UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANA CIBELY ARAGÃO MONTEIRO

A CONSTRUÇÃO DE SEQUÊNCIAS LINEARES RECURSIVAS POR MEIO DE UMA ENGENHARIA DIDÁTICA COM A APLICAÇÃO DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS JUNTO A UM GRUPO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

SOBRAL – CEARÁ
2023

ANA CIBELY ARAGÃO MONTEIRO

A CONSTRUÇÃO DE SEQUÊNCIAS LINEARES RECURSIVAS POR MEIO DE UMA ENGENHARIA DIDÁTICA COM A APLICAÇÃO DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS JUNTO A UM GRUPO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestra em Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes.

SOBRAL – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Monteiro, Ana Cibely Aragao.
A construção de sequências lineares recursivas por meio de uma engenharia didática com a aplicação da teoria das situações didáticas junto a um grupo de alunos do ensino médio [recurso eletrônico] / Ana Cibely Aragao Monteiro. - 2023.
111 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Sobral, 2023.
Orientação: Prof. Pós-Dr. Daniel Brandao Menezes.
1. engenharia didática. 2. sequências lineares recursivas. 3. teoria das situações didáticas. I. Título.

ANA CIBELY ARAGÃO MONTEIRO

A CONSTRUÇÃO DE SEQUÊNCIAS LINEARES RECURSIVAS POR MEIO DE UMA ENGENHARIA DIDÁTICA COM A APLICAÇÃO DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS JUNTO A UM GRUPO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestra em Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 19 de junho de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br DANIEL BRANDAO MENEZES
Data: 13/07/2023 10:18:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes (Orientador)
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UECE

Documento assinado digitalmente
gov.br EDVALTER DA SILVA SENA FILHO
Data: 13/07/2023 10:46:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

Documento assinado digitalmente
gov.br AILTON CAMPOS DO NASCIMENTO
Data: 13/07/2023 10:55:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ailton Campos do Nascimento
Universidade Federal do Ceará - UFC

Aos homens da minha vida: meu filho Heitor e ao meu esposo Elno Júnior (*in memoriam*). Vocês são o motivo do início e da conclusão dessa jornada. Obrigada por serem parte de mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por me permitir chegar até o fim desta caminhada honrando aqueles que estiveram ao meu lado.

Agradeço aos meus pais que nunca pouparam esforços para me educar e me mostrar o quanto o estudo é importante para crescermos enquanto pessoas e profissionais.

Aos meus anjos nessa Terra, minhas irmãs Gisele e Daniele que tanto esforço e sacrifícios fizeram para que eu pudesse concluir esta etapa tão importante para mim.

Agradeço aos meus cunhados que são meus irmãos nesse mundo. Sempre disponíveis nos momentos que mais precisei.

Agradeço ao meu esposo Elno Júnior (*in memoriam*), que me incentivou em todos os meus projetos profissionais. Que mesmo não estando presente fisicamente neste mundo, sei que continua olhando por mim. A ele, minha eterna gratidão.

Agradeço aos meus professores do curso, que foram extremamente compreensíveis comigo durante a situação mais difícil que precisei enfrentar em minha vida até os dias atuais. Em especial ao meu orientador Daniel Brandão Menezes, pela grandiosa contribuição neste trabalho. Agradeço o incentivo e a paciência.

Aos meus colegas do grupo de estudo, que me acolheram e me ajudaram durante todo o percurso. Hoje tenho mais que colegas, tenho amigos que caminharam comigo, compartilharam conhecimentos e foram também grandes incentivadores. Ao meu colega de profissão e amigo Carlos Mateus, que me ajudou na formatação deste trabalho.

E o meu agradecimento mais especial, ao meu filho Heitor, a pessoa mais importante da minha vida. Se cheguei até aqui, foi por ele.

"O período de maior ganho em conhecimento e experiência é o período mais difícil da vida de alguém".

