Universidade Federal do Acre
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

ADRIANO SOUSA DA SILVA

ENSINO, HISTÓRIA E TECNOLOGIAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO O CILINDRO, O CONE E A ESFERA.

RIO BRANCO

2023

ENSINO, HISTÓRIA E TECNOLOGIAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO O CILINDRO, O CONE E A ESFERA.

Discente: Adriano Sousa da Silva

Orientador: Prof. Dr. José Ronaldo Melo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Acre, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

RIO BRANCO

2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

S586e Silva, Adriano Sousa da, 1984 -

Ensino, história e tecnologias na resolução de problemas envolvendo o cilindro, o cone e a esfera / Adriano Sousa da Silva; orientador: Dr. José Ronaldo Melo. – 2023.

59 f.: il.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Rio Branco, 2023.

Inclui referências bibliográficas e apêndice.

1. Sequência didática. 2. História. 3. Geometria espacial. I. Melo, José Ronaldo (orientador). II. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Nádia Batista Vieira CRB-11º/882.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Titulo da Dissertação: *Ensino, história e tecnologias na resolução de problemas envolvendo o cilindro, o cone e a esfera.*

Autor: Adriano Sousa da Silva

Orientador: Prof. Dr. José Ronaldo Melo

Dissertação aprovada como parte das exigências para obtenção do título de Mestre, pela Banca Examinadora:

Orientador: Prof. Dr. José Ronaldo Melo;

Membro interno: Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos;

Membro externo: Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodríguez.

DATA DA APROVAÇÃO: 11 de outubro de 2023.

BANCA EXAMINADORA:

Assinado Eletronicamente
JOSÉ RONALDO MELO
Orientador
Universidade Federal do Acre - UFAC

Assinado Eletronicamente
JOSÉ IVAN DA SILVA RAMOS
Membro interno
Universidade Federal do Acre - UFAC

Assinado Eletronicamente
TOMÁS DANIEL MENÉNDEZ RODRÍGUEZ
Membro externo
Universidade Federal de Rondônia - UNIR

Dedico primeiramente à Deus, que mesmo sem eu merecer, sempre esteve ao meu lado me dando forças, para a realização desse sonho.

Dedico à minha esposa Simone Lima e Meu filho Áquilla Alexandre que por inúmeras vezes abdicaram da minha presença para que eu pudesse estudar, e me incentivaram a prosseguir.

AGRADECIMENTOS

Durante esse período de mestrado, de muito aprendizado, esforço e dedicação, não poderia deixar de expressar minha imensa gratidão a várias pessoas que contribuíram para a conclusão deste ciclo. Desta forma demonstrar através desse oportuno momento, por meio de palavras verdadeiras, um pouco da relevância que cada pessoa teve, na realização desse sonho.

Agradeço a Deus por ter me dado saúde e forças para superar as dificuldades, sem ele eu nada faria.

Ao meu Orientador, Professor Dr. José Ronaldo Melo, pela paciência que teve ao me transmitir seus conhecimentos, acreditou no meu potencial.

Aos avaliadores deste trabalho Dr. José Ivan da Silva Ramos e Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodríguez que com muita gentileza e competência trouxeram suas contribuições para o aprimoramento deste trabalho.

A minha esposa Simone, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Ao meu filho Áquilla, que por muitas vezes não pude estar com ele, mas eu precisava seguir em frente.

Não poderia deixar de mencionar minha mãe, Maria, que mesmo as vezes com poucos recursos, sempre fez de tudo para facilitar meus estudos. Tambem meu pai Francisco.

Agradeço a todos os professores pelos ensinamentos, e aos colegas que contribuíram de alguma forma para a realização dessa conquista.

.

.

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino sobre os objetos geométricos cilindro, cone, esfera e suas relações, utilizando aspectos da história da Geometria e softwares educacionais como suporte para compreensão de conceitos presentes nesses objetos. No desenvolvimento dessa proposta foram utilizadas referências bibliográficas para identificar as origens da Geometria Espacial, as primeiras maneiras de observação geométrica e as tecnologias utilizadas nos cálculos de volumes do cilindro, cone, esfera e nas relações entre esses objetos. Observou-se também aulas de uma turma de alunos do primeiro semestre do curso de Matemática na disciplina Iniciação a Extensão, na qual estava em desenvolvimento um curso de extensão sobre Geometria Espacial com utilização do software GeoGebra. Ao longo da pesquisa percebeu-se contribuições relevantes a partir da diversificação de apresentação dos conceitos envolvendo o cálculo do volume do cilindro, cone e esfera potencializando o raciocínio geométrico espacial do aluno e o desenvolvimento do currículo da Matemática e suas Tecnologias presente na Educação Básica.

Palavras-chave: Sequência Didática; História; Geometria Espacial; Software GeoGebra.

ABSTRACT

This work presents a teaching proposal about the geometric objects cylinder, cone, sphere and their relationships, using aspects of the history of geometry and educational software as a support for understanding the concepts present in these objects. In the development of this proposal, bibliographical references were used to identify the origins of spatial geometry, the first ways of geometric observation and the technologies used in calculating the volumes of cylinders, cones, spheres and the relationships between these objects. Classes of a group of students in the first semester of the Mathematics course in the subject Initiation to Extension were also observed, in which an extension course on Spatial Geometry using the GeoGebra software was being developed. Throughout the research, relevant contributions were noticed from the diversification of presentation of concepts involving the calculation of the volume of the cylinder, cone and sphere, enhancing the student's spatial geometric reasoning and the development of the curriculum of Mathematics and its Technologies present in Basic Education.

Keywords: Following teaching; History; Spatial Geometry; GeoGebra Software.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Conforme registros presentes na literatura disponível sobre a história da Matemática, a Geometria teve origem nas observações do cotidiano, em tempos bastante remotos, sobretudo no Egito e na Mesopotâmia. Esse campo da Matemática surgiu da necessidade de calcular áreas territoriais, volumes de celeiros e pirâmides. Os celeiros eram em formato de cilindros circulares retos. Para calcular o volume de tais celeiros, fazia-se necessário, por exemplo, que os antigos egípcios encontrassem um método para determinar a área do círculo da base. Os padrões das formas geométricas eram observados nos objetos presentes na natureza. A circunferência podia ser encontrada em diferentes formas, por exemplo, no contorno do sol e da lua, no corte de troncos e na água quando arremessada uma pedra na superfície de um lago. Nas construções utilizou-se conceitos de paralelismo, perpendicularismo e simetrias de modo intuitivo.

Conforme Eves (1992) nas confecções de utensílios eram utilizados padrões geométricos, explorando-se também de modo intuitivo, as simetrias. Os povos originários do Sul da Amazônia Ocidental, especialmente na região de Rio Branco Acre, deixaram registros sobre o solo em forma de imensos monumentos escavados em formas de círculos e retângulos caracterizados por pesquisadores como geoglifos. Na Amazônia do Brasil e da Bolívia tem mais de 800 geoglifos, 523 deles no Acre. Rampanelli (2017) destaca que “os sítios arqueológicos começaram a ser construídos há dois mil anos e que mesmo séculos depois os povos locais seguiam fazendo marcas na terra – as construções foram interrompidas por volta de 1300 d.C, por motivos ainda desconhecidos”:

Figura 1: Geoglifos do Acre

Fonte: https:// http://portal.iphan.gov.br/pagina/detalhes/822

Figura 2: Geoglifos do Acre

Fonte: https:// http://portal.iphan.gov.br/pagina/detalhes/822

Embora o homem tenha se mostrado capaz de fazer registros de seus pensamentos em forma escrita nos últimos seis milênios, há registros de congruência e simetria em trabalhos feitos no período neolítico. Heródoto (484-425 a.C.) acreditava que a Geometria tinha surgido no Egito, da necessidade de fazer medidas de terras após a inundação anual no vale às margens do rio Nilo, dando à Geometria o sentido de "medida da terra". Já Aristóteles (384 - 322 a.C.) achava que havia uma classe sacerdotal que conduziu o estudo da Geometria por lazer. Conforme aponta Boyer (1974) há exemplos em tabletes encontrados em sítios arqueológicos na Mesopotâmia contendo problemas de Geometria. Na imagem abaixo pode-se ver a taverna mais antiga do mundo:

Figura 3: A Taverna mais antiga do mundo

Fonte: https:// https://veja.abril.com.br/ciencia/boteco-milenar-a-descoberta-da-taverna-mais-antiga-do-mundo

A Geometria desenvolvida pelos babilônios e egípcios era essencialmente aplicada em problemas de cálculo de comprimentos, áreas e volumes. Para isso, utilizavam maneiras de desenvolver esses cálculos sem se preocuparem com demonstrações e conceitos teóricos. As primeiras demonstrações matemáticas são devidas a Tales, iniciando assim, o desenvolvimento da Geometria pelos gregos, que organizaram dedutivamente, com axiomas, teoremas, entre outros, o modelo matemático cuja estrutura é utilizada até hoje.

Euclides de Alexandria que viveu no período de 325 a.C. - 265 a.C., autor da obra "Elementos", reúne de modo sistematizado, as principais descobertas geométricas de seus precursores. Em sua obra, começa pelas noções mais elementares e somente a partir daí insere definições gerais, axiomas e postulados. Começa pela noção de ponto, "o que não tem partes", seguindo-se a caracterização da linha como uma longitude, "extensão" sem largura; a superfície como aquilo que só tem largura e extensão, e o corpo o que tem largura, extensão e profundidade.

O desenvolvimento do conhecimento sobre o cálculo de áreas e volumes foi feito através dos trabalhos e contribuições de vários matemáticos no decorrer da história, contudo, paro o caso do cilindro, cone e esfera, Arquimedes (287-212 a.c.), segundo narrativa de Marcelo – o general romano que comandou o saque de Siracusa, presente em Plutarco (As Vidas dos Homens Ilustres, pp. 252 a 255), de todas as descobertas que Arquimedes fez, a que o geômetra mais apreciava era a relação de áreas e volumes de um cilindro, cone e esfera nele contida.

Atualmente ensinar Geometria tem sido um desafio para professores da Educação Básica, no que diz respeito à escolha metodológica e, consequentemente, à aprendizagem de conceitos por parte dos alunos. De acordo com Nobre (1996):

> ... nem sempre o professor tem consciência de que aquele conhecimento por trás do conteúdo a ser ensinado, que aparece de forma pronta nos livros, passou por diversas modificações e aprimoramentos ao longo da história da Matemática, que por sua vez traz toda a fundamentação teórica e as respostas para muitos porquês que permeiam os pensamentos dos estudantes.

Essas dificuldades muitas vezes são oriundas de métodos utilizados pelos professores que apresentam os conceitos geométricos de forma descontextualizada. Oliveira e Leivas (2017) orientam “trabalhar com situações de aprendizagem que levem o aluno a estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo sua observação sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações”. Partindo desta premissa, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC BRASIL, 2018), aponta que ensino de Geometria para o Educação Básica é necessário ao estudante sobretudo sobre a localização de números em retas, de figuras ou configurações no plano cartesiano e no espaço tridimensional, direção e sentido, ângulos, paralelismo e perpendicularidade, transformações geométricas isométricas (que preservam as medidas) e homotéticas (que preservam as formas), bem como sua aplicação em situações-problema. Oliveira e Leivas (2017) apontam que a Geometria, por seu caráter visual, tem potencial para desenvolver a percepção e autonomia do pensamento e do raciocínio do aluno, deslocando o aluno de estruturas e fórmulas prontas.

Geometria e Tecnologia devem associar-se por meio de atividades investigativas valorizando o desenvolvimento do aluno na direção de uma aprendizagem significativa de modo que:

> [...] o uso de tecnologias possibilita aos estudantes aprofundar sua participação ativa nesse processo de resolução de problemas. São alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (BRASIL, 2018, p. 528).

Considerando a importância do ensino de Geometria, especialmente da Geometria Espacial, propomos organizar uma sequência de ensino tendo como questão o estudo sistematizado do cilindro, cone e esfera e sobretudo as relações existentes entre esses objetos geométricos, respondendo ao longo dessa pesquisa a questão: como organizar uma sequência didática visando o ensino das relações entre cilindro, cone e esfera na sala de aula do Ensino Médio? Nesta perspectiva direcionamos nossos olhares sobre diversos aspectos da história da matemática, as estratégias presentes no passado para os cálculos de volumes e as representações disponíveis atualmente com o uso do GeoGebra.

ASPECTOS TEÓRICOS METODOLÓGICOS

Provavelmente a Geometria teve origem nas observações da natureza e nas possibilidades de medidas. As primeiras ideias geométricas podem ter surgido das necessidades dos seres humanos em resolver problemas como construção de casas, delimitação de terrenos e plantações, entre outras possibilidades. Para Roque e Pitombeira (2019, pp. 37):

> A "Geometria" dos babilônios e egípcios era essencialmente uma Geometria métrica, isto é, preocupada em calcular comprimentos, áreas e volumes, para o que utilizavam algumas propriedades geométricas de figuras planas e de sólidos geométricos, sem que saibamos como chegaram a estes resultados. Como ainda hoje acontece na Matemática escolar, os exemplos de problemas babilônios e egípcios às vezes são bem artificiais, modelos simplificados de situações reais propostos para exercitar ou verificar as habilidades de cálculo dos escribas.

Em Eves (2004) encontramos informações de que ao longo dos anos o homem sentiu a necessidade de argumentar logicamente para que certas afirmações quanto ao conhecimento geométrico fossem aceitas como verdade. Desse modo, surgiu o que conhecemos por Geometria Demonstrativa, que tem como precursor Tales de Mileto (século VI a.C.), que segundo seus estudos trouxe as primeiras descobertas geométricas de forma sistemática para a humanidade. No entanto, foi Euclides de Alexandria (300 a.C.), que com sua capacidade de organização sintetizou os conhecimentos geométricos até então existentes através de generalizações e demonstrações de forma simples e clara gerando uma das obras sobre Geometria "Os Elementos" (BOYER, 1996).

