

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

A INVERSÃO GEOMÉTRICA

Júlio César Costa



Uberlândia-MG

2023

Júlio César Costa

A INVERSÃO GEOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática

Linha de pesquisa: Geometria

Orientador(a): Dr^a. Dulce Mary de Almeida



Uberlândia-MG

2023

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C837 Costa, Júlio César, 1990-
2023 A INVERSÃO GEOMÉTRICA [recurso eletrônico] / Júlio
César Costa. - 2023.

Orientadora: DULCE MARY DE ALMEIDA.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.469>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. ALMEIDA, DULCE MARY DE, 1965-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-
graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 07, PROFMAT				
Data:	Treze de setembro de dois mil e vinte e três	Hora de início:	10:30	Hora de encerramento:	11:57
Matrícula do Discente:	12112PFT009				
Nome do Discente:	Júlio César Costa				
Título do Trabalho:	A inversão Geométrica				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria e Topologia				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em webconferência pela plataforma *Google Meet* a Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), assim composta pelos professores doutores: Aldemir Jose da Silva Pinto - UFPR; Ana Carla Piantella - FAMAT/UFU e Dulce Mary de Almeida - FAMAT/UFU, orientadora do candidato.

Iniciando os trabalhos, a presidente da mesa, Profa. Dra. Dulce Mary de Almeida, apresentou a Comissão Examinadora e juntamente com o candidato agradeceram a presença de todos. Posteriormente, a presidente concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, a senhora presidente concedeu a palavra para os examinadores que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.





Documento assinado eletronicamente por **Dulce Mary de Almeida, Professor(a) do Magistério Superior**, em 13/09/2023, às 11:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir José da Silva Pinto, Usuário Externo**, em 13/09/2023, às 12:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4811017** e o código CRC **242737EC**.

Aos que vêm na Matemática não apenas uma ciência para ajudar a entender o universo, mas sim para buscar entender, mesmo com grandes limitações, a infinita inteligência que emana de Deus.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por me oportunizar a concluir mais essa etapa da minha vida, onde nos momentos de dificuldades sempre, de alguma forma, me deu forças para continuar em frente.

Agradeço a minha orientadora, a professora Dra. Dulce Mary de Almeida, por não ter medido esforços para me orientar, pela experiência compartilhada e pelo estímulo, muito Obrigado!

Agradeço também, a todos os meus familiares pelo incentivo e carinho em todos os momentos durante o Mestrado.

Agradeço ao professor Alessandro Alves Santana pela disponibilidade nos momentos de dúvidas sobre o uso da plataforma Tex e a todos os professores do curso que contribuíram nesse processo de formação tão importante.

Agradeço ainda, a todos os amigos e rede de apoio, que me auxiliaram nessa jornada.

A vocês, o meu muito Obrigado!

Resumo

O tema estudado nessa dissertação é a inversão geométrica, uma importante transformação que permite converter problemas aparentemente complicados em problemas análogos, mas com soluções mais simples. Por exemplo, permite demonstrar de forma simples e elegante o Teorema de Ptolomeu, a fórmula de Euler, o Teorema de Feuerbach, todas essas aplicações serão apresentadas no Capítulo 3. O texto estrutura-se em três capítulos. O Capítulo 1 é destinado aos conceitos preliminares, apresenta a caracterização da posição relativa de duas circunferências no plano, o conceito e a construção com régua e compasso das circunferências ex-inscritas aos lados de um triângulo, as construções geométricas das retas tangentes comuns a duas circunferências, bem como os conceitos de potência de um ponto em relação a uma circunferência e de pontos conjugados harmônicos em relação a dois pontos dados. O Capítulo 2 é destinado a definição da inversão geométrica e ao amplo estudo de suas propriedades, apresenta a caracterização do que ocorre com retas e circunferências quando submetidas a uma inversão, estuda a propriedade involutiva e a preservação de ângulos dessa transformação, apresenta a equivalência entre pontos inversos e conjugados harmônicos, bem como a caracterização de que uma circunferência é invariante pela inversão se e somente se é ortogonal à circunferência de inversão. O capítulo 3 é destinado às aplicações da Inversão geométrica citadas anteriormente e apresenta ainda, a construção com régua e compasso dos pontos de intersecção de uma reta com uma hipérbole e a solução de um problema de construção de triângulo. Para finalizar esperamos que este texto rico em ilustrações, fomentado com muitos exemplos e aplicações, embasado em sólida fundamentação teórica, contribua para um melhor entendimento dos aspectos matemáticos teóricos e geométricos das inversões em circunferências e seja uma referência para todos os estudantes que pretendam aprofundar seus estudos nesse tema.

Palavras-chave: Teorema de Feuerbach, Problema de Apolônio, Inversão Geométrica.

Abstract

The subject studied in this dissertation is the geometric inversion, an important transformation that allows converting apparently complicated problems into analogous problems, but with simpler solutions. For example, it allows demonstrating in a simple and elegant way Ptolemy's Theorem, Euler's formula, Feuerbach's Theorem, all these applications will be presented in Chapter 3. The text is structured in three chapters. Chapter 1 is devoted to preliminary concepts, it presents the characterization of the relative position of two circles in the plane, the concept and the construction with ruler and compass of the circles ex-inscribed to the sides of a triangle, the geometric constructions of the tangent lines common to the two circles, as well as the concepts of power of a point in relation to a circle and harmonic conjugate points in relation to two given points. Chapter 2 is devoted to the definition of geometric inversion and the extensive study of its properties, presents the characterization of what happens to straight lines and circles when subjected to an inversion, studies the involutive property and the preservation of angles of this transformation, presents the equivalence between inverse points and harmonic conjugates, as well as the characterization that a circle is invariant by inversion if and only if it is orthogonal to the inversion circle. Chapter 3 is dedicated to the previously mentioned applications of geometric inversion and also presents the construction with ruler and compass of the intersection points of a straight line with a hyperbola and the solution of a triangle construction problem. Finally, we hope that this text, rich in illustrations, provided with many examples and applications, based on a solid theoretical foundation, will contribute to a better understanding of the mathematical, theoretical and geometric aspects of inversions in circles and will be a reference for all students who intend to deepen their knowledge. studies on this topic.

Keywords: Feuerbach's Theorem, Apollônio's Problem, Geometric Inversion.

Sumário

Lista de Figuras	iii
Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Ângulos entre retas e circunferências	4
1.2 Construção geométrica da reta tangente à uma circunferência	7
1.3 Duas circunferências	10
1.4 Circunferência ex-inscrita	17
1.5 Potência de ponto	18
1.6 Conjugados Harmônicos	20
2 A inversão geométrica	22
2.1 Definição da inversão geométrica	22
2.2 Construção geométrica do inverso de um ponto	25
2.3 Propriedades da inversão	28
2.3.1 Inversão de uma reta	28
2.3.2 Inversão de uma circunferência	29
2.3.3 Inversão e distâncias	32
2.3.4 Inversão e ângulos	36
3 Aplicações	42
3.1 Aplicações em construções geométricas	42
3.2 O Teorema de Ptolomeu	56
3.3 A Fórmula de Euler	60
3.4 O Teorema de Feuerbach	61
3.5 Hipérbole e um problema de construção de triângulo	64

Conclusões	73
A Construção da média geométrica entre dois segmentos	75
B Caracterização de uma das circunferências tangentes, solução do Problema 3	77
C Introdução ao GeoGebra	79
C.1 Construções geométricas utilizando o GeoGebra	80
Referências Bibliográficas	86

Lista de Figuras

1.1	Ilustração da Proposição 1.3 (Caso $O \in r$).	5
1.2	Ilustração da Proposição 1.3 (Caso $O \notin r$).	5
1.3	Ângulo entre duas circunferências secantes.	6
1.4	Construção da reta perpendicular à reta r dada passando por um ponto $P \in r$.	7
1.5	Construção da reta perpendicular à reta r dada passando por um ponto $P \notin r$.	8
1.6	Construção da reta tangente passando por um ponto P externo à uma circunferência dada.	9
1.7	Construção da reta tangente passando por um ponto P pertencente à uma circunferência dada.	10
1.8	Dois circunferências tangentes exteriormente e interiormente.	12
1.9	Construção das retas tangentes à duas circunferências tangentes exteriormente.	13
1.10	Construção das retas tangentes exteriores à duas circunferências exteriores.	15
1.11	Construção das retas tangentes interiores à duas circunferências exteriores.	16
1.12	Circunferência ex-inscrita a um dos lados de um triângulo ABC .	18
1.13	Secantes e tangentes a uma circunferência em um ponto P .	18
1.14	Calculando $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ em função de \overline{PO} e r .	19
1.15	Estabelecendo os elementos da Proposição 1.11.	20
2.1	Construção do inverso de um ponto P interno à circunferência de inversão.	25
2.2	Construção do inverso de um ponto P externo à circunferência de inversão.	26
2.3	Construção do inverso de um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ relativo a circunferência \mathcal{C} com $P \notin \mathcal{C}$.	27
2.4	Reta que passa por O é invariante pela inversão de centro O .	28
2.5	Inversão de uma reta α que não passa pelo pólo de inversão O .	29
2.6	Inversão de uma circunferência \mathcal{D} que passa pelo pólo de inversão O .	30
2.7	Inversão de uma circunferência \mathcal{D} que não passa pelo pólo de inversão O .	31
2.8	Apoio à demonstração da Proposição 2.9: caso P, \tilde{P}, A e B alinhados nesta ordem.	32
2.9	Apoio à demonstração da Proposição 2.10 (Caso 1: O, A e B não colineares).	33

2.10	Apoio à demonstração da Proposição 2.10 (Caso 2 - Possibilidade 1: O está entre A e B).	34
2.11	Apoio à demonstração da Proposição 2.10 (Caso 2 - Possibilidade 2: A está entre O e B).	35
2.12	Reta tangente a \tilde{t} paralela à reta t .	36
2.13	Ângulos entre retas concorrentes e suas inversas.	37
2.14	Preservação pela inversão do ângulo entre duas retas concorrentes, se uma passa pelo pólo de inversão O .	38
2.15	Preservação pela inversão do ângulo entre duas circunferências que não passam pelo pólo de inversão O .	38
2.16	Qualquer circunferência \mathcal{D} que passe por P e \tilde{P} é ortogonal à \mathcal{C} .	39
2.17	Ilustração dos dados da Proposição 2.6	41
3.1	Circunferência tangente a uma reta r dada passando por dois pontos, P e Q , dados.	43
3.2	Circunferências soluções do Problema 1.	44
3.3	Construção das circunferências soluções do Problema 1 por inversão geométrica.	45
3.4	Apoio à solução do Problema 2, situação 1.	46
3.5	Uma solução hipotética do Problema 2, situação 1.	46
3.6	Circunferência auxiliar \mathcal{D} utilizada na solução do Problema 2, situação 1.	47
3.7	Circunferências soluções do Problema 2, situação 1.	48
3.8	Apoio à solução do Problema 2, situação 2.	48
3.9	Uma solução hipotética do Problema 2, situação 2.	49
3.10	Circunferência auxiliar \mathcal{D} utilizada na solução do Problema 2, situação 2.	49
3.11	Circunferências soluções do Problema 2, situação 2.	50
3.12	As quatro circunferências soluções do Problema 2.	51
3.13	Solução do Problema 2, via inversão geométrica.	52
3.14	Estabelecendo notações para resolver o Problema 3.	53
3.15	Visualizando as soluções do Problema 3.	53
3.16	Visualizando os dados do Problema 3.	54
3.17	Visualizando os dados invertidos do Problema 3.	54
3.18	Circunferências \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 tangentes à circunferência $\tilde{\mathcal{B}}$ e às retas $\tilde{\mathcal{A}}$ e r .	55
3.19	Circunferências soluções do Problema 3, via inversão.	55
3.20	Fragmento do Livro Claudius Ptolemaeus, Almagestum, 1515.	57
3.21	Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência \mathcal{C} .	57
3.22	Suporte para a demonstração (1) do Teorema de Ptolomeu.	58
3.23	Suporte para a demonstração (2) do Teorema de Ptolomeu.	59
3.24	Suporte para a demonstração da Fórmula de Euler.	61

3.25	Ilustração do Teorema de Feuerbach.	62
3.26	Suporte para a demonstração do Teorema de Feuerbach.	63
3.27	Ilustração dos elementos utilizados na demonstração do Teorema de Feuerbach.	63
3.28	Hipérbole com os dados da Definição 3.6.	64
3.29	Hipérbole de focos F_1 e F_2	66
3.30	Visualizando os dados e as soluções do problema A.	67
3.31	Visualizando as soluções do problema A no contexto da Definição 3.6 de hipérbole.	67
3.32	Solução do Problema A via inversão geométrica.	68
3.33	Visualizando os dados da Proposição 3.7 para um triângulo ABC retângulo em A.	69
3.34	Visualizando os dados da Proposição 3.7 para um triângulo ABC obtusângulo em A.	69
3.35	Visualizando os dados da Proposição 3.7 para um triângulo ABC acutângulo em A.	70
3.36	Construção da solução do problema de Regiomontanus.	71
A.1	Construção com régua e compasso da média geométrica entre dois segmentos dados.	76
B.1	Estabelecendo os dados do Problema do apêndice B.	77
C.1	Interface inicial do GeoGebra.	79
C.2	Ferramentas da função Geometria presentes no software GeoGebra.	80
C.3	Passo i) da construção de duas circunferências ortogonais no GeoGebra.	81
C.4	Passo ii) da construção de duas circunferências ortogonais no GeoGebra.	81
C.5	Passo iii) da construção de duas circunferências ortogonais no GeoGebra.	82
C.6	Passo iv) da construção de duas circunferências ortogonais no GeoGebra.	82
C.7	Passo v) da construção de duas circunferências ortogonais no GeoGebra.	83
C.8	Passo i) para a determinação do centro de uma circunferência dada, usando o GeoGebra.	84
C.9	Construção do ponto médio de uma corda \overline{AB} , usando o GeoGebra.	84
C.10	Traçado da reta perpendicular a uma corda \overline{AB} passando pelo seu ponto médio, usando o GeoGebra.	84
C.11	Construção dos pontos de intersecções entre uma reta r e uma circunferência D , usando o GeoGebra.	85
C.12	Construção final do centro de uma circunferência dada, usando o GeoGebra.	85

Introdução

A área de concentração dessa dissertação é a Geometria, ramo da Matemática preocupado com questões de forma, tamanho e posição relativa de figuras e com as propriedades dos espaços. Um grande salto no desenvolvimento da Geometria aconteceu na chamada Idade Áurea da Matemática grega, ou período helenístico, ou ainda, período Alexandrino e se estendeu de aproximadamente 324 a.C a 600 d.C. Foi neste período, que Apolônio propôs um problema, que veio a receber seu nome, consistindo em encontrar uma circunferência tangente a três outras circunferências, podendo estas, ser degeneradas em retas (circunferência de raio infinito) ou pontos (circunferência de raio zero).

O referido problema despertou o interesse de vários matemáticos ao longo dos séculos, cada qual buscando soluções segundo as mais diversas abordagens que refletiam o instrumento matemático disponível em cada época. Mas, embora muitas soluções tenham sido produzidas, ainda não atendiam ao almejado novo paradigma que era o de encontrar um método direto, aplicável a todos os casos, e se possível, que permitisse determinar o número de soluções admissíveis para o problema.

Foi em 1824 que Jacob Steiner (1796 – 1863), o maior geômetra desde os tempos de Euclides (300 a 260 a.C.), descobriu a útil transformação chamada Inversão Geométrica. Steiner não publicou suas ideias sobre a inversão, e a transformação foi redescoberta várias vezes por outros matemáticos do século, inclusive Lord Kelvin (ou William Thompson, 1824-1907) que em 1845, chegou a ela pela física e a aplicou a problemas de eletrostática. Resultados da geometria das inversões permitem sistematizar a análise das possíveis configurações dos três objetos dados no problema de Apolônio, classificando-as e determinando o número efetivo de soluções nos diferentes casos.

Ao longo dos séculos, a inversão geométrica tem sido utilizada como uma ferramenta fundamental na resolução de problemas de geometria. Ela permite simplificar e transformar problemas complexos em situações mais simples, facilitando a compreensão e a resolução dos mesmos. Além disso, a inversão geométrica possui uma série de propriedades interessantes, como a preservação de tangências, a inversão de pontos no infinito e a preservação dos ângulos entre os elementos transformados.

Diante da relevância do tema, este trabalho dissertativo tem como objetivo explorar os principais aspectos da inversão geométrica, suas propriedades e suas aplicações em diferentes contextos. Serão apresentados exemplos que ilustram a utilização da inversão geométrica como uma ferramenta vantajosa de simplificação da resolução de problemas geométricos.

Esta dissertação estrutura-se em três capítulos. O Capítulo 1 é destinado aos conceitos preliminares que são subsídios para os dois capítulos seguintes. No Capítulo 1 serão estudados os conceitos de ângulos entre retas e circunferências, a caracterização da posição relativa de duas circunferências no plano, o conceito e a construção com régua e compasso das circunferências ex-inscritas aos lados de um triângulo, as construções geométricas das retas tangentes comuns a duas circunferências, bem como os conceitos de potência de um ponto em relação a uma circunferência e de pontos conjugados harmônicos em relação a dois pontos dados.

O Capítulo 2 apresenta a definição da inversão geométrica, a construção com régua e compasso do inverso de um ponto e estuda amplamente as propriedades dessa transformação. Neste capítulo são apresentadas a caracterização do que ocorre com retas e circunferências quando submetidas a uma inversão, são estudadas a propriedade involutiva e a preservação de ângulos dessa transformação, são demonstradas a equivalência entre pontos inversos e conjugados harmônicos, bem como a caracterização de que uma circunferência é invariante pela inversão se e somente se é ortogonal à circunferência de inversão.

O capítulo 3 é destinado a uma gama de aplicações da Inversão geométrica em diferentes contextos. Inicialmente, são estudados três problemas de construções geométricas que são casos particulares do Problema de Apolônio. As soluções desses problemas no contexto de Geometria Euclidiana Plana, sem o uso da inversão geométrica, são amplamente discutidas de maneira a induzir o leitor na compreensão da simplificação dos problemas quando abordados sob a ótica da inversão geométrica. Também são realizadas Provas do Teorema de Ptolomeu (Em um quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência \mathcal{C} , a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos é igual ao produto dos comprimentos das diagonais), da fórmula de Euler (Sejam r e R , respectivamente, os raios dos círculos inscritos e circunscritos de um triângulo ABC e d a distância entre seus centros. Então $d^2 = R^2 - 2Rr$), do Teorema de Feuerbach (Seja \mathcal{F} a circunferência de Feuerbach relativa ao triângulo ABC . Sejam \mathcal{V} , \mathcal{R} e \mathcal{T} as circunferências ex-inscritas ao triângulo ABC e \mathcal{C} a circunferência inscrita ao mesmo triângulo. Então, \mathcal{F} é tangente a cada uma destas circunferências), todas utilizando a inversão geométrica. Para finalizar é apresentada a construção com régua e compasso dos pontos de intersecção de uma reta com uma hipérbole e a solução de um problema de construção de triângulo devido à Johann Muller (Regiomontanus), ambos usando a inversão geométrica.

Como resultados esperados, a expectativa é de que este texto, permita ao leitor fortalecer conteúdos de geometria, tais como retas, circunferências, ângulos, ortogonalidade, potência de pontos e tangência, além de dar subsídios para um estudo introdutório dessa importante ferramenta de simplificação de muitos problemas geométricos, embasado em sólida fundamentação teórica e fomentado com muitas aplicações.

Preliminares

1.1 Ângulos entre retas e circunferências

Iniciamos o capítulo com a definição geral de ângulo entre duas curvas.

Definição 1.1: Ângulos entre curvas:

Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas curvas com um ponto A em comum. Se \mathcal{C} e \mathcal{D} possuem tangentes s e t , respectivamente, em A então dizemos que o ângulo entre \mathcal{C} e \mathcal{D} em A é o ângulo entre s e t .

Em particular, dizemos que \mathcal{C} e \mathcal{D} são ortogonais em A se fazem um ângulo de 90° em A .

Particularmente, interessa para o nosso trabalho os casos da [Definição 1.1](#) em que as curvas envolvidas são duas circunferências ou uma reta e uma circunferência. Para isso faz-se necessário enunciar o resultado de geometria euclidiana plana que fornece a caracterização da reta tangente à uma circunferência, conforme segue.

Teorema 1.2

Um condição necessária e suficiente para que uma reta seja tangente a uma circunferência é que ela seja perpendicular ao raio que une o centro ao ponto de tangência. [5]

Proposição 1.3

Se r é uma reta que intercepta uma circunferência \mathcal{C} em dois pontos A e B , então o ângulo entre r e \mathcal{C} tem a mesma medida nos dois pontos.

Demonstração: Seja O o centro da circunferência \mathcal{C} .

Se $O \in r$, então do Teorema 1.2 as retas tangentes à \mathcal{C} que passam pelos pontos A e B , são ambas perpendiculares a r nos respectivos pontos de tangência.

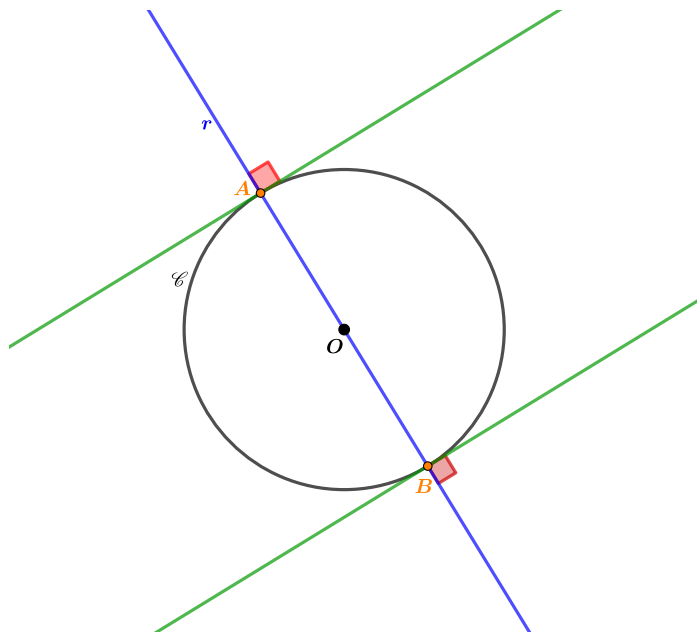


Figura 1.1: Ilustração da Proposição 1.3 (Caso $O \in r$).

Então, nesse caso os ângulos entre r e \mathcal{C} nos pontos A e B medem ambos 90° .

Se $O \notin r$, denotando por α e β , respectivamente as medidas dos ângulos entre r e as retas tangentes à \mathcal{C} nos pontos A e B , segue do Teorema 1.2 que $\alpha = 90^\circ - m(\angle OAB)$ e $\beta = 90^\circ - m(\angle OBA)$. Além disso o triângulo OAB é isósceles de base \overline{AB} e portanto $m(\angle OAB) = m(\angle OBA)$. E isso conclui a prova da proposição.

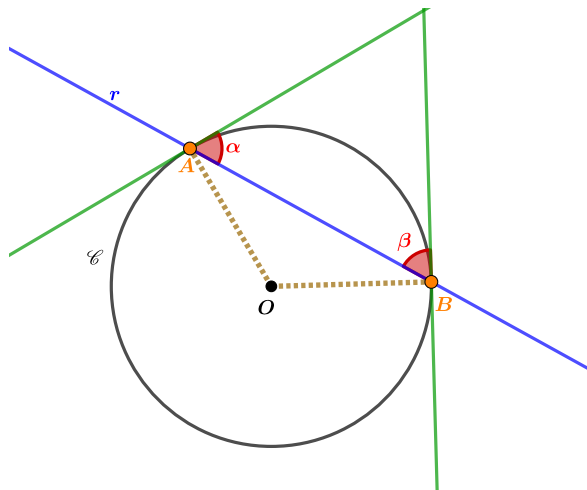


Figura 1.2: Ilustração da Proposição 1.3 (Caso $O \notin r$).

Proposição 1.4

Se \mathcal{C} e \mathcal{D} são circunferências que se interceptam em dois pontos A e B , então o ângulo que elas fazem é o mesmo nos dois pontos.

Demonstração:

Sejam O e I os centros, respectivamente, das circunferências \mathcal{C} e \mathcal{D} . Denote por r a reta tangente a \mathcal{C} passando por A , por s a reta tangente a \mathcal{D} passando por A , por t a reta tangente a \mathcal{C} passando por B e por u a reta tangente a \mathcal{D} passando por B . Sejam α o ângulo entre as retas r e s e β o ângulo entre as retas t e u . Considere: a reta m que passa pelo centro de \mathcal{C} e pelo ponto A e que, conforme o Teorema 1.2 é ortogonal à reta r ; a reta n que passa pelo centro de \mathcal{D} e pelo ponto A e que é ortogonal à reta s ; a reta p que passa pelo centro de \mathcal{C} e pelo ponto B e que é ortogonal à reta t e, a reta q que passa pelo centro de \mathcal{D} e, pelo ponto B e que é ortogonal à reta u . Sejam F o ponto de intersecção entre as retas s e p , K o ponto de intersecção entre as retas r e q , J o ponto de intersecção entre as retas t e n e, G o ponto de intersecção entre as retas m e u . Dessa forma, têm-se que os triângulos OAI e OBI são semelhantes pelo caso Lado-Lado-Lado. E então, $m(\angle OAI) = m(\angle OBI)$.

Portanto, $m(\alpha) = m(\angle OAI) - m(\angle OAF) - m(\angle KAI) = m(\angle OBI) - m(\angle OBG) - m(\angle JBI) = m(\beta)$.

Conclui-se a prova desejada, com $\alpha \cong \beta$.

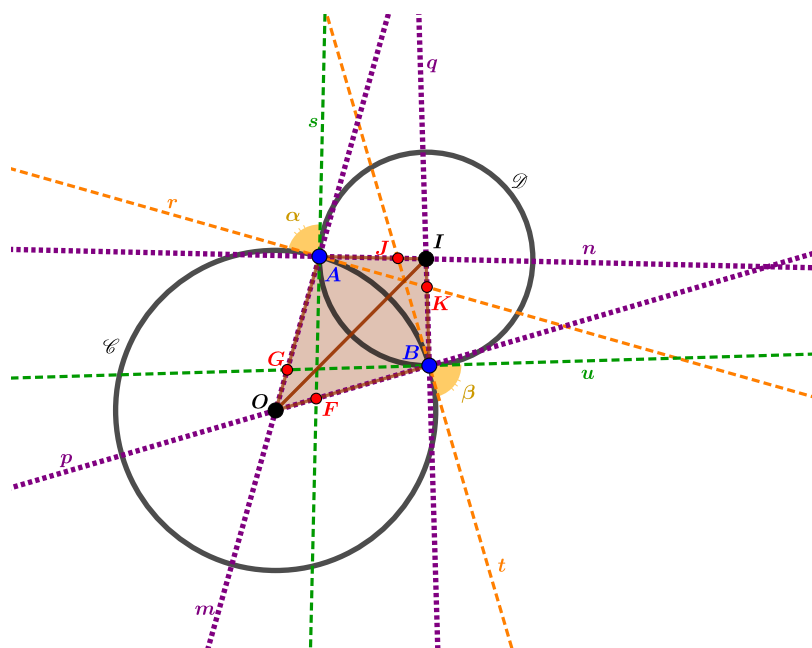


Figura 1.3: Ângulo entre duas circunferências secantes.

A Proposição 1.3 e a Proposição 1.4 nos dão a liberdade de nos referirmos a ângulos entre uma

reta e uma circunferência ou entre duas circunferências sem fazer menção ao ponto de tangência.

1.2 Construção geométrica da reta tangente à uma circunferência

De acordo com definição de ângulo entre curvas, as retas tangentes às curvas envolvidas constituem um conteúdo fundamental para o estudo do tópico. Assim sendo, com o foco do nosso trabalho nas curvas particulares, retas e circunferências, faz-se necessário rever a construção com régua e compasso da reta tangente a uma circunferência. Para isso precisamos de duas construções iniciais, conforme segue.

Construção A: Reta perpendicular a uma reta r dada passando por um ponto $P \in r$.

Seja uma reta r e um ponto $P \in r$.

- i) Trace uma circunferência \mathcal{C} com centro em P , onde a intersecção da circunferência com a reta r definirá dois pontos A e B ;
- ii) Trace uma circunferência \mathcal{D} centrada em A e outra circunferência \mathcal{F} centrada em B , ambas com raio maior do que o raio da circunferência \mathcal{C} . A intersecção entre as circunferências \mathcal{D} e \mathcal{F} definirá um ponto M ;
- iii) Trace a reta s que passa pelos pontos P e M .

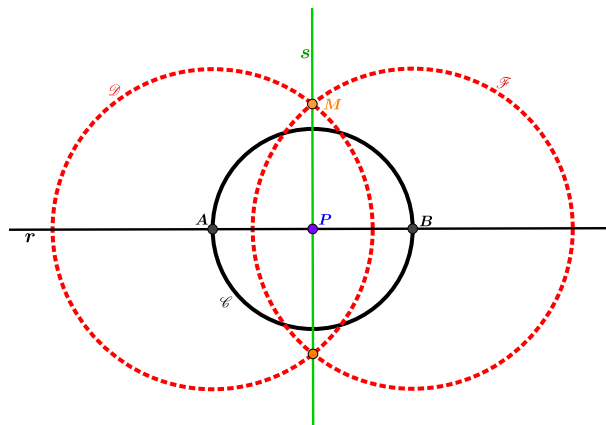


Figura 1.4: Construção da reta perpendicular à reta r dada passando por um ponto $P \in r$.

Afirmção: A reta s é a reta perpendicular a r passando pelo ponto P .

Justificativa: Observe que o triângulo ABM é um triângulo isósceles de base \overline{AB} e que \overline{MP} é a mediana relativa à base, logo coincide com a altura fazendo com que a reta suporte à altura seja perpendicular à reta r passando por P .

Construção B: Reta perpendicular a uma reta r dada passando por um ponto $P \notin r$.

Seja uma reta r e um ponto $P \notin r$.

- i) Trace uma circunferência \mathcal{C} de raio r qualquer com centro em P , desde que a circunferência intercepte a reta r em dois pontos A e B ;
- ii) Trace uma circunferência \mathcal{D} com centro em A cujo raio é igual à $d(A, B)$;
- iii) Trace uma circunferência \mathcal{F} com centro em B de raio igual a $d(A, B)$;
- iv) Defina como M o ponto de intersecção entre as duas últimas circunferências traçadas;
- v) Trace uma reta s que passe pelo ponto P e pelo ponto M .

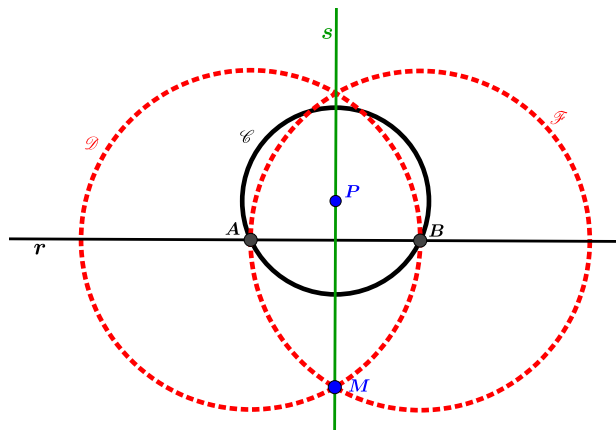


Figura 1.5: Construção da reta perpendicular à reta r dada passando por um ponto $P \notin r$.

