação, da criatividade, da articulação com diferentes conhecimentos e da inter-relação com os colegas de sala (TEIXEIRA; APRESENTAÇÃO, 2014). Ainda segundo o autor, utilizar os jogos nas salas de aula, ajuda no desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes com os assuntos interdisciplinares, sejam elas escolares ou não. De acordo com Zaslavky (2009), estimular o aluno ao interesse pela matemática com o auxílio de jogos, favorece para o aprimoramento da matemática, colaborando com a prioridade da disciplina não somente para aspectos formais e abstratos, mas torna o estudo mais prazerosa, e dinâmica (ZASLAVSKY, 2009).

## 5.1 A utilização de uma sequência didática

Nesta seção será abordado os conceitos sobre sequência didática. Nela também, discutiremos como pode ser feita uma sequência didática envolvendo a história da matriz e os jogos didáticos, com os elementos teóricos que a norteiam.

A sequência didática é o termo utilizado para definir o procedimento de organização metodológica, de forma sequencial a execução de atividades utilizando passos ou etapas preestabelecidas, tornando mais satisfatório os resultados desejados no processo de ensino e aprendizagem. Este termo Sequência Didática (SD), surgiu na França em torno de 1996. Segundo Oliveira (2013), houve uma proposta inovadora para implantar um ensino integrado e interconectado, com o objetivo de melhoramento do ensino da língua materna (OLIVEIRA, 2013). A SD foi utilizada pelo governo Francês como uma tentativa de promover um ensino “descompartmentalizado”, visto que os assuntos eram abordados de forma “compartmentalizada”, na qual não se ensinava todos os conteúdos de forma

integrada. No Brasil, a SD começou a aparecer em 1990, com a sua divulgação em 1992, por meio da publicação nos PCNs.

De acordo com Araújo (2013), a SD é um modo do professor organizar as atividades de ensino em função de núcleos temáticos e procedimentais (ARAÚJO, 2013), já para Dolz (2004), a SD é um conjunto de atividades escolares organizadas de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito. Este último, afirma ainda que a SD facilita o acesso aos alunos a práticas de linguagens novas ou dificilmente domináveis (DOLZ; MICHELE; BERNAD, 2004).

Para Zabala (1998), o termo é usado como um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos (ZABALA, 1998). Para este autor, a SD é uma sistematização, um planejamento minucioso associado aos objetivos do ensino.

Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004) apresentam em seu trabalho “Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento”, a estrutura da base de uma SD, a qual segundo os autores, pode ser representada pelo seguinte esquema mostrado na Figura 28.

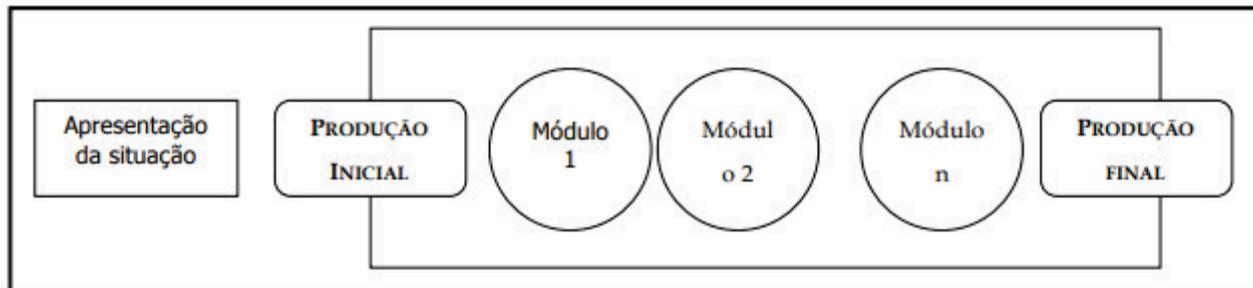


Figura 17: Esquema da SD.  
Fonte: (DOLZ; MICHELE; BERNAD, 2004).

Segundo os autores supracitados, a estrutura de base inicia-se com a apresentação da situação de estudo, na qual encontra-se a tarefa que deve ser realizada pelos alunos. Nesse momento, com a elaboração de um texto oral ou escrito, correspondente a primeira produção, proporciona ao professor uma avaliação diagnóstica através da avaliação das capacidades adquiridas, e assim o ajuste das atividades de acordo com as dificuldades da turma. Esse momento também apresenta para o aluno, o significado de sequência, ou seja, as habilidades que deverão ser desenvolvidas para melhor dominar o gênero de texto em questão (DOLZ; MICHELE; BERNAD, 2004).

Por conseguinte, o trabalho passa para os módulos, que são compostos por atividades e exercícios sistemáticos e gradativos, sendo eles necessários para o domínio dos as-

sunto, levando-os a aprender as suas características. A quantidade dos módulos é definida de acordo com os conhecimentos prévio dos alunos. Finaliza-se com uma produção, que segundo os autores Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), o aluno pode colocar em prática os seus conhecimentos adquiridos e com a ajuda do professor, analisar a sua evolução. A produção final faz uma avaliação somativa, que incidirá sobre os aspectos trabalhados durante a sequência (DOLZ; MICHELE; BERNAD, 2004).

Araújo (2013) afirma que esse esquema não se resume apenas em uma maneira de preparar a aula com o ensino de gêneros, mas em fundamentos metodológicos sobre o processo de ensino aprendizagem. O autor defende que para aplicação desse esquema no ensino dos dias atuais, essas etapas precisaram ser modificadas, ou seja, se o aluno não tem interesse e conhecimento sobre o gênero estudado, então não é viável solicitar a produção diagnóstica (ARAÚJO, 2013).

Em casos em que o aluno não tenha experiência com textos argumentativos escritos, pode ser iniciando por um módulo, que o ajude a ler sobre o gênero, para somente depois, ensiná-lo e auxiliá-lo na escrita argumentativa e no reconhecimento estratégicos. De acordo com Oliveira (2013), o objetivo da SD é a formulação de um conjunto de decisões para que todas as etapas tenham significado e as estratégias sejam mais efetivas, com uma maior importância para as respostas dos alunos e as condições de ensino (OLIVEIRA, 2013).