(Dalai Lama)

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma pesquisa referente a situações de ensino sobre o estudo das sequências lineares recursivas durante o ensino médio. São abordadas as sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Leonardo, Jacobsthal, Padovan, Perrin, Narayana, Mersenne e Oresme. Além disso, traz também um estudo das sequências elementares estudadas no ensino médio: as progressões aritméticas e as progressões geométricas e a relação existente entre a sequência de Lucas e os ternos pitagóricos. Entre as sequências pesquisadas, mas que não são estudadas durante o ensino médio, foram escolhidas quatro delas: sequência de Fibonacci, sequência de Lucas, sequência de Pell e sequência de Mersenne, para serem trabalhadas com um grupo de alunos do 3º ano "A" da Escola de Ensino Médio em Tempo Integral Delmiro Gouveia na cidade de Ipu-Ceará, usando a metodologia da Engenharia Didática (ED) em conjunto com a Teoria das Situações Didáticas (TSD). Esse estudo ocorreu durante a disciplina eletiva Aprofundamento em Matemática. São desenvolvidas situações didáticas envolvendo as sequências quatro sequências citadas acima. Este trabalho foi estruturado de acordo com a metodologia seguida pela ED e suas etapas, que são: 1. análises preliminares, 2. concepção e análise a priori, 3. experimentação e 4. análise a posteriori e validação. As situações de ensino são construídas com perspectiva na teoria de aprendizagem denominada TSD e aplicadas através da proposição de situações-problema. Tais situações buscam despertar o pensamento intuitivo dos alunos, visando a compreensão da formação das sequências através da sua fórmula de recorrência. Os alunos encontram os termos das sequências exploradas usando a fórmula de recorrência e procuram entender a formação delas observando os valores encontrados. Durante o processo podem ser observadas propriedades matemáticas nas sequências formadas. Foi possível também determinar a equação característica das sequências de Fibonacci, Lucas, Pell e Mersenne e determinar suas raízes. Ao final do processo observa-se que seguindo as etapas da TSD os discentes a princípio apresentam dificuldades na resolução das situações-problema, mas conseguem alcançar o objetivo proposto, superam os obstáculos encontrados durante a resolução das situações por meio da troca de informações e interagindo dentro do grupo. Além disso, o professor se faz presente durante todo o processo para auxiliar os alunos e intervir quando se faz necessário. Após a etapa da experimentação, foi feita a análise a posteriori e validação, sendo a última etapa da ED. Foi realizada seguindo as etapas da TSD a análise dos dados recolhidos e constatou-se que os obstáculos apresentados forma superados pelo grupo de alunos por meio da troca de informações e compartilhamento de ideias. A interação entre os alunos foi fundamental para a realização das atividades proposta. Dessa forma, foi ofertado a esse grupo de alunos um conhecimento matemático sobre o estudo das sequências lineares que pode ser estendido aos demais estudantes do ensino médio. Esse objeto de estudo poderá fazer parte dos conteúdos contemplados nas disciplinas eletivas de matemática, que fazem parte do currículo do ensino médio atual implantado nas escolas de tempo integral.

Palavras-chave: engenharia didática; sequências lineares recursivas; teoria das situações didáticas.

ABSTRACT

The present work presents research referring to teaching situations about the study of recursive linear sequences during high school. The sequences of Fibonacci, Lucas, Pell, Leonardo, Jacobsthal, Padovan, Perrin, Narayana, Mersenne and Oresme are addressed. In addition, it also brings a study of the elementary sequences studied in high school: arithmetic progressions and geometric progressions and the relationship between the Lucas sequence and the Pythagorean triples. Among the sequences researched, but which are not studied during high school, four of them were chosen: Fibonacci sequence, Lucas sequence, Pell sequence and Mersenne sequence, to be worked with a group of 3rd year “A” students. of the Delmiro Gouveia Full-Time High School in the city of Ipu-Ceará, using the methodology of Didactic Engineering (DE) in conjunction with the Theory of Didactic Situations (TSD). This study took place during the elective subject Deepening in Mathematics. Didactic situations involving the four sequences mentioned above are developed. This work was structured according to the methodology followed by DE and its stages, which are: 1. preliminary analysis, 2. design and a priori analysis, 3. experimentation and 4. a posteriori analysis and validation. The teaching situations are constructed with a perspective on the learning theory called TSD and applied through the proposition of problem situations. Such situations seek to awaken the students' intuitive thinking, aiming at understanding the formation of sequences through its recurrence formula. Students find the terms of the sequences explored using the recurrence formula and try to understand their formation by observing the values found. During the process, mathematical properties can be observed in the sequences formed. It was also possible to determine the characteristic equation of the Fibonacci, Lucas, Pell and Mersenne sequences and determine their roots. At the end of the process, it is observed that following the stages of the TSD, the students, at first, have difficulties in solving the problem situations, but manage to reach the proposed objective, overcome the obstacles encountered during the resolution of the situations through the exchange of information and interacting within the group. In addition, the teacher is present throughout the process to help students and intervene when necessary. After the experimentation stage, the posterior analysis and validation were carried out, being the last stage of the ED. The analysis of the collected data was carried out following the steps of the TSD and it was found that the obstacles presented were overcome by the group of students through the exchange of information and sharing of ideas. The interaction between the students was essential for carrying out the proposed activities. In this way, this group of students was offered mathematical knowledge about the study of linear sequences that can be extended to other high school students. This object of study may be part of the contents contemplated in the elective subjects of mathematics, which are part of the current high school curriculum implemented in full-time schools.