Mudanças significativas foram produzidas pelo homem nos mais diversos aspectos da Geometria ao longo dos anos, que nos trazem ao que temos como conhecimento científico da atualidade. O estudo de Geometria é de grande importância para o aluno, seja como auxílio no desenvolvimento de habilidades de abstração, solução de problemas do dia a dia, de forma a calcular e confrontar resultados, e no reconhecimento das propriedades das formas geométricas, cálculos de volumes etc.

Enquanto componente curricular a Geometria tem ênfase em diversas pesquisas e vem sendo valorizada através de documentos normativos como na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Entretanto, Pavanello (1989) aponta que ocorreu um abandono no ensino de Geometria, nas décadas de 60 e 70, pois os métodos para seu ensino não eram compreendidos e dominados pela maioria dos professores. A Geometria, no movimento da matemática moderna, passou a ser desenvolvida intuitivamente, sem qualquer preocupação com a construção de uma sistematização, apenas com uma linguagem simbólica da Teoria dos Conjuntos. Os docentes da época, despreparados, prendiam-se à Álgebra e Aritmética, deixando a Geometria de lado. De acordo com a autora, sobre os livros didáticos da época têm-se:

> Quanto à Geometria, opta-se, num primeiro momento, por acentuar nesses livros as noções de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjuntos de pontos no plano, adotando-se, para a sua representação, a linguagem da teoria dos conjuntos. Procura-se trabalhá-la segundo uma abordagem "intuitiva" que se concretiza, nos livros didáticos, pela utilização dos teoremas como postulados, mediante os quais pode-se resolver alguns problemas. Não existe qualquer preocupação com a construção de uma sistematização a partir das noções primitivas e empiricamente elaboradas. (PAVANELLO, 1993, p. 13).

Esses obstáculos trouxeram consequências para o ensino de Geometria e sobretudo pesou na qualidade da aprendizagem dos alunos. Conforme orienta a BNCC (BRASIL, 2018) os estudantes devem encontrar significado nos problemas geométricos, identificando conceitos e elaborando estratégias para sua resolução, considerando a análise de modelos pré-existentes e verificando sua validação para as situações propostas:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 527).

Assim, resolver problemas ligados à realidade e explorar o pensamento geométrico, trabalhando com formas, relacionando figuras planas e espaciais e até mesmo a relação entre a Álgebra e Geometria, pode contribuir para a necessidade dos seres humanos se encontrarem dentro do espaço. Contudo, a Geometria enquanto componente curricular é ainda um entrave para os estudantes. Parece existir uma ruptura na transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial, existindo diversa dificuldade na percepção e associação dos objetos geométricos e sua respectiva associação com a composição de figuras espaciais.

Lorenzato (1995, p. 3) argumenta que "muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas”. Camilo, Alves e Fontenele (2020) informam que existem rejeições por parte dos estudantes a este componente curricular, possivelmente devido à dificuldade que os professores de Matemática enfrentam em apresentar de forma compreensível e diversificada a exposição visual, pois em muitas vezes, estes só dispõem de recursos pedagógicos limitados a meios tradicionais.

Na atualidade diversas pesquisas têm sido realizadas em relação ao ensino de Geometria na Educação Básica, com o objetivo de contribuir com subsídios para os professores tendo como meta a melhoria e a compreensão deste tema. Pavanello (2004) argumenta que as habilidades de percepção do espaço tridimensional, a orientação e a localização no espaço, a capacidade de observação de objetos não tem sido trabalhada de forma efetiva ao longo dos anos na Educação Básica, reforçando a importância de investigar estratégias para que tais habilidades sejam desenvolvidas. Machado (2010) acredita que muitas das dificuldades dos alunos em Geometria Espacial são decorrentes de entraves no domínio da Geometria Plana, faltando diálogo entre estes dois campos, quando trabalhados de forma descontextualizada. A presente pesquisa apresenta uma proposta de ensino baseada em distintas tecnologias presentes na resolução de problemas ao longo da história da Matemática.

GEOGEBRA E ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL.

Atualmente o professor de Matemática pode dispor de um conjunto de softwares educacionais para auxílio ao ensino. O GeoGebra, por exemplo, vem sendo bastante utilizado, oferecendo recursos diversos para planejamento e condução do ensino em sala de aula. Esse software foi objeto de estudo da tese e doutorado do austríaco Markus Hohenwarter, em 2001, na Universidade de Salzburgo, que o criou e desenvolveu visando todas as modalidades de ensino (do Fundamental ao Ensino Superior) com o objetivo de obter um instrumento adequado ao ensino da Matemática, permitindo o estudo de Álgebra, Geometria, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculo em um único ambiente. Este software permite a criação de figuras em 2 D e 3D.

O GeoGebra é um sistema de Geometria dinâmica que permite a realização de diferentes atividades, entre elas, a construção de pontos, segmentos de reta, retas paralelas e perpendiculares, construção de gráficos de funções, construção de figuras geométricas, permite ainda calcular o ponto médio dos segmentos, a área, o perímetro das figuras, medir ângulos, entre outras.

Autores como Borba, Scucuglia e Gadanidis (2016), Andrade (2015), Abar e Cotic (2014), Girardo (2012), Pereira (2012), Fanti (2010), entre outros, concordam que o uso do software GeoGebra pode contribuir de forma significativa para enriquecer a prática docente. Fanti (2010, p. 1), argumenta que,

> O GeoGebra é um software livre e pode ser usado facilmente como uma importante ferramenta para despertar o interesse pela busca do conhecimento matemático principalmente com alunos dos ensinos fundamental e médio. Possibilita trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da educação básica permitindo a abordagem de diversos conteúdos especialmente os relacionados ao estudo da Geometria e funções.

Assim, o uso do GeoGebra possibilita uma mobilidade de explorações acerca de figuras e objetos tridimensionais, bem como de suas respectivas representações. Segundo Borba e Penteado (2017, p. 37), propostas pedagógicas desenvolvidas com softwares gráficos, por exemplo, “[...], permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia ou de física”. Também, ao interagir com o software, além de perceber os conceitos matemáticos envolvidos, o aluno terá a oportunidade de realizar construções que se tornariam impossíveis de serem executadas, de forma tão precisa, rápida e dinâmica, com lápis e papel. Para Pereira (2012, p. 32), "as características do GeoGebra potencializam a constituição de cenários para investigação, nos quais o aluno é capaz de experimentar situações em um processo dinâmico".

Assim, a visualização dos objetos construídos proporcionada pelo software pode favorecer a construção de um ambiente mais propício para a aprendizagem matemática e se tornar um importante recurso no processo de ensino.

Através de rotações no objeto construído, por exemplo, podem-se explorar situações virtuais que acionam habilidades de visualização muito similares àquelas decorrentes da manipulação de objetos 3D no espaço real. Nesse sentido, as propriedades dinâmicas da versão 3D do GeoGebra para desktop ou smartphones pode ser usada como uma ferramenta valiosa nas construções dos objetos tridimensionais abordados no estudo da Geometria Espacial. Diversos sólidos, superfícies e curvas tridimensionais podem ser construídas sem dificuldade com essa versão do GeoGebra, assim como ocorre com o cálculo de seus comprimentos, áreas, volumes e interseções (ANDRADE, 2015, p. 36).

Destacamos que explorar os aspectos visuais do GeoGebra com atividades pedagógicas que ofereçam meios para a investigação matemática e experimentação com tecnologias, assume uma dimensão heurística, sendo apropriada aos cenários de ensino e aprendizagem de Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2016). Dessa forma, o processo de formação de imagens é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem dos conteúdos geométricos. Conforme esses autores,

> O GeoGebra, que mantém possível o estudo de conteúdos de forma mais próxima ao que era feito com lápis e papel, transforma também as possibilidades de experimentação, de visualização e de heurística dos humanos envolvidos nesse coletivo que aprende (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2016, p. 73).

Portanto, as possibilidades que o GeoGebra 3D oferece para explorar e investigar os sólidos geométricos podem modificar o tipo de atividades que são propostas em sala de aula, bem como transformar a natureza do conhecimento matemático. Este ambiente possibilita que os alunos visualizem os objetos construídos de maneira diferente do que estão habituados a observarem nos livros didáticos. Ao explorar um objeto construído no GeoGebra 3D, determinada representação aparece como uma das posições possíveis que o objeto pode assumir, e isto proporciona significado e movimento às imagens mentais que são criadas pelo aluno. Além disso, os alunos podem interagir com o objeto construído e assim formar imagens mentais mais significativas.

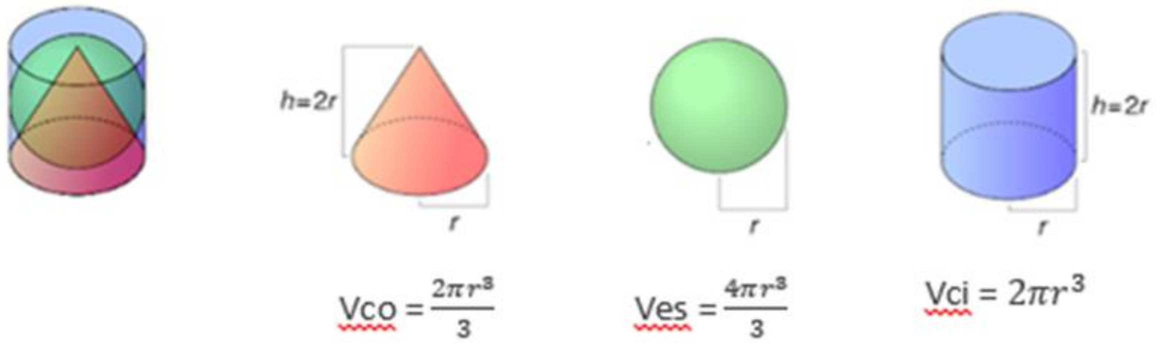
ASPECTOS METODOLÓGICOS

No desenvolvimento da nossa prática docente, constatou-se como apontado por vários outros pesquisadores citados, que as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo Geometria Espacial se iniciam com as dificuldades de aprendizagem dos conceitos de Geometria Plana. Essas dificuldades parecem se intensificar quando se começa a trabalhar com objetos tridimensionais, a partir de representações do plano, especialmente em problemas clássicos que envolvam áreas, volumes, planificações e relações entre elementos (vértices, faces e arestas) dos sólidos estudados. Segundo Gravina (1996, p. 2), “a construção de objetos geométricos raramente é abordada; dificilmente encontramos no livro escolar a instrução “construa”, e, no entanto, esta é uma das atividades que leva o aluno ao domínio de conceitos geométricos”. Neste sentido, este estudo teve por objetivo compreender como o uso adequado do software Geogebra pode auxiliar o professor de matemática no planejamento e na produção de atividades visando uma aprendizagem significativa sobre Geometria Espacial, especialmente procura-se responder a questão de pesquisa: **como organizar uma sequência didática visando o ensino das relações entre cilindro, cone e esfera na sala de aula do Ensino Médio?** Para isso realizou-se uma investigação bibliográfica visando compreender as origens da Geometria e as tecnologias desenvolvidas ao longo do tempo para realização de cálculos de volumes, sobretudo, do cilindro, do cone e da esfera.

Neste trabalho, procuramos identificar alguns dos principais fatores que dificultam o ensino dos conteúdos relacionados com a Geometria Espacial na Educação Básica. Voltamos nossa atenção principalmente para as atividades que podem ser desenvolvidas pelos professores na tentativa de minimizar os problemas de aprendizagem da Geometria, procurando desenvolver no estudante uma melhor percepção espacial, de forma que ele possa resolver situações-problemas. Tomamos como referência, portanto, uma abordagem qualitativa, que, segundo Bogdan e Biklem, citados por Lüdke e André (1986, p. 22), “envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes”, considerando aspectos singulares sobre como as concepções, as práticas pedagógicas e curriculares são vivenciadas por cada sujeito. Além da investigação de aspectos da história da Geometria, realizamos observação em sala de aula num curso de extensão sobre Geometria Espacial destinado aos alunos do primeiro semestre do curso de Matemática.

A partir das informações obtidas foi diagnosticado que parte significativa dos alunos não estavam familiarizados com o software GeoGebra e que a construção de procedimentos para realização de um roteiro orientaria as atividades. Esse roteiro indicava o uso da Internet, sobretudo o uso da plataforma Google. Numa pesquisa pelo celular um dos participantes informou que na figura abaixo pode-se observar uma descoberta interessante de Arquimedes: os volumes de um cone, de uma esfera e de um cilindro de mesma altura e mesmo raio caem na proporção 1:2:3. Em outras palavras: um cone mais uma esfera é um cilindro.

Figura 4: Arquimedes e a relação entre cone, esfera e cilindro.



Fonte: https://jornalheiros.blogspot.com/2020/08/geometria-arquimedes-e-a-relacao-entre-cone-esfera-e-cilindro.html(Adaptada pelo autor)

O uso da História da Geometria Espacial revelou-se como um recurso metodológico eficiente para o processo de ensino e aprendizagem, pois os problemas tratados surgem em sua maioria de necessidades reais da sociedade. Além disso, o uso da história da Matemática ajuda a ilustrar o fato que a matemática não se traduz só por algoritmos de resolução ou fórmulas, uma vez que torna conhecido o processo histórico e de descoberta por trás.

Segundo consta nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou a apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de

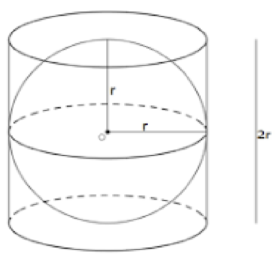
> contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática (MEC, 2006)

Nessa perspectiva o professor de Matemática pode organizar suas aulas de Geometria Espacial considerando os problemas, em sua gênese, com processo de resolução através dos diversos períodos da história, abordando sobretudo sobre a resolução desses problemas com a utilização das tecnologias disponíveis. Neste contexto, pode-se examinar as relações entre Cilindro, Cone e esfera através de régua e compasso, tecnologia utilizada por Arquimedes (287-212 a.c.) que seguiu o conceito de proporcionalidade de Eudoxo (408 e 355 a.C.), determinando áreas e volumes cortando-os em tiras planas ou fatias paralelas finas que pendurava na extremidade de uma alavanca e equilibrava com áreas ou volumes conhecidos.

