Sociedade Brasileira de Matemática - **SBM**

Universidade Federal do Acre - **UFAC**

Mestrado Profissional em Matemática - **PROFMAT**

Matrizes que Determinam Polígonos Regulares

Thiago de Oliveira Lopes

Rio Branco – Acre

2023

Thiago de Oliveira Lopes

Matrizes que Determinam Polígonos Regulares

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na cidade de Rio Branco, Acre, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos

Rio Branco – Acre

2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

L864m Lopes, Thiago de Oliveira, 1997 -

Matrizes que determinam polígonos regulares / Thiago de Oliveira Lopes; orientador: Dr. José Ivan da Silva Ramos. – 2023.

47 f.: il.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Rio Branco, 2023.

Inclui referências bibliográficas e apêndice.

1. Matrizes. 2. Polígonos. 3. Grupo e isomorfismos. I. Ramos, José Ivan da Silva (orientador). II. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Nádia Batista Vieira CRB-11º/882.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título da Dissertação: Matrizes que determinam polígonos regulares.

Autor: Thiago de Oliveira Lopes
Orientador: Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos

Dissertação aprovada como parte das exigências para obtenção do título de Mestre, pela Banca Examinadora:
Orientador: Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos; Membro interno: Prof. Dr. José Ronaldo Melo;
Membro externo: Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodriguez.

DATA DA APROVAÇÃO: 11 de outubro de 2023.

BANCA EXAMINADORA:

Assinado Eletronicamente
JOSÉ IVAN DA SILVA RAMOS
Orientador
Universidade Federal do Acre – UFAC

Assinado Eletronicamente
JOSÉ RONALDO MELO
Membro interno
Universidade Federal do Acre - UFAC

Assinado Eletronicamente
TOMÁS MENÉNDEZ RODRIGUEZ
Membro externo
Universidade Federal de Rondônia - UNIR

AGRADECIMENTOS

A meus familiares, em especial, minha mãe, Ana Claudia de Oliveira, por terem, com muitíssimo esforço e dedicação, fornecido tudo que era preciso para que eu pudesse ter o melhor em educação e uma vida com princípios focados na honestidade.

Ao Professor Dr. José Ivan da Silva Ramos, meu orientador, pela disponibilidade, competência, dedicação, amizade e paciência, idealizador do trabalho e inspiração pela sua excelência profissional. Aos colegas de mestrado e também de Graduação pela troca de experiências e conhecimentos que fizeram jus ao termo coletividade, em especial, para Noah Gabriel, Gabriel Tagliari, Julio Giordan, entre outros grandes amigos.

Ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), à Universidade Federal do Acre (UFAC) e todos os professores do curso, por contribuírem com a minha formação. E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que fosse possível a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Pensamento

A matemática é mais do que números e equações; ela é a linguagem da natureza, a chave para desbloquear os mistérios do universo. À medida que mergulhamos nas profundezas dessa disciplina, descobrimos não apenas padrões abstratos e teoremas, mas também a beleza que permeia todas as coisas. Como matemáticos, somos exploradores do conhecimento, navegando por oceanos de números e campos de equações em busca de ilhas de compreensão. Cada prova é uma jornada, cada descoberta é um tesouro, e a matemática nos ensina a perseverar diante dos desafios, a questionar o desconhecido e a apreciar a elegância da verdade que encontramos.

RESUMO

Para cada inteiro $0 < n \in \mathbb{Z}$, as raízes da unidade complexa de ordem n formam os vértices de um polígono regular. Esses números complexos se traduzem, via isomorfismo, como matrizes quadradas de ordem 2 que formam um grupo G_n, cíclico de ordem n dentro de $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2x2} / \, x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$. Em outro sentido, fixado outro inteiro m positivo, mostramos que polígonos regulares podem ser desenhados, a partir de uma subestrutura do conjunto de matrizes G_m.

Palavras chave: Matrizes, polígonos, grupos e isomorfismos.

ABSTRACT

For each integer $0 < n \in \mathbb{Z}$, the roots of the complex unit of order n form the vertices of a regular polygon. These complex numbers translate, via isomorphism, as square matrices of order 2 that form a group G_n, cyclic of order n within $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2x2} / \, x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$. In another sense, fixed another positive integer m, we show that regular polygons can be drawn, starting from a substructure of the set of matrices G_m.

Keywords: Matrices, polygons, groups and isomorphisms.

Lista de símbolos

$<$: menor que,

$>$: maior que

$\leq$: menor ou igual que

$\geq$: maior ou igual que

$\neq$: diferente

$\cong$: isomorfo a

$\forall$: para todo, qualquer que seja

$\Rightarrow$: então, implica

$\Leftrightarrow$: equivalente, se e somente se, se e só se

/: tal que

$\exists$: existe

$\nexists$: não existe

$\in$: pertence a

$\notin$: não pertence a

$\subset$: está contido,

$\not\subset$: não está contido.

$\cup$: união $\cap$: interseção

$\mathbb{N}$: Conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$: Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$: Conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$: Conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: Conjunto dos números complexos

$\mathbb{U}_n$: Conjunto das raízes enésimas da unidade ($n > 2$)

D(δ): Domínio da função δ

CD (δ): Contra - Domínio da função δ

$M_n(\mathbb{R})$; $0 < n \in \mathbb{N}$: Conjunto das matrizes quadradas de ordem n com entradas em $\mathbb{R}$.

Sumário

INTRODUÇÃO

Os conteúdos que compõem a grade curricular do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT/SBM constituem uma satisfatória atualização de conhecimentos sobre Funções, Geometria, Aritmética e Álgebra, permitindo, inclusive que se possa relacionar vários assuntos e conceitos já estabelecidos nessa parte da Matemática.

É bastante claro o objetivo do PROFMAT em aprofundar alguns conhecimentos de Matemática básica, oportunizando ao professor uma formação mais sólida, de modo que ele possa obter maior confiança no exercício dessa bela profissão de ensinar.

Com relação à escolha do tema a ser apresentado no Trabalho de Conclusão de Curso - TCC, foi feita uma conversa sobre alguns assuntos e surgiram perguntas "simples" que comumente se percebe na literatura. Então, ficou definido que o presente trabalho será dedicado a inter-relacionar conceitos da geometria e outras áreas do conhecimento, para aproveitar e mostrar novas formas de perceber alguns assuntos que comumente são abordados nesse nível de conhecimento.

O estudo das funções em conjunto com as estruturas algébricas permite que façamos boas comparações. Os isomorfismos entre os espaços vetoriais, que estudamos na Álgebra Linear, são particulares exemplos de como podemos associar os aspectos algébricos de duas estruturas. Por exemplo, partindo de uma definição de multiplicação entre pontos (ou vetores) do plano, podemos definir um homomorfismo bijetor do conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos para $\mathbb{R}^2$ e do conjunto dos complexos para o conjunto das matrizes quadradas de ordem dois, que significa mais uma forma concreta de apresentar esses números.

Esse é um dos pontos de partida para a comparação entre duas estruturas que aqui se deseja alcançar: a partir das raízes de ordem n da unidade complexa, determinar polígonos regulares de n lados e, através de um isomorfismo, mostrar que o conjunto desses vértices deve aparecer como um conjunto de matrizes ortogonais dentro de $M_2(\mathbb{R})$.

Olhando nesses conjuntos de matrizes, cópias de conjuntos de raízes da unidade complexa de uma dada ordem n, via multiplicação, elaborar uma técnica para construir matrizes que determinam, na volta para o conjunto $\mathbb{C}$, os vértices de um polígono regular.

No primeiro capítulo serão apresentadas as fundamentações para o trabalho. Os conceitos da Teoria dos Conjuntos englobam operações e suas propriedades. Depois de ser feito uma descrição do conjunto dos números complexos e identificar esse conjunto dentro do conjunto $M_2(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem 2, será feito, ainda, algumas breves considerações em relação a esse conjunto.

Ao final desse capítulo, um parágrafo mostra a utilização de homomorfismo para comparar o plano $\mathbb{R}^2$ com conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos e este com o conjunto $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2x2} / \ x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

O capítulo 2, que dá o título deste TCC, mostra a abordagem que é feita para descrever um polígono regular no plano, através de matrizes de ordem 2 que, ao final, identificam seus vértices.

1 NOÇÕES DA TEORIA DOS CONJUNTOS

Neste capítulo, foram estabelecidos os conceitos de conjuntos, elemento de um conjunto e abordar algumas noções básicas e gerais da teoria dos conjuntos, enfatizando operações e propriedades. Particularmente, foi incluído o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos e o conjunto $M_n(\mathbb{R})$; 0 < n $\in \mathbb{N}$: das matrizes quadradas de ordem n com entradas em $\mathbb{R}$, sobre os quais também recaem algumas observações.

1.1 DEFINIÇÕES GERAIS

Denomina-se conjunto, toda e qualquer coleção de objetos (inclusive uma coleção sem objetos). Cada objeto de um conjunto será chamado de elemento. Quase sempre se representa conjunto por uma letra maiúscula do alfabeto da língua portuguesa, colocando os seus elementos entre chaves. Por letras minúsculas desse alfabeto, representa-se os elementos de um conjunto. Se "a" é um elemento do conjunto A, diz-se que "a pertence ao conjunto A" e anota-se isso por: $a \in A$. Caso contrário, se "a não pertence ao conjunto A", anota-se: $a \notin A$.

Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A, é também elemento de B, diz-se que "A está contido em B" e anota-se $A \subset B$. Caso contrário, se pelo menos um elemento de A não pertence a B, anota-se $A \not\subset B$, que significa que "A não está contido em B". Admite-se que, para qualquer objeto ou elemento x e um conjunto A dados, ocorra exatamente uma das duas possibilidades, ou $x \notin$ A ou $x \in A$. Além disso, se os elementos a_1 e a_2 estão em A, tem-se como verdadeira somente uma das duas possibilidades: $a_1 = a_2$ ou $a_1 \neq a_2$.

1.1.1 Conjuntos Iguais e Conjunto Vazio

Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, A e B possuem os mesmos elementos ou se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$. A igualdade de conjuntos representa um dos axiomas básicos da teoria axiomática de Zermelo-Fraenkel-Choise.

O Axioma da Extensionalidade: Se cada elemento de A é um elemento de B e cada elemento de B é um elemento de A, então $A = B$. A existência do conjunto vazio é também um dos axiomas básicos dessa teoria. O Axioma da Existência: Existe um conjunto, denotado por ϕ e chamado de vazio, que não possui elementos.

Vale que $\phi \subset X$, para todo X imaginável. Assim, toda "escada" de conjuntos tem como degrau inicial o conjunto vazio. Isso, devido à definição de "não está contido", mencionada em um dos parágrafos acima. Se X é qualquer conjunto, só aconteceria $\phi \not\subset X$ se existisse pelo menos um elemento $a \in \phi$, tal que $a \notin X$. Como em ϕ não existem elementos, admite-se por ser uma proposição contraditória, que $\phi \subset X$, independentemente da natureza dos elementos desse conjunto X.

Pelos mesmos argumentos acima, pode-se admitir a unicidade do conjunto vazio, pois ao supor que são vazios os conjuntos ϕ_1 e ϕ_2 conclui-se que $\phi_1 \subset \phi_2$ e que $\phi_2 \subset \phi_1$; ou seja, que $\phi_1 = \phi_2$. Por $\#A$, denota-se a quantidade de elementos do conjunto A. Se $A = 1$, diz-se que o conjunto A é unitário. O conjunto vazio tem, exatamente, $\#\phi = 0$ elementos.

