SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GILMAR VIRGOLINO AMÉRICO

Resolução de problemas sobre Análise Combinatóriapara as Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.

Orientador: Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias

BELÉM-PA
2013

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GILMAR VIRGOLINO AMÉRICO

Resolução de problemas sobre Análise Combinatória para as Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Profissional de Matemática, da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 28 / 06 / 2013
Conceito: APROVADO

Banca examinadora

PROF. DR. VALCIR JOÃO DA CUNHA FARIAS – ORIENTADOR - UFPA

PROF. DR. JOÃO PABLO PINHEIRO DA SILVA– MEMBRO - UFPA

PROF. DR. ARTUR DA COSTA ALMEIDA – MEMBRO – UFPA

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistemas de Bibliotecas da UFPA

Américo, Gilmar Virgolino, 1983 –
Resolução de problemas sobre Análise Combinatória para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP. / Gilmar Virgolino Américo. – 2013.

Orientador: Valcir João da CunhaFarias.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2013.

1. Análise Combinatória. 2. Olimpíadas- Matemática-Brasil. I. Título.

CDD 22. ed. 511.6

Dedicatória

A minha querida e amada esposa Olivana Pereira Ferreira Américo.

Agradecimento

Agradeço a Deus, por ter me dado capacidade, entendimento, sabedoria, saúde e tantas outras bênçãos sobre a minha vida.

A minha esposa Olivana Américo que esteve do meu lado, sempre me incentivando a nunca desistir, a meus filhos Glauber Obede e Giovana Ocibelly por me esperarem sempre sorrindo após cada viagem que fazia para estudar, e a minha filha por consideração Nilda.

A meus pais José Ribamar e Durvalina que sempre batalharam para que eu pudesse estudar e me tornar um cidadão de bem, aos meus irmãos Jaime, Elton, Dielson, Jaciane, Gilciane e Junior pela torcida e apoio em tudo que faço para o minha melhora, a minha cunhada "preferida" Regiane que sempre torceu e me aturou esses dois anos em sua casa, e nunca reclamou, aos meus sobrinhos Renan e Mateus, ao meu cunhado Rinaldo, a minha cunhada Margarida, em fim a todos os meus familiares que de uma forma ou de outra sempre me apoiaram em minhas decisões.

Aos meus amigos Carlos Fernandes, Roberta, Leandro, Jacenira, Carlos Alberto, Gonçalo e Sueli pelos conselhos e orações em meu valor.

Aos meus colegas de turma, em especial ao Lacerda, Mario, Gilvan, Claudia e Ronildo,pelas tantas vezes que estudamos em grupos, e não esquecendo do Marcelo que não conseguiu concluir nesta turma, mas sei que em breve estará concluindo, por ceder sua casa para estudarmos antes das provas.

Aos Professores do curso que não mediram esforços em ajudar a adquirir e aperfeiçoar os conhecimentos necessários a um bom profissional, em particular ao professor Valcir Cunha.

Sumário

Resumo

Neste trabalho vamos apresentar trinta questões e suas respectivas soluções, sobre os temas abordados nas Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Publicas – OBMEP, os quais são: Análise Combinatória. De uma maneira limpes e dando ênfase ao raciocínio lógico e prático dedutivo.

Palavra Chave: Analise Combinatória, Obmep.

Abstract

In this work we present thirty issues and their solutions on the topics covered in the Olympics Brazilian Mathematical Public Schools - OBMEP, which are: Combinatorial Analysis. One way to cleanse and emphasizing practical deductive and logical reasoning.

Keyword: Combinatorial Analysis, Obmep.

INTRODUÇÃO

Sabemos que a matemática como disciplina no currículo escolar da educação básica tanto pública como particular no Brasil é considerada a mais difícil. A matemática desenvolvida nesse texto vem auxiliar o aprendizado do aluno que tem como objetivo a preparação para Olimpíadas Brasileira Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.

As provas da OBMEP são divididas em três níveis, a do nível 1 direcionada aos alunos da 5ª e 6ª séries do ensino fundamental, a do nível 2 é direcionada para os alunos da 7ª e 8ª séries do ensino fundamental, já a do nível 3 é para os alunos do 1º,2º e 3º ano do ensino médio.

“Iniciada em 2005, a OBMEP vem crescendo a cada ano, criando um ambiente estimulante para o estudo da Matemática entre alunos e professores de todo o país. Em 2012, cerca de 19,1 milhões de alunos se inscreveram na competição e 99,4% dos municípios brasileiros estiveram representados. “Os sucessivos recordes de participação fazem da OBMEP a maior Olimpíada de Matemática do mundo.”

Os assuntos abordados na OBMEP são divididos em três temas: Aritmética, Análise Combinatória e Geometria. E é sobre estes temas que abordaremos, através da resolução de problemas, divididos cada um dos temas em três níveis.

