Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Campus Alto Paraopeba - CAP

Programa de Metrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Cérvulo Augusto Ferreira de Almeida

Cálculo Fracionário: as diferenças entre as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Professora Dra. Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni - UFSJ (Orientadora)

Professor Dr. Humberto César Fernandes Lemos - UFSJ

Professora Dra. Ana Paula da Silva Cota - UFOP

Ouro Branco - MG
Setembro de 2023

TERMO DE APROVAÇÃO

CÉRVULO AUGUSTO FERREIRA DE ALMEIDA

Cálculo Fracionário: as diferenças entre as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São João del Rei, Campus Alto Paraopeba, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Trabalho aprovado, 15 de Setembro de 2023:

Profª Dra. Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni - UFSJ (Orientadora)

Professor Dr. José Eloy Ottoni - UFSJ (Coorientador)

Professor Dr. Humberto César Fernandes Lemos (Membro interno da UFSJ)

Profª Dra. Ana Paula da Silva Cota (Membro externo - UFOP)

Ouro Branco
Setembro 2023

Dedico este trabalho a todos aqueles que não desistem de tentar. "Seguir cada pegada minha tem sangue e suor."

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que me permitiu chegar até aqui. Sou grato por cada dádiva alcançada, especialmente por ter me guiado até este programa de mestrado, levando até o seu término.

Agradeço aos meus pais, José e Rosângela, a quem tenho toda a gratidão que um filho possa ter. A formação humana que me proporcionaram formaram a pessoa que sou. Foi de criança que me ensinaram a importância da Educação. Tal valorização mais tarde tornou-se minha profissão. Este trabalho e toda a minha vida enquanto estudante só foram possíveis graças ao apoio recebido por estas duas pessoas a quem tenho o maior amor do mundo.

A todos os professores e professoras do Campus Alto Paraopeba da UFSJ que fizeram parte desta gradução. Especialmente à professora orientadora Dra. Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni e ao professor coorientador Dr. José Eloy Ottoni por toda a ajuda, assistência e paciência que a mim dedicaram durante o desenvolvimento deste trabalho.

Pela caminhada não só como colegas de turma, mas como amigos que fiz, agradeço aos queridos(as): Ana Claudia, Lucas Carvalho, Ivani Mendes, Nathália Cássia e Paulinette Silva. O trajeto não foi fácil, como espera-se não ser, mas a presença destes tornou este caminho mais agradável e feliz. Guardarei todos em meu coração. Uma saudação especial ao Lucas, que ainda tive a feliz oportunidade de trabalharmos no mesmo local durante o período do mestrado. Obrigado por tudo, meu caro amigo.

Finalizo meus agradecimentos para minhas queridas amigas Camila Passos e Viviane Izabel. A presença das duas em minha vida é um presente diário. Agradeço a Deus por vocês e espero que Ele retribua na vida de cada uma todo o apoio e incentivo que deram-me durante o desenvolvimento do trabalho.

2023: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Cálculo Fracionário: as diferenças entre as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo

Cérvulo Augusto Ferreira de Almeida [1]
Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni [2]
José Eloy Ottoni[3]

Resumo
Este trabalho apresenta uma breve introdução ao Cálculo Fracionário. Assim como o conhecimento prévio sobre as funções elementares é essencial ao Cálculo Diferencial e Integral, o estudo do cálculo de ordem arbitrária está amplamente apoiado em algumas das *funções especiais*, assim ditas, a saber: função Gama, função Beta e função de Mittag-Leffler. Dada a importância destas três funções, elas serão estudadas neste trabalho. Na sequência, duas das mais conhecidas abordagens da Integral e Derivada Fracionárias ampliam os conceitos da derivada e integral de ordem inteira para ordens arbitrárias. Por fim, serão explicitadas as diferenças entre as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo para algumas funções. Para além da parte teórica, o trabalho traz também uma proposta de atividade voltada à Educação Básica, apresentando alguns conceitos usados no Cálculo Fracionário.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário, Derivada Fracionária, Integral Fracionária, função Gama, função Beta, Função de Mittag-Leffler.

[1]Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2021, Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Campus Alto Paraopeba (CAP)
E-mail: cervulo.augusto@hotmail.com
[2]Professora Orientadora, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ
E-mail: amandagso@ufsj.edu.br
[3]Professor Coorientador, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ
E-mail: jeottoni@ufsj.edu.br

Fractional Calculus: the differences between the Riemann-Liouville and Caputo derivatives

Abstract
This work presents a brief introduction to Fractional Calculus. Just as prior knowledge about elementary functions is essential to Differential and Integral Calculus, the study of arbitrary order calculus is largely supported by some of the so-called *special functions*, namely: the Gamma function, the Beta function and the Mittag-Leffler function. Given the importance of these three functions, they will be presented in this work. In the sequence, two of the most known approaches of Integral and Fractional Derivative extend the concepts of derivative and integral from integer order to arbitrary orders. Finally, the differences between the Riemann-Liouville and Caputo derivatives for some functions will be explained. In addition to the theoretical part, the work also brings a proposal for an activity aimed at Basic Education, presenting some concepts used in Fractional Calculus.

Keywords: Fractional Calculus, Fractional Derivative, Fractional Integral, Gamma function, Beta function, Mittag-Leffler function.

Sumário

1 Introdução

Conforme o seu padrão histórico, o desenvolvimento das ciências exatas segue uma linha cronológica nos estudos dos gênios que o gestam. Da mesma forma que a $\sqrt{2}$ teve seu papel nas investigações da Escola Pitagórica e posteriormente levou à confirmação da existência de números além dos racionais, sabe-se que os conceitos que levaram a Barrow, Newton e Leibniz a produzirem o que hoje conhecemos como Cálculo vêm de séculos anteriores à sua concepção. Não é diferente com os conceitos do chamado Cálculo Fracionário[4]. As ideias que levaram a inquietação de Leibniz quanto à derivação para ordens não inteiras são pregressas ao próprio Cálculo.

A "origem" do Cálculo Fracionário até certo ponto pode ser considerada em fio paralelo ao conjunto de argumentos que levaram à construção do Cálculo Diferencial e Integral[5]. Muito mais nas dúvidas geradas do que pelas certezas que a matemática daquele tempo assegurava, os questionamentos que surgiram durante o desenvolvimento teórico do Cálculo usual foram o combustível para o seu desenvolvimento.

Entretanto, de forma simbólica, sua origem pode ser datada no ano de 1695 nas trocas de cartas entre um alemão e um francês (considerando o que hoje são o Estado alemão e o francês, respectivamente) [20]. O alemão é Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) e Guillaume François Antoine, Marquês de l'Hôpital (1661-1704) o francês. Em uma destas cartas Leibniz questiona a l'Hôpital sobre uma possível generalização da derivada para ordens arbitrárias. Por sua vez, l'Hôpital responde aos apontamentos não com uma certeza, mas com o questionamento de qual seria a derivada de ordem um meio de uma função. Foi então, em 30 de setembro de 1695, que o alemão responde — ainda que à época não dispusesse da fundamentação teórica necessária — que a $D^{1/2}x$ é $x\sqrt[2]{\mathrm{d}x : x}$; juntamente da afirmação "este é um aparente paradoxo, do qual um dia consequências úteis serão obtidas" [20, p.3].

Muitos são os notáveis matemáticos que têm sua marca na linha da construção do CF e das ferramentas que levaram à criação dele, valendo a menção os nomes Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, Joseph Fourier, Niels Abel, Karl Weierstrass, Aleksey Letnikov, Magnus Mittag-Leffler [16], entre outros que têm contribuição na teoria que se tem estabelecida atualmente. Contudo, dado o objetivo de nosso trabalho, focaremos nos resultados dos quase contemporâneos Liouville e Riemann, que é estabelecido na aglutinação *derivada segundo Riemann-Liouville*. Também abordaremos os resultados de nosso contemporâneo, o italiano Michele Caputo (1927) na conhecida como *derivada segundo Caputo*.

Ao entrar no estudo dos conceitos que formalizam o CF, fica posto de forma inerente o aprofundamento nas *funções especiais* [23]. E desta forma se faz presente Leonhard Paul Euler (1707-1783) neste meandro. A função Gama e função Beta são chamadas de funções de Euler ou funções eulerianas. Dado a massiva conexão entre as funções de Euler com o que é visto posteriormente na integral e derivada fracionária, fica necessário uma maior atenção nestas. Assim, dedicamos à construção de certos resultados que são base na definição de integral fracionária e, por conseguinte, derivadas fracionárias e seus respectivos cálculos. Outro proeminente matemático a dar sua contribuição nos conceitos do CF é o sueco Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), tendo também sua devida atenção em nosso trabalho.

Estabelecidos os conceitos base do Cálculo Fracionário, que em certo ponto são defini-

[4] A abreviação CF neste trabalho refere-se ao Cálculo Fracionário.
[5] A abreviação CDI neste trabalho refere-se ao Cálculo Diferencial e Integral.

tivamente pré-requisitos, é possível então a formalização da definição da integral de ordem arbitrária de Riemann-Liouville[6]. Sua formulação está diretamente ligada com as funções de Euler. Em que pese o importante trabalho de Caputo e demais matemáticos e respectivos modelos de derivada fracionária, a integral de Riemann-Liouville possui protagonismo nos conceitos que compõe o Cálculo Fracionário.

Apoiado nos conceitos da integral de RL, a expansão dá-se pela derivada de mesmo nome ao de seus instituidores. Da mesma forma está definido para a derivada de Caputo; alternando visualmente a princípio — e somente a princípio — a ordem com que são feitas as ações de derivar e integrar nos meandros da ordem arbitrária se considerada as duas formulações.

Ao calcular as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo para diversas funções, observa-se uma diferença entre as duas formulações. Essa diferença dá-se pela soma de um número finito de termos na série de potências que representa as soluções das derivadas. Essa diferença faz com que uma ou outra formulação de derivada seja escolhida para modelar diferentes situações. Uma atenção especial deve ser dada a essas diferenças, uma vez que a não observação delas leva alguns usuários do Cálculo Fracionário a cometerem erros pontuais. Não encontra-se facilmente publicações que trazem a apresentação explícita das derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo para várias funções elementares de maneira naturalmente acessível, sendo essa, portanto, uma das principais contribuições deste trabalho para esta área de pesquisa.

Junto do referencial teórico sobre o Cálculo Fracionário apresentado no trabalho, também tem-se como objetivo a apresentação de alguns dos seus conceitos para a Educação Básica. Considerando o atual currículo da Educação brasileira, a maturidade matemática necessária para a compreensão dos pontos abordados indica que seja trabalhado no Ensino Médio, preferencialmente na 2ª série.

A inserção de tais conceitos é feita através de uma sequência didática, abordando o símbolo de Pochhammer e a função Gama: da definição do símbolo de Pochhammer à relação com a função Gama, generalização do fatorial, gráfico de Gama e $\Gamma(1/2)$. Constitui-se de três propostas de atividades a serem trabalhadas com os estudantes. Cada uma traz já no corpo do texto o embasamento teórico necessário para a resolução dos exercícios propostos. Considera-se que as duas primeiras atividades são o preâmbulo necessário para as indagações levantadas na terceira, que é justamente quando apresentamos o valor de $\Gamma(1/2)$ e sua importância no Cálculo Fracionário.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: a Seção 1 traz uma introdução ao tema. Na Seção 2 são apresentadas as funções especiais, essenciais ao estudo do Cálculo Fracionário, que é estudado na Seção 3. A Seção 4 apresenta uma proposta de atividade voltada à Educação Básica, em que alguns conceitos do Cálculo Fracionário são abordados.

[6]A abreviação RL neste trabalho refere-se à aglutinação Riemann-Liouville, utilizada nas nomenclaturas da integral fracionária de Riemann-Liouville e derivada fracionária de Riemann-Liouville.

2 Funções Gama, Beta e Mittag-Leffler

Assim como o desenvolvimento dos produtos notáveis no oitavo ano do Ensino Fundamental da Educação Básica, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[7] [5], é fundamentado no sétimo ano via estudo dos termos algébricos, o discorrer do Cálculo Fracionário também é abalizado em alguns pilares. Entre eles, destacam-se as chamadas funções especiais, sendo elas: a função Gama, função Beta e as funções de Mittag-Leffler. Esta seção fundamentará os conceitos básicos necessários ao Cálculo Fracionário.

Iniciando pela função Gama, definimos, por exemplo, o fatorial de números não inteiros; propriedades e proposições que especificam esta função. Na sequência apresenta-se a definição da função Beta e é estabelecida a sua correlação com a função Gama. Por fim, serão estudadas as funções de Mittag-Leffler em que, por decorrência de sua configuração, evidencia-se a relação de correspondência da mesma com a função Gama.

2.1 A função Gama $\Gamma(z)$

2.1.1 Função Gama e o fatorial

Definição 2.1. *Define-se a* função Gama $\Gamma(z)$*, para* $z \in \mathbb{R}_+$*, pela integral imprópria (euleriana)*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

É fácil mostrar que $\Gamma(1) = 1$.

A proposição a seguir pode ser considerada como um dos principais resultados no estudo da função Gama. Vários são os cálculos em que ela se faz necessária, inclusive, sendo um dos resultados com maior número de utilizações em todo nosso trabalho. A **relação de recorrência da função Gama** garante que, uma vez conhecida a imagem $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{R}_+$, as demais imagens $\Gamma(m)$, $m = n + p$, $p \in \mathbb{N}$, sejam também conhecidas.

Proposição 2.1.1 (Relação de recorrência da função Gama). *Para* $n > 0$*, tem-se que*

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

Demonstração. Veja que, para $n+1$ em (1),

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{n}\, \mathrm{d}t \tag{2}$$

Da integração por partes, com $u = t^n$ e $\mathrm{d}v = e^{-t}$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \lim_{b\to\infty} \left[(t^n)(-e^{-t})\Big|_0^b - \int_0^b (-e^{-t})(n\,t^{n-1})\,\mathrm{d}t \right] \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-t^n e^{-t}\Big|_0^b + n\int_0^b e^{-t}\,t^{n-1}\,\mathrm{d}t \right] \qquad (3)
\end{aligned}$$

[7] A BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica brasileira.

Agora, note que

$$\lim_{b\to\infty} -t^n e^{-t}\Big|_0^b \;=\; \lim_{b\to\infty} \frac{-b^n}{e^b} + 0 \;=\; \lim_{b\to\infty} -\frac{b^n}{e^b}$$

i) Se n é natural, aplicando a Regra de l'Hôpital n vezes

$$\lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^n}{e^b}\right)^{(n)} \;=\; \lim_{b\to\infty} \frac{n!\,b^0}{e^b} \to 0 \tag{4}$$

Logo, de (3) tem-se que

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) \;&=\; 0 + n\int_0^\infty (e^{-t})(t^{n-1})\,\mathrm{d}t \\ &=\; n\,\Gamma(n)\end{aligned}$$

ii) Se n é real positivo, para o caso particular $n = \sqrt{2}$, por exemplo, temos que

$$\begin{aligned}\frac{b^{\sqrt{2}}}{e^b} \;&\leq\; \frac{b^2}{e^b} \\ 0 \leq \frac{b^{\sqrt{2}}}{e^b} \;&\leq\; \frac{b^2}{e^b}\end{aligned}$$

Para $n > 0$, $n \in \mathbb{R}$ qualquer, tomando-se o limite em cada termo da desigualdade

$$0 \leq \frac{b^{m-1}}{e^b} \leq \frac{b^n}{e^b} \leq \frac{b^m}{e^b}, \quad m-1 < n \leq m,\; m \in \mathbb{N}$$

nota-se que as extremidades convergem para zero. Sendo assim, pelo Teorema do Confronto, o $\lim \frac{b^n}{e^b}$ também converge a zero para n real. Portanto, decorre de (3) que

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n), \quad n > 0 \tag{5}$$

□

Visto sua definição e a relação de recorrência que compõe a função Gama, é possível verificar seu domínio. De (1) pode-se reescrever na forma

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t}\,t^{z-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,\mathrm{d}t$$

Observando a segunda integral, considerando (2) e, por consequência, (4), tem-se que a mesma converge para qualquer que seja z.

Já para a primeira integral, dado que $0 \leq z \leq 1$, a função e^{-t} fica controlada, ou seja, $0 < e^{-t} \leq 1$. Assim sendo, a convergência ou não da integral depende apenas da função t^{z-1} nos valores que z assumir. Portanto,

- para $z > 0$,

$$\int_0^1 t^{z-1}\,\mathrm{d}t = \frac{t^z}{z}\Big|_0^1 = \frac{1}{z} \quad \text{(converge)}$$

- para $z = 0$,

$$\lim_{b\to 0^+} \int_b^1 \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = \lim_{b\to 0^+} \ln t\Big|_b^1 = \ln 1 - \lim_{b\to 0^+} \ln b = +\infty \quad \text{(diverge)} \tag{6}$$

- para $z < 0$,
note que $z - 1 < -1$, assim,

$$\int_0^1 t^{z-1}\, \mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = \ln t\Big|_0^1 \to -\infty \quad \text{(diverge)}$$

Nota-se que para $z > 0$, $\Gamma(z)$ está bem definida, ao passo que $z \leq 0$ não faz parte (a princípio) de seu domínio. Desta feita, estabelece-se que

$$\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \tag{7}$$

Posteriormente, veremos que há valores de $\mathbb{R}_-$ que pertencem ao domínio de Γ, naquilo que é chamado de *extensão do domínio da função Gama*.

Por conta da definição de $\Gamma(z)$, seguem propriedades e alguns resultados importantes. Destaca-se a relação entre Gama e fatorial, a qual pode ser chamada de uma **generalização do fatorial**.

Proposição 2.1.2 (Generalização do fatorial). *Para n natural, vale a relação:*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Demonstração. Pelo Princípio da Indução Matemática[8],
i) Caso base: $n = 1$
É imediato de (5),

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!$$

Logo, para $n = 1$ tem-se que a propriedade é válida.

ii) Hipótese de Indução
Suponha, por hipótese, que para algum k natural, $\Gamma(k+1) = k!$. Segue da Proposição 2.1.1 que para $k + 2$,

$$\begin{aligned} \Gamma(k+2) &= (k+1)\,\Gamma(k+1) \\ &= (k+1)\,k! \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Portanto a propriedade também é válida com $n = k+1$. Segue do PIM que a relação vale $\forall n \geq 1$.