1.1.2 União, Intersecção, Conjuntos Disjuntos, Complementar, Conjunto Diferença, Produto Cartesiano e Conjunto das Partes

Sejam A, B conjuntos. Então, define-se:

i) $A \cup B = \{x,\ x \in A$ ou $x \in B\}$, o conjunto união de A com B;

ii) $A \cap B = \{x,\ x \in A$ e $x \in B\}$, o conjunto interseção de A com B. Se $A \cap B = \phi$, dizemos que A e B são disjuntos.

iii) Se $A \subset \Omega$, $C_{(A)} = \{x,\ x \in \Omega$ e $x \notin A\}$, o conjunto complementar de A em relação a Ω, nesta ordem;

iv) $A \backslash B = \{x,\ x \in A$ e $x \notin B\}$, o conjunto diferença entre A e B, nesta ordem.

v) $A \times B = \{(a,\ b)\ /\ a \in A$ e $b \in B\}$, o produto cartesiano entre A e B, onde em geral, temos $A \times B \neq B \times A$;

vi) $P(A) = \{X\ /\ X \subset A\}$, o conjunto formado por todos os subconjuntos de A, denominado conjunto das partes de A. Se A possui n elementos é possível mostrar, por indução, que $P(A)$ possui 2^n elementos, olhando em um conjunto não vazio, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

1.1.3 Operação Definida em um Conjunto

Seja A um conjunto não vazio. Diz- se que uma operação "$*$" está (bem) definida ou que tem a propriedade do fechamento em A, se, e somente se, $\forall\ x,\ y \in A$

vale que $x * y \in A$. São exemplos de operações bem definidas em um conjunto não vazio:

i) A adição "+", em $\mathbb{N}$;

ii) A união U em $P(A)$, sendo A um conjunto não vazio;

iii) A multiplicação "·", no conjunto $M_2(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas sobre $\mathbb{R}$.

A adição "+" em $\mathbb{N}$ não está bem definida em ***I***, o conjunto o dos números ímpares, já que a soma de dois números ímpares é um número par.

O conjunto dos números Irracionais não é fechado para a multiplicação dos números (reais). Por exemplo, o produto $\sqrt{2}\,.\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = \sqrt{4} \in \mathbb{Q}$. O fechamento de uma operação traz a segurança de que, ao operar os objetos de um conjunto, o resultado não sai desse conjunto. Se a operação é de adição ou multiplicação, é comum dizer que o conjunto é aditivamente ou multiplicativamente fechado.

Algumas operações definidas em um conjunto A não vazio possuem certas propriedades que serão listadas a seguir.

1.1.4 Definição de Associatividade, Comutatividade, Existência do Elemento Neutro e Inverso em relação a uma dada operação

Sejam A um conjunto não vazio e $*$ uma operação definida em A. Diz-se que:

i) essa operação tem a propriedade associativa se, e somente se, $\forall\ a, b, c \in A$, vale que $a * (b * c) = (a * b) * c$.

ii) essa operação tem a propriedade comutativa se, e somente se, $\forall\ a, b \in A$, vale que $a * b = b * a$.

iii) $e \in A$ é elemento neutro para a operação $*$ se, e somente se, vale que $\forall\ a \in A$, vale que $a * e = e * a = a$.

iv) um elemento $a \in A$ possui inverso com respeito à operação $*$ se, e somente se, $\exists$ $a^{-1} \in A$, tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$; caso a operação admita elemento neutro e.

Observação 1: Quando existem os elementos neutro e inverso, relativo a uma dada operação "$*$" definida em um conjunto A não vazio, eles são únicos.

De fato, para verificar esses fatos supõe-se que "e" seja o elemento neutro para a operação $*$ definida em A. Então, para todo $a \in A$, vale que, $a * e = e * a = a$. Agora, se para $e' \in A$, vale que $a * e' = e' * a = a$, e que $e = e' * e = e * e' = e'$, o que prova a unicidade de e (elemento neutro) em A. A unicidade do elemento inverso é provada de maneira semelhante.

Exemplo 1

i) Sejam $S = \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto f(x) = ax + b \end{array} \; /a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\}$ e "$\circ$" a operação composição de funções. Claramente, as funções f e g definidas abaixo estão em S.

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = x + 5$ $\quad$ $x \mapsto g(x) = -2x$

Agora, vale que

$$g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = -2(x + 5) = -2x - 10$$

e que

$$f \circ g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-2x) = -2x + 5,$$

Portanto, tem-se que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, o que mostra que $f \circ g \neq g \circ f$. Isso mostra que a operação "$\circ$" não é comutativa.

ii) Considerando a adição no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, tem-se que: 0 é o elemento neutro e todo elemento possui inverso. Nesse caso, $z^{-1} = -z$.

iii) Considerando a multiplicação no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, tem-se que: 1 é elemento neutro e todo elemento q não nulo possui inverso: $q^{-1} = \frac{1}{q}$.

iv) Valem as **leis do cancelamento**: para $a, x, y \in \mathbb{R}$; com $a \neq 0$, tem-se $ax = ay \Longrightarrow x = y$ e $xa = ya \Longrightarrow x = y$.

De fato (vejamos um lado): como valem a associatividade, comutatividade e distributividade e outras propriedades para as operações em definidas no conjunto $\mathbb{R}$, existe um $a^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que: $a * a^{-1} = 1$. Assim,

$$ax = ay \Longrightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) \Longrightarrow (a^{-1}a)x = (a^{-1}a)y \Longrightarrow 1x = 1y \Longrightarrow x = y$$

Exemplo 2

Tem-se que $0a = 0$, $a \in \mathbb{R}$, pois $0a = (0+0)a = 0a + 0a$, o que implica que, $0a - 0a = (0a + 0a) - 0a = 0a + (0a - 0a) = 0a$. Assim, $0 = 0a$.

Uma das consequências do exemplo anterior é o fato de ter 1 ≠ 0. De fato, se 1 = 0, aconteceria $n = n \cdot 1 = n \cdot 0 = 0$ para todo inteiro n, o que implicaria que $\mathbb{R}$ tem somente um elemento que é o elemento nulo, o que é absurdo.

1.1.5 Potências Inteiras

Sejam A um conjunto não vazio e $*$ uma operação bem definida em A e e o elemento neutro para essa operação. Então, define-se as potências inteiras para um elemento a em A, da seguinte maneira:

- $a^0 = e$;
- $a^1 = a$;
- $a^2 = a * a$;
- $a^3 = a * a * a$;
- $a^n = a * a * \ldots * a$ (n vezes);

Se existir a^{-1}, o inverso do elemento a, define-se:

- $a^{-n} = (a^{-1})^n = a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1}$ (n vezes);

Exemplo 1

Calculando algumas potências de, em relação à operação de adição em $\mathbb{Z}$, obtém-se:

- $5^0 = 0$
- $5^1 = 5$
- $5^2 = 5 + 5 = 10$ e
- $5^n = 5 + 5 + \ldots + 5 = 5n$;
- $5^{-1} = -5$,
- $5^{-2} = (5^{-1})^2 = -5 + (-5) = -10$
- $5^{-n} = (5^{-1})^n = -5 + (-5) + \ldots + (-5) = n(-5) = -5n$; $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Antes de iniciar a descrição inicial do conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, no topo da cadeia dos conjuntos. É importante lembrar que, já no conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ dos números inteiros, percebe-se várias proposições matemáticas, que dependem de um inteiro n, podendo ser justificadas através da seguinte ferramenta.

1.1.6 Princípio da indução finita

Seja P(n) uma proposição matemática que envolve um número natural $n \geq n_0$; sendo n_0 um número natural fixado. Caso seja possível provar que valem as duas condições:

i) P(n_0) é verdadeira (ou seja, vale a proposição para n_0);

ii) É verdadeira a implicação P(*k*) → P(*k*+1) para um natural *k* ≥ n_0.

Então, pode-se afirmar que a proposição P(n) é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$.

No uso prático, para provar um teorema por indução finita pode-se assim mostrar que as duas condições do princípio acima estão satisfeitas.

Um exemplo de como aplicar essa técnica, tem-se na prova do número de diagonais de um polígono regular de 3 < *n* lados.

Exemplo 1

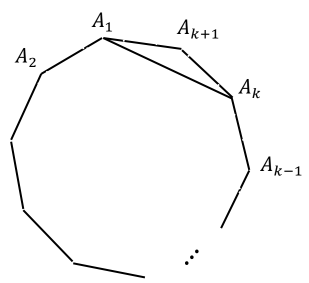
O número de diagonais de um polígono regular convexo de n lados é dado por $d_n = \frac{\mathrm{n(n-3)}}{2}$, $\forall\, n \geq 4$.

De fato, para $n = 4$, tem-se $d_4 = \frac{4(4-3)}{2} = 2$, que é o número de diagonais de um quadrado.

Agora, assume-se que P(*k*) é verdadeira para um natural $k \geq 4$, o que significa que vale que $d_k = \frac{k(k-3)}{2}$; para $k \geq 4$, e denota-se os vértices do polígono de k+1 lados por A_1, A_2, …, A_k, A_{k+1}. Decompondo este polígono como a união do polígono de k lados com o triângulo A_1, A_k, A_{k+1}, podemos contar, agora, $d_k = \frac{k(k-3)}{2}$ diagonais, mais $k-2$ diagonais que partem de A_{k+1}, mais 1 diagonal que liga o vértice A_1 ao vértice A_k. Isso mostra que

$$d_{k+1} = \frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 = \frac{k(k-3) + 2(k-2) + 2}{2} = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2},$$

o que mostra que vale a "fórmula" do cálculo do número de diagonais de um polígono de $k+1$, dado que ela é válida para um polígono de k lados.



Concluímos que o número de diagonais de um polígono regular convexo de n lados é igual a $d_n = \frac{\mathrm{n(n-3)}}{2}$, $\forall\, n \geq 4$.

1.1.7 Definição de Módulo

O número real $|a|$ = $\begin{cases} a \text{ se } a \geq 0 \\ -a \text{ se } a < 0 \end{cases}$ é denominado valor absoluto do número real a. Comumente, $|a|$ é chamado de módulo de a. Olhando cada ponto da reta como um número (por um dos axiomas de medição da Geometria Euclidiana), entende-se que $|a|$ representa a distância de a até origem da reta. Assim, por exemplo, |3| = 3 = −(−3) = |−3|.

Consoante com a definição de módulo, para todo número real a, tem-se que $|a| \geq 0$, $|a|^2 = a^2$, $|-a| = |a|$, $a \leq |a|$.

O valor absoluto de um número real a também pode ser definido pelas igualdades: $|a|$ = $\text{máx}\,\{-a,\ a\}$ = $\sqrt{a^2}$; onde $\sqrt{a^2}$ denotada a raiz quadrada de a^2 e $\text{máx}\,\{-a,\ a\}$ indica o maior dos inteiros $-a$ e a.

Por exemplo, |−2| = $\sqrt{(-2)^2}$ = −(−2) = máx {2, −2}.

Observação 1: Se a e b são dois números reais, então valem e são de fácil verificação as seguintes relações:

i) $|a\ .\ b|$ = $|a|.\ |b|$;

ii) $|a + b| \leq |a| + |b|$;

iii) $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Por definição, tem-se, $|a.\ b|$ = $\sqrt{(a.b)^2}$ = $\sqrt{a^2.b^2}$ = $\sqrt{a^2}\ \sqrt{b^2}$ = $|a|.\ |b|$ e i) fica justificado. Agora, vale que $-|a| \leq a \leq |a|$ e $-|b| \leq b \leq |b|$. Somando ordenadamente estas desigualdades, tem-se, $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$, o que implica que, $|a + b| \leq |a| + |b|$. Por fim, vale que $|a - b| = |a + (-b)\ | \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$.

O conceito de módulo, que pode também ser ligado a fatos geométricos, será estabelecido no parágrafo seguinte, permitindo que sejam efetuados cálculos de potencias e raízes de números complexos.