Resolveremos dez questões para cada nível do tema de Análise Combinatória. Tentamos adotar uma linguagem que nos permite trabalhar o raciocínio lógico, e evitando o máximo utilizar fórmulas prontas.

CAPITULO I
OBMEP

1.1 Introdução

A Olimpíadas Brasileira de Matemática – OBMEP é organizada pela Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA com intuito de estimular os alunos a buscar mais o conhecimento na área da matemática, revelar novos talentos e de uma forma mais ampla melhorar o ensino da matemática no Brasil. Esta olimpíadas é destinadas aos alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e aos alunos do Ensino Médio das escolas públicas municipais, estaduais e federais e uma forma de incentivar os alunos.

1.2 Objetivos

A OBMEP tem os seguintes objetivos:

1.2.1. Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas.

1.2.2. Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica.

1.2.3. Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas.

1.2.4. Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional.

1.2.5. Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas.

1.2.6. Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

1.3 Premiação

Uma forma de incentivar os alunos édistribuir 6000 medalhas, divididos em 500 (quinhentas) medalhas de ouro, 900 (novecentas) medalhas de prata, 4600 (quatro mil e seiscentas) medalhas de bronze, e até 46.200 (quarenta e seis mil e duzentos) certificados de Menção Honrosa. Além de premiar professores, escolas e secretarias de educação vinculados as alunos classificados a 2ª fase das olimpíadas.

Aos medalhistas são oferecidos programas que incentivam os alunos, como: Programa de Iniciação Cientifica Jr. (PIC), Preparação de Iniciação Cientifica – Mestrado (PICME), Preparação Especial para Competições Internacionais (PECI), Polos Olimpicos de Treinamento Intensivo (POTI) e a criação de Clubes de Matemáticas.

Apesar de tanto incentivo e a expressivo número de participante, o Pará não apresentou um bom desempenho no que diz respeito aos números de medalhas. Abaixo apresentamos as tabelas com os respectivos números de medalhas do Pará em comparação com o total nacional. Para se ter uma ideia a melhor participação, ocorrido em 2010, o Pará obteve pouco mais de 0,5 % do total de medalhas de ouros.

Vejamos as tabelas:

OBMEP 2005 - Premiações					
UF	OURO	PRATA	BRONZE	MENÇÃO HONROSA	TOTAL
PA	2	15	15	949	981
Total	300	405	405	29999	31109
OBMEP 2006 - Premiações					
UF	OURO	PRATA	BRONZE	MENÇÃO HONROSA	TOTAL
PA	2	15	15	251	283
Total	300	405	405	33633	34743
OBMEP 2007 - Premiações					
UF	OURO	PRATA	BRONZE	MENÇÃO HONROSA	TOTAL
PA	0	2	21	366	389
Total	301	600	2101	30001	33003
OBMEP 2008 - Premiações					
UF	OURO	PRATA	BRONZE	MENÇÃO HONROSA	TOTAL
PA	0	8	22	360	390
Total	301	901	1803	30012	33017

OBMEP 2009 - Premiações					
UF	OURO	PRATA	BRONZE	MENÇÃO HONROSA	TOTAL
PA	0	2	19	377	398
Total	300	900	1800	30011	33011
OBMEP 2010 - Premiações					
UF	OURO	PRATA	BRONZE	MENÇÃO HONROSA	TOTAL
PA	3	6	17	375	401
Total	504	900	1804	30048	33256
OBMEP 2011 - Premiações					
UF	OURO	PRATA	BRONZE	MENÇÃO HONROSA	TOTAL
PA	2	7	17	303	329
Total	500	900	1800	30002	33202
OBMEP 2012 - Premiações					
UF	OURO	PRATA	BRONZE	MENÇÃO HONROSA	TOTAL
PA	2	5	36	702	745
Total	500	902	3102	40930	45434

Após vermos todas as tabelas temos uma noção de como estamos longe de sermos um estado com uma premiação expressiva. Agora, só depende de nós professores mudarmos essa história, e é esse nosso objetivo principal: aprimoramos o nosso ensino em matemática e assim ajudar o Pará a melhorar o seu desempenho na OBMEP.

CAPITULO II

ANÁLISE COMBINATÓRIA

2.1: Introdução

Como sabemos, a Analise Combinatória é um dos três temas da OBMEP, esendo um assunto não muito apreciado por professores e alunos, devido o seu auto nível de raciocínio, que o individuo precisa para resolver os problemas. Neste trabalho, procuramos apresentar métodos para resolução de problemas na área de Análise Combinatória, e sua aplicabilidade em algumas questões de probabilidade, haja vista, que esta ultima é quase que impossível sem a primeira.