Keywords: didactic engineering; recursive linear sequences; theory of didactic situations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

a_n	Termo que ocupa a n-ésima posição
r	Razão da Progressão Aritmética
q	Razão da Progressão Geométrica
F_n	Número de Fibonacci
J_n	Número de Jacobsthal
L_n	Número de Lucas
Le_n	Número de Leonardo
$Le_{k,n}$	Número de K-Leonardo
M_n	Número de Mersenne
N_n	Número de Narayana
O_n	Número de Oresme
P_n	Número de Pell
Pa_n	Número de Padovan
Pe_n	Número de Perrin
S_n	Número de Padovan Perrin
$\in$	Pertence
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos Números Naturais não nulos
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

De acordo com Almouloud (2007) a didática da matemática surgiu no final dos anos 60, na França. O movimento da matemática moderna levou os pesquisadores franceses, entre outros, a buscarem o que é inerente dos processos de produção de conhecimentos matemáticos na sala de aula. Os estudiosos envolvidos colocavam que cada área de ensino deveria organizar sua própria didática, dessa forma defendiam que não poderia haver um único campo de estudo que atendesse às particularidades de cada área do conhecimento. Assim, a didática da matemática surge com o objetivo de sistematizar o estudo acerca do ensino da matemática.

Vale ressaltar seu grande interesse pelo trinômio: professor-aluno-saber. No Brasil, ela representa uma das tendências da educação matemática com traços significativos dos autores franceses. Pais traz a seguinte definição:

> A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2011, p. 11).

Destaca-se a importância do aluno que, nesse momento, passa a ser o centro do processo de aprendizagem. O professor tem também um papel fundamental de orientar seus alunos durante as situações-problema a fim de que os mesmos obtenham sucesso diante de suas tentativas e possam compreender o conteúdo trabalhado.

A abordagem pedagógica que o professor utiliza em sala é um fator significativo para que o processo, de ensino e aprendizagem, seja bem-sucedido e, ao mesmo tempo, ele é também um fator que pode explicar o porquê do fracasso dos alunos durante o processo. Há também professores de matemática que não têm o hábito de apresentar aos seus alunos a história de um determinado conteúdo como metodologia de ensino, a fim de contextualizar o tema abordado por ele durante a aula. E esse é um ponto que deve ser considerado para que o estudante veja como surgiu e como podemos aplicar os assuntos de matemática que são estudados.

Dessa forma, a história de um conteúdo pode ser utilizada como aliada no processo de ensino aprendizagem, pois poderá ajudar a compreender o porquê da importância de estudá-lo e até mesmo despertar o interesse dos estudantes pelo mesmo. Fillos, Bonete e Caetano

(2011), ressaltam que “a história da matemática não se limita a um sistema de regras e verdades rígidas, mas é algo essencialmente humano e envolvente”.

Sobre a origem dos estudos das sequências numéricas, Oliveira (2011) ressalta que o estudo de progressões começou a ser desenvolvido pelos babilônios desde períodos que antecederam a era cristã. Havia uma necessidade de se conhecer padrões como o da enchente do Rio Nilo, onde os egípcios de 5.000 anos atrás tiveram que observar os períodos em que ocorria a enchente do rio para plantar na época certa e para saberem quando haveria inundação.