1.1.8 O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos

Neste parágrafo será feito, inicialmente, uma apresentação da construção dos números complexos e apresentadas as definições e propriedades das principais operações, que incluem o cálculo de raízes de um número complexo.

Isso será necessário para justificar as observações que serão feitas no capitulo 2 deste trabalho.

1.1.8.1 A Construção do Conjunto $\mathbb{C}$ dos Números Complexos

De acordo com Cristina Cerri (2021), as definições sobre números complexos tiveram um desenvolvimento gradativo. Começaram a ser utilizadas formalmente no século XVI em fórmulas de resolução de equações de graus 3 e 4. Os primeiros que conseguiram formalizar respostas a essas equações de grau 3 foram Scipione del Ferro e Tartaglia.

Tartaglia passou seus resultados a Cardano com a promessa de não os divulgar. Contudo, após verificar a exatidão das resoluções de Tartaglia, Cardano não honra sua promessa e publica os resultados, com uma menção ao autor, em sua obra Ars Magna de 1545, iniciando uma enorme inimizade entre eles.

A fórmula deduzida por Tartaglia tinha a solução da equação $x^3 + px + q = 0$, em função dos coeficientes p e q e podo ser expressa por

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Um problema preocupante, notado na época, foi que esse método de resolução de algumas equações gerava raízes quadradas de números negativos. Por exemplo, a equação: $x^3 - 15x - 4 = 0$ tem três raízes reais, o que dá pra ver facilmente escrevendo-a na forma $(x - 4).(x^2 + 4x + 1) = 0$. Assim, observa-se que $x = 4$ ou $x = -2 - \sqrt{3}$ ou $x = -2 + \sqrt{3}$, são as raízes dessa equação. Agora, usando a fórmula de Tartaglia, tem-se que $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, o evidencia que havia mais a se pesquisar e conhecer sobre esses números.

Outra ideia que surgiu, foi a de Rafael Bombelli, que tentou colocar as expressões $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ na forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente. Admitindo a validade das propriedades usuais das operações, tais como distributiva e comutativa, usou-as nas expressões que deduziu, obtendo $a = 2$ e $b = 1$. Com isso, conseguiu chegar ao valor de,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = (2 + i) + (2 - i) = 4.$$

A princípio, os números complexos não foram observados como números, mas sim, como um artifício algébrico muito útil para a resolução de equações. No século seguinte, Euler e Abraham de Moivre começaram a estabelecer uma estrutura algébrica para os números complexos.

Particularmente, Euler denotou por i a raiz quadrada de −1. Nessa mesma época, os números complexos começaram a ser analisados como pontos do plano o plano de Argand-Gauss, permitindo reescrever um número complexo de outra maneira. Estabelecida a **forma polar**, conseguiu-se uma maneira de calcular potências inteiras e raízes de um número complexo.

O conjunto $\mathbb{C} = \{x + yi\ /x,\ y \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, onde $i^2 = -1\}$ é definido como sendo o conjunto dos números complexos. Claramente, o fato de que se pode escrever $r = r + 0i$; $\forall\ r \in \mathbb{R}$, mostra que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais está contido em $\mathbb{C}$.

1.1.8.2 Definições Iniciais

Para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, define-se:

i) O número complexo $i = 0 + i$ é a unidade imaginária em $\mathbb{C}$.

ii) Re(z) = x é a parte real de z.

iii) Im(z) = y é a parte imaginária de z.

iv) $\bar{z} = \overline{x + yi} = x - yi$ é o conjugado de z.

v) Temos a igualdade $z = w$, para $w = a + bi \in \mathbb{C}$, se, e somente se, Re($z$) = Re($w$) e Im($z$) = Im($w$).

1.1.8.3 Adição e Multiplicação de Números Complexos

Sejam $z = x + yi$ e $w = a + bi$ quaisquer elementos em $\mathbb{C}$. Então, pode-se definir e estão bem definidas as seguintes operações:

+: $z + w = (x + yi) + (a + b) = (x + a) + (y + b)\,i$ (adição);

·: $z.\ w = (x + yi).\ (a + bi) = (xa - yb) + (xb + ya)\,i$ (multiplicação).

Observação 1: Para quaisquer números complexos z_1, z_2 e z_3 em $\mathbb{C}$, valem e são de fácil verificação as seguintes propriedades:

i) Associatividade: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ e $z_1\,(z_2 z_3) = (z_1 z_2)\,z_3$;

ii) Comutatividade: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1z_2 = z_2z_1$;

iii) Elemento neutro para a adição: $\exists\ 0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$ tal que $0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1$;

iv) Elemento neutro para a multiplicação: $\exists\ 1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$, tal que $1.z_1 = z_1.1 = z_1$;

v) Inverso aditivo: $\exists\ -z_1 = -a + (-b)\,i \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 + (-z_1) = -z_1 + z_1 = 0$.

vi) Seja $0 \neq z = a + bi \in \mathbb{C}$. Então $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right) i$ é o inverso multiplicativo de z.

vii) Vale que $z_1\,(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 = z_2z_1 + z_3z_1 = (z_2 + z_3)\,z_1$ que é a distributividade da multiplicação em relação à adição.

Quase todas as propriedades acima podem ser mostradas tratando a unidade imaginária de $\mathbb{C}$ como se fosse também um número. Verifica-se a comutatividade da multiplicação: Pondo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, tem-se que,

$$z_1z_2 = (a + bi)\,(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)\,i.$$

Agora, $z_2z_1 = (c + di)\,(a + bi) = (ca - db) + (ad + bc)\,i$. Comparando esses produtos, depois de usar a comutatividade da adição e da multiplicação dos números, observa-se que $z_2z_1 = z_1z_2$.

O inverso de um número complexo $z = a + bi \neq 0$ pode obtido pela simples resolução da equação $zw = 1$; onde $w = x + yi$ é a “variável”. Outra propriedade que é de imediata verificação é que $0z = 0$; $\forall\ z \in \mathbb{C}$. Esse pequeno fato também ajuda a demonstrar a seguinte.

Observação 2: Se z_1 e z_2 estão em $\mathbb{C}$ e $z_1 . z_2 = 0$, então tem-se que $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ (em $\mathbb{C}$ não existem divisores de zero).

Se $z_1 \neq 0$, existe $z_1^{-1} \in \mathbb{C}$, tal que $z_1z_1^{-1} = z_1^{-1}z_1 = 1$. Daí, vem que $z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1^{-1}.\,(z_1z_2) = z_1^{-1}.\,0 \Leftrightarrow (z_1^{-1}z_1).\,z_2 = 0 \Leftrightarrow 1z_2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0$. Por Argumentos análogos, se $z_2 \neq 0$, conclui-se que $z_1 = 0$.

1.1.8.4 Propriedades do Conjugado de um Número Complexo

Antes de apresentar uma forma mais concreta de um número complexo z, o que depende diretamente da definição de seu conjugado $\bar{z} = \overline{x + yi} = x - yi$, serão relacionadas algumas das principais propriedades ligadas com esse conceito.

Sejam $z = x + yi$ e $w = a + bi$ quaisquer elementos em $\mathbb{C}$. Então, valem, e são de fácil verificação, que:

i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$;

ii) $\overline{z\,.\,w} = \bar{z}\;.\;\bar{w}$;

iii) $\overline{-z} = -\,\bar{z}$;

iv) $z\,.\,\bar{z} = x^2 + y^2$;

v) $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{\,-1}$, para todo z ≠ 0.

Vamos justificar algumas dessas relações.

Tem-se as igualdades $\overline{z\,w} = \overline{(x+yi)(a+bi)} = \overline{(xa-yb)+(xb+ya)i} =$
$= (xa-yb)-(xb+ya)i = (x - bi)(a - bi) = \bar{z}\,\bar{w}$.

Agora, usando o item demonstrado e o item iv), pode-se escrever,

$$\overline{z^{-1}}\;\bar{z} = \overline{z^{-1}z} = \overline{1+0i} = 1\,.\,\overline{1+0i} = (1+0\,i)\,.\,(\,\overline{1+0i}) = 1^2+0^2 = 1.$$

Isso mostra que $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{\,-1}$.

Pode-se pensar na seguinte representação de um elemento $z = a + bi$ em $\mathbb{C}$: marca-se o valor de Re(z) = a, no eixo horizontal e Im(z) = b, no eixo vertical do plano cartesiano. Então, o encontro das retas paralelas a esses eixos e que passam por esses valores, determinam um ponto do plano que representa $z = a + bi$. O ponto (a, b) representa o número complexo $z = a + bi$, em coordenadas cartesianas.

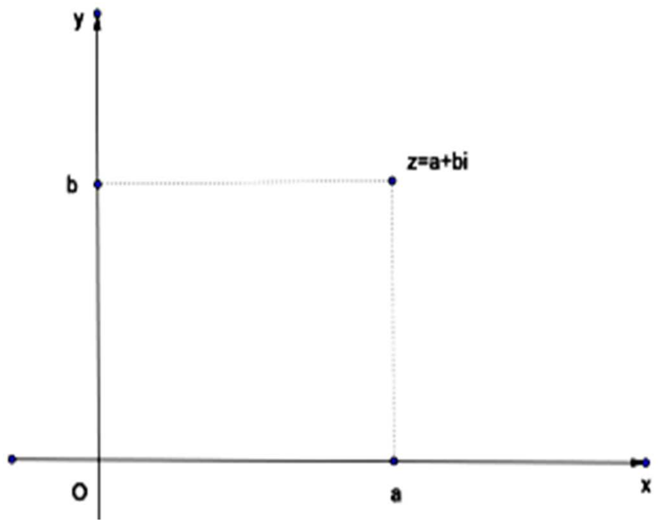


Figura 1: Representação em coordenadas cartesianas
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Devido a definição de igualdade, essa representação de z é única. Assim, de maneira mais concreta, pode-se representar o conjunto dos números complexos como sendo $\mathbb{C}$ = {(x, y) /x, y ∈ $\mathbb{R}$} o conjunto de pontos ou vetores de $\mathbb{R}^2$. Em, **1.4.2**, em frente, justificam melhor essa representação. O plano cujos pontos representam todos os elementos de $\mathbb{C}$, é chamado de plano de Argand – Gauss.

1.1.8.5 Representação do Número $z = a + bi$ como um Ponto do Plano

Considerando a figura abaixo, onde é desenhado um triângulo retângulo, no qual vale a relação de Pitágoras é possível representar um número complexo de outra forma, considerando as coordenadas cartesianas (a, b), usando a distância entre dois pontos e um ângulo desenhado com o eixo horizontal do plano de Argand – Gauss.

i) Denota-se $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de **módulo** do número complexo z. Esse número não negativo é igual à distância do ponto das coordenadas cartesianas de z à origem do plano de Argand- Gauss.

ii) O ângulo formado entre o segmento de reta que liga a origem (0,0) do plano ao ponto (a, b) e o eixo horizontal é chamado de **argumento** do número complexo z.