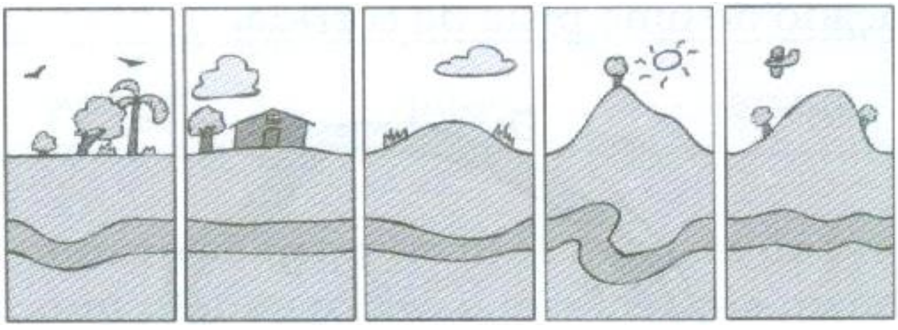
Por tudo que foi enunciado acima, é que procuramos desenvolver este tema de uma forma que não usássemos só a resolução através de fórmulas, mas principalmente utilizando o Princípio Multiplicativo com muita criatividade e raciocínio lógico.

Procuramos ainda escolher questões desde as mais simples, porém com contexto prático no dia a dia, até as mais intrigantes, e não esquecendo de sua aplicabilidade na probabilidade. A seguir, temos um lista com 30 questões divididas em três níveis.

2.1 Nivel1

Questão01

(banco de questões OBMEP, pg28 questão 14) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cincos quadros da figura.



Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?

Resolução:

Vamos colocar os cinco quadros distintos nas cinco posições. Na primeira posição podemos colocar um do cinco quadros, então temos cinco possibilidades de escolha, na segunda posição temos quadro possibilidades, pois restaram quatro quadro, na terceira temos três possibilidades, na quarta duas possibilidade e na quinta posição uma possibilidade. Usando o principio multiplicativo temos 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 paisagens diferentes. O que nos dar **120 dias.**

Questão 02

De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em filas de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?

Resolução:

Primeiro vamos calcular o total de possibilidades de arrumar 7 pessoas em fila, nesse caso é 7! = 5040. E agora devemos encontrar a quantidade de 7 pessoas, em que duas (por exemplo A e B) sentem juntas, neste caso primeiro temos 2 possibilidade para a escolha da ordem de A e B (AB ou BA) em seguida permutar com as outras 5 pessoas, então tem-se 2x6!=**1440**.

Agora basta subtrair do total de possibilidades as possibilidades de A e B sentarem juntas, dai temos a quantidade desejada, ou seja,

$$5040 - 1440 = \mathbf{3600.}$$

Questão 03

Dê quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

Resolução:

Basta permutar os livros dentro de seu respectivo grupo (matéria) e depois permutar os grupos entre si, assim sendo, temos

$$P_5 x P_3 x P_2 x P_3 = 5! x 3! x 2! x 3! = 120x6x2x6 = \mathbf{8640.}$$

Questão 04

Tem-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 sobre uma reta R’ paralela R. Quantos quadriláteros convexos com vértices em 4 desses 13 pontos existem?

Resolução:

Para formar um quadrilátero convexo, basta escolher dois pontos de R e dois pontos em R'. Então temos,

$$C_5^2 x C_8^2 = 10x28 = \mathbf{280}\ quadrilateros$$

Questão 05

(UFMT/adaptado) A copa do mundo de futebol que foi realizado na Alemanha em junho de 2006 contou com a participação de 32 seleções divididas em 8 grupos com 4 equipe cada, na primeira fase. Dado que, em cada grupo, as seleções jogam uma única vez, qual o total de jogos realizados na primeira fase?

Resolução:

Calculando a quantidade de jogos que acontecerá em cada grupo, que pode ser feita de C_4^2 modos, e como são 8 grupos logo temos:

$$8xC_4^2=8x6 = \mathbf{48\ jogos}$$

Questão 06

(OBMEP-2011) Três amigas possuem, cada uma, três blusas: uma amarela, uma branca e uma preta. Se cada amiga escolher ao acaso uma de suas blusas, qual é a probabilidade de que as cores das blusas escolhidas sejam todas diferentes?

Resolução:

O número de maneiras das três amigas estarem com blusas diferentes pode ser calculado da seguinte maneira: a primeira delas pode escolher qualquer uma das três, a segunda pode escolher só duas (pois não pode escolher a que a primeira escolheu) e a ultima vestiria a que restasse, ou seja, 3x2x1=6 possibilidades. Já o total de possibilidades das três se vestirem é 27 (pois cada uma pode escolher uma das três blusas, ou seja, 3x3x3), dai a probabilidade é

$$\frac{6}{27} = \mathbf{\frac{2}{9}}$$

Questão 07

(OBMEP-2010) Carolina tem três cartões brancos numerados de 1 a 3 e três cartões pretos, também numerados de 1 a 3. Ela escolheu, ao acaso, um cartão branco e um preto. Qual é a probabilidade de a soma dos números dos cartões escolhidos ser par?