□

A BNCC estabelece que "técnicas de contagem[9]" é conteúdo do componente curricular matemática da Educação Básica[10]. Ferramenta imprescindível, o fatorial de um número, é

[8]A abreviação PIM neste trabalho refere-se ao Princípio da Indução Matemática.

[9]"(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore." [5, p.529]

[10]A abreviação EB neste trabalho refere-se à Educação Básica.

trabalhado na 2ª série do Ensino Médio, antecedendo os estudos de Análise Combinatória. Nesta etapa da educação escolar é habitual definir o fatorial de números naturais como em Souza [33]:

Considere $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$. Definimos como fatorial de n, indicado por $n!$, o produto de n por seus antecessores naturais até o 1, ou seja:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 1$$

Também definimos que: $1! = 1$ *e* $0! = 1$.

Contudo, dado que a função Gama é definida na parte real positiva de z, é natural buscar correlacionar a Definição 2.1 com a Proposição 2.1.2. Faz sentido o fatorial de números não naturais? Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.1 (Gama de 1/2). *Para $n = 1/2$, verifica-se que*

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{-1/2}\, \mathrm{d}t$$

Da integração por substituição com $u = t^{1/2}$,

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u}\, 2u\, \mathrm{d}u \ = \ 2\int_0^\infty e^{-u^2} \mathrm{d}u = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

Logo[11]*,*

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \tag{8}$$

Assim sendo, como visto, $\Gamma(1/2)$ está definido. Porém, este resultado se observado da perspectiva da Proposição 2.1.1 leva a

$$\Gamma(-1/2) = -2\,\Gamma(1/2)$$

Em outras palavras, $\Gamma(z)$ está definida para valores negativos? Desta forma então pode-se pensar na extensão do domínio que inicialmente está apresentado em (7).

2.1.2 Extensão do domínio de $\Gamma(z)$

Conforme visto em (6), $\Gamma(0)$ não está definida e $\lim_{z \to 0^+} \Gamma(z) \to +\infty$. Note que para $z \in (-1, 0)$, $\Gamma(z+1)$ está bem definida, logo, pode-se definir, neste intervalo

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

Como $\Gamma(z+1) > 0$ e $z < 0$, logo $\Gamma(z) < 0$ para $z \in (-1, 0)$, e

$$\lim_{z \to 0^-} \Gamma(z) = \lim_{z \to 1^-} \Gamma(z) \cdot \lim_{z \to 0^-} \frac{1}{z} = -\infty$$

[11] A integral $\int_0^\infty e^{-u^2} \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}/2$ é conheida como Integral gaussiana ou Integral Euler-Poisson. Foi popularizada por Jacob Karl Franz Sturm (1803–1855) em seu trabalho **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**. [36, p.16-17]

$$\lim_{z\to -1^+}\Gamma(z) = -\lim_{z\to 0^+}\Gamma(z) = -\infty$$

Logo, estende-se o domínio que inicialmente foi estabelecido em (7) para

$$\Gamma : (-1,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R} \tag{9}$$

Em processo análogo, temos que para $z\in(-2,-1)$, $\Gamma(z+1)$ também está definida de acordo com (9). Segue que

$$\lim_{z\to -1^-}\Gamma(z) = \lim_{z\to 0^-}\Gamma(z)\cdot\lim_{z\to -1^-}\frac{1}{z} = \infty$$

$$\lim_{z\to -2^+}\Gamma(z) = \lim_{z\to -1^+}\Gamma(z)\cdot\lim_{z\to -2^+}\frac{1}{z} = \infty$$

Desta forma estende-se novamente o domínio de Γ, ficando por

$$\Gamma : (-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R} \tag{10}$$

Por este processo pode-se então definir que o domínio de Gama é

$$\Gamma : \mathbb{R}-\mathbb{Z}^*_-\to\mathbb{R} \tag{11}$$

e, assim, estabelecer em definitivo o seu conjunto domínio. A Figura 1 traz o gráfico de $\Gamma(z)$, $-5\leq z\leq 5$, considerando o domínio expandido.

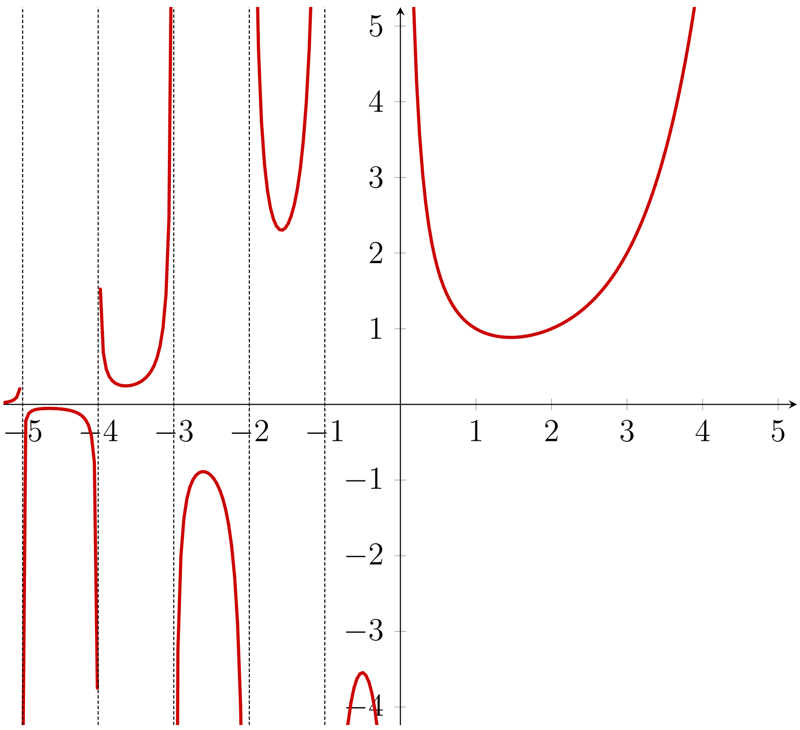

Figura 1: Gráfico de $\Gamma(z)$ utilizando o *software* GeoGebra

Portanto, considerando que: $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, a recorrência da Proposição 2.1.1 e o domínio de Gama (11) é possível verificar os resultados:

- $\Gamma(3/2) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$
- $\Gamma(5/2) = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$
- $\Gamma(7/2) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}$
- $\Gamma(9/2) = \dfrac{105\sqrt{\pi}}{16}$
- $\Gamma(11/2) = \dfrac{945\sqrt{\pi}}{32}$
- $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$
- $\Gamma(-3/2) = \dfrac{4\sqrt{\pi}}{3}$
- $\Gamma(-5/2) = \dfrac{-8\sqrt{\pi}}{15}$
- $\Gamma(-7/2) = \dfrac{16\sqrt{\pi}}{105}$
- $\Gamma(-9/2) = \dfrac{-32\sqrt{\pi}}{945}$

As próximas proposições e corolário generalizam estes resultados a partir do conceito de **fatorial duplo**, definido a seguir.

Definição 2.2. *O* fatorial duplo ou semifatorial *de um inteiro não negativo n, denotado por $(n)!!$, é o produto de todos os inteiros de 1 a n que têm mesma paridade de n. Assim,*
i) Se n é par,

$$(n)!! = \prod_{k=1}^{n/2}(2k) = n(n-2)(n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2 \tag{12}$$

ii) Se n é ímpar,

$$(n)!! = \prod_{k=1}^{(n+1)/2}(2k-1) = n(n-2)(n-4)\cdots 5\cdot 3\cdot 1 \tag{13}$$

Com as definições $(0)!! = 1$ *e* $(1)!! = 1$.

Exemplo 2.2. *O duplo fatorial de 12 e 11 são, respectivamente,*
$(12)!! = 12\cdot(12-2)\cdot(12-4)\cdot(12-6)\cdot(12-8)\cdot(12-10)$
$(12)!! = 12\cdot 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2$

$(11)!! = 11\cdot(11-2)\cdot(11-4)\cdot(11-6)\cdot(11-8)\cdot(11-10)$
$(11)!! = 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$

Veja que

$$\begin{aligned}(2n)!! &= 2n\,(2n-2)(2n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2 = 2^n\, n!\\ (2n-1)!! &= (2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\\ (2n)!!\,(2n-1)!! &= (2n)!\end{aligned}$$

E assim, primeiro observando o duplo fatorial de $2n$, é possível identificar abaixo as propriedades do duplo fatorial.
i) $(2n)!! = 2^n\, n!$
ii) $(2n-1)!! = \dfrac{(2n)!}{2^n\, n!}$

Proposição 2.1.3. *Para $n \in \mathbb{N}$ e seja $(n)!!$ o fatorial duplo de n,*

$$\Gamma(1/2+n) = \frac{(2n-1)!!\,\sqrt{\pi}}{2^n}.$$

Demonstração. Pelo Princípio da Indução Matemática,
i) Caso base: $n = 1$

$$\Gamma(1/2+1) = \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(1)!!\,\sqrt{\pi}}{2}$$

Logo, para $n = 1$ tem-se que a propriedade é válida.

ii) Hipótese de Indução
Suponha, por hipótese, a propriedade válida para algum $k > 1$. Observe que

$$\begin{aligned}
\Gamma(1/2+k+1) &= (1/2+k)\,\Gamma(1/2+k) \\
&= \frac{2k+1}{2}\,\frac{(2k-1)!!\,\sqrt{\pi}}{2^k} \\
&= \frac{(2k+1)!!\,\sqrt{\pi}}{2^{k+1}}
\end{aligned}$$

Portanto, a propriedade é válida para $n = k+1$ e por i) e ii) do PIM prova-se a proposição.
□

Proposição 2.1.4. *Seja $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\Gamma(1/2-n) = \frac{(-1)^n\,2^n\,\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}.$$

Demonstração. Pelo Princípio da Indução Matemática,
i) Caso base: $n = 1$

$$\Gamma(1/2-1) = \Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi} = \frac{(-1)^1\,2\sqrt{\pi}}{(1)!!}$$

Portanto, a propriedade é válida para $n = 1$.

ii) Hipótese de Indução
Suponha, por hipótese, a propriedade válida para algum $k > 1$ inteiro.

$$\begin{aligned}
\Gamma(1/2-k-1)(1/2-k-1) &= \Gamma(1/2-k) \\
\Gamma(1/2-k-1)\,(-1)\left(\frac{2k+1}{2}\right) &= \frac{(-1)^k\,2^k\,\sqrt{\pi}}{(2k-1)!!} \\
\Gamma(1/2-(k+1)) &= \frac{(-1)^{k+1}\,2^{k+1}\,\sqrt{\pi}}{(2k+1)!!}
\end{aligned}$$

Logo, a propriedade é válida para $n = k+1$ e por PIM verifica-se verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.
□

Corolário 2.1.1. *Para $n \in \mathbb{N}$, vale o produto*

$$\Gamma(1/2+n)\,\Gamma(1/2-n) = (-1)^n\,\pi$$

Demonstração. Das proposições 2.1.3 e 2.1.4, verifica-se

$$\Gamma(1/2+n)\,\Gamma(1/2-n) = \frac{(2n-1)!!\,\sqrt{\pi}}{2^n} \cdot \frac{(-1)^n\,2^n\,\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!} = (-1)^n\,\pi$$

□

Por fim, a partir da definição da função Gama obtêm-se um último e importante resultado. Este será útil na próxima subseção, quando as funções Gama e Beta forem relacionadas. Com a substituição $t = u^2$ em (1), é possível escrever a função Gama de outra maneira:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u^2}\,(u^2)^{z-1}\,2u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,u^{2z-1}\,\mathrm{d}u \tag{14}$$

2.1.3 Função Gama e o Símbolo de Pochhammer

O **Símbolo de Pochhammer** $(a)_n$ é uma ferramenta de importante valor no estudo das funções eulerianas. Seu uso traz notáveis simplificações no estudo da função Gama.

Definição 2.3. *Define-se, para* $a \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{Z}$*, o* Símbolo de Pochhammer

$$\textit{crescente: } (a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1), \qquad (a)_0 = 1, n \geq 0 \tag{15}$$

$$\textit{decrescente: } (a)_n^- = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1), \qquad (a)_0 = 1, n \geq 0 \tag{16}$$

Estabelecendo assim uma notação que simplifica sentença(s) de produto(s) sequencial(ais).

Exemplo 2.3. *Para* $(7)_5$ *e* $(7)_5^-$*, respectivamente*
$(7)_5 = 7 \cdot (7+1) \cdot (7+2) \cdot (7+3) \cdot (7+4)$
$(7)_5 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$

$(7)_5^- = 7 \cdot (7-1) \cdot (7-2) \cdot (7-3) \cdot (7-4)$
$(7)_5^- = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

A proposição a seguir traz a relação entre o Símbolo de Pochhammer[12] e a função Gama.

Proposição 2.1.5. *Considerando o símbolo de Pochhammer crescente* $(a)_n$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-^*$ *e a função Gama* $\Gamma(n)$*, vale a relação*

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

Demonstração. Pelo Princípio da Indução Matemática,
$i)$ Caso base: $n = 1$
Da definição de $\Gamma(n)$ por recorrência (5),

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$$

$$a = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} \tag{17}$$

[12]A abreviação SdP neste trabalho refere-se ao Símbolo de Pochhammer.

Agora, do símbolo de Pochhammer, $(a)_1 = a$. Logo, de (17)

$$(a)_1 = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}$$

Mostrando que a propriedade é válida para $n = 1$.

ii) Hipótese de Indução
Suponha que para algum $k > 1$ inteiro, isto é,

$$(a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$$

Multiplicando os dois membros da igualdade acima por $(a+k)$,

$$a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)(a+k) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}\,(a+k)$$

Por (5), nota-se que $\Gamma(a+k)\,(a+k) = \Gamma(a+k+1)$, e portanto,

$$(a)_{k+1} = \frac{\Gamma(a+k+1)}{\Gamma(a)}$$

Logo, a propriedade é válida para $n = k+1$ e por *i*) e *ii*) do PIM verifica-se a proposição.

□

Corolário 2.1.2. *O símbolo de Pochhammer descrescente* $(a)_n^-$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-^*$ *e a função Gama se relacionam por meio da relação*

$$(a)_n^- = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)}$$

Demonstração. Estabecemos uma relação do símbolo de Pochhammer com gama através da Proposição 2.1.1 e considerando a extensão (11). Veja que

$$\begin{aligned}
\Gamma(a+1) &= a\,\Gamma(a) \\
&= a\Big[(a-1)\,\Gamma(a-1)\Big] = a(a-1)\,\Gamma(a-1) \\
&= a(a-1)\Big[(a-2)\,\Gamma(a-2)\Big] = a(a-1)(a-2)\,\Gamma(a-2) \\
\vdots\quad &= \qquad\qquad \vdots \\
&= a(a-1)(a-2)\cdots\Big[(a-(n-1))\,\Gamma(a-(n-1))\Big] \\
\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)} &= a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1) \qquad (18)
\end{aligned}$$

e generaliza-se (18) por

$$(a)_n^- = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)}. \qquad (19)$$

□

O próximo resultado apresenta uma fórmula para derivadas de ordem inteira de monômios. A proposição a seguir será muito utilizada nas próximas seções no cálculo de algumas derivadas. Sua grande aplicabilidade se faz pela característica de se relacionar a derivada de ordem m com o símbolo de Pochhammer decrescente e, consequentemente, com a função Gama.

Proposição 2.1.6. *Seja* $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-^*$ *e* $m \in \mathbb{N}$. *Vale a relação*

$$f^{(m)}(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-m+1)}\, x^{a-m}.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^a \\ f'(x) & = & a\, x^{a-1} \\ f''(x) & = & a(a-1)\, x^{a-2} \\ f'''(x) & = & a(a-1)(a-2)\, x^{a-3} \\ \vdots & = & \vdots \\ f^{(m)}(x) & = & a(a-1)(a-2)\cdots(a-(m-1))\, x^{a-m} \end{array}$$

Observe que o produtório pode ser reescrito como um símbolo de Pochhammer descrescente. Logo,

$$f^{(m)}(x) = (a)_m^- \; x^{a-m}$$

Por fim, pelo Corolário 2.1.2, conclui-se

$$f^{(m)}(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-m+1)}\, x^{a-m}, \quad a > m-1. \tag{20}$$

□

2.2 A função Beta $B(p,q)$

Agora já visto um pouco sobre $\Gamma(z)$, nesta seção inicia-se o estudo da função Beta, passando pela definição, propriedades e estabelecendo relações com a função Gama. Passado o estudo desta seção, seu retorno dá-se na Seção 3, onde falamos sobre as derivadas fracionárias, e evidenciamos sua importância para o Cálculo Fracionário.

Definição 2.4. *Define-se a* função Beta $B(p,q)$, *para* $p, q \in \mathbb{R}_+$, *pela integral*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t \tag{21}$$

Um dos primeiros pontos a levantar é quanto à simetria entre os parâmetros p e q, ou seja, se $B(p,q) = B(q,p)$. A proposição a seguir trata deste aspecto.

Proposição 2.2.1. *Seja a função Beta* $B(p,q)$, *com* $p, q \in \mathbb{R}_+$, *vale*

$$B(p,q) = B(q,p)$$

Demonstração. Por mudança de variável $1 - t = u$ em (21),

$$B(q,p) = \int_1^0 (1-u)^{q-1}\, u^{p-1}\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^{p-1}\,(1-u)^{q-1}\,\mathrm{d}u = B(p,q)$$

Logo,

$$B(p,q) = B(q,p) \tag{22}$$

□

Portanto, de fato há uma simetria entre os parâmetros p e q. Por outra mudança de variável, relaciona-se a função Beta com funções trigonométricas seno e cosseno.