Afirmação: A reta s é a reta perpendicular a r passando pelo ponto P .

Justificativa: Deve-se mostrar que o ângulo formado pelas retas r e s têm medida igual a 90° . Para tal, basta mostrar que o segmento \overline{PM} é altura do triângulo APB . Sabe-se que em um triângulo isósceles a altura, mediatriz e bissetriz referente à mesma base coincidem. Portanto, é suficiente mostrar que \overline{PM} é mediatriz do triângulo APB , ou equivalentemente mostrar que a reta que passa por P e pelo ponto M é mediatriz do segmento \overline{AB} . Como os triângulos APB e ADB são isósceles por construção, segue que P e M estão na mediatriz do segmento \overline{AB} .

Construção C: Reta tangente passando por um ponto P externo à circunferência dada.

Seja uma circunferência \mathcal{C} de centro O e raio r e um ponto P exterior à \mathcal{C} .

- i) Trace a circunferência \mathcal{D} de centro M e diâmetro \overline{OP} ;
- ii) Seja $\{A, B\} = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$;
- iii) Trace a reta r que passa pelos pontos P e A e a reta s que passa pelos pontos P e B .

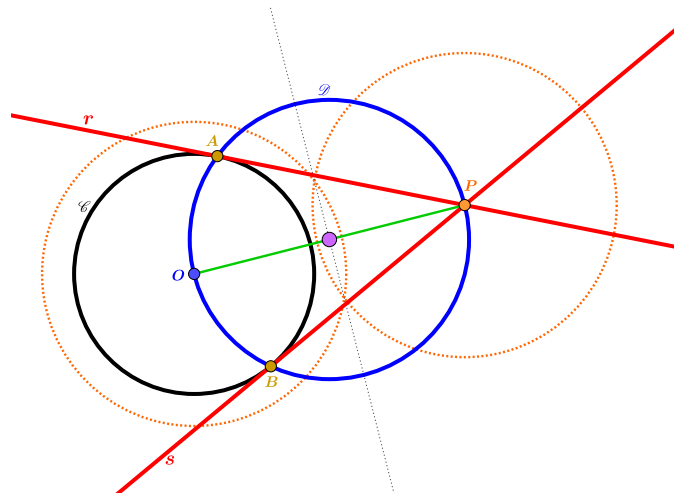


Figura 1.6: Construção da reta tangente passando por um ponto P externo à uma circunferência dada.

Afirmação: As retas r e s são tangentes à circunferência \mathcal{C} passando por P .

Justificativa: Por construção \overline{OP} é o diâmetro da circunferência \mathcal{D} e o ângulo $\angle OAP$ é reto pois está inscrito numa semicircunferência. De forma análoga o ângulo $\angle OBP$ também é reto. Segue então da caracterização da reta tangente a uma circunferência como a reta perpendicular ao raio passando pelo ponto de tangência que as retas que passam pelos pontos P e A (reta r) e pelos pontos P e B (reta s) são retas tangentes à \mathcal{C} passando por P .

Construção D: Reta tangente por um ponto P sobre uma circunferência dada.

Seja uma circunferência \mathcal{C} de centro O e raio r e um ponto $P \in \mathcal{C}$.

- i) Trace a semirreta \overrightarrow{OP} ;
- ii) Trace uma circunferência \mathcal{D} de centro em P cujo raio seja menor que o raio de \mathcal{C} ;

iii) Sejam $\{A, B\} = \mathcal{D} \cap \overrightarrow{OP}$;

iv) Trace a reta s mediatriz do segmento AB .

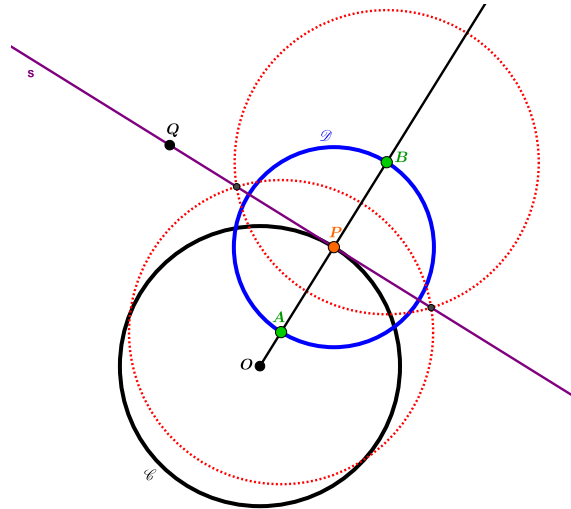


Figura 1.7: Construção da reta tangente passando por um ponto P pertencente à uma circunferência dada.

Afirmção: A reta s é a reta tangente à circunferência \mathcal{C} passando por P .

Justificativa: Da construção temos que o ponto P é o ponto médio do segmento AB . Da caracterização da mediatriz do segmento AB , temos que s é a reta perpendicular à AB passando por P , e conseqüentemente s é perpendicular ao segmento radial OP . Logo do Teorema 1.2 segue que s é a reta tangente à circunferência \mathcal{C} passando por P .

1.3 Duas circunferências

A proposição abaixo fornece a caracterização da posição relativa de duas circunferências em termos dos seus raios e das distâncias entre os seus centros.

Proposição 1.5: Posição relativa entre duas circunferências

Sejam \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 duas circunferências distintas de centro O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2 , respectivamente.

Seja $a = d(O_1, O_2)$, então:

- i) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ consiste de um único ponto se, e somente se, $a = r_1 + r_2$ ou $a = |r_1 - r_2|$;
- ii) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ consiste de dois pontos se, e somente se, $|r_1 - r_2| < a < r_1 + r_2$;
- iii) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ é vazio se, e somente se, $a > r_1 + r_2$ ou $a < |r_1 - r_2|$.

Demonstração:

Considere um sistema de coordenadas ortogonais tal que as equações de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 sejam dadas por $x^2 + y^2 = r_1^2$ e $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r_2^2$. Pelo menos um, dentre os números reais c e d deve ser diferente de zero, pois \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são distintas. Suponha, sem perda de generalidade $c \neq 0$ e considere o sistema:

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ (x - c)^2 + (y - d)^2 = r_2^2. \end{cases}$$

Esse sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 & (1.1) \\ x = \frac{-1}{2c}[r_2^2 - r_1^2 - d^2 - c^2 + 2dy]. & (1.2) \end{cases}$$

Substituindo a equação (1.2) na equação (1.1), obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{c^2} + 1\right)y^2 + \frac{d}{c^2}(r_2^2 - r_1^2 - d^2 - c^2)y + \frac{1}{4c^2}(r_2^2 - r_1^2 - d^2 - c^2)^2 - r_1^2 = 0 & (1.3) \\ x = \frac{-1}{2c}[r_2^2 - r_1^2 - d^2 - c^2 + 2dy]. & (1.4) \end{cases}$$

O discriminante da equação do 2º grau na variável y dada em (1.3) é:

$$\Delta = \frac{1}{c^2}[(4d^2 + 4c^2)r_1^2 - (r_2^2 - r_1^2 - d^2 - c^2)^2] = \frac{1}{c^2}[-(d^2 + c^2)^2 + (2r_1^2 + 2r_2^2)(d^2 + c^2) - (r_2^2 - r_1^2)^2].$$

Assim, o sistema S tem uma solução, duas soluções ou nenhuma solução se, e somente se, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$ ou $\Delta < 0$, respectivamente.

Considerando a função do 2º grau (em z):

$$c^2\Delta = f(z) = -z^2 + (2r_1^2 + 2r_2^2)z - (r_2^2 - r_1^2)^2, \text{ onde } z = d^2 + c^2. \text{ Têm-se:}$$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = (r_1^2 + r_2^2) \pm 2r_1r_2 \Leftrightarrow c^2 + d^2 = (r_1 + r_2)^2 \text{ ou } c^2 + d^2 = (r_1 - r_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{c^2 + d^2} = r_1 + r_2 \text{ ou } \sqrt{c^2 + d^2} = |r_1 - r_2|.$$

Analisando o sinal da função $f(z)$ e lembrando que $a = \sqrt{c^2 + d^2}$ segue que:

$$\text{i) } \Delta = 0 \Leftrightarrow a = r_1 + r_2 \text{ ou } a = |r_1 - r_2|.$$

$$\text{ii) } \Delta > 0 \Leftrightarrow |r_1 - r_2| < a < r_1 + r_2.$$

$$\text{iii) } \Delta < 0 \Leftrightarrow a > r_1 + r_2 \text{ ou } a < |r_1 - r_2|.$$

E isso completa a demonstração. ■

Segue a definição que nomeia duas circunferências em relação a posição relativa delas no plano.

Definição 1.6

Duas circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 de centros O_1 e O_2 , raios r_1 e r_2 , $a = d(O_1, O_2)$ são denominadas:

- i) Circunferências tangentes se satisfazem a condição i) da [Proposição 1.5](#). No caso em que $a = r_1 + r_2$, são denominadas circunferências tangentes exteriormente; no caso em que $a = |r_1 - r_2|$, são denominadas circunferências tangentes interiormente.

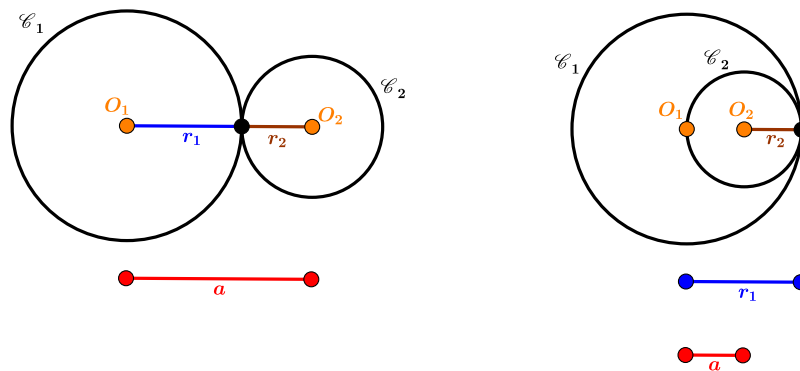


Figura 1.8: Duas circunferências tangentes exteriormente e interiormente.

- ii) Circunferências secantes se satisfazem a condição ii) da [Proposição 1.5](#).
 iii) Circunferências exteriores se $a > r_1 + r_2$.
 iv) Circunferências interiores se $a < |r_1 - r_2|$.

Na sequência descreveremos os passos das construções geométricas (com régua e compasso) das retas tangentes comuns às duas circunferências tangentes exteriormente e às duas circunferências exteriores, de raios distintos.

Construção E: Retas tangentes comuns às duas circunferências de raios distintos tangentes exteriormente.

Considere duas circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 de centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2 com $r_1 > r_2$, respectivamente.

- i) Trace a reta r que passa pelos centros O_1 e O_2 das circunferências.
- ii) Construa o ponto médio M do segmento de reta O_1O_2 .
- iii) Construa a circunferência auxiliar \mathcal{A} de centro O_1 e raio de comprimento $r_1 - r_2$.
- iv) Construa uma outra circunferência auxiliar \mathcal{B} de centro M e raio $\overline{MO_1}$.
- v) Sejam R e Q os pontos de intersecção entre as circunferências auxiliares \mathcal{A} e \mathcal{B} .
- vi) Trace as semirretas com origem em O_1 , $\overrightarrow{O_1R}$ e $\overrightarrow{O_1Q}$.
- vii) Denote por A e B os pontos de intersecção das semirretas traçadas no passo anterior com a circunferência \mathcal{C}_1 . A e B são os pontos de tangência em \mathcal{C}_1 .
- viii) Construa agora uma outra circunferência auxiliar \mathcal{D} de centro M e raio \overline{AM} .
- ix) Denote por C e D os pontos de intersecção entre as circunferências \mathcal{D} e \mathcal{C}_2 de modo que C e A estejam do mesmo lado de r (e conseqüentemente B e D estão do outro lado de r). C e D são os pontos de tangência em \mathcal{C}_2 .
- x) Trace as retas: s passando por A e C , t passando por B e D .
- xi) Trace a reta u perpendicular à r passando por P .

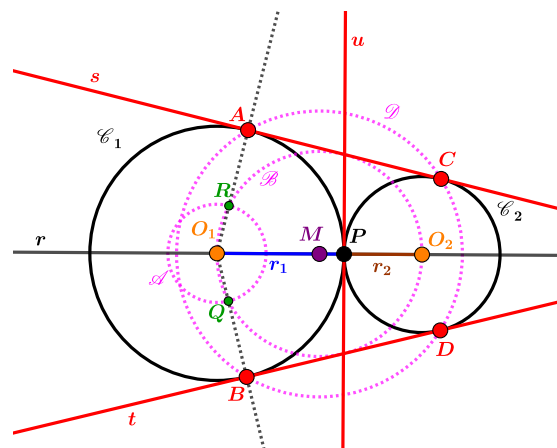


Figura 1.9: Construção das retas tangentes às duas circunferências tangentes exteriormente.

Afirmção: As retas s , t e u são as retas tangentes comuns às duas circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 .

Justificativa: Por construção a reta u satisfaz a condição de tangência no ponto P dada no Teorema 1.2, para ambas as circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 .

Também, por construção tem-se $d(A, R) = d(C, O_2) = r^2$ e $m(\angle O_2RO_1) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle O_2RA) = 90^\circ$, pois $\angle O_2RO_1$ é ângulo inscrito na semicircunferência de centro M com diâmetro $\overline{O_1O_2}$ e O_1, R, A são colineares.

Além disso, da construção realizada segue que os triângulos ARM e CO_2M são congruentes pelo caso de congruência Lado-Lado-Lado. Também são congruentes os ângulos $\angle O_2RM$ e $\angle RO_2M$, pois o triângulo MRO_2 é isósceles de base $\overline{RO_2}$. E segue então que:

$$m(\angle CO_2R) = m(\angle CO_2M) - m(\angle RO_2M) = m(\angle ARM) - m(\angle O_2RM) = m(\angle O_2RA) = 90^\circ.$$

Portanto, O_2RAC é retângulo e conseqüentemente s é reta tangente comum à \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 . A prova de que t é reta tangente comum à \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 é inteiramente análoga a realizada para a reta s .

Construção F: Retas tangentes exteriores comuns à duas circunferências exteriores de raios distintos.

Considere duas circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , com centros O_1 e O_2 , raios k_1 e k_2 ($k_1 > k_2$), respectivamente.

- i) Trace uma reta r que passe por O_1 e O_2 .
- ii) Seja A um dos pontos de intersecção entre a reta r e a circunferência \mathcal{C}_1 e, B um dos pontos de intersecção entre r e a circunferência \mathcal{C}_2 , de tal maneira que O_1, A, B e O_2 estejam alinhados nessa ordem, conforme Fig. 1.10.
- iii) Construa uma circunferência \mathcal{D} de centro em A e raio $d(O_2, B)$.
- iv) Seja G o ponto de intersecção entre a reta r e a circunferência \mathcal{D} , de forma que G seja interno à \mathcal{C}_1 .
- v) Construa uma circunferência \mathcal{F} de centro O_1 e raio $\overline{GO_1}$.
- vi) Trace as retas s e t tangentes à circunferência \mathcal{F} passando por O_2 , veja construção C na seção 1.2 desse capítulo.
- vii) Denote por M e N os pontos de intersecção entre s e t com a circunferência \mathcal{F} , respectivamente.
- viii) Trace as semirretas $\overrightarrow{O_1M}$ e $\overrightarrow{O_1N}$.

- ix) Sejam P e Q os pontos de intersecção entre as semirretas $\overrightarrow{O_1M}$ e $\overrightarrow{O_1N}$ com a circunferência \mathcal{C}_1 , respectivamente.
- x) Trace a reta u passando por P de forma que u seja paralela à reta s .
- xi) Trace a reta v passando por Q de forma que v seja paralela à reta t .

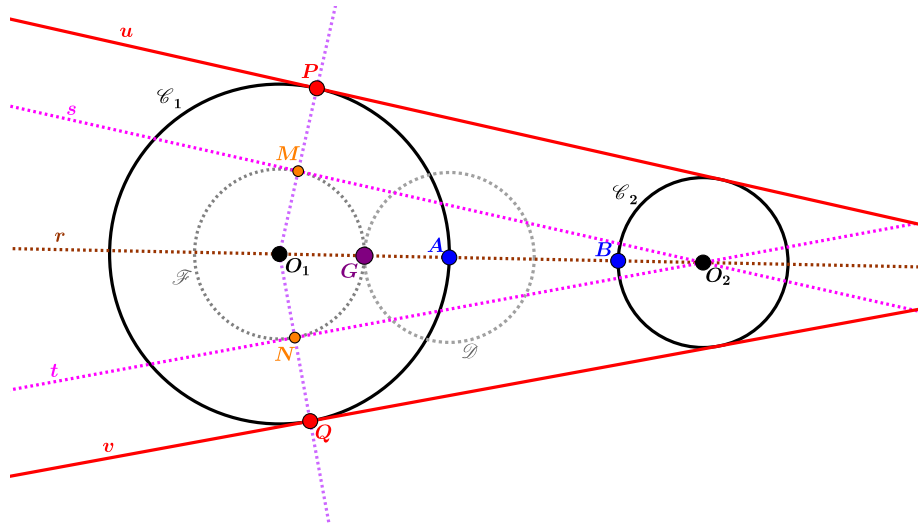


Figura 1.10: Construção das retas tangentes exteriores à duas circunferências exteriores.

Afirmção: u e v são as retas tangentes exteriores comuns à duas circunferências exteriores.

Justificativa: Por construção o comprimento do raio de \mathcal{F} é $d(O_1, G) = k_1 - k_2 \Rightarrow d(s, u) = d(P, M) = k_2$, visto que $P \in u$, $M \in s$ e \overrightarrow{PM} é perpendicular à ambas, u e s .

Seja R o pé da perpendicular a u que passa por O_2 . Temos $d(R, O_2) = d(s, u) = k_2 \Rightarrow R \in \mathcal{C}_2 \cap u$.

Portanto u é a reta que passa por P e R e é perpendicular a $\overline{PO_1}$ e a $\overline{RO_2}$, logo é tangente comum a \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 . Analogamente prova-se que v é tangente comum a \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 .

Construção G: Retas tangentes interiores comuns à duas circunferências exteriores de raios distintos.

Considere duas circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , com centros O_1 e O_2 , raios k_1 e k_2 ($k_1 > k_2$), respectivamente.

- i) Trace uma reta r que passe por O_1 e O_2 .
- ii) Seja A um dos pontos de intersecção entre a reta r e a circunferência \mathcal{C}_1 e, B um dos pontos de intersecção entre r e a circunferência \mathcal{C}_2 , de tal maneira que O_1, A, B e O_2 estejam alinhados nessa ordem, conforme Fig. 1.10.

- iii) Construa uma circunferência \mathcal{D} de centro em A e raio $d(O_2, B)$.
- iv) Seja G o ponto de intersecção entre a reta r e a circunferência \mathcal{D} , de forma que G seja externo à \mathcal{C}_1 .
- v) Construa uma circunferência \mathcal{F} de centro O_1 e raio $\overline{GO_1}$.
- vi) Trace as retas s e t passando por O_2 que sejam tangentes à circunferência \mathcal{F} , veja construção C na seção 1.2 desse capítulo..
- vii) Denote por M e N os pontos de intersecção entre s e t com a circunferência \mathcal{C}_1 , respectivamente.
- viii) Trace as semirretas $\overrightarrow{O_1M}$ e $\overrightarrow{O_1N}$.
- ix) Sejam P e Q os pontos de intersecção entre as semirretas $\overrightarrow{O_1M}$ e $\overrightarrow{O_1N}$ com a circunferência \mathcal{C}_1 , respectivamente.
- x) Trace a reta u passando por P de forma que u seja paralela à reta s .
- xi) Trace a reta v passando por Q de forma que v seja paralela à reta t .

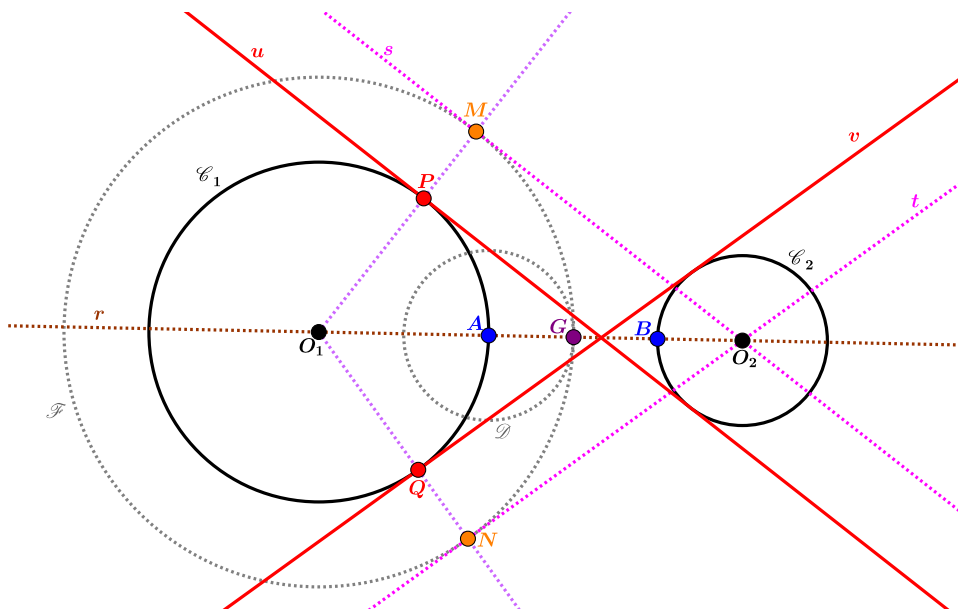


Figura 1.11: Construção das retas tangentes interiores à duas circunferências exteriores.

Afirmção: u e v são as retas tangentes interiormente à duas circunferências exteriores.

Justificativa: Por construção o comprimento do raio de \mathcal{F} é $d(O_1, G) = k_1 + k_2 \Rightarrow d(s, u) = d(P, M) = k_2$, visto que $P \in u$, $M \in s$ e \overleftrightarrow{PM} é perpendicular à ambas, u e s .

Seja R o pé da perpendicular a u que passa por O_2 . Temos $d(R, O_2) = d(s, u) = k_2 \Rightarrow R \in \mathcal{C}_2 \cap u$.

Portanto u é a reta que passa por P e R e é perpendicular à $\overline{PO_1}$ e à $\overline{RO_2}$, logo é tangente comum à \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 . Analogamente prova-se que v é tangente comum à \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 .

1.4 Circunferência ex-inscrita

Há algumas circunferências notáveis associadas a um triângulo, três delas são as circunferências ex-inscritas aos lados do triângulo. A próxima proposição garante a veracidade dessa afirmação.

Proposição 1.7

Em todo triângulo ABC , existe uma única circunferência tangente ao lado \overline{BC} e aos prolongamentos dos lados \overline{AB} e \overline{AC} . Tal circunferência é a circunferência ex-inscrita ao lado \overline{BC} e seu centro é o ex-incentro de ABC relativo à \overline{BC} (ou ao vértice A), [3].

Assim, um triângulo ABC admite exatamente três circunferências ex-inscritas:

- i) A circunferência tangente ao lado \overline{BC} e aos prolongamentos dos lados \overline{AB} e \overline{AC} .
- ii) A circunferência tangente ao lado \overline{AC} e aos prolongamentos dos lados \overline{AB} e \overline{BC} .
- iii) A circunferência tangente ao lado \overline{AB} e aos prolongamentos dos lados \overline{BC} e \overline{AC} .

Construção da circunferência ex-inscrita ao lado \overline{BC} do triângulo ABC .

Considere um triângulo ABC dado.

- i) Trace as retas suportes de cada lado do triângulo ABC .
- ii) Trace as bissetrizes dos ângulos externos relativas ao lado \overline{BC} .
- iii) Denote por I o ponto de intersecção das duas bissetrizes traçadas no passo ii).
- iv) Trace a reta t perpendicular à \overleftrightarrow{BC} passando por I e denote por P o ponto de intersecção entre t e \overleftrightarrow{BC} .
- v) Construa a circunferência \mathcal{C} de centro I e raio \overline{IP} .

Afirmção: A circunferência \mathcal{C} é a circunferência ex-inscrita ao lado BC do triângulo ABC e seu ex-incentro é I .

Justificativa: Segue da demonstração da [Proposição 1.7](#) cuja demonstração se encontra em [3].

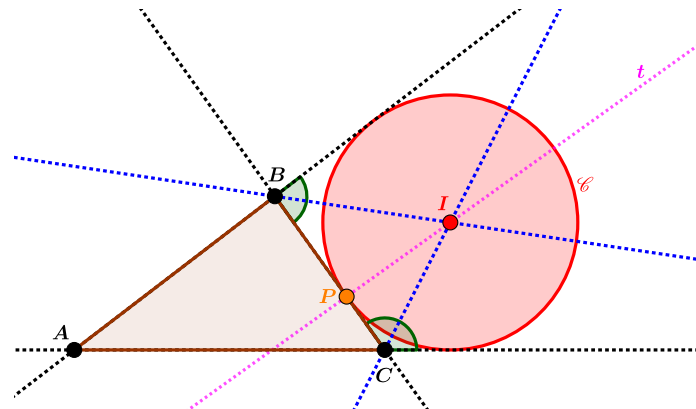


Figura 1.12: Circunferência ex-inscrita a um dos lados de um triângulo ABC .

1.5 Potência de ponto

Começamos lembrando o seguinte resultado da Geometria Euclidiana Plana que estabelece uma relação métrica entre as cordas de uma circunferência.

Proposição 1.8

Sejam s e t duas secantes a uma circunferência \mathcal{C} concorrentes em P , e sejam $\{A, B\} = s \cap \mathcal{C}$ e $\{C, D\} = t \cap \mathcal{C}$. Então, $d(P, A) \cdot d(P, B) = d(P, C) \cdot d(P, D)$. Se P é exterior à \mathcal{C} e s é tangente a \mathcal{C} em T então $[d(P, T)]^2 = d(P, A) \cdot d(P, B)$.

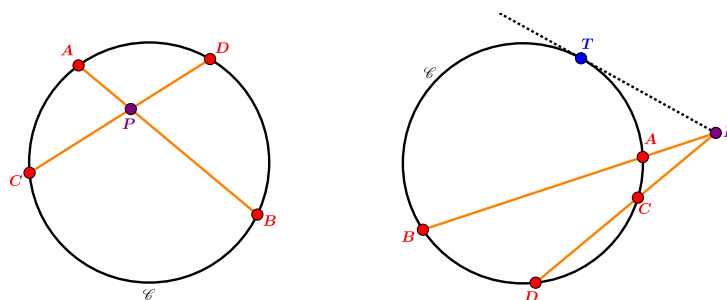


Figura 1.13: Secantes e tangentes a uma circunferência em um ponto P .

Veja a demonstração dessa proposição em [3].

Fundamentada pela [Proposição 1.8](#), segue a definição da potência de um ponto em relação a uma circunferência.

Definição 1.9

Considere uma circunferência \mathcal{C} e P um ponto qualquer. A potência do ponto P em relação à circunferência \mathcal{C} , denotada por $p(P, \mathcal{C})$, é definida por:

- i) $p(P, \mathcal{C}) = 0$, se $P \in \mathcal{C}$.
- ii) $p(P, \mathcal{C}) = -d(P,A) \cdot d(P,B)$, onde \overline{AB} é uma corda qualquer de \mathcal{C} que passa por P , se P é interior a \mathcal{C} .
- iii) $p(P, \mathcal{C}) = d(P,A) \cdot d(P,B) = [d(P,T)]^2$, onde \overline{AB} é uma corda qualquer de \mathcal{C} que passa por P e T é o ponto de tangência de uma das retas tangentes à \mathcal{C} que passa por P , se P é exterior a \mathcal{C} .

A proposição seguinte nos será útil no futuro.

Proposição 1.10

Seja \mathcal{C} uma circunferência de centro O e raio r , um ponto $P \notin \mathcal{C}$ e $d = d(O,P)$. Então, $p(P, \mathcal{C}) = |r^2 - d^2|$, [3].

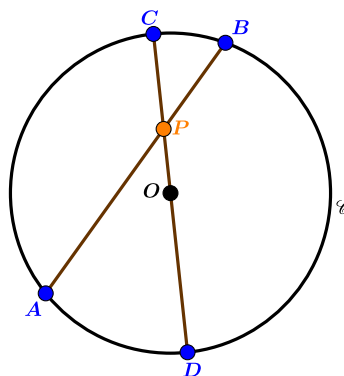


Figura 1.14: Calculando $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ em função de \overline{PO} e r .

Demonstração:

Consideremos somente o caso em que P é interior à circunferência \mathcal{C} , sendo o caso em que P é exterior à \mathcal{C} totalmente análogo. Trace por P o diâmetro \overline{CD} de \mathcal{C} , com $P \in \overline{OC}$. Então,

$$d(P,C) = r - d(O,P) \text{ e } d(P,D) = r + d(O,P),$$

e de acordo com a [Proposição 1.8](#), têm-se:

$$d(P,A) \cdot d(P,B) = d(P,C) \cdot d(P,D) = (r - d(O,P)) \cdot (r + d(O,P)) = r^2 - [d(O,P)]^2 = r^2 - d^2.$$



1.6 Conjugados Harmônicos

O conceito de pontos conjugados harmônicos nos será útil nessa dissertação. Sua definição é embasada no seguinte resultado de Geometria Euclidiana Plana:

Proposição 1.11

Sejam A e B pontos distintos e $k > 0$ com $k \neq 1$. Então, existem exatamente dois pontos P , Q pertencentes a \overleftrightarrow{AB} , distintos de A e B tais que $\frac{d(P,A)}{d(P,B)} = \frac{d(Q,A)}{d(Q,B)} = k$ (isto é, tais que P e Q dividem AB , nessa ordem, interna e externamente na razão k , respectivamente), [6]

Demonstração:

Unicidade: Suponhamos que P e R sejam pontos distintos que dividem \overline{AB} internamente na mesma razão $k \neq 1$. Então:

$$k = \frac{d(P,A)}{d(P,B)} = \frac{d(R,A)}{d(R,B)} = \left| \frac{d(P,A) - d(R,A)}{d(P,B) - d(R,B)} \right| = \frac{d(R,P)}{d(R,P)} = 1,$$

um absurdo. Logo $P = R$ e temos a unicidade; o caso do ponto externo é análogo e fica por conta do leitor.

Existência:

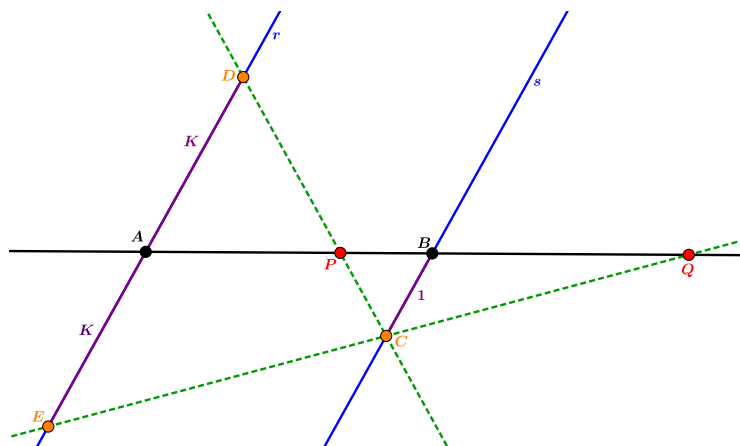


Figura 1.15: Estabelecendo os elementos da Proposição 1.11.

