SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GILVAN LIRA SOUZA

Resolução de problemas sobre Aritmética para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.

Orientador: Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias

BELÉM-PA
2013

GILVAN LIRA SOUZA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE ARITMÉTICA PARA AS OLIMPÍADAS BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Profissional de Matemática, da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática**.**

Orientador: PROF. DR. VALCIR JOÃO DA CUNHA FARIAS

BELÉM-PA

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistemas de Bibliotecas da UFPA

Souza, Gilvan Lira, 1978 –
Resolução de problemas sobre Aritmética para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP. / Gilvan Lira Souza. – 2013.

Orientador: Valcir João da Cunha Farias.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belem, 2013.

1. Aritmética. 2. Olimpíadas- Matemática-Brasil. 3. Raciocínio. I. Título.

CDD 22. ed. 513

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GILVAN LIRA SOUZA

Resolução de problemas sobre Aritmética para as Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Profissional de Matemática, da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 28/06/2013
Conceito: APROVADO

Banca examinadora

PROF. DR. VALCIR JOÃO DA CUNHA FARIAS – ORIENTADOR - UFPA

PROF. DR. JOÃO PABLO PINHEIRO DA SILVA– MEMBRO - UFPA

PROF. DR. ARTUR DA COSTA ALMEIDA – MEMBRO – UFPA

Dedicatória

À minha querida Mãe Francisca de Almeida Lira.

Agradecimento

Agradeço a Deus.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos questões e suas respectivas resoluções algébricas e/ou aritméticas e comentários sobre um dos temas abordados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, a Aritmética. De forma a dar suporte aos estudantes do ensino público do nível fundamental ao nível médio como forma de preparação em Aritmética para a prova da OBMEP dando ênfase ao raciocínio lógico e prático dedutivo e às vezes fazendo uso de estratégias de resolução de problemas.

Palavras-chave: Aritmética, OBMEP.

Abstract

In this paper we present issues and their resolutions algebraic and/or arithmetic and comments on one of the topics covered in the Mathematics Olympiad Public Schools – OBMEP, Arithmetic. In order to support the public school students of elementary level to middle level in preparation for arithmetic in the proof of OBMEP emphasizing the logical and practical deductive and sometimes making use of strategies for solving problems.

Key-words: Arithmetic and OBMEP

Sumário

INTRODUÇÃO

Sabemos que a matemática como disciplina no currículo escolar da educação básica tanto pública como particular no Brasil é considerada uma das mais difíceis. A matemática desenvolvida nesse texto vem auxiliar o aprendizado do aluno que tem como objetivo a preparação para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.

As provas da OBMEP são divididas em três níveis, a de nível 1 direcionada aos alunos do6º e 7º ano do ensino fundamental, a de nível 2 é direcionada para os alunos da 8º e 9º ano do ensino fundamental, já a prova de nível 3 é para os alunos do ensino médio.

Os assuntos abordados na OBMEP são divididos em três temas: Aritmética, Análise Combinatória e Geometria. E é sobre Aritmética que abordaremos neste texto, através das resoluções de problemas, divididos em três níveis como é feito na OBMEP.

Resolveremos cinco questões para cada nível. Adotamos uma linguagem que nos permite trabalhar o raciocínio lógico, e evitando o máximo utilizar fórmulas prontas.

Pretendemos fornecer neste trabalho a oportunidade de mostrarmos nossa forma de resolução das questões da **Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas** (OBMEP), nossa compreensão e aplicação dos conteúdos matemáticos. Os métodos numéricos por si só representam uma faceta essencial no raciocínio analítico e na compreensão das aplicações tecnológicas que estão na base da vida escolar. O domínio da parte teórica por detrás dos métodos torna-se uma competência importante a quando da recriação de soluções e inovação na resolução de novos problemas.

Deve-se desenvolver uma compreensão intuitiva das questões e do raciocínio da Matemática, proporcionando-lhe ao mesmo tempo treino na resolução de problemas, de forma que seja capaz de identificar um determinado problema, a análise e o resolva recorrendo aos conhecimentos matemáticos. Com este trabalho procuramos transmitir os conhecimentos da geometria, fornecendo-lhes as resoluções no nosso ponto de vista fazendo análise e interpretação das questões e das resoluções.

CAPÍTULO I

Um Breve Histórico da OBMEP

1.1. Introdução

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBEMP) é uma realização do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA – e tem como objetivo estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área.

Iniciada em 2005, a OBMEP vem crescendo a cada ano criando um ambiente estimulante para o estudo da Matemática entre alunos e professores de todo o país.

Em 2012, cerca de 19,1 milhões de alunos se inscreveram na competição e 99,4% dos municípios brasileiros estiveram representados.

As provas da OBMEP são realizadas no segundo semestre de cada ano e são divididas em três níveis, a de nível 1 é direcionada aos alunos do 6º e 7º ano do ensino fundamental, a do nível 2 é direcionada para os alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental também, já a prova de nível 3 é para os alunos do ensino médio, ou seja, aos alunos do 1º ao 3º ano.

Os sucessivos recordes de participação fazem da OBMEP a maior Olimpíada de Matemática do mundo.

Elencamos alguns dos objetivos da OBMEP:

1. Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas.
2. Contribuir a melhoria da qualidade da Educação Básica.
3. Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso das áreas científicas e tecnológicas.
4. Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional.
5. Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas.
6. Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

CAPÍTULO II
ARITMÉTICA

2.1. Introdução

A aritmética trata do estudo do conjunto dos números inteiros. Ela tem sua importância em vários aspectos, como os quais os sistemas de bases numéricas (uma das bases de todas as áreas da matemática) principalmente a base decimal, que utiliza dez símbolos (algarismos), a saber: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8 e 9. Com esses algarismos podemos formar qualquer número inteiro.