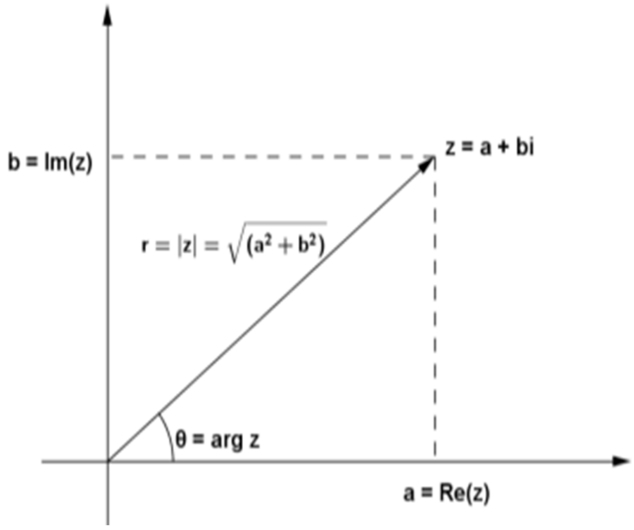


Figura 2: Módulo e Argumento de um número complexo
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Todo número $\varphi = \theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também é chamado de argumento de z. Contudo, será denominado de **argumento (principal)** do número complexo z, o único ângulo $\theta = \arg(z) \in\ ]-\pi, \pi]$. Ainda, no triângulo retângulo, tem-se que $a = |z|cos\theta$ e $b = |z|sen\theta$ e assim, pode-se escrever $z = a + bi = |z|(cos\theta + isen\theta)$ que é chamada a **forma trigonométrica** ou **forma polar** do número complexo z.

Para se ter uma ideia de como podem ser calculadas as potências de um número complexo $z = a + bi$, será verificado como se calcula um produto de números complexos na forma polar.

Dados $z = |z|(cos\alpha + isen\alpha)$ e $w = |w|(cos\beta + isen\beta)$ quaisquer elementos em $\mathbb{C}$. Tem-se que:

$$\begin{aligned} zw &= (|z|(cos\alpha + isen\alpha))(|w|(cos\beta + isen\beta)) \\ &= |z||w|(cos\alpha cos\beta + isen\alpha cos\beta + isen\alpha cos\beta + isen\alpha isen\beta) \\ &= |z||w|(cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta + i(sen\alpha cos\beta + sen\alpha cos\beta)) \\ &= |z||w|(cos(\alpha + \beta) + isen(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

Assim, o produto de dois números complexos na forma polar é igual a um número complexo cujo módulo é o produto dos módulos e cujo argumento é a soma dos argumentos dos números complexos multiplicados.

Observação 2: Vale, devido a De Moivre, a importante fórmula: para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo número complexo $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$, $z^n = |z|^n(cos\ (n\theta) + isen\ (n\theta))$.

A demonstração desse fato pode ser feita por indução e vale para todo $n \in \mathbb{Z}$. O primeiro passo, para o natural $n = 2,$ os cálculos são idênticos aos que foram feitos para calcular o produto dos 2 números complexos z e w, na forma polar. O passo de indução pode ser feito, essencialmente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= zz^n = (|z|(cos\theta + isen\theta))(|z|\ n\ (cos\ (n\theta) + isen\ (n\theta))) \\ &= |z||z|\ n(cos\theta + isen\theta)(cos\ n\theta + isen\ n\theta) = |z|^{n+1} \\ &= (cos\theta cos(n\theta) - sen\theta sen(n\theta) + cos\theta sen(n\theta) + sen\theta icos(n\theta)) \\ &= |z|^{n+1}(cos((n+1)\theta)) + i\ (sen((n+1)\theta)). \end{aligned}$$

Isso mostra o que afirma a observação para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para estender esse resultado para os números inteiros, quando se tem $0 > n \in \mathbb{Z}$, consideramos, nos cálculos acima, $-n > 0 \in \mathbb{N}$. Daí, também vale a igualdade $z^n = |z|^n\ (cos\ (n\theta) + isen\ (n\theta))$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

1.1.8.6 Raízes de um Número Complexo

Considerando o número complexo $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$; vale, para todo $0 < n \in \mathbb{N}$, que

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(cos\ (\frac{\theta+2k\pi}{n}) + isen\ (\frac{\theta+2k\pi}{n})); \text{ onde } k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

são as n raízes (de ordem n) de z.

Particularmente, $w_k = cos\ (\frac{\theta+2k\pi}{n}) + isen\ (\frac{\theta+2k\pi}{n})$; com $k = 0, 1, \cdots, n-1$, são as n raízes distintas (de ordem n) da unidade complexa $1 = 1 + 0i$ em $\mathbb{C}$.

De fato, uma raiz n - ésima de $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$ é um número complexo $w = |w|(cos\varphi + isen\varphi)$ tal que,

$$w^n = (|w|(\cos\varphi + i\mathrm{sen}\varphi))^n = |w|^n(\cos\varphi + i\mathrm{sen}\varphi)^n = |w|^n(cos(n\varphi) + isen(n\varphi)).$$

Como, $w = \sqrt[n]{z}$, tem-se que, $w^n = z$; ou seja,

$$w^n = |w|^n.(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^n) = |z|(cos\theta + isen\theta).$$

Segue então que,

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \text{ e } n\varphi = \theta + 2k'\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

Pondo $k' = pn + k$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $k = 0, 1, \cdots, n - 1$, tem-se que,

$$\varphi = \frac{\theta+2k'\pi}{n} = \frac{\theta+2(pn+k)\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2pn\pi+2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2pn\pi}{n} + 2p\pi.$$

Então, se entende que $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ e as n raízes de z são dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{z} = = \sqrt[n]{|z|}\,(cos\,(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + isen\,(\frac{\theta+2k\pi}{n})); \text{ com } k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Nota-se que, se $z = 1 + 0i = 1$, os números w_0, w_1..., w_{n-1} são distintos entre si, pois a diferença entre os argumentos de dois quaisquer deles não é um múltiplo de 2π.

Alguns conceitos mais avançados, exemplos e outras aplicações deste tema, pode ser visto em Yokoyama (2015).

1.1.9 Matrizes sobre o conjunto $\mathbb{R}$

Este, breve parágrafo contém uma descrição sucinta da estrutura algébrica do conjunto $M_{mxn}(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem $m \times n$ com entradas no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

1.1.9.1 Definições

Segundo Boldrini (1986), define-se que uma matriz de ordem m por n, com m e n não nulos, é qualquer tabela de m linhas e n colunas, formada por números, os quais se denominam de entradas (ou elementos) da matriz. É usual escrever uma matriz A, de ordem $m \times n$ por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$, onde cada a_{ij} refere-se ao elemento da linha i e coluna j. Se a ordem da matriz já estiver subentendida escreve-se apenas $A = [a_{ij}]$.

Toda matriz de ordem $m \times n$, com $m \neq n$, é dita uma **matriz retangular**. As matrizes retangulares de ordem $1 \times n$ e $m \times 1$, com $m \neq 1$ e $n \neq 1$, são chamadas de matriz linha e matriz coluna, respectivamente. Quando ocorrer de a ordem de uma matriz ser $m \times n$ com $m = n$, diz-se que essa matriz é uma **matriz quadrada** de ordem n (ou m). Se em uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{nxn}$, todas as entradas a_{ij} forem iguais a zero, quando $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq n$, então ela será denominada de **matriz diagonal**.

Dentre as matrizes diagonais, pode-se destacar $I_n = [a_{ij}]_{nxn}$,; onde $a_{ij} = 1$, se $i = j$ e $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$, para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Essa matriz é denominada de **matriz identidade** de ordem n. Esse nome para I_n é sugerido pelo fato de que essa matriz é o elemento neutro da multiplicação usual de matrizes.

1.1.9.2 Adição de Matrizes

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{mxn}$, e $B = [b_{ij}]_{mxn}$, de mesma ordem, define-se a **adição** de A e B, representada por $A + B$, como sendo a matriz $C = [c_{ij}]_{mxn}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$. Decorrem dessa definição, imediatas propriedades.

Suponha que A, B e C sejam matrizes de mesma ordem. Então valem:

$\boldsymbol{A1}$: $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associatividade da adição);

$\boldsymbol{A2}$: $A + B = B + A$ (Comutatividade da adição);

$\boldsymbol{A3}$: $A + O = O + A = A$ (Existência de elemento neutro, onde O é a matriz nula);

$\boldsymbol{A4}$: $A + (-A) = -A + A = O$ (Existência de inverso aditivo).

Dadas matrizes quaisquer $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $B = [b_{ij}]_{mxn}$ e $C = [c_{ij}]_{mxn}$, tem-se que, $A + (B + C) = [a_{ij}]_{mxn} + ([b_{ij}]_{mxn} + [c_{ij}]_{mxn}) = [a_{ij}]_{mxn} + [b_{ij} + c_{ij}]_{mxn}$

$$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{mxn} = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{mxn}$$

$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn} + [c_{ij}]_{mxn} = ([a_{ij}]_{mxn} + [b_{ij}]_{mxn}) + [c_{ij}]_{mxn}$$

$$= (A + B) + C.$$

Portanto, vale $A1$. As demais propriedades podem ser verificadas pelo leitor. Não é difícil perceber que elas decorrem imediatamente das propriedades dos números reais.

1.1.9.3 Multiplicação por um Escalar

Sejam α um número real e $A = [a_{ij}]_{mxn}$, uma matriz de ordem $m \times n$. Define-se multiplicação de α pela matriz A, a matriz $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{mxn}$,.

Note que se $\alpha = 0$, tem-se que $0A = 0$ (matriz nula), independente de qual seja a matriz A.

Valem, para A e B matrizes de mesma ordem e α e λ números quaisquer, as seguintes propriedades:

$\boldsymbol{E1}$: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
$\boldsymbol{E2}$: $(\alpha + \lambda)A = \alpha A + \lambda A$;
$\boldsymbol{E3}$: $\alpha(\lambda A) = (\alpha\lambda)A$;
$\boldsymbol{E4}$: $1A = A$.

Sejam $A=[a_{ij}]_{mxn}$ e $B=[b_{ij}]_{mxn}$ matrizes de mesma ordem e α um número real, tem-se,

$$\begin{aligned}\alpha(A + B) &= \alpha([a_{ij}]_{mxn} + [b_{ij}]_{mxn}) = \alpha([a_{ij} + b_{ij}]_{mxn})\\ &= [\alpha(a_{ij} + b_{ij})]_{mxn}\\ &= [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}]_{mxn} = [\alpha a_{ij}]_{mxn} \ [\alpha b_{ij}]_{mxn}]\\ &= \alpha[[a_{ij}]_{mxn} + \alpha[b_{ij}]_{mxn} = \alpha A + \alpha B.\end{aligned}$$

Portanto, vale $E1$. Os outros fatos não verificados também são decorrentes das propriedades dos números reais.

1.1.9.4 Multiplicação entre Matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]_{mxl}$ e $B = [b_{ij}]_{lxn}$ duas matrizes. Define-se a multiplicação de A por B, nessa ordem, a matriz $C = [c_{ij}]_{mxn}$, de ordem $m \times n$, tal que cada entrada é definida por,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{il}b_{lj}$$

para todo 1 ≤ i ≤ m e para todo 1 ≤ j ≤ n.

Em geral, não vale a igualdade AB = BA, mesmo que as matrizes sejam quadradas de mesma ordem. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$, tem-se,

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} \neq \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} = BA.$

Observa-se que essa multiplicação é um tanto diferente do que comumente se vê quando determinamos produtos em outros conjuntos. Mesmo que seja $m \neq n$ o que significa $M_{m\,x\,l}(\mathbb{R}) \neq M_{l\,x\,n}(\mathbb{R})$, pode-se calcular AB = $[a_{ij}]_{mxl}.[b_{ij}]_{lxn}$. Mas, $AB \notin M_{m\,x\,l}(\mathbb{R})$ e $AB \notin M_{l\,x\,n}(\mathbb{R})$. Esse produto cai em $M_{mxn}(\mathbb{R})$ que, em geral, difere dos conjuntos onde as matrizes A e B foram pegas.