> Para o volume da esfera ele usou um cilindro e um cone. Utilizando uma impressora 3D, construímos a balança de Arquimedes - Figura 2. O raio da esfera construída é r =4 cm o que nos dá um cone e um cilindro de altura e raio da base de 8 cm. Na impressora 3D fizemos os sólidos vazados e os preenchemos com gesso, o que foi uma tarefa um tanto quanto difícil pois precisávamos preparar o gesso e manter sempre a densidade. Porém, Arquimedes não se satisfazia com esse método, recorrendo "ao método da exaustão para fornecer uma demonstração mais rigorosa" (EVES, 2011, p.423). Então, ele fez uma demonstração matemática por dupla redução ao absurdo, ou seja, ele supôs o volume encontrado no método anterior como verdadeiro e mostrou que aquela igualdade teria que ser verdadeira, pois o volume da esfera não poderia ser menor nem maior que aquele valor. Contudo, para essa demonstração Arquimedes não utilizou o cilindro, ele fez a comparação com o cone somente. Ele diz que toda esfera é igual a 4 vezes o cone de raio da base e altura r. Após as demonstrações da balança e da dupla redução ao absurdo, Assim, Arquimedes provou que: $A_c = \frac{3}{2}\,A_e$ e $V_c = \frac{3}{2}\,V_e$, em que, A_c é a área do cilindro, A_e é a área da esfera, V_cé o volume do cilindro e V_e é o volume da esfera. (BENK e FIGUEIREDO,2017)

Arquimedes, considerava essa sua mais bela descoberta, tanto que pediu que, quando morresse, sobre seu túmulo fossem gravados um cilindro e uma esfera nela inscrita, acompanhados da relação 3/2 que os une." (GARBI, 2010, p.90).

Figura 5: Esfera inscrita no cilindro.



Fonte:https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id_cpmenu/6221/18_15035696954909_6221.pdf

Figura 6: Balança de Arquimedes

Fonte:https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id_cpmenu/6221/18_15035696954909_6221.pdf

Nos diagramas da foto acima, Arquimedes parece fugir dos métodos tradicionais de resolução de problemas a partir da régua e do compasso, sugerindo comparar o cilindro, a esfera e um cone pesando-os. Segundo Ávila (1987, p. 3) “Arquimedes tinha o costume de enviar suas obras aos sábios de Alexandria, prefaciando-as com cartas a esses sábios. Seu livro, "O Método", contém como prefácio uma carta a Eratóstenes de Alexandria, a qual começa assim:

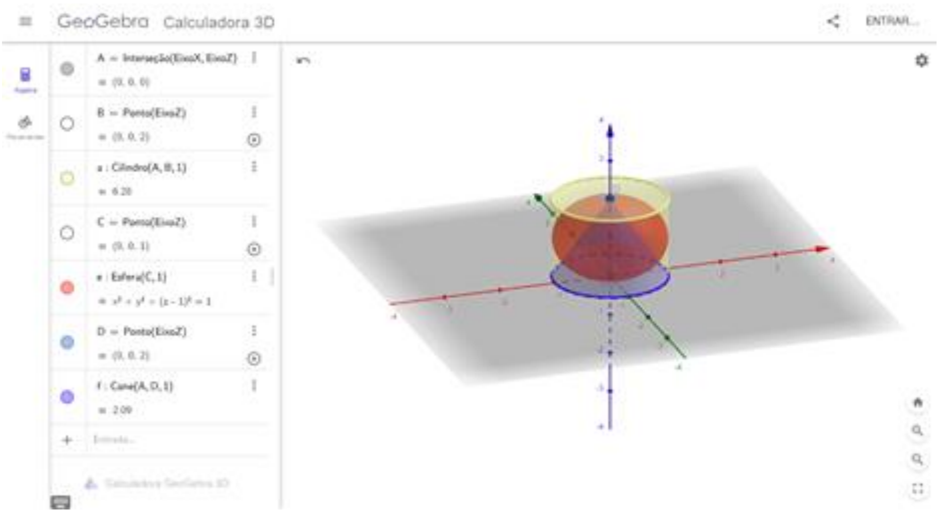
> Arquimedes a Eratóstenes,
> Saudações.
> Enviei-lhe em outra ocasião alguns teoremas descobertos por mim, meramente os enunciados, deixando-lhe a tarefa de descobrir as demonstrações então omitidas... Vendo em você um dedicado estudioso, de considerável eminência em Filosofia e um admirador da pesquisa matemática, julguei conveniente escrever-lhe para explicar as peculiaridades de um certo método pelo qual é possível investigar alguns problemas de Matemática por meios mecânicos... Certas coisas primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivessem de ser demonstradas pela Geometria, já que sua investigação pelo referido método não conduzisse a provas aceitáveis. Certamente é mais fácil fazer as demonstrações quando temos previamente adquirido, pelo método, algum conhecimento das questões do que sem esse conhecimento... Estou convencido de que ele será valioso para a Matemática, pois pressinto que outros investigadores da atualidade ou do futuro descobrirão, pelo método aqui descrito, outras proposições que não me ocorreram.

Ávila (1987, p. 3) comenta ainda sobre o conteúdo desta carta observando que:

> É oportuno notar, a propósito das palavras finais da citação acima, que o chamado "método dos indivisíveis", inventado no século XVII, e que deu origem ao Cálculo Diferencial e Integral, é muito parecido com o antigo "método mecânico" de Arquimedes. Tanto um quanto outro carecem de uma fundamentação sólida, mas contêm os ingredientes que facilitam as descobertas e que, no século XVII, foram decisivos para grandes avanços da Matemática. Devemos refletir sobre estas coisas para bem apreciar os traços de um
> gênio.

Outra Perspectiva para resolver problemas sobre cilindro, cone e esfera pode estar presente no uso adequado do software Geogebra, conforme mostra a figura abaixo:

Figura 7: Geogebra - cilindro, cone e esfera.



Fonte: O autor

PROPOSIÇÃO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Após uma aula sobre a gênese da Geometria Espacial, passando pelo cálculo do volume do cilindro, cone e esfera realizados por Arquimedes, considerando os aspectos presentes nos capítulos anteriores, propor-se atividades do estudo desses objetos geométricos com a utilização do software GeoGebra.

No curso de extensão realizado cerca de 40 alunos dispunham de computadores presentes no Laboratório de Informática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Acre. A eles foi disponibilizado um roteiro de questões que deveriam ser respondidas e enviadas para avaliação do professor. No roteiro foi solicitado que os registros de estratégias e cálculos ficassem salvos na tela do GeoGebra. A seguir o roteiro das questões apresentado aos alunos:

Atividade 1 – Cubo, retas e planos

Construa um cubo e usando seus vértices:

a) construa retas concorrentes, retas perpendiculares e retas paralelas;

b) construa planos concorrentes, planos perpendiculares e planos paralelos;

c) construa ponto I na aresta EF; construa o plano determinado pelos pontos A, D e I ; construa a intersecção deste plano com o cubo e observe a variação da seção dada pela intersecção. Obs: o recurso Vista 2D do plano de corte ajuda na visualização da seção.

Atividade 2 – Construção de prisma e pirâmide

a) no plano XOY construa, com recursos 2D, um pentágono regular;

b) usando o polígono como base, construa prisma e pirâmide de base pentagonal;

c) explore as planificações destes sólidos.

Atividade 3 – Construção de cone, cilindro e esfera

a) no plano XOY construir um círculo, e usá-lo na janela 3D como base de um cone; construir cilindro contendo o cone

b) no plano XOY construir um círculo, e usá-lo na janela 3D como base de um cone; construir esfera inscrita no cone

Obs: para construir a esfera é interessante trabalhar na seção triangular que é a intersecção do cone com o plano perpendicular à base do cone contendo o seu eixo. Usando bissetriz de ângulos é construído o incentro do triângulo, este o ponto que é o centro da esfera. Para determinar o raio, traçar perpendicular ao lado do triângulo passando pelo incentro.

Atividade 4 – Corte no cone

Construa um cone. Construa um plano com movimento de modo que a seção de intersecção com o cone seja um círculo ou uma elipse. Observe a variação da curva na Vista 2D do plano.

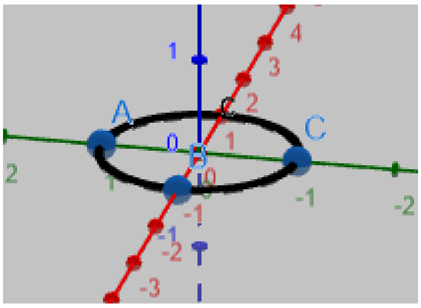
Na próxima apresentaremos o desenvolvimento das atividades proposta para os alunos, especialmente as atividades de três alunos (as) e analisaremos os registros do processo de resolução das questões com a utilização do GeoGebra, para que possamos orientar como organizar uma sequência didática visando o ensino das relações entre cilindro, cone e esfera na sala de aula do Ensino Médio? No apêndice 1 pode-se encontrar as atividades realizadas com os demais alunos.

Relações entre Cilindro, Cone e Esfera
Aluno W

1. Construir um cilindro cujo diâmetro (2r) e altura (h) tenham a mesma medida

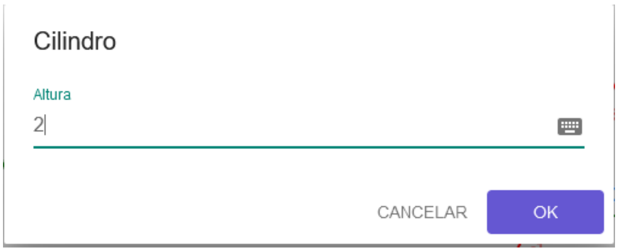
Primeiro utilizei a ferramenta “Círculo definido por Três Pontos”

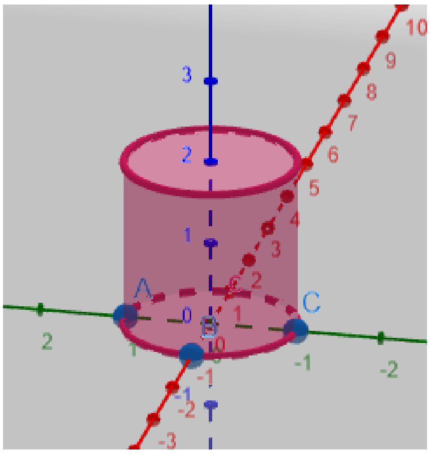
Daí, fiz um círculo de raio r = 1



Então, utilizei a ferramenta "Extrusão para Prisma”

Onde preenchi a informação da altura com “2”. Já que o diâmetro do círculo da base vale 2





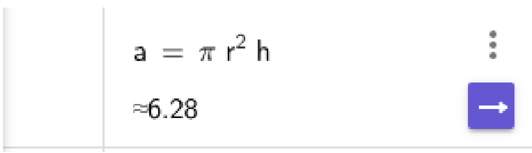
Então está criado o meu cilindro equilátero

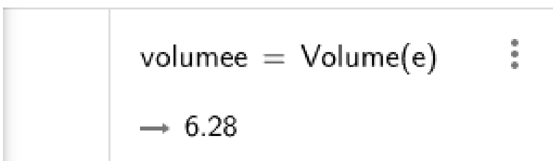
2. Concluir que o volume do cilindro é: Volume do cilindro $V_{cilindro} = \pi r^2 h$

Utiliza-se o princípio de Cavallieri com um prisma

Ao utilizar a ferramenta “Segmento”,  criei o segmento que chamei de “r”, com extremidades no centro e na circunferência. E fiz o mesmo com um segmento que chamei de “h”.

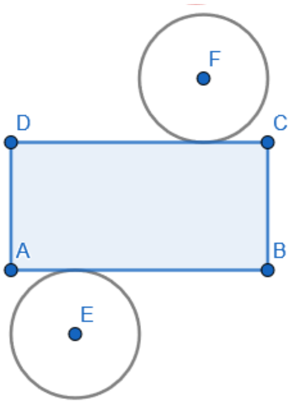
Daí coloquei a fórmula do volume na janela de álgebra e comparei com o resultado gerado pela ferramenta “Volume”  para comparar os resultados.





Percebemos das imagens acima que os valores são os mesmos

3. Planifique o cilindro e explique como será composta sua área



A área será composta de um retângulo de base $b = 2\pi$ e altura $h = 2$, somando a área de dois círculos de raio $r = 1$

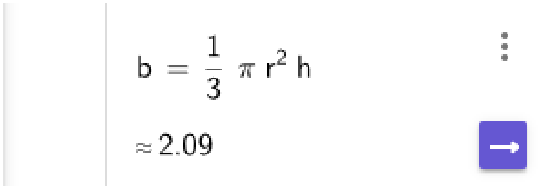
4. Inscreva um cone no cilindro que você determinou nos itens 1 e 2

Para isso, usei a ferramenta "Fazer extrusão para Pirâmide" no círculo determinado no item 1, e selecionei "2" como altura.

5. Determine o volume desse cone comprovando que seu volume será dado por $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

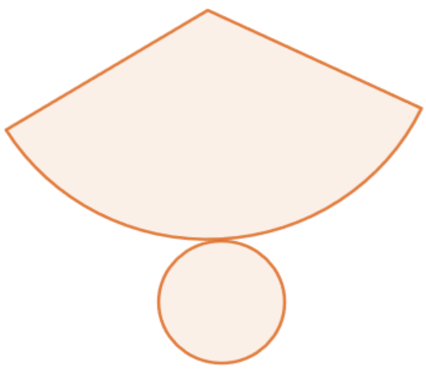
Utiliza-se o princípio de Cavallieri com uma pirâmide

Assim como no item 2, coloquei a fórmula na janela de álgebra e comparei com o volume da ferramenta "Volume"



Que podemos perceber que apresentam os mesmos valores

6. Planifique o volume desse cone e explique como será composta sua área



A área será composta por um círculo de raio $r = 1$ e um setor angular de raio $g = \sqrt{5}$

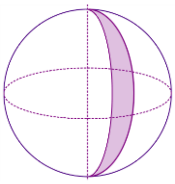
7. Inscreva uma esfera no cilindro que você desenhou nos itens 1 e 2

Utilizei a ferramenta “Esfera: Centro & Raio” 

onde criei uma esfera no ponto O(0, 0, 1) de raio igual à 1

8. Planifique o volume dessa esfera explicando como será composta sua área

Não é possível planificar uma esfera, mas uma maneira de chegar bem próximo é dividir a esfera em fusos e utilizá-los como uma planificação.