O texto a seguir faz uma amostra de como a aritmética é pedida nas provas da OBMEP, dando ênfase na preparação de alunos para esse tipo de prova bem como outras provas de olimpíadas de matemática pelo Brasil e mundo afora.

Veremos contagem, sistema de base decimal, média aritmética, critérios de divisibilidade, dízimas periódicas simples e compostas, produtos notáveis, números triangulares, somas dos termos de progressão aritmética (P.A), sequência de Fibonacci, função maior inteiro e raízes quadradas e cúbicas.

2.2. NÍVEL1

Questão 1

O número N tem três algarismos. O produto dos algarismos de N é 126 e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. O algarismo das centenas de N é:

a) 2 b) 3 c) 6 d) 7 e) 9

Resolução Algébrica:

Seja N = xyz o número formado por três algarismos, onde $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Observe que x não pode ser zero, pois caso isso acontecesse o número N seria de dois algarismos e não de três. Já os algarismos y e $z \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Pelas condições do problema temos:

(I) $x \cdot y \cdot z = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$. (decompondo 126 em fatores primos) e

(II) $y + z = 11$

De (II) podem ocorrer as seguintes situações:

a) $y = 2 \Longrightarrow z = 9 \Longrightarrow x = 7$, usando a hipótese (I).

b) $y = 3 \Longrightarrow z = 8 \Longrightarrow x$ não é inteiro ($x = 126/24 = 5{,}25$).

c) $y = 4 \Longrightarrow z = 7 \Longrightarrow x$ não é inteiro ($x = 126/28 = 4{,}5$).

d) $y = 5 \Longrightarrow z = 6 \Longrightarrow x$ não é inteiro ($x = 126/30 = 4{,}2$).

Portanto os possíveis números são 729 ou 792, sendo que o algarismo das **centenas** é 7. Logo a resposta é o item **d**.

Resolução Aritmética:

Partindo da hipótese de que a soma dos dois últimos algarismos é 11, podemos ter os seguintes números de três algarismos onde x representa o algarismo das centenas:

a) x29 e x92

Calculando o produto dos dois últimos algarismos já obtemos 18(2vezes9), logo o valor de x só pode ser 7,pois por hipótese o produto dos três algarismos que formam o número é 126.

b) x38 e x83

Calculando o produto dos dois últimos algarismos já obtemos 24(3vezes8), logo o valor de x é $\frac{21}{4}$, pois por hipótese o produto dos três algarismos que formam o número é 126.

c) x47 e x74

Calculando o produto dos dois últimos algarismos já obtemos 28(4 vezes 7), logo o valor de x é $\frac{9}{2}$, pois por hipótese o produto dos três algarismos que formam o número é 126.

d) x56 e x65

Calculando o produto dos dois últimos algarismos já obtemos 30(5vezes6), logo o valor de x é $\frac{21}{5}$, pois por hipótese o produto dos três algarismos que formam o número é 126.

Após essa análise das quatro possibilidades o único resultado que deu número inteiro foi x = 7, logo concluímos que o algarismo das **centenas** é 7.

Comentário: Nesta questão na resolução algébrica temos que ter o cuidado para não confundir as notações, por exemplo, a notação xyz significa um número de três algarismos escrito na base decimal onde x representa o algarismo das centenas, y representa o algarismo das dezenas e z representa o algarismo das unidades, então podemos escrevê-lo também na seguinte forma $100x + 10y + z$. Mas, a notação $x{\cdot}y{\cdot}z$ significar a multiplicação dos três algarismos x, y e z.

Questão 2

Esmeralda escolheu quatro números e, ao somar cada um deles à média aritmética dos outros três, achou os números 60, 64, 68 e 72. Qual é a média aritmética dos quatro números que ela escolheu no início?

a) 30 b) 31 c) 32 d) 33 d) 66

Resolução Algébrica:

Sejam A, B, C e D os quatro números. Queremos calcular a média aritmética dos quatro números que ela escolheu no início M = $\frac{A+B+C+D}{4}$, Ao somar cada um deles à média aritmética dos outros três, ela obteve:

$A + \frac{B+C+D}{3} = 60 \Longrightarrow$ 3A + B + C + D = 180

$B + \frac{A+C+D}{3} = 64 \Longrightarrow$ 3B + A + C + D = 192

$C + \frac{A+B+D}{3} = 68 \Longrightarrow$ 3C + A + B + D = 204

$D + \frac{A+B+C}{3} = 72 \Longrightarrow$ 3D + A + B + C = 216

Somando membro a membro temos:

6A + 6B + 6C +6D = 180+192+ 204+216⟺

6(A +B +C +D) = 792⟺

A + B +C + D = 792/6⟺

A+ B +C +D= 132 ⟺

M = $\frac{A+B+C+D}{4}$ = $\frac{132}{4}$ ⟺M =33. Logo a resposta é o item **d**.

Resolução Aritmética:

Somando os quatros números dados: 60 + 64 + 68 + 72 = 264 que é o dobro da soma dos números escolhidos por Esmeralda. Fazendo a divisão de 264 por 8 teremos a média aritmética pedida.

Comentário: Outra questão que pode ser sugerida a partir dessa questão.

Esmeralda escolheu quatro números e, ao somar cada um deles à média aritmética dos outros três, achou os números 60, 64, 68 e 72. Se a média aritmética dos quatro números que ela escolheu no início for 33. Quais são os quatro números que ela escolheu no início?