Proposição 2.2.2. *Seja a função Beta $B(p,q)$, com $p,q \in \mathbb{R}_+$, vale*

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}\,(\,sen\,\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta$$

Demonstração. Seja $B(p,q)$ e a substituição $t = \cos^2\theta$. Note que quando $t = 0$, temos $\cos\theta = 0$ e quando $t = 1$, temos $\cos\theta = \pm 1$. Em conveniência com a relação a ser demonstrada, podemos considerar $\theta = \pi/2$ e $\theta = 0$, respectivamente.
Assim, dado os novos limites de integração, de (21) segue

$$B(p,q) = \int_{\pi/2}^{0} (\cos^2\theta)^{p-1}\,(1-\cos^2\theta)^{q-1}\,(-2\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta)\,\mathrm{d}\theta = -2\int_{\pi/2}^{0} (\cos\theta)^{2p-1}\,(\,\operatorname{sen}\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta$$

Logo,

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}\,(\,\operatorname{sen}\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta \tag{23}$$

□

Desta forma, pode-se então enunciar o teorema a seguir, ao qual relaciona as funções Gama e Beta.

Teorema 2.1 (Relação entre as funções Gama e Beta). *Com $p,q \in \mathbb{R}_+$, vale que*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Demonstração. Segue de (14), para o produto de $\Gamma(p)$ por $\Gamma(q)$, $p,q > 0$, que

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)}\,u^{2p-1}\,v^{2q-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Desenvolvendo a integral dupla acima em coordenadas polares $u = r\,\cos\theta$ e $v = r\,\operatorname{sen}\theta$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, e considerando a representação da função Beta da Proposição 2.2.2,

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\,\Gamma(q) &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r^{2(p+q)-1}\,(\cos\theta)^{2p-1}\,(\,\operatorname{sen}\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \left[2\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r^{2(p+q)-1}\,\mathrm{d}r\right]\,\left[2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}\,(\,\operatorname{sen}\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \Gamma(p+q)\,B(p,q)
\end{aligned}$$

Logo,

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{24}$$

□

Proposição 2.2.3. *Seja a função Beta $B(p,q)$, com $p,q \in \mathbb{R}_+$, vale*

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}\,\mathrm{d}u$$

Demonstração. Por mudança de variável, seja $t = \dfrac{u}{1+u}$. Segue da Definição 2.4,

$$B(p,q) = \int_0^\infty \left(\frac{u}{1+u}\right)^{p-1} \left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{q-1} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q-2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2}$$

Logo,

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}\,\mathrm{d}u \tag{25}$$

$\square$

A partir de (25) é possível obter novas propriedades da função Gama, como descrito nas seguintes proposições.

Proposição 2.2.4. *Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$,*

$$\int_0^\infty \frac{u^\alpha}{(1+u^2)^\beta}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\beta-\dfrac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)}.$$

Demonstração. Considerando (25) e a mudança de variável $u^2 = t$, nota-se que os limites de integração permanecem os mesmos.

$$\int_0^\infty \frac{\left(t^{1/2}\right)^\alpha}{(1+t)^\beta}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\,t^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{(1+t)^\beta}\,\mathrm{d}t$$

Logo, se considerarmos $p-1 = \dfrac{\alpha-1}{2}$, teremos $p = \dfrac{\alpha+1}{2}$, enquanto ao tomarmos $p+q = \beta$, $q = \beta - \dfrac{\alpha+1}{2}$. Pelo Teorema 2.1 e pela Proposição 2.2.3, segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{(1+t)^\beta}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\,B\left(\frac{\alpha+1}{2}\,,\,\beta-\frac{\alpha+1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\beta-\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}+\beta-\frac{\alpha+1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^\infty \frac{u^\alpha}{(1+u^2)^\beta}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\beta-\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)} \tag{26}$$

$\square$

É possível correlacionar funções trigonométricas com a função Gama a partir do uso da função Beta. Observemos a próxima proposição.

Proposição 2.2.5. *São equivalentes*

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}\theta)^n \, \mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Demonstração. Note que

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n \, (\operatorname{sen}\theta)^0 \, \mathrm{d}\theta$$

Logo, se $2p - 1 = n$, então $p = \dfrac{n+1}{2}$ e se $2q - 1 = 0$, tem-se $q = \dfrac{1}{2}$. Da representação trigonométrica (23) conclui-se

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, 1/2\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/2)\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Análogo para $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}\theta)^n \, \mathrm{d}\theta$, com $(\cos\theta)^0$.

□

2.3 Funções de Mittag-Leffler

Há algumas maneiras de introduzir-se a função de Mittag-Leffler[13] de um parâmetro e suas generalizações. Entre elas, a definição que hoje é conhecida como a clássica função de Mittag-Leffler que foi apresentada pelo sueco Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) entre os anos de 1902 e 1905 [22, p.4], a qual foi base para a generalização da mesma função com dois parâmetros posteriormente [29, p.22]. Nesta subseção definem-se então as funções de Mittag-Leffler com um e dois parâmetros. Através de generalizações é possível determinar interrelações entre as duas funções. Além disso, será estabelecida uma escrita alternativa para alguns resultados já conhecidos para a função exponencial e a Progressão Geométrica. Por fim, propõe-se que a função de Mittag-Leffler pode ser vista como uma generalização da função exponencial.

2.3.1 Função de Mittag-Leffler de um parâmetro

Definição 2.5. *A* função de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$*, de parâmetro* α *e* $\alpha \in \mathbb{R}_+$*, é dada pela série de potências*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{27}$$

Observação. Um primeiro resultado que pode-se observar é se o parâmetro $\alpha = 0$ em (27):

$$E_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1-z}, \quad \text{(Soma da PG infinita se } |z| < 1\text{)}$$

[13]A abreviação ML neste trabalho refere-se à função de Mittag-Leffler de um e de dois parâmetros.

Relaciona-se a função de Mittag-Leffler com a Progressão Geométrica (PG), conteúdo da Educação Básica, conforme a habilidade EM13MAT508[14] da BNCC.

Exemplo 2.4. *A série de Maclaurin da função exponencial é* $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. *Para o parâmetro* $\alpha = 1$*, obtém-se que*

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \tag{28}$$

Portanto, nota-se que, de fato, há alguma correspondência entre as funções, percebendo Mittag-Leffler como uma possível generalização da função exponencial.

Exemplo 2.5. *A representação da função trigonométrica cosseno como série de potências é dada por* $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$. *Da razão entre uma potência e um fatorial, leva-se a conjecturar uma possível ligação entre cosseno e a Definição 2.5.*

De fato,

$$E_2(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos(z) \tag{29}$$

*estabelece uma correspondência da função trigonométrica cosseno com um **caso particular** de ML:* $E_2(-z^2) = \cos(z)$. *Na próxima subseção veremos que a função seno também possui uma correspondência com um caso particular de ML, porém, com a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.*

Em acordo com as habilidades EM13MAT306[15] e EM13MAT404, o trabalho com funções trigonométricas acontece na segunda série do Ensino Médio. Entre os conteúdos está a adição e subtração de arcos, incluindo a soma do arco duplo. Semelhante ao apresentado aos estudantes, quando é deduzida a fórmula da soma do arco duplo, é possível estabelecer uma expressão que relaciona a duplicação do parâmetro da função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Proposição 2.3.1 (Fórmula de duplicação para a clássica função de Mittag-Leffler). *Seja* $z \in \mathbb{C}$ *e* α *um parâmetro real positivo*

$$E_{2\alpha}(z) = \frac{1}{2}\left[E_\alpha(z^{1/2}) + E_\alpha(-z^{1/2})\right].$$

[14] "(EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas."[5, p.541]

[15] "(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria." [5, p.536]

Demonstração. Pela definição da função de Mittag-Leffler de um parâmetro,

$$\begin{aligned}
E_\alpha(z^{1/2}) + E_\alpha(-z^{1/2}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^{1/2})^k}{\Gamma(\alpha k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(z^{1/2})^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \\
&= \left(1 + \frac{z^{1/2}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^1}{\Gamma(2\alpha+1)} + \cdots + \frac{z^{k/2}}{\Gamma(k\alpha+1)} + \cdots\right) + \\
&+ \left(1 - \frac{z^{1/2}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^1}{\Gamma(2\alpha+1)} - \cdots + \frac{(-1)^k\,z^{k/2}}{\Gamma(k\alpha+1)} + \cdots\right) \\
&= 2 + \frac{2z}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{2z^2}{\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{2z^4}{\Gamma(6\alpha+1)} + \cdots \\
&= 2\left[1 + \frac{z}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{z^2}{\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{z^4}{\Gamma(6\alpha+1)} + \cdots\right]
\end{aligned}$$

Observando a soma acima, nota-se o parâmetro 2α em cada denominador, podendo assim ser esquematizado em somatório, onde conclui-se o esperado

$$\begin{aligned}
E_\alpha(z^{1/2}) + E_\alpha(-z^{1/2}) &= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2\alpha k+1)} \\
E_\alpha(z^{1/2}) + E_\alpha(-z^{1/2}) &= 2E_{2\alpha}(z) \\
E_{2a}(z) &= \frac{1}{2}\left[E_\alpha(z^{1/2}) + E_\alpha(-z^{1/2})\right].
\end{aligned}$$

□

2.3.2 Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros

A "sequência" da clássica função de Mittag-Leffler é dada pela função de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Foi apresentada pelo sueco Anders Wiman (1865-1959) [29] em 1905 como uma generalização da ML clássica. No decorrer desta subseção observa-se alguns resultados que não só expandem o conceito da função de um parâmetro, como também relaciona-a com a de dois parâmetros.

Definição 2.6. *A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros $E_{\alpha,\beta}(z)$, de parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, é dada pela série de potências*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{30}$$

É fácil notar que para $\beta = 1$,

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_\alpha(z) \tag{31}$$

e que a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros generaliza a de um parâmetro.

Exemplo 2.6. *A partir do Exemplo 2.5, pretende-se determinar uma relação similar para a função trigonométrica seno. Considerando que a representação em série de potências de seno é $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, vale que*

$$E_{2,2}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

Multiplicando a equivalência acima por $z \neq 0$,

$$z\,E_{2,2}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \,\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \,sen(z) \tag{32}$$

Desta maneira fica determinado outro exemplo de **caso particular** de ML na forma da função trigonométrica seno: $zE_{2,2}(-z^2) = \text{sen}(z)$.

Proposição 2.3.2. *Seja $x \in \mathbb{R}$ e um parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}_+$,*

$$E_\alpha(-x) = E_{2\alpha}(x^2) - xE_{2\alpha,1+\alpha}(x^2)$$

Demonstração. Sejam $x, \alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$. Considerando a fórmula de duplicação da Proposição 2.3.1,

$$\begin{aligned} E_{2\alpha}(x^2) &= \frac{1}{2}\left[E_\alpha((x^2)^{1/2})) + E_\alpha((-x^2)^{1/2}))\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[E_\alpha(x) + E_\alpha(-x)\right] \end{aligned}$$

A expansão de $E_{2\alpha,1+\alpha}(x^2)$ pela Definição 2.6 fica por

$$\begin{aligned} E_{2\alpha,1+\alpha}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{\Gamma((2k+1)\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{x^4}{\Gamma(5\alpha+1)} + \cdots + \frac{x^{2k}}{\Gamma((2k+1)\alpha+1)} + \cdots \\ x\,E_{2\alpha,1+\alpha}(x^2) &= \frac{x}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{x^5}{\Gamma(5\alpha+1)} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{\Gamma((2k+1)\alpha+1)} + \cdots \end{aligned}$$

Agora, da diferença entre $\frac{1}{2}E_\alpha(x)$ e $xE_{2\alpha,1+\alpha}(x^2)$, segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_\alpha(x) - x\,E_{2\alpha,1+\alpha}(x^2) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \cdot + \frac{1}{2}\frac{x^k}{\Gamma(k\alpha+1)} + \dots\right) + \\ &+ \left(-\frac{x}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{x^3}{\Gamma(3\alpha+1)} - \cdots - \frac{x^{2k+1}}{\Gamma((2k+1)\alpha+1)} - \cdots\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{x}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \cdots \quad (*) \end{aligned}$$

Por fim, observe que

$$\frac{1}{2}E_\alpha(-x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{x}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \cdots \quad (**)$$

Portanto, pela transitividade entre (*) e (**) e rearranjando de forma conveniente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_\alpha(-x) &= \frac{1}{2}E_\alpha(x) - x\,E_{2\alpha,1+\alpha}(x^2) \\ E_\alpha(-x) &= \frac{1}{2}E_\alpha(x) + \frac{1}{2}E_\alpha(-x) - x\,E_{2\alpha,1+\alpha}(x^2) \\ E_\alpha(-x) &= E_{2\alpha}(x^2) - xE_{2\alpha,1+\alpha}(x^2). \end{aligned}$$

conforme esperado.

□

Na próxima seção serão estudadas duas formulações de derivada de ordem não inteira (ou arbitrária). Por diversas vezes, no contexto das derivadas de ordem arbitrárias, será necessário o cálculo da derivada de ordem inteira m da função de Mittag-Leffler (a Proposição 2.1.6 será muito útil). Um primeiro resultado sobre a derivada da função de ML pode ser visto na proposição a seguir:

Proposição 2.3.3. *Para a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros $E_{\alpha,\beta}(z)$, de parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, vale que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_{\alpha,\beta}(z) = z\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + E_{\alpha,\alpha+\beta}(z)$$

Demonstração. Para verificar, primeiro observe que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{2z}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{kz^{k-1}}{\Gamma(k\alpha+\beta)} + \cdots\right]$$

Agora, observemos a expansão de $E_{\alpha,\alpha+\beta}(z)$,

$$E_{\alpha,\alpha+\beta}(z) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{z}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \frac{z^2}{\Gamma(3\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{z^k}{\Gamma((k+1)\alpha+\beta)} + \cdots\right]$$

Derivando em relação a z a igualdade acima

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_{\alpha,\alpha+\beta}(z) = \left[\frac{1}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \frac{2z}{\Gamma(3\alpha+\beta)} + \frac{3z^2}{\Gamma(4\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{kz^{k-1}}{\Gamma((k+1)\alpha+\beta)} + \cdots\right]$$

Por fim, é fácil ver que

$$z\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + E_{\alpha,\alpha+\beta}(z) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{kz^{k-1}}{\Gamma(k\alpha+\beta)} + \cdots\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_{\alpha,\beta}(z)$$

Logo,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_{\alpha,\beta}(z) = z\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + E_{\alpha,\alpha+\beta}(z) \tag{33}$$

□

Corolário 2.3.1. *Para $E_{\alpha,\beta}(z)$, de parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, vale que*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = z\,E_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) &= \frac{z}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} + \cdots \\ zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} &= \left(\frac{z}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} + \cdots\right) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \end{aligned}$$

Logo,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = z\,E_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}. \tag{34}$$

□

Conforme já visto, a função com dois parâmetros generaliza a de um parâmetro. Para além disso, pode-se correlacioná-las em termos de um único parâmetro através de uma relação conforme mostra o próximo teorema.

Teorema 2.2. *Para $\alpha \in \mathbb{R}_+$, vale que*

$$E_\alpha(z) = zE_{\alpha,\alpha+1}(z) + 1$$

Demonstração. Observe,

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\alpha+1}(z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z}{\Gamma(2\alpha+1)} + \cdots + \frac{z^k}{\Gamma((k+1)\alpha+1)} + \cdots \\
zE_{\alpha,\alpha+1}(z) &= \frac{z}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \cdots + \frac{z^{k+1}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)} + \cdots \\
zE_{\alpha,\alpha+1}(z) + 1 &= \left(\frac{z}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \cdots + \frac{z^{k+1}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)} + \cdots\right) + 1 = E_\alpha(z)
\end{aligned}$$

Logo,

$$E_\alpha(z) = zE_{\alpha,\alpha+1}(z) + 1 \tag{35}$$

□

Para o resultado a seguir, verificam-se a presença de: uma derivada da função de ML, assim como na Proposição 2.3.3, uma recorrência tal qual no Corolário 2.3.1 e Teorema 2.2 e, em particular, uma recorrência ligada diretamente a um dos dois parâmetros.

Proposição 2.3.4. *Para a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros $E_{\alpha,\beta}(z)$, de parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, vale que*

$$\alpha z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} E_{\alpha,\beta}(z) = E_{\alpha,\beta-1}(z) + (1-\beta)E_{\alpha,\beta}(z), \quad Re(\beta) > 1$$

Demonstração. Iniciando pela expansão de $E_{\alpha,\beta-1}(z)$ e considerando a Proposição 2.1.1 e a expansão de domínio de Gama (11)

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta-1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta-1)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} + \frac{z}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+\beta-1)} + \cdots + \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta-1)} + \cdots \\
&= \frac{\beta-1}{\Gamma(\beta)} + \frac{z(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{z^2(2\alpha+\beta-1)}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{z^k(k\alpha+\beta-1)}{\Gamma(k\alpha+\beta)} + \cdots
\end{aligned}$$

Do somatório de (30) segue que

$$\beta E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{\beta}{\Gamma(\beta)} + \frac{\beta z}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{\beta z^2}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \frac{\beta z^3}{\Gamma(3\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{\beta z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} + \cdots$$

Observe,

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta-1}(z) - \beta E_{\alpha,\beta}(z) &= -\frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{\alpha z - z}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{2\alpha z^2 - z^2}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{k\alpha z^k - z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} + \cdots \\
&= \left[\frac{\alpha z}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{2\alpha z^2}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{k\alpha z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} + \cdots\right] - \\
&- \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{z}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} + \cdots\right] \\
&= \alpha z \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{2z}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{k z^{k-1}}{\Gamma(k\alpha+\beta)} + \cdots\right] - E_{\alpha,\beta}(z)
\end{aligned}
$$

Assim, considerando (33) no segundo membro da igualdade anterior e rearranjando convenientemente,

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta-1}(z) - \beta E_{\alpha,\beta}(z) &= \alpha z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} E_{\alpha,\beta}(z) - E_{\alpha,\beta}(z) \\
\alpha z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} E_{\alpha,\beta}(z) &= E_{\alpha,\beta-1}(z) + (1-\beta) E_{\alpha,\beta}(z)
\end{aligned}
$$

conforme esperado.