Resolução:

O total de possibilidades de escolher um cartão branco e um preto é 9, pois temos 3 modos de escolher o cartão branco e 3 modos de escolher o cartão preto, e pelo principio multiplicativo basta multiplicar 3x3 para determinar o total de possibilidades. Já para a soma dos números sejam pares, isto só ocorre se os dois cartões forem pares (4 modos, 1 e 1, 1 e 3, 3 e 1 , e 3 e 3) ou se os números forem todos pares (1 modo, 2 e 2), portanto a probabilidade procurada é

$$\frac{5}{9}$$

Questão 08

(OBMEP-2008) Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quartousando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar se quarto?

Resolução:

Basta permutar as quatro cores nas paredes que teremos o total de maneira que o quarto pode ser pintado uma cor em cada parede (ou seja, 4x3x2x1=24 maneiras), e subtrair as que ela não quer (ou seja, 8 maneiras, pois temos dois pares de paredes opostas e dois modos de cada par ser pintado, AR ou RA combinado com VB e BV), portanto temos:

24 -8= 16 **maneiras de pintar o quarto de Manuela**

Questão 09

Em um armário há 5 pares de sapatos. Escolhem-se 4 pés de sapatos. Qual a probabilidade de se formar exatamente um par de sapatos?

Resolução:

O total de modos de retirar quatro sapatos é: como a ordem da retirada dos sapatos não altera o a formação deste agrupamento, então temo uma combinação de 10 agrupados 4 a 4, ou seja, $C_{10}^{4} = 210$. Já para retirarmos exatamente um par, temos primeiro de escolher o par, que pode ser feito de 5 maneiras, em seguida multiplicar pela escolha de dois sapatos que não formem par(um lado de cada par que não foi escolhido), ou seja, temos uma combinação de 4 agrupados 2 a 2(C_4^2=6), portanto a probabilidade procurada é:

$$\frac{5x6}{210} = \frac{30}{210} = \mathbf{\frac{1}{7}}$$

Questão 10

Buscando melhorar o desempenho de seu time, o técnico de uma seleção decidiu inovar: convocou apenas 15 jogadores, 2 dos quais só jogam no gol e os demais atuam em qualquer posições, inclusive no gol. De quantos modos ele pode selecionar 11 jogadores que iram compor o time titular?

Resolução:

Se o goleiro for um dos dois que só jogam nessa posição, nós teremos 2xC_{13}^{10} (2 porque temos dois goleiros "natos", e C_{13}^{10}, poisa ordem não altera e restaram 13 jogadores para escolher 10). Ou se o goleiro não for um dos dois que só jogam nessa posição, então termos os 13 jogadores disputando 11 posições, ou seja, C_{13}^{11}. Portanto basta soma as duas formas de arrumar o time:

2x$C_{13}^{10} + C_{13}^{11}$.=2x286 + 78=572+78= **650**

2.3 Nível2

Questão 11

Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos e o do Iraque e o dos Estados Unidos não podem sentar juntos?

Resolução:

Calculamos as possibilidades em que o brasileiro senta ao lado do português, o pode ser feito de 2X9! (2 possibilidades devido a ordem BP ou PB e 9! Pois temos agora 8 delegados e o grupo brasil-Portugal). Quando calculamos as possibilidades do brasileirosentar ao lado do português, algumas dessas, o americano está também junto do iraquiano o que não pode, por isso devemos subtrai-las . e estas podem ser calculados azando o mesmo pensamento inicial formando o grupo de (Brasil e Portugal) e (EUA e Iraque) então temos: 2x2x8!. Logo

2x9! – 2x2x8! = 725760 – 161280 = **564480**

Questão 12

Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 5 mulheres.

a) Quantas comissões podem ser formadas?

b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar da comissão se nela estivesse determinada mulher?

Resolução:

a) Como a ordem não altera na formação das comissões. Basta multiplicar a combinação de 8 homens de 3 em 3, ou seja C_8^3, com a combinação de 5 mulheres de 3 em 3, ou seja C_5^3, Sendo assim, temos

56x10 = **560 comissões**.

b) Do total do item anterior subtrairemos as que o homem e a mulher participam juntos, ou seja$C_7^2 x C_4^2 = 21x6 = 126$

Portanto temos, 560 – 126 = **434** comissões.

Questão 13

quantas diagonais possui um polígono de n lados?