Questão 3

Cláudia gosta de brincar com números de dois ou mais algarismos. Ela escolhe um desses números, multiplica seus algarismos e, caso o produto tenha mais de um algarismo, ela os soma. Ela chama o resultado final de transformado do número escolhido. Por exemplo, o transformado de 187 é 11, pois 1x8x9 = 56 e 5 + 6 = 11; já o transformado de 23 é número 6, pois 2x3 = 6.

a) Qual é o transformado de 79?

b) Quais são os números de dois algarismos cujo transformado é número 3?

c) Quantos são os números de três algarismos cujo transformado é o número 0?

Resolução:

a) Primeiro multiplicamos os algarismos de 79, obtendo 7x9 = 63, e depois somamos os algarismos desse produto, obtendo 6 + 3 = 9. Logo o transformado de 79 é 9.

b) A brincadeira de Cláudia consiste em duas etapas: a primeira na qual ela multiplica os algarismos, e a segunda, na qual ela soma os algarismos do produto encontrado na primeira etapa, no caso desse produto ter mais de um algarismo. Para que o número 3 seja obtido como transformado de um número na primeira etapa, esse número só pode ser 13 ou 31. Para que o número 3 seja obtido como transformado de um número na segunda etapa, o resultado da primeira etapa deve ser um número de dois algarismos cuja soma seja o número 3, ou seja, deve ser 12, 21 ou 30. A tabela abaixo mostra todos os números de dois algarismos cujo produto é um desses três números.

12	26, 62, 34 e 43
21	37 e 73
30	56 e 65

Assim sendo um total de 10números, colocando os números em ordem crescente temos que: 13, 26, 31, 34, 37, 43, 56, 62, 65 e 73 são os números de dois algarismos cujo transformado é o número 3.

c) A segunda etapa da brincadeira temos uma soma de algarismos, que é sempre diferente de 0; portanto, 0 nunca será obtido como transformado de um número de três algarismos nessa etapa. Para obter 0 como transformado de algum número de três algarismos na primeira etapa, esse número deve ter 0 como algarismo das unidades, dezenas ou em ambas. Os números de três algarismos que têm 0 tanto nas unidades quanto nas dezenas são: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 e 900, num total de 9 números. Os números que têm 0 apenas nas unidades são da forma XY0, onde X e Y representam algarismos de 1 a 9. Há 9x9 = 81 números desse tipo, e o mesmo raciocínio mostra que há 81 números de três algarismos com 0 apenas no algarismo das dezenas,pois os números que têm 0 apenas nas dezenas são da forma X0Y, onde X e Y representam algarismos de 1 a 9. No total, há 9 + 81 + 81 = 171números de três algarismos cujo transformado e 0.

Comentário: Observe que os itens b e c são inversos do item a, ou seja, no item a é dado um número e pede-se o transformado desse número. Já nos itens b e c é dado o transformado dos números e pede-se quais são os números que tem esse transformado.

Questão 4

Um “matemágico” faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: “Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número do cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois:

Some 1, se o cartão for verde;

Some 2, se o cartão for amarelo;

Some 3, se o cartão for azul;

Some 4, se o cartão for vermelho.

“Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu.”

a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

b) Mariazinha disse “setenta e seis” para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse “sessenta e um” e o matemágico respondeu “Você errou alguma conta”. Explique como o matemágico pôde saber isso.

Resolução:

a) Para saber o número que deve dizer ao matemágico, Joãozinho deve fazer quatro contas:

1ª conta: multiplicar o número no cartão escolhido por 2;

2ª conta: somar 3 ao resultado da primeira conta;

3ª conta: multiplicar por 5 o resultado da segunda conta;

4ª conta: somar 1, 2, 3 ou 4 ao resultado da terceira conta, dependendo da cor do cartão escolhido.

Como o número no cartão escolhido por Joãozinho foi 3, o resultado da primeira conta é 3x2 = 6;

O resultado da segunda conta é 6 + 3 = 9 e o da terceira é 9x5 = 45. Por fim, como a cor do cartão escolhido por Joãozinho é vermelha, o resultado da quarta e última conta é 45+4 = 49. Assim Joãozinho deve dizer “quarenta e nove” ao matemágico.

b) Essa solução é precisa e permite uma solução imediata do item c. Vamos analisar o que acontece com o número de um cartão quando fazemos as operações indicadas. Qualquer que seja esse número, ao multiplicar por 2 obtemos um número par; ao somar 3 ao resultado, obtemos um número ímpar. Ao multiplicar por 5, obtemos um número cujo algarismo das unidades é$5((2x+3)5=10x+15=10x+10+5=10(x+1)+5)$. Concluímos então que se todas as contas estiverem corretas, o último algarismo (algarismo da unidade) do número dito ao matemágico é:

- 6, se o cartão escolhido é verde;
- 7, se o cartão escolhido é amarelo;
- 8, se o cartão escolhido é azul;
- 9, se o cartão escolhido é vermelho.

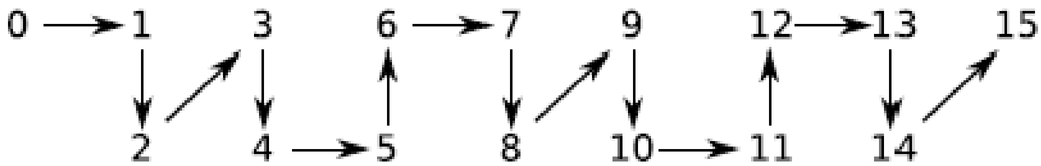
Para sabermos o valor do cartão escolhido basta reduzir uma unidade ao número formado sem o algarismo das unidades do resultado obtido após as operações indicadas.

c) De acordo com a solução do item b: Dizer ao matemágico um número cujo algarismo das unidades é diferente de 6, 7, 8 ou 9 indica que houve algum erro de conta.