Oliveira (2013) e Carvalho (2017) destacam que são necessários alguns passos para a elaboração de uma SD, são eles: questionamento sobre a escolha do tema que será trabalhado; análise da situação que será proposta; condições da organização dos estudantes, como material didático e cronogramas; escolha das estratégias que serão utilizadas; planejamento dos conteúdos; objetivos a serem alcançados, critérios de avaliação e etapas de avaliação dos resultados (OLIVEIRA, 2013; CARVALHO, 2017). Oliveira (2013) destaca que,

Sequência didática é um procedimento para a sistematização do processo ensino-aprendizagem, sendo de fundamental importância a efetiva participação dos alunos. Essa participação vai desde o planejamento inicial informando aos alunos o real objetivo da sequência didática no contexto da sala de aula, até o final da sequência para avaliar e informar os resultados (OLIVEIRA, 2013, p.40 (OLIVEIRA, 2013)).

Carvalho (2017) ressalta que a SD e o plano de aula não são os mesmos. Segundo ele, a sequência parece como um plano de aula, porém é mais amplo que este por abordar várias estratégias de ensino e aprendizagem. O plano se restringe a uma aula e a sequência

consiste em planejar uma unidade temática completa (CARVALHO, 2017).

Zabala (1998) defende a ideia de diferentes variáveis que formam as propostas metodológicas. Para ele, a SD não se configura somente pelas atividades, mas também por uma boa articulação. O autor afirma que os diferentes conteúdos apresentados aos estudantes são compreendidos de maneiras diferentes, em tempos diferentes e em situações diferentes. Desse modo, se faz necessário a ajuda do professor e uma visão do profissional sobre o processo do desenvolvimento da aula a ser trabalhado ou uma sequência que merece uma atenção especial e prioritária. Ele também afirma que o professor pode dirigir certas situações, propor, comparar e pode dispor de uma diversidade de estratégias na organização de seus objetivos educacionais.

Zabala (1998) estabelece que existem três tipos diferentes de SD, são elas: conceitual, procedimental ou atitudinal, onde não é possível definir qual é a melhor dentre elas, dado que estão correlacionados com a construção como um todo. Esses conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais estão em acordo com os quatro pilares da educação: aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver juntos e aprender a ser. Jacques Delors (2003) resume o conhecimento sobre os quatro pilares da educação.

Para poder dar resposta ao conjunto das suas missões, a educação deve organizar-se em torno de quatro aprendizagens fundamentais que, ao longo de toda a vida, serão de algum modo para cada indivíduo, os pilares do conhecimento: aprender a conhecer, isto é adquirir os instrumentos da compreensão; aprender a fazer, para poder agir sobre o meio envolvente; aprender a viver juntos, a fim de participar e cooperar com os outros em todas as atividades humanas; finalmente aprender a ser, via essencial que integra as três precedentes. É claro que estas quatro vias do saber constituem apenas uma, dado que existem entre elas múltiplos pontos de contato, de relacionamento e de permuta ( Delors 2003, p.89-90)

As três categorias atitudinais, conceituais e procedimentais são definidas por Faria (2019) como:

- Atitudinais: Os conteúdos atitudinais abarcam diversos conteúdos, que podem ser agrupados em valores, atitudes e normas. Os valores são entendidos como os princípios ou as ideias éticas que permitem as pessoas emitir um juízo sobre as condutas e seu sentido, por exemplo, a solidariedade, a responsabilidade, e a liberdade. Portanto, os conteúdos atitudinais estão relacionados e configurados por componentes cognitivos, afetivos e condutuais (FARIA, 2019).

- **Conceituais:** Os conteúdos conceituais são relativos aos conceitos e princípios. Os conceitos abarcam de forma conjunta os fatos, objetos ou símbolos que têm propriedades afins. É possível exemplificar conceitos por profundidade, réptil e cubismo. Já os princípios dizem respeito às mudanças produzidas em um fato, objeto ou situação em relação a outros fatos, objetos ou situações de modo correlacionado, como uma situação de causa-efeito. Como exemplos de princípios, temos a Lei de Newton e os axiomas matemáticos(...). A aprendizagem dos conteúdos conceituais está relacionada às atividades que promovam a compreensão do conceito para que este possa ser acessado na interpretação ou conhecimento de situações ou para construção de outros argumentos (FARIA, 2019).
- **Procedimentais:** Os conteúdos procedimentais incluem entre outras coisas as regras, as técnicas, os métodos, as destrezas ou habilidades, as estratégias, os procedimentos. Trata-se de várias ações, que mobilizadas conjuntamente e de forma ordenada, se empenham na realização de um determinado objetivo. Exemplos de conteúdos procedimentais são: ler, analisar, calcular, qualificar, traduzir, saltar, inferir, etc(...). Para a aprendizagem dos conteúdos procedimentais é necessário favorecer a realização de ações, promover a autonomia para que os alunos sejam capazes de analisar diversas situações, propor exercícios que explorem suas habilidades, e promover uma interação entre os conteúdos e os alunos, de modo que estes passam a fazer parte de suas vivências (FARIA, 2019).

Diante do exposto, neste trabalho propõe-se um SD com o objetivo de uma aplicação da história da matemática com a utilização de jogos no ensino de matrizes.

### 5.1.1 Proposta para o ensino de matrizes

Após o estudo sobre a trajetória da história da matriz, sua evolução e importância, e ainda sobre os aspectos teóricos-pedagógicos e didáticos, neste trabalho, propõe-se uma SD com a inclusão do conteúdo de história da matemática com respeito as matrizes. Essa SD está de acordo com a ideia de Zabala (1998), na qual ele defende a SD como uma atividade que deve ser articulada pelo professor e compreendida de maneira diferente, em tempos diferentes e em situações diferentes. Serão apresentadas três atividades ao qual o professor poderá estar aplicando em sua sala de aula. Porém, recomenda-se que as atividades devem ser aplicadas uma de cada vez, ou seja, o professor pode escolher dentre as três uma atividade e utilizá-la na sua aula. Mas, logo depois, ele também poderá aplicar as outras duas atividades restantes, a fim de reforçar o conteúdo. Como essas atividades têm o objetivo de reforçar os assuntos já estudados pelo aluno em sala de aula, elas devem ser desenvolvidas logo após o professor ter trabalhado/explicado o conteúdo de matrizes,

e também ter introduzido A história das matrizes nas suas aulas. Cada atividade pode ser desenvolvida em 2 tempos de aula.