De acordo com suas percepções, eles criaram um calendário solar com 12 meses, 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas dedicadas aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys. Dividiram ainda os doze meses em três períodos de quatro meses cada, sendo eles: período de semear, período de crescimento e período de colheita.

Podemos observar que a história, além de nos ajudar a perceber padrões no nosso cotidiano, poderá também ser uma ferramenta que desperte o interesse do aluno quando vamos iniciar um assunto em sala de aula. Lima *et al.* (2013) destaca ainda um papiro que data de 1950 a.C. em que se encontram problemas teóricos sobre progressões aritméticas e geométricas, trazendo assim a origem dos estudos sobre as sequências numéricas. Diante disso, neste trabalho, baseadas nas conjecturas da vertente francesa de investigação sobre a didática da matemática, construiu-se uma proposta de Engenharia Didática (ED) para o ensino de sequências lineares recursivas durante o ensino médio.

As sequências que não recebem destaque no currículo do ensino médio podem fornecer um material de estudo de grande relevância e despertar o interesse pelo aprofundamento desse tópico durante o curso, que podem se tornar um conteúdo a ser ensinado.

Trabalhadas dentro de um contexto histórico, é possível que os estudantes possam desenvolver um conhecimento mais significativo desse conteúdo matemático, trazendo a história de seus autores e não, só enfatizando a parte da matemática pura quando esses assuntos forem trabalhados em sala de aula. Será utilizada a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1976), com o objetivo de compreender as relações existentes entre alunos, professores e meio onde acontece o aprendizado.

Brousseau defende que cada conhecimento está conectado a um tipo de situação através da interação entre duas ou mais pessoas. Essas situações, de acordo com Brousseau (1986), devem ser planejadas de forma a provocar o surgimento dos conhecimentos prévios que o aluno detém, transformando em respostas instintivas ou não, e em condições apropriadas. No entanto essas situações devem ter uma intenção didática desejada, ou seja, o professor desenvolve a situação com um objetivo a ser alcançado no final do processo.

A TSD será utilizada como apoio a análise de seções de ensino. As situações-problema serão discutidas e analisadas de acordo com as quatro vertentes norteadoras: ação, formulação, validação e institucionalização. E dessa forma, será apresentado o percurso inicial traçado para se realizar esta pesquisa, em seguida análises prévias respaldadas na ED, além da problemática e da justificativa da pesquisa serem discutidas. Por fim, a questão norteadora é apresentada e os objetivos gerais e específicos são definidos.

Primeiramente foi iniciada a construção do referencial teórico relacionado ao objeto matemático, ED e TSD, para serem estudados posteriormente, com o objetivo de definir a problemática da pesquisa e assim pautar os seus objetivos. Destaca-se aqui as dissertações de mestrado de Vieira (2020) e Mangueira (2022). Em ambas as dissertações, estão presentes a ED em associação com a TDS, evidenciando dois momentos: um momento para a análise matemática através do campo epistêmico-matemático e outro para a reflexão das metodologias de pesquisa e ensino.

Em seguida, foram pesquisadas definições, relações e propriedades matemáticas relacionadas às sequências lineares recursivas. Neste trabalho são analisadas dez sequências numéricas nas quais são feitos breves históricos a respeito de seus autores e, em seguida, é apresentada a lei de recorrência, equação característica e matriz geradora das sequências. Destaca-se nesse momento da pesquisa, os trabalhos de Almeida (2014), Alves (2016a), Silva (2017a), Noronha (2020), Vieira (2020), Vieira *et al.* (2021) e Mangueira (2022).

Posteriormente, foram realizadas as leituras de trabalhos sobre a ED e TSD, para que fosse possível investigar as situações de ensino orientadas pela vertente francesa da Didática da Matemática. Ressalta-se os autores Almouloud (2007), Almouloud e Coutinho (2008), Almouloud e Silva (2012), Artigue (1988), Brousseau (1976), Brousseau (1982), Brousseau (1986) que analisam as situações de ensino embasados na vertente francesa da DM numa abordagem teórica e metodológica.