Tracemos por A uma reta r que não contenha B e por B uma paralela s a r . Em s marcamos C tal que $d(B, C) = 1$; em r marcamos D e E tais que $d(A, D) = d(A, E) = k$. Determinamos então P e Q como as interseções de \overleftrightarrow{AB} com \overleftrightarrow{CD} e \overleftrightarrow{CE} , respectivamente, conforme Fig. 1.15.

A semelhança dos triângulos PAD e PBC nos mostra que $\frac{d(A, P)}{d(B, P)} = k$, e os triângulos QAE e QBC nos dão o mesmo resultado para Q . ■

Definição 1.12: Conjugados Harmônicos

Sejam dois pontos A e B com $A \neq B$. Os pontos distintos P, Q pertencentes à \overleftrightarrow{AB} ambos distintos de A e B , tais que $\frac{d(P, A)}{d(P, B)} = \frac{d(Q, A)}{d(Q, B)}$ dados pela Proposição 1.11, são ditos conjugados harmônicos com relação a A e B .

Observação: É claro que se P e Q são conjugados harmônicos com relação a A e B então, A e B são conjugados harmônicos com relação a P e Q , visto que $\frac{d(P, A)}{d(P, B)} = \frac{d(Q, A)}{d(Q, B)}$ é equivalente a $\frac{d(P, A)}{d(Q, A)} = \frac{d(P, B)}{d(Q, B)}$.

A inversão geométrica

2.1 Definição da inversão geométrica

Iniciamos a sessão com a definição de inverso de um ponto em relação à uma circunferência.

Definição 2.1

Sejam \mathcal{C} a circunferência em \mathbb{R}^2 de centro O e raio r e P um ponto em \mathbb{R}^2 distinto do ponto O . O inverso do ponto P relativo a circunferência \mathcal{C} é o ponto $\tilde{P} \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz as seguintes condições:

- 1) \tilde{P} pertence a semirreta com origem em O e passando pelo ponto P .
- 2) O produto da distância de O à P , $d(O, P)$, pela distância de O a \tilde{P} , $d(O, \tilde{P})$, é igual ao quadrado do raio da circunferência \mathcal{C} , isto é, $d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P}) = r^2$.

É importante observar que se $P \in \mathcal{C}$ então P coincide com \tilde{P} . Também, é importante destacar que essa definição não faz sentido quando aplicada ao centro O da circunferência \mathcal{C} , mas podemos estender o conceito de inverso de um ponto em relação à \mathcal{C} para o ponto O observando que a condição $d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P}) = r^2$ implica em $d(O, P) \rightarrow 0$ se, e somente se $d(O, \tilde{P}) \rightarrow \infty$. Assim, se queremos definir o inverso do ponto O , este inverso deve estar infinitamente longe de O , ou seja fora do plano. Postulamos então a existência de um ponto ideal, que denotamos por ∞ , tal que $\tilde{O} = \infty$ e, observando também que $d(O, P) \rightarrow \infty$ se, e somente se $d(O, \tilde{P}) \rightarrow 0$, devemos também postular $\tilde{\infty} = O$. O plano euclidiano \mathbb{R}^2 ao qual se adicionou o ∞ , $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, será denotado por E_∞ e denominado o plano inversivo.

Segue então, a definição da transformação inversão relativa à uma circunferência.

Definição 2.2

Seja \mathcal{C} uma circunferência de centro O e raio r . A transformação $i_{\mathcal{C}}: \mathbf{E}_{\infty} \rightarrow \mathbf{E}_{\infty}$ que leva qualquer $P \in \mathbf{E}_{\infty}$ em seu inverso com relação a \mathcal{C} é dita a inversão com respeito a \mathcal{C} . O ponto O é dito o centro ou polo de inversão, \mathcal{C} o círculo de inversão e r a potência de inversão.

Algumas particularidades da inversão estão sintetizadas na proposição e no corolário que seguem.

Proposição 2.3

Consideremos a inversão por uma circunferência \mathcal{C} de centro O e raio r :

1. Se $P \in \mathcal{C}(O, r)$, então $i_{\mathcal{C}}(P) = P$.
2. $i_{\mathcal{C}}(\tilde{P}) = P$ para qualquer $P \in \mathbb{R}^2$.
3. \tilde{P} é interno a \mathcal{C} se, e somente se P é externo a \mathcal{C} .
4. Sejam os pontos A, B, C nesta ordem, em uma semirreta de origem O . Então $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ estão na mesma semirreta em ordem inversa.

Demonstração:

1. Utilizando a condição 2 da [Definição 2.1](#) e o fato de $d(O, P) = r$, têm-se:

$$d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P}) = r^2 \Rightarrow d(O, P) \cdot d(O, P) = r^2 \Rightarrow [d(O, P)]^2 = r^2 \Rightarrow d(O, P) = r$$

e de forma análoga,

$$d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P}) = r^2 \Rightarrow d(O, \tilde{P}) \cdot d(O, \tilde{P}) = r^2 \Rightarrow [d(O, \tilde{P})]^2 = r^2 \Rightarrow d(O, \tilde{P}) = r.$$

Logo, $d(O, P) = d(O, \tilde{P})$ donde se conclui $P = \tilde{P}$.

2. Se $P = O$ o resultado é imediato. Suponha $P \neq O$ e considere os pontos $P, \tilde{P} = i_{\mathcal{C}}(P)$ e $i_{\mathcal{C}}(\tilde{P}) = Z$, os quais, pela condição 1) da [Definição 2.1](#) de inverso de ponto relativo à \mathcal{C} , estão todos sobre a semirreta \overrightarrow{OP} e, pela condição 2) dessa mesma definição são tais que :

$$d(O, \tilde{P}) = \frac{r^2}{d(O, P)} \text{ e } d(O, Z) = \frac{r^2}{d(O, \tilde{P})}.$$

Segue daí que, $d(O, Z) = r^2 \cdot \frac{d(O, P)}{r^2} = d(O, P)$.

Como os pontos $P \neq O, \tilde{P}, Z$ estão na semirreta \overrightarrow{OP} , segue que $Z = P$. Logo, $i_{\mathcal{C}}(\tilde{P}) = Z = P$.

3. Suponha P externo a \mathcal{C} , isto é, $d(O, P) > r$. Usando a condição 2 da [Definição 2.1](#), segue que:

$$d(O, \tilde{P}) = \frac{r^2}{d(O, P)} < \frac{r^2}{r} = r, \text{ ou seja, o ponto } \tilde{P} \text{ está no interior de } \mathcal{C}.$$

Agora, supondo \tilde{P} interno a \mathcal{C} , ou seja, $d(O, \tilde{P}) < r$ obteremos de forma análoga ao que foi demonstrado acima que:

$$d(O, P) = \frac{r^2}{d(O, \tilde{P})} > \frac{r^2}{r} > r,$$

ou seja, o ponto P está no exterior de \mathcal{C} .

4. Por hipótese têm-se $d(O, A) < d(O, B) < d(O, C)$. Do item 2 da [Definição 2.1](#), temos que:

$$\text{i) } d(O, A) < d(O, B) \Rightarrow \frac{r^2}{d(O, \tilde{A})} < \frac{r^2}{d(O, \tilde{B})} \Rightarrow d(O, \tilde{B}) < d(O, \tilde{A}).$$

$$\text{ii) } d(O, B) < d(O, C) \Rightarrow \frac{r^2}{d(O, \tilde{B})} < \frac{r^2}{d(O, \tilde{C})} \Rightarrow d(O, \tilde{C}) < d(O, \tilde{B}).$$

Dos itens i) e ii) concluímos que $d(O, \tilde{C}) < d(O, \tilde{B}) < d(O, \tilde{A})$. Portanto, A, B e C estão na mesma semirreta em ordem inversa. ■

Corolário 2.4

Seja \mathcal{C} uma circunferência de centro O e raio r . A inversão com respeito a \mathcal{C} , $i_{\mathcal{C}}: \mathbf{E}_{\infty} \rightarrow \mathbf{E}_{\infty}$, é uma involução, ou seja, é uma transformação bijetora tal que $(i_{\mathcal{C}})^{-1} = i_{\mathcal{C}}$.

Demonstração: O item 2 da [Proposição 2.3](#) nos diz que $i_{\mathcal{C}}(i_{\mathcal{C}}(P)) = P, \forall P \in \mathbb{R}^2$. Como $i_{\mathcal{C}}(O) = \infty$ e $i_{\mathcal{C}}(\infty) = O$, segue que $i_{\mathcal{C}}: \mathbf{E}_{\infty} \rightarrow \mathbf{E}_{\infty}$ satisfaz $(i_{\mathcal{C}})^2 = I_d$, e isso completa a demonstração. ■

2.2 Construção geométrica do inverso de um ponto

Dado uma circunferência \mathcal{C} em \mathbb{R}^2 de centro O e raio r e um ponto $P \in \mathbb{R}^2$, $P \neq O$, $P \notin \mathcal{C}$, vamos descrever três procedimentos para a construção geométrica (via régua e compasso) do inverso de P relativo à \mathcal{C} .

Construção A (caso em que P é um ponto interior à \mathcal{C}):

- i) Trace a semirreta \overrightarrow{OP} .
- ii) Trace a reta t , perpendicular à \overrightarrow{OP} passando por P .
- iii) Construa o ponto A , um dos pontos de intersecção da reta t com a circunferência \mathcal{C} .
- iv) Construa a semirreta \overrightarrow{OA} .
- v) Trace a reta s perpendicular à semirreta \overrightarrow{OA} passando por A .
- vi) Construa o ponto \tilde{P} , ponto de intersecção da reta s com a semirreta \overrightarrow{OP} .

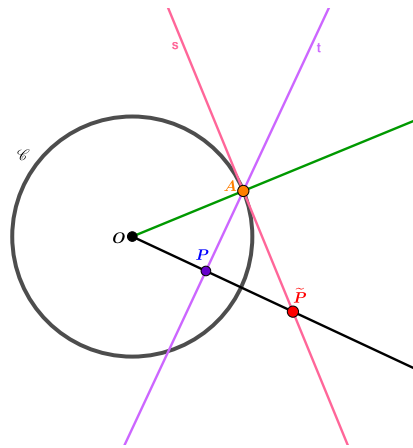


Figura 2.1: Construção do inverso de um ponto P interno à circunferência de inversão.

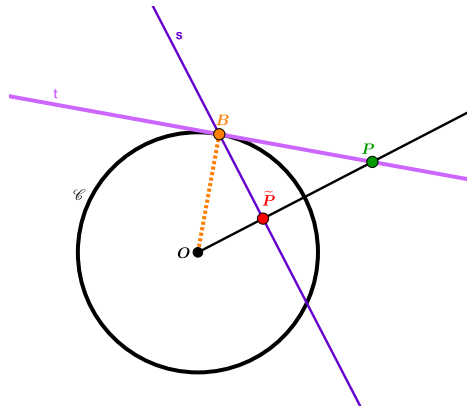
Afirmção: O ponto \tilde{P} assim construído é o inverso do ponto P relativo à \mathcal{C} .

Justificativa: Por construção os ângulos $\angle AOP$ e $\angle AO\tilde{P}$ são congruentes, assim como são congruentes os ângulos $\angle OPA$ e $\angle OA\tilde{P}$, visto que ambos medem 90° , portanto os triângulos OAP e OAP são semelhantes. Daí, segue que:

$$\frac{d(A, O)}{d(O, \tilde{P})} = \frac{d(O, P)}{d(A, O)} \Rightarrow d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P}) = d(A, O) \cdot d(A, O) \Rightarrow d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P}) = r^2.$$

Construção B (caso em que P é um ponto exterior à \mathcal{C}):

- i) Trace uma semirreta \overrightarrow{OP} ;
- ii) Trace uma reta t , tangente à circunferência \mathcal{C} que passe por P (Veja Fig. 2.2);
- iii) Construa o ponto B , ponto de intersecção da reta t com a circunferência \mathcal{C} ;
- iv) Trace o segmento \overline{OB} ;
- v) Trace uma reta s perpendicular à semirreta \overrightarrow{OP} que passe por B ;
- vi) Construa o ponto \tilde{P} , ponto de intersecção da reta s com a semirreta \overrightarrow{OP} .

**Figura 2.2:** Construção do inverso de um ponto P exterior à circunferência de inversão.

Afirmção: O ponto \tilde{P} assim construído é o inverso do ponto P relativo à \mathcal{C} .

Justificativa: Por construção os ângulos $\angle BOP$ e $\angle BO\tilde{P}$ são congruentes, assim como são congruentes os ângulos $\angle OBP$ e $\angle O\tilde{P}B$, visto que ambos medem 90° , portanto os triângulos OBP e $O\tilde{P}B$ são semelhantes. Daí, segue que:

$$\frac{d(O, P)}{d(O, B)} = \frac{d(O, B)}{d(O, \tilde{P})} \Rightarrow d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P}) = d(O, B) \cdot d(O, B) \Rightarrow d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P}) = r^2.$$

Construção C (caso em que $P \in \mathbb{R}^2$ com $P \notin \mathcal{C}$):

- i) Trace a semirreta \overrightarrow{OP} ;
- ii) Trace o diâmetro \overline{AB} da circunferência \mathcal{C} , perpendicular à \overrightarrow{OP} ;
- iii) Trace a semirreta \overrightarrow{AP} ;

- iv) Construa o ponto Q distinto de A , ponto de intersecção de \overrightarrow{AP} com a circunferência \mathcal{C} ;
- v) Trace a semirreta \overrightarrow{BQ} ;
- vi) Construa o ponto \tilde{P} , ponto de intersecção de \overrightarrow{BQ} com \overrightarrow{OP} .

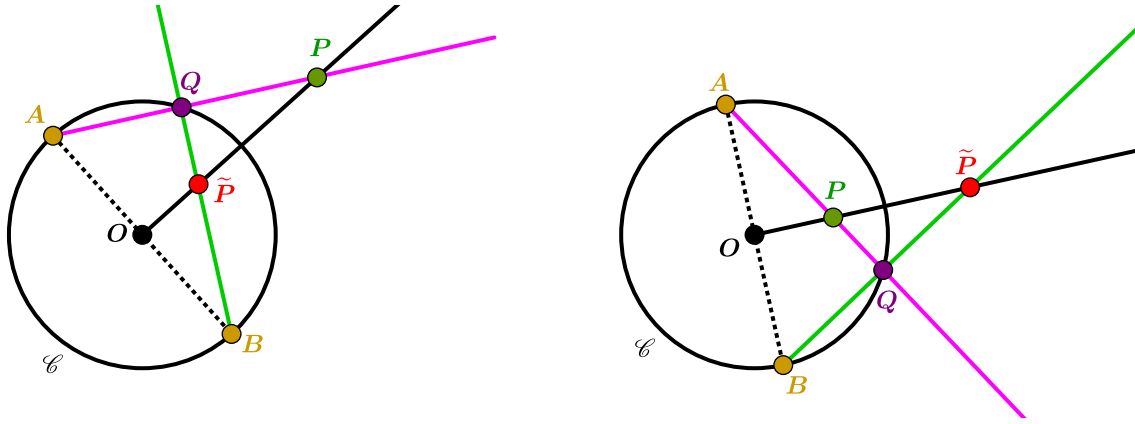


Figura 2.3: Construção do inverso de um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ relativo a circunferência \mathcal{C} com $P \notin \mathcal{C}$.

Afirmção: O ponto \tilde{P} assim construído é o inverso do ponto P relativo à \mathcal{C} , independente se P é exterior ou interior à \mathcal{C} .

Justificativa: Note que os triângulos ABQ e $O\tilde{P}B$ são triângulos retângulos e semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo, uma vez que:

- i) $\angle BQA \cong \angle BOP$,
- ii) $\angle ABQ \cong \angle OB\tilde{P}$,

no que implica que $\angle BAQ \cong \angle B\tilde{P}O$.

Note também que os triângulos OPA e $PQ\tilde{P}$ são triângulos retângulos e semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo, uma vez que:

- i) $\angle AOP \cong \angle PQ\tilde{P}$,
- ii) $\angle APO \cong \angle Q\tilde{P}P$,

no que implica que $\angle OAP \cong \angle Q\tilde{P}P$.

Com isso, tem-se:

$$\frac{d(O,P)}{d(O,A)} = \frac{d(O,B)}{d(O,\tilde{P})} \Rightarrow d(O,P) \cdot d(O,\tilde{P}) = d(O,A) \cdot d(O,B) \Rightarrow d(O,P) \cdot d(O,\tilde{P}) = r^2.$$

Portanto, temos que \tilde{P} é o inverso de P .

2.3 Propriedades da inversão

Ao longo dessa sessão considere a circunferência de inversão \mathcal{C} em \mathbb{R}^2 de centro O e raio r .

2.3.1 Inversão de uma reta

Proposição 2.5: Inversão de uma reta que passa por O

Se α é uma reta em \mathbb{R}^2 , $\tilde{\alpha} = \alpha \cup \{\infty\}$ e $O \in \alpha$ então $i_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$.

Demonstração:

É claro da definição de $i_{\mathcal{C}}$ que $i_{\mathcal{C}}(\alpha - \{O\}) \subset (\alpha - \{O\})$. Além disso, se $P \in \alpha$ e $P \neq O$ então, existe $\tilde{P} \in \overrightarrow{OP}$ distinto de O e conseqüentemente $\tilde{P} \in (\alpha - \{O\})$ tal que $i_{\mathcal{C}}(\tilde{P}) = P$, logo $i_{\mathcal{C}}(\alpha - \{O\}) = \alpha - \{O\}$. Como $i_{\mathcal{C}}(O) = \infty$ e $i_{\mathcal{C}}(\infty) = O$, segue que $i_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$.

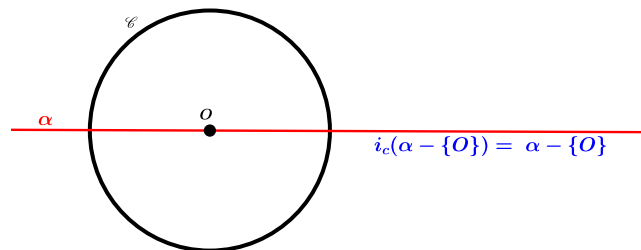


Figura 2.4: Reta que passa por O é invariante pela inversão de centro O .

■

Proposição 2.6: Inversão de uma reta que não passa por O

Se α é uma reta em \mathbb{R}^2 tal que $O \notin \alpha$ então, $i_{\mathcal{C}}(\alpha \cup \infty)$ é a circunferência que tem o segmento $O\tilde{P}$ como diâmetro, sendo P o ponto de intersecção de α com a reta perpendicular à α que passa pelo ponto O e $\tilde{P} = i_{\mathcal{C}}(P)$.

Demonstração: Denote por γ a circunferência que tem $O\tilde{P}$ como diâmetro e seja Q um ponto de α , com $Q \neq P$.

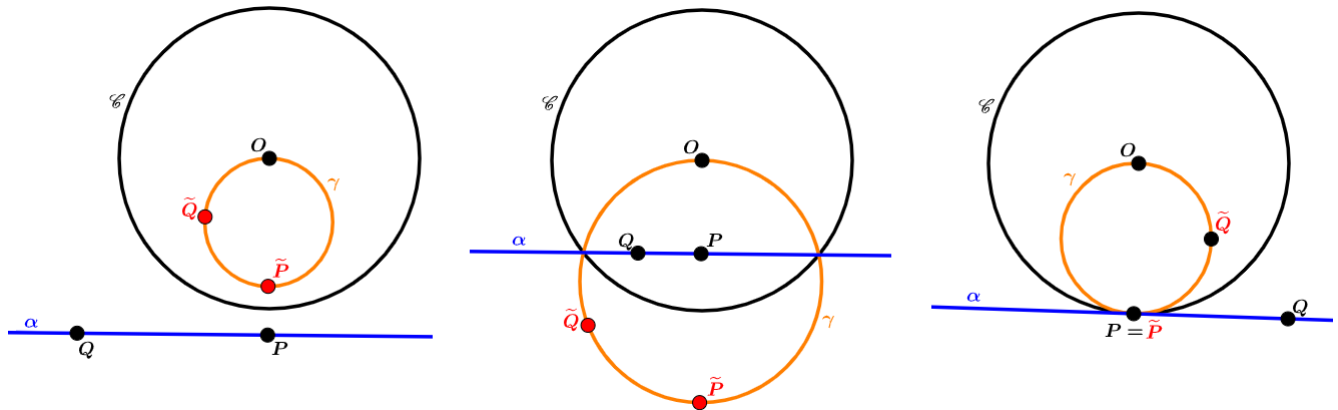


Figura 2.5: Inversão de uma reta α que não passa pelo pólo de inversão O .

Considere os triângulos QOP e $\tilde{P}O\tilde{Q}$, onde $\tilde{Q} = i_\varphi(Q)$, e observe que:

$d(O, Q) \cdot d(O, \tilde{Q}) = d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P})$. Isso implica que $\frac{d(O, Q)}{d(O, \tilde{P})} = \frac{d(O, P)}{d(O, \tilde{Q})}$, e que \hat{O} é ângulo comum e então $\triangle QOP \sim \triangle \tilde{P}O\tilde{Q}$ pelo caso Lado-Ângulo-Lado. Como $\angle OPQ$ é reto, segue dessa semelhança que o ângulo $\angle O\tilde{Q}P$ também é reto. Portanto, os pontos \tilde{P} e \tilde{Q} estão sobre a circunferência γ de diâmetro $O\tilde{P}$. Isto quer dizer que as imagens dos pontos de α pela inversão i_φ pertencem à circunferência γ , ou seja, $i_\varphi(\alpha) \subset \gamma$. Para completar a demonstração, é necessário provar que qualquer ponto da circunferência γ é imagem de algum ponto da reta α pela transformação i_φ , ou seja, $\gamma \subset i_\varphi(\alpha)$.

Para isso, tome um ponto qualquer $T \in \gamma$, $T \neq O$ e $T \neq P$. A semirreta \overrightarrow{OT} irá intersectar a reta α em um ponto \tilde{T} . Isto acontece porque a circunferência γ e a reta α estão do mesmo lado da tangente a γ em O . O objetivo é provar que $T = i_\varphi(\tilde{T})$. Sendo o segmento $O\tilde{P}$ o diâmetro de γ , tem-se que $\angle OT\tilde{P}$ é reto. Por isso, os triângulos OPT e $OT\tilde{P}$ são semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo, visto que \hat{O} é ângulo comum e que o ângulo $\angle OPT$ também é reto. E é então válida a proporção:

$$\frac{d(O, T)}{d(O, P)} = \frac{d(O, \tilde{P})}{d(O, \tilde{T})} \Rightarrow d(O, T) \cdot d(O, \tilde{T}) = d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P}).$$

Assim, da definição da inversão i_φ têm-se $T = i_\varphi(\tilde{T})$. Portanto, $\gamma \subset i_\varphi(\alpha)$. ■

2.3.2 Inversão de uma circunferência

Proposição 2.7: Inversão de uma circunferência que passa por O

Seja \mathcal{D} uma circunferência em \mathbb{R}^2 tal que $O \in \mathcal{D}$, então $i_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = \alpha \cup \{\infty\}$ sendo α a reta perpendicular à \overline{OP} passando por $i_{\mathcal{C}}(P)$ onde P é o ponto em \mathcal{D} diametralmente oposto ao ponto O .

Demonstração: Considere as ilustrações abaixo.

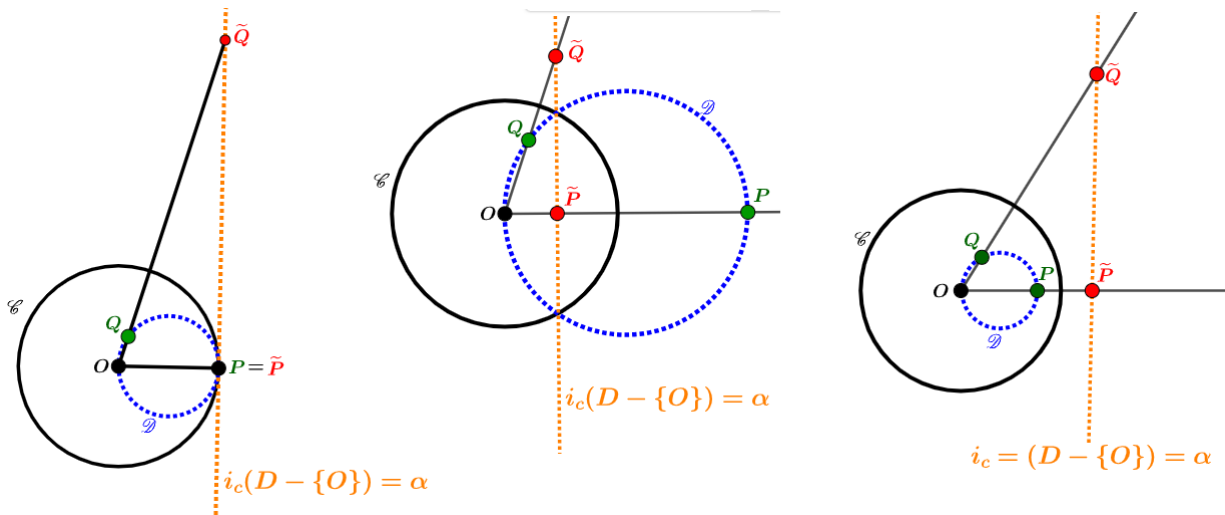


Figura 2.6: Inversão de uma circunferência \mathcal{D} que passa pelo pólo de inversão O .

Dado $Q \in \mathcal{D}$, distinto de O , devemos mostrar que $\tilde{Q} \in \alpha$. Isto equivale a mostrar que o $\angle OP\tilde{Q}$ é reto. Para isso, observe que os triângulos OPQ e $O\tilde{Q}\tilde{P}$ são semelhantes pelo caso Lado-Ângulo-Lado, uma vez que $\frac{d(O, \tilde{P})}{d(O, \tilde{Q})} = \frac{d(O, Q)}{d(O, P)}$, pois $d(O, Q) \cdot d(O, \tilde{Q}) = d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P}) = r^2$ e $\angle \tilde{Q}OP = \angle POQ$.

Além disso o $\angle PQO$ é reto, por ser um ângulo inscrito numa semi-circunferência.

Concluimos desses dois fatos o resultado desejado: $\angle OP\tilde{Q}$ é reto.

■

Proposição 2.8: Inversão de uma circunferência que não passa por O

Se \mathcal{D} é uma circunferência tal que $O \notin \mathcal{D}$ então, $i_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$ é a circunferência, que também não passa por O , cujo diâmetro é o segmento $\tilde{N}\tilde{M}$ sendo \overline{MN} o diâmetro da circunferência \mathcal{D} contido na reta que passa por O , $i_{\mathcal{C}}(M) = \tilde{M}$ e $i_{\mathcal{C}}(N) = \tilde{N}$, M entre O e N .

Demonstração: Sejam $O_{\mathcal{D}}$ o centro da circunferência \mathcal{D} e α a reta determinada por O e por $O_{\mathcal{D}}$, intersectando a circunferência \mathcal{D} em seu diâmetro \overline{MN} . Denote por \mathcal{F} a circunferência cujo diâmetro

é o segmento $\tilde{M}\tilde{N}$. Considere um ponto qualquer A sobre a circunferência \mathcal{D} , distinto de M e N , e o ponto \tilde{A} a imagem do ponto A pela inversão \mathcal{C} , isto é, $\tilde{A} = i_{\mathcal{C}}(A)$. Primeiro vamos mostrar que $\tilde{A} \in \mathcal{F}$. Para isso observe que os triângulos OAM e $O\tilde{M}\tilde{A}$ são semelhantes, assim como os triângulos OAN e $O\tilde{N}\tilde{A}$, ambos pelo caso de semelhança Lado-Ângulo-Lado.

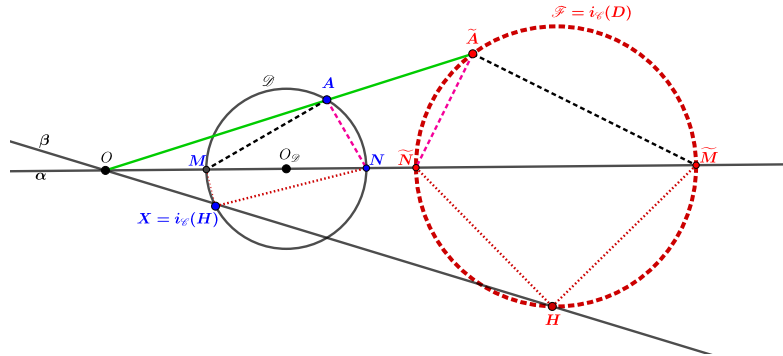


Figura 2.7: Inversão de uma circunferência \mathcal{D} que não passa pelo pólo de inversão O .

Por isso, têm-se:

$$m(\angle OAN) = m(\angle OAM) + m(\angle MAN) \Rightarrow m(\angle MAN) = m(\angle OAN) - m(\angle OAM) = m(\angle O\tilde{N}\tilde{A}) - m(\angle O\tilde{M}\tilde{A}),$$

em que o $\angle MAN$ é reto. Além disso, o ângulo $\angle O\tilde{N}\tilde{A}$ é externo ao triângulo $\tilde{M}\tilde{A}\tilde{N}$, conseqüentemente:

$$m(\angle O\tilde{N}\tilde{A}) = m(\angle \tilde{M}\tilde{A}\tilde{N}) + m(\angle O\tilde{M}\tilde{A}) \Rightarrow m(\angle \tilde{M}\tilde{A}\tilde{N}) = m(\angle O\tilde{N}\tilde{A}) - m(\angle O\tilde{M}\tilde{A}) = m(\angle MAN),$$

e segue que o $\angle \tilde{M}\tilde{A}\tilde{N}$ é reto. Isto significa que o ponto \tilde{A} está sobre a circunferência \mathcal{F} cujo diâmetro é o segmento $\tilde{M}\tilde{N}$, concluindo que $i_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{F}$.

Segundo, falta provar que $\mathcal{F} \subset i_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$. Para isso, sejam H um ponto qualquer sobre a circunferência \mathcal{F} , distinto de \tilde{M} e \tilde{N} , e o ponto X sobre a semirreta β que passa por O e H tal que $d(O, X) = \frac{r^2}{d(O, H)}$. Então, X é o ponto em β tal que $X = i_{\mathcal{C}}(H)$, e conseqüentemente os triângulos OXM e $O\tilde{M}H$ são semelhantes, assim como os triângulos OXM e $O\tilde{N}H$, ambos pelo caso de semelhança Lado-Ângulo-Lado. Por isso, têm-se:

$$m(\angle MXN) = m(\angle OXN) - m(\angle OXM) = m(\angle O\tilde{N}H) - m(\angle O\tilde{M}H) = m(\angle \tilde{N}H\tilde{M}),$$

em que o $\angle \tilde{N}H\tilde{M}$ é reto, e o $\angle O\tilde{N}H$ é externo ao triângulo $\tilde{M}H\tilde{N}$ e, então segue que o $\angle MXN$ também é reto, portanto o ponto X está sobre a circunferência \mathcal{D} , e $X = i_{\mathcal{C}}(H)$. Isso implica que $H = i_{\mathcal{C}}(X)$. Logo, qualquer ponto $H \in \mathcal{F}$ é imagem pela inversão $i_{\mathcal{C}}$ de um ponto sobre a circunferência

\mathcal{D} , provando que $\mathcal{F} \subset i_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$. Finalmente, do item 4 da [Proposição 2.3](#), conclui-se que $\mathcal{F} = i_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$ não passa por O , uma vez que M está entre O e N .