### Atividade 1: O jogo da memória da história de matrizes

**Objetivo:** Desenvolver e aperfeiçoar o raciocínio dos alunos, através da relação entre a imagem dos matemáticos que fizeram parte da história das matrizes com a sequência das cartas dispostas, contendo informações sobre estes matemáticos.

**Público alvo:** Estudantes do ensino médio.

**Pré-requisitos:** Conhecimentos básicos sobre a história da matriz, tais como, o surgimento, teóricos que fizeram parte desta história, o que deve ser discutido juntamente com o professor na sala de aula.

#### Desenvolvimento da atividade:

Para a confecção do jogo da memória, foi realizado uma seleção de matemáticos importantes para a história do surgimento e evolução da matriz e do determinante. Em seguida, foi confeccionada 16 pares de cartas com a imagem e o nome do matemático e o seu par contendo informações sobre sua trajetória e/ou sua importância para a história da matriz. Essas cartas foram produzidas pela autora deste trabalho com o uso do site *storyboardthat*, de forma que pode ser impresso. Na figura 29, mostra um modelo de um par de carta.

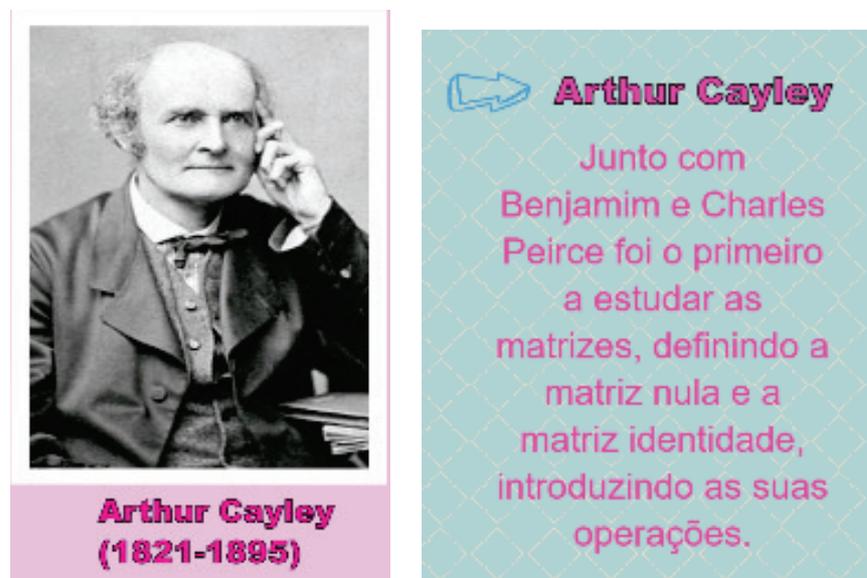


Figura 18: Modelo de um par de cartas de SD.  
Fonte: Autoria própria.

#### O jogo:

Para jogar uma partida do “O jogo da memória da história de matrizes”, deve-se dispor de uma superfície plana na qual serão colocadas as cartas.

## Regas:

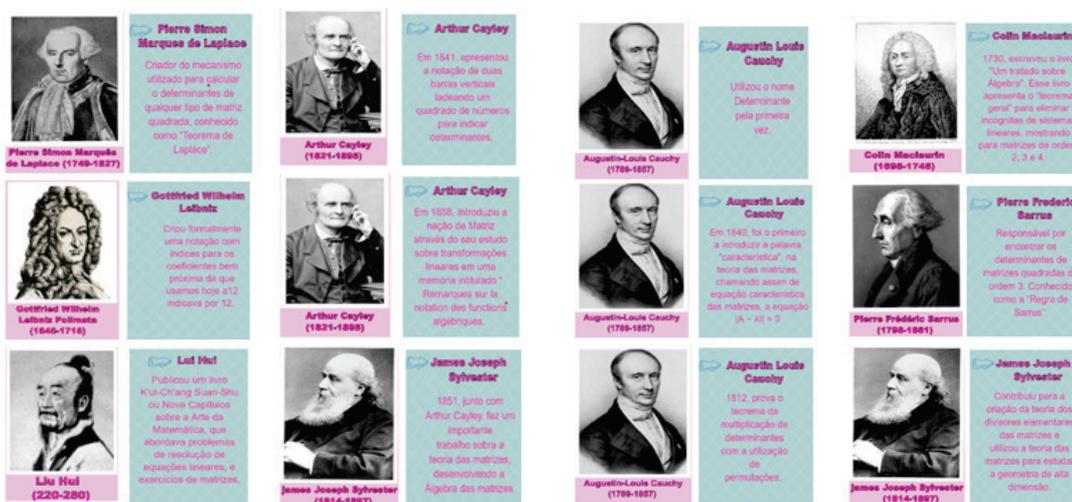
Em cada partida permite-se a participação de 2 ou 3. O objetivo do jogo consiste em quem conseguir realizar a maior quantidade de acertos e acumular mais cartas.

Para iniciar o jogo decide-se quem começa e a ordem de participação. Por conseguinte, as cartas deverão ser colocadas viradas para cima de uma maneira que todos os participantes possam vê-las, sendo arrumadas em 4 colunas e 4 fileiras. Todas as cartas estarão juntas e misturadas em uma única área, e com isso, estipulam-se um tempo, para que os participantes possam vê-las, e logo depois as cartas serão viradas para baixo.

O jogador 1, deve escolher duas cartas e virá-las. Se elas formarem um par, serão removidas do jogo. O par de cartas consiste em uma carta com a imagem de um matemático e na outra, um fato importante sobre este matemático para a história da matriz.

Neste jogo, existem algumas cartas que têm mais de uma combinação que pode ser realizada, como por exemplo o matemático Arthur Cayley, com o qual pode-se fazer 5 combinações. Portanto, o aluno que escolher este matemático, terá 5 possibilidades de acerto. Ao virar a carta, o jogador deverá ler em voz alta para todos os participantes ouvirem as informações contidas no cartão.