$\square$

Exemplo 2.7. *Neste resultado, relaciona-se mais uma vez a função exponencial com a função de Mittag-Leffler, porém, desta vez com a de dois parâmetros. Da expansão do somatório com os parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ e da Proposição 2.1.2,*

$$
E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots + \frac{z^k}{(k+1)!} + \cdots \tag{36}
$$

Conforme recordado no Exemplo 2.4, tem-se

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) - 1 &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots\right) - 1 &&= e^z - 1 \\
\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) - 1\right] \Big/ z &= 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{k!} + \cdots &&= \frac{e^z - 1}{z}
\end{aligned} \tag{37}
$$

E, desta forma, a transtividade entre (36) *e* (37) *fornece a propriedade*

$$
E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z} \tag{38}
$$

Exemplo 2.8. *Semelhante ao exemplo anterior, para os parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 3$,*

$$
E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots + \frac{z^k}{(k+2)!} + \cdots \tag{39}
$$

Segue que,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) - 1 - z &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots\right) - 1 - z &&= e^z - 1 - z \\
\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) - 1 - z\right] \Big/ z^2 &= \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots + \frac{z^{k-2}}{k!} + \cdots &&= \frac{e^z - 1 - z}{z^2}
\end{aligned} \tag{40}
$$

Pela transitividade entre (39) *e* (40), *vem que*

$$E_{1,3}(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \tag{41}$$

A próxima proposição traz uma equivalência para um caso particular da função ML de dois parâmetros. Mais uma vez estabelecendo relação da função de dois com a de um parâmetro.

Observação. Para $|z| < 1$ e $\beta \in \mathbb{R}_+$, é válida a equivalência

$$E_{0,\beta}(z) = \frac{E_0(z)}{\Gamma(\beta)} = \frac{(1-z)^{-1}}{\Gamma(\beta)}$$

Demonstração. Pela definição de Mittag-Leffler de dois parâmetros (2.6), para $E_{0,\beta}(z)$ tem-se

$$E_{0,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{z}{\Gamma(\beta)} + \frac{z^2}{\Gamma(\beta)} + \cdots + \frac{z^k}{\Gamma(\beta)} + \cdots = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Da hipótese $|z| < 1$ vem que a última somatória da equivalência acima é caracterizada pela série geométrica convergente, logo

$$E_{0,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{1-z}$$

e, reorganizando os termos, obtém-se as extremidades da equivalência desejada

$$E_{0,\beta}(z) = \frac{(1-z)^{-1}}{\Gamma(\beta)}.$$

A finalização da prova se dá pela definição de ML de um parâmetro (27) para a razão $E_0(z)/\,\Gamma(\beta)$,

$$\frac{E_0(z)}{\Gamma(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{z}{\Gamma(\beta)} + \frac{z^2}{\Gamma(\beta)} + \cdots + \frac{z^k}{\Gamma(\beta)} + \cdots = E_{0,\beta}(z)$$

Desta forma, unindo os resultados e organizando-os a equivalência fica estabelecida:

$$E_{0,\beta}(z) = \frac{E_0(z)}{\Gamma(\beta)} = \frac{(1-z)^{-1}}{\Gamma(\beta)}. \tag{42}$$

Vale observar que foi considerado $\alpha = 0$, enquanto na Definição 2.6, $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

$\square$

Durante esta seção, estudou-se pontos significativos das funções eulerianas. Foram vistas definições, características, propriedades e algumas implicações que, em geral, passam despercebidas em um curso de Cálculo Diferencial e Integral. A generalização do fatorial via função Gama é um ponto passível a ser trabalhado em um curso de Cálculo, assim como a relação da função Beta com as funções trigonométricas seno e cosseno. Da mesma forma que pode-se abordar a Função de Mittag-Leffler de um parâmetro durante o estudo de séries, dada a sua possível generalização da função exponencial. O mesmo vale para os casos particulares de ML das funções seno e cosseno.

3 Cálculo Fracionário

A amplitude e complexidade do trato é o que torna o Cálculo Fracionário tema tão pesquisado desde a concepção da sua ideia. Do século XVII [16, 20] em diante, vários foram os trabalhos que buscaram generalizar aquilo que l'Hôpital e Leibniz conjecturaram. Pode-se destacar, além da definição de Riemann-Liouville, a derivada fracionária segundo: Caputo, Weyl, Grünwald-Letnikov, Riesz, Marchaud, Hilfer, etc. Fato curioso, é que existem trabalhos que não conversam entre si — alguns obtendo resultados distintos para a derivada/integral de uma mesma função.

Desta variedade de modelos, aqui abordamos o trabalho iniciado em 1832 pelo francês Joseph Liouville (1809-1882) e, posteriormente, aprofundado pelo alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) em 1847. A chamada integral de ordem fracionária de Riemann-Liouville fornece uma generalização para integrais de ordem arbitrária. Em seguida, abordamos as derivadas fracionárias elaboradas por Riemann-Liouville e também as por Michele Caputo em 1969 [6]. Ver-se-á que todas as definições estão fielmente apoiadas nas funções Gama e Beta, daí a importância das mesmas para os estudos do Cálculo Fracionário.

3.1 Ordem de uma integral

O conceito de integral é bem estabelecido e incontáveis são suas aplicações. Desde a descoberta e aperfeiçoamento do Teorema Fundamental do Cálculo, desenvolvido e refinado por Isaac Barrow (1630-1677), Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) [2], este é tido como um dos maiores feitos da mente humana.

Variando apenas em notação, de modo geral, o TFC diz que se f for contínua em $[a, b]$, então a função definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $a \leq x \leq b$, é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $F'(x) = f(x)$. Ademais, ainda pelo Teorema Fundamental do Cálculo [35], se f for contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \tag{43}$$

Revisitadas estas ideias, para fins de notação, utilizamos neste trabalho o operador J como representação da integral de uma função integrável. Assim, define-se a integral de f como

$$Jf(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{44}$$

se f é integrável no intervalo $[a, b]$, $\quad a \leq x \leq b$.

Visto a integral iterada, pode-se levar a pensar se é possível determinar diretamente a integral de um grau superior de uma função já antes integrada. Este conceito é justamente o que a **Identidade de Cauchy** traz. Por ela, adquirimos uma fórmula capaz de determinar a integral de ordem n, $n \in \mathbb{N}$, de uma função, sem necessariamente conhecer todas as funções sequencialmente integradas anteriormente.

Teorema 3.1 (**Identidade de Cauchy**). *Se f é uma função integrável no intervalo real $[a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, então*

$$J^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Demonstração. Pelo Princípio da Indução Matemática,
i) Caso base: $n = 1$
É imediato da definição de integral (44), pois,

$$Jf(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(1-1)!}\int_a^x (x-t)^{1-1} f(t)\,\mathrm{d}t = J^1 f(x).$$

ii) Hipótese de Indução
Suponha, que para algum $k > 1$ natural, vale que

$$J^k f(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Da recursividade, a próxima integral iterada de $J^k f(x)$ é da ordem $k+1$ e

$$\begin{aligned} J^{k+1}f(x) = J(J^k f(x)) &= \int_a^x (J^k f(u))\,\mathrm{d}u = \int_a^x \left(\frac{1}{(k-1)!}\int_a^u (u-\xi)^{k-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x \int_a^u (u-\xi)^{k-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}u \qquad (45) \end{aligned}$$

Note que os limites de integração variam de a a x. É possível rearranjá-los de forma que a região de integração permaneça a mesma, porém, alterando a ordem de integração, veja a figura 2.

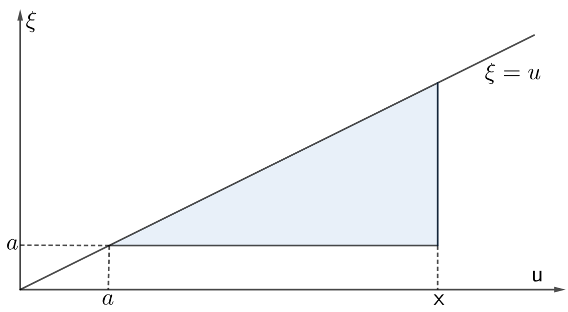

Figura 2: Área de integração da integral dupla (45)

Assim,

$$\begin{aligned} J^{k+1}f(x) &= \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x \int_\xi^x (u-\xi)^{k-1} f(\xi)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x \left[\frac{1}{k}(u-\xi)^n\right]_\xi^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{k!}\int_a^x (x-\xi)^k f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

como esperado.

□

Uma vez estabelecido o Teorema 3.1, percebe-se ser sem prejuízo à identidade — observando apenas o lado direito da igualdade — se n é real. Isto se dá pelo fato da generalização do fatorial (2.1.2), ou pelo menos para os pontos em que $\Gamma(n)$ estiver definido. Entretanto, ao considerarmos o lado esquerdo da igualdade, nos depararíamos com a ideia de uma integral de ordem não natural. É a partir daí que começamos a discutir as próximas subseções.

3.2 Integral de ordem fracionária de Riemann-Liouville

A Identidade de Cauchy é uma importante ferramenta para enfim definir a chamada integral de ordem fracionária de Riemann-Liouville — apesar do mais adequado ser "ordem arbitrária", uma vez que não se restringe apenas aos números racionais. Finaliza-se a subseção anterior com a observação que podemos, pelo menos em parte, substituir $(n-1)!$ pela sua generalização $\Gamma(n)$. A definição a seguir está apoiada neste fato.

Definição 3.1. *Define-se a* integral de ordem arbitrária α de Riemann-Liouville*, com $\alpha \in \mathbb{R}_+$, denotado por ${}^{RL}J^\alpha f(x)$, a integral*

$$ {}^{RL}J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{46}$$

se f contínua em $[a,b]$ e $x > 0$. Para fins de simplificação, quando não houver ambiguidade utilizaremos simplesmente a notação $J^\alpha f(x)$.

Como a integral de RL é uma possível generalização para os conceitos de integrais de ordem inteira, resultados conhecidos também devem ser contemplados. Entre eles destaca-se as integrais iteradas, e a lei dos expoentes vai ao encontro deste apontamento.

Teorema 3.2 (Lei dos expoentes). *Se f é uma função contínua no intervalo real $[a,b]$ e os parâmetros $\alpha, \beta \geq 0$, então*

$$J^\alpha(J^\beta f(x)) = J^{\alpha+\beta} f(x).$$

Demonstração. Seja f contínua no intervalo $[0,b]$. Pela definição da integral fracionária de RL (46) segue

$$\begin{aligned} J^\alpha(J^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (J^\beta f(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\xi)^{\beta-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^t (x-t)^{\alpha-1} (t-\xi)^{\beta-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Semelhante ao desenvolvido no Teorema 3.1, pode-se alterar os limites de integração e a ordem de integração mantendo-se a mesma região de integração (veja a figura 2 que mostra uma região semelhante).

Assim,

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}(J^{\beta}f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x\int_\xi^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\xi)^{\beta-1}f(\xi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x\int_\xi^x \Big[(x-\xi)-(t-\xi)\Big]^{\alpha-1}(t-\xi)^{\beta-1}f(\xi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x\int_\xi^x \left[(x-\xi)\left(1-\frac{t-\xi}{x-\xi}\right)\right]^{\alpha-1}(t-\xi)^{\beta-1}f(\xi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Pela mudança de variável $\dfrac{t-\xi}{x-\xi}=h$, os limites de integração alteram-se para $h=0$ quando $t=\xi$, enquanto para $t=x$, $h=1$, levando em

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}(J^{\beta}f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x\int_0^1 (x-\xi)^{\alpha-1}(1-h)^{\alpha-1}\left(h(x-\xi)\right)^{\beta-1}f(\xi)\left((x-\xi)\,\mathrm{d}h\right)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-\xi)^{\alpha+\beta-1}f(\xi)\left(\int_0^1 (1-h)^{\alpha-1}\,h^{\beta-1}\,\mathrm{d}h\right)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

Nota-se que a segunda integral da igualdade anterior é resultante, conforme (21), de $B(\alpha,\beta)$. Pelo Teorema 2.1, simplifica-se a razão $B(\alpha,\beta)/\,\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$, finalizando por

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}(J^{\beta}f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-\xi)^{\alpha+\beta-1}f(\xi)\,B(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-\xi)^{\alpha+\beta-1}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^x (x-\xi)^{\alpha+\beta-1}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = J^{\alpha+\beta}f(x).
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.2.1. *A lei dos expoentes implica também na propriedade*

$$J^{\alpha}(J^{\beta}f(x)) = J^{\beta}(J^{\alpha}f(x)).$$

Demonstração. Da comutatividade da soma é fato que

$$J^{\alpha}(J^{\beta}f(x)) = J^{\alpha+\beta}f(x) = J^{\beta+\alpha}f(x).$$

□

Um dos primeiros resultados que pode-se obter é o cálculo da integral de ordem arbitrária α da função constante.

Exemplo 3.1. *Seja* $f(x)=c$, *com* $c,\alpha\in\mathbb{R}$ *e* $\alpha>0$.

$$J^{\alpha}f(x) = J^{\alpha}c = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,c\,\mathrm{d}t = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left[x\left(1-\frac{t}{x}\right)\right]^{\alpha-1}\mathrm{d}t$$

Com a mudança de variável $\dfrac{t}{x} = h$*, os limites de integração são* $h = 0$ *se tomarmos* $t = 0$*, e* $h = 1$ *se* $t = x$*, fazendo com que*

$$J^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-h)^{\alpha-1} x \,\mathrm{d}h = \frac{c x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-h)^{\alpha-1} \,\mathrm{d}h$$

Nota-se que a integral da igualdade anterior pode ser reescrita na forma de $B(\alpha, 1)$*. Pelo Teorema 2.1 segue*

$$J^\alpha c = \frac{c x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, 1) = \frac{c x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

logo,

$$J^\alpha c = \frac{c x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{47}$$

Veja que para $n \in \mathbb{N}$, verifica-se conforme o esperado da integral usual, pois

$$J^n c = \frac{c x^n}{\Gamma(n+1)} = \frac{c x^n}{n!}$$

Portanto, temos a integral RL para qualquer função constante. Outro resultado possível é o cálculo da integral de ordem arbitrária da função potência.

Exemplo 3.2. *Seja a função potência* $f(x) = x^c$, $c > -1, c \in \mathbb{R}$*. A integral de ordem arbitrária* $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$*, da função fica dada por*

$$\begin{aligned} J^\alpha f(x) = J^\alpha\, x^c \;&=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, t^c \,\mathrm{d}t \\ &=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left[x\left(1 - \frac{t}{x}\right)\right]^{\alpha-1} t^c \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Assim como feito no Exemplo 3.1, com a substituição $\dfrac{t}{x} = h$*, chega-se na integral*

$$J^\alpha x^c = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1}\,(1-h)^{\alpha-1}\,(xh)^c\, x \,\mathrm{d}h = \frac{x^{\alpha+c}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-h)^{\alpha-1}\, h^c \,\mathrm{d}h$$

Novamente, identificando na integral a função $B(\alpha, c+1)$*,*

$$J^\alpha x^c = \frac{x^{\alpha+c}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, c+1) = \frac{x^{\alpha+c}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)}$$

logo,

$$J^\alpha x^c = \frac{\Gamma(c+1)\, x^{\alpha+c}}{\Gamma(\alpha+c+1)} \tag{48}$$

Determinado assim a integral RL da função potência. Tal resultado será muito utilizado nas integrais a seguir e nas derivadas de ordem arbitrária das próximas seções. Verifica-se que para $n, c \in \mathbb{N}$, tem-se o resultado da integral usual, já que

$$J^n x^c = \frac{\Gamma(c+1)\, x^{n+c}}{\Gamma(n+c+1)} = \frac{c!\, x^{n+c}}{(n+c)!}$$

Exemplo 3.3. *Calculando a integral fracionária de ordem* $3/2$ *da função* $f(x) = \sqrt{x}$*,*

$$J^{3/2}\sqrt{x} = \frac{\Gamma(1/2+1)\,x^{3/2+1/2}}{\Gamma(3/2+1/2+1)} = \frac{\Gamma(3/2)\,x^2}{\Gamma(3)} = \frac{(\sqrt{\pi}/2)\;x^2}{2} = \frac{\sqrt{\pi}x^2}{4}.$$

Exemplo 3.4. *A integral de ordem arbitrária* $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$*, da função* $f(x) = sen(x)$ *fica dada por*

$$J^{\alpha}\,sen(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\mathrm{d}t$$

considerando a representação da função seno pela série de Taylor. Note que

$$\begin{aligned} J^{\alpha}\,sen(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,t^{2k+1}\mathrm{d}t\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\;J^{\alpha}\,x^{2k+1} \end{aligned}$$

Assim, da integral arbitrária da função potência do Exemplo 3.2, segue

$$\begin{aligned} J^{\alpha}\,sen(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,\frac{\Gamma(2k+2)\,x^{2k+\alpha+1}}{\Gamma(2k+\alpha+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;x^{2k+\alpha+1}}{\Gamma(2k+\alpha+2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;(x^2)^k\,x^{\alpha+1}}{\Gamma(2k+\alpha+2)} \\ &= x^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2k+\alpha+2)} \end{aligned}$$

logo,

$$J^{\alpha}\,sen(x) = x^{\alpha+1}\,E_{2,\alpha+2}(-x^2) \tag{49}$$

Do Cálculo de ordem inteira espera-se que a integral indefinida da função seno seja igual a $F(x) = -\cos(x) + C$. Veja então o que acontece em (49) para $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} J^{1}\,\mathrm{sen}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;x^{2k+2}}{\Gamma(2k+3)} \\ &= \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots \\ &= 1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots \\ &= 1 - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right] \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \cos(x) \end{aligned}$$

Logo, $J^1\,\mathrm{sen}(x) = \int_0^x \mathrm{sen}(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + 1$, o que é a integral definida usual.

Exemplo 3.5. *A integral de ordem arbitrária $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, da função $f(x) = \cos(x)$, utilizando-se sua representação pela série de Taylor, fica dada por*

$$J^\alpha \cos(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k}}{(2k)!}\, \mathrm{d}t.$$

De forma semelhante a do Exemplo 3.4, tem-se que

$$\begin{aligned}
J^\alpha \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, t^{2k} \mathrm{d}t \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, J^\alpha\, x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{\Gamma(2k+1)\, x^{2k+\alpha}}{\Gamma(2k+\alpha+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+\alpha}}{\Gamma(2k+\alpha+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, (x^2)^k\, x^\alpha}{\Gamma(2k+\alpha+1)} \\
&= x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2k+\alpha+1)}
\end{aligned}$$

logo,

$$J^\alpha \cos(x) = x^\alpha\, E_{2,\alpha+1}(-x^2) \tag{50}$$

Em contraponto a $J^1 \operatorname{sen}(x)$, para $J^1 \cos(x)$ vale o seguinte resultado:

$$J^1 \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{sen}(x).$$

Logo, $J^1 \cos(x) = \int_0^x \cos(x)\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(x)$. Mostra-se assim, até certo ponto, a circularidade esperada da integração segundo Riemann–Liouville das funções trigonométricas seno e cosseno. Além disso, as integrais RL da seno e cosseno para $\alpha = 1$ coincidem com as integrais usuais dessas funções.