■

2.3.3 Inversão e distâncias

Proposição 2.9: Inversão e pontos conjugados

Seja \overline{AB} um diâmetro de \mathcal{C} e $P \in \overrightarrow{OA}$, $P \neq O$ e $P \neq A$. Então, P e \tilde{P} são inversos com relação a \mathcal{C} se, e somente se, $\frac{d(P,A)}{d(P,B)} = \frac{d(\tilde{P},A)}{d(\tilde{P},B)}$ (ou seja, se, e somente se, P e \tilde{P} são conjugados harmônicos com relação a A e B).

Demonstração: Suponha sem perda de generalidade $B, \tilde{P} = i_{\mathcal{C}}(P), A, P$ pontos distintos alinhados nessa ordem, conforme [Fig. 2.8](#).

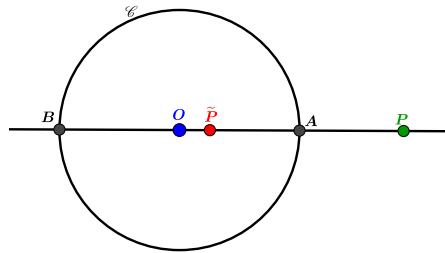


Figura 2.8: Apoio à demonstração da [Proposição 2.9](#): caso P, \tilde{P}, A e P alinhados nesta ordem.

Temos, por hipótese, que O é o ponto médio de \overline{AB} e $d(O,A) = d(O,B) = r$. Segue então que:

$$\frac{d(P,A)}{d(P,B)} = \frac{d(O,P) - r}{d(O,P) + r} \tag{2.1}$$

e

$$\frac{d(\tilde{P},A)}{d(\tilde{P},B)} = \frac{r - d(O,\tilde{P})}{r + d(O,\tilde{P})}. \tag{2.2}$$

Observando ainda que:

$$\frac{d(O,P) - r}{d(O,P) + r} = \frac{d(O,P) \cdot d(O,\tilde{P}) - r \cdot d(O,\tilde{P})}{d(O,P) \cdot d(O,\tilde{P}) + r \cdot d(O,\tilde{P})} = \frac{r^2 - r \cdot d(O,\tilde{P})}{r^2 + r \cdot d(O,\tilde{P})} = \frac{r - d(O,\tilde{P})}{r + d(O,\tilde{P})}. \tag{2.3}$$

Concluimos de 2.1, 2.2 e 2.3:

$$\frac{d(P,A)}{d(P,B)} = \frac{d(\tilde{P},A)}{d(\tilde{P},B)}.$$

A recíproca é válida pois se $\frac{d(P,A)}{d(P,B)} = \frac{d(\tilde{P},A)}{d(\tilde{P},B)}$, então:

$$\frac{d(O,P) - r}{d(O,P) + r} = \frac{r - d(O,\tilde{P})}{r + d(O,\tilde{P})} \Rightarrow d(O,P) \cdot d(O,\tilde{P}) = r^2,$$

como queríamos demonstrar.

A demonstração do caso em que estão alinhados os pontos distintos $B, P, A, i_{\mathcal{C}}(P) = \tilde{P}$ nessa ordem é feita de forma análoga a do caso anterior. ■

Proposição 2.10: Distância entre pontos invertidos

Se O, A e B são pontos distintos em \mathbb{R}^2 então $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{r^2 \cdot d(A, B)}{d(O, A) \cdot d(O, B)}$.

Demonstração:

Temos dois casos a considerar:

- 1) O, A e B são pontos não colineares.

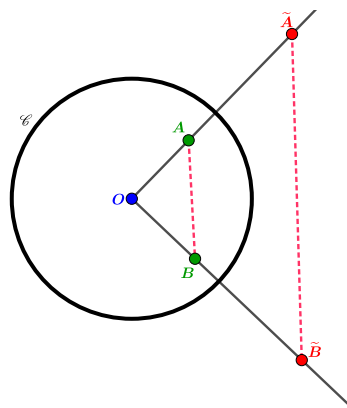


Figura 2.9: Apoio à demonstração da Proposição 2.10 (Caso 1: O, A e B não colineares).

Neste caso, considere os triângulos OAB e $O\tilde{A}\tilde{B}$, e observe que:

$$d(O,A) \cdot d(O,\tilde{A}) = r^2 = d(O,B) \cdot d(O,\tilde{B}) \Rightarrow \frac{d(O,A)}{d(O,B)} = \frac{d(O,\tilde{B})}{d(O,\tilde{A})}.$$

Além disso, $\angle AOB = \angle \tilde{A}O\tilde{B}$. Portanto os triângulos OAB e $O\tilde{B}\tilde{A}$ são semelhantes pelo caso Lado-Ângulo-Lado. Então,

$$\frac{d(\tilde{A},\tilde{B})}{d(A,B)} = \frac{d(\tilde{A},O)}{d(B,O)} \Rightarrow d(\tilde{A},\tilde{B}) = \frac{d(A,B) \cdot d(\tilde{A},O)}{d(B,O)} \Rightarrow d(\tilde{A},\tilde{B}) = \frac{r^2 \cdot d(A,B)}{d(A,O) \cdot d(B,O)}.$$

2) O, A e B são pontos colineares.

Temos duas possibilidades a considerar para este caso:

• **Possibilidade 1:** O está entre A e B .

De forma geral, do item 2 da [Definição 2.1](#), têm-se que $d(O,A) \cdot d(O,\tilde{A}) = r^2 = d(O,B) \cdot d(O,\tilde{B})$, e então

$$\frac{d(O,A)}{d(O,B)} = \frac{d(O,\tilde{B})}{d(O,\tilde{A})}.$$

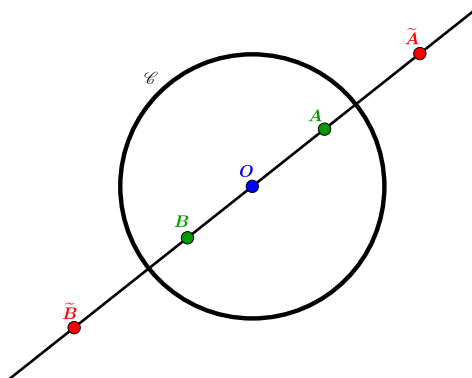


Figura 2.10: Apoio à demonstração da [Proposição 2.10](#) (Caso 2 - Possibilidade 1: O está entre A e B).

Sem perda de generalidade, podemos supor os pontos B, O e A alinhados, conforme [Fig. 2.10](#).

Nesse caso, têm-se:

$$d(\tilde{A},\tilde{B}) = d(O,\tilde{A}) + d(O,\tilde{B}).$$

E então, segue que:

$$d(\tilde{A},\tilde{B}) = \frac{d(O,B) \cdot d(O,\tilde{B})}{d(O,A)} + \frac{d(O,A) \cdot d(O,\tilde{A})}{d(O,B)}$$

$$\begin{aligned}
 d(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \frac{d(O, B) \cdot d(O, B) \cdot d(O, \tilde{B}) + d(O, A) \cdot d(O, A) \cdot d(O, \tilde{A})}{d(O, A) \cdot d(O, B)} \\
 &= \frac{d(O, B) \cdot r^2 + d(O, A) \cdot r^2}{d(O, A) \cdot d(O, B)} \\
 &= \frac{r^2 \cdot (d(O, B) + d(O, A))}{d(O, A) \cdot d(O, B)} \\
 &= \frac{r^2 \cdot d(A, B)}{d(O, A) \cdot d(O, B)}. \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

- **Possibilidade 2:** A está entre O e B ou B está entre O e A .

De forma geral, do item 2 da [Definição 2.1](#), têm-se que $d(O, A) \cdot d(O, \tilde{A}) = r^2 = d(O, B) \cdot d(O, \tilde{B})$ e então

$$d(O, \tilde{A}) = \frac{r^2}{d(O, A)} \text{ e } d(O, \tilde{B}) = \frac{r^2}{d(O, B)}.$$

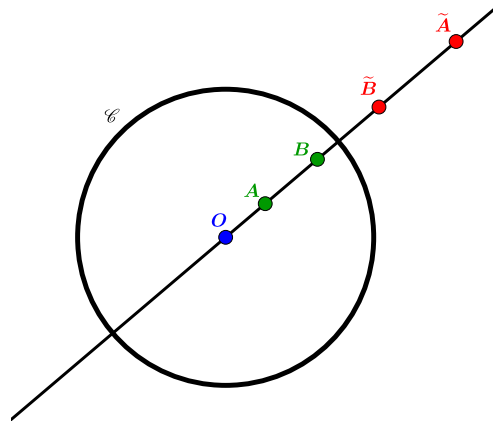


Figura 2.11: Apoio à demonstração da [Proposição 2.10](#) (Caso 2 - Possibilidade 2: A está entre O e B).

Sem perda de generalidade, podemos supor os pontos O , A e B alinhados conforme [Fig. 2.11](#).

Nesse caso, têm-se:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = d(O, \tilde{A}) - d(O, \tilde{B})$$

$$\begin{aligned}
 d(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \frac{r^2}{d(O, A)} - \frac{r^2}{d(O, B)} \\
 &= \frac{r^2 \cdot d(O, B) - r^2 \cdot d(O, A)}{d(O, A) \cdot d(O, B)} \\
 &= \frac{r^2 \cdot (d(O, B) - d(O, A))}{d(O, A) \cdot d(O, B)} \\
 &= \frac{r^2 \cdot d(A, B)}{d(O, A) \cdot d(O, B)}. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

■

2.3.4 Inversão e ângulos

Proposição 2.11

Se t é uma reta que não passa por O , então a reta tangente a circunferência \tilde{t} (inversa de t com relação à circunferência \mathcal{C}) em O é paralela à reta t .

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que a reta tangente α à circunferência \tilde{t} no ponto O intercepte a reta t num ponto P . Então $P \neq O$, pois a reta t não passa no ponto O . Como a reta α passa em O , e sabendo-se da [Proposição 2.5](#), a inversão em relação a \mathcal{C} de uma reta que passa por O é a própria reta, então têm-se que $i_{\mathcal{C}}(\alpha) = \tilde{\alpha} = \alpha$, com $\tilde{P} \in (\tilde{t} \cap \tilde{\alpha})$ e $\tilde{P} = i_{\mathcal{C}}(P)$. Então, os pontos \tilde{P} e O pertencem à α e também pertencem à circunferência \tilde{t} . Logo, α não é tangente a \tilde{t} , o que é uma contradição, portanto a reta tangente a \tilde{t} em O é paralela a t .

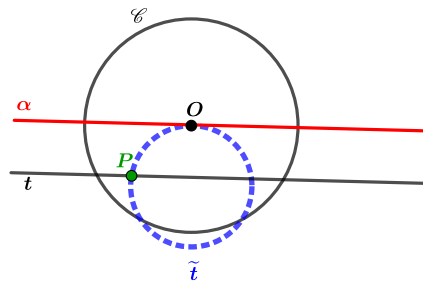


Figura 2.12: Reta tangente a \tilde{t} paralela à reta t .

■

Proposição 2.12

Sejam m e n duas retas concorrentes em P diferente de O . Então, $i_{\mathcal{C}}(m) = \tilde{m}$ e $i_{\mathcal{C}}(n) = \tilde{n}$ se interceptam em $i_{\mathcal{C}}(P) = \tilde{P}$ e o ângulo entre \tilde{m} e \tilde{n} em \tilde{P} tem a mesma medida que o ângulo entre as retas m e n .

Demonstração:

A demonstração desta proposição será dividida em dois casos:

Caso 1 As retas m e n não passam por O .

Neste caso, como as retas m e n não passam por O , então as suas respectivas inversas são as circunferências \tilde{m} e \tilde{n} , e ambas passam por O . Pela [Proposição 2.11](#), a reta tangente à \tilde{m} em O é paralela à m e a reta tangente à \tilde{n} em O é paralela à n . Logo, o ângulo entre \tilde{m} e \tilde{n} em O tem a mesma medida que o ângulo entre m e n , mas da [Proposição 1.3](#) este também é o ângulo entre \tilde{m} e \tilde{n} em \tilde{P} .

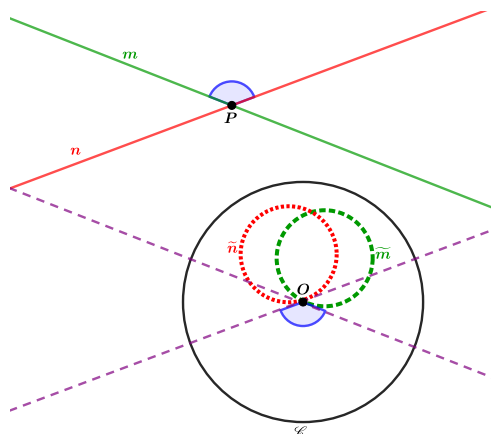


Figura 2.13: Ângulos entre retas concorrentes e suas inversas.

Caso 2 As retas m ou n passam por O .

Suponhamos que a reta m passe por O e a reta n não passe por O . Então, da [Proposição 2.5](#) e da [Proposição 2.6](#), $\tilde{m} = m$ e \tilde{n} é uma circunferência que passa por O . Além disso, a reta tangente à $\tilde{m} = m$ em O é a própria reta m e da [Proposição 2.11](#), a reta u tangente à \tilde{n} em O é paralela à n . Portanto, o ângulo entre \tilde{m} e \tilde{n} em O tem a mesma medida que o ângulo entre as retas m e n . Mas da [Proposição 1.3](#), este também é o ângulo entre \tilde{m} e \tilde{n} em \tilde{P} . O caso em que a reta n passa por O e a reta m não passa por O é análogo ao anterior. Isto conclui a nossa demonstração.

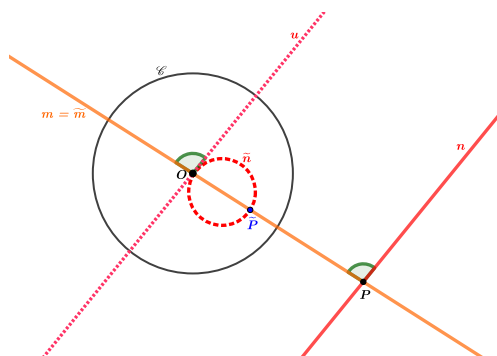


Figura 2.14: Preservação pela inversão do ângulo entre duas retas concorrentes, se uma passa pelo pólo de inversão O .



Proposição 2.13

Se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são circunferências que não passam por O e se interceptam em um ponto P , então o ângulo entre $\widetilde{\mathcal{C}}_1 = i_\varphi(\mathcal{C}_1)$ e $\widetilde{\mathcal{C}}_2 = i_\varphi(\mathcal{C}_2)$ em $\widetilde{P} = i_\varphi(P)$ tem a mesma medida que o ângulo entre \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 em P .

Demonstração: Sejam t e u as retas tangentes à \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 no ponto P , respectivamente. Então, a circunferência $i_\varphi(t) = \widetilde{t}$ é tangente à circunferência $\widetilde{\mathcal{C}}_1$ no ponto \widetilde{P} e a circunferência $i_\varphi(u) = \widetilde{u}$ é tangente à circunferência $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ também no ponto \widetilde{P} .

Portanto, denotando por v a reta tangente à $\widetilde{\mathcal{C}}_1$ no ponto \widetilde{P} e denotando por w a reta tangente à $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ no ponto \widetilde{P} , tem-se que v é a tangente à \widetilde{t} em \widetilde{P} e w é a tangente à \widetilde{u} em \widetilde{P} , ou seja, o ângulo entre v e w é o ângulo entre \widetilde{t} e \widetilde{u} em \widetilde{P} que, por sua vez, é o ângulo entre $\widetilde{\mathcal{C}}_1$ e $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ em \widetilde{P} . Além disso, da [Proposição 2.12](#), o ângulo entre as retas t e u têm a mesma medida que o ângulo entre \widetilde{t} e \widetilde{u} em \widetilde{P} . Logo, o ângulo entre $\widetilde{\mathcal{C}}_1$ e $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ em \widetilde{P} têm a mesma medida que o ângulo entre \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 em P .

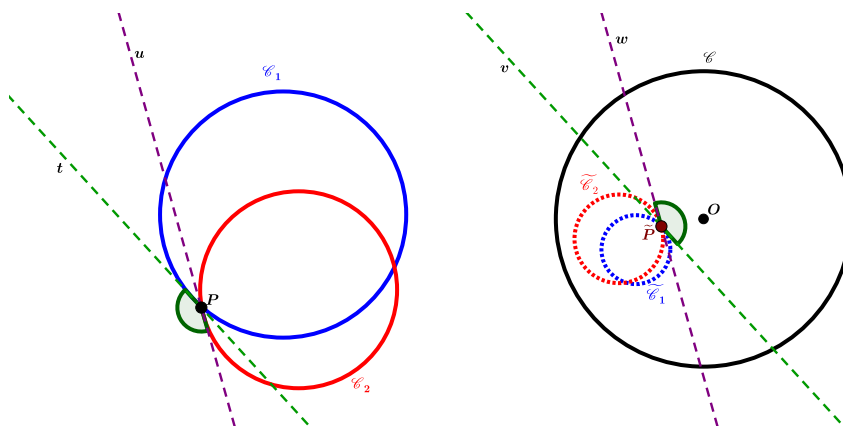


Figura 2.15: Preservação pela inversão do ângulo entre duas circunferências que não passam pelo pólo de inversão O .



Proposição 2.14

Seja $P \in \mathbb{R}^2, P \neq O, P \notin \mathcal{C}$. Então, qualquer circunferência em \mathbb{R}^2 que passe por P e $i_{\mathcal{C}}(P)$ é ortogonal à \mathcal{C} .

Demonstração: Considere uma circunferência \mathcal{D} de centro I e raio s que passe nos pontos $i_{\mathcal{C}}(P) = \tilde{P}$ e P . Temos duas possibilidades a considerar:

- i) P é exterior a \mathcal{C} ;
- ii) P é interior a \mathcal{C} .

Pelos itens 2 e 3 da [Proposição 2.3](#), têm-se no caso i) \tilde{P} interior a \mathcal{C} e no caso ii) \tilde{P} exterior a \mathcal{C} . Então, em ambos os casos, as circunferências \mathcal{C} e \mathcal{D} são circunferências secantes. Sejam G e H os pontos de intersecção de \mathcal{C} e \mathcal{D} .

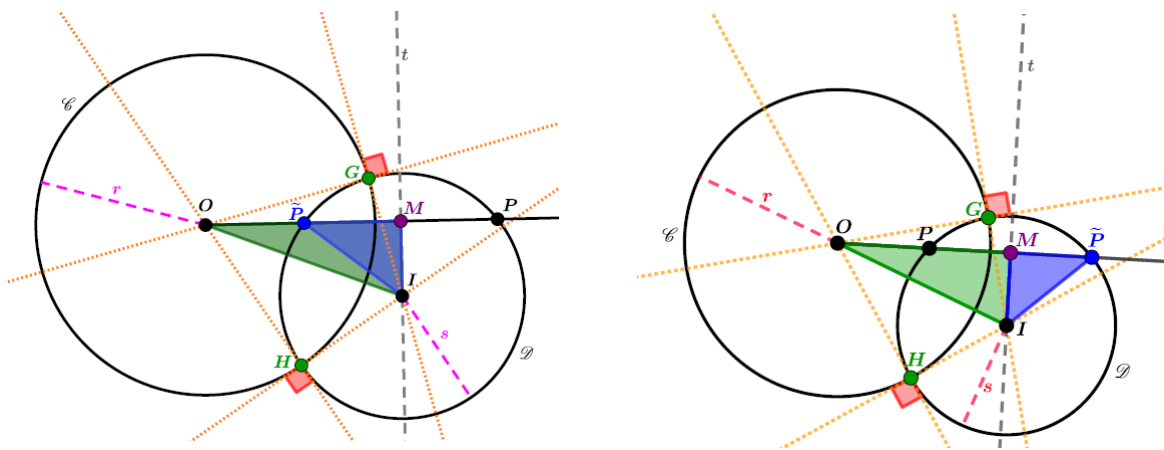


Figura 2.16: Qualquer circunferência \mathcal{D} que passe por P e \tilde{P} é ortogonal à \mathcal{C} .

Sabe-se do [Teorema 1.2](#) e da existência e da unicidade da reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado que: \overrightarrow{OG} é a reta tangente a \mathcal{D} passando por G , \overrightarrow{IG} é a reta tangente a \mathcal{C} passando por G , \overrightarrow{OH} é a reta tangente a \mathcal{D} passando por H e \overrightarrow{IH} é a reta tangente a \mathcal{C} passando por H . Assim sendo, $\angle OGI$ é o ângulo entre \mathcal{C} e \mathcal{D} no ponto G e $\angle OHI$ é o ângulo entre \mathcal{C} e \mathcal{D} no ponto H . Seja o ponto M o pé da perpendicular traçada de I à semirreta \overrightarrow{OP} , conforme [Fig. 2.16](#).

Do triângulo OIM , têm-se que:

$$[d(O, I)]^2 = [d(O, M)]^2 + [d(I, M)]^2 \tag{2.6}$$

Por outro lado, $d(O, M) = d(O, \tilde{P}) + d(\tilde{P}, M)$. Elevando ambos os membros desta equação ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}
 [d(O, M)]^2 &= [d(O, \tilde{P}) + d(\tilde{P}, M)]^2 \\
 &= \left[d(O, \tilde{P}) + \frac{d(P, \tilde{P})}{2} \right]^2 \\
 &= \left[d(O, \tilde{P}) + \frac{d(O, P) - d(O, \tilde{P})}{2} \right]^2 \\
 &= \left[\frac{d(O, P) + d(O, \tilde{P})}{2} \right]^2. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Analisando agora o triângulo $IM\tilde{P}$, teremos que $[d(I, \tilde{P})]^2 = [d(I, M)]^2 + [d(\tilde{P}, M)]^2$. Daí:

$$\begin{aligned}
 [d(I, M)]^2 &= [d(I, \tilde{P})]^2 - [d(\tilde{P}, M)]^2 \\
 &= s^2 - \left[\frac{d(\tilde{P}, P)}{2} \right]^2 \\
 &= s^2 - \left[\frac{d(O, P) - d(O, \tilde{P})}{2} \right]^2. \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Substituindo as equações 2.7 e 2.8 na equação 2.6, obtêm-se:

$$[d(O, I)]^2 = d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P}) + s^2.$$

Como por hipótese $d(O, P) \cdot d(O, \tilde{P}) = r^2$, segue que $[d(O, I)]^2 = r^2 + s^2$, o que implica que os triângulos OGI e OIH são retângulos em G e H . E isso conclui a demonstração. ■

Proposição 2.15

Se \mathcal{D} é uma circunferências em \mathbb{R}^2 ortogonal à \mathcal{C} , então $i_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$ é a própria circunferência \mathcal{D} .

Demonstração: Sejam I o centro de \mathcal{D} e s o seu raio. Sejam Q e P os pontos de intersecção de \mathcal{C} e \mathcal{D} , e seja $F \in \mathcal{D}$ distinto de Q e P . Considere a semirreta \overrightarrow{OF} e seja G o ponto de intersecção de \overrightarrow{OF} com \mathcal{D} , distinto de F . Temos o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo OQI :

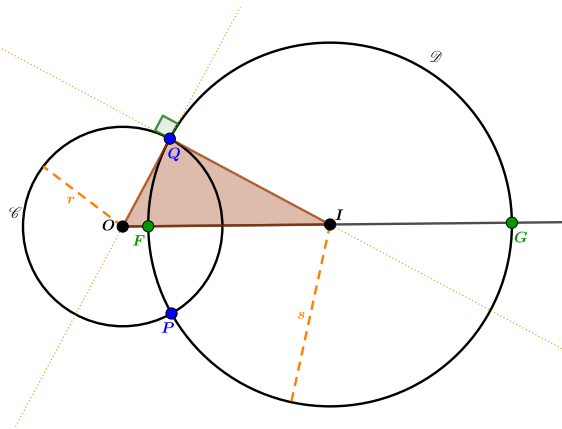


Figura 2.17: Ilustração dos dados da Proposição 2.6

$$r^2 + s^2 = [d(O, I)]^2.$$

Mas $d(O, I) = d(O, F) + s$. Segue, portanto que,

$$r^2 + s^2 = [d(O, F) + s]^2 = [d(O, F)]^2 + 2 \cdot d(O, F) \cdot s + s^2.$$

Daí, teremos:

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 &= d(O, F) \cdot [d(O, F) + 2s] + s^2 \Rightarrow r^2 = d(O, F) \cdot [d(O, F) + 2s] \\ &\Rightarrow r^2 = d(O, F) \cdot [d(O, F) + d(F, G)] = d(O, F) \cdot d(O, G). \end{aligned}$$

Isso implica que $i_{\mathcal{C}}(F) = G$. Pela Proposição 2.3 item 1, $i_{\mathcal{C}}(Q) = Q$ e $i_{\mathcal{C}}(P) = P$, e isso conclui a demonstração. ■

As proposições Proposição 2.14 e Proposição 2.15 podem ser sintetizadas no corolário abaixo:

Corolário 2.16

Uma circunferência \mathcal{D} em \mathbb{R}^2 , distinta de \mathcal{C} , é invariante pela inversão com relação a \mathcal{C} , isto é, $i_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ se, e somente se, \mathcal{D} é ortogonal a \mathcal{C} .

Aplicações

3.1 Aplicações em construções geométricas

Apolônio de Perga, matemático e astrônomo, chamado de “Grande Geômetra” pelos seus contemporâneos, nasceu em Perga no ano de 262 a.C. e morreu em 194 a.C., aos 72 anos de idade. A obra “Seções Cônicas” foi um de seus trabalhos mais famosos, escrito em oito livros, que solidificou a fama de Apolônio. Apolônio chegou a escrever várias outras obras, mas a maioria somente se conhece por seus títulos, que foram citados por outros matemáticos ou historiadores. Um repertório de métodos geométricos e algébricos foram criados ao longo dos anos para resolver o Problema de Apolônio original, do círculo tangente a três círculos dados, que Apolônio propôs e resolveu no trabalho “Tangências”. A abordagem original de Apolônio se perdeu, mas, quatro séculos depois, Pappus de Alexandria retomou o problema. François Viète (1540-1603) e outros estudiosos apresentaram novas reconstruções, baseando-se em vestígios das descrições de Pappus. O primeiro novo método de solução foi publicado em 1596, por Adrian Van Roomem (1561-1615), que identificou os centros dos círculos da solução como intersecção de pontos de duas hipérbolas. O método de Van Roomem foi refinado em 1687 por Isaac Newton (1642-1727) e por John Casey (1820-1891) em 1881. O Problema de Apolônio estimulou pesquisas de métodos da Geometria pura e proporcionou a utilização de processos analíticos para refinar suas ferramentas. A teoria da inversão, desenvolvida durante a primeira metade do século XIX, foi utilizada por Julius Petersen (1839-1910) para produzir uma elegante solução do Problema original de Apolônio. O Problema de Apolônio atualmente é enunciado de forma mais abrangente: “Dados três objetos do plano, cada um dos quais é um ponto, uma reta ou uma circunferência, construir todas as circunferências (ou retas, pensando-as como casos degenerados) tangentes aos três objetos simultaneamente”. Nesta perspectiva, será apresentado a

seguir, três subcasos desse problema com aumento gradativo de dificuldade na resolução, os quais quando solucionados utilizando inversão em uma circunferência convenientemente escolhida, tem suas resoluções qualitativamente simplificadas. A estratégia é partir do problema posto, escolher uma circunferência de inversão conveniente, considerar o inverso do problema posto segundo a circunferência de inversão estabelecida e construir nesse ambiente inverso o equivalente aos inversos das soluções do problema posto, e finalmente “desinverter” as soluções do problema equivalente no ambiente invertido, as quais serão as soluções do problema posto inicialmente.

Problema 1: Dados uma reta r e dois pontos distintos P e Q em um mesmo semiplano aberto com relação a r , tal que a reta que passa por P e Q (reta s) não é paralela a r , traçar uma circunferência tangente a r que passe por P e Q .

Para resolver o problema comece considerando uma solução, conforme figura abaixo:

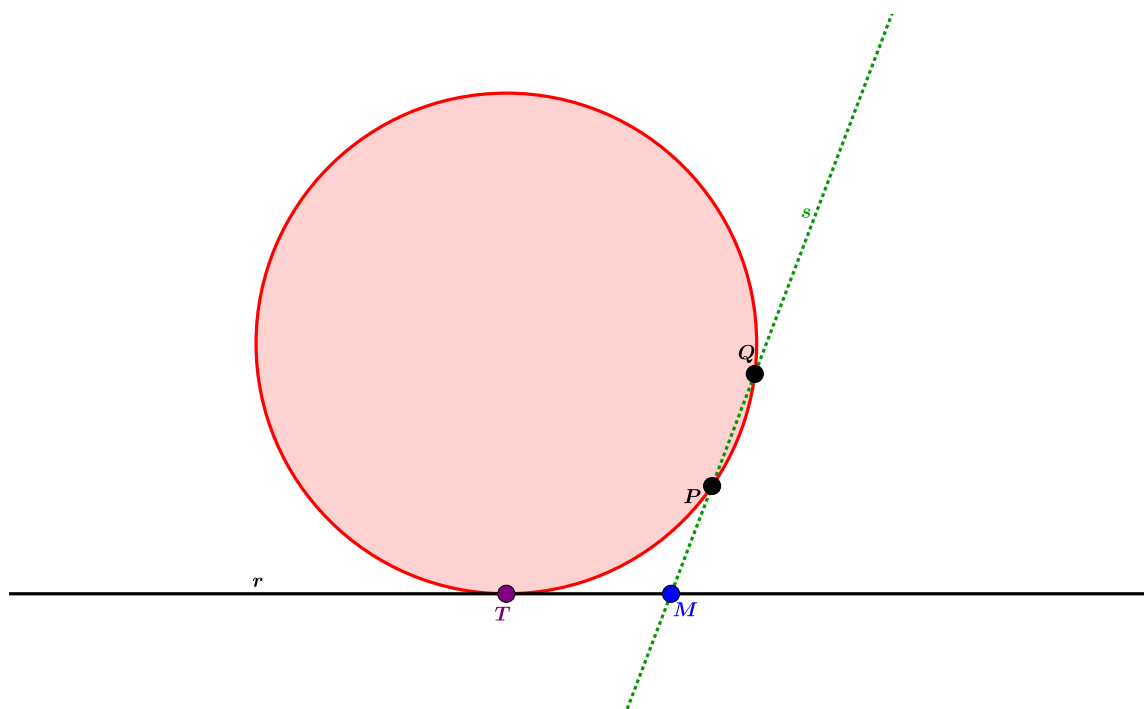


Figura 3.1: Circunferência tangente a uma reta r dada passando por dois pontos, P e Q , dados.