Caso o aluno não acerte o par, as cartas serão devolvidas para o jogo e viradas novamente para baixo, com a vez cedida para o próximo e assim aguardar a sua próxima jogada. Se acertar o par de cartas, esse, dará direito a realizar mais uma jogada. Esse processo deve ser repetido até que todas as cartas sejam removidas. Em cada rodada os participantes deverão buscar o par da imagem do matemático e seu respectivo feito na história da matriz. Na Figura 30, mostra-se as cartas do jogo da memória da história de matrizes proposta neste trabalho.



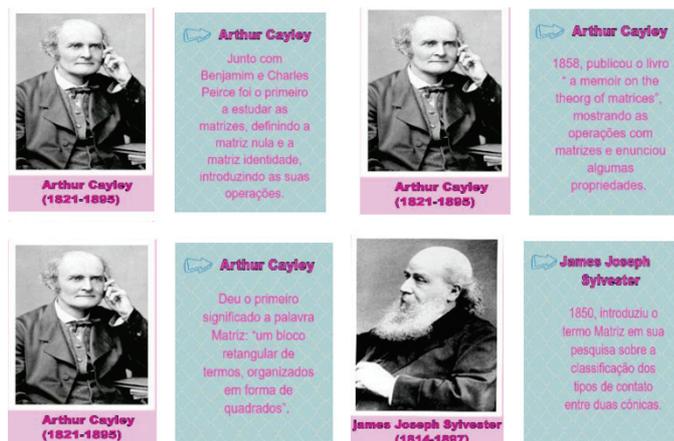


Figura 19: Jogo da memória da história de matrizes.  
Fonte: Elaborado pela autora.

## Atividade 2: O jogo da Caminhada pela história da matemática

**Objetivo:** Ajudar na aprendizagem e no aprimoramento dos alunos com a motivação do raciocínio lógico, a atenção, elaboração de processos estratégicos, levando-o a aprender a história da matriz de uma maneira dinâmica, com regras e desafios, desenvolvendo também a paciência e o respeito, características necessárias para alcançar o objetivo do jogo.

**Público alvo:** Estudantes do ensino médio.

**Pré-requisitos:** Conhecimentos básicos sobre a história da matriz, surgimento, matemáticos importantes para o seu surgimento, assunto estes que deverão ser debatidos em sala de aula com o professor antes da aplicação do jogo.

**Desenvolvimento da atividade:**

O jogo “Caminhando pela história da matemática” é composto por um tabuleiro contendo círculos que formam um pequeno percurso. Ao longo do tabuleiro aparecerão círculos contendo perguntas sobre a história da matemática que devem ser respondidas pelo aluno. O jogo foi confeccionado pela autora no site com o uso do site *storyboardthat*, realizado inicialmente de forma a ser impressos e utilizados pelos educadores em sala de aula.

As duas casas de cor verde, refere-se a Partida e a Chegada. As doze cartas de cor bege, são as casas na qual se o jogador parar com o seu pino em uma delas, não precisará responder a nenhuma pergunta e assim o jogo continua, enquanto que as onze casas de cor roxa, contém as perguntas. Caso o jogador na sua vez pare em uma destas casas, ele precisará responder a esta pergunta. Seguem-se as afirmações que estão nas casas de cor roxa no tabuleiro:

- Contribuiu para a criação da teoria dos divisores elementares das matrizes e utilizou a teoria das matrizes para estudar a geometria de alta dimensão.

- Em 1858, publicou o livro “a memoir on the theorg of matrices”, mostrando as operações com matrizes e enunciou algumas propriedades como a multiplicação.
- Criador do mecanismo utilizado para calcular o determinante de qualquer tipo de matriz quadrada, conhecido como “Teorema de Laplace”.
- Criou formalmente uma notação com índices para os coeficientes bem próxima da que usamos hoje a12 indicava por 12.
- Em 1841, apresentou a notação de duas barras verticais ladeando um quadrado de números para indicar determinantes.
- Em 1812, prova o teorema da multiplicação de determinantes com a utilização de permutações.
- Em 1858, Introduziu a noção de matriz através do seu estudo sobre transformações lineares em uma memória intitulado “ Remarques sur la notation des functions algébriques” .
- Deu o primeiro significado a palavra matriz: “um bloco retangular de termos, organizados em forma de quadrados”.
- Utilizou o nome “Determinante” pela primeira vez.
- Junto com Benjamim e Charles Peirce foi o primeiro a estudar as matrizes, definindo a matriz nula e a matriz identidade, introduzindo as suas operações.

Na Figura 31 mostra-se a imagem do tabuleiro correspondente ao jogo da caminhada pela história da matemática.

### **O jogo:**

Para jogar uma partida, os alunos precisarão de um dado, um pino individual que sirva como marcadores, mas de cores diferentes. Poderão participar da partida de 2 à 5 jogadores. O objetivo do jogo é ser o primeiro a chegar ao círculo verde, denominando de Chegada.

### **Regras:**

No início da partida, todos ficarão posicionados no círculo cor verde, denominado como Partida. Os jogadores deverão se posicionar por ordem de participação no sentido horário, no qual poderá ser utilizado um dado para definir a ordem e decidir quem começa.

O jogador número 1 joga o dado e anda com o seu pino (marcador) a quantidade de casas em que aparece no dado lançado. Caso pare em um círculo da cor bege, o jogador permanecerá no mesmo e passará a vez para o próximo, no caso, o jogador 2. Caso o seu pino (marcador) pare em um casa da cor roxa, o jogador deverá ler em voz alta a

afirmação referente a história da matriz e responder de acordo com o seus conhecimentos adquiridos em sala de aula. Se responder corretamente, ele avançará casas de acordo com as instruções, caso a resposta esteja incorreta, ele sofrerá consequências, que são de recuar algumas casas ou ficar sem jogar um rodada.

Ganha a rodada, aquele jogador que primeiro conseguir chegar até o final do jogo, ou seja, chegar até a casa de cor verde, que contém o nome “Chegada”. Na Figura 32 temos a imagem do tabuleiro correspondente ao jogo da caminhada pela história da matemática.