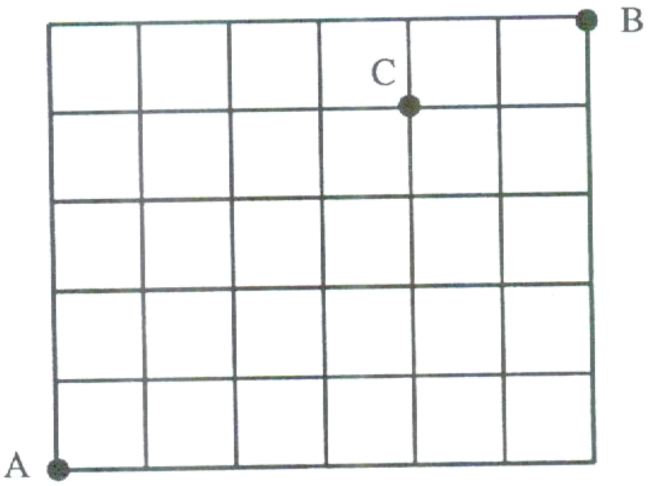
Resolução:

Como os segmentos que unem dois vértices do polígonos são lados ou diagonais. Como temos $\boldsymbol{C_n^2}$ segmentos que unem dois vértices e **n** lados, temos:

$$C_n^2 - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2x(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2} \; \boldsymbol{diagonais}$$

Questão 14

A figura abaixo representa o mapa de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte- sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.



a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?

b) Quantos desses trajetos passam por C?

Resolução:

a) Para que o caminho ser mínimo devemos ir sempre para leste ou para norte até alcançar o ponto B, dessa forma sempre percorreremos 6 quarteirões para leste e 5 para norte (LLLLLLNNNNN) o que muda é apenas a ordem, neste caso, temos uma permutação com elementos repetidos, ou seja,

$$P_{11}^{6,5} = \frac{11!}{6!x5!} = \mathbf{462}\textbf{trajetos}$$

b) basta multiplicar as possibilidades de ir de A para C (LLLLNNNN)pelas de C para B (LLN), ou seja,

$$P_8^{4,4} x P_3^2 = 70x3 = \mathbf{210}\textbf{trajetos}$$

Questão 15

Um grupo de 10 viajantes pára para dormir num hotel. Só tem 2 quartos com cinco lugares cada um. De quantas formas eles puderam se distribuir para dormir naquela noite?

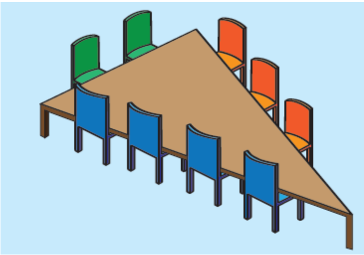
Resolução:

Para resolver este problema basta escolher os cinco que irão dormir num quarto que o restante dormi no outro quarto. E isso pode ser feito de C_{10}^{5} maneiras. Portanto temos:

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = \mathbf{252}$$

Questão 16

(OBMEP-2012) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?



Resolução:

Como Alice e Bernardo devem ficar juntos vamos considera-los como um grupo, primeiro vamos escolher a ordem de aparição do grupo (2 possibilidades AB ou BA), em seguida escolhemos o par de cadeira que irão sentar Aline e Bernardo, que pode ser feito de 6 maneiras (1 possibilidade de sentar no lado menor, 2 possibilidade no lado médio e 3 no maior lado) então distribuímos os 4 amigos nos 7 lugares restantes e isso pode ser feito de7x6x5x4, dai basta multiplicar:

2 x 6x7x6x5x4 =**10080**

Questão 17

Com os símbolos Δ, $\odot$, $\boxdot$, deseja-se formar sequencias de cincos figuras geométricas, uma ao lado da outra.

a) De quantos modos distintos isso pode ser feito?

b) Se figuras vizinhas não podem ser iguais, quantas sequencias podem ser formadas?

c) Usando no máximo um círculo, quantas sequencias podem ser formadas?

Resolução:

a) Como essa sequencia deve ser formada por cinco figuras e essas figuras podem ser de 3 modos, então temos 3x3x3x3x3 = **243 sequencias**

b) Neste caso temos 3 opções para escolher a primeira figura, 2 opções para a segunda (pois não podemos repetir a figura escolhida na primeira opção), 2 para a terceira (pois não podemos repetir a figura escolhida anterior), 2 para a quarta e 2 para a quinta, sendo assim, temos 3x2x2x2x2 = **48 sequencias**

c) Agora, as sequencias podem conter uma ou nenhum circulo:

se um circulo: temos 5 opções para escolher sua posição, e as demais posições restantes podem ser 2 opções cada uma (pois restam dois símbolos), sendo assim, temos 5x2x2x2x2 = **80 sequencias**

se nenhum circulo: temos que cada uma das posições podem ser preenchidas por duas opções cada, ou seja, 2x2x2x2x2 = **32 sequencias**

Portanto temos 80+32**=112 sequencias**

Questão 18

(OBMEP-2010) Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?