Exemplo 3.6. *A integral de ordem arbitrária $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, da função exponencial $f(x) = e^{cx}$, $c \in \mathbb{R}$, é*

$$J^\alpha e^{cx} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, e^{ct}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ct)^k}{k!}\, \mathrm{d}t$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned}
J^\alpha e^{cx} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, t^k \mathrm{d}t \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!}\, J^\alpha x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} \frac{\Gamma(k+1)\, x^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k\, x^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k x^k x^\alpha}{\Gamma(k+\alpha+1)} \\
&= x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cx)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)}
\end{aligned}$$

logo,

$$J^{\alpha} e^{cx} = x^{\alpha}\, E_{1,\alpha+1}(cx) \tag{51}$$

Observe que para $c, \alpha = 1$,

$$\begin{aligned}
J^1 e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(k+2)} \\
&= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
&= -1 + \left[1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right] \\
&= -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
&= -1 + e^x
\end{aligned}$$

Mais uma vez observa-se que $J^1 e^x = \int_0^x e^x \mathrm{d}x = e^x - 1$.

Exemplo 3.7. *A integral de ordem arbitrária $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, da função de Mittag-Leffler de um parâmetro $E_{\alpha}(x^{\alpha})$ é*

$$\begin{aligned}
J^{\alpha} E_{\alpha}(x^{\alpha}) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, t^{\alpha k} \,\mathrm{d}t \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)}\, J^{\alpha} x^{\alpha k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)\, x^{\alpha k + \alpha}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}
\end{aligned}$$

Com a substituição $k+1 = l$ chega-se

$$J^{\alpha} E_{\alpha}(x^{\alpha}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(x^{\alpha})^l}{\Gamma(\alpha l + 1)}$$

ou seja,

$$J^{\alpha} E_{\alpha}(x^{\alpha}) = E_{\alpha}(x^{\alpha}) - 1 \tag{52}$$

Pensando em $E_{\alpha}(x)$ como uma possível generalização da função exponencial, em se tratanto de integrais de RL de ordem 1 das funções de Mittag-Leffler, este é o resultado mais próximo possível de $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$.

Exemplo 3.8. *A integral de ordem arbitrária $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros $E_{b,c}(x)$ é*

$$\begin{aligned}
J^\alpha E_{b,c}(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(bk+c)} \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(bk+c)} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \, t^k \, \mathrm{d}t \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(bk+c)} \, J^\alpha x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(bk+c)} \, \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \, x^{k+\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! \, x^{k+\alpha}}{\Gamma(bk+c)\Gamma(k+\alpha+1)}
\end{aligned}$$

logo,

$$J^\alpha E_{b,c}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! \, x^{k+\alpha}}{\Gamma(bk+c)\Gamma(k+\alpha+1)}. \tag{53}$$

3.3 Derivada de ordem fracionária de Riemann-Liouville

Conforme são definidas as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo, nesta seção e na seção 3.4 a seguir, é necessário o cálculo da integral de Riemann-Liouville já estabelecido. Em ambas as definições há a presença de um operador com ordem arbitrária e um operador com ordem inteira positiva. Quando a ordem arbitrária tratar-se de um número natural, nada mais é do que as definições usuais de derivada e integral já conhecidas.

Definição 3.2. *A* derivada fracionária de Riemann-Liouville *de ordem arbitrária α, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, da função $f(x)$, para $x > 0$ é definida por*

$$^{RL}D^{\alpha} f(x) = D^m[J^{m-\alpha} f(x)], \quad \textit{onde } m \in \mathbb{N}, \textit{ tal que } m-1 < \alpha \leq m \tag{54}$$

Notando que primeiro integra-se em ordem arbitrária, em seguida deriva-se em ordem inteira. Por exemplo, a derivada $^{RL}D^{5/2}$ de uma função é primeiro integrar $^{RL}J^{1/2}$ e depois $\mathrm{d}^3/\mathrm{d}x^3\left[{}^{RL}J^{1/2}\right]$.

Exemplo 3.9 (Derivada da função potência segundo Riemann-Liouville). *Para a função potência $f(x) = x^c, c > -1 \in \mathbb{R}$, a derivada RL de ordem arbitrária $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, é dada por*

$$^{RL}D^{\alpha} x^c = D^m[J^{m-\alpha}\, x^c]$$

Conforme visto no Exemplo 3.2, a integral fracionária de ordem $m-\alpha$ da função potência implica em

$$\begin{aligned} ^{RL}D^{\alpha} x^c &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\frac{\Gamma(c+1)\, x^{c+m-\alpha}}{\Gamma(c+m-\alpha+1)}\right] \\ &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+m-\alpha+1)}\,\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[x^{c+m-\alpha}\right] \end{aligned}$$

Dado que m é natural, a derivada m-ésima da potência $x^{c+m-\alpha}$ refere-se diretamente à Proposição 2.1.6. Assim,

$$^{RL}D^{\alpha} x^c = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+m-\alpha+1)}\,\frac{\Gamma(c+m-\alpha+1)}{\Gamma(c-\alpha+1)}\, x^{c-\alpha}$$

logo,

$$^{RL}D^{\alpha} x^c = \frac{\Gamma(c+1)\, x^{c-\alpha}}{\Gamma(c-\alpha+1)}. \tag{55}$$

Vale observar que se comparado o resultado da integral de Riemann-Louville da função potência (48) com a derivada de Riemann-Liouville da mesma (55), nota-se que a derivada é a integral trocando α por $-\alpha$. Pode-se observar que se $n, c \in \mathbb{N}$, com $c - n \notin \mathbb{Z}_-$, então

$$^{RL}D^{n} x^c = \frac{\Gamma(c+1)\, x^{c-n}}{\Gamma(c-n+1)} = \frac{c!\, x^{c-n}}{(c-n)!}$$

como o esperado do Cálculo conversional.

Durante as trocas de correspondências, l'Hôpital responde ao questionamento de Leibniz levantando sobre qual seria o resultado para o caso especial da derivada de ordem 1/2 de uma função. De posse do resultado (55) pode-se então calcular a derivada de ordem 1/2 da função $f(x) = x^2$, por exemplo. Logo,

Exemplo 3.10.

$$
{}^{RL}D^{1/2}\,x^2 \;=\; \frac{\Gamma(2+1)\,x^{2-1/2}}{\Gamma(2-1/2+1)} = \frac{\Gamma(3)\,x^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}
$$

Um ponto sensível da derivada de Riemann-Liouville passa pela derivada da função constante. Com a integral RL da constante, vista no Exemplo 3.1, calcular sua derivada RL reduz-se à derivada de ordem inteira de uma função potência.

Exemplo 3.11 (**Derivada da função constante segundo Riemann-Liouville**). *Veja que para $f(x) = c$, com $c, \alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$,*

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}c &= D^m[J^{m-\alpha}\,c] \\
&= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\frac{cx^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}\right]
\end{aligned}
$$

logo,

$$
{}^{RL}D^{\alpha}c = \frac{c\,x^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)}. \tag{56}
$$

Observe que para $\alpha = 1$ e $x \neq 0$,

$$
{}^{RL}D^{1}c = \lim_{b\to 1}\frac{c}{\Gamma(-b+1)\,x} = 0
$$

Ou seja, a derivada RL de ordem 1 da função constante é zero, como é esperado. Mais ainda, considerando o domínio estendido da função Gama (11) e a Definição 3.2, nota-se que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n > 0$,

$$
{}^{RL}D^{n}c = \frac{c}{\Gamma(-n+1)\,x^n} = 0 \tag{57}
$$

coincidindo com a derivada usual.

Entretanto se α não é inteiro positivo, um fenômeno indesejado acontece. Veja, por exemplo, o caso $\alpha = 1/2$ e $x > 0$,

$$
{}^{RL}D^{\frac{1}{2}}c = \frac{c}{\Gamma(-1/2+1)\,\sqrt{x}} = \frac{c}{\sqrt{\pi x}}.
$$

Logo, a derivada RL de ordem $1/2$ da função constante é diferente de zero, um resultado distinto ao esperado se considerado o Cálculo convencional. Mais geralmente, observe que para α não natural, tem-se que $\Gamma(-\alpha+1)$ está bem definida. Logo,

$$
{}^{RL}D^{\alpha}c = \frac{c\,x^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)} \neq 0 \tag{58}
$$

Portanto, para ordens não naturais a derivada RL da função constante não é zero, um contraponto ao estabelecido no Cálculo Diferencial e Integral.

Dessa forma,

$$
{}^{RL}D^{\alpha}c \begin{cases} \dfrac{c\,x^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)}, \text{ se } \alpha \notin \mathbb{N} \\ 0, \text{ se } \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}
$$

Exemplo 3.12 (**Derivada da função seno segundo Riemann-Liouville**)**.** *Seja a função seno $f(x) =$ sen(x). Segue que*

$$ {}^{RL}D^{\alpha}\, sen(x) = D^{m}[J^{m-\alpha}\ sen(x)] $$

Do Exemplo 3.4 tem-se o cálculo da integral de ordem arbitrária da função seno. Logo,

$$ \begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}\, sen(x) &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\, x^{2k+m-\alpha+1}}{\Gamma(2k+m-\alpha+2)}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+m-\alpha+2)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[x^{2k+m-\alpha+1}\right] \end{aligned} $$

Observando a derivada m-ésima da função $x^{2k+m-\alpha+1}$, pela Proposição 2.1.6 tem-se que

$$ \begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}\, sen(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+m-\alpha+2)}\frac{\Gamma(2k+m-\alpha+2)\, x^{2k-\alpha+1}}{\Gamma(2k-\alpha+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\, x^{2k-\alpha+1}}{\Gamma(2k-\alpha+2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\, x^{2k}x^{-\alpha+1}}{\Gamma(2k-\alpha+2)} \\ &= x^{-\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2k-\alpha+2)} \end{aligned} $$

logo,

$$ {}^{RL}D^{\alpha}\, sen(x) = x^{-\alpha+1}\, E_{2,-\alpha+2}(-x^2) \tag{59} $$

Exemplo 3.13. *Veja que para $\alpha = 1$,*

$$ {}^{RL}D^{1}\, sen(x) = E_{2,1}(-x^2) = \cos(x) $$

conforme visto no Exemplo 2.5 e na generalização da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros para a de um parâmetro (31)*. Observa-se também que a derivada RL do seno é o cosseno, assim como o estabelecido no CDI.*

Exemplo 3.14 (**Derivada da função cosseno segundo Riemann-Liouville**)**.** *A derivada RL da função cosseno é dada de maneira semelhante a da função seno. Considerando a integral de ordem arbitrária de $f(x) = \cos(x)$ calculada no Exemplo 3.5,*

$$ \begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}\cos(x) &= D^{m}[J^{m-\alpha}\ \cos(x)] \\ &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\, x^{2k+m-\alpha}}{\Gamma(2k+m-\alpha+1)}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+m-\alpha+1)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[x^{2k+m-\alpha}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+m-\alpha+1)}\frac{\Gamma(2k+m-\alpha+1)\, x^{2k-\alpha}}{\Gamma(2k-\alpha+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\, x^{2k-\alpha}}{\Gamma(2k-\alpha+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\, x^{2k}\, x^{-\alpha}}{\Gamma(2k-\alpha+1)} \\ &= x^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2k-\alpha+1)} \end{aligned} $$

logo,

$$ {}^{RL}D^{\alpha}\cos(x) = x^{-\alpha}\, E_{2,-\alpha+1}(-x^2) \tag{60} $$

Exemplo 3.15. *A derivada de Riemann-Liouville de ordem* 1 *da função cosseno é*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^1 \cos(x) &= \frac{1}{x}\, E_{2,0}(-x^2) \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{\Gamma(2k)} \end{aligned}$$

Note que

$$\lim_{k \to 0} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{\Gamma(2k)} = 0$$

Sendo assim, é sem prejuízo ao somatório o limite inferior de $k = 1$. *Portanto,*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^1 \cos(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots \\ &= -\,sen(x) \end{aligned}$$

Concluindo assim, que a derivada RL da função $\cos(x)$ é $-\operatorname{sen}(x)$, conforme o estabelecido no CDI. Considerando o Exemplo 3.12, vemos a circularidade esperada para derivadas das funções trigonométricas seno e cosseno, podendo assim estabelecer que para estas funções, a derivada de Riemman-Louville generaliza o Cálculo de ordem inteira.

Exemplo 3.16 (**Derivada da função exponencial segundo Riemann-Liouville**). *Seja a função exponencial* $f(x) = e^{cx}, c \in \mathbb{R}$. *A derivada RL de ordem arbitrária* $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, *da exponencial é dada por*

$${}^{RL}D^{\alpha} e^{cx} = D^m [J^{m-\alpha}\, e^{cx}]$$

Considerando o cálculo da integral RL da função exponencial feito no Exemplo 3.6, decorre que

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha} e^{cx} &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k\, x^{k+m-\alpha}}{\Gamma(k+m-\alpha+1)} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{\Gamma(k+m-\alpha+1)} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} \left[x^{k+m-\alpha} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{\Gamma(k+m-\alpha+1)} \frac{\Gamma(k+m-\alpha+1)\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k x^k x^{-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\ &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cx)^k}{\Gamma(k-\alpha+1)} \end{aligned}$$

logo,

$${}^{RL}D^{\alpha} e^{cx} = x^{-\alpha}\, E_{1,-\alpha+1}(cx) \tag{61}$$

Exemplo 3.17. *Verificando a derivada RL de primeira ordem da função exponencial,* *para $c = 1$,*

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D^1 e^x &= \frac{1}{x}\, E_{1,0}(x) \\
&= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^x
\end{aligned}
$$

Portanto, assim como no CDI, a derivada da função exponencial resulta na própria exponencial, firmando assim mais uma paridade entre a formulação inteira com a de ordem arbitrária.

Exemplo 3.18 (**Derivada da função Mittag-Leffler segundo Riemann-Liouville**). *Seja a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros $E_{b,c}(x)$. A derivada RL de ordem arbitrária $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, é dada por*

$$
{}^{RL}D^{\alpha} E_{b,c}(x) = D^m [J^{m-\alpha}\, E_{b,c}(x)]
$$

É imediato que,

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha} E_{b,c}(x) &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(bk+c)}\, J^{m-\alpha} \left[x^k \right] \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{\Gamma(bk+c)\,\Gamma(k+m-\alpha+1)}\, \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} \left[x^{k+m-\alpha} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{\Gamma(bk+c)\,\Gamma(k+m-\alpha+1)}\, \frac{\Gamma(k+m-\alpha+1)\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}
\end{aligned}
$$

logo,

$$
{}^{RL}D^{\alpha} E_{b,c}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(bk+c)\,\Gamma(k-\alpha+1)} \tag{62}
$$

Infelizmente, não é possível escrever o resultado da derivada RL, de ordem arbitrária, da função Mittag-Leffler em termos de outra função Mittag-Leffler (como ocorre em alguns resultados acima).

A seção a seguir apresenta outra formulação de derivada de ordem arbitrária. Posteriormente, os resultados de ambas formulações serão comparados para as funções estudadadas nesse trabalho.

3.4 Derivada de ordem fracionária de Caputo

A derivada de ordem fracionária de Caputo — também mais adequado o termo ordem arbitrária — de uma função derivável é feita de forma muito semelhante à derivada RL, diferindo desta apenas por uma mudança na ordem dos operadores. Porém, existem funções em que esta aparente simples mudança na ordem das operações implica em resultados distintos.

Definição 3.3. A derivada fracionária de Caputo de ordem arbitrária α, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, *da função $f(x)$, para $x > 0$ é definida por:*
Se α é não inteiro,

$$
{}^{C}D^{\alpha} f(x) = J^{m-\alpha}[D^m f(x)] \quad \textit{onde } m \in \mathbb{N}, \textit{ tal que } m-1 < \alpha \leq m \tag{63}
$$

$$
= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t)\,\mathrm{d}t \tag{64}
$$

Se $\alpha \in \mathbb{N}$, ou seja $\alpha = m$,

$$
{}^{C}D^{\alpha} f(x) = J^0[D^m f(x)] = \frac{\mathrm{d}^m f(x)}{\mathrm{d}x^m}. \tag{65}
$$

Para a derivada fracionária segundo Caputo, primeiro deriva-se em ordem inteira e depois integra-se em ordem arbitrária. Vale notar que para α inteiro, reduz-se à derivada convencional.

Para fins das comparações que virão na próxima seção, as derivadas fracionárias de Caputo das funções estudadas na Seção 3.3 serão calculadas, começando pela função potência.