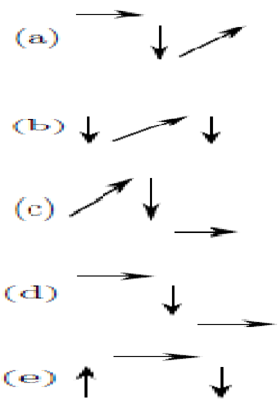
Comentário: Aqui também pode ser feito com cartas de um baralho, pois o mesmo é dividido em quatro naipes: ouro, copa, paus e espada. E cada naipe possui 13 cartas enumeradas de “1 a 13”. Só tomando o cuidado de observar que o ás vale um, o valete vale 11, a dama vale 12 e o rei vale 13.

Questão 5

Os números de 0 a 2000 foram ligados por flechas; a figura mostra o começo do processo.

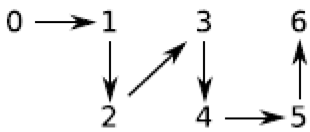


Qual é a sucessão de fechas que liga o número1997 a 2000?

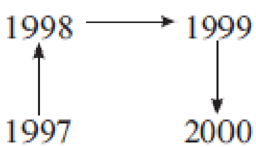


Resolução:

O caminho-padrão é o que se repete, a saber,



Formado por seis flechas, sempre começando nos múltiplos de 6, ou seja, em 0, 6, 12, etc. Vamos averiguar qual é a posição de 1997 em relação ao múltiplo de 6 mais próximo. Dividindo 1997 por 6, obtemos $1997 = 6 \times 332 + 5$, correspondendo a 336 caminhos-padrão, mas o resto de5 flechas. Portanto, 1998 é múltiplo de 6 mais próximo de 1997, ocupando a primeira posição no caminho-padrão. Assim,



é o caminho que ocorre entre 1997 e 2000. Logo a resposta é o item **e**.

2.3. NÍVEL 2

Questão 6

Dízima periódica – Obtenha o algarismo da 1997ª casa decimal de cada uma das frações seguintes.

a) $\frac{1}{22}$ b) $\frac{1}{27}$

Resolução:

a) Dividindo 1 por 22, obtemos $\frac{1}{22} = 0{,}0454545\cdots$Observe que o algarismo 4 está nas posições pares, ou seja, segunda, quarta, sexta, e assim por diante, enquanto que o algarismo 5 está nas posições ímpares, ou seja, a terceira, a quinta, a sétima, e assim por diante. Como 1 997 é um número ímpar, temos que o algarismo da 1 997ª casa decimal é 5.

b) Dividindo 1 por 27, obtemos $\frac{1}{27} = 0{,}037037037\cdots$Observe que os algarismos 0, 3 e 7 se repetem, sucessivamente, a cada três casas decimais, sendo que

• o algarismo 0 está nas posições 1ª, 4ª, 7ª, ⋯ , ou seja, aquelas que, divididas por 3, deixam resto 1;

• o algarismo 3 está nas posições 2ª, 5ª, 8ª,⋯ , ou seja, aquelas que, divididas por 3, deixam resto 2;

• o algarismo 7 está nas posições 3ª, 6ª,9ª,⋯ , ou seja, aquelas que são múltiplas de 3.

Como a divisão 1 997÷3 deixa resto 2, o algarismo da 1 997ª casa decimal equivale ao da 2ª casa decimal que é o algarismo 3.

$$
\begin{array}{l|l}
1997 & 3 \\ \hline
19 & 665 \\
17 & \\
\text{-2-} &
\end{array}
$$

Comentário: Este tipo de questão vem buscar significado ao resto de uma divisão não exata entre dois inteiros.

Observe que no item b temos uma dízima periódica simples, pois o período (a parte que se repete) vem logo após a vírgula. Já no item a temos uma dízima periódica composta, pois o período (a parte que se repete) não vem logo após a vírgula.

Questão 7

Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- Se o número for ímpar, soma-se 1;
- Se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \longrightarrow 22 \longrightarrow 11 \longrightarrow 12 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem comprimento 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma sequência ímpar.

a) Escreva a sequência que começa com 37.

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

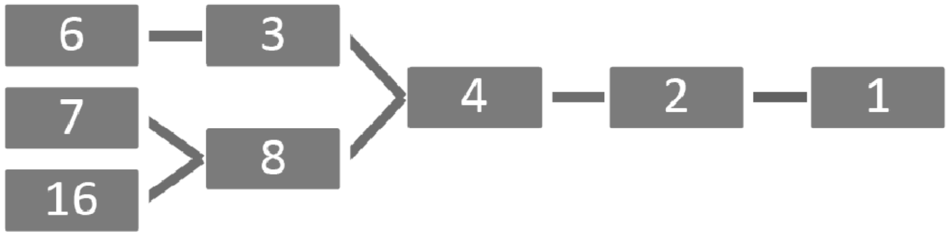
Resolução:

a) A sequência é: $37 \xrightarrow{+1} 38 \xrightarrow{\div 2} 19 \xrightarrow{+1} 20 \xrightarrow{\div 2} 10 \xrightarrow{\div 2} 5 \xrightarrow{+1} 6 \xrightarrow{\div 2} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{\div 2} 2 \xrightarrow{\div 2} 1$