Com o objetivo de descrever o contexto didático-cognitivo em que o objeto matemático é abordado, foi analisado o material didático utilizado na disciplina de Matemática pelos professores da EEMTI Delmiro Gouveia, localizada na cidade de Ipu-Ce, uma escola de tempo integral que oferece formação de nível médio aos seus estudantes. No livro didático utilizado pelos professores de Matemática, observa-se que as sequências numéricas são trabalhadas somente durante o estudo das progressões aritméticas e progressões geométricas sendo enfatizadas as fórmulas matemáticas e algumas propriedades durante o processo de ensino aprendizagem das sequências.

Contudo, temos também no ensino médio de tempo integral as disciplinas eletivas que complementam as disciplinas da Formação Geral Básica, mas que não são obrigatórias para o aluno, pois o estudante seleciona as disciplinas que melhor atendam a seus objetivos profissionais ou que possam enriquecer sua experiência enquanto aluno do ensino médio. Dessa forma temos a eletiva de Aprofundamento em Matemática, que tem como objetivo levar os estudantes a conhecerem mais dos conteúdos estudados em sala de aula ou até mesmo a conhecerem novos tópicos de ensino. As sequências lineares recursivas são pouco exploradas durante o ensino médio e raramente são citadas nos materiais didáticos. Com isso, pode-se apresentar a problemática e a justificativa desta pesquisa.

A problemática desta pesquisa parte do fato de que as sequências lineares recursivas apresentam poucos estudos e detalhamentos nos livros do ensino médio, em especial destaca-se a coleção “Matemática: ciência e aplicações” de Iezzi *et al.* (2016), sendo essa a utilizada na EEMTI Delmiro Gouveia. Em geral, sobre sequências numéricas destaca-se o estudo das progressões aritméticas e geométricas, sendo que poderiam ser exploradas como, por exemplo, a sequência de Fibonacci que é uma das mais conhecidas e famosas. Sendo assim, um objeto matemático que poderia gerar interesse e enriquecer o currículo dos estudantes, deixa de ser apresentado e explorado, deixando de compor os conteúdos do ensino médio.

Desse modo, visto que a eletiva de Aprofundamento em Matemática[1] busca levar a um estudo mais detalhado de alguns conteúdos, tem-se como justificativa transformar o estudo das sequências lineares como um tópico a ser visto durante as disciplinas eletivas de Matemática, podendo ser utilizado pelos professores da EEMTI Delmiro Gouveia durante suas aulas, mas especificamente com as turmas do 3º ano do ensino médio. Alves (2016a) ressalta que desde a década de 1980, especialistas, pesquisadores, educadores matemáticos procuram compreender os fenômenos relacionados com o ensino e aprendizagem de assuntos matemáticos através de teorias de ensino relacionadas com a transposição didática. Nesse cenário, destacou-se a ED para embasar esta atividade investigativa, buscando a associação com a TSD.

Diante disso, esta pesquisa foi norteada pela seguinte questão de investigação: Como desenvolver um estudo sobre sequências lineares recursivas, de forma a realizar situações didáticas que possibilitem a investigação de como estudantes do ensino médio constroem essas sequências por meio de sua fórmula recursiva e compreendem a equação característica de cada uma, relacionando-a com a lei de formação?

[1] Disciplina eletiva da área de matemática.

Espera-se, com esta pesquisa, apresentar aos estudantes um conteúdo matemático que possa gerar interesse durante a disciplina eletiva e que enriqueça seus conhecimentos matemáticos, buscando também meios para que o aluno crie suas próprias estratégias de resolução das situações-problema.

Os objetivos gerais e específicos deste trabalho buscam relacionar os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática fundamentados nos pressupostos da ED. Com isso, são apresentados os objetivos gerais e específicos desta pesquisa. O objetivo geral desta pesquisa é investigar situações didáticas sob a perspectiva das construções de sequências lineares recursivas por meio de uma ED associada com a Teoria das Situações Didáticas junto a um grupo de alunos do ensino médio. Os objetivos específicos são: apresentar o estudo das sequências lineares recursivas durante o ensino médio; investigar junto aos alunos do ensino médio a formação das sequências lineares recursivas por meio das situações-didáticas propostas; investigar como os alunos relacionam a lei de recorrência da sequência numérica com sua equação característica.

A ED é a metodologia de pesquisa aplicada neste trabalho, sendo um dos métodos que pode ser utilizado em pesquisas que estudam processos de ensino de um determinado objeto matemático. Artigue (1988) caracteriza a ED como um esquema experimental baseado em realizações didáticas ocorridas em sala de aula. Dessa forma, a ED contribuiu consideravelmente para a realização da fase de Experimentação desta pesquisa que foi realizada em sala de aula com um grupo de alunos do ensino médio.