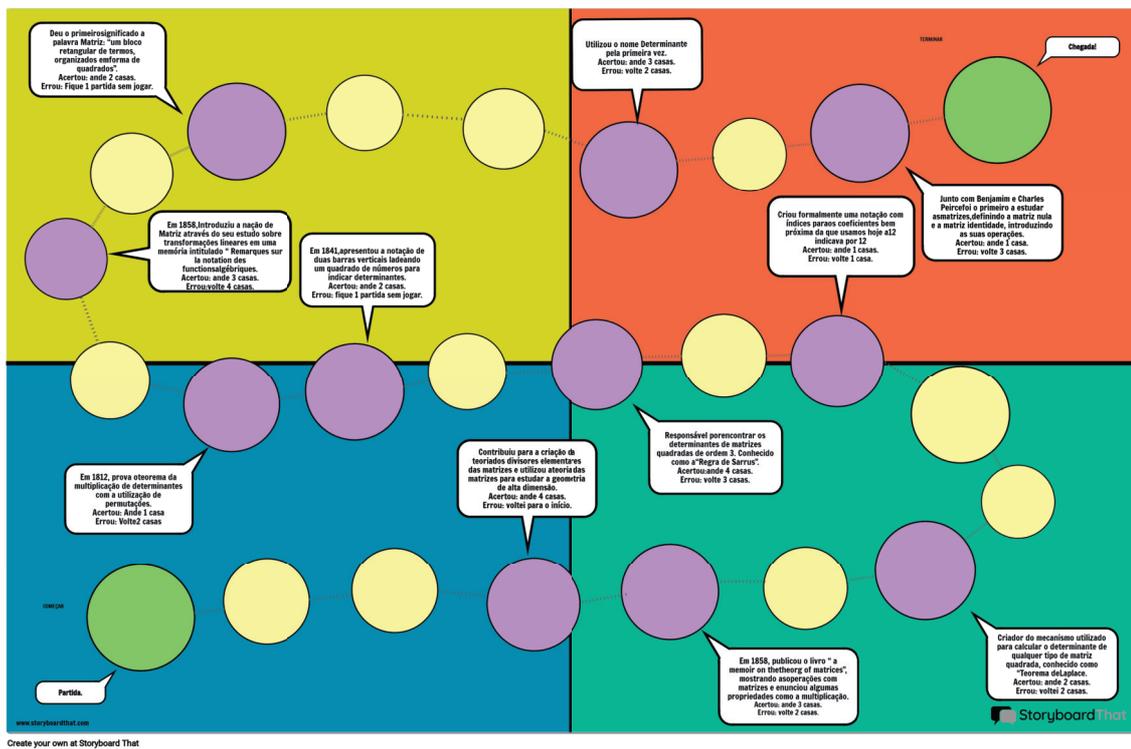


Figura 20: Tabuleiro correspondente ao jogo da caminhada pela história da matemática.

Fonte: Autoria própria.

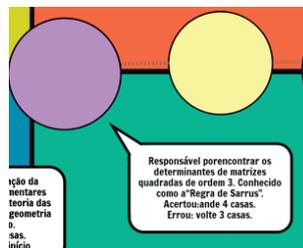


Figura 21: Imagem de uma afirmação presente no tabuleiro

Fonte: Autoria própria.

### Atividade 3: O jogo do bingo de matrizes.

**Objetivo:** Aprimorar os conhecimentos sobre a história das matrizes e estimular o estudo acerca dos matemáticos que contribuíram para a evolução e aprimoramento das matrizes, com a utilização do bingo como uma forma lúdica de aprendizagem.

**Público alvo:** Estudantes do ensino médio.

**Pré-requisitos:** Conhecimentos básicos sobre a história da matriz, como o seu surgimento, a sua evolução e os matemáticos que fizeram parte desta história. Esses conhecimentos deverão ser debatidos entre o professor e os alunos antes da aplicação do jogo do bingo.

**Desenvolvimento da atividade:** Este jogo constitui-se de 5 cartelas com 9 nomes de matemáticos que fizeram parte da história das matrizes, e informações a respeito dos mesmos confeccionados em papel óficial. Essas cartelas foram produzidas pela autora no site *Canva* e as informações com o uso de *word*. Todas confeccionadas para que possam ser impressas. A seguir, as perguntas que serão sorteadas,.

- Colin Maclaurin (1698 - 1746), escreveu o livro intitulado por Um tratado sobre Álgebra, publicado em 1748, com a apresentação do teorema geral para eliminar incógnitas de sistemas lineares para matrizes de ordem 2, 3 e 4, não generalizando para matrizes de ordem maiores que 4.
- James Joseph Sylvester (1814 - 1897), 1850, introduziu o termo matriz em sua pesquisa sobre a classificação dos tipos de contato entre duas cônicas.
- James Joseph Sylvester (1814 - 1897), contribuiu para a criação da teoria dos divisores elementares das matrizes e utilizou a teoria das matrizes no estudo da geometria de alta dimensão.
- James Joseph Sylvester (1814 - 1897), com Arthur Cayley fez um importante trabalho sobre a teoria das matrizes com o desenvolvimento da álgebra das matrizes.
- James Joseph Sylvester (1814 - 1897) foi criador da palavra "totiente", a qual foi usada por Leonhard Euler, para provar o Pequeno Teorema de Fermat, utilizado em teoria dos números, conhecida pela função totiente de Euler.
- Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), utilizou o nome determinante pela primeira vez.
- Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), em 1812, prova o teorema da multiplicação de determinantes com a utilização de permutações.

- Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), em 1840, foi o primeiro a introduzir a palavra “característica”, na teoria das matrizes, denominada equação característica das matrizes.
- Arthur Cayley (1821 - 1895), em 1858, introduziu a ideia de matriz através do seu estudo sobre transformações lineares intitulado “Remarques sur la notation des fonctions algébriques”.
- Arthur Cayley (1821 - 1895), em 1841, apresentou a notação de duas barras verticais ladeando um quadrado de números para indicar determinantes.
- Arthur Cayley (1821 - 1895), atribuiu o primeiro significado a palavra matriz: “um bloco retangular de termos, organizados em forma de quadrados”.
- Arthur Cayley (1821 - 1895), em 1858, publicou o livro intitulado por “a memoir on the theorg of matrices”, com as operações de matrizes e enunciou algumas propriedades como a multiplicação.
- Arthur Cayley (1821 - 1895), com Benjamin e Charles Peirce, foi o primeiro a estudar as matrizes, definindo a matriz nula e a matriz identidade, através da introdução de operações com matrizes.
- Pierre Frederic Sarrus (1798 - 1861), responsável por estabelecer um método para obtenção dos determinantes de matrizes quadradas de ordem 3, conhecido por a “Regra de Sarrus”.
- Pierre Simon Marques de Laplace (1749 - 1827), criador do mecanismo utilizado para calcular o determinante de qualquer tipo de matriz quadrada, conhecido como “Teorema de Laplace”.
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), criou formalmente uma notação com índices para os coeficientes próxima da utilizada nos dias de hoje a<sub>12</sub>, indica 12.
- Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), contribuiu para a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e ótica, em seu trabalho de órbita do asteroide Pallas entre 1803 e 1809.
- Howard Garns (1905 - 1989), criou o jogo Sudoku que foi publicado pela primeira vez no Japão no ano de 1984, e a partir daí, o Sudoku ficou conhecido, ganhando popularidade.

A seguir, os nomes contidos nas cartelas, que são as respostas para as perguntas supracitadas:

- James Joseph Sylvester(1814 - 1897).
- Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857).
- Arthur Cayley (1821 - 1895).
- Pierre Frederic Sarrus (1798 - 1861).
- Pierre Simon Marques de Laplace (1749 - 1827).
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716).
- Colin Maclaurin (1698 - 1746).
- Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).
- Howard Garns (1905 - 1989).

### **O jogo:**

Os alunos deverão obter objetos que sirvam como marcadores das cartelas, como por exemplo, caroço de feijão, moedas, pinos, entre outros. Além disso, deverão providenciar um globo de bingo, caso não tenha, pode ser utilizado uma caixa que sirva para colocar as perguntas que estão em pedaços de papel, dobrados e misturados. Podem participar de cada jogada de 2 à 5 jogadores. Cada aluno receberá uma cartela e preencherá a mesma de acordo com o sorteio feito por outro aluno. O objetivo do jogo é ser o primeiro a marcar todos os nomes contidos na sua cartela.

### **Regras:**

Antes de iniciar a partida, cada pergunta deverá ser devidamente dobrada e colocada no globo. As cartelas serão disponibilizadas aos alunos onde cada um escolherá a sua. Quando a partida iniciar, as perguntas serão sorteadas, uma por uma, aleatoriamente, lida em voz alta por aquele que a sorteia. Feito isso, os alunos deverão verificar se o nome do matemático ao qual a pergunta se refere está em sua cartela. Em caso positivo, deverá marcá-lo. Caso não esteja, ele aguarda sair a próxima pergunta. Aquele que preencher primeiro toda a cartela, ou seja, que estiver em posse da cartela que estiver todos os nomes sorteados no globo, deverá gritar “Bingo!” para vencer. Vejamos as cartelas do jogo do bingo de matrizes na Figura 33.

Portanto, diante do exposto, espera-se com a aplicação dos jogos apresentados neste capítulo, tornar o aprendizado de matrizes por parte dos alunos, mais dinâmico e prazeroso. Além disso, apresentar aos alunos a origem dos conteúdos vistos em sala, neste caso, sobre a origem das matrizes e sua história.

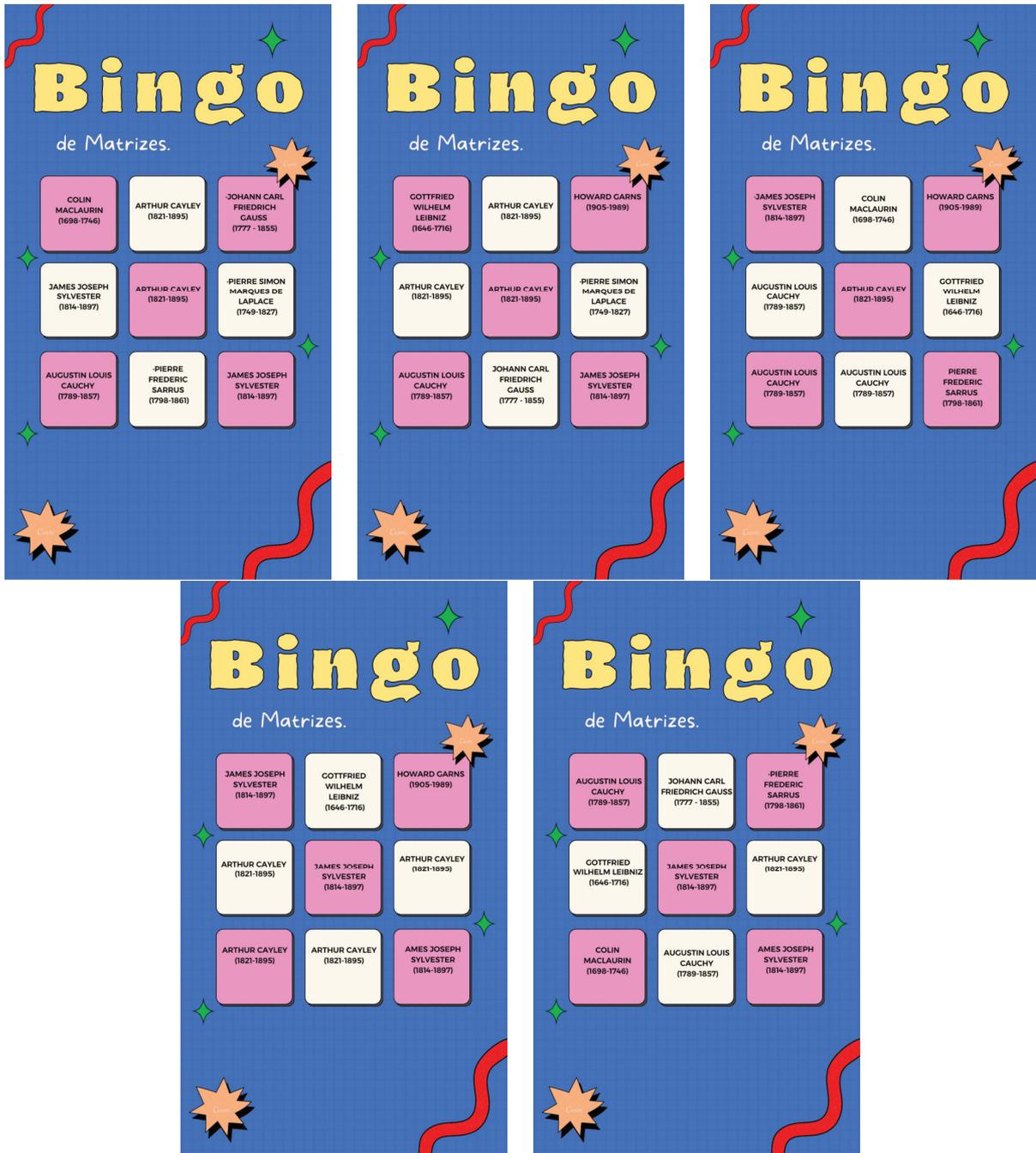


Figura 22: Imagem das cartelas.