Assim sendo, sabendo que uma circunferência é determinada de forma única por quaisquer três de seus pontos, para solucionar o problema precisamos determinar o ponto de tangência T da circunferência solução com a reta r . Então, se denotarmos por M o ponto de intersecção da reta r com a reta que passa pelos pontos P e Q (conforme Fig. 3.1), segue da [Proposição 1.8](#), que T é tal que $d(M, P) \cdot d(M, Q) = [d(M, T)]^2$; ou seja, T é tal que o segmento \overline{MT} é a média geométrica (ou média proporcional) entre os segmentos \overline{MP} e \overline{MQ} , veja construção do segmento \overline{MT} no [Apêndice A](#).

Portanto, existem exatamente dois pontos de tangência T_1 e T_2 que solucionam o problema, um a

direita de M e outro a esquerda de M , e ambos tais que:

$$d(T_1, M) = d(T_2, M) = \sqrt{d(M, Q) \cdot d(M, P)}.$$

Consequentemente, existem exatamente duas circunferências que solucionam o problema proposto acima, conforme [Fig. 3.2](#).

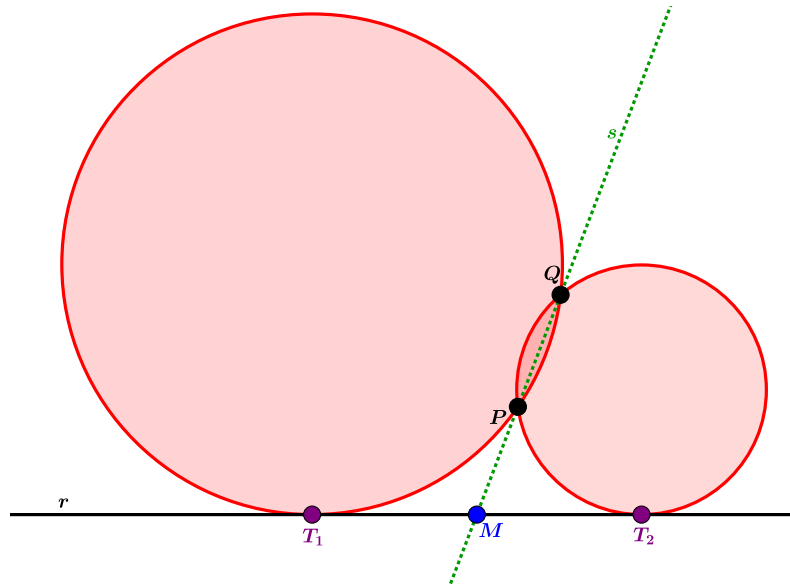


Figura 3.2: Circunferências soluções do Problema 1.

Construção das soluções do Problema 1

Seguem os passos da construção detalhada das duas circunferências soluções do problema 1, utilizando a inversão geométrica:

- i) Construa a reta s que passa por P e Q .
- ii) Construa uma circunferência de inversão \mathcal{C} de centro em um dos pontos (suponhamos P , sem perda de generalidade) e de raio \overline{PQ} .
- iii) Considere dois pontos distintos A e B pertencentes à reta r e externos à circunferência \mathcal{C} . Construa \tilde{A} e \tilde{B} os seus respectivos inversos relativos à circunferência \mathcal{C} (veja construção na seção 2.2 do capítulo 2). É claro, da [Proposição 2.3](#), que \tilde{A} e \tilde{B} são internos à \mathcal{C} e diferentes de P .
- iv) Construa a circunferência \tilde{r} , a inversa da reta r em relação a \mathcal{C} . Observe que, da [Proposição 2.6](#), \tilde{r} é a circunferência que passa por \tilde{A} , \tilde{B} e P (pólo de inversão).

- v) Trace as retas t e u passando por Q e que sejam tangentes a \tilde{r} , veja Construção C na seção 1.2 do capítulo 1 dessa dissertação. Observe que t e u não passam por P .
- vi) Construa \tilde{t} e \tilde{u} , as respectivas inversas de t e u em relação a \mathcal{C} , as quais são circunferências caracterizadas pela Proposição 2.6.

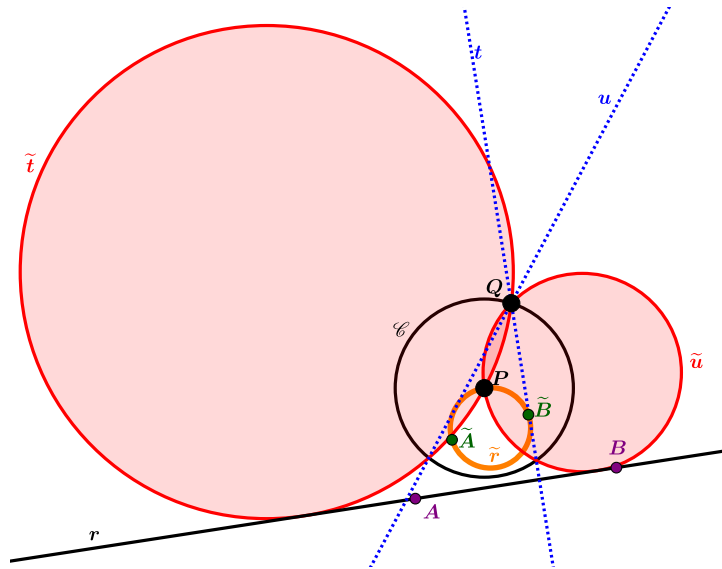


Figura 3.3: Construção das circunferências soluções do Problema 1 por inversão geométrica.

Afirmção: As circunferências \tilde{t} e \tilde{u} são as soluções do problema 1.

Justificativa: \tilde{t} e \tilde{u} são circunferências que passam por P (devido a Proposição 2.6) e por Q (devido a Proposição 2.3). Além disso, conforme Corolário 2.4, a inversão $i_{\mathcal{C}}$ é uma involução. E, portanto:

i) $i_{\mathcal{C}}(\tilde{r}) = r$.

ii) O fato de t e u serem tangentes à \tilde{r} é preservado pela inversão $i_{\mathcal{C}}$, ou seja \tilde{t} e \tilde{u} são tangentes a r .

Conclusão: \tilde{t} e \tilde{u} são circunferências tangentes à r que passam por P e Q , como queríamos provar.

Problema 2: Dados uma reta r , uma circunferência \mathcal{C} e um ponto P exterior a \mathcal{C} , ambos situados num dos semiplanos abertos determinados por r , e tais que a reta tangente a \mathcal{C} passando por P não seja paralela a r , construir (com régua e compasso) todas as circunferências passando pelo ponto P tangentes a r e a \mathcal{C} .

Iniciamos imaginando uma solução do problema e, temos duas situações a considerar, conforme segue.

Situação 1: A circunferência solução \mathcal{S} é tangente exteriormente à \mathcal{C} , conforme figura.

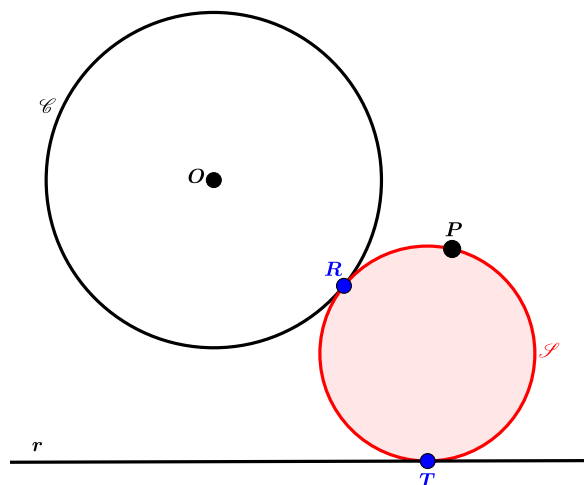


Figura 3.4: Apoio à solução do Problema 2, situação 1.

Sejam T o ponto de tangência da circunferência solução \mathcal{S} com r , R o ponto de tangência de \mathcal{S} com \mathcal{C} , O o centro de \mathcal{C} e tracemos o diâmetro \overline{AB} de \mathcal{C} de tal forma que a reta passando por A e B , reta s , seja perpendicular a r . Como a reta que passa por A e P , reta t , não é paralela a r (devido a hipótese sobre tangência do Problema 2) segue que, essa reta é secante à \mathcal{S} , portanto existe $P' \neq P \in (t \cap \mathcal{S})$, com P' exterior à \mathcal{C} .

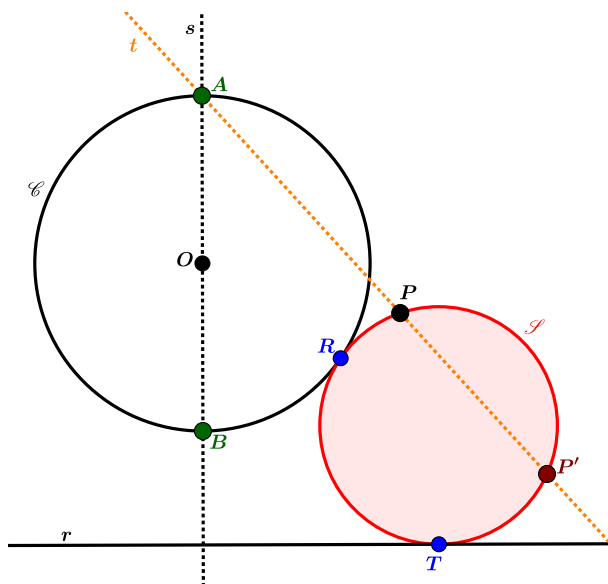


Figura 3.5: Uma solução hipotética do Problema 2, situação 1.

Assim, para construirmos \mathcal{S} , uma vez determinado P' , procedemos como no Problema 1, ou seja, construir \mathcal{S} consiste em construir uma circunferência tangente a r que passa por P e P' sob as condições do Problema 1.

Afirmamos que o ponto P' é o ponto de intersecção da reta t com a circunferência \mathcal{D} , circunferência

que passa por B , M e P sendo M o ponto de intersecção de s com r (ou seja, M é o pé da perpendicular a r que passa por A , e claro também por B), conforme Fig. 3.6.

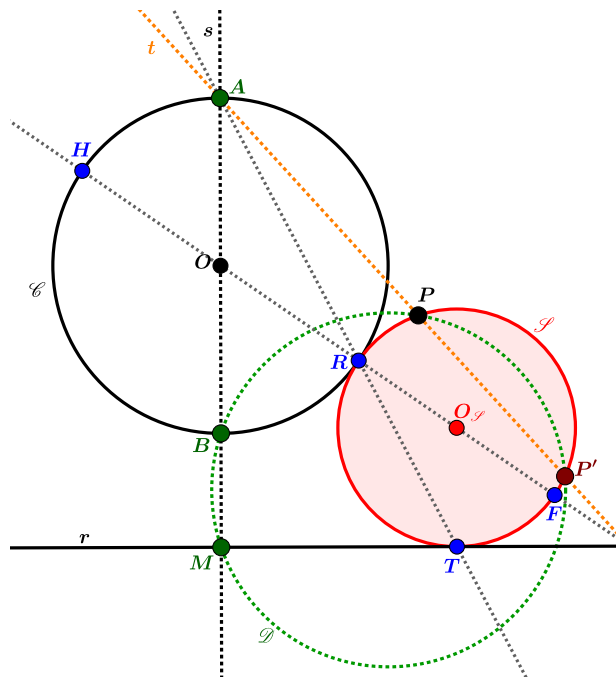


Figura 3.6: Circunferência auxiliar \mathcal{D} utilizada na solução do Problema 2, situação 1.

De fato, usando a notação estabelecida, temos:

1°) A , R e T são colineares, pois as retas s e a que passa por $O_{\mathcal{S}}$ e T são paralelas e a reta $\overleftrightarrow{OO_{\mathcal{S}}}$ é transversal, assim $m(\angle HOA) = m(\angle TO_{\mathcal{S}}F)$ sendo \overline{HR} o diâmetro de \mathcal{C} que passa por R e \overline{RF} o diâmetro de \mathcal{S} que passa por R , e isso implica que $m(\angle HRA) = m(\angle TRF)$ (ambos medem metade do ângulo central correspondente).

2°) Os triângulos ARB e AMT são semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo de semelhança de triângulos, visto que $\angle BAR = \angle TAM$ (ângulo comum) e, $m(\angle BRA) = m(\angle AMT) = 90^\circ$, pois $\angle BRA$ é ângulo inscrito numa semicircunferência. E então,

$$d(A, B) \cdot d(A, M) = d(A, R) \cdot d(A, T). \tag{3.1}$$

Além disso, da [Proposição 1.8](#) tem-se:

$$d(A, P) \cdot d(A, P') = d(A, R) \cdot d(A, T). \tag{3.2}$$

Por outro lado, seja L a intersecção da circunferência \mathcal{D} que passa por B , M e P com a reta t ,

novamente da [Proposição 1.8](#) tem-se:

$$d(A, B) \cdot d(A, M) = d(A, P) \cdot d(A, L). \tag{3.3}$$

Igualando (3.1), (3.2) e (3.3), segue que: $d(A, P) \cdot d(A, L) = d(A, P) \cdot d(A, P') \Rightarrow L = P'$.

Assim, na situação 1, temos exatamente duas soluções para o Problema 2, que são as duas circunferências que passam por P e P' e são tangentes à r , descritas na solução do Problema 1, conforme [Fig. 3.7](#).

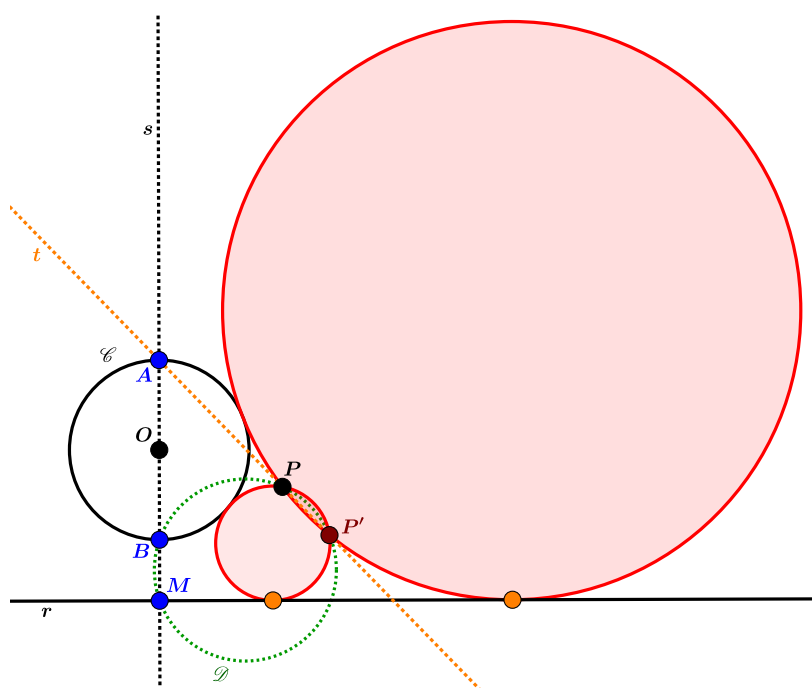


Figura 3.7: Circunferências soluções do Problema 2, situação 1.

Situação 2: A circunferência solução \mathcal{S}_1 é tangente interiormente a \mathcal{C} , conforme figura.

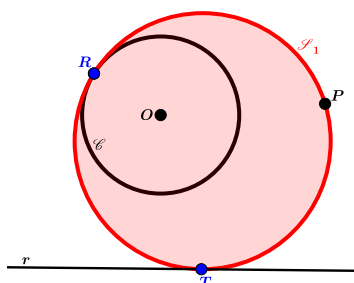


Figura 3.8: Apoio à solução do Problema 2, situação 2.

Sejam T o ponto de tangência da circunferência solução \mathcal{S}_1 com r , R o ponto de tangência de \mathcal{S}_1 com \mathcal{C} , O o centro de \mathcal{C} e tracemos o diâmetro \overline{AB} de \mathcal{C} de tal forma que a reta passando por

A e B , reta s , seja perpendicular a r . Como a reta que passa por B e P , reta t , não é paralela a r (devido a hipótese sobre tangência do Problema 2) segue que, essa reta é secante à \mathcal{S}_1 , portanto existe $Q' \neq P \in (t \cap \mathcal{S}_1)$, com Q' exterior à \mathcal{C} .

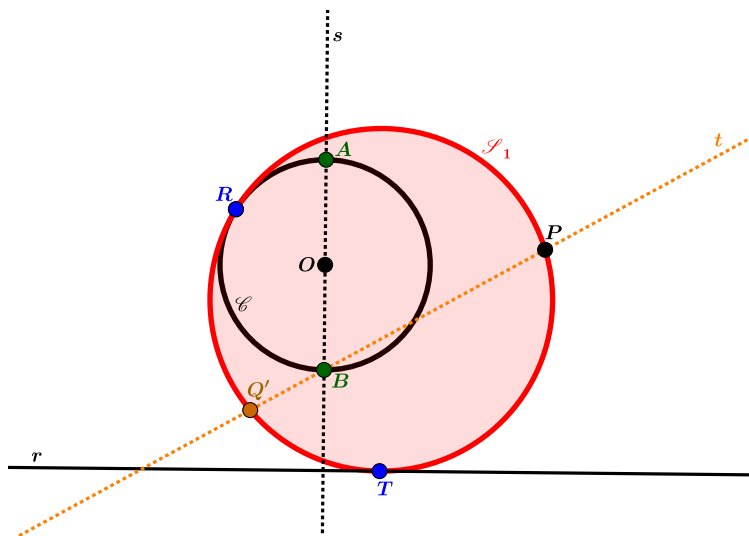


Figura 3.9: Uma solução hipotética do Problema 2, situação 2.

Assim, para construirmos \mathcal{S}_1 , uma vez determinado Q' , procedemos como no Problema 1, ou seja, construir \mathcal{S}_1 consiste em construir uma circunferência tangente a r que passa por P e Q' sob as condições do Problema 1.

Afirmamos que o ponto Q' é o ponto de intersecção da reta t com a circunferência \mathcal{D} , circunferência que passa por A , M e P sendo M o ponto de intersecção de s com r (ou seja, M é o pé da perpendicular a r que passa por A , e claro também por B), conforme Fig. 3.10.

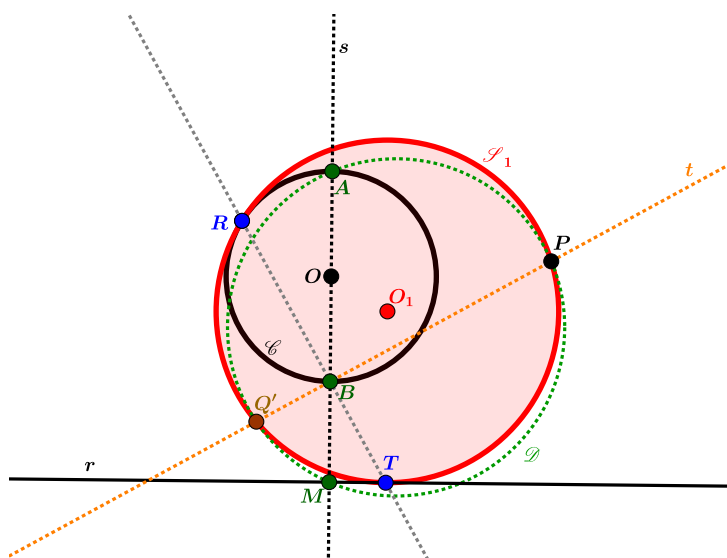


Figura 3.10: Circunferência auxiliar \mathcal{D} utilizada na solução do Problema 2, situação 2.

De fato, usando a notação estabelecida, temos:

1°) B, R e T são colineares. A demonstração é análoga a feita na situação 1 acima.

2°) Os triângulos RBA e MBT são semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo de semelhança de triângulos, visto que $\angle RBA = \angle MBT$ pois são opostos pelo vértice B e, $m(\angle BRA) = m(\angle BMT) = 90^\circ$. E então,

$$d(A, B) \cdot d(B, M) = d(B, R) \cdot d(B, T). \tag{3.4}$$

Além disso, da [Proposição 1.8](#) tem-se:

$$d(B, P) \cdot d(B, Q') = d(B, R) \cdot d(B, T). \tag{3.5}$$

Por outro lado, seja L a intersecção da circunferência \mathcal{D} que passa por A, M e P com a reta t , novamente da [Proposição 1.8](#) tem-se:

$$d(A, B) \cdot d(B, M) = d(B, P) \cdot d(B, L). \tag{3.6}$$

Igualando (3.4), (3.5) e (3.6), segue que: $d(B, P) \cdot d(B, L) = d(B, P) \cdot d(B, Q') \Rightarrow L = Q'$.

Assim, na situação 2, temos exatamente duas soluções para o Problema 2, que são as duas circunferências que passam por P e Q' e são tangentes a r , descritas na solução do Problema 1, conforme [Fig. 3.11](#).

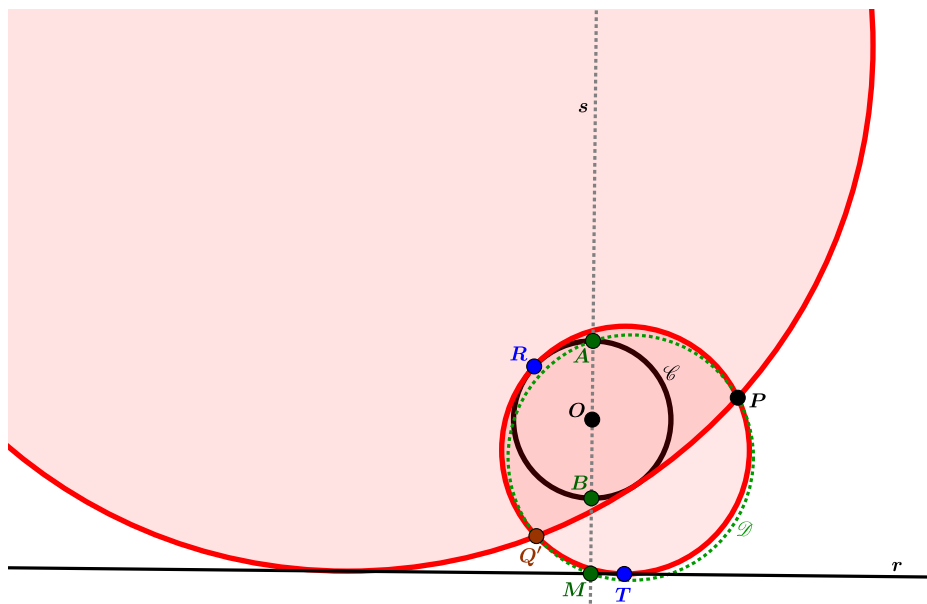


Figura 3.11: Circunferências soluções do Problema 2, situação 2.

A junção das situações 1 e 2 descritas acima nos dizem que existem exatamente quatro soluções para o Problema 2, conforme [Fig. 3.12](#).

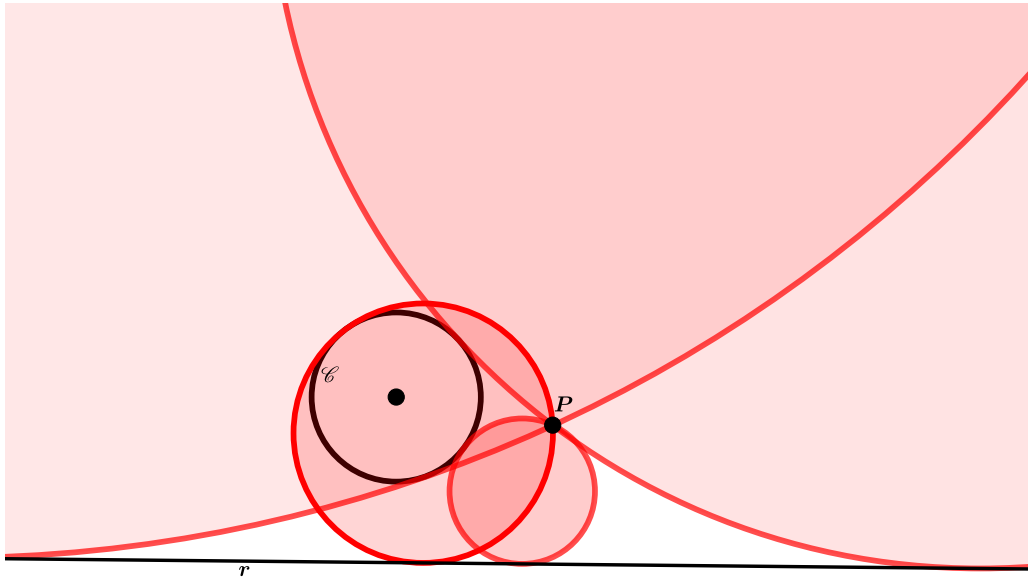


Figura 3.12: As quatro circunferências soluções do Problema 2.

Construção das soluções do Problema 2

Seguem os passos da construção detalhada das quatro circunferências soluções do problema 2, utilizando a inversão geométrica:

- i) Construa a circunferência de inversão \mathcal{W} com centro em P e ortogonal à \mathcal{C} . Para realizar a construção, observe que, \mathcal{W} é a circunferência de centro em P e raio \overline{PJ} sendo J o ponto de tangência de uma das retas tangentes a \mathcal{C} que passa por P a qual pode ser construída via construção C da seção 1.2 do capítulo 1.
- ii) Construa \tilde{r} , a inversa da reta r com relação à circunferência \mathcal{W} . Conforme Proposição 2.6, \tilde{r} é uma circunferência que não passa por P (pólo de inversão). E, como \mathcal{W} foi construída ortogonal a \mathcal{C} , segue da Proposição 2.15 que $i_{\mathcal{W}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, ou seja \mathcal{C} é fixada pela inversão $i_{\mathcal{W}}$.
- iii) Trace as retas s, t, u e v de forma que as quatro retas traçadas sejam retas tangentes simultaneamente a \mathcal{C} e \tilde{r} , conforme construções F e G da seção 1.3 do capítulo 1. Antes observe que \mathcal{C} e \tilde{r} são circunferências cuja posição relativa são de circunferências exteriores.
- iv) Construa as inversas $\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}$ e \tilde{v} , respectivamente em relação à \mathcal{W} , as quais pela Proposição 2.6 são circunferências que passam por P , visto que as quatro retas s, t, u e v não passam por P , devido a hipótese de não tangência dada no Problema 2.

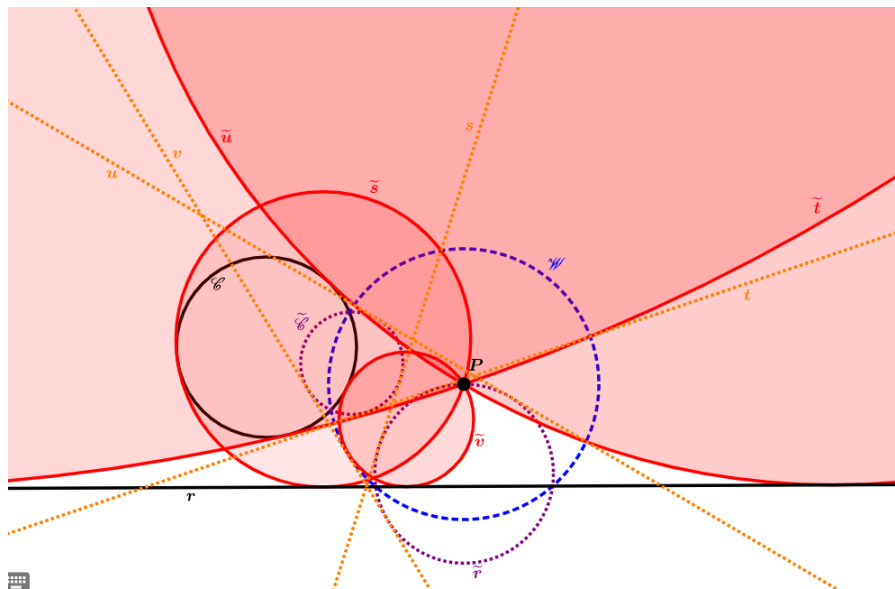


Figura 3.13: Solução do Problema 2, via inversão geométrica.

Afirmção: $\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}$ e \tilde{v} são as quatro circunferências soluções do problema 2.

Justificativa: Temos $i_{\mathcal{W}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, da ortogonalidade de \mathcal{W} e \mathcal{C} . Além disso do fato de $i_{\mathcal{W}}$ ser involutiva segue que $i_{\mathcal{W}}(\tilde{r}) = r$ e a tangência simultânea de cada uma das quatro retas tangentes s, t, u e v com \tilde{r} e \mathcal{C} é preservada por $i_{\mathcal{W}}$, ou seja, $\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}$ e \tilde{v} são tangentes simultaneamente a $i_{\mathcal{W}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ e $i_{\mathcal{W}}(\tilde{r}) = r$. Portanto, $\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}$ e \tilde{v} são as quatro circunferências distintas que passam por P e são tangentes a r e \mathcal{C} , logo são as soluções do Problema 2.

Problema 3: Dados uma reta r , pontos $P, Q \in r$ e \mathcal{A} e \mathcal{B} circunferências de raios distintos tangentes entre si e a r em P e Q , respectivamente, construir todas as circunferências tangentes a r, \mathcal{A} e \mathcal{B} .

Sabemos que dadas \mathcal{A} e \mathcal{B} circunferências tangentes de raios distintos, existem exatamente três retas que são tangentes simultaneamente a \mathcal{A} e \mathcal{B} , duas tangentes externas e uma tangente interna. Conforme enunciado do Problema 3, uma das tangentes externas comum às duas circunferências é a reta r dada, denotamos por s a outra tangente externa e por l a tangente interna comum às duas circunferências, veja construção (com régua e compasso) das tangentes comuns s e l , na seção 1.3 do capítulo 1, construção E.

Sejam \tilde{P}, \tilde{Q} os pontos de tangência de s e \mathcal{A}, s e \mathcal{B} , respectivamente, R o ponto de tangência entre l, \mathcal{A} e \mathcal{B}, M o ponto de intersecção de s e r, G o ponto de intersecção de l e r , conforme Fig. 3.14.