Exemplo 3.19 (Derivada da função potência segundo Caputo). *Seja a função potência $f(x) = x^c$, $x, c > 0 \in \mathbb{R}$. A derivada arbitrária de ordem $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, segundo Caputo é*

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha} x^c &= J^{m-\alpha}[D^m x^c] \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} \left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} t^c\right] \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Considerando a derivada m-ésima da função $f(t) = t^c$, pela Proposição 2.1.6 chega-se a

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha} x^c &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-m+1)} t^{c-m}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(c-m+1)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^{c-m}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(c-m+1)} \int_0^x \left[x\left(1-\frac{t}{x}\right)\right]^{m-\alpha-1} t^{c-m}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Com a substituição $\dfrac{t}{x} = h$, assim como feito em (47), teremos que a integral corresponde à $B(m-\alpha, c-m+1)$. Logo,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha} x^c &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(c-m+1)} x^{c-\alpha} \int_0^1 (1-h)^{m-\alpha-1} h^{c-m}\,\mathrm{d}h \\
&= \frac{\Gamma(c+1)\,x^{c-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(c-m+1)} B(m-\alpha, c-m+1) \\
&= \frac{\Gamma(c+1)\,x^{c-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(c-m+1)} \frac{\Gamma(m-\alpha)\,\Gamma(c-m+1)}{\Gamma(c-\alpha+1)}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$^{C}D^{\alpha}x^{c} = \frac{\Gamma(c+1)\,x^{c-\alpha}}{\Gamma(c-\alpha+1)}. \tag{66}$$

É necessário observar que se $c \in \mathbb{N}$ e $c < \alpha$, então $D^{m}x^{c} = 0$ e, pela Definição 3.3, tem-se que

$$^{C}D^{\alpha}x^{c} = J^{m-\alpha}[D^{m}x^{c}] = 0 \tag{67}$$

ou seja, a derivada fracionária segundo Caputo de ordem α de toda função potência de expoente inteiro menor que α é zero. Dessa forma,

$$^{C}D^{\alpha}x^{c} \begin{cases} \dfrac{\Gamma(c+1)x^{c-\alpha}}{\Gamma(c-\alpha+1)}, & \textit{se } c \textit{ não é inteiro positivo menor que } \alpha \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 3.20 (Derivada da função constante segundo Caputo). *Seja $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$. A derivada de ordem arbitrária $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, da função constante segundo Caputo é dada por:*

Se $\alpha \notin \mathbb{Z}$, pela Definição 3.3 na forma (64) segue

$$\begin{aligned} ^{C}D^{\alpha}c &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{m-\alpha-1}\,f^{(m)}c\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{m-\alpha-1}\,0\,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

Se $\alpha \in \mathbb{Z}$,

$$^{C}D^{\alpha}c = \frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\,c = 0$$

Logo, derivada da constante segundo Caputo é zero, assim como o estabelecido no CDI.

Exemplo 3.21 (Derivada da função seno segundo Caputo). *Seja a função seno, $f(x) = sen(x)$. Segue que sua derivada de ordem $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, segundo Caputo é da forma*

$$^{C}D^{\alpha}\,sen(x) = J^{m-\alpha}[D^{m}\;sen(x)]$$

Para o cálculo da derivada de ordem inteira m da função seno, utilizando sua representação na forma da série de Taylor

$$^{C}D^{\alpha}\,sen(x) \;=\; J^{m-\alpha}\left[\frac{\mathrm{d}^{m}}{\mathrm{d}x^{m}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\,x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]\right]$$

Porém, observe que se $k < \frac{m-1}{2}$, então $\dfrac{\mathrm{d}^{m}}{\mathrm{d}x^{m}}\,x^{2k+1} = 0$. Logo, pelo o cálculo da integral RL da função potência no Exemplo 3.2 e com $M-1 < \frac{m-1}{2} < M$, $M \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} ^{C}D^{\alpha}\,sen(x) &= \sum_{k=M}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\,x^{2k-\alpha+1}}{\Gamma(2k-\alpha+2)} \\ &= x^{-\alpha+1}\sum_{k=M}^{\infty}\frac{(-x^{2})^{k}}{\Gamma(2k-\alpha+2)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$^{C}D^{\alpha}\,sen(x) = x^{-\alpha+1}\,E_{2,-\alpha+2}(-x^{2}) - x^{-\alpha+1}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{(-1)^{k}\,x^{2k}}{\Gamma(2k-\alpha+2)} \tag{68}$$

Exemplo 3.22 (**Derivada da função cosseno segundo Caputo**). *Seja a função cosseno, $f(x) = \cos(x)$. Sua derivada de Caputo de ordem $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, é dada por*

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}\cos(x) &= J^{m-\alpha}[D^{m}\cos(x)] \\
&= J^{m-\alpha}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2k}}{(2k)!}\right]\right]
\end{aligned}
$$

De forma semelhante ao do Exemplo 3.21, se $k < \frac{m}{2}$, então $\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\,x^{2k} = 0$. Assim, para $M - 1 < \frac{m}{2} < M$, $M \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}\cos(x) &= \sum_{k=M}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2k-\alpha}}{\Gamma(2k-\alpha+1)} \\
&= x^{-\alpha}\sum_{k=M}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2k-\alpha+1)}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
{}^{C}D^{\alpha}\cos(x) = x^{-\alpha}\,E_{2,-\alpha+1}(-x^2) - x^{-\alpha}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{(-1)^k\,x^{2k}}{\Gamma(2k-\alpha+1)}. \tag{69}
$$

Exemplo 3.23 (**Derivada da função exponencial segundo Caputo**). *Seja a função $f(x) = e^{cx}, x > 0$ e $c \in \mathbb{R}$. A derivada de Caputo de ordem $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, da função exponencial é dada por*

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}e^{cx} &= J^{m-\alpha}[D^{m}\,e^{cx}] \\
&= J^{m-\alpha}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(cx)^k}{k!}\right]\right] \\
&= J^{m-\alpha}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[x^k\right]\right]
\end{aligned}
$$

Veja que para $k < m$, $\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\,x^k = 0$, fazendo com que não contribua na soma. Portanto,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}e^{cx} &= J^{m-\alpha}\left[\sum_{k=m}^{\infty}\frac{c^k}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[x^k\right]\right] \\
&= J^{m-\alpha}\left[\sum_{k=m}^{\infty}\frac{c^k\,x^{k-m}}{\Gamma(k-m+1)}\right] \\
&= \sum_{k=m}^{\infty}\frac{c^k}{\Gamma(k-m+1)}\,J^{m-\alpha}\left[x^{k-m}\right] \\
&= \sum_{k=m}^{\infty}\frac{c^k}{\Gamma(k-m+1)}\,\frac{\Gamma(k-m+1)\,x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
&= \sum_{k=m}^{\infty}\frac{c^k\,x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
&= x^{-\alpha}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(cx)^k}{\Gamma(k-\alpha+1)}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
{}^{C}D^{\alpha}e^{cx} = x^{-\alpha}\,E_{1,-\alpha+1}(cx) - x^{-\alpha}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(cx)^k}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{70}
$$

Exemplo 3.24 (**Derivada da função de Mittag-Leffler segundo Caputo**). *Seja a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros $E_{b,c}(x)$. A derivada de Caputo de ordem arbitrária $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, é dada por*

$$^{C}D^{\alpha}\, E_{b,c}(x) = J^{m-\alpha}[D^{m}\, E_{b,c}(x)]$$

De forma semelhante a do Exemplo 3.23, para $k < m$, a $m-$derivada de x^k é zero. Portanto,

$$\begin{aligned} ^{C}D^{\alpha}\, E_{b,c}(x) &= J^{m-\alpha}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(bk+c)} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[x^k\right]\right] \\ &= J^{m-\alpha}\left[\sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!\, x^{k-m}}{\Gamma(bk+c)\,\Gamma(k-m+1)}\right] \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(bk+c)\,\Gamma(k-\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$^{C}D^{\alpha}\, E_{b,c}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(bk+c)\,\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{71}$$

3.5 Comparativo entre Riemann-Liouville e Caputo

Nesta seção serão relacionados os resultados das derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville e Caputo para algumas funções. A apreciação dos resultados estão concentradas nas tabelas logo a seguir. Uma breve discussão comparativa é apresentada abaixo.

Começando pela derivada da constante, observa-se resultados distintos entre o Exemplo 3.11 e o Exemplo 3.20. Neste caso, a derivada fracionária de Caputo sobressai sobre a de Riemann-Liouville, pois a mesma vale zero. Tal característica faz com que seja ela a mais utilizada em situações de contextualização física.

Comparando a derivada de Riemann-Liouville (Exemplo 3.9) com a de Caputo (Exemplo 3.19) para a função potência nota-se diferença entre elas. Enquanto a derivada RL de ordem α fica dada exclusivamente por $^{RL}D^{\alpha}x^{c} = \Gamma(c+1)\, x^{c-\alpha}/\Gamma(c-\alpha+1)$, existe uma condicional para a derivada de Caputo de mesma ordem. Esta é uma notável diferença entre as formulações, sendo que a derivada de Caputo de uma função polinomial depende do grau do expoente, enquanto para RL está fixamente definida. Entretanto, a derivada RL e de Caputo de $f(x) = x^c$ são iguais desde que c não seja um inteiro menor que α.

A sentença (67) tem grande influência em todos os resultados posteriores a ela na Seção 3.4. Ao notar que se a ordem α da derivada de Caputo é maior que o expoente c de uma função potência, a derivada resulta em zero, traz consigo implicações diretas nas derivadas das funções: seno (Exemplo 3.21), cosseno (Exemplo 3.22), exponencial (Exemplo 3.23) e Mittag-Leffler (Exemplo 3.24), bem como em diversas outras funções. Observa-se que para todas elas, há um fator comum, se comparadas as duas formulações. Por exemplo, para a função seno, o fator $x^{-\alpha+1}\, E_{2,-\alpha+2}(-x^2)$ está presente em ambas. É o fator de "correção" das derivadas nulas dos m primeiros termos que no respectivo somatório, na derivada de Caputo, que faz com que não haja igualdade entre RL e Caputo nas derivadas desssas e outras funções.

Por fim, com o objetivo de facilitar a consulta dos leitores e estudantes do Cálculo Fracionário, as tabelas 1, 2, 3 e 4, abaixo, contém os resultados das integrais de ordem

$f(x)$	$J^\alpha f(x)$	$J^\alpha f(x)$ em termos de $E_{b,c}(x)$
c	$\dfrac{cx^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$	********
x^c	$\dfrac{\Gamma(c+1)\,x^{\alpha+c}}{\Gamma(\alpha+c+1)}$	********
$\text{sen}(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k\ x^{2k+\alpha+1}}{\Gamma(2k+\alpha+2)}$	$x^{\alpha+1}\,E_{2,\alpha+2}(-x^2)$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k\,x^{2k+\alpha}}{\Gamma(2k+\alpha+1)}$	$x^\alpha\,E_{2,\alpha+1}(-x^2)$
e^{cx}	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{c^k\,x^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)}$	$x^\alpha\,E_{1,\alpha+1}(cx)$
$E_{b,c}(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k!\,x^{k+\alpha}}{\Gamma(bk+c)\Gamma(k+\alpha+1)}$	********

Tabela 1: Integral, segundo Riemann-Liouville, de ordem arbitrária α.

arbitrária de Riemann-Liouville, derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo, respectivamente, para as funções estudadas neste trabalho.

$f(x)$	${}^{RL}D^\alpha f(x)$	${}^{RL}D^\alpha(x)$ em termos de $E_{b,c}(x)$
c	$\begin{cases} \dfrac{c\,x^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)}, \text{ se } \alpha \notin \mathbb{N} \\ 0, \text{ se } \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$	********
x^c	$\dfrac{\Gamma(c+1)\,x^{c-\alpha}}{\Gamma(c-\alpha+1)}$	********
$\text{sen}(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k\,x^{2k-\alpha+1}}{\Gamma(2k-\alpha+2)}$	$x^{-\alpha+1}\,E_{2,-\alpha+2}(-x^2)$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k\,x^{2k-\alpha}}{\Gamma(2k-\alpha+1)}$	$x^{-\alpha}\,E_{2,-\alpha+1}(-x^2)$
e^{cx}	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{c^k\,x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$	$x^{-\alpha}\,E_{1,-\alpha+1}(cx)$
$E_{b,c}(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k!\,x^{k-\alpha}}{\Gamma(bk+c)\,\Gamma(k-\alpha+1)}$	********

Tabela 2: Derivada de Riemann-Liouville de ordem arbitrária α.

$f(x)$	${}^{C}D^{\alpha} f(x)$
c	0
x^c	$\begin{cases} \dfrac{\Gamma(c+1)x^{c-\alpha}}{\Gamma(c-\alpha+1)}, \text{ se } c \text{ não é inteiro positivo menor que } \alpha \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$
$\operatorname{sen}(x)$	$x^{-\alpha+1}\, E_{2,-\alpha+2}(-x^2) - \sum_{k=0}^{M-1} \dfrac{(-1)^k\, x^{2k-\alpha+1}}{\Gamma(2k-\alpha+2)}$
$\cos(x)$	$x^{-\alpha}\, E_{2,-\alpha+1}(-x^2) - \sum_{k=0}^{M-1} \dfrac{(-1)^k\, x^{2k-\alpha}}{\Gamma(2k-\alpha+1)}$
e^{cx}	$x^{-\alpha}\, E_{1,-\alpha+1}(cx) - \sum_{k=0}^{m-1} \dfrac{c^k\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$
$E_{b,c}(x)$	$\sum_{k=m}^{\infty} \dfrac{k!\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(bk+c)\,\Gamma(k-\alpha+1)} - \sum_{k=0}^{m-1} \dfrac{k!\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(bk+c)\,\Gamma(k-\alpha+1)}$

Tabela 3: Derivada de Caputo de ordem arbitrária α.

Tabela 4: Consolidado: Integral de ordem arbitrária RL e as derivadas de ordem arbitrária segundo Riemann–Liouville e Caputo

$f(x)$	J^α	${}^{RL}D^\alpha$	${}^{C}D^\alpha$
c	$\dfrac{cx^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$	$\begin{cases} \dfrac{c\,x^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)}, \text{ se } \alpha \notin \mathbb{N} \\ 0, \text{ se } \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$	0
x^c	$\dfrac{\Gamma(c+1)\,x^{\alpha+c}}{\Gamma(\alpha+c+1)}$	$\dfrac{\Gamma(c+1)\,x^{c-\alpha}}{\Gamma(c-\alpha+1)}$	$\begin{cases} \dfrac{\Gamma(c+1)x^{c-\alpha}}{\Gamma(c-\alpha+1)}, \text{ se } c \text{ não é inteiro positivo menor que } \alpha \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$
sen(x)	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k\, x^{2k+\alpha+1}}{\Gamma(2k+\alpha+2)}$	$x^{-\alpha+1}\,E_{2,-\alpha+2}(-x^2)$	$x^{-\alpha+1}\,E_{2,-\alpha+2}(-x^2) - \sum_{k=0}^{M-1} \dfrac{(-1)^k\, x^{2k-\alpha+1}}{\Gamma(2k-\alpha+2)}$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k\, x^{2k+\alpha}}{\Gamma(2k+\alpha+1)}$	$x^{-\alpha}\,E_{2,-\alpha+1}(-x^2)$	$x^{-\alpha}\,E_{2,-\alpha+1}(-x^2) - \sum_{k=0}^{M-1} \dfrac{(-1)^k\, x^{2k-\alpha}}{\Gamma(2k-\alpha+1)}$
e^{cx}	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{c^k\, x^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)}$	$x^{-\alpha}\,E_{1,-\alpha+1}(cx)$	$x^{-\alpha}\,E_{1,-\alpha+1}(cx) - \sum_{k=0}^{m-1} \dfrac{c^k\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$
$E_{b,c}(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k!\, x^{k+\alpha}}{\Gamma(bk+c)\Gamma(k+\alpha+1)}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k!\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(bk+c)\,\Gamma(k-\alpha+1)}$	$\sum_{k=m}^{\infty} \dfrac{k!\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(bk+c)\,\Gamma(k-\alpha+1)} - \sum_{k=0}^{m-1} \dfrac{k!\, x^{k-\alpha}}{\Gamma(bk+c)\,\Gamma(k-\alpha+1)}$

4 Conceitos do Cálculo Fracionário na Educação Básica

O Plano Nacional de Educação (PNE)[4] é uma lei[16] de caráter norteador dos objetivos da Educação brasileira. Ele estabelece metas a serem alcançadas em todos os níveis e modalidades que compreendem-na. Entre estes objetivos há a *Meta 12*, em que traz

> "Elevar a taxa bruta de matrícula na educação superior para 50% (cinquenta por cento) e a taxa líquida para 33% (trinta e três por cento) da população de 18 (dezoito) a 24 (vinte e quatro) anos, assegurada a qualidade da oferta e expansão para, pelo menos, 40% (quarenta por cento) das novas matrículas, no segmento público." [4, p.1]

Vemos que é um projeto nacional a ampliação do acesso ao ensino superior.

Em que pese as ações do Poder Público para execução de tais metas, fica posto que mais estudantes deverão entrar em contato com as competências e habililidades que currículos conseguintes à BNCC trazem. Uma vez que todo o acesso ao ensino superior passa antes pela Educação Básica, é intuitivo que o direcionamento do seu currículo vá ao encontro da Meta 12.

A autonomia pedagógica possibilita a conexão entre o currículo da EB e o PNE (Meta 12). É neste sentido que buscamos em nosso trabalho propor uma sequência de atividades que proporcione a ligação desejada. Visando o aprimoramento do aprendizado de conteúdos anteriores, junto à apresentação de conceitos que, a princípio, estão reservados ao ensino superior, busca-se introduzir situações matemáticas que expandam os saberes da educação formal escolar.

Estruturado na forma de uma sequência didática, a proposta de atividade consiste em três etapas, aqui denominadas *Roteiro de Atividades* e encontra-se no Apêndice A. Entende-se por sequência didática conforme define Zabala[39, p.18] como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". Cada etapa possui um objetivo específico, almejando que os estudantes possam adqurir as respectivas competências e habilidades. Todas as etapas, mirando em uma construção ampla de aprendizado, dialogam o novo conteúdo apresentado com saberes pregressos, por vezes, de ano escolar anterior.

A princípio, a atividade é destinada à segunda ou terceira série do ensino médio, pois, é pressuposto e pré-requisito o conhecimento dos conceitos primitivos de função — somado ao fato que o ensino das funções polinomiais, modular, exponencial e logarítmica expande os conceitos iniciais de função. E uma vez que segundo a BNCC, tais habilidades estão organizadas no nono ano[17] dos anos finais do ensino fundamental e na primeira série[18] do

[16] O PNE é a lei que determina diretrizes, metas e estratégias para a política educacional brasileira. Sua vigência é de 10 anos e foi sancionada em 2014. Entre outros, tem por objetivo definir metas a sanar problemas histórico-social da Educação brasileira tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior.

[17] "(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis."[5, p.317]

[18] "(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica."[5, p.543]
As habilidades EM13MAT402 e EM13MAT403 trazem definição semelhante para as funções polinomiais de 2º grau e função exponencial e logarítmica, respectivamente. A habilidade EM13MAT404 traz ideias

ensino médio faz com que possivelmente dificulte sua aplicação em série escolar anterior. Dado que o fatorial é utilizado desde o primeiro roteiro, indica-se que a atividade seja aplicada após o trabalho com a Análise Combinatória.