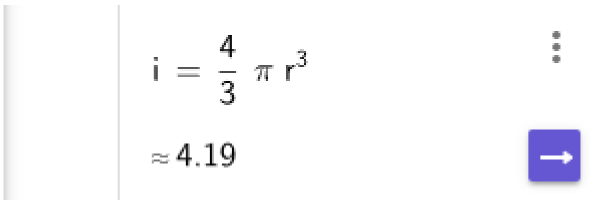


Além disso, a área da esfera é obtida através da diferença entre os volumes da esfera de raio r e de uma esfera de raio x menor que r quando x tende à r

Utilizando esse método, obtemos $A_{cone}= 4\pi r^2$

9. Conclua que o volume da esfera será dado por $\frac{4}{3}\pi r^3$

Utilizei a mesma estratégia do item 2



10. Determine relações existentes entre cilindro e cone, cilindro e esfera, cone e esfera

Sabemos as fórmulas dos volumes desses sólidos, pelas questões anteriores. Temos então:

$V_{cilindro} = h\,\pi r^2 = 2\pi r^3$
$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \quad \frac{2}{3}\pi r^3$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Daí,

$\frac{V_{cilindro}}{V_{cone}} = \frac{2\pi r^3}{\frac{2}{3}\pi r^3} = 3$

$\frac{V_{cilindro}}{V_{esfera}} = \frac{2\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{2}$

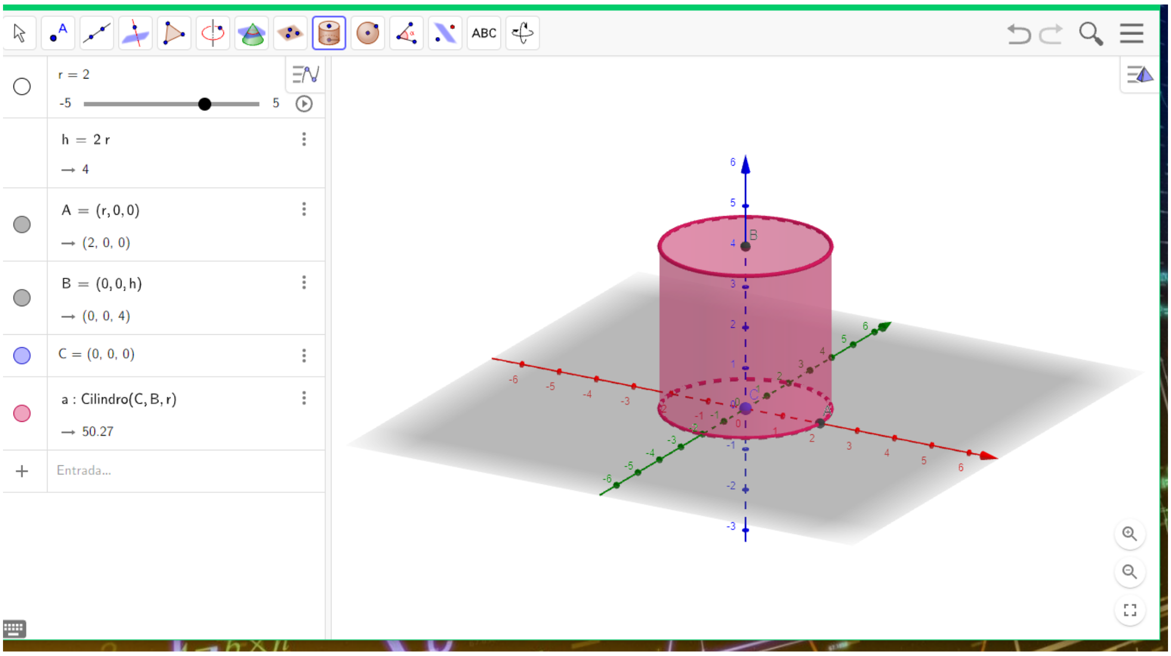
$\frac{V_{esfera}}{V_{cone}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{2}{3}\pi r^3} = 2$

Portanto, o volume do cilindro é o triplo do volume do cone e 3/2 vezes o volume da esfera e o volume da esfera é o dobro do volume do cone.

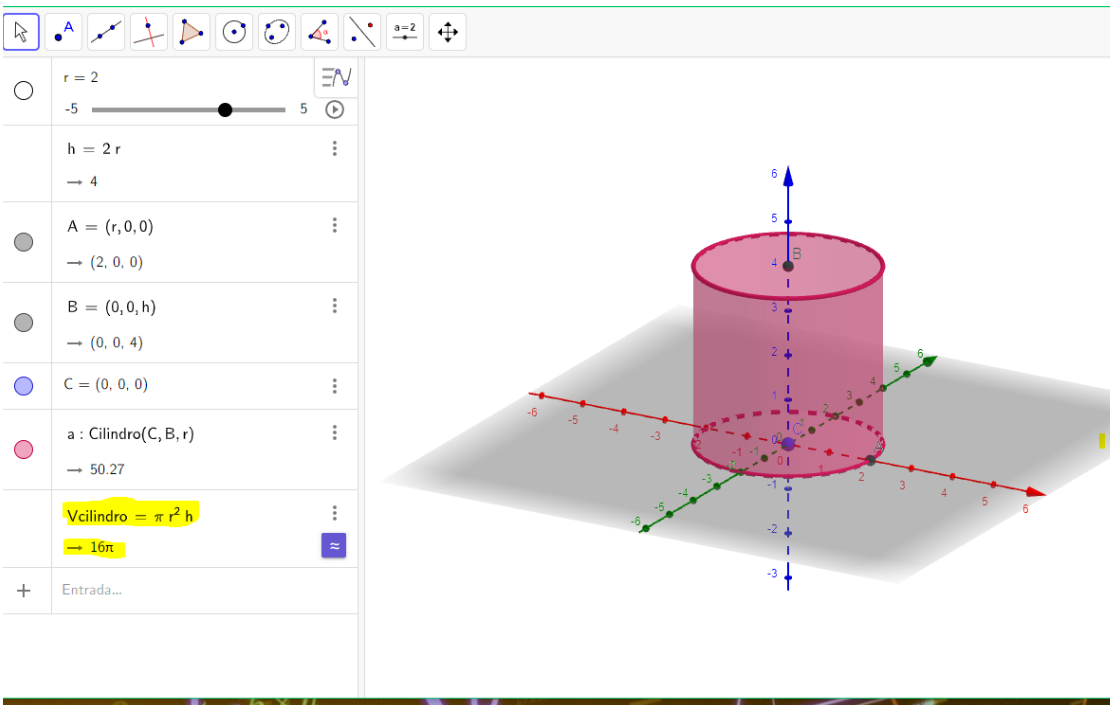
Relações entre o cilindro, cone e esfera
Aluno F

Atividade: Realize as tarefas abaixo relacionadas utilizando o GeoGebra 3D e registrando cada passo na tela do lado esquerdo.

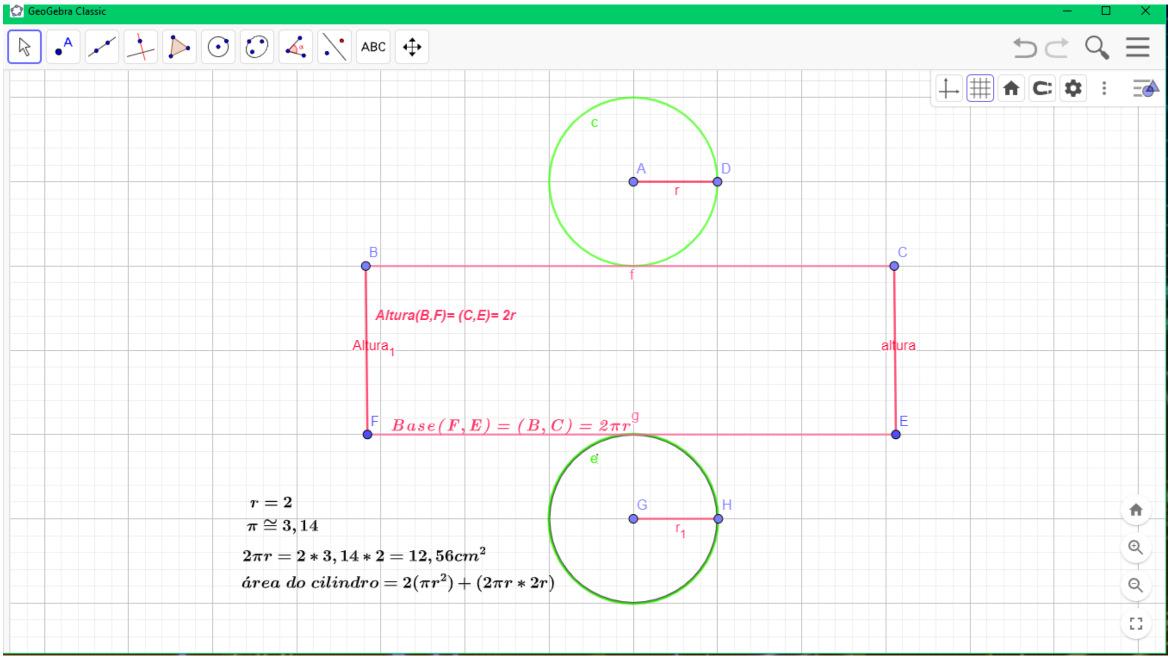
1-Construir um cilindro cujo diâmetro (2r) e altura (h) tenham a mesma medida;



2- concluir que o volume do cilindro é: Volume do cilindro V$_{\text{cilindro}}$= πr^2h;

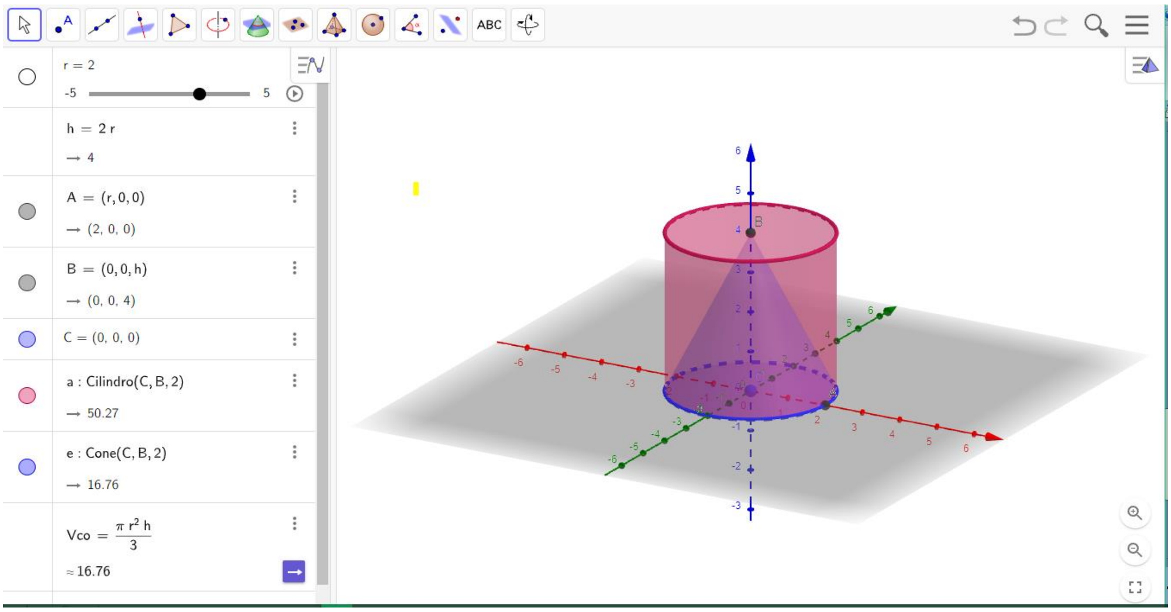


3- Planifique o cilindro e explique como será composta sua área;

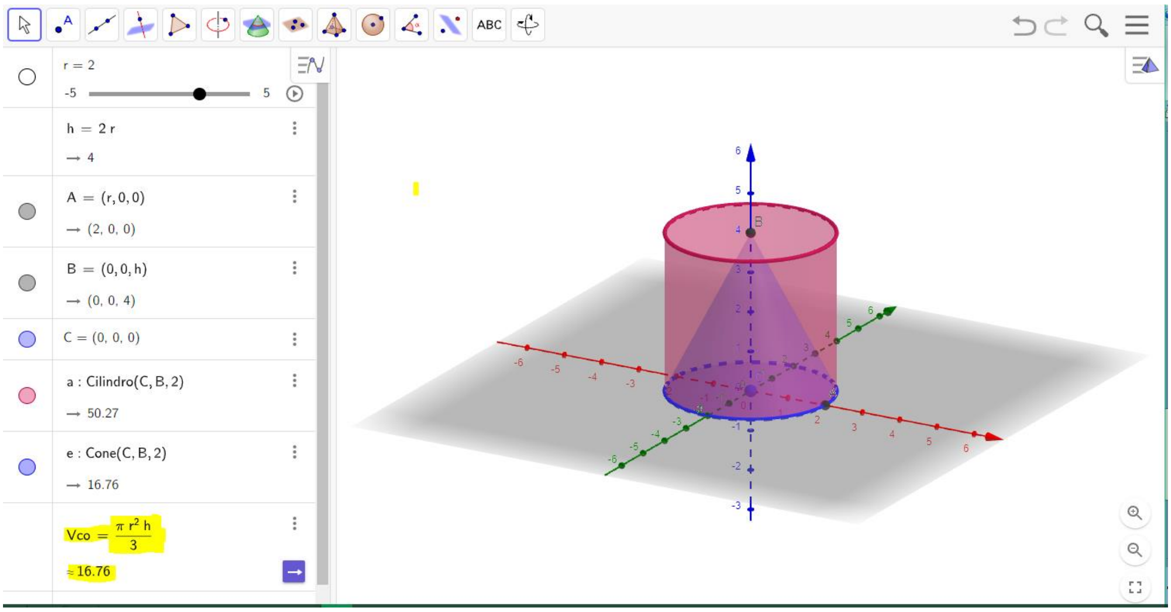


Em um cilindro reto circular com esse planifica acima, a área lateral é obtida por Al= 2πrh, onde h e a altura do cilindro e r é o raio da base, a área da base é obtida por $Ab = \pi r^2$. A área total corresponde á soma da área lateral com o dobro da área da base, que é obtida por **At= 2**(πr^2)**+2**$(\pi r h)$**, no caso da figura acima h=2r**