Algumas propriedades podem ser relacionadas para essa operação: sejam A, B e C matrizes tais que os produtos indicados abaixo são possíveis de serem calculados. Então, valem:

$\boldsymbol{M1}$: A (B + C) = AB + AC (Distributiva à esquerda em relação à adição);
$\boldsymbol{M2}$: (A + B)C = AC + BC (Distributiva à direita em relação à adição);
$\boldsymbol{M3}$: $A(BC)$ = $(AB)C$ (Associatividade da multiplicação);
$\boldsymbol{M4}$: Se A é uma matriz quadrada de ordem n, então AI_n = I_nA = A (Existência de elemento neutro da multiplicação).

As propriedades decorrem da definição de multiplicação de matrizes e das propriedades da multiplicação dos números reais.

Tem-se,

$$\begin{aligned} \mathrm{A(B+C)} &= [a_{ik}]([\,b_{kj}] + [c_{kj}]) = [a_{ik}](\,b_{kj} + c_{kj}]) \\ &= [\sum_{k=1}^{l} a_{ik}\,(b_{kj} + c_{kj})] = [\sum_{k=1}^{l} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj})\,] \\ &= [\sum_{k=1}^{l} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj})\,] = [\sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}\,] + [\sum_{k=1}^{l} a_{ik}c_{kj}\,] \\ &= AB + AC; \text{ com } i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Portanto, fica verificado a validade de $\boldsymbol{M1}$.

Ainda, sobre a operação de multiplicação, dada uma matriz quadrada A de ordem n, diz-se que a matriz B é a inversa da matriz A se acontecer que AB = BA = I_n. Nesse caso, denota-se por B = A^{-1} a inversa da matriz A. Claro que, se A é inversível, a ordem de A^{-1} é a mesma de A. Além disso, A = $(A^{-1})^{-1}$.

Uma matriz é dita inversível quando existe A^{-1}, sua inversa. Em particular, as matrizes A = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}$ e B = $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{2x2}$ são tais que AB = BA = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$; logo, a matriz B é a inversa de A, e vice-versa. Já se sabe, das discussões feitas, no final da página 15, que a inversa da matriz A é única.

1.1.9.5 Matriz Transposta

Dada uma matriz A = $[a_{ij}]_{mxn}$, diz-se que a matriz A^t= $[a_{ji}]_{nxm}$ é a transposta da matriz A. Em particular, se acontecer de A^t = A, diz-se que a matriz A é uma matriz simétrica. Se acontecer de A^t = $-A$, diz-se que a matriz A é uma matriz antissimétrica.

Para toda matriz A = $[a_{ij}]_{mxn}$ e B = $[b_{ij}]$ e todo número real α, desde que a soma e o produto possam ser calculados, vale que:

$\boldsymbol{T1}$: $(A^t)^t$ = A;
$\boldsymbol{T2}$: $(A + B)^t$= A^t+ B^t
$\boldsymbol{T3}$: $(A.B)^t$= A^t. B^t
$\boldsymbol{T4}$: $(\alpha A)^t$ = αA^t

As verificações das propriedades acima são deixadas para o leitor por também serem de fácil verificação.

1.1.10 Homomorfismos

O seguinte tópico consiste em apresentar algumas funções que são especiais. Os homomorfismos permitem comparar estruturas algébricas. Muitas vezes significam uma estratégia para que se possa, a partir do domínio, obter uma descrição do seu contra domínio, e vice versa.

É possível constatar que em, Assis (2018), ortogonalidade de matrizes, definida por meio da transposta, pode ser traduzida, em $\mathbb{C}$, como sendo o conjugado de um número complexo.

1.1.10.1 Definições

Sejam X e Y conjuntos não vazios. Suponha que $*$ é uma operação bem definida em X e que □ é uma operação bem definida em Y. Uma função,

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

é dita um homomorfismo se, e somente se, $\forall\ a,\ b \in X$, vale que $\varphi(a * b) = \varphi(a) \,\square\, \varphi(b)$.

Podemos citar como exemplo a função linear,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax \end{aligned}$$

onde $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Essa conhecida função é um homomorfismo (aditivo): $\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}$, vale a igualdade $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

As funções reais (do Cálculo) $ln(x)$ e $exp(x)$ também são exemplos de homomorfismos.

Nota-se que enquanto um leva um produto em uma soma a outra leva uma soma em um produto, respectivamente.

Um homomorfismo injetivo é denominado **monomorfismo**. Se for sobrejetivo é denominado **epimorfismo**. Se for bijetivo é denominado **isomorfismo**.

Observação 1: Seja φ um isomorfismo de X em Y; então valem as seguintes propriedades:

i) Se e é o elemento neutro para a operação $*$ definida em X, e' é o elemento neutro para a operação □ definida em Y e valem as leis do cancelamento para a operação □; tem-se que $\varphi(e) = e$';

ii) Se x^{-1} é o inverso de um elemento x em X, então $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1} = \varphi(x)^{-1}$.

Primeiramente, tem-se que $e * e = e$. Portanto pode-se escrever a igualdade $e'\square\varphi(e) = \varphi(e) = \varphi(e * e) = \varphi(e) \square \varphi(e)$; já que φ é um homomorfismo. Cancelando $\varphi(e)$ em ambos os membros da igualdade, fica demonstrado o item i). Agora, de $x * x^{-1}$, obtém-se $\varphi(x * x^{-1}) = \varphi(e)$. Como φ é um homomorfismo e, pelo item a), $\varphi(e) = e'$, vem que $\varphi(x) \square \varphi(x^{-1}) = e'$. Isto mostra que $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

Exemplo 1: Um isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e o plano $\mathbb{R}^2$

Considerando o conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) / a, b \in \mathbb{R}\}$ estão definidas as seguintes operações de adição e multiplicação, $\forall$ $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$.

+: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

·: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Pode-se identificar cada número complexo com um único par ordenado de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, já que, a função,

$$\begin{aligned} \delta: \quad \mathbb{C} \quad &\rightarrow \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ z = a + bi &\longmapsto \delta(a + bi) = (a, b) \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

De fato: primeiramente, para $\forall$ $z = a + bi$, $w = c + di \in \mathbb{C} = D(\delta)$, vale que $\delta(z) = \delta(w) \Leftrightarrow \delta(a + bi) = \delta(c + di) \Leftrightarrow (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$. E, assim, tem-se que $z = w$ e δ é injetiva.

Também, tem-se que, para toda dupla (a, b) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = CD(\delta)$, $\exists$ um número complexo $z = a + bi$ em $\mathbb{C} = D(\delta)$, tal que $\delta(z)$ $\delta(a + bi) = (a, b)$ e, portanto, δ é sobrejetiva.

Por fim, $\forall$ $z = a + bi$, $w = c + di \in \mathbb{C}$, tem-se $\delta(z + w) = \delta((a + bi) + (c + di)) = \delta((a + c) + (b + d)i) = (a + c, b + d) = (a, b) + (c, d) = \delta(z) + \delta(w)$. Com relação à multiplicação, tem-se $\delta(zw) = \delta((a + bi)(c + di)) = \delta((ac + bd) + (ad + bc)i) = (ac - bd, ad + bc) = (a, b).(c, d) = \delta(z)\delta(w)$.

Conclui-se que $\mathbb{C}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Essa identificação de (a, b) com $a + bi$, depois de observado um triângulo retângulo determinado por (a, b), possibilitou escrever a forma polar em 1.1.8.5.

A equivalência $a = c$ e $b = d \Leftrightarrow (a, b) = (c, d)$, usada para mostrar a injetividade da função δ, depende do conceito de igualdade entre pares ordenados.

Exemplo 2: Isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e um subconjunto $\mathcal{C}$ de $M_2(\mathbb{R})$

Pode-se definir uma função que identifica cada número $z = a + bi$ de $\mathbb{C}$ como uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2x2}$ de $M_2(\mathbb{R})$. Esse isomorfismo mostra mais uma versão concreta de um número complexo que será apresentado a seguir.

A função,

$$\varphi: \quad \mathbb{C} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2x2} / \text{x, y} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$z = x + yi \quad \mapsto \quad \varphi(z) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2x2}$$

é um isomorfismo.

De fato, para $z_1 = a + bi$ e $z_2 = b + di$ elementos quaisquer em $\mathbb{C}$. Vale que, $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ e, portanto, $\varphi(z_1 + z_2) = \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ -b - d) & a + c \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2x2} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}_{2x2} = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$.

Além disso,

$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$, logo, $\varphi(z_1 z_2) = \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc) & ac - bd \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2x2} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}_{2x2} = \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2)$.

Agora, se $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, tem-se $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}_{2x2} \Leftrightarrow a = c$ e $b = d \Leftrightarrow z_1 = z_2$ e φ é injetiva.

Por fim, para toda matriz $M = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2x2} \in \mathcal{C}$ existe $z = x + yi \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi(z) = M$. Isso mostra a sobrejetividade de φ. Concluímos que $\mathbb{C} \cong \mathcal{C}$.

Ele contém as informações que permitem desenvolver a ideia central deste trabalho. Apesar de se tratar de alguns temas que fazem parte de uma cultura da Matemática Básica.

2 MATRIZES QUE DETERMINAM POLÍGONOS REGULARES

Neste capítulo, depois de definir o conjunto $\mathcal{O}(M_2(\mathbb{R}))$ das matrizes ortogonais de ordem 2, verifica-se a intersecção deste com a cópia $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}$ dentro de $M_2(\mathbb{R})$; mostrando que o conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{C})$, dos elementos ortogonais de $\mathcal{C}$, está contido propriamente nesse conjunto.

Por isomorfismo, constata-se que $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ tem uma pré-imagem em $\mathbb{C}$, que coincide com $\mathcal{Z}$ = {$z \in \mathbb{C}$ / $z\bar{z}$ = 1}. Esse conjunto $\mathcal{Z}$ = $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ é denominado de conjunto dos elementos ortogonais de $\mathbb{C}$, Assis (2018, p. 41) cita em seu trabalho.

2.1 OS ELEMENTOS ORTOGONAIS DE $M_2(\mathbb{R})$

Primeiramente, para que uma matriz M seja ortogonal, tem-se que $M\,M^t$ = I_n. Então, seja uma matriz M = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}_{2x2}$ ∈ $M_2(\mathbb{R})$. A igualdade,

$$MM^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2x2} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$$

impõe as seguintes relações: $a^2 + b^2 = c^2 + b^2 = 1$ e $ac + bd = 0$. Portanto, define-se por,

$$\mathcal{O}(M_2(\mathbb{R})) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) / {a_{11}}^2 + {a_{12}}^2 = {a_{21}}^2 + {a_{22}}^2 = 1 \text{ e } a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0\}$$
$$= \{M \in M_2(\mathbb{R});\ M.M^t = I_2\},$$

o conjunto das matrizes ortogonais de $M_2(\mathbb{R})$.

Obviamente, $\mathcal{C}$ não coincide com $\mathcal{O}(M_2(\mathbb{R}))$. Isso fica claro observado que a matriz M = $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{2x2}$ é um elemento de $\mathcal{O}(M_2(\mathbb{R}))$, pois $M.M^t$ = I_2. Porém, sendo $m_{11} \neq m_{22}$, tem-se que $M \notin \mathcal{C}$ e isso mostra que $\mathcal{O}(M_2(\mathbb{R}))$, $\not\subset \mathcal{C}$. Por outro lado, é claro que a matriz N = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}$ está em $\mathcal{C}$ e não está em $\mathcal{O}(M_2(\mathbb{R}))$, já que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{2x2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{2x2} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$; o que mostra que $N \notin \mathcal{O}(M_2(\mathbb{R}))$ e, assim, $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{O}(M_2(\mathbb{R}))$.

Agora, pelo fato de que $\mathcal{O}(M_2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C} \neq \phi$, faz sentido investigar os elementos dessa intersecção que, na verdade, são formas concretas de números complexos, que são matrizes ortogonais.