Fonte: Autoria própria.

## Capítulo 6

# Conclusões e Considerações Finais

A história da matemática contribui para o processo de ensino e aprendizagem, e pode ser desenvolvida como estratégia de abordagem e motivação para o ensino dos conteúdos matemáticos. Ao utilizar a história da matemática na sala de aula, o professor esclarece muitos conceitos matemáticos, e também responder alguns "porquês", fazendo com que a aprendizagem do aluno seja mais significativa e dinâmica. Assim, a história facilita na compreensão por parte dos alunos na introdução de conteúdos, que por vez sejam abstrata, e possibilita uma maior motivação e assim resultando em maior conhecimento e compreensão dos conteúdos.

Nessa perspectiva, a pesquisa realizada neste trabalho faz-se enriquecedora, dado que oferece ao professor uma direção na utilização da história da matemática no estudo da matrizes, como um recurso eficaz para a compreensão, motivação e interesse dos alunos em aprendê-la, além de apresentar os jogos, o que vem a despertar a motivação para o emprego deste recurso em sala de aula.

Ao refletir sobre a utilização desse recurso nas aulas, não pode-se esquecer que muito professores de matemática, limita-se ao repassar os conteúdos aos seus alunos sem a preocupação de mostrar que esses conteúdos possuem uma história, onde cada um deles tem sua descoberta. Vale ressaltar, de acordo com D'Ambrosio (1996), que não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir História da Matemática em seus cursos. Se em algum tema o professor tem uma informação ou sabe de uma curiosidade histórica, deve compartilhar com os alunos. Bastando apenas colocar algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse nas aulas de Matemática. o que o professor tenha se especializado em História da Matemática (D'AMBROSIO, 1996).

Portanto, espera-se que este trabalho possa contribuir para o aprimoramento do conhecimento da história da matemática, especialmente, da história de matrizes, através o uso de jogos.

Como proposta de continuidade da pesquisa, pretende-se aplicar em uma escola

a sequência didática proposta neste trabalho, com a inclusão de jogos envolvendo a história do surgimento do conceito de matrizes e de algumas curiosidades sobre seus criadores, a qual deverá ser aplicada a alunos do ensino médio. Após a aplicação, sugere-se a realização de um levantamento dos dados e sistematização dos resultados, a fim de verificar a eficácia da abordagem da história das matrizes com o uso de jogos propostas por esta pesquisa.

# Referências Bibliográficas

ALVARES, A. M. T. *Mais jogos e atividades matemáticas do mundo inteiro*. Universidade Católica de Santos: Disponível em: <https://books.google.com.br/books/about/Inform2004>.

ARAÚJO, D. L. d. O que é (e como faz) sequência didática? Fortaleza - ano 3, 2013.

BASTOS, M. S. *O livro didático nas aulas de matemática: um estudo a partir das concepções dos professores*. Recife: VIII Encontro nacional de educação matemática, 2004.

BATISTA, I. d. L.; SIMONE, L. Abordagem histórico-filosófica e educação matemática – uma proposta de interação entre domínios de conhecimento. *Educ. Mat. Pesqui.*, v. 6, n. 1, 2004.

BAUMGARTEL, P. O uso de jogos como metodologia de ensino da matemática. *Encontro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática*, 2016.

BERNARDES, A. C. d. S. História e ensino de matrizes: Promovendo reflexões sobre o discurso matemático. *Educ. Mat. Pesqui.*, v. 6, n. 1, 2016.

BIEH, J. V.; BAYER, A. A escolha do livro didático de matemática. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, Ijuí/RS, 2009.

BIFFI, L. C. R. História da matemática nos livros didáticos do ensino médio: Uma investigação. *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, Curitiba, 2016.

BNCC. Brasil: Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>, 2018.

BORGES, P. A. A história da matemática no ensino e na aprendizagem da multiplicação. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 05, n. 14, 2018.

BRANDÃO, M. M. D. Uma adaptação da cifra de hill para estudo de matrizes. *Universidade Federal De Ouro Preto, departamento de matemática, PROFMAT*, Ouro Preto, 2017.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. ensino de 5<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup> séries. *Ministério da Educação Secretaria de Educação Fundamental*, Brasília-DF, 1998.

CARVALHO, E. d. S. Sequência didática: uma proposta para o ensino do conceito de fração. *Universidade Federal de Tocantins-PROFMAT*, ARAIAS - TO, 2017.

CAYLEY, A. A memoir on the theory of matrices. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 148, n. 17-37, 1858.