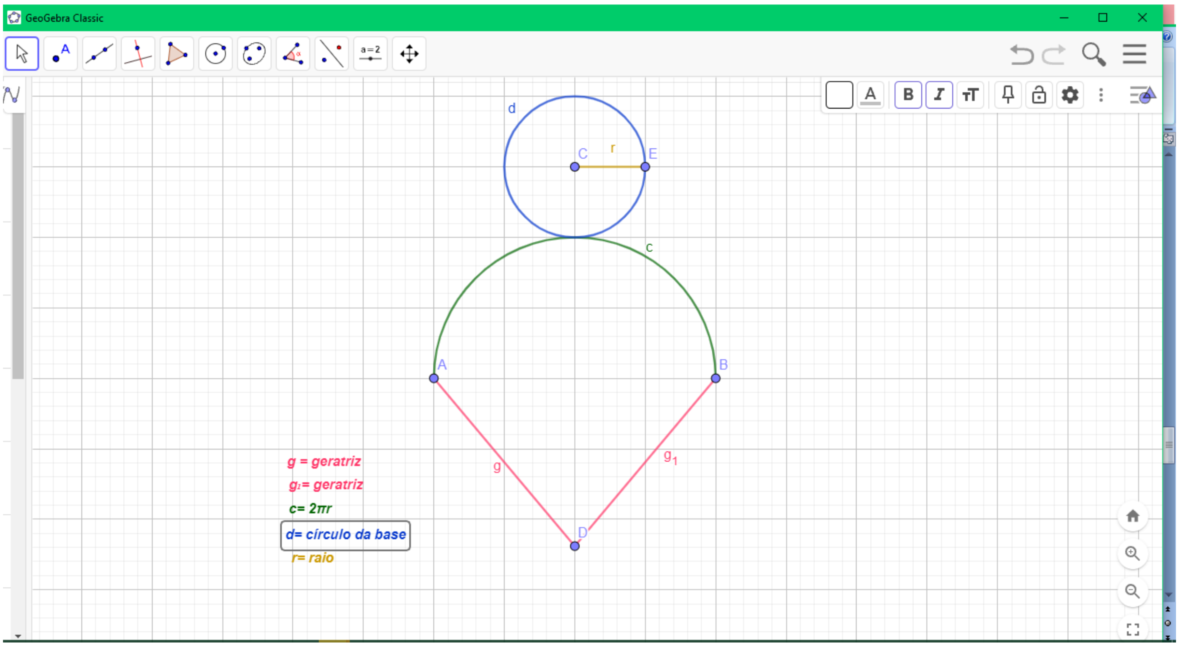
4- Inscreva um cone no cilindro que você determinou nos itens 1 e 2;



5- Determinem o volume desse cone comprovando o seu volume será dado por Vcone=$\frac{\pi r^2 h}{3}$;

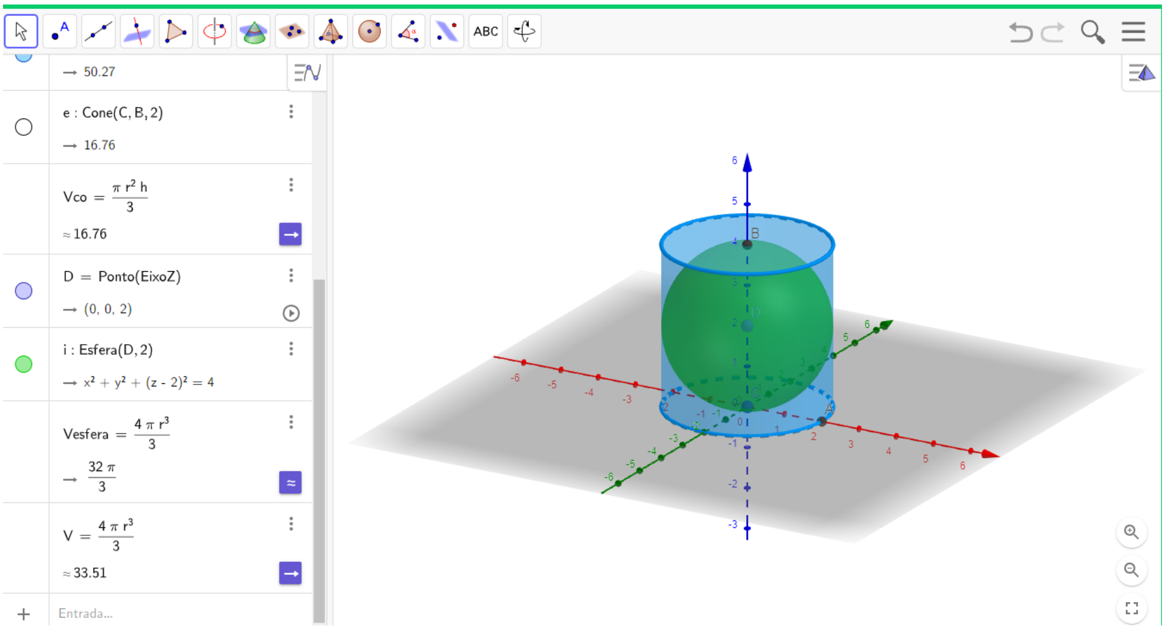


6- Planifique o volume desse cone e explique como será composta sua área;



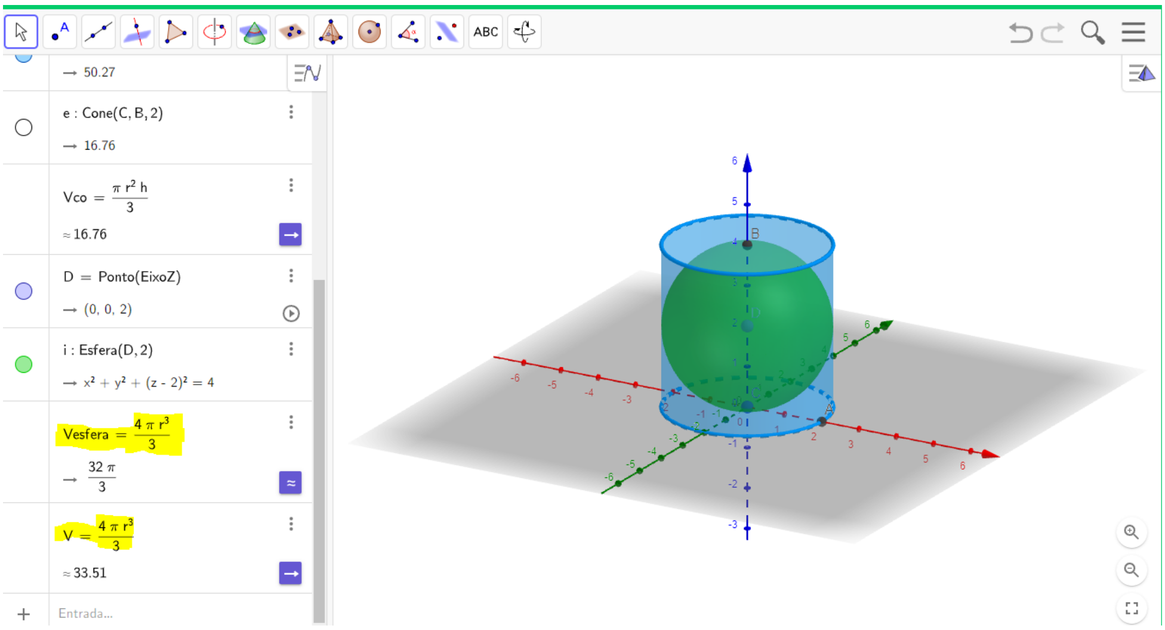
Quando fiz a ***planificação*** do ***cone***, como mostra a imagem acima, é possível perceber que ele é composto por uma base que possui formato de um ***círculo*** e uma ***área lateral*** que possui formato de um arco. Para calcular a área do cone, somamos a área da sua base com a sua área lateral. A formula para calcular á área do cone é **AT=**πr^2+πrg(área total = área da base+área lateral).

7- Inscreva uma esfera no cilindro que você desenhou nos itens 1 e 2;



8- Planifique o volume dessa esfera explicando como será composta sua área;

9- concluam que o volume da esfera será dado por $V_{esfera}\frac{4\pi r^3}{3}$;



10- Determine relações existentes entre cilindro e cone, cilindro e esfera, cone e esfera.

Entre cilindro e cone possível obter uma conclusão lógica: "o volume de um cone é a **terça parte** do volume de um cilindro com a mesma base e a mesma altura"

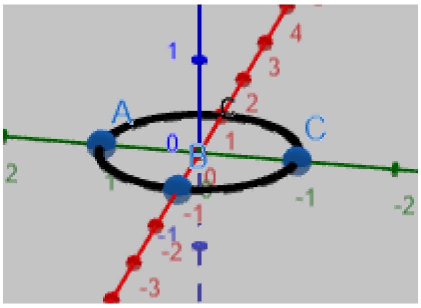
A relação existente entre o cilindro e esfera ou entre cone e esfera e que eles são corpos redondos ou sólidos de revolução são sólidos geométricos construídos a partir da rotação de figuras planas. Eles têm como principal característica a superfície curva.

Relações entre Cilindro, Cone e Esfera
Aluno(a) K

1. Construir um cilindro cujo diâmetro (2r) e altura (h) tenham a mesma medida

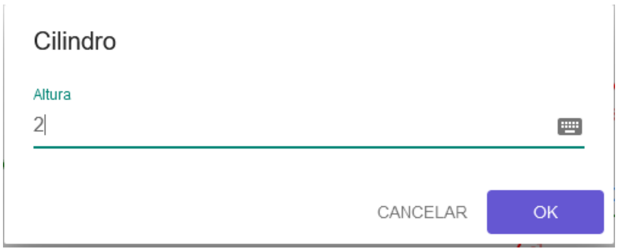
Primeiro utilizei a ferramenta “Círculo definido por Três Pontos” 

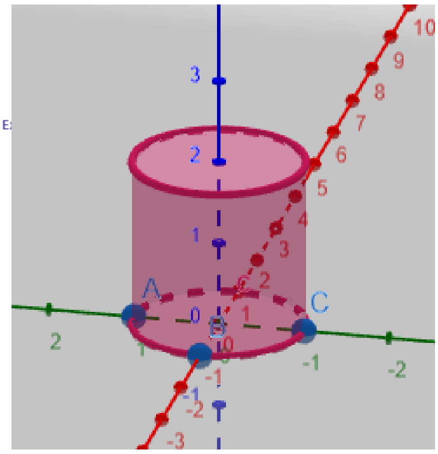
Daí, fiz um círculo de raio r = 1



Então, utilizei a ferramenta "Extrusão para Prisma”

Onde preenchi a informação da altura com “2”. Já que o diâmetro do círculo da base vale 2



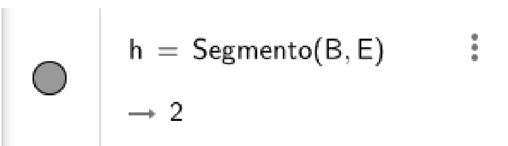


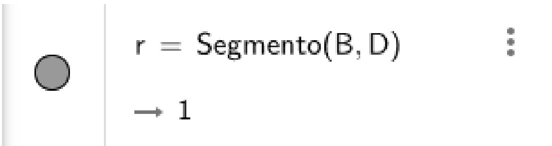
Então está criado o meu cilindro equilátero

2. Concluir que o volume do cilindro é: Volume do cilindro $V_{cilindro} = \pi r^2 h$

Ao utilizar a ferramenta “Segmento”, 

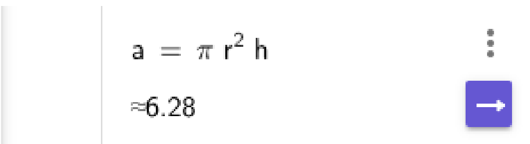
criei o segmento que chamei de “r”, com extremidades no centro e na circunferência. E fiz o mesmo com um segmento que chamei de “h”.

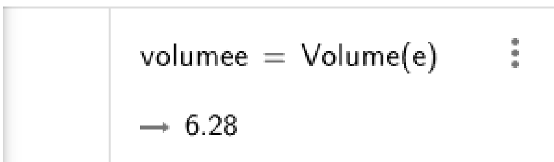




Daí coloquei a fórmula do volume na janela de álgebra e comparei com o resultado gerado pela ferramenta “Volume” 

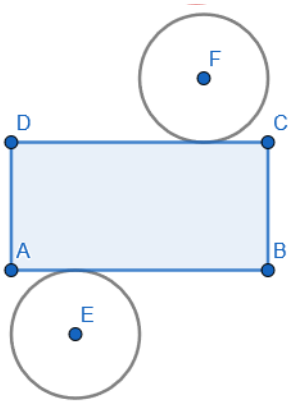
para comparar os resultados.