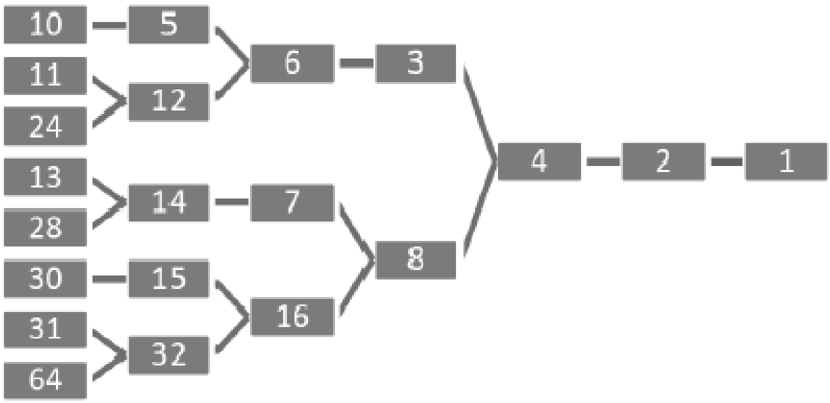
b) A única sequência de comprimento 3 é: $4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$.

As sequências de comprimento 4 são:

$3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$e $8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$; elas são obtidas a parti de $4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$, a primeira acrescentando $4 - 1 = 3$ à esquerda e a segunda acrescentando 2 x 4 = 8 à esquerda. Do mesmo modo, a sequência ímpar $3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$dá origem à sequência par $6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$; a sequência par $8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$dá origem à sequência ímpar $7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$ e á sequência par $16 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



c) Repetindo o esquema do item anterior, temos:



E assim temos três sequências pares e duas ímpares de comprimento 6 e cinco sequências pares e três ímpares de comprimento 7.

Comentário: A repetição desse argumento para valores sucessivos do comprimento mostra que, a partir do comprimento 3, o número de sequências ímpares é 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,⋯, o número de sequências pares é 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,⋯e o número total de sequências é 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,⋯ . Cada termo dessas sequências de valores, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores; vemos assim que essas sequências, com a eventual omissão de termos iniciais, são a sequência 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ⋯, conhecidas como sequência de Fibonacci. Apresentamos esse resultado na tabela a seguir a partir do comprimento 5.

Comprimento	5	6	7	...	15	16
Ímpares	1	2	1 + 2 = 3	...	144	89 + 144 = 233
Pares	2	3	2 + 3 = 5	...	233	144 + 233 = 377
Total (ímpares + par)	1 + 2 = 3	2 + 3 = 5	3 + 5 = 8	...	144 + 233 = 377	233 + 377 = 610

d) ***1ª resolução:*** As 144 sequências ímpares de comprimento 15 dão origem a 144 sequências pares de comprimento 16; já as 233 sequências pares de comprimento 15 dão origem a 233 sequências pares de comprimento 16 e 233 sequências ímpares de comprimento 16. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento 16 e 377 = 233 + 144 sequências pares de comprimento 16, num total de 233 + 377 = 610 sequências.

2ª resolução: A parte da sequência de Fibonacci que nos interessa é 1, 2, 3, 5,8,⋯, 144, 233, 377, 610,⋯: O número de sequências ímpares de comprimento 15 (respectivamente 16) é o 15º (respectivamente 16º) termo dessa sequência, que é 144 (respectivamente 233); o número de sequências pares de comprimento 15 (respectivamente 16) é o 16º (respectivamente 17º) termo, que é 233 (respectivamente 377) e o número total é o 17º(respectivamente 18º) termo, que é 377 (respectivamente 610).

Questão 8

Todo termo de uma sequência, a partir do segundo, é igual à soma do anterior com a soma de seus algarismos. Os primeiros elementos da sequência são:

1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, ⋯

É possível que o número 793210041 pertença a essa sequência?

Resolução:

Sabemos que um número e a soma de seus algarismos deixam o mesmo resto quando divididos por 3. Em cada caso, se o número deixa resto 1na divisão por 3, então o número mais a soma de seus algarismos deixa resto 2 na divisão por 3, e se o número deixa resto dois, então a soma dele com a soma de seus algarismos deixa resto 1 porque 2 + 2 = 4 deixa resto 1.

Calculando os restos da sequência quando dividimos por 3, obtemos uma nova sequência 1, 2, 1, 2, 1, 2 , 1 , 2 , 1 , ⋯, isto é, uma sequência periódica onde aparecem unicamente os restos 1 e 2. Como o número 793210041 é divisível por 3, então ele não pertence à sequência.

Comentário: Nessa questão devemos construir a sequência conforme o comando

O 2º termo será 1 + 1 = 2

O 3º termo será 2 + 2 = 4

O 4º termo será 4 + 4 = 8

O 5º termo será 8 + 8 = 16

O 6º termo será 16 + 1 + 6 = 23

O 7º termo será 23 + 2 + 3 = 28

O 8º termo será 28 + 2 + 8 = 38

O 9º termo será 38 + 3 + 8 = 49

O 10º termo será 49 + 4+ 9 = 62

E observar que os possíveis restos na divisão por três são 0, 1 e 2.

Questão 9

Observe que:

$$1^2 + 2^2 + (1x2)^2 = 3^2$$
$$2^2 + 3^2 + (2x3)^2 = 7^2$$
$$3^2 + 4^2 + (3x4)^2 = 13^2$$

Prove que se a e b são inteiros consecutivos então o número $a^2 + b^2 + (ab)^2$ é um quadrado perfeito.

Resolução:

Suponha, sem perda de generalidade, que b $>$ a, isto é, b $-$a = 1. Então elevando ambos os membros da equação e desenvolvendo o Quadrado da Diferença de dois termos

$(b-a)^2 = 1^2$.