A análise é a seguinte: um elemento de $\mathcal{C}$, digamos $M = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2x2}$, está em $\mathcal{O}(M_2(\mathbb{R}))$ se, e somente se, $MM^t = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2x2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ab - ab \\ ab - ab & a^2 + b^2 \end{bmatrix}_{2x2}$ $= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$. Daí, obtém-se a igualdade $a^2 + b^2 = 1$, que por sua vez, fornece $b = \pm\sqrt{1 - a^2}$, com $-1 \leq a \leq 1$. Isso mostra que as matrizes ortogonais de $M_2(\mathbb{R})$ dentro de $\mathcal{C}$ formam o conjunto,

$$\mathcal{O}(\mathcal{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & \pm\sqrt{1-a^2} \\ -\left(\pm\sqrt{1-a^2}\right) & a \end{bmatrix}_{2\text{x}2} / a \in \mathbb{R} \text{ e } -1 \leq a \leq 1 \right\} = \mathcal{O}(M_2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}.$$

2.2 AS φ^{-1} - IMAGENS DOS ELEMENTOS ORTOGONAIS DE $\mathcal{C}$

Na observação em 1.4.3 vê-se que a função φ é bijetiva. Evidentemente, pode-se definir a função φ^{-1}, bijetiva, inversa de φ, que associa a cada elemento em $\mathcal{C}$, um único elemento em $\mathbb{C}$. Observa-se como se comportam as imagens dos elementos de $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ no conjunto dos números complexos.

Tais investigações, nos levam a um interessante subconjunto de $\mathbb{C}$, que assim como o conjunto das matrizes ortogonais, cujos elementos inversos se destacam por serem as matrizes transpostas, tal conjunto de números complexos pode também ser destacado a partir uma particular característica relacionada aos seus inversos.

Define-se por,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: \mathcal{C} &\to \mathbb{C} \\ M &\mapsto \varphi^{-1}(M) \end{aligned}$$

A função que associa a cada matriz em $\mathcal{C}$ um único número complexo. Assim, a função $\varphi^{-1}/_{\mathcal{O}(\mathcal{C})}$, restrição da função φ^{-1} ao conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{C})$, fornece, através desse isomorfismo inverso, o subconjunto de números complexos,

$$\mathcal{Z} = \{x \pm \sqrt{1 - x^2}\, i;\ i = \sqrt{-1}\text{, com } i^2 = -1 \text{ e } x \in \mathbb{R} \text{ com } -1 \leq x \leq 1\}.$$

Observação 1:

i) Todo elemento de $\mathcal{Z}$ tem módulo igual a 1, ou seja, no plano complexo, todo elemento de $\mathcal{Z}$ está sobre uma circunferência de raio 1 e centro na origem;

ii) $w\overline{w}$ = 1, para todo $w \in \mathcal{Z}$, sendo esta a definição de um número complexo ortogonal.

De fato, seja $w = x \pm \sqrt{1 - x^2}\,i$ um elemento de $\mathcal{Z}$. Tem - se então, que $|w| = \sqrt{x^2 + (\pm\sqrt{1 - x^2}\,i)^2} = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)} = \sqrt{1} = 1$. Portanto, vale i). Tem -se, ainda, que $w \cdot \overline{w} = (x + \sqrt{1 - x^2}\ i)\cdot(x - \sqrt{1 - x^2}\ i) = x^2 - (1 - x^2)i^2 = x^2 + (1 - x^2) = 1$, o que mostra a validade de ii).

O produto entre números complexos ortogonais permanece na circunferência unitária centrada na origem. De fato: sejam z_1 e z_2 dois números complexos ortogonais. E sejam θ_1 e θ_2 os argumentos de z_1 e z_2, respectivamente. Como o módulo de z_1 e z_2 são iguais a 1, tem-se $z_1z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + isen\,(\theta_1 + \theta_2)$, de onde obtém -se, $|z_1z_2| = |\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen\,(\theta_1 + \theta_2)| = 1$

Além disso, uma potência de um número complexo ortogonal permanece sobre a circunferência unitária centrada na origem: pela formula de De Moivre, $z^n = cos\,(n\theta) + isen\,(n\theta)$, pois o módulo de z é igual a 1. Daí,

$$|cos\, n\theta + isen\, n\theta| = \sqrt{(cos\, n\theta)^2 + (sen\, n\theta)^2} = 1$$

De maneira semelhante é fácil mostrar que a n - ésima raiz de um número complexo ortogonal permanece sobre a circunferência de raio 1.

2.3 GRUPOS

A estrutura de um grupo e algumas de suas propriedades é usada para as construções apresentadas neste capítulo.

2.3.1 Definição

Seja $*$ uma operação definida em um conjunto não vazio G.

i) Diz-se que G é um grupo com respeito à operação $*$ (e anota-se $(G, *)$) se, e somente se, $\forall\ g_1, g_2, g_3 \in G$, valem:

$\mathbf{G_1}$ Associatividade: $(g_1 * g_2, \ ) * g_3 = g_1 * (g_2, \ * g_3)$;

$\mathbf{G_2}$ Existência de elemento neutro: $\exists\ e \in G$ tal que $e * g_1 \ = g_1 * e = g_1$;

$\mathbf{G_3}$ Existência de inverso: $\exists\ g_1{}^{-1} \in G$ tal que $g_1{}^{-1} * g_1 \ = g_1 \ * g_1{}^{-1} = e$.

ii) Diz-se que G é um grupo comutativo (abeliano) se, além dessas propriedades citadas acima, vale $\mathbf{G_4}$ Comutatividade: $g_1 \ * g_2 = g_2 * g_1$

iii) Dado um grupo G; um subconjunto H de G é chamado de subgrupo se, e só se, $\forall\ x, y \in G$.

a) $1 \in H$;

b) $\forall\ x,\ y \in$ H resulta $xy \in H$;

c) $\forall\ x \in$ H resulta $x^{-1} \in H$. Isto é, H tem o elemento neutro e é fechado para a operação de G e fechado para inversos ($x \in H$ se, e só, se $x^{-1} \in H$).

Se, e somente se, $\forall\ x, y \in G,$

a) $H \neq \phi$;

b) $\forall\ x,\ y \in$ H resulta $xy^{-1} \in H$

Existem grupos que são conjuntos finitos e grupos que são infinitos, como no caso em que $G = \mathbb{Z}$ e a operação é a adição. Nesse caso, o elemento neutro é o 0. Vale destacar também que se um grupo G é finito, chama-se ordem de G ao número de elementos do conjunto G. Notação: $|G|$ = ordem de G. Se $g \in G$, o menor inteiro positivo t tal que $g^t = e$, é denominado de ordem do elemento g.

A seguir será apresentado um conhecido resultado que é o **TEOREMA DE LAGRANGE**, suas aplicações, exercícios e demais propriedades podem ser vistas em Gonçalves (2008).

2.3.2 O Teorema de Lagrange (Para Grupos Finitos)

Se G um grupo e H um subgrupo de G, a relação "~": $x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ define uma relação de equivalência no conjunto G.

De fato, $\forall\ x, y, z \in G$, valem as propriedades

i) Reflexiva: $xx^{-1} = e \in H \Rightarrow x \sim x$.

ii) Simétrica: se $x \sim y \Rightarrow xy^{-1} \in H \Rightarrow (xy^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow (y^{-1})^{-1}x^{-1} = yx^{-1} \in H \Rightarrow y \sim x$.

iii) Transitiva: se $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow xy^{-1}, yz^{-1} \in H \Rightarrow (xy^{-1})(yz^{-1}) = xz^{-1} \in H$ e $x \sim z$.

Daí, por definição, a classe de equivalência de cada $x \in G$ é o conjunto $\bar{x} = \{y \in \mathrm{G}/\mathrm{y} \sim x\}$ = $\{y \in \mathrm{G}/\mathrm{y}x^{-1} \in H\}$ = $\{y \in G/\ yx^{-1} = h \in H\}$ = $\{hx\ /\ h \in H\}$ = Hx.

Esse conjunto Hx, que contém o elemento x é chamado de classe lateral à direita de H em G. Particularmente, $\bar{e} = H$ é a classe lateral do elemento neutro e.

O conjunto $G/H = \{\bar{x}\ /\ x \in G\} = \{Hx\ /\ x \in G\}$ é o conjunto de todas as classes laterais de H em G.

Se G é finito; então $G/H = \{Hx_1, Hx_2, \cdots, Hx_n/x_i \in G; i = 1,2, \cdots, n \text{ e } 1 \leq \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto finito.

Observação 1:

i) Sejam G um grupo finito e H um subgrupo de G. Então, valem

a) $\bigcup_{x \in G} Hx = G;$

b) Hx = $Hy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \Leftrightarrow x \sim y$;

c) Se $Hx \neq Hy$; então $Hx \cap Hy$ = $\phi \Leftrightarrow Hx \cap Hy \neq \phi$; então $Hx = Hy$.

ii) A aplicação abaixo é bijetiva

$$\psi: H \to Hx$$
$$h \mapsto \psi(h) = hx$$

O item i) mostra que G/H é uma partição de G. Em ii), a função ψ mostra que cada classe lateral tem a mesma quantidade de elementos de H.

A observação acima permite provar o importante resultado a seguir.

O Teorema de Lagrange: Sejam G um grupo finito e H um subgrupo de G. Então, a ordem de H divide a ordem de G.

Sabe-se que o número de classes laterais à direta de H em G são finitas e formam uma partição desse conjunto.

Sejam x_1H, x_2H, ... x_nH, as n distintas classes laterais à direita de H em G. Como G = Hx_1 U Hx_2 U ... U Hx_n e $|H = \#(Hx_i)|$ daí; para $i = 1, 2, \ldots, n,$ tem - se que, $|G|$ = $\#(Hx_1) + \#(Hx_2) +$ ... + $\#(Hx_n)$ = $|H|$ + $|H|$ + ... + $|H|$ = $n|H|$. Isso mostra que a ordem de H divide a ordem de G.

A recíproca desse teorema de Lagrange para grupos finitos, em geral, não é verdadeira. Isso pode ser visto, no exemplo seguinte.

Exemplo 1: Considere o grupo A_4, que é o grupo de permutações pares de quatro de três elementos. A ordem de A_4 é 12.

As possíveis ordens de subgrupos de A_4 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

- Subgrupos de ordem 1: Sempre existe o subgrupo trivial {e}, que contém apenas o elemento neutro (a identidade) de A_4
- A_4 não possui subgrupos de ordem 6. Isso pode ser demonstrado analisando as permutações em A_4. Os elementos de A_4 podem ser divididos em três classes de tamanhos diferentes: elementos que são ciclos de comprimento 1 (identidade), elementos que são ciclos de comprimento 2 e elementos que são ciclos de comprimento 3. Não é possível formar um subgrupo de ordem 6 usando esses elementos, pois isso exigiria uma combinação de elementos de diferentes classes de tamanho, o que não é possível em A_4

Portanto, não existe um subgrupo de ordem 6 em A_4, o que confirma que o teorema de Lagrange não é aplicável neste caso, demonstrando que a volta do teorema de Lagrange não é válida

Mas, é conhecido e de fácil verificação que a recíproca desse teorema vale para grupos cíclicos finitos.

Se G = $\langle g \rangle$ = $\{g^t/\ t \in \mathbb{Z}\}$, diz - se que G é um grupo cíclico e, nesse caso, g é denominado de (um) gerador de G.