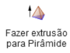
Percebemos das imagens acima que os valores são os mesmos

3. Planifique o cilindro e explique como será composta sua área

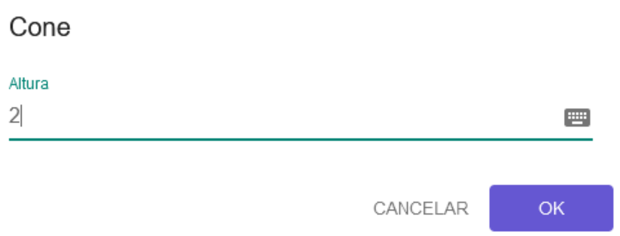


A área será composta de um retângulo de base $b = 2\pi$ e altura $h = 2$, somando a área de dois círculos de raio $r = 1$

4. Inscreva um cone no cilindro que você determinou nos itens 1 e 2

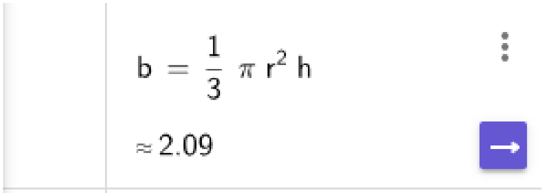
Para isso, usei a ferramenta "Fazer extrusão para Pirâmide" 

no círculo determinado no item 1, e selecionei "2" como altura.



5. Determine o volume desse cone comprovando que seu volume será dado por $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

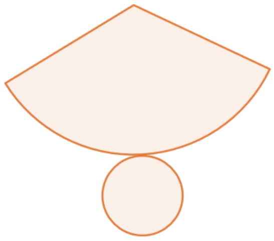
Assim como no item 2, coloquei a fórmula na janela de álgebra e comparei com o volume da ferramenta "Volume"



Que podemos perceber que apresentam os mesmos valores

6. Planifique o volume desse cone e explique como será composta sua área

A área será composta por um círculo de raio $r = 1$ e um setor angular de raio $g = \sqrt{5}$

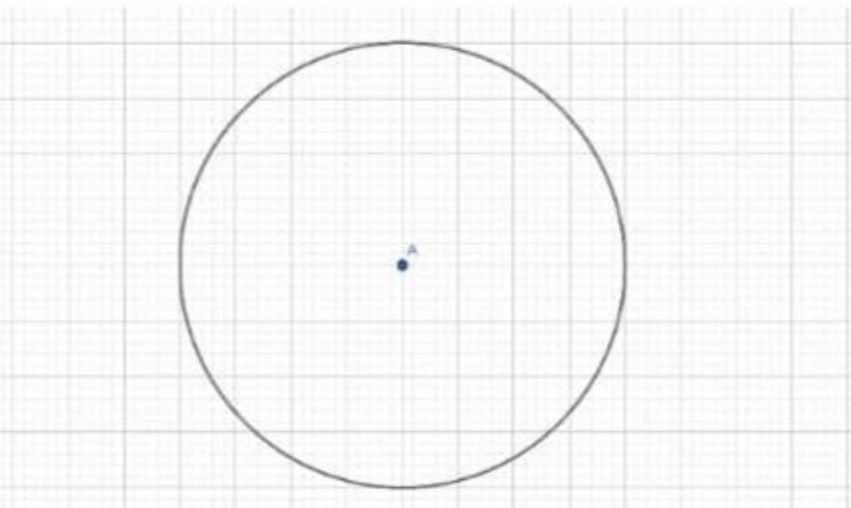


7. Inscreva uma esfera no cilindro que você desenhou nos itens 1 e 2

Utilizei a ferramenta "Esfera: Centro & Raio" 

onde criei uma esfera no ponto O(0, 0, 1) de raio igual à 1

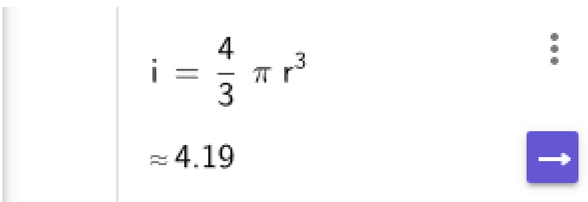
8. Planifique o volume dessa esfera explicando como será composta sua área



R= Sua área é composta pela seguinte formula: **πr^2 (Área do círculo)**

9. Conclua que o volume da esfera será dado por $\frac{4}{3}\pi r^3$

Utilizei a mesma estratégia do item 2



10. Determine relações existentes entre cilindro e cone, cilindro e esfera, cone e esfera

R = A relação entre o cilindro e o cone está no volume. O volume do cilindro é três vezes maior.

A relação entre o cilindro e a esfera é de que o volume da esfera é gerado pela anticlepsidra que é formada a partir do cilindro. Além disso, as bases do cilindro têm o mesmo formato e área do que a planificação da esfera.

A relação entre o cone e a esfera é de que a planificação da esfera é igual a base do cone.

A partir das respostas dos alunos, percebemos que uma das vantagens na utilização do software educacional GeoGebra em sala de aula é o processo de mobilização da curiosidade aliada à criatividade dos alunos. Essas vantagens são confirmadas através das pesquisas expostas no início deste texto, sobretudo nos trabalhos de Pavanello (1989); Kenski (2003) e Gravina (2015). isso também fica evidente no processo de resolução das questões dos alunos W, F e K. As estratégias metodológicas que utilizem tecnologias, como o GeoGebra, trazem para a sala de aula uma tarefa de criação de experiências que fazem o conhecimento geométrico acontecer na evolução de um nível básico da intuição e as conjecturas no sentido argumentado por (DUVAL, 2012).

O processo de resolução das atividades realizado pelo aluno W demonstra que o uso de tecnologias modernas no ensino de matemática para diversos conteúdos de ensino de matemática, em particular da Geometria Espacial, parece ir além da utilização do GeoGebra por diversas razões colaboradas pela literatura, entre elas nas pesquisas de Borba e Penteado (2017) ao analisar o papel das tecnologias digitais, assim como possibilidades e transformações que elas provocam no contexto da educação e, em particular, da educação matemática.

A prática de sala de aula do professor do curso de extensão permeadas pelo uso de aspectos históricos da Geometria Espacial e tecnologias modernas, sobretudo o GeoGebra está de conformidades também com as prescrições da Base Nacional Comum Curricular(BNCC), com destaque para 5ª Competência Geral, indicando que os alunos precisam:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018).

Outra percepção importante no processo de resolução das questões propostas para os sujeitos desta pesquisa, demonstra que eles conseguem relacionar benefícios de se utilizar o GeoGebra e outros softwares, previstos no currículo da BNCC, para apoiar o ensino da matemática. Os documentos oficiais, como a BNCC e OCs, já trazem em seu texto orientações para que a matemática seja apresentada aos alunos de forma contextualizada trazendo uma inversão metodológica. Assim, a matemática fica próxima ao contexto social do indivíduo dentro do processo de ensino e aprendizagem. Com um olhar especial também sobre os PCNs (2006), vemos no desenvolvimento das atividades realizadas pelos alunos o uso da ferramenta como cumprimento das competências da Matemática, quando determina que a “Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências” (BRASIL, 2002, p. 113).

Uma outra vantagem para uma aprendizagem significativa do aluno é caráter pedagógico das mídias digitais, segundo Kensky(2007), se comprova nos fatos de que as TICs oferecem uma variedade de informações, dados, ícones, mapas, movimentos etc. Contudo, é preciso enfatizar que a atuação do professor neste processo pedagógico é imprescindível. Cabe ao professor o papel principal: ajudar o aluno a interpretar esses dados, selecionando, relacionando, organizando e contextualizando.

Destacamos, assim, que explorar os aspectos visuais do GeoGebra com atividades pedagógicas que ofereçam meios para a investigação matemática e experimentação com tecnologias, assume uma dimensão heurística, sendo apropriada aos cenários de ensino e aprendizagem de Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2016). Dessa forma, o processo de formação de imagens é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem dos conteúdos geométricos. Conforme esses autores, o GeoGebra, que mantém possível o estudo de conteúdos de forma mais próxima ao que era feito com lápis e papel, transforma também as possibilidades de experimentação, de visualização e de heurística dos humanos envolvidos nesse coletivo que aprende (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2016, p. 73).

Essa percepção também é compartilhada pelos docentes, que veem os resultados na prática da sala de aula, “É essencial para que as aulas saiam da rotina, faz com que, o aluno tenha mais interesse, ou seja, se torne protagonista do processo de ensino e aprendizado no ensino de matemática” (Professor da turma).

Outra vantagem percebida na pesquisa diz respeito à atenção e participação nas aulas: “Em relação às atitudes dos alunos no desenvolvimento de aula com o uso de software educacional apresentam maior motivação e envolvimento durante as atividades propostas”. A utilização do software para melhorar a compreensão da geometria foi bastante citada entre os participantes, sobretudo, porque esse instrumento permite diversificar a apresentação de conceitos, colaborando como argumenta Durval (2012) com possibilidades de estratégias para ensinar a matemática de outra forma, permitindo entrar no modo matemático de pensar através dos registros de representações semióticas.

Em relação a esses aspectos o professor da turma argumentou que antes do uso do GeoGebra seus alunos apresentavam diversas dificuldades. Os meninos tiveram dificuldades em:

> visualizar aquela figura que estava no material em 3D, então principalmente quando dei a diferença de prisma e pirâmides e dei poliedros, também para eles né, eles tinham essa dificuldades de identificar, faces, arestas, vértices também, e eles tinham dificuldades também principalmente quando tinha alguma questão que tinha planificação, eles não conseguiam visualizar aquela planificação fechada na figura espacial, então a minha principal dificuldade era essa, principalmente quando eu trabalhava poliedros com eles e para ele caracterizar arestas, faces e vértices e principalmente quando eles estavam na planificação, quando eles tinham os objetos em mão, quer dizer, as vezes eu trabalhava também com o manipulado ficava mais fácil, mais quando era uma atividade que tinha planificação e o objeto não dava para eles em 3D então ele tinham muitas dificuldades em analisar.

Isso colabora também com o entendimento de Gravina (2015) sobre o ensino de Geometria desenvolvido por meio de abordagens tecnológicas, como o uso do GeoGebra, desde que os conteúdos estejam organizados de forma diferente, inovadora, no sentido de se explorar os benefícios do software, no sentido de “desenvolver a competência investigativa no aluno por meio dos vários experimentos e experimentações que se pode acessar numa tela interativa” (GRAVINA, 2015, p. 251).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com uma visão sobre a história da Geometria e auxílio do software GeoGebra, é possível apresentar os conteúdos de Geometria Espacial de forma diversificada contribuindo para uma possibilidade metodológica pautada pela criatividade tanto de quem ensina quanto de quem aprende, em que as questões elaboradas têm o potencial de auxiliar a percepção geométrica do aluno. Isso fica evidente a partir do depoimento dos professores, colabora também com o pensamento de Durval (2008) segundo o qual os diferentes sistemas semióticos permitem uma diversificação de representações de um mesmo objeto, aumentando as capacidades cognitivas dos sujeitos. Isso porque, do ponto de vista cognitivo, nenhuma representação é completa em relação ao objeto que representa, ou seja, cada representação revela um determinado conceito, uma determinada propriedade, enfim, uma diferente característica, a mobilização e coordenação de vários registros de representação tornam-se importantes para que os objetos matemáticos não venham a ser confundidos com suas representações e para que possam ser reconhecidos em cada uma delas. Desta forma, o conhecimento matemático só é transformado em saber quando ocorre a mobilização espontânea pelos alunos, de distintos registros semióticos de um mesmo objeto matemático.

Uma sequência didática do conteúdo da Geometria Espacial pode ser realizada através de informação históricas e do GeoGebra, uma vez que essas tecnologias, ao permitir leituras, visualizações e construções tridimensionais, permite a construção de objetos para experimentação e exploração de conceitos dentro da Geometria Espacial, como uns recursos dinâmicos e interativos. As análises das atividades dos professores colaboram com o pensamento de Alves e Borges Neto (2012) mostrando que a tecnologia pode afetar o processo de mediação no ensino de determinados tópicos, porém, seu uso de forma complementar enfatiza uma mudança dimensional, com o objetivo de identificar elementos de natureza qualitativa. Assim, a prática de sala de aula com a utilização de aspectos relacionados à história da Geometria e auxílio do GeoGebra pelos participantes desta pesquisa sugere uma proposta de ensino relevante para melhorar a aprendizagem do aluno em Geometria Espacial, seja por meio do desenvolvimento da percepção e ou da visualização geométrica, podendo ser disseminada a partir dos depoimentos dos professores ao utilizar a tecnologia em foco, rompendo barreiras e obstáculos pré-existentes no processo de compreensão deste tema.

REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. A. P. **A Transposição Didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra**. Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, v. 9, n. 1, p. 59-75, 2020(a). Disponível em: http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p59-75. Acesso em: 01 ago,2020.

ABAR, C. A. A. P. **Teorias da Transposição Didática e Informática na criação de estratégias para a prática do professor com a utilização de tecnologias digitais**. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 5, n. 1, p. 29-45, 2020(b). Disponível em: https://doi.org/10.34179/revisem.v5i1.11893. Acesso em: 01 ago. 2020.

ABAR, C. A. A. P.; COTIC, N. S. **GeoGebra na produção do conhecimento matemático**. São Paulo: Iglu, 2014.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. **A contribuição de Efraim Fischbein para a Educação Matemática e a formação do professor**. Conexão, Ciência e Tecnologia, v. 5, n. 1, p. 38-54, 2011. Disponível em: https://doi.org/10.21439/conexoes.v5i1.441. Acesso em: 10 out. 2020.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. **Engenharia Didática para a exploração didática da tecnologia no ensino no caso da regra de L'Hospital**. Educação Matemática Pesquisa, v. 14, n. 2, p. 337-367, 2012. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/9445. Acesso em: 05 out 2020.

ANDRADE, L. N. **Geometria espacial com GeoGebra. Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 87, p. 36–41, 2º quadrimestre 2015.

ÁVILA, GERALDO. ARQUIMEDES, **A esfera e o cilindro**. Revista do Professor da Matemática. São Paulo, nº 10, p.11-20, 1987.