Resolução:

Temos dois modos de distribuir os presentes, primeira e Ana receber mais um brinquedo (ficando com dois, pois a boneca já é sua) e isso pode ser feito fixando as meninas e permutando os presentes, isto é, 4x3x2x1= 24, e a segunda ela não ganha mais nenhum presente, dai uma das outra meninas irão ficar com dois presentes. Primeiro vamos escolher qual o par de brinquedo que irar para a mesma sobrinha (temos C_4^2 = 6 possibilidades), em seguida fixamos as três meninas (Bruna, Cecília e Daniela) e permutamos o par e os outros dois brinquedos, isto é, 3x2x1=6, logo este segundo modo tem 6x6=36 possibilidades de acontecer. Depois,bastam somas os dois modos:

24+36 = **60** maneiras de presentear suas sobrinhas

Questão 19

Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1 000 a 9 999 Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

Resolução:

Primeiro vamos escolher a posição em que os setes vão ocupar, isso pode ocorrer de $C_4^3 = 4$ maneira, preenchida as três posições com os setes restam ainda uma posição que poderá ser preenchido por algarismos diferentes de sete (pois só pode ter três sete) e zero(pois o zero não pode aparecer), ou seja, restam 8 algarismos. Agora é só multiplicar 8 por C_4^3;

$$8\text{x}C_4^3 = 8\text{x}4 = \mathbf{32}\ \textbf{números}$$

Questão 20

Uma sala possui m lâmpadas. De quantas maneiras diferentes podemos iluminar esta sala?

Resolução:

A sala pode ser iluminada por uma lâmpada, logo temos C_m^1 modos de fazer isso. Podemos iluminar com duas lâmpadas, ou seja C_m^2 modos. Com três lâmpadas temos C_m^3 modos, e assim por diante até iluminarmos com **m** lâmpadas, neste caso temos C_m^m maneiras de fazer isso. Como cada modo de iluminar a sala é independente, basta agora somarmos todos eles, isto é:

$$C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + C_m^4 + \dots + C_m^m$$

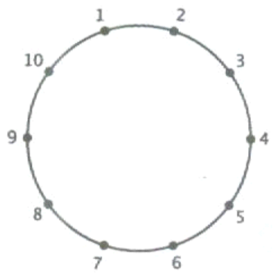
Se prestarmos atenção na expressão acima, ela é quase a **m-esima** linha do triangulo de pascal, faltando apenas $C_m^0 = \binom{0}{m} = 1$, então:

$$C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + C_m^4 + \dots + C_m^m = \underbrace{C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + C_m^4 + \dots + C_m^m + C_m^0}_{\text{m-ésima linha do triangulo de pascal}} - C_m^0 = \mathbf{2^m - 1}$$

2.4 Nível 3

Questão 21

Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola correspondente a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.



a) Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que o segmento determinado pelos pontos correspondentes seja um diâmetro da circunferência?

b) Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo? (*um ângulo inscrito em uma circunferência é reto se e somente se o arco correspondente é uma semicircunferência*)

c) se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um retângulo?

Resolução:

a) chamamos de evento A a retirada de dois pontos que formam um diâmetro, e há 5 possibilidades de isso acontecer (pois só pode formar diâmetro dois pontos simétricos em relação ao centro, e como são dez pontos, só podemos formar cincos pares nessas condições). E de **S** o espaço amostral, e este pode ser calculado por C_{10}^{2}, haja vista que a ordem dos pontos não altera o segmento, portanto a probabilidade pedida é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

b) chamamos de evento B a retirada de três pontos que formem um triangulo retângulo inscrito na circunferência, para que isso aconteça e necessário que a hipotenusa seja um diâmetro e o outro ponto pode ser qualquer um pertencente a circunferência, e o numero de possibilidades de isso acontecer é 5x8 (há 5 maneira de escolher o diâmetro e 8 maneira de escolher o terceiro ponto), E de **S** o espaço amostral (retirar qualquer três pontos), e este pode ser calculado por C_{10}^{3} , portanto a probabilidade pedida é:

$$P(A) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

c) chamamos de evento **C** a retirada de quatro pontos que formem um retângulo inscrito na circunferência, para que isso aconteça basta que os vértices opostos formem um diâmetro da circunferência, e como temos cinco diâmetros, então o número de escolher dois desses diâmetros é C_5^2. E de **S** o espaço amostral (retirar qualquer quatro pontos), e este pode ser calculado por C_{10}^4, portanto a probabilidade pedida é:

$$P(A) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{10}{210} = \mathbf{\frac{1}{21}}$$

Questão 22

Em um corredor há 900 armários, numerados de 1 a 900, inicialmente todos fechados. 900 pessoas, numeradas de 1 a 900, atravessam o corredor. A pessoa de número k reverte o estado de todos os armários cujos números são múltiplo de k. Por exemplo, a pessoa de número 4 mexe nos armários de números 4, 8, 12, ..., abrindo os que se encontra fechado e fechando os que encontra aberto. Ao final, quais armários ficarão abertos?