$b^2 - 2ab + a^2 = 1$

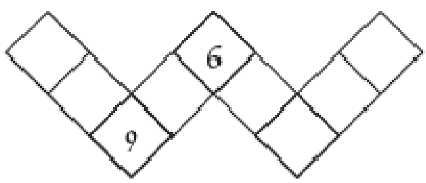
$$a^2 + b^2 = 1 + 2ab$$

Somando $(ab)^2$em cada lado da igualdade, temos:

$a^2 + b^2 + (ab)^2 = (1+2ab) + (ab)^2 = (ab)^2 + 2(ab).1 + 1^2 = (ab+1)^2$

Questão 10

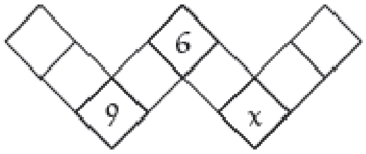
Em cada uma das casas do W da figura, escrevemos um número inteiro de 1 a 9 de modo que a soma dos três números de cada uma das quatro linhas seja a mesma.



Já estão escritos o 6e o 9. Como devem ser posicionados os outros números?

Resolução:

Seja S a soma dos três números de cada linha e seja *x* o número mostrado na figura seguinte



Como 9, 6 e *x* estão em duas linhas, a soma de todas as linhas é:

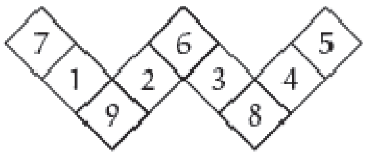
$(1 +2 +3 +4 +5 + 6+ 7+ 8+ 9) + (9 + 6 + x) = 45 + (15 + x) = 60 + x$

Que também é 4S. Assim

$4S = 60 + x \Leftrightarrow S = 15 + \frac{x}{4}$

Como a soma Sé um número inteiro, *x* deve ser divisível por 4 e como *x* é um algarismo, temos que *x*= 4 ou *x*= 8, os quais correspondem a valores de S iguais a 16 ou 17, respectivamente.

Se *x*= 4, o número que falta na linha que contém o 6deve ser 16 – 6 – 4 = 6, o que não é possível, pois não podemos repetir números. Logo, a única possibilidade é x = 8 e a soma dos elementos de cada linha é 17. Agora, basta combinar os demais números nas linhas e obter a distribuição mostrada na figura seguinte.



Comentário: aqui cabe uma comparação com a questão: Coloque os números de 1 a 9 no quadrado de modo que a soma de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal seja sempre 15. Esse quadrado é mais conhecido como quadrado mágico que está representado na figura abaixo.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2.4. NÍVEL 3

Questão 11

Soma de Potências

a) Mostre que a identidade abaixo é sempre verdadeira:

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1}).$$

(b) Sejam a e b números reais tais que a+b= 1 e ab= -1. Mostre que o número $a^{10} + b^{10}$ é inteiro, calculando seu valor.

Resolução:

a) Observemos que

$(a+b)(a^n + b^n) = a^{n+1} + ab^n + ba^n + b^{n+1}$

$(a+b)(a^n + b^n) = a^{n+1} + b^{n+1} + ab(a^{n-1} + b^{n-1})$

$a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1})$

b) Chamemos de $f_n = a^n + b^n$. Observe que $f_1 = a + b = 1$. Calculemos $f_2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2\,ab = 1^2 - 2(-1) = 3$

Pela identidade do item a temos que

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1})$$

Ou equivalentemente

$$f_{n+1} = (a+b)f_n - abf_{n-1} = f_n + f_{n-1}$$

Assim,

$$f_3 = f_2 + f_1 = 3 + 1 = 4$$

$$f_4 = f_3 + f_2 = 4 + 3 = 7$$

$$f_5 = f_4 + f_3 = 7 + 4 = 11$$

$$f_6 = f_5 + f_4 = 11 + 7 = 18$$

$$f_7 = f_6 + f_5 = 18 + 11 = 29$$

$$f_8 = f_7 + f_6 = 29 + 18 = 47$$

$$f_9 = f_8 + f_7 = 47 + 29 = 76$$

$$f_{10} = f_9 + f_8 = 76 + 47 = 123$$

Portanto, $a^{10} + b^{10} = f_{10} = 123$

Comentário: Aqui novamente temos a sequência de Fibonacci.

Questão 12

Representando por $[x]$ a parte inteira do número real *x*, isto é, o maior inteiro que é menor que ou igual a *x*, calcule:

a) $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{4}] + \cdots + [\sqrt{96}] + [\sqrt{97}] + [\sqrt{98}] + [\sqrt{99}]$

Resolução:

$Se\ 1 \le x \le 3 \Rightarrow \sqrt{1} \le \sqrt{x} \le \sqrt{3} \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1$

$Se\ 4 \le x \le 8 \Rightarrow \sqrt{4} \le \sqrt{x} \le \sqrt{8} \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2$

$Se\ 9 \le x \le 15 \Rightarrow \sqrt{9} \le \sqrt{x} \le \sqrt{15} \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3$

$Se\ 16 \le x \le 24 \Rightarrow \sqrt{16} \le \sqrt{x} \le \sqrt{24} \Rightarrow [\sqrt{x}] = 4$

$Se\ 25 \le x \le 35 \Rightarrow \sqrt{25} \le \sqrt{x} \le \sqrt{35} \Rightarrow [\sqrt{x}] = 5$

$Se\ 36 \le x \le 48 \Rightarrow \sqrt{36} \le \sqrt{x} \le \sqrt{48} \Rightarrow [\sqrt{x}] = 6$

$Se\ 49 \le x \le 63 \Rightarrow \sqrt{49} \le \sqrt{x} \le \sqrt{63} \Rightarrow [\sqrt{x}] = 7$