BENK, P.; FIGUEIREDO E. B. **ARQUIMEDES E A ESFERA**. 27º Seminário de Iniciação Cientifica, 2017, UDESC.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. S. R.; GADANIDIS, G.. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matematica: Sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

BOYER, C. B. **História da Matemática** - Tradução. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blücher, 1996.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matriz de referência para o ENEM, 2009**. Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 10 mar. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**, 2018. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em:27 de agosto de 2023

CAMILO, A. M. S.; ALVES, F. R. V.; FONTENELE, F. C. F. **A Engenharia Didática articulada à Teoria das Situações Didáticas para o ensino da Geometria Espacial**. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, v. 16, n. 59, p. 64-82, 2020. Disponível em: https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/127. Acesso em: 10 dez. 2020.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática** . In.: MACHADO, S.D.A. Aprendizagem Matemática: registros de representação semiótica. 4ª edição. Campinas: Papirus, 2008, 160p.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Eves, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Geometria** - Tradução. São Paulo, Atual Editora, 1992.

FANTI, E. L. C. **Utilizando o software GeoGebra no ensino de certos conteúdos matemáticos**. In: Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 5, 2010, João Pessoa. Anais... João Pessoa: UFPB, 2010, p. 1-16.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 5 ed. São Paulo: editora livraria da física, 2010.

GIRARDO, V., **Integrando Geometria e Funções: gráficos dinâmicos**. In Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 79, p. 39–46, 3º quadrimestre 2012.

GRAVINA, M. A. **O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da Geometria: uma experiência ilustrativa**. Vidya, v. 35, p. 237-253, 2015.

GRAVINA, M. A. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado**. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 7., 1996, Belo Horizonte, Anais... Belo Horizonte, 1996.

KESNKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial a distância** –Campinas, SP: Papirus, 2003. –(Série Prática Pedagógica).KENSKI, V. M. Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação. Campinas, SP: Papirus, 2007.

LORENZATO, S. A. **Por que não ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista. Blumenau: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. 4, n. 3, p. 3-13, 1995.

LUDKE, M.; ANDRE, M. E. D. A. **PESQUISA EM EDUCAÇÃO: ABORDAGENS QUALITATIVAS**, SAO PAULO: EPU, 1986.

MACHADO, A. P. ;MOURA, E., **A TRANSPOSIÇÃO DO SABER CIENTÍFICO GEOMETRIA FRACTAL PARA O SABER A ENSINAR**. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2010.

NOBRE, S. (1996). **Alguns "porquês" na História da Matemática e suas contribuições para a educação matemática**. Cadernos CEDES – História e Educação Matemática. São Paulo: Papirus, v. 40, p. 29-35, 1996.

OLIVEIRA, M. T.; LEIVAS, J. C. P. (2017). **Visualização e Representação Geométrica com suporte na Teoria de Van Hiele. Ciência e Natura**, v. 39, n. 1, p. 108-117, 2017. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/viewFile/23170/pdf. Acesso em: 10 out. 2020.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas (SP), 1989. Disponível em http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252057. Acesso em: 05 jul. 2020.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**. Revista Zetetiké, v. 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PAVANELLO, R. M. (2004). **A Geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: Contribuições da pesquisa para o trabalho escolar**. In: R. M. Pavanello, Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula, v. 2, n. 6, p. 129-143. São Paulo: Coleção SBEM, 2004.

PEREIRA, T. L. M. **O uso do software GeoGebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio**. 2012. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

RAMPANELLI, IVANDRA ; MARTINS, W. C. L. ; CABRAL, J. L. S. ; LAURENTI, A. A. ; DIEZ CASTILLO, A. A. ; FERNANDES, T. J. G. . **A importância de se estudar os Sítios Arqueológicos nas escolas: O caso dos Geoglifos no Acre**. SOUTH AMERICAN JOURNAL OF BASIC EDUCATION, TECHNICAL AND TECHNOLOGICAL , v. V. 4, p. 24-27, 2017.

ROQUE, T; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**: Coleção Profmat: 2ª Edição (novo)Ano: 2019

SECRETARIA DE EDUCACAO MEDIA E TECNOLOGICA. **Orientacoes**

Curriculares para o Ensino Medio - Ciencias da Natureza, Matematica e suas Tecnologias. Brasilia: MEC, 2006.

VARIZO, Z. da C. M. **O CONHECIMENTO MATEMÁTICO E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Revista Inter Ação, Goiânia, v. 14, n. 1/2, p. 7–18, 2018. DOI: 10.5216/ia.v14i1/2.55261. Disponível em: https://revistas.ufg.br/interacao/article/view/55261. Acesso em: 14 jan. 2023.

PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

Plutarco: **As Vidas dos Homens Ilustres**, vol. 3, Editora das Américas, São Paulo, pp. 268 a 280. Edição em inglês na coleção "Great Books of lhe Western Worid" da "Enciclopaedia Britannica Inc.", onde figura como vol. 14, pp. 252 a 255.

APÊNDICE

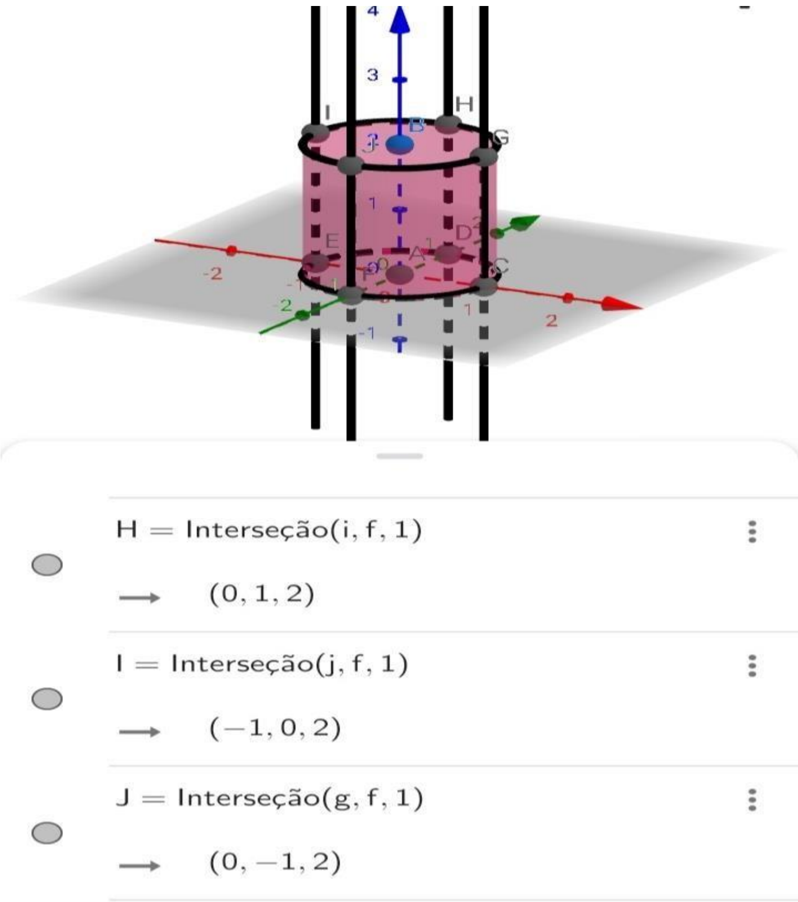
Discente: T. M. F.

Doscente: Ronaldo

Disciplina: Iniciação a extensão

<u>Questão 01:</u>

Como o raio é 1 e o seu diâmetro é 2×1=2, então sua altura é 2



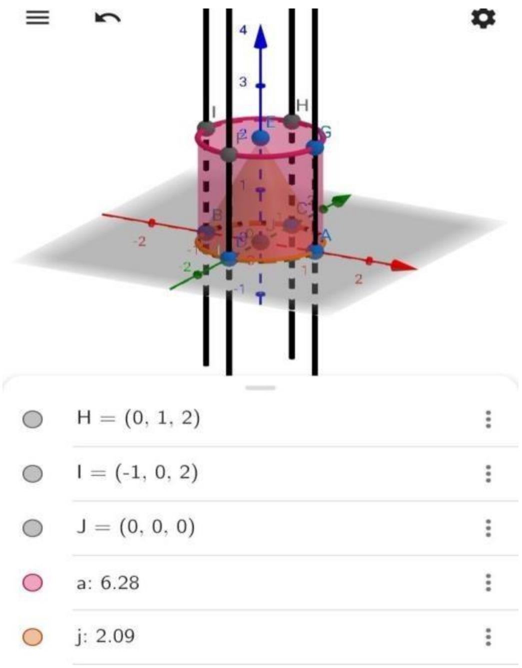
Questão 02:

O volume é igual a 6,28; decorre da seguinte equação: $3{,}14 \times 1^2 \times 2 = 6{,}18$; isso significa que a fórmula é $pi \times r^2 \times h = V$

Questão 03:

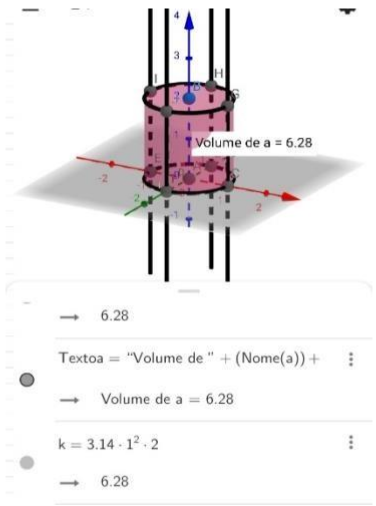
Sua área total é composta por $2 \times Ab + Al = At$, então fica:
$2 \times 3{,}14 \times 1^2 + 2 \times 1 \times 3{,}14 \times 2 = 18{,}84$

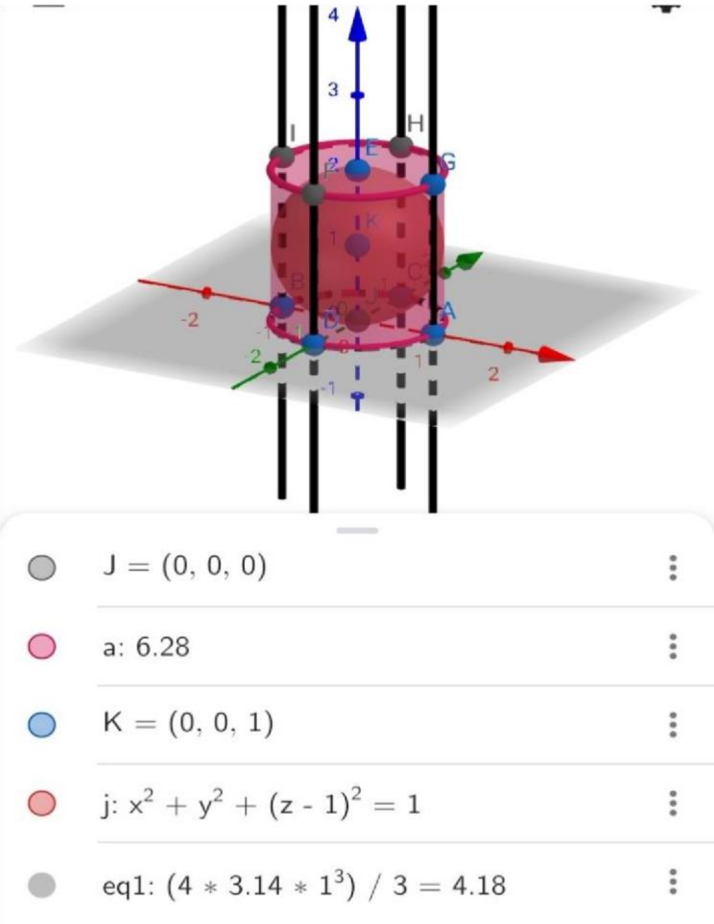
Questão 04:

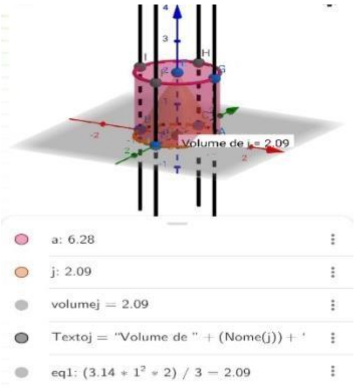


Questão 05:

O volume encontrado foi 2,09; decorreu da seguinte equação $(3{,}14 \times 1^2 \times 2) \div 3 = 2{,}09$; portanto sua fórmula é: $pi \times r^2 \times h/3 = V$







Questão 06:

Sua área total é composta por At(cilindro)+At(cone)=At, que ficaria assim 18,84+3,14.(1+raiz de 5)

Questão 07:

Questão 08:

Sua área total é composta por At(cilindro)+At(esfera)=At, que ficaria 18,84+12,56=31,4 Área total da esfera: $4 \times pi \times r^2$

Questão 09:

O volume é 4,18; decorrente da equação $(4 \times 3{,}14 \times 1^2) \div 3$, que portanto a fórmula é: $(4 \times pi \times r^2)/3 = V$

<u>Questão 10:</u>

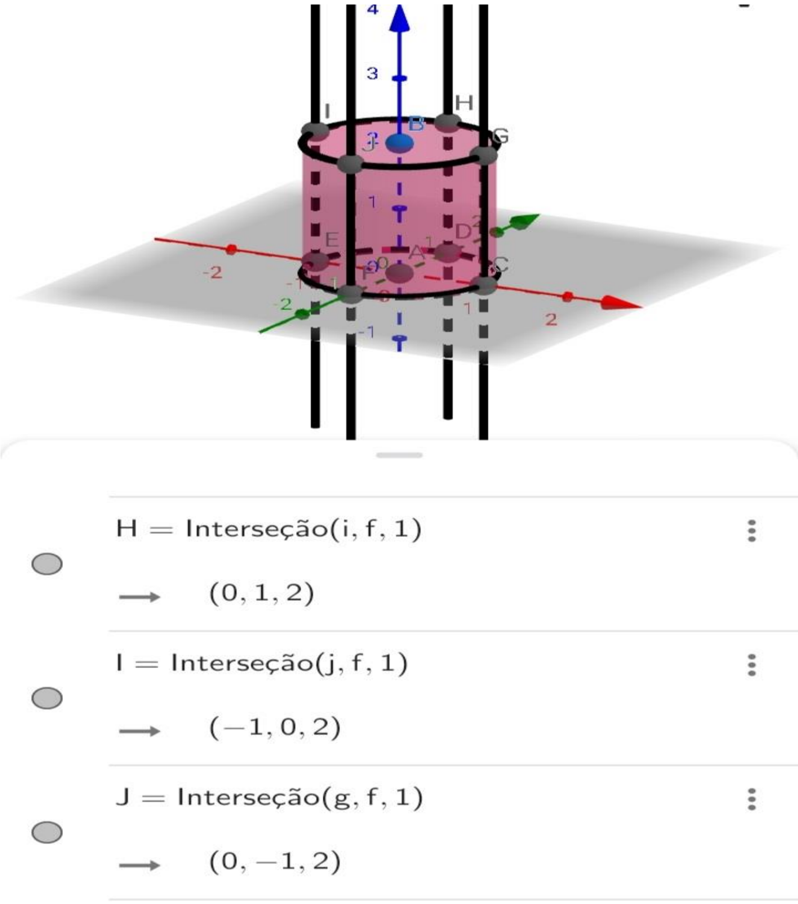
A relação entre eles é que são corpos redondos, que dependem dos valores de altura e raio;