Resolução:

Um armário ficará aberto se ele for mexido um número impar de vezes, ou seja, os armários com números que tem número impar de divisores. Isso só ocorre com os números na forma decomposta em fatores primos que tenham expoentes todos pares, ou seja, os quadrados perfeitos. Assim, permanecerão abertos os armários com números $\mathbf{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 30^2}$.

Questão 23

A fabrica x produz 8 tipos de bombons que são vendidos em caixas de 30 bombons (de um mesmo tipo ou sortido). Quantas caixas diferentes podem ser formadas.

Resolução:

Este é um caso de combinação com elementos repetidos ou não, uma maneira prática de resolver problemas desse tipo é transformando o problema em uma equação do tipo:

$$\boldsymbol{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 = 30}$$

Onde cada $\boldsymbol{X_n}$ **(com n=1, 2, 3,...,8)** representa a quantidade de bombons de cada tipo (por exemplo $\boldsymbol{X_1}$ é a quantidade de bombons do tipo 1, $\boldsymbol{X_2}$ é quantidade do tipo 2, e assim por diante), o esquema abaixo mostra uma solução da equação bem como sua representação no esquema bola-traço (cada bola representa uma unidade no valor da incógnita; cada traço é usado para separar duas incógnita)

X_1		X_2		X_3		X_4		X_5		X_6		X_7		X_8
8		6		4		0		2		2		0		8
••••••••	|	••••••	|	••••	|		|	••	|	••	|		|	••••••••

O esquema a cima mostrou a formação de uma caixa, repare pelo esquema que qualquer solução sempre vai ter30 bolas e 7 traços, onde apenas mudam de posição, então temos um caso de permutação de 37 elementos com 30 elementos iguais e 5 outros elementos iguais, portanto:

$$P_{37}^{30,7} = \frac{37!}{30!\,7!} = 10295472\ caixas\ diferentes$$

Questão 24

Quantos números inteiros entre 1 e 100 000 têm soma dos algarismos iguais a 6?

Resolução:

Usando o mesmo pensamento da questão anterior, temos a equação:

$\boldsymbol{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 6}$

Onde cada $\boldsymbol{X_n}$ **(com n=1, 2, 3, 4, 5)** representa o valor dos algarismos nas suas respectivas casas(por exemplo $\boldsymbol{X_1}$ é o valor do algarismo das centenas de milhar, $\boldsymbol{X_2}$ é do algarismos da dezena de milhar, e assim por diante), o esquema abaixo mostra uma solução da equação bem como sua representação no esquema bola-traço (cada bola representa uma unidade no valor da incógnita; cada traço é usado para separar duas incógnita)

X_1		X_2		X_3		X_4		X_5
3		1		0		0		2
•••	|	•	|		|		|	••

(31002 ex. de um n° cuja soma dos algarismos é 6)

Como neste caso sempre teremos 6 bolas e 4 traços, nos quais apenas serão mudadas as posições, portanto temos um caso de permutação com elementos repetidos, ou seja,

$$P_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6!\,4!} = \boldsymbol{210\ números}$$

Questão 25

De quantos modos é possível colocar em fila h homem e m mulheres, todos de alturas diferentes, de modo que os homens entre si e as mulheres entre si fiquem em ordem crescente de alturas?

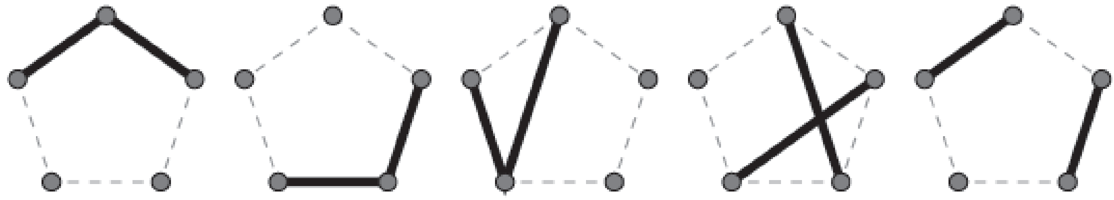
Resolução:

Como as mulheres e os homens entre si devem estar em ordem crescente, basta considerar que os homens entre si são iguais e também entre si são (pois em cada formação não pode haver permutação entre homens e entre mulheres, devido a ordem de crescimento), então temos permutação de **h+m** elementos e com **h** e **m** elementos repetidos, ou seja,

$$P_{h+m}^{h,m} = \frac{(h+m)!}{h!\,m!}$$

Questão 26

(OBMEP-2009) Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.



Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

Resolução:

Primeiro vamos calcular quantos seguimentos podemos ter unindo dois desses cinco pontos, e isso pode ser feito de $C_5^2 = 10$ maneiras (já que a ordem dos pontos não altera o segmento), em seguida vamos combinar esses 10 seguimento dois a dois para chegar ao resultado, ou seja,

C_{10}^2= **45 figuras**

Questão 27

Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, de quantas formas podemos permuta-los de modo que os números impares fiquem sempre em ordem crescente?

Resolução:

Basta nós considerarmos os algarismos impares como se fossem “iguais”, pois não podemos permuta-los entre si (em cada agrupamentos só é aceito a ordem crescente), neste caso teríamos uma permutação de 7 elementos, sendo 4 “iguais”, ou seja,

$$P_7^4 = \frac{7!}{4!} = \mathbf{210}\ \boldsymbol{números}.$$

Questão 28

(OBMEP-2011) Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

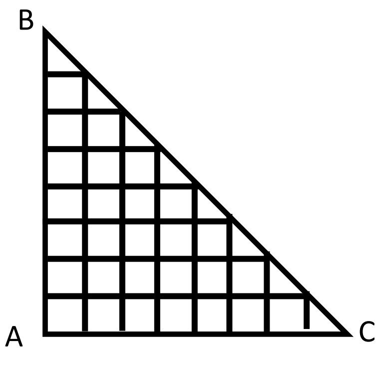
Resolução:

Primeiro percebemos que há $A_{4,3}$=24 números com os algarismos supra citados, então quando formos somarmos todos esses 24 números, cada algarismos vai aparecer 6 vezes em cada casa (unidade, dezena e centena), então basta somar cada algarismos em cada “casa” e depois multiplicar por 6. Ou seja:

111
444+
666 **6x2009 = 12654** é a soma de todos os números
888
2109

Questão 29

Caminhando sempre para a direita ou para cima, sobre a rede da figura, de quantas maneiras se pode ir do ponto A até a reta BC?



Resolução:

Partindo do ponto A em direção da reta, verificamos que temos 8 etapas (deslocamos 8 pontos em direção da reta), o primeira deslocamento temos 2 opções, no segundo deslocamento também temos 2 opções, e assim por diante sempre tendo 2 opções em cada etapa, pelo principio multiplicativo temos,

$2x2x2x2x2x2x2x2=2^8=$**256 caminhos**

Questão 30

(OBMEP-2007) Uma formiguinha pode ir do ponto A e ir até o ponto B da figura I, andando apenas pelos lados dos quadradinhos na horizontal ou na vertical para baixo, sem passar duas vezes pelo mesmo lado. A figura II ilustra um possível trajeto da formiguinha.

De quantas maneiras ela pode ir de A até B?

Resolução:

Devemos nos atentar para os segmentos verticais que ligam uma linha (horizontal) a outra, pois depois de escolhido estas o caminho na horizontal já estará definido, então temos 4 segmentos que ligam a 1ª linha a 2ª, 3 que ligam a 2ª a 3ª, 5 que ligam a 3ª a 4ª, 3 que ligam a 4ª a 5ª, e 4 que ligam a 5ª a ultima linha. Portanto temos,

$4x3x5x3x4=$ **720 caminhos**

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho tratamos dos temas abordados na Olimpidas Brasileira de Matemática das Escolas Publicas – OBMEP, através de resolução de problemas. Sabemos que a OBMEP além de medir a qualidade do ensino da matemática na escolas publicas, tem ainda um papel de incentivador tanto para alunos como para professores. Depois de conhecer melhor a OBMEP e aprender um pouco mais sobre os temas, em particular da Análise Combinatória. Nosso próximo passo é colocar em pratica em sala de aula, tanto em nossas turmas “normais” como em turmas especificas.Assim melhorando o desempenho nas olimpíadas e também no ENEM e vestibulares em geral.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dante, Luiz Roberto

Matemática : contexto e aplicação / Luiz Roberto Dante. – São Paulo : Ática, 2010.

Hazzan, Samuel

Fundamento de Matemática Elementar, 5: combinatória e probabilidade / Samuel Hazzan. - 7ª ed. – São Paulo: Atual, 2004.

Iezzi, Gelson

Matemática: ciência e aplicações, 2: ensino médio / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida. -6ª ed- São Paulo: Saraiva, 2010.

Lima, Elon Lages,

A Matemática do Ensino Médio vol 2 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cesar Morgado. -6ª ed.- Rio de Janeiro: SBM, 2006.

Morgado, Augusto Cesar

Análise Combinatória e Probabilidade /Augusto Cesar Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Casar pinto Carvalho, Pedro Fernandez. -9. Ed. – Rio de Janeiro: SBM, 1991.