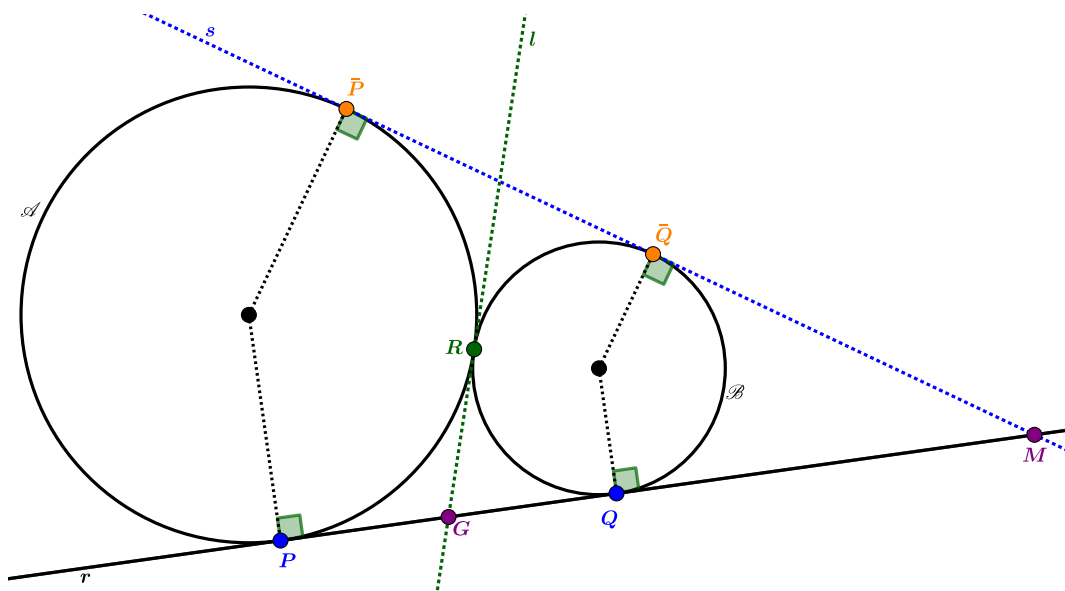


Figura 3.14: Estabelecendo notações para resolver o Problema 3.

Supondo o problema resolvido, concluímos que existem exatamente duas circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 que solucionam o Problema 3, conforme Fig. 3.15.

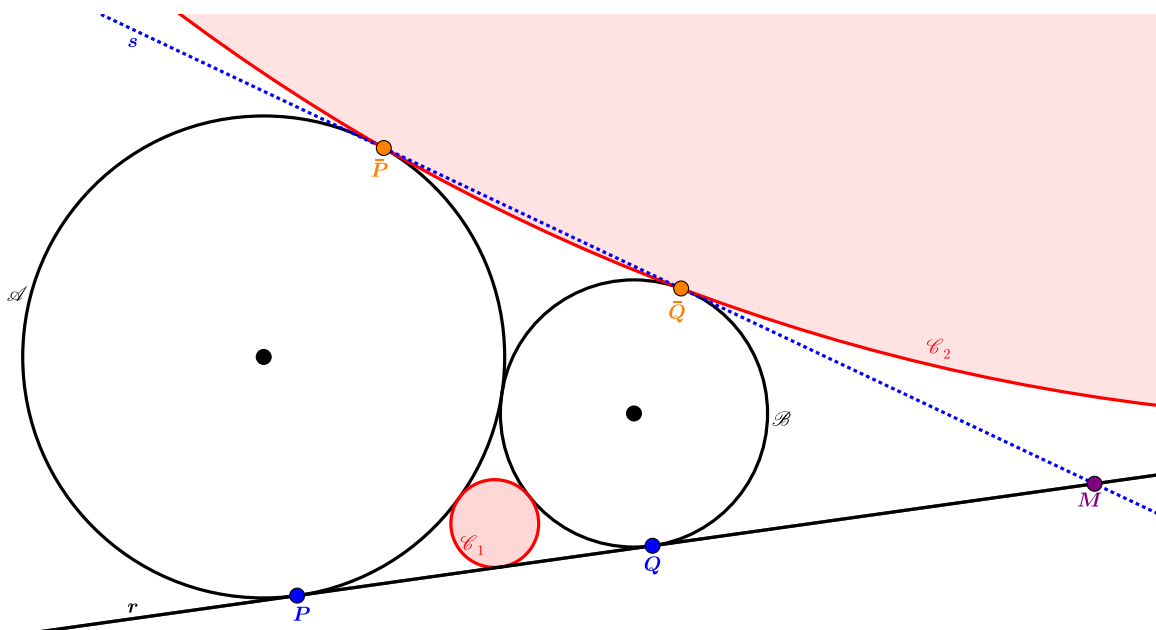


Figura 3.15: Visualizando as soluções do Problema 3.

A circunferência solução \mathcal{C}_2 é precisamente a circunferência que passa por \bar{P} , \bar{Q} e é tangente a r , a qual pode ser construída via técnica de resolução do Problema 1, escolhendo a solução tal que M está entre Q e esse ponto de tangência.

A solução \mathcal{C}_2 é a circunferência de raio k tangente a r no ponto H , onde k satisfaz a relação $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}}$ e H é tal que $d(Q, H) = \frac{d(P, Q) \cdot \sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}$, onde k_1 e k_2 são os raios das circunferências \mathcal{A} e \mathcal{B} . Estamos supondo $k_1 > k_2$. Uma demonstração dessa afirmação se encontra no [Apêndice B](#).

Construção das soluções do Problema 3

Vamos agora, descrever os passos da construção detalhada das duas circunferências soluções do Problema 3, utilizando a inversão geométrica.

- i) Construa uma circunferência de inversão \mathcal{D} de centro P e raio qualquer.
- ii) Construa $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathcal{B}}$ e \tilde{r} as inversas de \mathcal{A} , \mathcal{B} e r , respectivamente, relativas à circunferência \mathcal{D} , caracterizadas pelas [Proposição 2.7](#), [Proposição 2.8](#) e [Proposição 2.5](#), respectivamente. Observe que $\tilde{r} = r \cup \{\infty\}$, $\tilde{\mathcal{B}}$ é uma circunferência que não passa por P e $\tilde{\mathcal{A}}$ é uma reta que não passa por P . Da [Proposição 2.11](#) e da propriedade involutiva de $i_{\mathcal{D}}$ segue que a reta tangente a circunferência \mathcal{A} em P , no caso r , é paralela à reta $\tilde{\mathcal{A}}$. Além disso como a tangência é uma condição preservada por $i_{\mathcal{D}}$, ainda temos que $\tilde{\mathcal{B}}$ é tangente às retas r e $\tilde{\mathcal{A}}$. Portanto a inversão $i_{\mathcal{D}}$ transforma a [Fig. 3.16](#) na [Fig. 3.17](#).

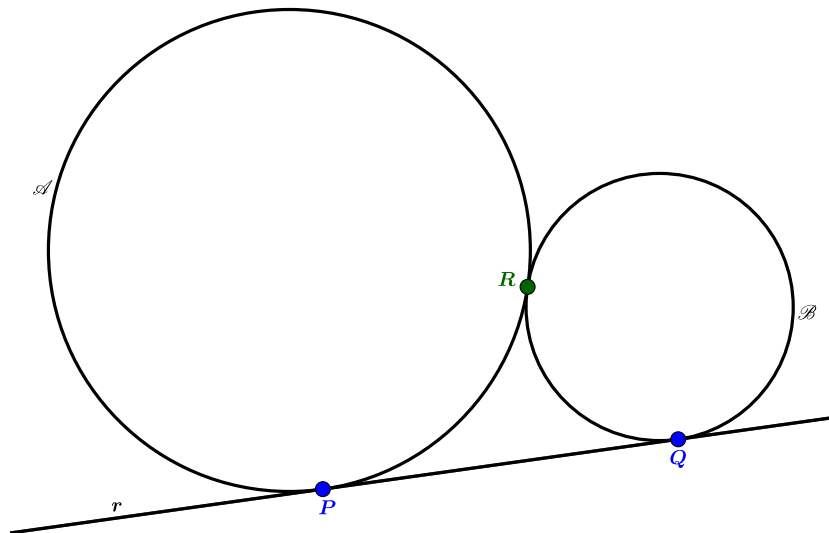


Figura 3.16: Visualizando os dados do Problema 3.

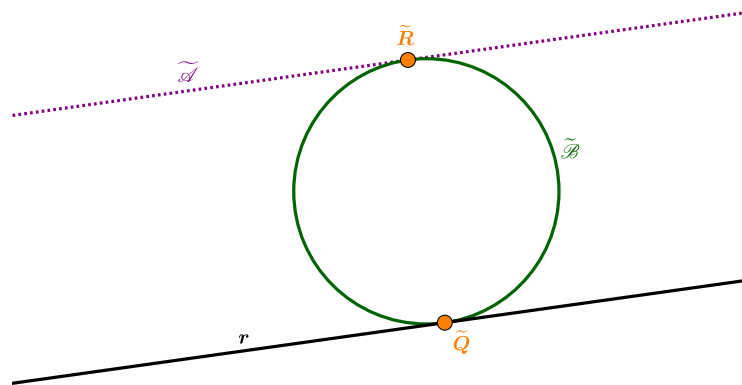


Figura 3.17: Visualizando os dados invertidos do Problema 3.

iii) Construa duas circunferências \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 tangentes simultaneamente a $\widetilde{\mathcal{B}}$ e às retas $\widetilde{\mathcal{A}}$ e r . As circunferências \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 são caracterizadas pelo raio que para ambas mede $\frac{d(\widetilde{\mathcal{A}}, r)}{2}$ e pelos seus centros O_1 e O_2 os quais são os pontos na reta paralela a r passando pelo centro \widetilde{O} de $\widetilde{\mathcal{B}}$ tais que $d(\widetilde{O}, O_1) = d(\widetilde{O}, O_2) = d(\widetilde{\mathcal{A}}, r)$, conforme Fig. 3.18.

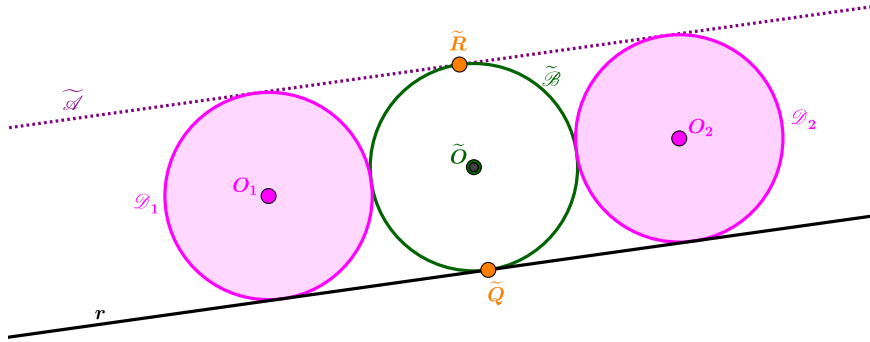


Figura 3.18: Circunferências \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 tangentes à circunferência $\widetilde{\mathcal{B}}$ e às retas $\widetilde{\mathcal{A}}$ e r .

iv) Construa as inversas $\widetilde{\mathcal{D}}_1$ e $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ das circunferências \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 relativas à circunferência \mathcal{D} , respectivamente.

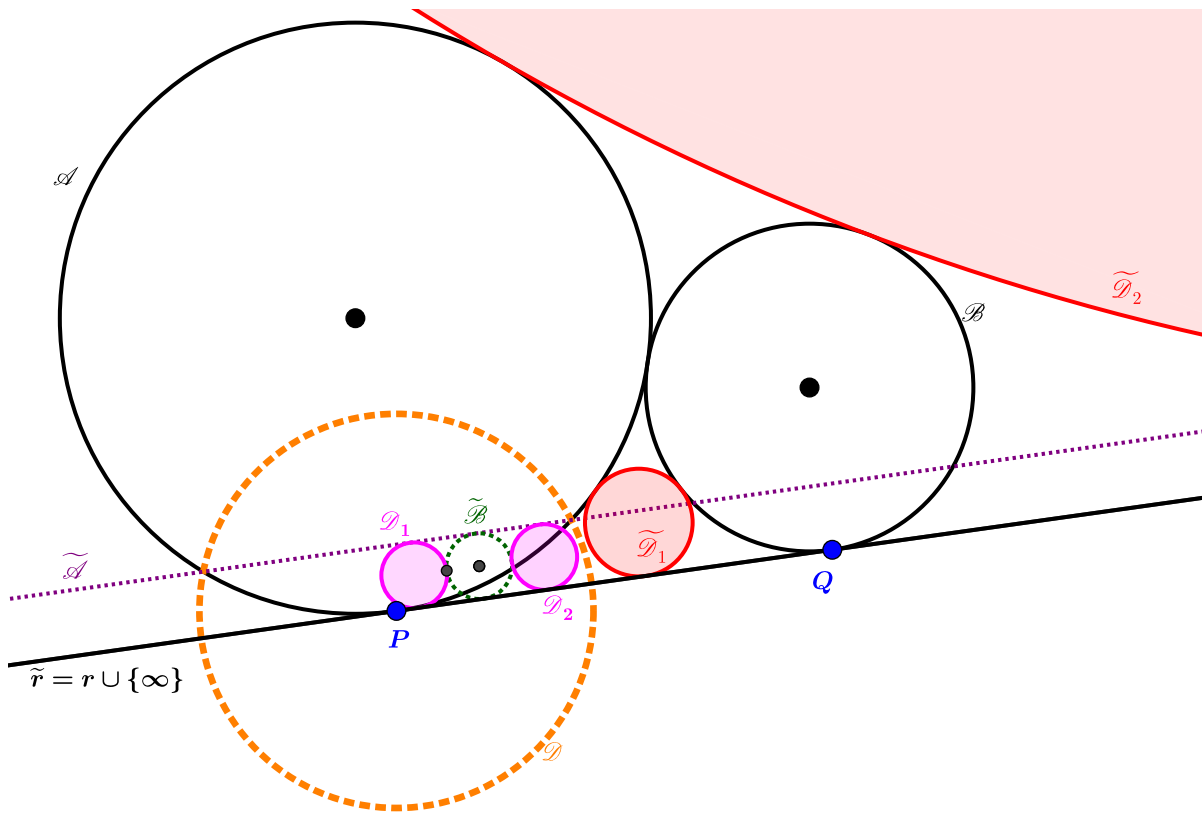


Figura 3.19: Circunferências soluções do Problema 3, via inversão.

Afirmção: $\widetilde{\mathcal{D}}_1$ e $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ são as soluções do problema.

Justificativa: \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 são, circunferências distintas que não passam por P , portanto $\widetilde{\mathcal{D}}_1$ e $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ são também circunferências distintas que não passam por P , conforme [Proposição 2.8](#). Além disso, \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 foram construídos tangentes a $\widetilde{\mathcal{A}}$, r e $\widetilde{\mathcal{B}}$, e como a condição de tangência é preservada por $i_{\mathcal{D}}$, segue que $\widetilde{\mathcal{D}}_1$ e $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ são circunferências tangentes a \mathcal{A} , r e \mathcal{B} , como queríamos demonstrar.

3.2 O Teorema de Ptolomeu

Ptolomeu (Cláudio Ptolomeu, Ptolimaeus, Klaudios Ptolemaios, Ptolomeu) viveu em Alexandria, Egito, tendo papel importante na história da Astronomia e Geografia. Pouco se sabe sobre sua vida, incluindo suas datas de nascimento e morte. Estima-se que Ptolomeu nasceu por volta do ano 85 no Egito e morreu, aproximadamente, no ano 165 em Alexandria. Diante disso, várias fontes relatam diferentes anos para a realização de suas observações, sendo a primeira data em 26 de março do ano 127 e a última, em 2 de fevereiro do ano 141.

Reconhecido como um dos mais influentes astrônomos gregos e geógrafos de seu tempo, Ptolomeu propôs a teoria geocêntrica de uma forma que prevaleceu durante 1400 anos.

Elegante, compacto e de influência científica rara, o Tratado de Ptolomeu, composto por treze livros, teve como base os escritos de Hiparco de Nicéia. Esse Tratado é considerado a maior referência em astronomia daquele tempo, e manteve-se um trabalho modelo até os tempos de Copérnico (1473 – 1543) e Kepler (1571 – 1630). Seu título original é *Mathematike Syntaxis*, e por se destacar das outras obras sobre astronomia de sua época, o Tratado ganhou o status de *magiste (omaior)*. Posteriormente, por influência de tradutores árabes, recebeu o prefixo *al* resultando em sua nomenclatura mais popular: *Almagesto* [2].

O teorema, conhecido como Teorema de Ptolomeu está presente no Livro I de seu Tratado. Segundo [2], o livro I contém, em meio a algum material astronômico preliminar, a tábua de cordas de Ptolomeu (essencialmente, essa tábua fornece o seno dos ângulos de 0° a 90° , com incrementos de $15'$), acompanhada de uma explanação sucinta da maneira como ela foi obtida a partir da fértil proposição geométrica conhecida como Teorema de Ptolomeu: Num quadrilátero cíclico, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos dois pares de lados opostos.

Logo abaixo apresentamos na [Fig. 3.20](#) um fragmento retirado do Livro *Claudius Ptolemaeus, Almagestum*, uma tradução de *Almagesto* para o latim, datado de 1515. Nela, pode-se observar um quadrilátero inscrito em uma circunferência, suas diagonais e um segmento suporte. Este segmento é utilizado para a demonstração do teorema, por meio da semelhança de triângulos pela Geometria

Euclidiana Plana.

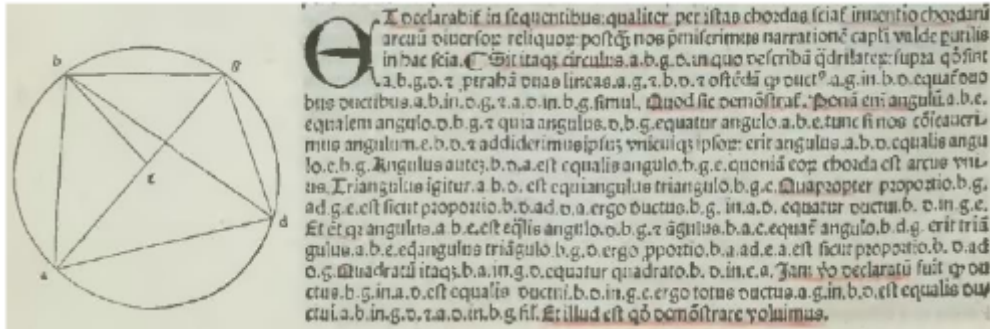


Figura 3.20: Fragmento do Livro Claudius Ptolemaeus, Almagestum, 1515.

Na sequência enunciamos o Teorema de Ptolomeu numa versão mais moderna e apresentamos duas de suas demonstrações envolvendo técnicas distintas, a segunda delas tem como base a Fig. 3.20.

Teorema 3.1: Teorema de Ptolomeu

Em um quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência \mathcal{C} , a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos é igual ao produto dos comprimentos das diagonais, ou seja, $[d(A, B) \cdot d(C, D)] + [d(B, C) \cdot d(A, D)] = d(A, C) \cdot d(B, D)$.

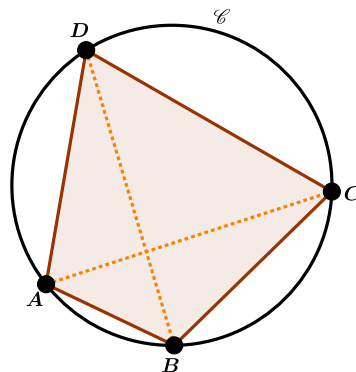


Figura 3.21: Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência \mathcal{C} .

Abaixo serão apresentadas duas demonstrações do Teorema de Ptolomeu: a primeira delas usando a inversão numa circunferência e a segunda usando argumentos de Geometria Euclidiana Plana.

Demonstração (1): Via inversão numa circunferência

Seja \mathcal{K} uma circunferência de raio R que contém \mathcal{C} em seu interior, cujo centro é um dos vértices do quadrilátero $ABCD$ (suponhamos A , sem perda de generalidade).

Da [Proposição 2.7](#), temos que o inverso de \mathcal{C} (em relação à \mathcal{K}) é uma reta que não passa por A , a qual será denotada por s , veja [Fig. 2.6](#). Sejam \tilde{B} , \tilde{C} e \tilde{D} os pontos em s , inversos relativos a circunferência \mathcal{K} , dos pontos B , C e D , respectivamente, conforme [Fig. 3.22](#).

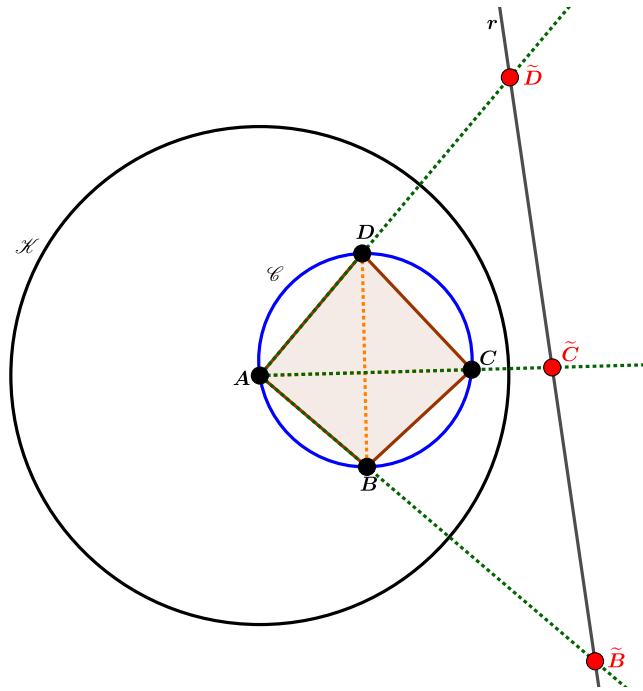


Figura 3.22: Suporte para a demonstração (1) do Teorema de Ptolomeu.

Segue então da [Proposição 2.10](#) que:

$$d(\tilde{B}, \tilde{C}) = \frac{R^2 \cdot d(B, C)}{d(A, B) \cdot d(A, C)}, \tag{3.7}$$

$$d(\tilde{C}, \tilde{D}) = \frac{R^2 \cdot d(C, D)}{d(A, C) \cdot d(A, D)}, \tag{3.8}$$

$$d(\tilde{B}, \tilde{D}) = \frac{R^2 \cdot d(B, D)}{d(A, B) \cdot d(A, D)}. \tag{3.9}$$

Além disso, sabe-se que \tilde{C} está entre \tilde{B} e \tilde{D} e portanto:

$$d(\tilde{B}, \tilde{C}) = d(\tilde{B}, \tilde{D}) - d(\tilde{C}, \tilde{D}).$$

Daí, substituindo (3.7), (3.8) e (3.9) na relação acima, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{R^2 \cdot d(B, C)}{d(A, B) \cdot d(A, C)} &= \frac{R^2 \cdot d(B, D)}{d(A, B) \cdot d(A, D)} - \frac{R^2 \cdot d(C, D)}{d(A, C) \cdot d(A, D)} \\ \Leftrightarrow \frac{R^2 \cdot d(B, C)}{d(A, B) \cdot d(A, C)} &= R^2 \cdot \left(\frac{d(B, D)}{d(A, B) \cdot d(A, D)} - \frac{d(C, D)}{d(A, C) \cdot d(A, D)} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{d(B, C)}{d(A, B) \cdot d(A, C)} &= \frac{d(B, D)}{d(A, B) \cdot d(A, D)} - \frac{d(C, D)}{d(A, C) \cdot d(A, D)} \\ \Leftrightarrow \frac{d(B, D)}{d(A, B) \cdot d(A, D)} &= \frac{d(B, C)}{d(A, B) \cdot d(A, C)} + \frac{d(C, D)}{d(A, C) \cdot d(A, D)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Agora, multiplicando (3.10) por $d(A, B) \cdot d(A, C) \cdot d(A, D)$ e simplificando, obtêm-se:

$$d(A, D) \cdot d(B, C) + d(A, B) \cdot d(C, D) = d(A, C) \cdot d(B, D), \text{ como queríamos demonstrar.}$$

■

Demonstração (2): Via semelhança de triângulos

Por construção, considere o ponto $P \in \overline{AC}$ e trace \overline{BP} , de forma que $m(\angle ABP) = m(\angle DBC)$.

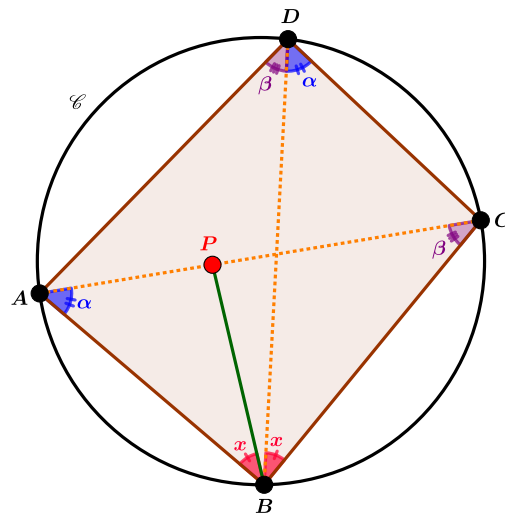


Figura 3.23: Suporte para a demonstração (2) do Teorema de Ptolomeu.

Como $\angle ADB \cong \angle ACB$ (ângulos inscritos em \mathcal{C} que subtende o mesmo arco \widehat{AB}), $\angle ACB = \angle PCB$ e $\angle ABD \cong \angle PBC$, segue pelo caso de semelhança Ângulo-Ângulo que $\triangle ABD \sim \triangle PBC$. E, então

$$\frac{d(P, C)}{d(A, D)} = \frac{d(B, C)}{d(B, D)} \Leftrightarrow d(P, C) \cdot d(B, D) = d(A, D) \cdot d(B, C). \quad (3.11)$$

Também, como $\angle BAC \cong \angle BDC$ (ângulos inscritos em \mathcal{C} que subentende o mesmo arco \widehat{BC}), $\angle BAC = \angle BAP$ e $\angle DBC \cong \angle ABP$ (por construção do ponto P), segue pelo caso de semelhança Ângulo-Ângulo que $\triangle ABP \sim \triangle DBC$. Consequentemente, têm-se:

$$\frac{d(A, P)}{d(C, D)} = \frac{d(A, B)}{d(B, D)} \Leftrightarrow d(A, P) \cdot d(B, D) = d(A, B) \cdot d(C, D). \quad (3.12)$$

Somando-se (3.11) e (3.12) segue que:

$$d(P, C) \cdot d(B, D) + d(A, P) \cdot d(B, D) = d(A, D) \cdot d(B, C) + d(A, B) \cdot d(C, D)$$

$$\Leftrightarrow d(B, D) \cdot [d(P, C) + d(A, P)] = d(A, D) \cdot d(B, C) + d(A, B) \cdot d(C, D)$$

$$\Leftrightarrow d(B, D) \cdot d(A, C) = d(A, D) \cdot d(B, C) + d(A, B) \cdot d(C, D), \text{ como queríamos demonstrar.}$$

Essa **Demonstração (2)** é uma releitura numa linguagem atual da demonstração que foi realizada por Ptolomeu. ■

3.3 A Fórmula de Euler

Leonhard Euler (1707-1783) foi um matemático suíço que descobriu que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo são colineares, ou seja, existe uma reta que passa por esses três pontos notáveis. De 1727 a 1783, Euler esteve ocupado aumentando os conhecimentos disponíveis em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, dos mais elementares aos mais avançados, desde métodos para resolução de problemas de cunho prático, a outros que sobressaiam às mentes mais curiosas. A seguir será apresentado e demonstrado o teorema de Euler que, em geometria, estabelece uma importante relação entre os raios das circunferências inscrita e circunscrita de um triângulo.

Teorema 3.2

Sejam r e R , respectivamente, os raios das circunferências inscritas e circunscritas de um triângulo DEF e d a distância entre seus centros. Então $d^2 = R^2 - 2Rr$, [6].

Demonstração:

Denote por O o incentro e por T o circuncentro do triângulo DEF . Sejam I, Q e P os pontos de tangência da circunferência inscrita \mathcal{C} com os respectivos lados $\overline{DF}, \overline{FE}, \overline{DE}$ do triângulo DEF e consideremos a inversão relativamente a \mathcal{C} . Os pontos I, Q, P , de acordo com a definição de inversão numa circunferência, são invariantes por esta inversão. Os pontos D, E e F são invertidos nos pontos \tilde{D}, \tilde{E} e \tilde{F} , respectivos pontos médios das cordas $\overline{IP}, \overline{PQ}$ e \overline{IQ} , conforme Fig. 3.24. Portanto da Proposição 2.8 segue que a imagem pela inversão com relação a \mathcal{C} da circunferência circunscrita ao triângulo DEF é a circunferência passando por \tilde{D}, \tilde{E} e \tilde{F} cujo raio é $\frac{r}{2}$. Assim, aplicando a Proposição 2.7 a pontos diametralmente opostos D e E da circunferência circunscrita obtemos $\frac{0,5r}{R} = \frac{r^2}{d(O,D) \cdot d(O,E)}$.

Usando então a Proposição 1.10 temos $d(O,D) \cdot d(O,E) = R^2 - d^2$ e segue que $d^2 = R^2 - 2Rr$.

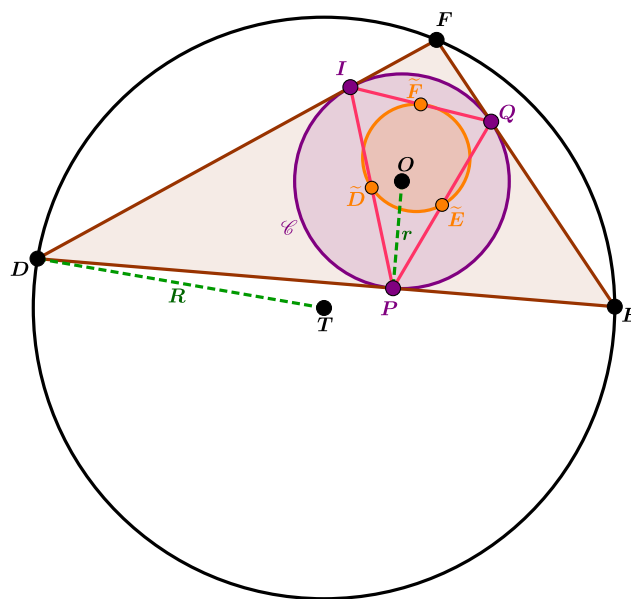


Figura 3.24: Suporte para a demonstração da Fórmula de Euler.

3.4 O Teorema de Feuerbach

Inicialmente foi-se atribuído a descoberta da circunferência dos nove pontos a Euler, porém ela apareceu antes, num artigo escrito por Poncelet e Brianchon, geômetras franceses, por volta de 1820. Mas foi Karl W. Feuerbach (1800 – 1834) que em 1822 publicou em seu livro propriedades desta circunferência, que neste ponto da história era chamada de circunferência de Feuerbach. A circunferência de Feuerbach de um triângulo tem uma relação extradionária com as quatro circunfe-

rências tritangentes ao triângulo (a circunferência inscrita e as três circunferências ex-inscritas) que será apresentada a seguir.

Definição 3.3: Circunferência de Feuerbach:

Seja ABC um triângulo com ortocentro H . A circunferência de nove pontos ou circunferência de Feuerbach relativa ao triângulo ABC é uma circunferência que contém os pontos médios dos lados do triângulo, os pés das alturas relativas a cada um dos lados desse triângulo e os pontos médios dos segmentos que ligam H a cada um dos vértices do triângulo ABC .

Teorema 3.4

Seja \mathcal{F} a circunferência de Feuerbach relativa ao triângulo ABC . Sejam \mathcal{V} , \mathcal{R} e \mathcal{T} as circunferências ex-inscritas ao triângulo ABC e \mathcal{C} a circunferência inscrita ao mesmo triângulo. Então, \mathcal{F} é tangente a cada uma destas circunferências, [6].