Discente: M. E. G. F.
Docente: Ronaldo

Iniciação a extensão

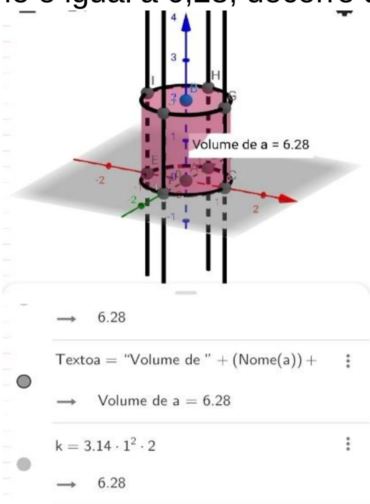
Questão 01:

Como o raio é 1 e o seu diâmetro é 2×1=2, então sua altura é 2



Questão 02:

O volume é igual a 6,28; decorre da seguinte equação: 3,14×1²×2=6,18; isso significa

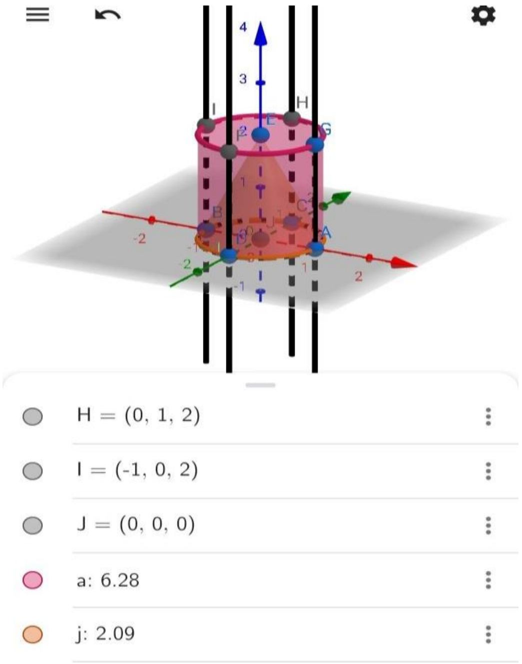


que a fórmula é pi×r²×h=V

Questão 03:

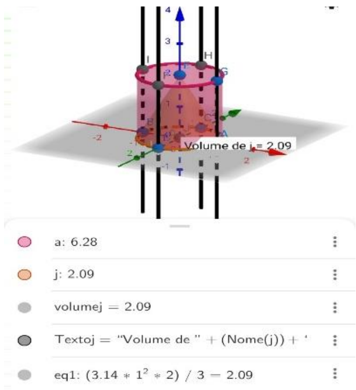
Sua área total é composta por 2×Ab+Al=At, então fica: 2×3,14×1²+2×1×3,14×2=18,84

Questão 04:



Questão 05:

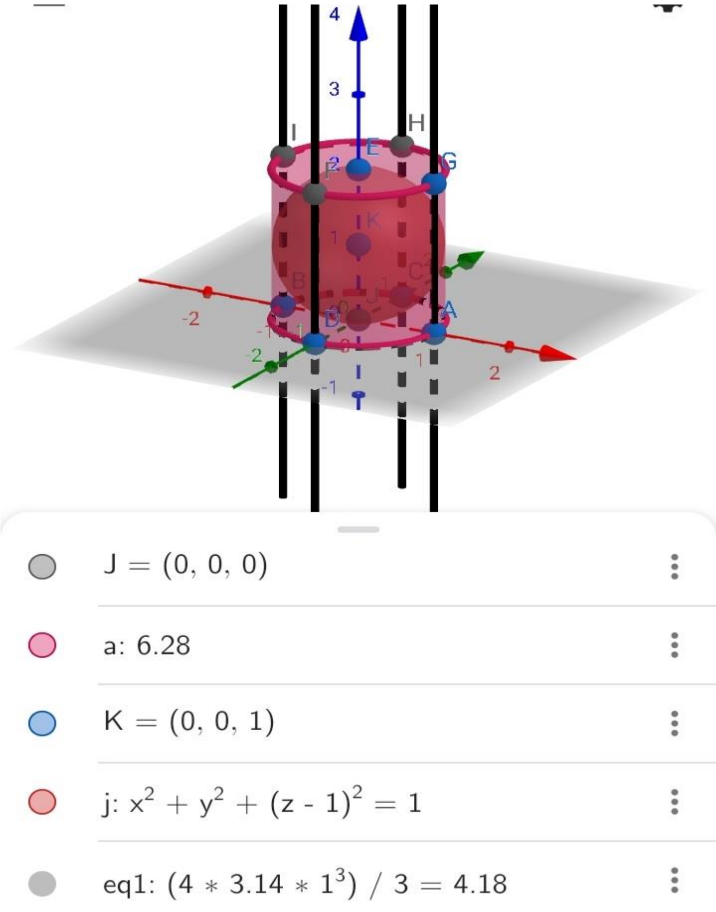
O volume encontrado foi 2,09; decorreu da seguinte equação (3,14 ×1²×2)÷3=2,09; portanto sua fórmula é: pi×r²×h/3=V



Questão 06:

Sua área total é composta por At(cilindro)+At(cone)=At, que ficaria assim 18,84+3,14.(1+raiz de 5)

Questão 07:



Questão 08:

Sua área total é composta por At(cilindro)+At(esfera)=At, que ficaria 18,84+12,56=31,4

Área total da esfera: 4×pi×r^2

Questão 09:

O volume é 4,18; decorrente da equação $(4\times3{,}14 \times 1^2)\div 3$, que portanto a fórmula é: (4×pi×r^2)/3=V

Questão 10:

A relação entre eles é que são corpos redondos, que dependem dos valores de altura e raio;

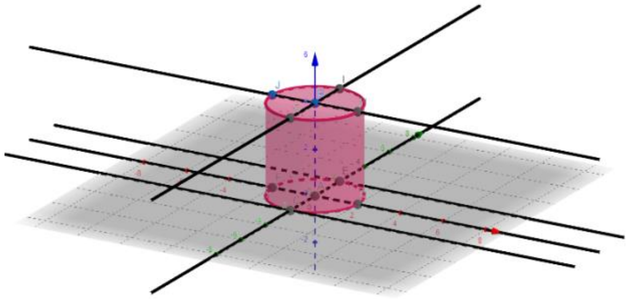
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

J C S

Matrícula:

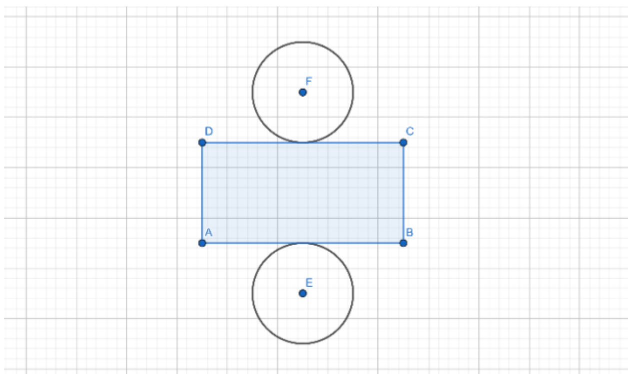
RELAÇÕES ENTRE CILINDRO, CONE E ESFERA

1) Construir um cilindro cujo diâmetro (2r) e altura (h) tenham a mesma medida.

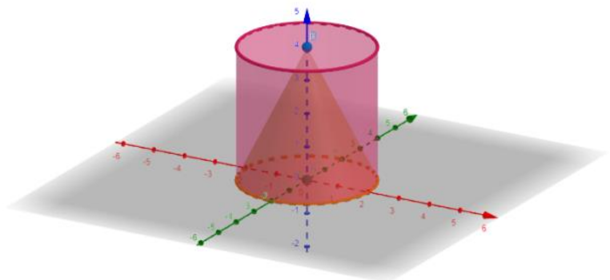


2) Concluir o volume do cilindro.
R = Para calcularmos o volume do cilindro, basta calcularmos a área da base e multiplicarmos pela altura.
Assim, temos que:
Volume do Cilindro = Área do círculo x Altura
$= \pi r^2$ x h

3) Planifique o cilindro e explique como será composta sua área.
R = Sua área é composta pela seguinte fórmula: 2(Área do círculo) + Área do retângulo.

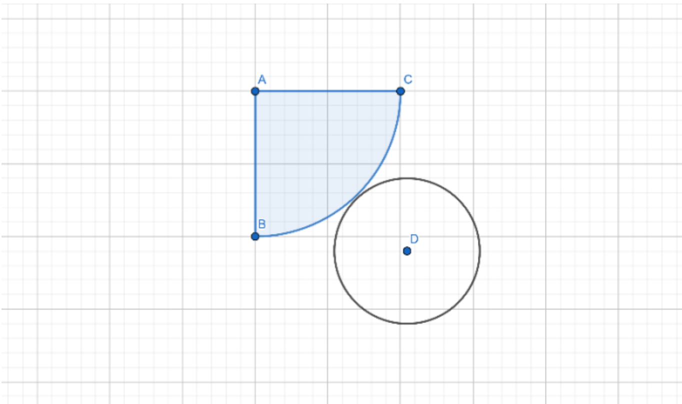


4) Inscreva um cone no cilindro que você determinou nos itens 1 e 2.

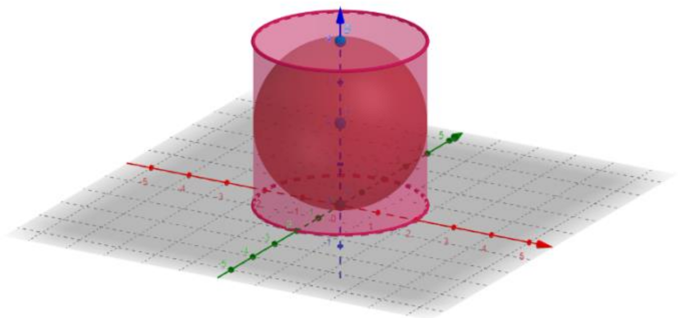


5) Concluir o volume do cone.
   R = Sabendo que o volume do cone é 1/3 do volume do cone, temos que:
   Volume do Cone = Área do Círculo x Altura / 3
   $= \pi r^2$ x h / 3

6) Planifique o volume desse cone e explique como será composta sua área.
   R = Sua área é composta pela seguinte fórmula: Área do círculo + Área do setor circular.

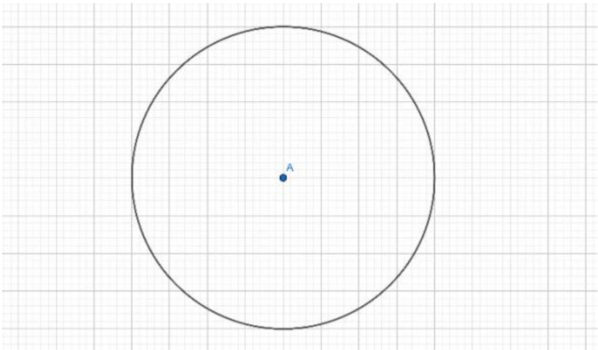


7) Inscreva uma esfera no cilindro que você desenhou nos itens 1 e 2.



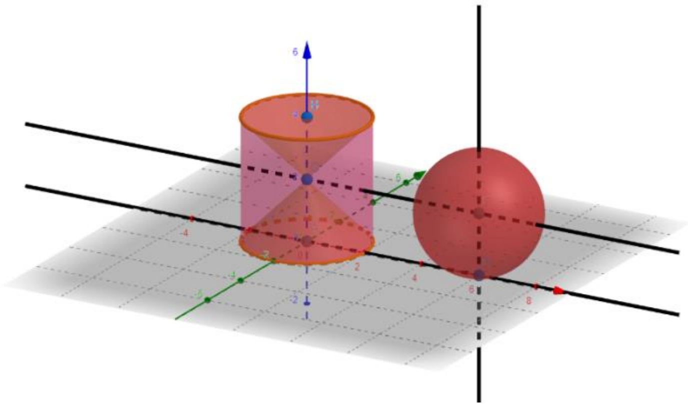
8) Planifique o volume dessa esfera e explique como será composta sua área.

   R = Sua área é composta pela seguinte fórmula: $A = \pi r^2$ (Área do círculo).



9) Concluir o volume da esfera.

R = Para mostrarmos o volume da esfera, vamos compará-lo com o volume da anticlepsidra, que é: 4/3 x πr^3(Volume do cilindro – 2(Volume do cone).



Na imagem, notamos que, estando em um mesmo plano, qualquer outro plano que secciona a esfera, também secciona a anticlepsidra, gerando também secções de áreas iguais.

Portanto, o volume da esfera = volume da anticlepsidra = 4/3 x πr^3.

10) Determine relações existentes entre cilindro e cone, cilindro e esfera, cone e esfera.

R = A relação entre o cilindro e o cone está no volume. O volume do cilindro é três vezes maior.

A relação entre o cilindro e a esfera é de que o volume da esfera é gerado pela anticlepsidra que é formada a partir do cilindro. Além disso, as bases do cilindro têm o mesmo formato e área do que a planificação da esfera.

A relação entre o cone e a esfera é de que a planificação da esfera é igual a base do cone.