O tempo de aplicação não estará fixado. A dinâmica do cotidiano da docência é fluida e uma turma inteira pode apresentar deficit de aprendizagem em algum ponto primordial ao desenrolar do trabalho. Adaptações geram maior adesão por parte dos estudantes e aumenta a possibilidade de horizontalização do aprendizado. Inclusive, recomenda-se que cada conceito matemático tido como pré-requisito seja relembrado pelo professor antes e durante a aplicação da atividade.

4.1 Roteiro de Atividades 1

O início da proposta dá-se por uma breve lembrança do conceito de fatorial e seu fator facilitador na resolução de exercícios de permutação. Finaliza-se com a reflexão da participação significativa do fatorial no conceito de arranjo e combinação. Do ponto de vista dos objetivos, é significativo que os estudantes já tenham tido contato anteriormente com o fatorial.

A introdução dos temas abordados neste trabalho é feita pela informação da existência do Cálculo Fracionário. Em seguida, trazemos a definição do símbolo de Pochhammer com exemplos.

Análise Combinatória. De forma semelhante, o **Símbolo de Pochhammer** tem papel significativo no estudo do ramo da matemática chamado **Cálculo de Ordem Arbitrária**, mais conhecido como **Cálculo Fracionário**. Define-se o símbolo de Pochhammer $(a)_n$, para $a \in \mathbb{R}$, como

$$(a)_n = a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+n-1) \qquad (a)_0 = 1, n \geq 0$$

Exemplo 1. *O símbolo de Pochhammer de* $(7)_5$ *é*

$(7)_5 = 7 \cdot (7+1) \cdot (7+2) \cdot (7+3) \cdot (7+4)$

$(7)_5 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55440$

Figura 3: Trecho do Roteiro de Atividades 1 descrito no apêndice deste texto.

Considerando a sequência lógica dos conteúdos do CF, a seleção de Pochhammer como primeira parte teórica é o caminho natural a ser tomado, uma vez que é por objetivo deste a prática de cálculos algébricos.

O caráter intuitivo e prático possibilita a fácil compreensão por parte dos estudantes. Ainda que a atividade seja direcionada ao alunado do ensino médio, esta é uma etapa que pode facilmente ser adaptada para todos os anos finais do ensino fundamental. Já no sexto ano inicia-se o trato com fórmulas e igualdade, conforme mostram as habilidades EF06MA04 e EF06MA14.

correlatas às anteriores para as funções seno e cosseno e é descrita anteriormente no trabalho.

> “(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).”[5, p.301]
> “(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.”[5, p.303]

Finaliza-se esta primeira etapa do roteiro propondo alguns exercícios que estimulem o contato dos estudantes com o SdP. Começando pela aplicação direta da definição do símbolo e gradualmente elevando àqueles que necessitam de maior manipulação algébrica.

4. Calcule $(37)_{\bar{9}}$.

5. Determine y tal que $y = 7 \cdot (10)_4$.

6. Calcule $y = (7)_3 \cdot (9)_6$.

7. Determine y tal que $y\,(8)_3 = 2\,(12)_{\bar{4}}$.

Figura 4: Questões do Roteiro de Atividades 1

4.2 Roteiro de Atividades 2

O Roteiro 2 é o ponto central da atividade; nele temos como objetivo: apresentar a função Gama, revisitar o conceito de função — especialmente a relação da imagem do respectivo domínio — e o gráfico de funções no plano cartesiano. Atualmente, o currículo nacional estabelece que para o *objeto de conhecimento*[19] função para o nono EF ficam designados os conceitos iniciais: conjunto domínimo/contradomínio/imagem, lei de formação e gráficos. Já ao ensino médio fica reservado as funções polinomiais, modular, exponencial, logarítmica e trigonométricas, além de função composta e inversa.

Porém, devido ao currículo inflado, somado ao complexo cotidiano da sala de aula, muitas vezes este objeto de conhecimento não é trabalhado da forma ideal. Para que o docente consiga abordar todo o conteúdo programático de sua matriz de referência, vê-se obrigado a “correr com a matéria”. Tal prática é um obstáculo ao processo ensino-aprendizagem, pois, para a docência significa não ter tempo hábil para a execução de práticas pedagógicas; e aos discentes é mais um fator de resistência à matemática.

> “Apesar da grande e reconhecida importância da Matemática, quer pelo desenvolvimento de raciocínio que proporciona ao aluno, quer por suas aplicações nos problemas da vida diária, em geral os alunos, logo nos primeiros contatos com essa ciência, começa a detestá-la ou tornam-se indiferentes a ela.”[11, p.13]

[19] A BNCC divide-se em 3 estruturas: unidade temática, objeto de conhecimento e habilidade. “[...] cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades. Essas habilidades estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento — aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos —, que, por sua vez, são organizados em unidades temáticas.”[5, p.28]

Visando mitigar esta realidade, o Roteiro 2 se propõe a simultaneamente trazer a relação entre símbolo de Pochhammer com função Gama (Proposição 2.1.5) e a retomada do estudo das funções. Para a aplicação em séries anteriores à indicada, recomenda-se que seja feito em alunado que possui conhecimento da relação domínio-imagem. Preferencialmente que tenha fixado também a habilidade de analisar o gráfico de funções.

Considerando todo o escopo que compõe a função Gama, sua apresentação na escola básica necessita de adaptações. Vem daí o motivo de apresentarmos alguns de seus resultados na forma da Tabela 1 e no gráfico de $\Gamma(x)$ — objetos matemáticos de fácil assimilação e interpretação.

n	$\Gamma(n)$
1	1
2	1
3	2
6	120
8	5040

Tabela 1: Valores da função gama

Figura 5: Trecho do Roteiro de Atividades 2 descrito no apêndice deste texto.

A escolha dos valores utilizados na tabela fica por conta dos exercícios que elaboramos para a sequência da atividade. A opção por maior destaque apenas ao 1º quadrante do gráfico de gama é por sua característica de continuidade para $x > 0$.

Assim como os trechos informativos de parte teórica, os exercícios do Roteiro 2 foram divididos em dois momentos. No primeiro momento, espera-se que além da manipulação algébrica, os alunos façam uso dos valores de gama informados na tabela juntamente com a equação de gama. Como o cálculo de $(a)_n$ já foi feito anteriormente, aqui os exercícios não são apenas de substituição de valores em fórmula.

3. Considere $(4)_n = \dfrac{\Gamma(7)}{\Gamma(4)}$. Determine $\Gamma(7)$.

4. Determine os valores de a e n, em seguida calcule $\Gamma(n)$ tal que $(a)_3 = \dfrac{\Gamma(n)}{\Gamma(7)}$.

5. Considere $(10)_n = \dfrac{\Gamma(16)}{\Gamma(10)}$ e determine $\Gamma(16)$.

Figura 6: Questões do Roteiro de Atividades 2

O segundo momento do roteiro caracteriza-se pela apresentação da generalização do fatorial (Proposição 2.1.2) e do gráfico de $\Gamma(x)$. Os exercícios desta etapa iniciam a aplicação da investigação matemática. A proposta tangencia a metodologia da Resolução de Problemas[20], pois, para Pozo [25, p.16], "um problema se diferencia de um exercício na

[20] Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino recorrentemente utilizada no ensino formal de matemática. Um dos mais eminentes autores da área é o húngaro George Polya[24] em sua obra "A Arte de Resolver Problemas" de 1944.

medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos de mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução.”

4. Após aprender na aula de matemática sobre o fatorial de um número, Marcos começou a pesquisar um pouco mais sobre este conceito. Ele achou interessante a ideia da multiplicação com os antecessores de um número possuir um símbolo matemático próprio para si. Em seus estudos, ele descobriu que $15! = 1.307.674.368.000$. Porém, para chegar a este resultado, ele fez manualmente cada um dos cálculos até obter a resposta.

   (a) Você considera uma boa estratégia o cálculo de 15! feito na forma de sucessivos produtos entre números consecutivos? Justifique sua resposta.

   (b) De que forma você faria o cálculo de 15! dispondo apenas de papel e caneta?

   (c) Com base nos seus conhecimentos da função gama, de que outra forma você pode representar este mesmo resultado?

Figura 7: Questões do Roteiro de Atividades 2

O término da etapa é feito com a questão 6 do Roteiro de Atividades 2, que a princípio, trata-se apenas de um exercício de estimativa. Porém, nele inicia-se o laço que finalizará na formalização de gama por recorrência (Proposição 2.1.1). Sugere-se que o professor instigue a valores com algumas casas decimais utilizando o recurso de *zoom* no vetor do gráfico de gama presente na atividade. Inclusive, pode-se incentivar o uso de recursos digitais para sua execução, indo em consonância com a habilidade EM13MAT405 [5, p.539], que é definida em “utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática”.

4.3 Roteiro de Atividades 3

O último roteiro inicia com uma breve história sobre o desenvolvimento do Cálculo Fracionário. O texto motivador tem como fim romper com a percepção errônea que boa parte dos estudantes têm de que a matemática foi “inventada” por alguém, ou até mesmo “criada” sem finalidade definida. Esta ideia aumenta conforme o passar dos anos escolares, sendo aprofundada desde o sexto ano dos anos finais do ensino fundamental. Não por coincidência é justamente a partir daí, de acordo com o currículo vigente, que a matemática formal escolar perde a característica prática e aplicável e torna-se abstrata e distante da vida do aluno.

Junto ao resultado de $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ é enfim apresentada a recorrência da Proposição 2.1.1 e desta forma finaliza-se o embasamento teórico de todo o roteiro. A partir daí busca-se aprofundar as investigações que iniciamos no Exercício 5 do Roteiro 2. Começamos pelo exercício do cálculo de $\Gamma(n/2)$, com n natural e $1 \leq n \leq 18$; é indicado que o tutor aplicador requeira repostas em função de π e na forma fracionária.

1. Determine:

(a) $\Gamma(0,5)$;
(b) $\Gamma(1,5)$;
(c) $\Gamma(2,5)$;
(d) $\Gamma(3,5)$;
(e) $\Gamma(4)$;
(f) $\Gamma(4,5)$;
(g) $\Gamma(5)$;
(h) $\Gamma(5,5)$;
(i) $\Gamma(6)$;
(j) $\Gamma(6,5)$;
(k) $\Gamma(7)$;
(l) $\Gamma(7,5)$;
(m) $\Gamma(8)$;
(n) $\Gamma(8,5)$;
(o) $\Gamma(9)$.

Figura 8: Questões do Roteiro de Atividades 3

A escolha por domínios na representação decimal e a solicitação de respostas fracionárias fica por conta da grande dificuldade que têm em corresponder ao que diz a habilidade EF06MA08,

> "Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica."[5, p.301]

Desta forma é possível não só trazer a discussão das operações com racionais como revisitar todos os conceitos que compreendem este objeto. É comum perceber que os educandos não fazem a ligação de que $\frac{1}{2} = 0,5$, por exemplo. O estímulo a tal percepção pode ser feito utilizando-se o gráfico de Gama. Dado que no Exercício 2 (a) é calculado com algumas casas decimais o valor de $\Gamma(1/2)$ — e também com as demais imagens —, pode-se provocar a percepção/localização do respectivo valor no eixo y, fazendo assim a correspondência com EF06MA11,

> "Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora."[5, p.301]

O arremate da proposta de sequência didática se dá com as "provocações" que projetamos chegar quando do início da elaboração de uma atividade destinada à escola básica. Apesar de boa parte dos roteiros serem adaptados ao ensino fundamental e médio, os pontos levantados no Exercício 4 são acessíveis a todo leitor que possuir os conhecimentos prévios necessários.

4. Vimos no **Roteiro de Atividades 2** que a função gama é uma generalização do fatorial e que $\Gamma(n+1) = n!$. Em seguida, ao analisarmos o gráfico de gama visualizamos que é contínuo no $1^{\underline{o}}$ quadrante. De posse dos dois resultados,

   (a) É cabível então a ideia de calcularmos o fatorial de $\frac{1}{2}$, ou seja, $\left(\frac{1}{2}!\right)$?

   (b) De modo geral, é possível calcular o fatorial de $\frac{n}{2}$, com n um número natural? Justifique sua resposta.

   (c) Com base nas duas alternativas anteriores, pode-se expandir o conceito de (b) para qualquer número real positivo? Em outras palavras, a princípio, é possível então calcular o fatorial de todo número positivo?

Figura 9: Questões do Roteiro de Atividades 3

O questionamento da possibilidade de existência do fatorial de um número racional positivo qualquer é objeto matemático passível de interessantes investigações matemáticas, seja na Educação Básica ou Superior. Contudo, não limita-se apenas à metodologia da investigação, podendo ser trabalhada via Modelagem Matemática fazendo as devidas adaptações. A partir da informação de *o que é a função Gama* e *o valor de* $\Gamma(1/2)$, construir toda a teoria necessária até a chegada à generalização do fatorial, por exemplo.

5 Considerações finais

Historicamente, a construção conceitual do Cálculo Fracionário ilustra a metáfora dos anões nos ombros de gigantes, ainda mais em sua roupagem mais célebre "se vi mais longe, foi por estar nos ombros de gigantes" [19, p.1]. Tal paráfrase tem significado representativo ao CF, dado seu autor, Isaac Newton. Enorme é sua contribuição à fundamentação deste tópico da matemática que vimos um pouco neste trabalho. E assim como Newton, vários foram os notáveis que contribuíram na cronologia dos desmembramentos hoje estabelecidos.

A passagem pelas funções de Euler abre um interessante panorama — posteriormente — para aplicações de conceitos até então restritos ao Cálculo Diferencial e Integral e as leis físicas a ele aplicadas. Os aspectos algébricos que envolvem a integral imprópria — geralmente necessitam de recursos sofisticados de algebrismo — passam por despercebido em vista da praticidade da função Gama na utilização no CF. Torna-se uma notação simples carregada de significados. A generalização do fatorial pode ser vista como um resultado intrigante na percepção do estudante de Teoria dos Números assim como o do ensino médio da Educação Básica.

As funções de Mittag-Leffler desempenham importante papel no CF, pois elas representam para o CF o que a função exponencial representa para o CDI. Conforme visto nos exemplos de integral e derivadas fracionárias das duas formulações, ML torna-se parte inerente na apresentação dos resultados finas dessas operações, fato que é evidenciado nas Tabelas 1, 2 e 3.

O conceito e a formulação da integral de Riemann-Liouville podem ser considerados como o pilar da derivada de mesmo nome, bem como para as formulações de derivada de Caputo e Riesz; esta inclusive é uma possibilidade de futuros estudos.

A derivada segundo Riemann-Liouville torna possível responder à indagação de l'Hôpital a Leibniz, bem como refinar a resposta na forma de conjectura feita pelo alemão.

A derivada de Caputo traz o privilégio de sermos contemporâneos ao de seu instituidor. Sua formulação tem a estética de parecer apenas a mudança na ordem do que foi estabelecido na derivada RL. Porém, o próprio exemplo da derivada da função constante mostra que esta aparente simples mudança de ordem influencia no resultado final. Em geral, a derivada de Caputo é mais utilizada para modelar processos físicos, pois a mesma coincide com a derivada usual quando a ordem de derivação for inteira. Em problemas de valores iniciais, por exemplo, é possível interpretar fisicamente as condições iniciais (pois são derivadas de ordem inteira).

Um dos desafios deste trabalho foi a apresentação do CF à Educação Básica. Pensar maneiras de introduzir alguns dos conteúdos aqui abordados para estudantes que ainda estão formalizando o conceito de função, por exemplo, demandou certa criatividade e reflexão. A maturidade matemática necessária é uma barreira à abordagem do CF para este nível do ensino.

A metodologia da sequência didática proporciona, ao mesmo tempo, o aprendizado de novas competências e habilidades, como também permite uma breve investigação matemática acerca do $\Gamma(1/2)$ e suas implicações. O caráter algébrico do símbolo de Pochhammer é um facilitador para sua apresentação a estudantes da EB e a semelhança com o fatorial ajuda em sua compreensão. Ele foi base para todas as demais etapas dos Roteiro de Atividades propostos. A culminância dos três Roteiro de Atividades é feita na indagação que pode ser exposta também aos que estão iniciando os estudos sobre o Cálculo Fracionário.

Por fim, os estudos envolvendo o Cálculo Fracionário desde sua concepção, passando pelos pontos basilares até a chegada às suas formulações permitem a imersão em uma fascinante área das ciências. Sua complexidade é proporcional aos resultados que dela provém. Em contraponto à concepção abstrata de suas ideias iniciais, formam-se hoje vastas áreas de sua aplicação no meio físico. É provável que cada vez mais surjam novos resultados — teóricos e aplicados[21] — balizados em seus conceitos.

[21]Por não ser o objetivo deste trabalho, não demos foco às diversas aplicações teóricas e físicas que o Cálculo Fracionário possui atualmente. Porém, nas referências encontram-se materiais que a isto dedicaram.

Apêndice A

ROTEIRO DE ATIVIDADES 1

O fatorial e o símbolo de Pochhammer

Durante o estudo da *Análise Combinatória* nos deparamos com a definição do **fatorial**; seu conceito facilita o processo de contagem, sobretudo o cálculo. É interessante o aspecto da simples notação "!" indicar o produto de um natural por todos os seus antecessores até 1. Vimos que resolver exercícios de anagrama ou permutação ficam resumidos à manipulação do fatorial de números naturais.