Exemplo 2: Se G é infinito, G é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}$; ou seja, $G \cong (\mathbb{Z}, +)$. O isomorfismo pode ser definido por

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow G = \langle \mathrm{g} \rangle = \{g^t/\ t \in \mathbb{Z}\}$$
$$t \mapsto f(t) = g^t$$

Observação 2: Se G = $\langle g \rangle$ = $\{g^t/\ t \in \mathbb{Z}\}$ é um grupo cíclico, valem;

i) Cada subgrupo de G é cíclico;

ii) Se $d \setminus n = |G|$, então G possui um subgrupo de ordem exatamente igual a d;

iii) O elemento g^k tem ordem igual à $|\langle g^k \rangle| = \frac{n}{mdc(k,n)}$.

A validade do item i) é clara se $G \cong (\mathbb{Z} +)$ ou $G = \{e\}$. Agora, vamos supor que G = $\langle g \rangle$ e que $|G| = n > 1$; então vale que n é o menor inteiro positivo tal que $g^n = e$.

Se H é um subgrupo não trivial de G, vale que $g^k \in H$, para algum inteiro $1 < k \leq n-1$. Seja s o menor intero tal que $g^s \in H$. Então, vale que $H = \langle g^s \rangle$. Primeiro, se $g^p \in H$, pelo algoritmo da divisão, vale que $p = qs + r \Leftrightarrow r = p - qs$; onde $0 \leq r < s$. Mas, então $g^r = g^{p-qs} = g^p((g^s)^q)^{-1} \in H$. Pela minimalidade de s, vale que $r = 0$ e $e = g^{p-qs} = g^p((g^s)^q)^{-1} \Leftrightarrow g^p = (g^s)^q$ e todo elemento de H é uma potência de g^s. Consequentemente, temos $H \leq \langle g^s \rangle \leq H$ e H é cíclico.

O leitor pode tentar justificar ii) e iii), consultando um texto de Álgebra que verse sobre teoria dos grupos. Ver Gonçalves (2008).

Exemplo 3: Se G é finito de ordem n, temos que $G \cong (\mathbb{U}_n,\cdot)$; onde $\mathbb{U}_n$ é o conjunto das raízes (na forma polar) de ordem n da unidade complexa e "$\cdot$" é a multiplicação definida no conjunto $\mathbb{C}$. O isomorfismo pode ser definido por

$$\begin{aligned} t\colon \mathbb{U}_n &\to G = \langle \mathrm{g} \rangle = \{g^k /\, k = 0,1,2,\cdots,n-1\} \\ \mathrm{w}_k &\mapsto t(\mathrm{w}_k) = g^k \end{aligned}$$

onde $\mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{w}_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) /\ 1 < n \in \mathbb{Z} \text{ e } \mathrm{k} = 0, 1, \cdots, n-1\right\}$.

O Conjunto $\mathbb{U}_n$, formado pelas raízes enésimas da unidade complexa, é multiplicativamente fechado.

A unicidade do ângulo θ = arg (z) $\in]-\pi, \pi]$ e a regra de que o produto de dois números complexos, na forma polar, é igual a um número complexo cujo módulo é o produto dos módulos e cujo argumento é a soma dos argumentos desses números, mostram que o resultado da multiplicação de dois elementos de $\mathbb{U}_n$ é também uma raiz de ordem n da unidade complexa.

Valem também as seguintes propriedades, para todo w_h, w_j, $\mathrm{w}_l \in \mathbb{U}_n$

i) Associatividade: $\mathrm{w}_h(\mathrm{w}_j\mathrm{w}_l) = (\mathrm{w}_h\mathrm{w}_j)\,\mathrm{w}_l$;

ii) Comutatividade: $\mathrm{w}_h\mathrm{w}_j = \mathrm{w}_j\mathrm{w}_h$;

iii) Elemento neutro: $\exists\ 1 + 0i = \mathrm{w}_0$, tal que $(1 + 0i)\,\mathrm{w}_h = \mathrm{w}_h\,(1 + 0i) = \mathrm{w}_h$;

iv) Existência de inverso: $\exists\ \mathrm{w}_g = cos\left(\frac{2g\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2g\pi}{n}\right) \in \mathbb{U}_n$, tal que, $\mathrm{w}_h\mathrm{w}_g = \mathrm{w}_g\mathrm{w}_h$ $= 1 = 1 + 0i$.

De fato, as propriedades de associatividade e comutatividade são herdadas de $\mathbb{C}$ por $\mathbb{U}_n$. O elemento neutro 1 = w_0 = cos ($\frac{2.0.\pi}{n}$)+ $isen$ ($\frac{2.0.\pi}{n}$) = cos (0) + $isen$ (0) é uma raiz da unidade. E se w_h = cos ($\frac{2h\pi}{n}$)+ $isen$ ($\frac{2h\pi}{n}$), com h = 0, 1, $\cdots$, n − 1, basta tomar $g = n - h$ para ter, $w_h w_g$ = $w_g w_h$ = 1 = 1 + 0i = w_0.

Observação 3: Seja G = $\langle g \rangle$ = $\{g^t / \ t \in \mathbb{Z}\}$ um grupo cíclico de ordem $n > 1$. Valem as seguintes propriedades:

i) G = $\langle g \rangle$ = $\{g^t / \ t \in \mathbb{Z}\}$ é comutativo (e, portanto, valem todas as propriedades dos grupos abelianos finitamente gerados para G).
ii) Se H e K são subgrupos de G e mdc($|H|, |K|$) = d; então, HK é um subgrupo de G de ordem $\frac{|H||K|}{\mathrm{d}}$, mais precisamente se d = 1, HK é um subgrupo de G de ordem $|H||K|$.

Todos os itens acima são de fácil verificação e como consequência deles, temos o seguinte conjunto.

Observação 4: O conjunto,

$$\mathcal{U}_n = \left\{\varphi(w_k)/\mathrm{w}_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right); 1 < n \in \mathbb{Z} \text{ e } k = 0, 1, \cdots, n-1\right\};$$

onde φ é a aplicação do exemplo 2, em **1.1.10**, é um grupo cíclico dentro de $\mathcal{C} \subset M_2(\mathbb{R})$. Portanto, valem:
i) $\mathcal{U}_n$ é comutativo (e, portanto, valem todas as propriedades dos grupos abelianos finitamente gerados para $\mathcal{U}$).
ii) Se H e K são subgrupos de $\mathcal{U}_n$ e mdc($|H|, |K|$) = d; então, HK é um subgrupo de $\mathcal{U}_n$ de ordem $\frac{|H||K|}{\mathrm{d}}$, mais precisamente se d = 1, HK é um subgrupo de $\mathcal{U}_n$ de ordem $|H||K|$.

2.4 MATRIZES QUE DETERMINAM POLÍGONOS REGULARES

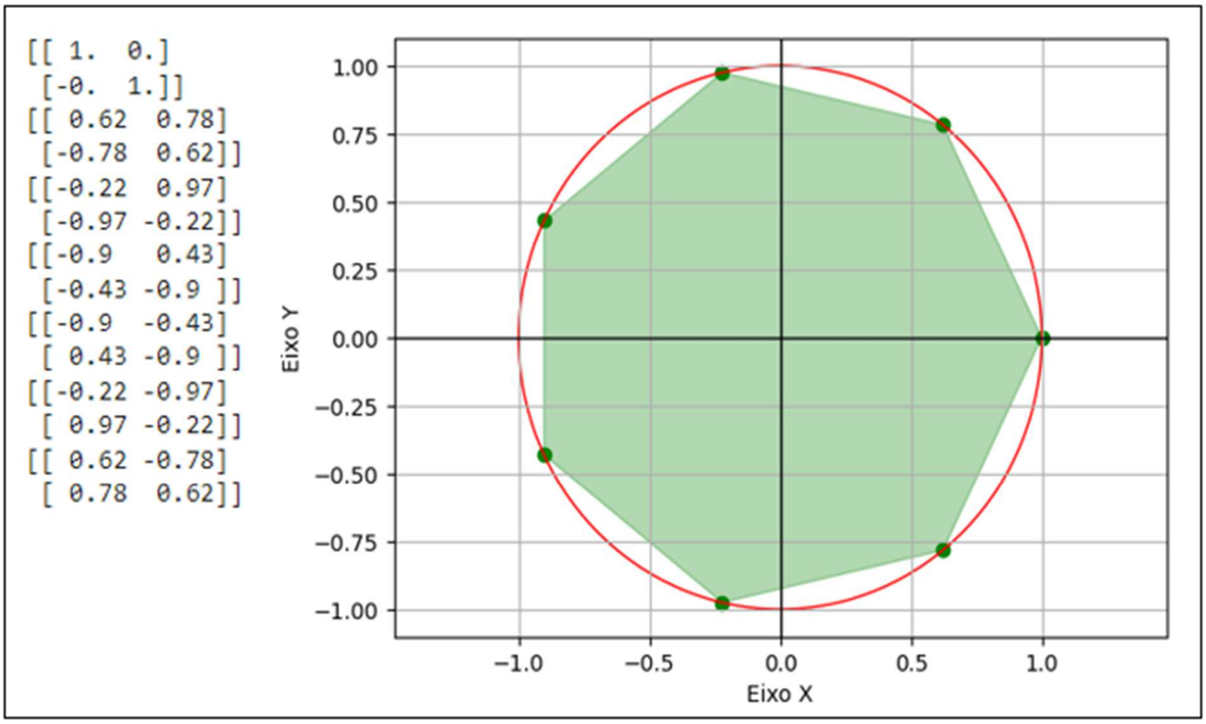
Escolhemos somente uma observação para encerrar este parágrafo, dando exemplos concretos de nossas deduções.

Observação 5: As matrizes, elementos de $\mathcal{U}_n$, formam exatamente o seguinte subconjunto de $\mathcal{C} \subset M_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{U}_n = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{bmatrix}_{2\text{x}2} / \ 1 < n \in \mathbb{Z} \text{ e } \mathrm{k} = 0, 1, \cdots, n-1 \right\}$$

Exemplo 1: O conjunto $\mathcal{U}_7 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{7}\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{7}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right) \end{bmatrix}_{2\text{x}2} / \ \mathrm{k} = 0, 1, \cdots, 6 \right\}$, determina o polígono regular abaixo, aplicando a função $\delta \, o \, \varphi^{-1}$ aos seus elementos, onde φ é a aplicação do exemplo 2, em 1.1.10 e δ é a aplicação do exemplo 1, em 1.1.10 e os elementos do conjunto são:

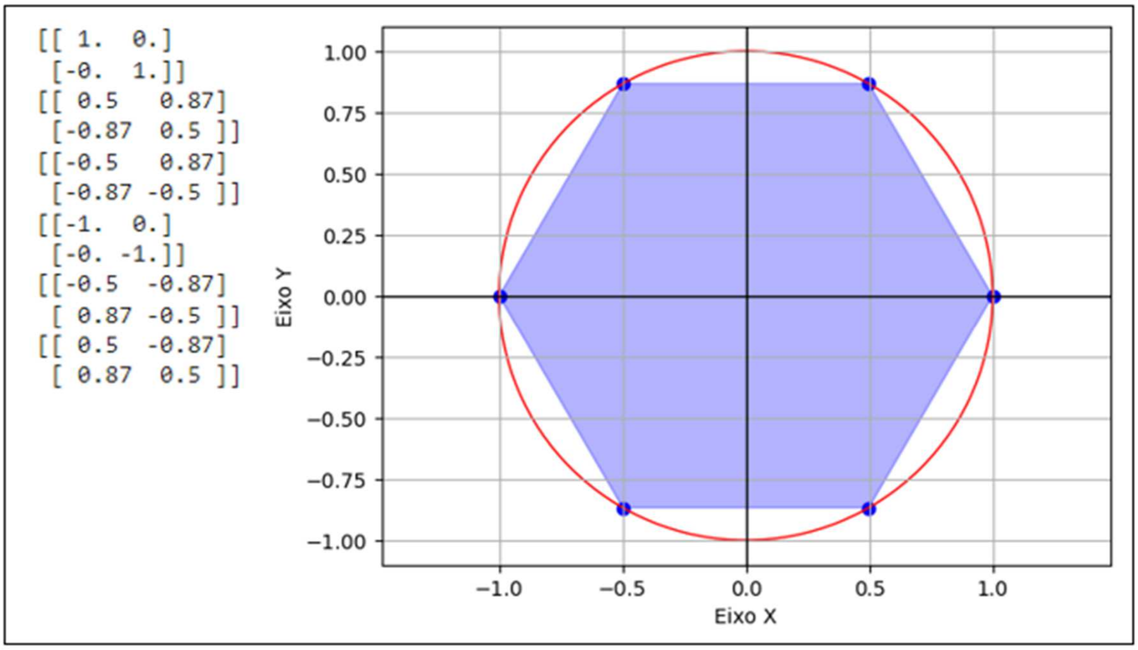
Figura 3: Elementos matriciais do Conjunto $\mathcal{U}_7$ que representa no plano os vértices do Heptágono.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Exemplo 2: Dentro de $\mathcal{U}_{18} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{18}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{18}\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{18}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi}{18}\right) \end{bmatrix}_{2\text{x}2} / \ \mathrm{k} = 0, 1, \cdots, 17 \right\}$ temos os subgrupos $H =$, de ordem 2, $K =$ de ordem 3 e $HK =$ de ordem 6 é um subgrupo tal que $\delta \, o \, \varphi^{-1}(HK)$ é um polígono de 6 lados desenhado abaixo.