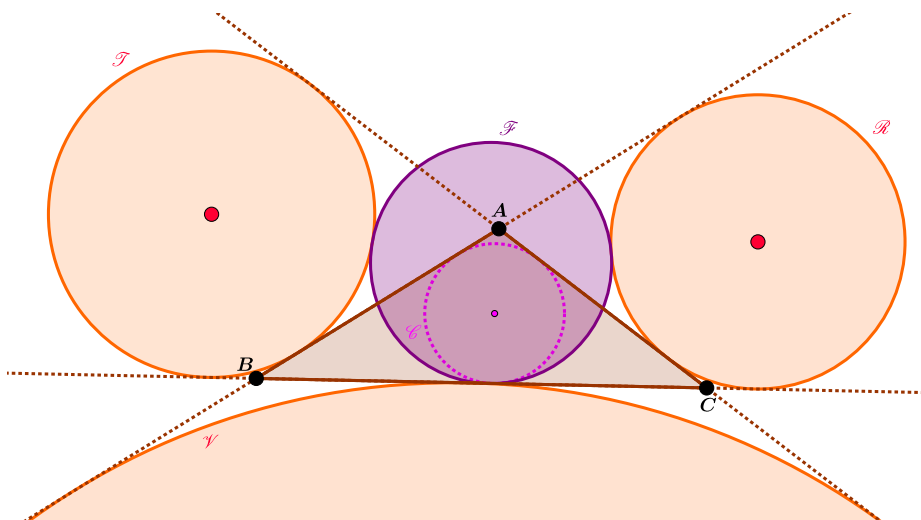


Figura 3.25: Ilustração do Teorema de Feuerbach.

Demonstração:

Sejam V o pé da altura relativa ao vértice B , M o ponto médio do lado \overline{AC} do triângulo ABC , X o ponto de tangência da circunferência \mathcal{C} inscrita ao triângulo ABC com o lado \overline{AC} , G o ponto de tangência da circunferência \mathcal{R} ex-inscrita ao triângulo ABC relativa ao lado \overline{AC} com o lado \overline{AC} , Z o incentro do triângulo ABC e L o centro de \mathcal{R} , conforme Fig. 3.27. Observe que M é também o ponto médio do segmento XG . Seja então \mathcal{D} a circunferência de centro M e raio $d(X, M)$.

Observe agora que \mathcal{D} é simultaneamente perpendicular às circunferências \mathcal{C} e \mathcal{R} . Portanto, pela Proposição 2.15, essas circunferências permanecem invariantes pela inversão com relação à \mathcal{D} . Mais ainda, como a reta definida por X e G contém o polo de inversão, de acordo com a Proposição 2.5,

ela também permanece invariante pela inversão com relação a \mathcal{D} .

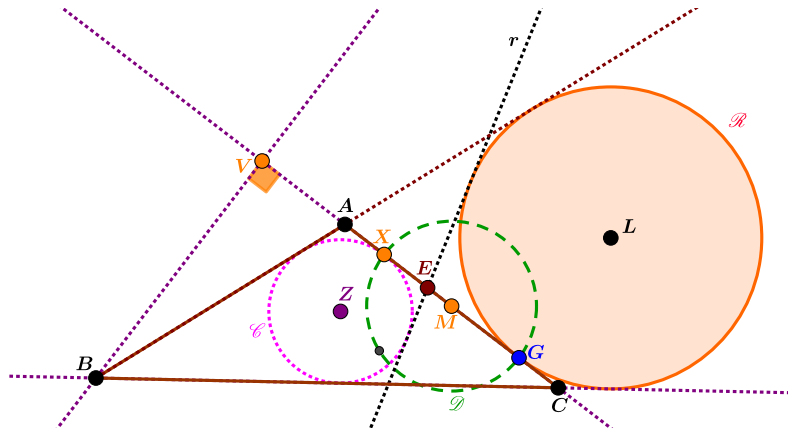


Figura 3.26: Suporte para a demonstração do Teorema de Feuerbach.

Agora da semelhança dos triângulos ZXV e LGV e dos triângulos ZXE e LGE segue que V e E são conjugados harmônicos com relação a X e G . Dessa forma, de acordo com a Proposição 2.9, E é o inverso de V com relação a \mathcal{D} .

A circunferência de nove pontos \mathcal{F} , por definição, contém o ponto M e o ponto V . Assim, invertê-la com relação à circunferência \mathcal{D} , resultará, de acordo com o Proposição 2.7 em uma reta $\tilde{\mathcal{F}}$ passando por E , já que E é o inverso de V com relação a \mathcal{D} . Mais ainda, da Proposição 2.7, a reta tangente a \mathcal{F} no ponto M é paralela a $\tilde{\mathcal{F}}$. Portanto, segue que $\tilde{\mathcal{F}}$ coincide com a reta passando por E simultaneamente tangente às circunferências inscrita \mathcal{C} e ex-inscrita \mathcal{R} . Assim sendo, visto que $\tilde{\mathcal{F}}$ é tangente a \mathcal{C} e \mathcal{R} , segue da Proposição 2.13 que o mesmo ocorre com \mathcal{F} , ou seja \mathcal{F} é tangente às circunferências inscrita \mathcal{C} e ex-inscrita \mathcal{R} . De forma análoga, prova-se a tangência entre \mathcal{F} e as demais circunferências ex-inscritas ao triângulo ABC .

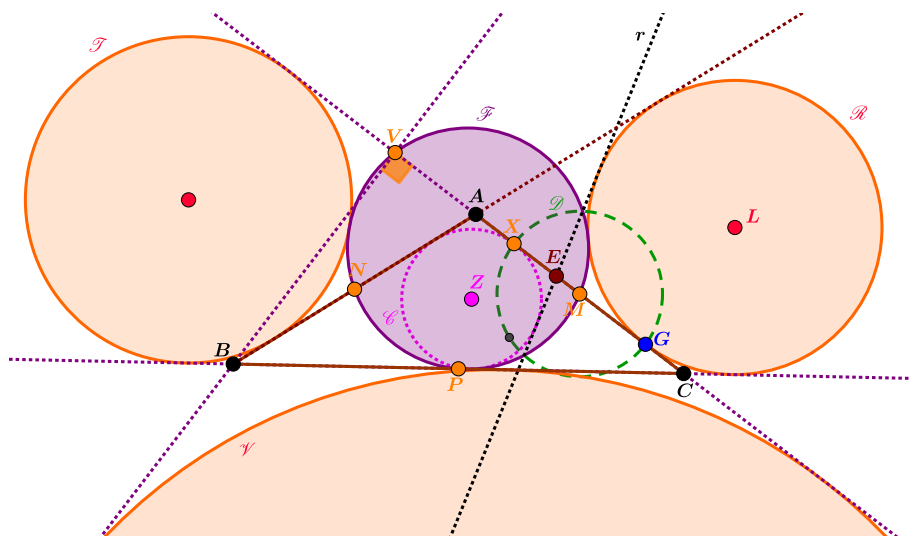


Figura 3.27: Ilustração dos elementos utilizados na demonstração do Teorema de Feuerbach.



3.5 Hipérbole e um problema de construção de triângulo

O objetivo dessa seção é apresentar uma aplicação da inversão geométrica relacionada com uma hipérbole. Começamos lembrando a definição usual dessa cônica que aparece nos livros de Geometria Analítica.

Definição 3.5: Hipérbole

Um hipérbole \mathcal{H} de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$.

$$\mathcal{H} = \{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}, \quad 0 < a < c, \quad d(F_1, F_2) = 2c, \quad [1].$$

Para o nosso trabalho, vamos utilizar a definição equivalente que se encontra em [6].

Definição 3.6: Hipérbole

Sejam \mathcal{D} uma circunferência e F um ponto exterior à \mathcal{D} . Uma hipérbole $\mathcal{H} = (F, \mathcal{D})$ é o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por F e são tangentes à \mathcal{D} .

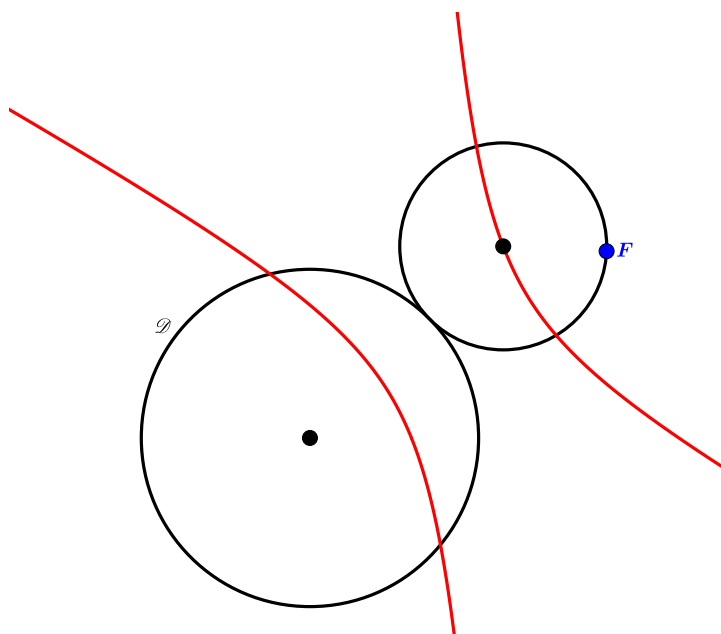


Figura 3.28: Hipérbole com os dados da Definição 3.6.

Vamos mostrar agora que a Definição 3.5 e a Definição 3.6 são equivalentes, tomando $F_1 = F$, $F_2 = O$ (centro da circunferência \mathcal{D}) e $2a = r$ (raio de \mathcal{D}).

De fato, de acordo com a [Proposição 1.5](#), P é o centro de uma circunferência \mathcal{C} de raio s tangente (exteriormente ou interiormente) à circunferência \mathcal{D} de raio r se, e somente se,

i) $d(O, P) = r + s$ ou $d(O, P) = |r - s|$.

Além disso, como \mathcal{C} passa por F , devemos ter:

ii) $d(P, F) = s$.

Também, a hipótese F é exterior a \mathcal{D} impõe, no caso de \mathcal{C} ser tangente interiormente a \mathcal{D} , a condição:

iii) $s > r$.

Assim, usando i), ii) e iii), temos: P é o centro de uma circunferência que passa por F e é tangente a \mathcal{D} sendo F exterior a \mathcal{D} se, e somente se, $d(O, P) = r + d(P, F)$ ou $d(O, P) = d(P, F) - r$ se, e somente se, $|d(O, P) - d(P, F)| = r$, ou seja, a [Definição 3.5](#) e a [Definição 3.6](#) são equivalentes.

A seguir, apresentaremos a construção de uma hipérbole que se encontra em [1] e pode ser implementada no GeoGebra utilizando o recurso lugar geométrico (veja [Apêndice C](#), para uma introdução ao software GeoGebra).

Construção no GeoGebra: Hipérbole de focos F_1 e F_2

- i) Escolha dois pontos F_1 e F_2 e trace a semirreta r de origem F_1 passando por F_2 ;
- ii) Escolha um ponto A na semirreta r entre F_1 e F_2 ;
- iii) Trace a circunferência \mathcal{C} de centro F_1 que passa pelo ponto A ;
- iv) Escolha um ponto B que pertença à circunferência \mathcal{C} e que seja diferente de A ;
- v) Trace a reta s que passa por F_1 e B ;
- vi) Trace a mediatriz m do segmento BF_2 ;
- vii) Determine o ponto P de intersecção da reta s com a mediatriz m ;
- viii) construa o lugar geométrico do ponto P , quando o ponto B move-se ao longo da circunferência \mathcal{C} .

Afirmção: O ponto P descreve a hipérbole de focos F_1 e F_2 com comprimento do eixo focal igual ao raio de \mathcal{C} , quando o ponto B se move ao longo da circunferência \mathcal{C} .

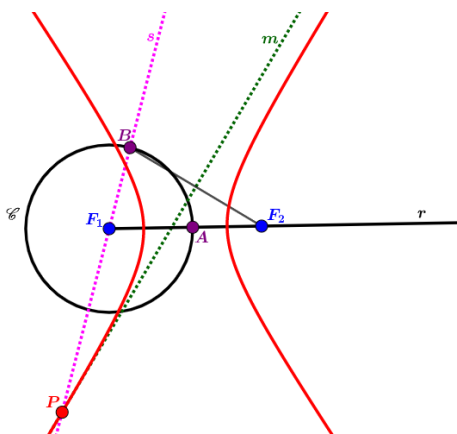


Figura 3.29: Hipérbole de focos F_1 e F_2 .

Justificativa: Como o ponto P pertence a mediatriz do segmento BF_2 , então $d(P,B) = d(P,F_2)$. Sendo $2a$ o raio da circunferência \mathcal{C} , temos que $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = |d(P,B) \pm d(B,F_1) - d(P,F_2)| = |\pm d(B,F_1)| = |\pm 2a| = 2a$. Logo, P pertence à hipérbole de focos F_1 e F_2 e eixo focal de comprimento $2a$.

O objetivo agora é apresentar a solução de um belo problema devido à Johann Muller (Regiomontanus) (1436-1476) extraído de [4].

Antes porém, precisamos construir os dois pontos de intersecção de uma reta s com uma hipérbole $\mathcal{H} = (F, \mathcal{D})$. É claro que a existência desses dois pontos de intersecção impõe algumas condições restritivas aos elementos dados s , F e \mathcal{D} . Em linguagem de circunferências, temos de solucionar o seguinte problema de construção geométrica.

Problema A: Construção geométrica dos pontos de intersecção de uma hipérbole com uma reta

Dados uma reta s , uma circunferência \mathcal{D} , um ponto F exterior a \mathcal{D} tal que $F \notin s$, construir (com régua e compasso) caso existam, os dois pontos de intersecção O_1 e O_2 da hipérbole $\mathcal{H} = (F, \mathcal{D})$ com a reta s , um em cada ramo da hipérbole.

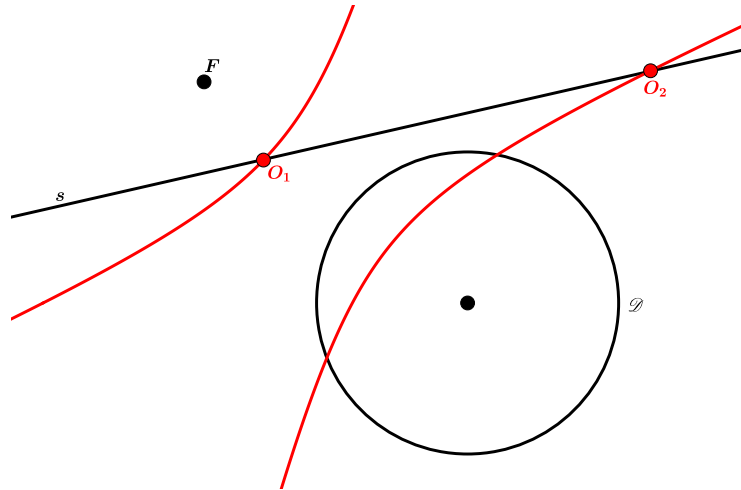


Figura 3.30: Visualizando os dados e as soluções do problema A.

Solução: Usando a [Definição 3.6](#) de hipérbole, deduzimos que os pontos O_1 e O_2 caso existam, são os pontos em s que são centros das circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 que passam por F e são tangentes a \mathcal{D} , digamos \mathcal{C}_1 tangente exteriormente e \mathcal{C}_2 tangente interiormente.

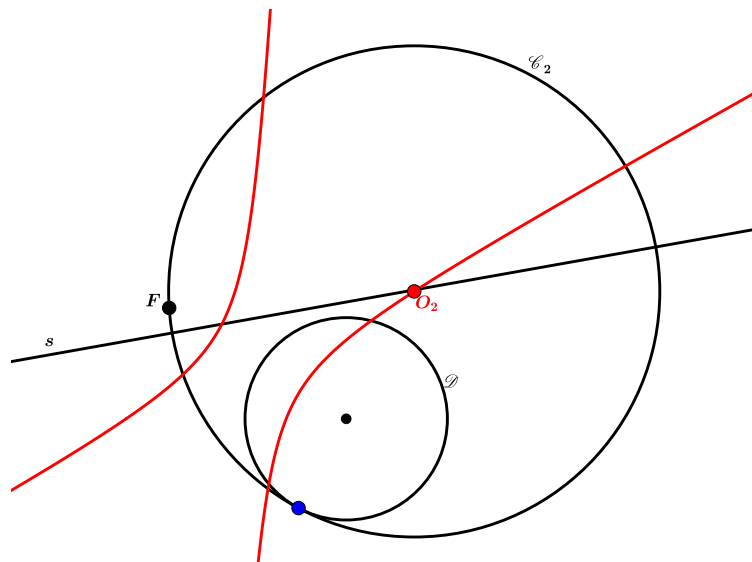


Figura 3.31: Visualizando as soluções do problema A no contexto da [Definição 3.6](#) de hipérbole.

Utilizando a inversão geométrica, apresentamos na sequência os passos da construção que solucionam o problema A.

- i) Construa uma circunferência de inversão \mathcal{A} com centro em F .
- ii) Construa \tilde{s} , a inversa da reta s em relação a \mathcal{A} . É claro, da [Proposição 2.6](#) que \tilde{s} é uma circunferência que passa por F .
- iii) Construa $\tilde{\mathcal{D}}$, a inversa da circunferência \mathcal{D} em relação a \mathcal{A} . A [Proposição 2.8](#) afirma que $\tilde{\mathcal{D}}$ é uma circunferência que não passa por F . E, é claro que $\tilde{\mathcal{D}} \cap \tilde{s} = \emptyset$ pois $\mathcal{D} \cap s = \emptyset$.

- iv) Construa as duas retas u e t que passam pelo centro de \tilde{s} e são tangentes a $\tilde{\mathcal{D}}$, conforme construção C dada na seção 1.2 do capítulo 1. (Aqui precisamos impor a condição restritiva: centro de \tilde{s} exterior a $\tilde{\mathcal{D}}$).
- v) Construa as respectivas inversas \tilde{u} e \tilde{t} de u e t relativas a \mathcal{A} . A Proposição 2.6 garante que \tilde{u} e \tilde{t} são circunferências que passam por F .
- vi) Construa os centros O_1 e O_2 de \tilde{u} e \tilde{t} , respectivamente.

Afirmção: O_1 e O_2 são as soluções do Problema A.

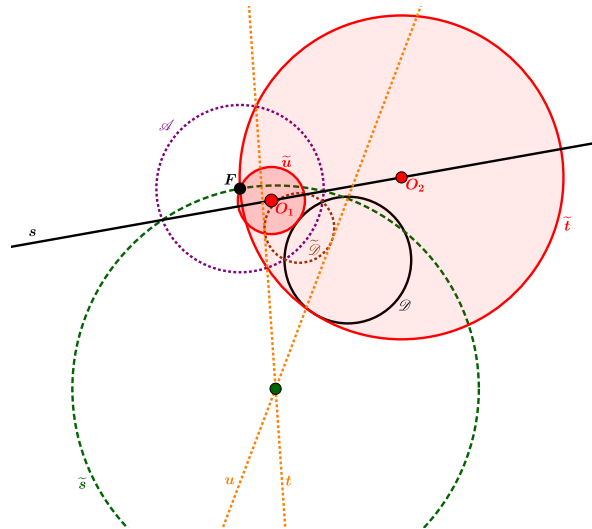


Figura 3.32: Solução do Problema A via inversão geométrica.

Justificativa: Do passo v), \tilde{u} e \tilde{t} são circunferências que passam por F . Do passo iv) u e t são tangentes a $\tilde{\mathcal{D}}$ e isso implica que \tilde{u} e \tilde{t} são tangentes a \mathcal{D} , pois a condição de tangência é preservada pela inversão. Segue então, da Definição 3.6 de hipérbole, que os respectivos centros O_1 e O_2 de \tilde{u} e \tilde{t} pertencem a hipérbole $\mathcal{H} = (F, \mathcal{D})$.

Além disso, como u e t são ortogonais a $\tilde{\mathcal{D}}$ e passam pelo centro da circunferência \tilde{s} segue da Proposição 2.12, que \tilde{u} e \tilde{t} são ortogonais a s e portanto seus respectivos centros O_1 e O_2 pertencem a s .

Conclusão: O_1 e O_2 são os dois pontos de intersecção da hipérbole $\mathcal{H} = (F, \mathcal{D})$ com a reta s .

Observação: A condição de existência de O_1 e O_2 é que o centro de \tilde{s} seja exterior a $\tilde{\mathcal{D}}$.

O problema de Regiomontanus que vamos apresentar consiste em fazer o trajeto no sentido inverso do seguinte resultado de Geometria Plana.

Proposição 3.7

Considere um triângulo ABC com $d(B, C) = a$ e $d(A, C) = b$, onde supomos $a > b$. Sejam $d(C, H) = h$ a altura relativa ao lado \overline{AB} , $d(A, H) = n$ e $d(B, H) = m$, onde H é o pé da perpendicular traçada de C à reta que passa por A e B . Então, $m > n$ e $a - b < m - n$.

Demonstração:

Temos três situações a considerar:

- i) O ângulo $\angle BAC$ é reto.
- ii) O ângulo $\angle BAC$ é obtuso.
- iii) O ângulo $\angle BAC$ é agudo.

- Supondo a situação i):

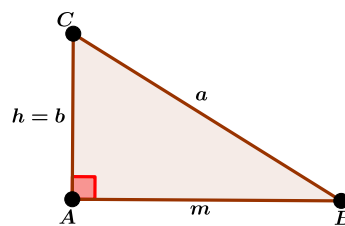


Figura 3.33: Visualizando os dados da [Proposição 3.7](#) para um triângulo ABC retângulo em A .

Têm-se:

$b = h$, $n = 0$ e então $m > 0 (= n)$. E, a desigualdade triangular junto com $m > 0$ diz que

$$a < b + m \Leftrightarrow a - b < m (= m - n).$$

- Supondo a situação ii):

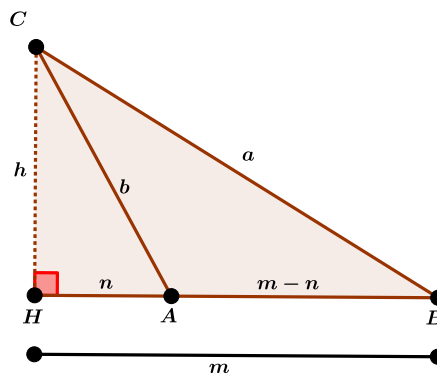


Figura 3.34: Visualizando os dados da [Proposição 3.7](#) para um triângulo ABC obtusângulo em A .

Têm-se:

$m = d(A, H) + d(A, B) = n + d(A, B)$ com $d(A, B) \neq 0 \Rightarrow m > n$. E a desigualdade triangular nos diz que $a < b + (m - n) \Leftrightarrow a - b < m - n$.

• Supondo a situação iii):

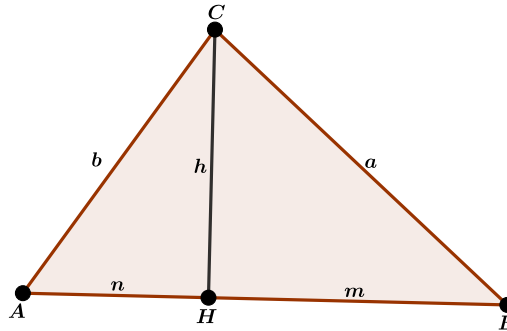


Figura 3.35: Visualizando os dados da [Proposição 3.7](#) para um triângulo ABC acutângulo em A.

Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ACH e HCB têm-se:

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + m^2 \\ b^2 = h^2 + n^2. \end{cases}$$

Do sistema acima, obtêm-se:

$$a^2 - b^2 = m^2 - n^2. \quad (3.13)$$

Por outro lado,

$$a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2 > 0. \quad (3.14)$$

De (3.13) e (3.14) segue que $m^2 - n^2 > 0 \Rightarrow m > n$, visto que $m > 0$ e $n > 0$.

Também lembrando que o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que o comprimento de seus catetos, têm-se:

$$a > m, b > n \Rightarrow a + b > m + n. \quad (3.15)$$

Assim, de (3.13) e (3.15) segue que: $(a-b)(a+b) = (m+n)(m-n) \Rightarrow (m+n)(m-n) > (a-b)(m+n) \Rightarrow m-n > a-b$. E isso finaliza a demonstração. ■

Problema de Regiomontanus: Dados três números reais positivo x, y, z , com $x < y$, construir

com régua e compasso, um triângulo como o da situação iii) da [Proposição 3.7](#) tal que, $x = a - b$, $y = m - n$ e $z = h$.

Solução: Seguem os passos da construção.

- i) Construa um segmento \overline{FB} de comprimento y .
- ii) Construa uma reta r paralela ao segmento \overline{FB} e a uma distância z da reta suporte s que contém \overline{FB} .
- iii) Construa a circunferência \mathcal{D} de centro B e raio x .
- iv) Construa o ponto C de intersecção da hipérbole $\mathcal{H} = (F, \mathcal{D})$ com a reta r , conforme construção descrita na solução do Problema A, de tal forma que C seja o centro em r da circunferência tangente exteriormente a \mathcal{D} .
- v) Denote por H o pé da perpendicular traçada de C à reta s .
- vi) Construa a circunferência \mathcal{L} de centro C e raio \overline{CF} . Denote por A o outro ponto de intersecção de s com \mathcal{L} .

Afirmção: O triângulo ABC satisfaz as condições estabelecidas.

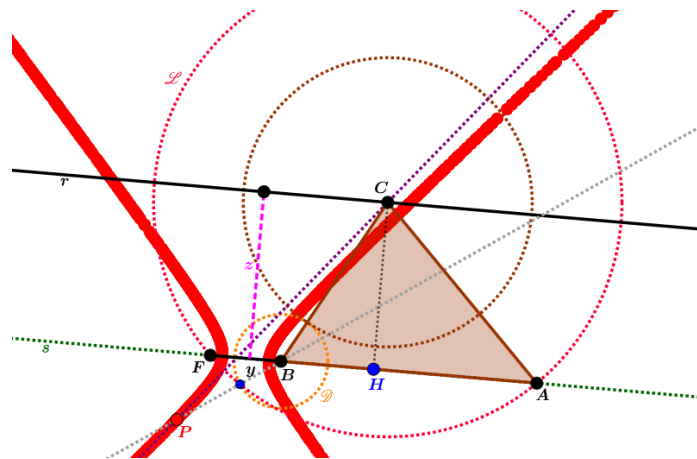


Figura 3.36: Construção da solução do problema de Regiomontanus.

Justificativa: Precisamos verificar apenas que:

- 1. $x = a - b = d(B, C) - d(A, C)$,
- 2. $y = m - n = d(B, H) - d(A, H)$.

Da construção realizada, $C \in \mathcal{H} = (F, \mathcal{D})$ e então, $d(B, C) - d(F, C) = x = a - b$. Além disso, o ponto A foi construído satisfazendo $d(A, C) = d(C, F)$. Portanto temos que a expressão que se encontra em 1 se verifica. Também da construção feita, temos $d(A, H) = d(H, F)$ e então $d(B, H) - d(A, H) = d(B, F) + d(F, H) - d(A, H) = d(B, F) = m - n$, e isso finaliza a justificativa.

Conclusões

A inversão geométrica é uma técnica importante na solução de problemas de Geometria, principalmente aqueles relacionados a construção geométrica de problemas de tangência, permite converter problemas aparentemente complicados em problemas análogos, mas com soluções mais simples. Por exemplo, permite resolver o elegante Teorema de Feuerbach (Seja \mathcal{F} a circunferência de nove pontos relativa ao triângulo ABC . Sejam \mathcal{V} , \mathcal{R} e \mathcal{T} as circunferências ex-inscritas ao triângulo ABC e \mathcal{C} a circunferência inscrita ao mesmo triângulo. Então, \mathcal{F} é tangente a cada uma destas circunferências) e o problema dos três círculos de Apolônio (dados três círculos, traçar um círculo que seja simultaneamente tangente aos outros três dados). Neste trabalho foram estudados três subcasos do Problema de Apolônio e outras aplicações, como as demonstrações da Fórmula de Euler e do Teorema de Ptolomeu, que são usualmente resolvidos com argumentos de Geometria Analítica ou Desenho Geométrico, que podem ser remanejados para seu “mundo inverso equivalente”, onde a resolução dos mesmos se mostra fácil e, então pela propriedade involutiva da aplicação inversão resgata-se a solução do problema original.

Na dissertação estudamos as propriedades da Inversão geométrica. Uma propriedade importante dessa transformação é a preservação dos valores dos ângulos transformados por ela. Por exemplo, dadas duas retas r e s concorrentes em P , denotando por \tilde{r} , \tilde{s} e \tilde{P} os inversos de r , s e P , respectivamente, em relação a uma circunferência \mathcal{D} , teremos que \tilde{r} e \tilde{s} se interceptam em \tilde{P} fazendo o mesmo ângulo que o de r e s .

A fim de explorar as propriedades da inversão e auxiliar nas construções, fizemos uso do software de Geometria Dinâmica GeoGebra. Este ambiente possui um caráter interativo e exploratório que permitem revelar aspectos novos e até mesmo inesperados através da manipulação das figuras geométricas construídas. Acreditamos que descobrir e construir a Geometria Inversiva com o auxílio da Geometria Dinâmica é um caminho instigante que leva ao desenvolvimento de habilidades de visualização, desenho e argumentação lógica, além de contribuir para interiorização dos conceitos aprendidos e estimular a formulação de conjecturas.

A dissertação consiste de um texto, bem fundamentado, rico em ilustrações, que pretende contribuir para um melhor entendimento dos aspectos matemáticos teóricos e geométricos das inversões e, facilitar a compreensão de alguns aspectos aplicados das mesmas. Esperamos que o texto desenvolvido sirva como ponto de partida para todos os estudantes que pretendam aprofundar seus estudos em Geometria.

Além disso, mais importante do que a resolução dos problemas, foram os caminhos percorridos para encontrá-lo. Nesse processo, foram retomados fatos históricos sobre a matemática, especificamente a geometria, além das teorias sobre a resolução do problema de Apolônio, considerando os anos de trabalhos de vários matemáticos. É importante mencionar, que a resolução de problemas de construções geométricas traz um importante desenvolvimento do raciocínio lógico. Além disso, o uso de um software de geometria dinâmica, como o GeoGebra, facilitou a visualização e a consolidação de métodos de construção, pois possui a inversão como uma de suas ferramentas padrão, o que facilitou resolver os problemas no plano Inversivo.

Acreditamos que o caminho para o aprendizado passa obrigatoriamente pela compreensão e exploração de conceitos, assim, este trabalho possibilitou o desenvolvimento crítico e investigativo, fomentando e perpetuando a busca por novos conhecimentos. Frente ao contexto mencionado, podemos afirmar que, esta dissertação é um estudo contextualizado sobre as possíveis potencialidades da geometria inversiva, de modo a disponibilizar aos leitores a fundamentação dessa ferramenta que é de suma importância na resolução de problemas de Geometria.

Construção da média geométrica entre dois segmentos

Abaixo os passos para a construção da média geométrica entre dois segmentos de comprimentos a e b dados.