O estudante atento pode perceber não ser possível dissociar o fatorial do Arranjo e Combinação — explicitado na fórmula de ambos. É possível estabelecer que ele é basilar aos estudos da Análise Combinatória. De forma semelhante, o **Símbolo de Pochhammer** tem papel significativo no estudo do ramo da matemática chamado **Cálculo de Ordem Arbitrária**, mais conhecido como **Cálculo Fracionário**. Define-se o símbolo de Pochhammer $(a)_n$, para $a \in \mathbb{R}$, como

$$(a)_n = a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+n-1) \qquad (a)_0 = 1, n \geq 0$$

Exemplo 1. *O símbolo de Pochhammer de* $(7)_5$ *é*

$(7)_5 = 7 \cdot (7+1) \cdot (7+2) \cdot (7+3) \cdot (7+4)$

$(7)_5 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55440$

Exemplo 2. *O símbolo de Pochhammer de* $(150)_{45}$ *é*

$(150)_{45} = 150 \cdot (150+1) \cdot (150+2) \cdot (150+3) \cdot (150+4) \cdots (150+42) \cdot (150+43) \cdot (150+44)$

$(150)_{45} = 150 \cdot 151 \cdot 152 \cdot 153 \cdot 154 \cdots 192 \cdot 193 \cdot 194$

Da característica do produto entre números consecutivos podemos visualizar no símbolo de Pochhammer como um "primo" do fatorial. Classifica-se este produtório em *crescente* ou *descrescente*. Quando descrescente, utilizaremos a notação $(a)_n^-$ e define-se por

$$(a)_n^- = a(a-1)(a-2) \cdots (a-n+1), \qquad (a)_0 = 1, n \geq 0$$

Exemplo 3. *O símbolo de Pochhammer de* $(9)_6^-$ *é*

$(9)_6^- = 9 \cdot (9-1) \cdot (9-2) \cdot (9-3) \cdot (9-4) \cdot (9-5)$

$(9)_6^- = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480$

Exemplo 4. *O símbolo de Pochhammer de* $(82)_{27}^-$ *é*

$(82)_{27}^{-} = 82 \cdot (82-1) \cdot (82-2) \cdot \cdots \cdot (82-24) \cdot (82-25) \cdot (82-26)$

$(82)_{27}^{-} = 82 \cdot 81 \cdot 80 \cdots 58 \cdot 57 \cdot 56$

EXERCÍCIOS

1. Calcule $(12)_6$.
2. Calcule $(25)_4$.
3. Calcule $(10)_8^{-}$
4. Calcule $(37)_9^{-}$.
5. Determine y tal que $y = 7 \cdot (10)_4$.
6. Calcule $y = (7)_3 \cdot (9)_6$.
7. Determine y tal que $y\,(8)_3 = 2\,(12)_4^{-}$.
8. Calcule $y = \dfrac{(24)_3}{(27)_5^{-}}$.
9. Resolva $y\,(26)_{10} = (35)_6^{-} \cdot (26)_4$.
10. Descubra o valor de y tal que $(y)_4 = 120$, $y \in \mathbb{N}$.
11. Qual o número natural que verifica $(y)_3^{-} = 210$?
12. Qual o número natural y que verifica $(y)_3 + (y)_4 = 144$?

ROTEIRO DE ATIVIDADES 2

A função Gama e o Símbolo de Pochhammer

A função Gama, denotada por $\Gamma(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, é classificada como uma *Função Especial*. Também faz parte do conjunto de funções chamado *Funções Eulerianas*. Ela foi introduzida pela primeira vez em 1730 pelo importante matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Sua definição está fora do escopo das funções que vimos na 1ª série do Ensino Médio, entretanto, alguns de seus desmembramentos são acessíveis ao nosso ano escolar. O primeiro deles é a relação com o símbolo de Pochhammer, onde

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \qquad a \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Se considerarmos os casos que $(a)_n$ é um número inteiro resultante do produto entre reais, podemos observar que a razão entre duas imagens (específicas) de gama resulta em um inteiro, ou seja, no número $(a)_n$. Veja a tabela de alguns valores de $\Gamma(n)$ e em seguida resolva os exercícios.

n	$\Gamma(n)$
1	1
2	1
3	2
6	120
8	5040

Tabela 1: Valores da função Gama

EXERCÍCIOS

1. Determine n e calcule $\Gamma(n)$ tal que $(5)_3 = \dfrac{\Gamma(8)}{\Gamma(n)}$.

2. Calcule $\Gamma(n)$ para que $\dfrac{\Gamma(n)}{\Gamma(2)} = (2)_5$.

3. Considere $(4)_n = \dfrac{\Gamma(7)}{\Gamma(4)}$. Determine $\Gamma(7)$.

4. Determine os valores de a e n, em seguida calcule $\Gamma(n)$ tal que $(a)_3 = \dfrac{\Gamma(n)}{\Gamma(7)}$.

5. Considere $(10)_n = \dfrac{\Gamma(16)}{\Gamma(10)}$ e determine $\Gamma(16)$.

Um segundo ponto que podemos abordar sobre a função Gama é da sua relação com o fatorial. Pela seguinte recorrência,

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(1) \cdot (1)_n \tag{2}$$

obtida da Equação (1) fazendo $a = 1$. Definindo $\Gamma(1) = 1$ e supondo $n \in \mathbb{N}$, obtemos:

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{3}$$

A expressão (2) é uma **generalização do fatorial** se considerarmos $n \in \mathbb{R}$. E a expressão (3) estabelece a igualdade entre a Gama e o fatorial para $n \in \mathbb{N}$. Através da função Gama determinamos o fatorial de um número a partir da imagem que seu sucessor possui em gama. Voltando o olhar para a imagem de $\Gamma(x)$, vejamos seu gráfico no plano cartesiano para $x > -2$, especialmente no primeiro quadrante.

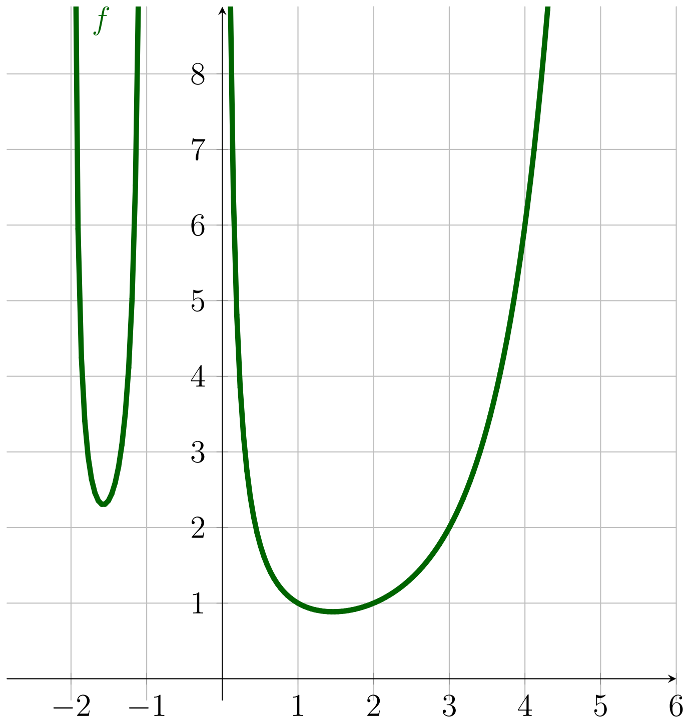

Figura 1: Gráfico de $\Gamma(x)$

EXERCÍCIOS

1. Quanto é $\Gamma(8)$?

2. Quanto é $\Gamma(13)$?

3. Qual é o valor de n tal que $\Gamma(n) = 3.628.800$? Após determinar o valor de n, escreva-o na forma de $\Gamma(n+1) = n!$.

4. Após aprender na aula de matemática sobre o fatorial de um número, Marcos começou a pesquisar um pouco mais sobre este conceito. Ele achou interessante a ideia da multiplicação com os antecessores de um número possuir um símbolo matemático próprio para si. Em seus estudos, ele descobriu que $15! = 1.307.674.368.000$. Porém, para chegar a este resultado, ele fez manualmente cada um dos cálculos até obter a resposta.

   (a) Você considera uma boa estratégia o cálculo de 15! feito na forma de sucessivos produtos entre números consecutivos? Justifique sua resposta.

   (b) De que forma você faria o cálculo de 15! dispondo apenas de papel e caneta?

   (c) Com base nos seus conhecimentos da função Gama, de que outra forma você pode representar este mesmo resultado?

5. De acordo com as habilidades EF09MA06[1], EM13MAT401[2], EM13MAT402 e EM13MAT403 da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é conteúdo da Educação Básica o estudo das funções. Você aprendeu que o eixo das ordenadas compreende como os respectivos pontos da imagem de uma função. Verifica-se que no gráfico de uma função contínua não há valor de x que não possua correspondente y. Tendo isto em vista, o que você percebe do gráfico de $\Gamma(x)$ em relação a cada ponto do eixo das abscissas com sua respectiva imagem no eixo das ordenadas?

6. Observando o gráfico de $\Gamma(x)$, estime aproximadamente o valor de y do ponto (x, y) que possui:

   (a) $x = 0,5$;

   (b) $x = 1,5$;

   (c) $x = 2,5$;

   (d) $x = 3,5$;

   (e) $x = 4,5$.

[1](EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

[2](EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
As habilidades EM13MAT402 e EM13MAT403 trazem definição semelhante para as funções polinomiais de 2º grau e função exponencial e logarítmica, respectivamente.

ROTEIRO DE ATIVIDADES 3

Cálculo Fracionário e a $\Gamma(1/2)$

Um importante resultado do Cálculo Fracionário é justamente o que começamos a investigar durante o **Roteiro de Atividades 2**. Muitos foram os importantes matemáticos que debruçaram sobre o CF em seus mais variados desmembramentos. Entre eles, pode-se destacar os trabalhos do alemão Bernhard Riemann (1826-1866), que juntamente aos estudos do francês Joseph Liouville (1809-1882), é formulado o que é conhecido como **Derivada de ordem arbitrária de Riemann-Liouville**. O italiano Michele Caputo (1927) — que dá nome a sua formulação de derivada de ordem arbitrária — também tem enorme contribuição ao CF. O que ambas formulações têm em comum é estarem apoiadas na função Gama desde sua definição.

Tal como disse Isaac Newton em uma carta enviada a Robert Hooke em 5 de fevereiro de 1676, "se vi mais longe, foi por estar nos ombros de gigantes", a construção dos conhecimentos matemáticos é fruto do trabalho cumulativo dos gênios que a ela dedicam-se. Não é diferente com o conjunto de conceitos que forma o CF e muitos foram os trabalhos até a chegada do importante resultado de que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Conforme visto anteriormente, Gama e o fatorial possuem uma equivalência descrita em (3). Porém, esta não é a única relação que integra os conceitos desta função. Também estabelece-se uma relação de recorrência na função Gama:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n), \qquad n > 0. \tag{4}$$

Observando a relação de recorrência acima, notamos que se conhecemos a imagem de um ponto do domínio, conseguimos determinar, de um em um, alguns valores do conjunto imagem de $\Gamma(n)$.

EXERCÍCIOS

1. Determine:

(a) $\Gamma(0,5)$;
(b) $\Gamma(1,5)$;
(c) $\Gamma(2,5)$;
(d) $\Gamma(3,5)$;
(e) $\Gamma(4)$;
(f) $\Gamma(4,5)$;
(g) $\Gamma(5)$;
(h) $\Gamma(5,5)$;
(i) $\Gamma(6)$;
(j) $\Gamma(6,5)$;
(k) $\Gamma(7)$;
(l) $\Gamma(7,5)$;

(m) $\Gamma(8)$; (n) $\Gamma(8,5)$; (o) $\Gamma(9)$.

2. Calcule considerando a aproximação de $\pi = 3,1415$:

   (a) $\Gamma(0,5)$;

   (b) $\Gamma(1,5)$;

   (c) $\Gamma(2,5)$;

   (d) $\Gamma(3,5)$;

   (e) $\Gamma(4,5)$.

3. Compare os valores que você estimou no Exercício 6 do **Roteiro de Atividades 2** com os que você encontrou nos Exercícios 1 e 2 desta seção. Os valores foram próximos?

4. Vimos no **Roteiro de Atividades 2** que a função Gama é uma generalização do fatorial e que $\Gamma(n+1) = n!$, se $n \in \mathbb{N}$. Em seguida, ao analisarmos o gráfico de gama visualizamos que é contínuo no 1^{o} quadrante. De posse dos dois resultados,

   (a) É cabível então a ideia de calcularmos o fatorial de $\frac{1}{2}$, ou seja, $\left(\frac{1}{2}!\right)$?

   (b) De modo geral, é possível calcular o fatorial de $\frac{n}{2}$, com n um número natural? Justifique sua resposta.

   (c) Com base nas duas alternativas anteriores, pode-se expandir o conceito de (b) para qualquer número real positivo? Em outras palavras, a princípio, é possível então calcular o fatorial de todo número positivo?

Referências

[1] ABRAMOWITZ, Milton e STEGUN, Irene A.: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. US Government printing office, 1968.

[2] BOYER, Carl B.: *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. New York: Dover Publications, 1959.

[3] BRAGA, Carmen Lys Ribeiro: *Notas de Física Matemática: equações diferenciais, funções de Green e distribuições*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

[4] BRASIL: *Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação (PNE) e dá outras providências*. Brasília, DF: Diário Oficial da União, 2014.

[5] BRASIL, Ministério da Educação: *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília, 2018.

[6] CAMARGO, R. Figueiredo: *Cálculo Fracionário e Aplicações*. Tese de Doutoramento, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2009.

[7] CAMARGO, R. Figueiredo e OLIVEIRA, E. Capelas de: *Cálculo fracionário*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

[8] CAMARGO, R. Figueiredo, OLIVEIRA, E. Capelas de e CHIACCHIO, Ary O.: *Sobre a Funçao de Mittag-Leffler*. Relatório de Pesquisa, 15(06), 2006.

[9] CAMARGO, R. Figueiredo, OLIVEIRA, E. Capelas de e CHIACCHIO, Ary O.: *Differentiation to fractional orders and the fractional telegraph equation*. Journal of Mathematical Physics, 49(3), 2008. `http://dx.doi.org/10.1063/1.2890375`.

[10] CAMARGO, R. Figueiredo, OLIVEIRA, E. Capelas de e CHIACCHIO, Ary O.: *Teorema de Adição para as Funçõoes de Mittag-Leffler*. Trends in Computational and Applied Mathematics, 10(1):01–08, 2009.

[11] DANTE, Luiz Roberto: *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. 12ª. ed. São Paulo: Atica, 2002.

[12] DOLZ, Joaquim, NOVERRAZ, Michele e SCHNEUWLY, Bernard: *Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento*. Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado de Letras, páginas 95–128, 2004.

[13] GORENFLO, Rudolf e MAINARDI, Francesco: *Fractional Calculus: integral and differential equations of fractional order*. Údine: Springer, 1997.

[14] GRIGOLETTO, Eliana Contharteze e OLIVEIRA, E. Capelas de: *Fractional versions of the Fundamental Theorem of Calculus*. 4:23–33, 2013. `http://dx.doi.org/10.4236/am.2013.47A006`.

[15] IEZZI, Gelson e DOLCE, Osvaldo: *Matemática: volume único*. São Paulo: Atual, 2002, ISBN 85-357-0285-7.

[16] MACHADO, JA Tenreiro, GALHANO, Alexandra MSF e TRUJILLO, Juan J: *On development of fractional calculus during the last fifty years*. Scientometrics, 98:577–582, 2014.

[17] MILLER, David Allan: *Fractional Calculus*. Minor Thesis part of PHD, 2004.

[18] MILLER, Kenneth S. e ROSS, Bertram: *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. New York: Wiley-Interscience, 1993, ISBN 0-471-58884-9.

[19] NEWTON, Isaac: ***[Carta de Newton em resposta a Hooke]***, Destinatário: Robert Hookel. 5 fevereiro 1675. 1 carta. Disponível em: https://digitallibrary.hsp.org/index.php/Detail/objects/9792. Acesso em: 27 janeiro 2023.

[20] OLDHAM, Keith B. e SPANIER, Jerome: *The fractional calculus*. New York: Elsevier, 1974, ISBN 0-12-525550-0.

[21] OLIVEIRA, Altenize dos Santos Cordeiro: *Cálculo Fracionário: contribuições históricas e aplicações físicas*. Tese de Doutoramento, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2018.

[22] OLIVEIRA, E. Capelas de: *Sobre a clássica funçao de Mittag-Leffler*. Revista Matemática Universitária, 1:1–21, 2019, ISSN 2675-5254. `https://doi.org/10.21711/26755254/rmu202015`.

[23] OLIVEIRA, E. Capelas de: *Funções especiais com aplicações*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005, ISBN 85-88325-42-X.

[24] POLYA, George: *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[25] POZO, Juan Ignacio: *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: ArtMed, 1998, ISBN 85-7307-356-X.

[26] PRESS, William H.: *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge University Press, 2007, ISBN 978-0-521-88068-8.

[27] RAMOS, Pedro Felipe Pavanelo: *Cálculo Fracionário aplicado ao Problema da Tautócrona*. CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática, 1:15–22, 2012. `10.21167/cqdvol1201223169664pfprrfc1522`.

[28] ROQUE, Tatiana: *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012, ISBN 978-85-3780-888-7.

[29] ROSENDO, Danilo Castro: *Sobre a função de Mittag-Leffler*. Tese de Doutoramento, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2008.

[30] ROSS, Bertram: *Fractional Calculus and Its applications: proceedings of the International Conference held at the University of New Haven, June 1974*, volume 457. Springer, 2006, ISBN 978-3-540-07161-7.

[31] SALIM, Tariq O. e FARAJ, Ahmad W.: *A generalization of Mittag-Leffler function and integral operator associated with fractional calculus.* J. Fract. Calc. Appl, 3(5):1–13, 2012.

[32] SHUKLA, AK e PRAJAPATI, JC: *On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties.* Journal of mathematical analysis and applications, 336(2):797–811, 2007.

[33] SOUZA, Joamir Roberto: *#Contato matemática, 2º ano.* 1.ed. São Paulo: FTD, 2016.

[34] STEWART, James: *Cálculo, volume 2.* 7.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013, ISBN 978-85-221-1463-4.

[35] STEWART, James: *Cálculo, volume I.* 7.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013, ISBN 978-85-221-1461-0.

[36] STURM, Jacob: *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.* volume 2. Paris: Mallet-Bachelier, 1859.

[37] TEODORO, Graziane Sales: *Cálculo fracionário e as funções de Mittag-Leffler.* Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática -Unicamp, Campinas, 2014.

[38] TIEPPO-UFPR, Sandra Maria e GUZZO-UNIOESTE, Sandro Marcos: *Elementos do Cálculo Fracionário.* Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática, 2(1), 2018.

[39] ZABALA, Antoni: *A prática educativa: como ensinar.* Penso, Porto Alegre: Artmed, 1998.