- COIMBRA, U. de. *Augustin Louis Cauchy*. [S.l.]: Disponível em: <https://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/matematicos/Cauchy-AL>. Acessado em agosto de 2022, 2022.
- D'AMBROSIO, U. Educação matemática: Da teoria à prática. Campinas-SP, v. 20, 1996.
- DINIZ, R. d. S. O teorema de cayley-hamilton. *Universidade Estadual da Paraíba-Centro de ciências e tecnologia*, Campina Grande/PB, 2011.
- DOLZ, J.; MICHELE, N.; BERNAD, S. Sequências didáticas para o oral e para o escrito: apresentação de um procedimento. *Mercado de Letras*, Campinas, SP, 2004.
- DUARTE, L. T. I. A história dos quadrados mágicos. *Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra*, 2011.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Universidade Estadual de Campinas: Editora UNICAMP, 2004.
- FARIA, R. W. S. d. C. Os conteúdos da aprendizagem e o raciocínio proporcional. *Juara-Mato Grosso*, v. 6, 2019.
- FARIAS, C. T. L.; BARBOSA, J. L. d. C. Recursos computacionais no ensino de matemática: critérios para a escolha do livro didático. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande-PB, 2018.
- FREITAS, J. L. M. D.; BITTAR, M. Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental. *Universidade Federal de Mato Grosso do Sul*, Campo Grande, 2004.
- GASPERI, W.; PACHECO, E. R. A história da matemática como instrumento para a interdisciplinaridade na educação básica. *Educação Matemática Universidade Paranaense*, Paraná, 2008.
- GIOVANNI, J. R. *Matemática Completa*. São Paulo: FTD, 2002.
- GUIDA, G. S. Configurações de pontos no plano: O teorema de silvester-gallai. *Universidade Federal do NORte do Tocantins*, Araguaína/TO, 2022.
- GULIN, A. d. C.; ROSARIO, R. L. História da matemática e sua contribuição na compreensão do uso cotidiano dessa ciência. *Os desafios da DA escola pública na perspectiva do professor PDE*, 2014.
- JOAMIR, S. *Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas*. São Paulo: FTD 1ª ed., 2020.
- LIMA, A. M. d.; PEREIRA, M. G. G.; CHAQUIAM, M. Uma abordagem histórica de matrizes para o uso em sala de aula. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 5, n. 14, 2018.
- MARTINS, L. F. *Matemática e suas tecnologias/Matrizes e geometria analítica*. São Paulo: Editora Moderna 1ª ed., 2020.

- MATEMATICANAAREA. *A origem dos quadrados mágicos*. [S.l.]: Disponível em: <http://matematicanaarea.blogspot.com/2009/12/v-behaviorurldefaultvml-o.html>, Acessado em agosto de 2022, 2009.
- MEC. *Mais jogos e atividades matemáticas do mundo inteiro*. Universidade Católica de Santos: Disponível em: <https://books.google.com.br/books/about/Inform2023>.
- MELO, M. F. d.; MACHADO, J. S. Quadrados mágicos: Um passeio pela história e pela Álgebra linear. *Ciência e Natura*, v. 54, n. 40, 2018.
- MELO, M. F. d.; SAMUEL, M. J. Quadrados mágicos: Um passeio pela história e pela Álgebra linear. *Ciência e Natura*, e54, n. 40, 2018.
- MENDES, I. A. Investigação histórica no ensino da matemática. *Editora Ciência Moderna Ltda*, Rio de Janeiro, 2018.
- MIGUEL, A.; BRITO, A. d. J. A história da matemática na formação do professor de matemática. *Cadernos do CEDES (UNICAMP), CAMPINAS - sp, v.40, p. 47-61*, São Paulo, 1996.
- MIGUEL, A.; ÂNGELA, M. História na educação matemática. propostas e desafios. *Educação Matemática Universidade Paranaense*, Belo Horizonte, 2004.
- MILIES, C. P. Breve história da Álgebra abstrata. *Instituto de Matemática e Estatística*, São Paulo, 2013.
- NUNES, D. M. A abordagem histórica dos tópicos matri, determinate e sistema lineares presentes nos livros didáticos. X encontro nacional de educação matemática, São Paulo, 2016.
- OLIVEIRA, F. W. S.; SOUZA, A. C. G. d. O livro didático e a história no ensino de matemática: Limitações e possibilidades. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, Juara-Mato Grosso, v. 5, 2018.
- OLIVEIRA, M. M. d. Sequência didática interativa no processo de formação de professores. *Centro Nacional de pesquisa em educação em ciências. VIENPEC*, Florianópolis, 2013.
- PAQUES, O. W.; PEDRO, R. A. *Os nove capítulos da arte matemática, de Liu Hui, do século II d.C.* [S.l.]: Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/lem/material-de-apoio/nove-capitulos-arte-matematica-liu-hui-seculo-ii-dc>, Acessado em julho de 2022, 2022.
- PESSOA, J. O. *Filosofia da Física Clássica*. Universidade de São Paulo: Notas de Aula, 2019.
- PREZOTTI, P. R. F. *Uma proposta de ensino dos temas sistemas lineares e determinantes*. Universidade Federal do Espírito Santo: Editora UNICAMP, 2014.
- ROLIM, A. A. M.; GUERRA, S. S. F.; MOTA, T. M. Uma leitura de vygotsky sobre o brincar na aprendizagem e no desenvolvimento infantil. *Revista Humanidades*, Fortalez-Bahia, 2008.

ROQUE, T. *História da Matemática - uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

ROQUE, T.; BOSCO, P. J. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SA, F. L. Estudo dos determinantes. *Caderno Dá-Licença*, v. 6, n. 5, 2004.

SAITO, F.; DIAS, M. d. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século xvi. *Ciência e Educação(Bauru)*, São Paulo, 2013.

SANTOS, R. P. d. A matemática por trás do sudoku. *Revista eletrônica Paulista de Matemática*, v. 12, n. 4ISSN 2316, 2018.

SILVA, J. H. d. S. O lúdico na aprendizagem escolar. *Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Educação*, Paraíba, 2012.

SOUZA, F. B. d.; SABINO, E. R. Abordagem histórica e conceitual sobre os sistemas lineares e sua relação com matrizes e determinantes. *Atena Editora*, v. 2, 2017.

SVERZUT, B. R. L.; OTERO, G. S. C. *Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue*. São Paulo-SP: [s.n.], 2014.

TEIXEIRA, R. R. P.; APRESENTAÇÃO, K. R. S. d. Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática. *Revista linhas*, Florianópolis, 2014.

VALENTE, W. R. Era uma vez o cálculo dos determinantes: tempos pré-modernos do ensino de matemática no colégio. *Reunião Anual da ANPEd.*, Caxambu, MG, 2010.

VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente*. 6 e. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

WIKIPEDIA. *Augustin Louis Cauchy*. [S.l.]: Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Augustin-LouisCauchy>, Acessado em julho de 2022, 2022.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre., 1998.

ZASLAVSKY, C. Mais jogos e atividades matemáticas do mundo inteiro. *Artmed*, Porto Alegre, 2009.