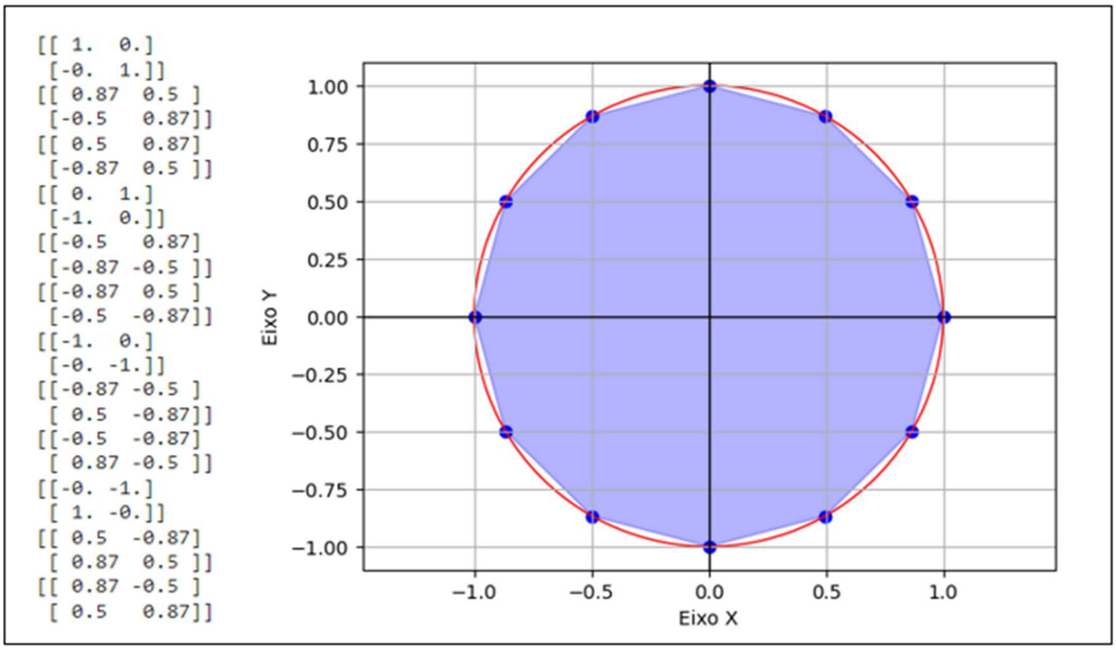
Figura 4: Elementos matriciais do Subgrupo HK que representa no plano os vértices do Hexágono.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Exemplo 3: Dentro de $\mathcal{U}_{12} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{12}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{12}\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{12}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi}{12}\right) \end{bmatrix}_{2x2} / \ \mathrm{k} = 0, 1, \cdots, 17 \right\}$ temos os subgrupos $H =$ de ordem 3, $K =$ de ordem 4 e $HK =$ de orem 12 é um subgrupo tal que $\delta\ o\ \varphi^{-1}(HK)$ é um polígono de 12 lados desenhado abaixo.

Figura 5: Elementos matriciais do Subgrupo HK que representa no plano os vértices do Hexágono.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste estudo, mergulhou-se profundamente no fascinante mundo das matrizes e suas aplicações na determinação de polígonos regulares. Foi observado como essas matrizes são essenciais para descrever transformações geométricas e como, com a manipulação apropriada, podem ser utilizadas para criar polígonos com precisão matemática.

Uma das principais descobertas deste trabalho foi a conexão intrínseca entre as matrizes e os ângulos internos dos polígonos regulares. Essa relação revelou-se fundamental para o entendimento das propriedades dos polígonos e facilitou a construção de figuras geométricas com um número específico de lados.

No entanto, fica evidenciado que o uso dessas ferramentas pode ser desafiador, especialmente para aqueles que estão iniciando seu estudo em matemática e álgebra linear. Para superar essa barreira, é recomendado o desenvolvimento de recursos educacionais acessíveis que tornem as matrizes de mais compreensíveis e prontamente aplicáveis.

Os esforços foram concentrados principalmente em polígonos regulares bidimensionais, e há vastas oportunidades para expandir esses conceitos em direção à geometria tridimensional e a outras disciplinas. As matrizes de rotação têm potencial não apenas na matemática pura, mas também em campos interdisciplinares, como a modelagem 3D, a robótica e a informática. Este estudo demonstrou que as matrizes são uma ferramenta poderosa e versátil para a determinação dos vértices de polígonos regulares.

No futuro, espera-se que a pesquisa sobre matrizes, polígonos e suas aplicações continue a evoluir. Essa base sólida de conhecimento pode impulsionar a inovação em diversas áreas, da computação gráfica à engenharia, contribuindo para avanços significativos em ciência e tecnologia.

Por fim, a matemática, com suas ferramentas, continua a ser uma linguagem universal que transcende fronteiras e disciplinas. À medida em que é explorada e compreendida melhor essas ferramentas, portas são abertas para novas descobertas e soluções para os desafios do mundo moderno. Com esta conclusão, fica encerrado o estudo proposto, com a esperança de que ele inspire outros a explorar as maravilhas da matemática e suas aplicações infinitas.

REFERÊNCIAS

ASSIS, Ismael Dourado. **ELEMENTOS ORTOGONAIS.** 2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4499&id2=170010109. (Acesso em 21 de nov. de 2022).

BOLDRINI, Jose Luiz. **ALGEBRA LIENAR**. 3ª ed. Departamento de Matemática da Universidade Federal de Campinas – UNICAMP. Editora HARBRA ltda 1986.

CERRI, Cristina. **História dos Números Complexos**. 2021. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf>. (Acesso em 21 de nov. de 2022).

GONÇALVES, Adilson. **INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA**. 5ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

YOKOYAMA, Henrique Hiroto. **A ESTRUTURA ALGÉBRICA DOS VÉRTICES DE UM POLÍGONO REGULAR**. 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1 =1988&id2=80349. (Acesso em 21 de nov. de 2022).

APÊNDICE

O Link abaixo, em aspas, permite que o leitor adquira uma cópia do algoritmo utilizado na construção dos polígonos a partir dos conjuntos de matrizes, conforme os exemplos que relacionamos no capítulo 2.

"https://colab.research.google.com/drive/1CzcudLJWA8WMdXINhYdDK1I3N_CH4G3u?usp=sharing"

Também, sem custos para os interessados, segue o código do algoritmo, que pode ser copiado e colado em qualquer estrutura de linguagem python, ou mesmo, ser colado dentro da ferramenta Google Colab, que já possui linguagem python.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Função para transformar uma matriz de rotação em um ponto
def transform_matrix_to_point(matrix):
    return matrix[:2, 0]

# Função para transformar um conjunto de matrizes de rotação em pontos
def transform_matrices_to_points(matrices):
    n = len(matrices)
    points = np.zeros((n, 2))

    for i in range(n):
        angle = np.arctan2(matrices[i][1, 0], matrices[i][0, 0])
        points[i, :] = [np.cos(angle), np.sin(angle)]

    return points

# Defina o valor de n para o número de matrizes no conjunto Un
n = 4  # Por exemplo, para um hexágono regular

# Defina as matrizes do conjunto Un aqui (exemplo para um hexágono regular)
Un = []
for i in range(n):
    angle = 2*np.pi*i/n
    rotation_matrix = np.array([[np.cos(angle), np.sin(angle)], [-np.sin(angle), np.cos(angle)]])
    Un.append(rotation_matrix)

# Defina o valor de m para o número de matrizes no conjunto Um
m = 6  # Por exemplo, para um hexágono regular

# Defina as matrizes do conjunto Um aqui (mesmo exemplo para um hexágono regular)
Um = []
for i in range(m):
    angle = 2*np.pi*i/m
    rotation_matrix = np.array([[np.cos(angle), np.sin(angle)], [-np.sin(angle), np.cos(angle)]])
    Um.append(rotation_matrix)

# Criar o conjunto Up a partir do produto dois a dois de Un e Um
```

```
Up = []
for matrix_un in Un:
    for matrix_um in Um:
        product_matrix = np.dot(matrix_un, matrix_um)
        Up.append(product_matrix)

# Arredondar as entradas das matrizes para duas casas decimais
Un = [np.round(matrix, 2) for matrix in Un]
Um = [np.round(matrix, 2) for matrix in Um]
Up = [np.round(matrix, 2) for matrix in Up]

# Expressar os conjuntos em forma de matrizes
print("Conjunto Un (Matrizes):")
for matrix in Un:
    print(matrix)

print("\nConjunto Um (Matrizes):")
for matrix in Um:
    print(matrix)

print("\nConjunto Up (Matrizes):")
for matrix in Up:
    print(matrix)

# Transformar as matrizes em pontos
points_un = transform_matrices_to_points(Un)
points_um = transform_matrices_to_points(Um)
points_up = transform_matrices_to_points(Up)

# Ordenar os pontos do conjunto Up por ângulo
sorted_indices = np.argsort(np.arctan2(points_up[:, 1], points_up[:, 0]))
sorted_points_up = points_up[sorted_indices]

# Criar gráficos separados para cada conjunto com círculo unitário e polígonos
def plot_polygon(vertices, color):
    plt.scatter(vertices[:, 0], vertices[:, 1], color=color)
    plt.fill(vertices[:, 0], vertices[:, 1], color=color, alpha=0.3)

def plot_with_polygon(points, color, title):
    plt.figure()
    plot_polygon(points, color)
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=1)  # Linha de eixo X mais destacada
    plt.axvline(0, color='black', linewidth=1)  # Linha de eixo Y mais destacada
    plt.grid()
    plt.gca().add_patch(plt.Circle((0, 0), 1, color='red', fill=False))
    plt.title(title)
    plt.xlabel('Eixo X')
    plt.ylabel('Eixo Y')
    plt.axis('equal')

# Plotar os gráficos de acordo com o número de matrizes em cada conjunto
plot_with_polygon(points_un, 'blue', f'Conjunto Un ({n} Matrizes)')
plot_with_polygon(points_um, 'green', f'Conjunto Um ({m} Matrizes)')
plot_with_polygon(sorted_points_up, 'orange', f'Conjunto Up ({n * m} Matrizes)')

plt.show()
```