$Se\ 64 \le x \le 80 \Rightarrow \sqrt{64} \le \sqrt{x} \le \sqrt{80} \Rightarrow [\sqrt{x}] = 8$

$Se\ 81 \le x \le 99 \Rightarrow \sqrt{81} \le \sqrt{x} \le \sqrt{99} \Rightarrow [\sqrt{x}] = 9$

Seja S a soma pedida no item, logo a soma S é dada por:

S = 1(3-1+1) +2(8-4+1) +3(15-9+1) +4(24-16+1) +5(35-25+1) +6(48-36+1) +7(63-49+1) +8(80-64+1) +9(99-81+1)

S = 1·3+ 2·5 +3·7 +4·9 + 5·11 +6 ·13 + 7 ·15 +8 ·17 + 9·19

S = 3 + 10 + 21 + 36 + 55 + 78 + 105 + 136 + 171

S = 615

b) $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + [\sqrt[3]{4}] + \cdots + [\sqrt[3]{121}] + [\sqrt[3]{122}] + [\sqrt[3]{123}] + [\sqrt[3]{124}]$

Resolução:

$Se\ 1 \le x \le 7 \Rightarrow \sqrt[3]{1} \le \sqrt[3]{x} \le \sqrt[3]{7} \Rightarrow [\sqrt[3]{x}] = 1$

$Se\ 8 \le x \le 26 \Rightarrow \sqrt[3]{8} \le \sqrt[3]{x} \le \sqrt[3]{26} \Rightarrow [\sqrt[3]{x}] = 2$

$Se\ 27 \leq x \leq 63 \Rightarrow \sqrt[3]{27} \leq \sqrt[3]{x} \leq 63 \Rightarrow [\sqrt[3]{x}] = 3$

$Se\ 64 \leq x \leq 124 \Rightarrow \sqrt[3]{64} \leq \sqrt[3]{x} \leq \sqrt[3]{124} \Rightarrow [\sqrt[3]{x}] = 4$

Seja S a soma pedida no item, logo a soma S é dada por:

S = 1(7- 1+1) +2(26-8+1) +3(63-27+1) +4(124-64+1)

S = 1·7+ 2·19 +3·37 +4·61

S = 7 + 38 + 111 + 244 = 400

Comentário: A função maior inteiro $[x]$ representa o maior inteiro que é menor que ou igual a x. Por exemplo, [3] = 3,[6,01] = 6, [9,78] = 9.

Temos que ter cuidado na hora da contagem como os intervalos são fechados nas extremidades, por exemplo, no item b segundo intervalo $Se\ 8 \leq x \leq 26$ fazemos a diferença entre 8 e 26 e acrescentamos uma unidade, ou seja, 26 – 8 + 1

Questão 13

Número curioso: O número 81 tem a seguinte propriedade: ele é divisível pela soma de seus algarismos, 8+1=9. Quantos números de dois algarismos cumprem essa propriedade?

Resolução:

Seja xy = 10x + y um número de dois algarismos x e y que é divisível pela soma x + y de seus algarismos. Note que, por ser de dois algarismos, necessariamente x≠0 e que, por ser divisível pela soma de seus algarismos, também a diferença (10x + y) − (x + y) = 9x é divisível por x + y. Usando esse fato assim, basta atribuir os valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 para x e calcular os valores de y para os quais x + y divide 9x. O resultado aparece na seguinte tabela.

x	9x	Y
1	9	0, 2 e 8
2	18	0, 1, 4 e 7
3	27	0 e 6
4	36	0, 2, 5 e 8
5	45	0 e 4
6	54	0 e 3
7	63	0 e 2
8	72	0, 1 e 4
9	81	0

Assim, os números que satisfazem a propriedade são:

10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84 e 90, ou seja, existem 23 números "curiosos".

Questão 14

Número premiado: Um número de seis algarismos é "premiado" se a soma de seus primeiros três algarismos for igual à soma de seus três últimos algarismos. Por exemplo, 342531 é premiado, pois 3 + 4 + 2 = 5 + 3 + 1.

(a) Quais são o maior e o menor número premiado com seis algarismos distintos?

(b) Mostre que a soma de todos os números premiados com seis algarismos distintos é divisível por 13.

Resolução:

a) O maior número premiado de seis algarismos distintos precisa começar com 98, portanto, o número procurado é da forma 98 c d e f. Por hipótese, temos 9+8+c = d + e + f. Para que c seja máximo, precisamos que d + e + f seja máximo, e isso acontece quando d = 7, e = 6 e f = 5. Nesse caso, c = 1 e, consequentemente, o maior número premiado é 981 765. Para determinar o menor número premiado de seis algarismos distintos, tentamos um número da forma 10 c d e f. Da mesma forma temos por hipótese, temos 1+0+c = d + e + f. Para que c seja mínimo, precisamos que d + e + f seja mínimo, e isso acontece quando d = 2, e = 3 e f = 4. Nesse caso, c = 8 e, consequentemente, o menor número premiado é 108 234.

b) Dado qualquer número premiado a b c d e f de seis algarismos distintos, seu par "simétrico" d e f a b c também é premiado e tem seis algarismos distintos; a soma desse par simétrico é:

$$abcdef + defabc = (1000abd + edf) + (1000edf + abc) = 1001(abc + edf)$$

$$abcdef + defabc = 7x11x13(abc + def)$$

Que é divisível por 13. Assim, a soma de todos esses pares simétricos também é divisível por 13. Como a soma de todos esses pares de números premiados "simétricos" é igual à soma de todos os números premiados de seis algarismos distintos, resulta que essa soma é divisível por 13.