- i) Transporte sobre uma semirreta AY o segmento \overline{AB} de comprimento a e depois o segmento \overline{BD} de comprimento b , como na figura [Fig. A.1](#).
- ii) Construa o ponto médio M do segmento \overline{AD} .
- iii) Construa uma circunferência \mathcal{C} de centro M e diâmetro \overline{AD} .
- iv) Trace a reta perpendicular ao diâmetro \overline{AD} passando pelo ponto B .
- v) Seja o ponto P uma das intersecções da reta perpendicular construída no passo anterior com a circunferência \mathcal{C} .
- vi) Construa o segmento \overline{PB} .

Afirmção: O segmento \overline{PB} é a média geométrica (ou média proporcional) entre os segmentos \overline{AB} e \overline{BD} .

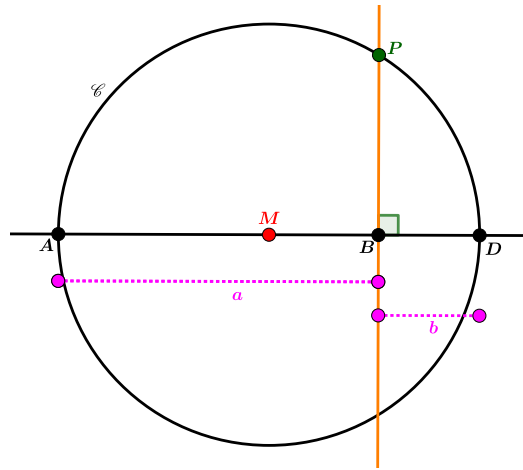


Figura A.1: Construção com régua e compasso da média geométrica entre dois segmentos dados.

Justificativa: Segue da semelhança entre os triângulos PBD e ABP que: $\frac{d(B,D)}{d(P,B)} = \frac{d(P,B)}{d(A,B)}$.

E então, $d(P,B)^2 = d(A,B) \cdot d(B,D) = a \cdot b$. Ou seja, \overline{PB} é a média geométrica entre os segmentos de comprimentos a e b .

Caracterização de uma das circunferências tangentes, solução do Problema 3

Dados uma reta r , pontos $P, Q \in r$, \mathcal{A} e \mathcal{B} circunferências tangentes entre si e à reta r em P e Q , cujos raios são k_1 e k_2 com $k_1 > k_2$, mostrar que a circunferência \mathcal{C} tangente a r , \mathcal{A} e \mathcal{B} , conforme Fig. B.1, é a circunferência de raio k tangente a r no ponto H , onde k satisfaz a relação $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}}$ e H é tal que $d(Q, H) = \frac{d(P, Q)\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}$.

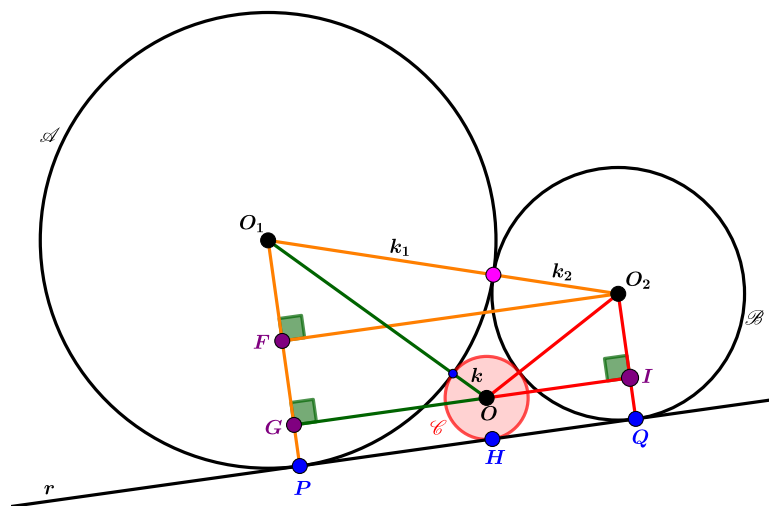


Figura B.1: Estabelecendo os dados do Problema do apêndice B.

Demonstração:

Sejam O_1 e O_2 os centros de \mathcal{A} e \mathcal{B} , respectivamente e, O o centro de \mathcal{C} . Construa também os pontos F , G e I , conforme Fig. B.1. Dessa forma têm-se $d(O_1, F) = k_1 - k_2$ e $d(O_1, G) = k_1 - k$. E, considere três triângulos retângulos esboçados nessa figura.

i) Triângulo O_1O_2F , do qual segue que:

$$[d(F, O_2)]^2 + [d(F, O_1)]^2 = [d(O_1, O_2)]^2 \Rightarrow [d(F, O_2)]^2 = (k_1 + k_2)^2 - (k_1 - k_2)^2 \Rightarrow d(F, O_2) = 2\sqrt{k_1k_2}.$$

ii) Triângulo O_1OG , do qual segue que:

$$[d(G, O)]^2 + [d(G, O_1)]^2 = [d(O_1, O)]^2 \Rightarrow [d(G, O)]^2 = (k_1 + k)^2 - (k_1 - k)^2 \Rightarrow d(G, O) = 2\sqrt{k_1k}.$$

iii) Triângulo O_2OI , do qual segue que:

$$\begin{aligned} [d(I, O)]^2 + [d(I, O_2)]^2 &= [d(O_2, O)]^2 \Rightarrow [d(I, O)]^2 = [d(O_2, O)]^2 - [d(I, O_2)]^2 \\ \Rightarrow [d(F, O_2) - d(G, O)]^2 &= (k_2 + k)^2 - (k_2 - k)^2 = 4k_2k. \end{aligned}$$

De i), ii) e iii) obtemos:

$$(2\sqrt{k_1k_2} - 2\sqrt{k_1k}) = 2\sqrt{k_2k}.$$

Dividindo essa expressão por $2\sqrt{k_1k_2k}$ obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k_2}} = \frac{1}{\sqrt{k_1}}.$$

Além disso, também temos:

$$d(P, H) = d(G, O) = 2\sqrt{k_1k},$$

$$d(Q, H) = d(I, O) = 2\sqrt{k_2k}. \tag{B.1}$$

Então:

$$d(P, Q) = d(P, H) + d(Q, H) = 2\sqrt{k}(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}) \Rightarrow \sqrt{k} = \frac{d(P, Q)}{2(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})}. \tag{B.2}$$

Substituindo (B.2) em (B.1) obtemos $d(Q, H) = \frac{d(P, Q)\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}$ e isso finaliza a demonstração. ■

Introdução ao GeoGebra

O uso das tecnologias na matemática tem se tornado, cada vez mais, fundamental e indispensável no processo de ensino e aprendizagem, agregando dinamismo aos conteúdos abordados. Nesse sentido, o software GeoGebra é uma ferramenta vantajosa e abrangente no desenvolvimento de conteúdos matemáticos, permitindo que construções realizadas possam ser manipuladas e visualizadas de forma interativa. Há a opção de utilizar esse software de forma online na página <https://www.geogebra.org/classic> ou instalado no computador através do site <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>. Ao longo dos anos, desde a sua criação, ele vêm sendo atualizado e aprimorado com funções mais tecnológicas e eficientes. Há diversos cursos e tutoriais disponibilizados na página do Instituto São Paulo GeoGebra para a correta utilização e exploração de suas ferramentas. A interface inicial do software GeoGebra se encontra na [Fig. C.1](#), onde podem ser visualizadas as suas principais funções.

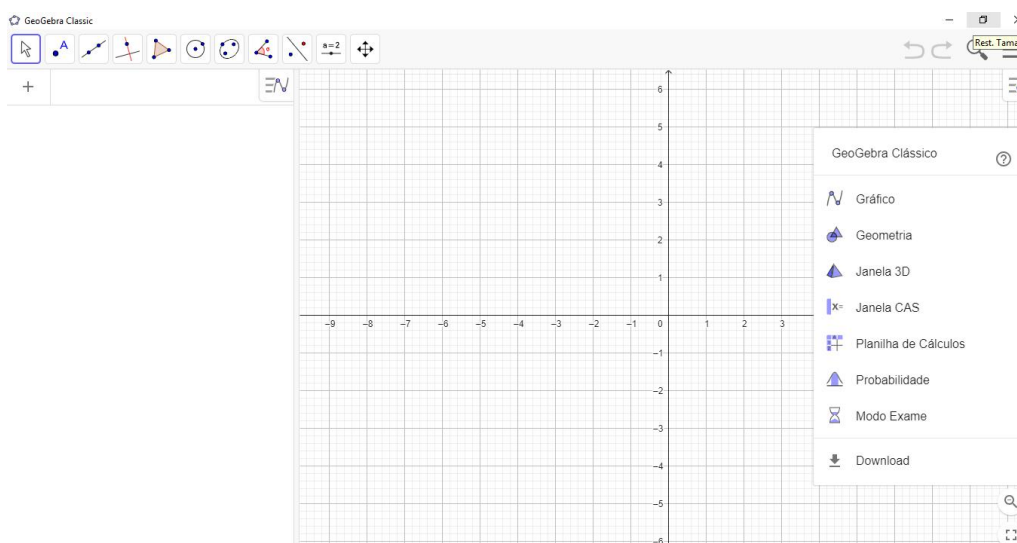


Figura C.1: Interface inicial do GeoGebra.

São muitas as ferramentas e funções do domínio da matemática que esse software permite realizar. Nesta seção vamos explorar a disposição Geometria, suas especificidades são apresentadas na Fig. C.2.

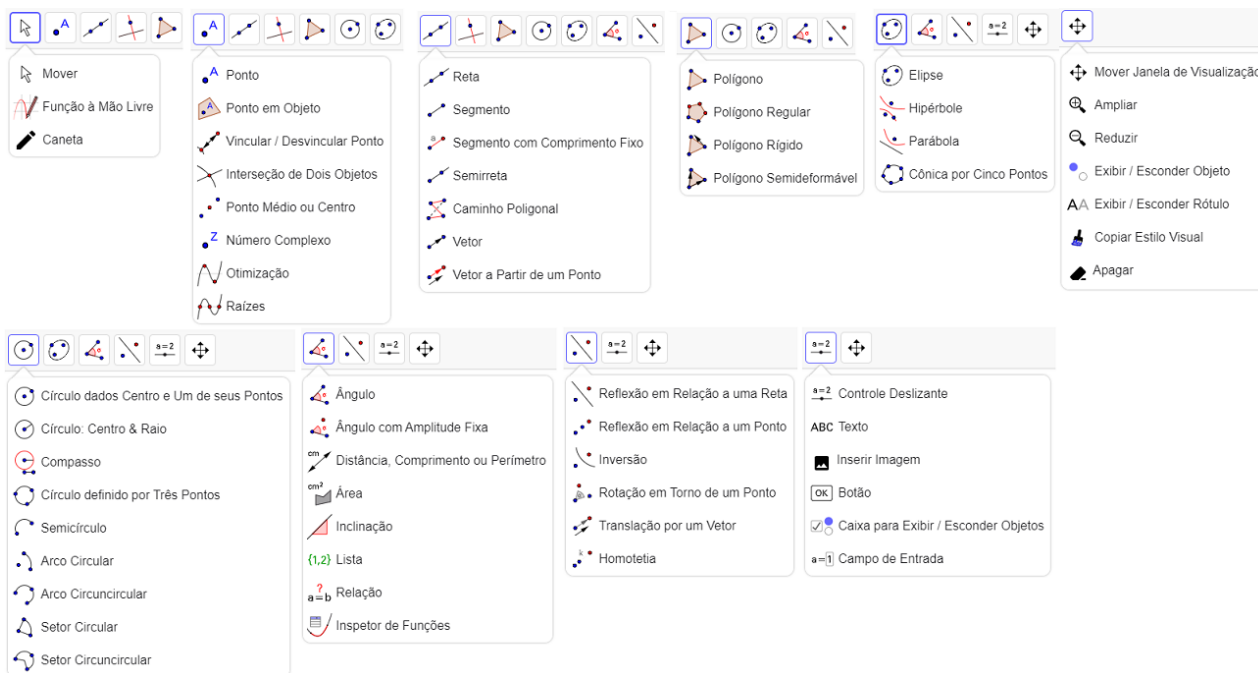


Figura C.2: Ferramentas da função Geometria presentes no software GeoGebra.

Para exemplificar a utilização do Geogebra com o uso de algumas das ferramentas disponíveis na função Geometria, serão realizadas a seguir duas construções geométricas utilizando esse software.

C.1 Construções geométricas utilizando o GeoGebra

Construção de duas circunferências ortogonais:

- i) Construa um segmento AB usando a função Segmento. Em seguida construa um ponto O usando a ferramenta Ponto (clique sobre o ponto C e use a função Renomear, acionada pelo botão direito do mouse, para denotar o ponto recém construído por O). Usando a função Compasso construa a circunferência C de centro O e raio \overline{AB} (após o Geogebra construir a circunferência clique em Mover e depois selecione a circunferência, em seguida usando a função Renomear denote a circunferência construída por C). Construa um ponto P exterior à C , usando as funções Ponto e Renomear, conforme Fig. C.3.

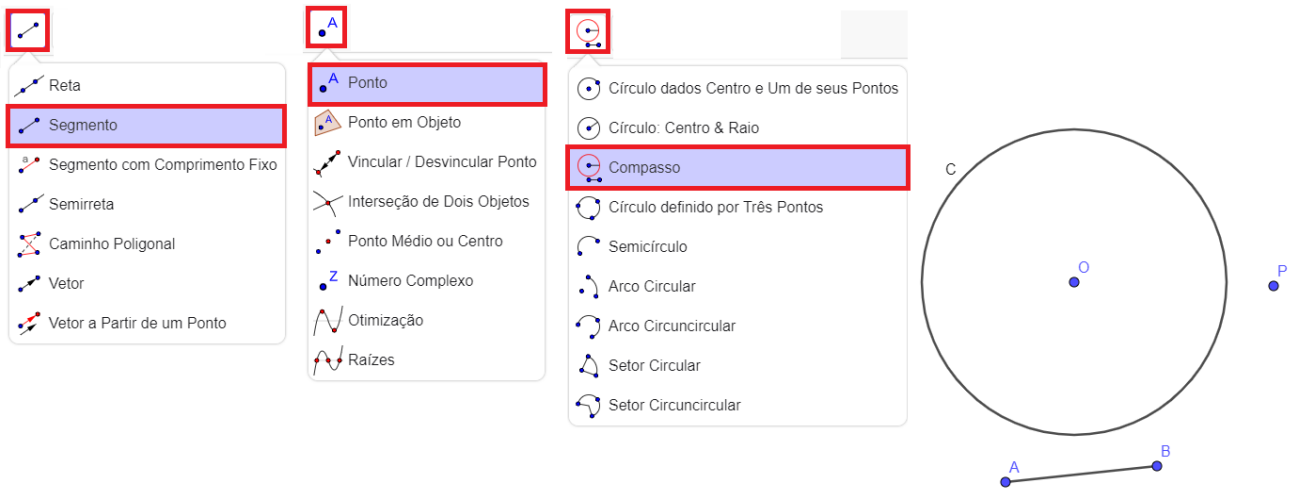


Figura C.3: Passo i) da construção de duas circunferências ortogonais no GeoGebra.

ii) Obtenha o ponto médio M do segmento OP , conforme Fig. C.4, utilizando as funções Ponto Médio ou Centro e Renomear do software GeoGebra.

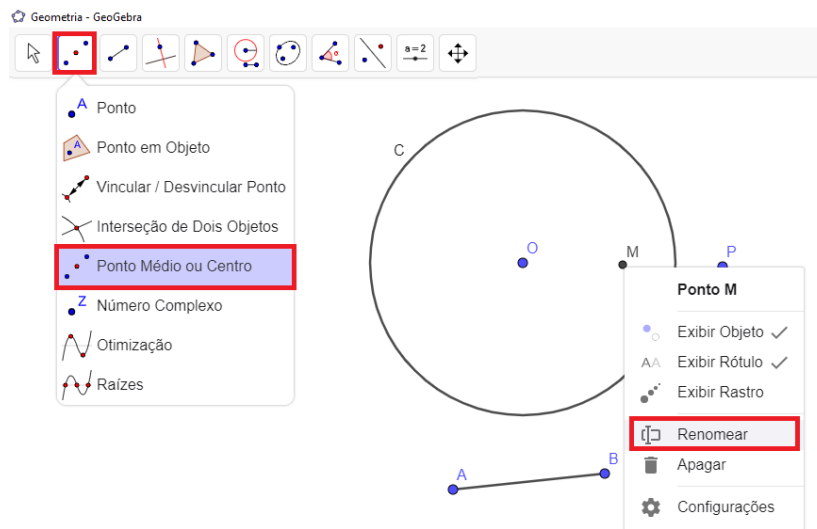


Figura C.4: Passo ii) da construção de duas circunferências ortogonais no GeoGebra.

iii) Construa uma circunferência auxiliar F de centro M e raio \overline{MP} , utilizando a função Compasso disponível no GeoGebra (e as funções Mover e Renomear). Em seguida, construa D e E , os pontos de intersecção entre as circunferências C e F , utilizando a função Interseção de Dois Objetos também disponível no GeoGebra, conforme Fig. C.5.

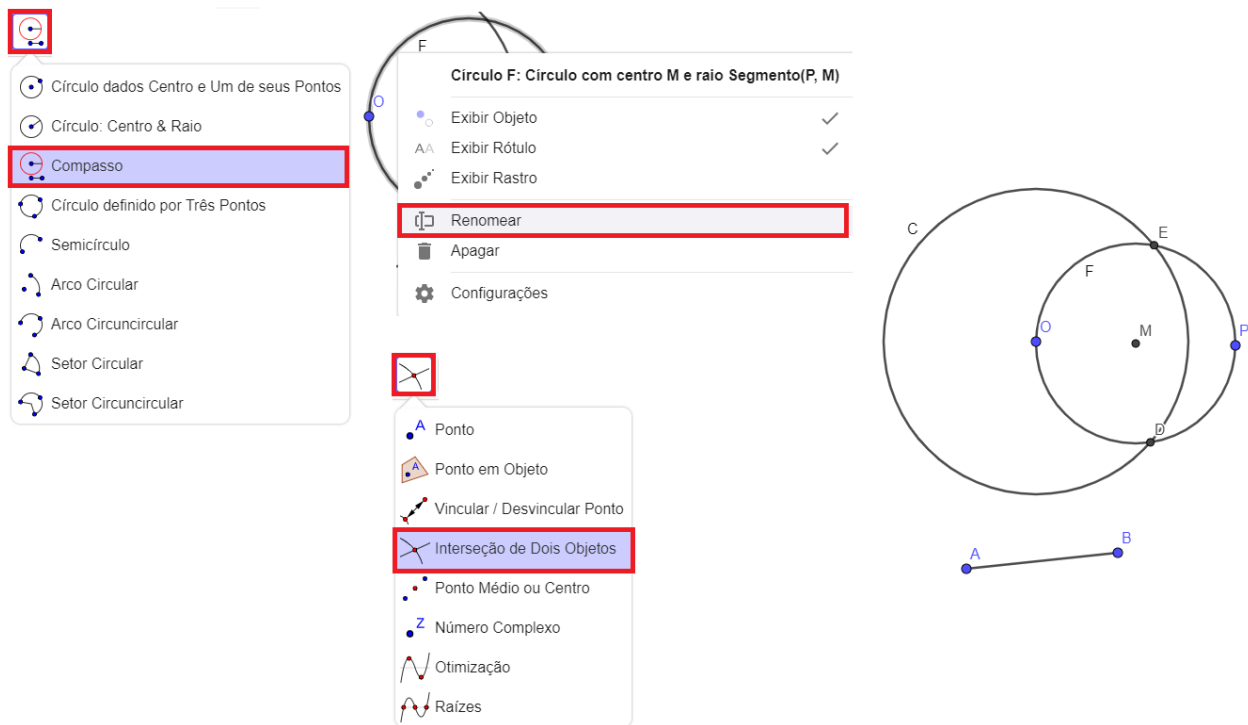


Figura C.5: Passo iii) da construção de duas circunferências ortogonais no GeoGebra.

iv) Construa agora, usando o Compasso (depois a funções Mover e Renomear), a circunferência G de centro P e raio \overline{PD} , conforme Fig. C.5. Afirmamos que as circunferências C e G são ortogonais, veja justificativa abaixo.

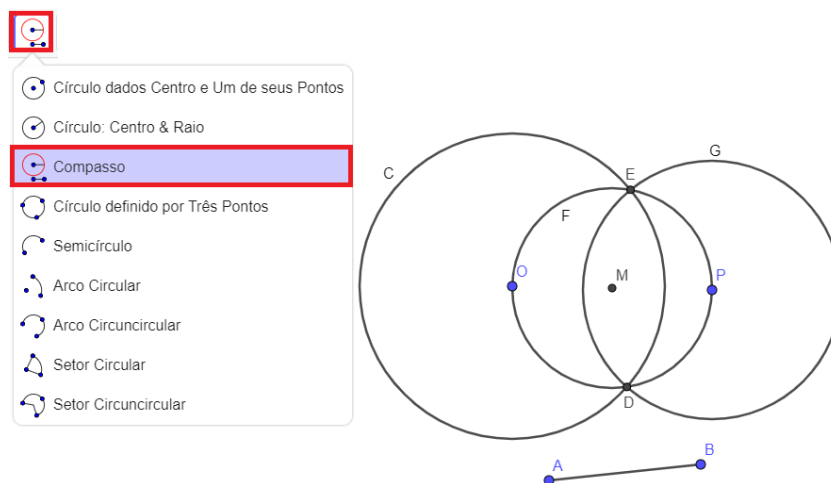


Figura C.6: Passo iv) da construção de duas circunferências ortogonais no GeoGebra.

v) Como intuito de facilitar a justificativa e explorar as funcionalidades do software, trace os segmentos OD e OE , ambos raios da circunferência C, utilizando a ferramenta Segmento. Usando a função Ângulo, construa os ângulos $\angle PDO$ e $\angle PEO$ e observe que esses ângulos são ambos retos. Trace também as duas retas tangentes a C passando por P, utilizando a função Reta

Tangente e observe que uma delas passa por D e a outra por E (esse fato pode ser confirmado acionando a função Relação presente no GeoGebra, selecionando em seguida o ponto e a reta), conforme Fig. C.5. Em seguida manipule os objetos construídos, da seguinte maneira: com a função mover acionada, clique sobre o objeto escolhido e realize um movimento com o mouse. Observe o que ocorre com a construção ao movimentar o ponto O , o ponto P e o segmento AB .

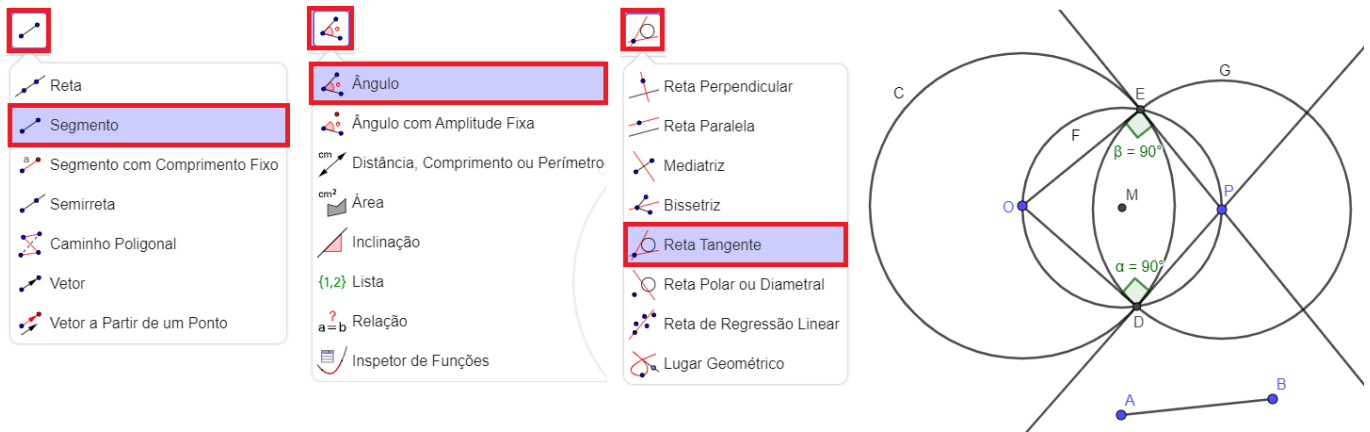


Figura C.7: Passo v) da construção de duas circunferências ortogonais no GeoGebra.

Justificativa: O $\angle PDO$ mede 90° , pois é ângulo inscrito na semicircunferência de diâmetro \overline{OP} . Como \overline{OD} é raio da circunferência C segue que, \overrightarrow{PD} é tangente a C em D . Da mesma forma, como \overline{PD} é raio da circunferência G segue que, \overrightarrow{OD} é tangente a G em D . Portanto o ângulo entre C e G em D é reto e, conseqüentemente da [Proposição 1.4](#), também é reto o ângulo entre C e G em E , ou seja C e G são circunferências ortogonais.

Determinação do centro de uma circunferência dada:

- i) Utilizando a função Circulo Definido por Três pontos (e as funções Mover e Renomear) construa a circunferência D que passa pelos pontos A, B e C . Essa é a construção equivalente a dar uma circunferência de raio qualquer desenhada no papel. Precisamos agora escolher dois pontos distintos quaisquer sobre essa circunferência dada. Sem perda de generalidade, podemos supor que os pontos escolhidos são os pontos A e B . Escolhido esses pontos, trace a corda \overline{AB} utilizando a função Segmento do software GeoGebra, conforme Fig. C.8.



Figura C.8: Passo i) para a determinação do centro de uma circunferência dada, usando o GeoGebra.

ii) Usando a função Ponto Médio (e a função Renomear), construa M o ponto médio da corda \overline{AB} .

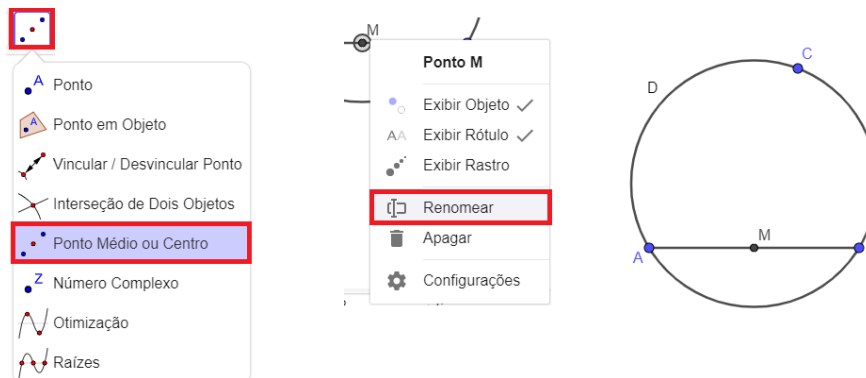


Figura C.9: Construção do ponto médio de uma corda \overline{AB} , usando o GeoGebra.

iii) Trace a reta r perpendicular à corda \overline{AB} e que passe por M , utilizando a função Reta Perpendicular (e as funções Mover e Renomear).

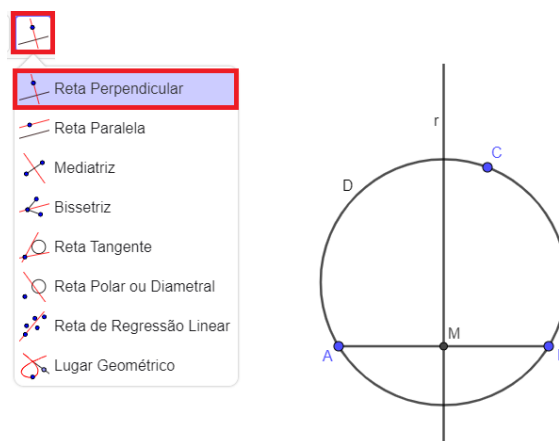


Figura C.10: Traçado da reta perpendicular a uma corda \overline{AB} passando pelo seu ponto médio, usando o GeoGebra.

iv) Construa E e F os pontos de intersecção entre a reta r e a circunferência D , via o comando Intersecção de Dois Objetos.

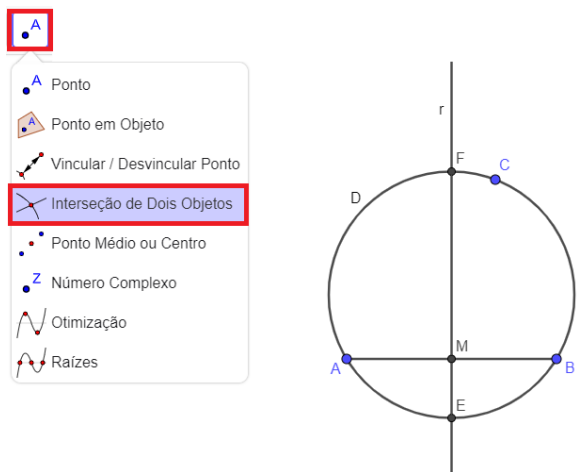


Figura C.11: Construção dos pontos de intersecções entre uma reta r e uma circunferência D , usando o GeoGebra.

v) Construa O o ponto médio do segmento EF , via o comando Ponto Médio, conforme Fig. C.9.

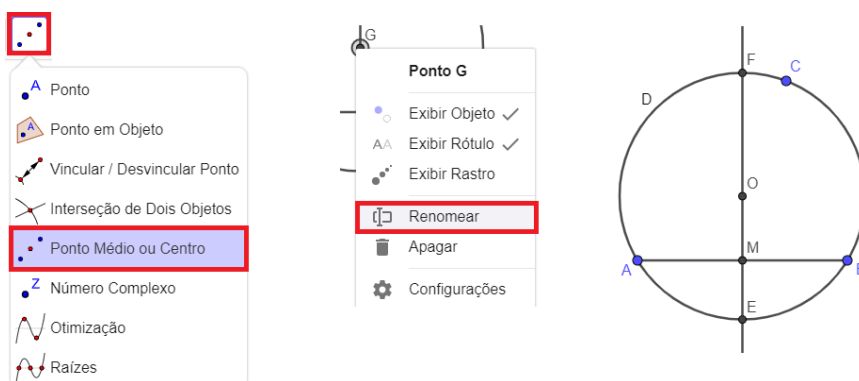


Figura C.12: Construção final do centro de uma circunferência dada, usando o GeoGebra.

Afirmção: O ponto O é o centro da circunferência D .

Justificativa: Da construção temos que a reta r é a mediatriz da corda \overline{AB} (esse fato pode ser confirmado utilizando a função Mediatriz presente no GeoGebra), portanto, em particular, r passa pelo centro da circunferência D . Conseqüentemente, a corda EF é diâmetro da circunferência D , logo seu ponto médio O é o centro de D .

Referências Bibliográficas

- [1] DELGADO, Jorge, FRENSEL, Katia e CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. SBM, 2017 (citado nas páginas [64](#), [65](#)).
- [2] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Editora Unicamp, 2011 (citado na página [56](#)).
- [3] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Geometria**. SBM, 2013 (citado nas páginas [17–19](#)).
- [4] REGIOMONTANUS, Johann Müller. **Regiomontanus on triangles**. University of Winsconsin, 1967 (citado na página [66](#)).
- [5] REZENDE, Eliane Quelho Frota e QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. São Paulo - SP: Editora da Unicamp, 2000 (citado na página [4](#)).
- [6] SPIRA, Michel. **Como Transformar Retas em Círculos e Vice Versa - A Inversão e Construções Geométricas: Geometria**. II BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2004 (citado nas páginas [20](#), [60](#), [62](#), [64](#)).