Comentário: De fato, a soma de todos os números premiados de seis algarismos distintos também é divisível por 7 e por 11como foi demonstrado na resolução da questão.

Questão 15

Uma calculadora esquisita tem apenas as teclas numéricas de 0 a 9 e duas teclas especiais A e B. Quando a tecla A é apertada, o número que aparece no visor é elevado ao quadrado; quando a tecla B é apertada, soma-se 3 ao número que aparece no visor. Nessa calculadora é possível obter 22 a partir do número 1 apertando as teclas A e B na ordem BABB, como ilustrado abaixo:

$$1 \xrightarrow{B} 4 \xrightarrow{A} 16 \xrightarrow{B} 19 \xrightarrow{B} 22$$

a) Com o 3 inicialmente no visor, qual o número que vai aparecer depois de apertar as teclas A e B na ordem BBAB?

b) Mostre como obter 55 a partir do 1 usando as teclas A e B.

c) Explique porque não é possível obter 54 a partir do número 2 usando as teclas A e B.

Resolução:

a) A seguir vemos o que acontece quando começamos com o número 3 no visor e apertamos as teclas na ordem BBAB:

$$3 \xrightarrow{B} 3+3 = 6 \xrightarrow{B} 6+3 = 9 \xrightarrow{A} 9x9 = 81 \xrightarrow{B} 81+3 = 84$$

Logo, o número que vai aparecer no visor é 84.

b) Uma maneira é apertar as teclas na ordem BBABB, como se segue:

$$1 \xrightarrow{B} 1+3 = 4 \xrightarrow{B} 4+3 = 7 \xrightarrow{A} 7x7 = 49 \xrightarrow{B} 49+3 = 52 \xrightarrow{B} 52+3 = 55$$

c) Notamos primeiro que começando do número 2 e apertando apenas **duas** teclas quaisquer,

$$2 \xrightarrow{B} 2+3 = 5 \xrightarrow{B} 8+3 = 8$$
$$2 \xrightarrow{B} 2+3 = 5 \xrightarrow{A} 5x5 = 25$$
$$2 \xrightarrow{A} 2x2 = 4 \xrightarrow{B} 4+3 = 7$$
$$2 \xrightarrow{A} 2x2 = 4 \xrightarrow{A} 4x4 = 16$$

Observe que o maior resultado possível é 25 (sequência BA), ou seja, não se chega ao número 54. Vamos agora ver o que acontece quando o número 2 está no visor e apertamos três teclas.

$$2 \xrightarrow{A} 2x2 = 4 \xrightarrow{A} 4x4 = 16 \xrightarrow{A} 16x16 = 256$$

$$2 \xrightarrow{A} 2x2 = 4 \xrightarrow{A} 4x4 = 16 \xrightarrow{B} 16 + 3 = 19$$

$$2 \xrightarrow{A} 2x2 = 4 \xrightarrow{B} 4 + 3 = 7 \xrightarrow{A} 7x7 = 49$$

$$2 \xrightarrow{B} 2 + 3 = 5 \xrightarrow{A} 5x5 = 25 \xrightarrow{A} 25x25 = 625$$

$$2 \xrightarrow{A} 2x2 = 4 \xrightarrow{B} 4 + 3 = 7 \xrightarrow{B} 7 + 3 = 10$$

$$2 \xrightarrow{B} 2 + 3 = 5 \xrightarrow{A} 5x5 = 25 \xrightarrow{B} 25 + 3 = 28$$

$$2 \xrightarrow{B} 2 + 3 = 5 \xrightarrow{B} 5 + 3 = 8 \xrightarrow{A} 8x8 = 64$$

$$2 \xrightarrow{B} 2 + 3 = 5 \xrightarrow{B} 5 + 3 = 8 \xrightarrow{B} 8 + 3 = 11$$

Organizando os dados temos a seguinte tabela.

Sequência de teclas	**Resultado**
AAA	256
AAB	19
ABA	49
BAA	625
ABB	10
BAB	28
BBA	64
BBB	11

Podemos eliminar as sequências AAA; BAA e BBA de nossas considerações, pois elas levam a resultados maiores que 54. Para chegar ao número 54 a partir dos resultados das outras sequências, não podemos usar a tecla A, pois isso nos daria resultados maiores que 54. Por outro lado, a diferença entre 54 e qualquer dos números 19; 49; 10; 28 e 11 não são um múltiplo de três, ou seja, também não podemos chegar ao número 54 a partir desses números apenas com a tecla B. Logo, não é possível chegar ao número 54 a partir do número 2.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho tratamos de um dos temas abordados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, através de resolução de problemas. Sabemos que a OBMEP além de medir a qualidade do ensino da matemática nas escolas publicas, tem ainda um papel de incentivador tanto para alunos como para professores. Acreditamos que com este trabalho possamos ajudar mais pessoas a despertar o amor pela matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HEFEZ, ABRAMO. Elementos de Aritmética, 2ª ed./ Abramo Hefez, Rio de Janeiro: SBM, 2011, 176 p.

IEZZI, GELSON, Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 1, 8ª ed. / Gelson Iezzi, Carlos Murakami, São Paulo: Atual, 2004.

IMPA/OBMEP: Banco de Questões da OBMEP, Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

IMPA/OBMEP: Banco de Questões da OBMEP, Rio de Janeiro, IMPA, 2011.

IMPA/OBMEP: Banco de Questões da OBMEP, Rio de Janeiro, IMPA 2012.

LIMA, ELON LAGES, et al. A Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2010.v. 4, 384 p.

LIMA, ELON LAGES, et al. A Matemática do Ensino Médio, 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.v. 2, 308 p.

Revista Eureka! Nº 1, 1998.