A TSD foi utilizada em associação com a ED para o desenvolvimento deste trabalho. De acordo com Almouloud (2007), a Teoria das Situações Didáticas objetiva analisar os fenômenos que intervêm no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, além de sugerir um modelo que possibilite a construção e a experimentação destas situações.

A seguir, será discutida a fundamentação teórica desta pesquisa, sendo composta pela ED, TSD e as sequências lineares recursivas, enfatizando as sequências que serão trabalhadas em sala de aula durante a etapa da experimentação. São elas: sequência de Fibonacci, Lucas, Pell e Mersenne. Além dessas, serão apresentadas as demais sequências lineares já citadas anteriormente. A fase da experimentação da pesquisa segue as etapas da ED e as situações didáticas utilizadas durante esta fase foram analisadas e discutidas de acordo com as etapas da TSD. Na análise e discussão dos dados é realizada a análise a posteriori e a validação interna da pesquisa.

2 MODELOS METODOLÓGICOS DE PESQUISA E DE ENSINO

A didática da matemática desenvolveu-se a partir dos anos 1970 na França, em meio a um contexto assinalado pela reforma da matemática moderna, manifestando interesse em estudar os problemas de ensino e conceitos matemáticos diante das particularidades próprias do saber matemático. Nesse cenário o processo de ensino e aprendizagem é representado pelo trinômio clássico: professor-aluno-saber (VIEIRA, 2020). No Brasil, chamada de Educação Matemática, destaca-se que o elemento principal do trinômio, ao realizar uma transposição didática, é o professor. Para Pais (2001) a didática da Matemática é uma tendência da educação matemática, que tem como objeto de estudo a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade do saber matemático, tanto no nível teórico como na prática pedagógica experimental.

Almouloud (2007) defende que o objetivo essencial da Didática da Matemática é a caracterização de um processo de aprendizagem através de uma série de situações denominadas de situações didáticas que definem os fatores determinantes para a evolução do comportamento dos alunos. Dessa forma "o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber" (ALMOULOUD, 2007, p. 32). Gálvez (1996) ressalta que mesmo no erro, podemos obter uma fonte de informações para a elaboração de boas questões ou situações-problema, pois podemos verificar onde ocorreu a falha e aprimorar o erro para novas experiências.

Sobre o processo de ensino e de aprendizagem, Libâneo (1994) coloca que este é realizado através da atuação conjunta de professores e estudantes, organizado sob a direção do professor, com a finalidade de prover as condições e meios pelos quais os estudantes assimilam ativamente conhecimentos, habilidades, atitudes e convicções. Com relação ao ensino e aprendizagem de Matemática "Embora a Matemática seja uma das ciências mais valorizadas e necessárias nos dias atuais, pode ser inacessível aos alunos no momento da aprendizagem. Para Teixeira, esse fato está relacionado" (ELORZA, 2013, p. 54), "à própria natureza dos conceitos matemáticos, à forma de ensiná-lo ou às condições do aluno para aprender" (TEIXEIRA, 2004, p. 5).

Os conceitos e conteúdos matemáticos ainda podem ser vistos como algo complicado para muitos, alguns alunos julgam-se incapazes de compreendê-los mesmo antes de tentarem iniciar a resolução de uma situação-problema. É nesse momento que o professor passa a desempenhar um papel ainda mais importante no processo de ensino aprendizagem, pois o mesmo além de deter os conhecimentos necessários à disciplina espera-se que ele também conheça todas as teorias e questões educacionais e saiba transmitir seus conhecimentos de forma que possibilite a aprendizagem do aluno. Souza (2010) ressalta que:

> [...] cabe ao professor a responsabilidade de mediar todo processo de solução de problemas a fim de propiciar a seus alunos situações desafiadoras que os motivem à busca de informações, à definição de estratégias, questionamentos quanto as próprias ideias, análise e reestruturação do próprio processo de solução, comunicação e troca de conhecimentos, tarefa coletiva, autoavaliação (SOUZA, 2010, p. 60).

A abordagem pedagógica utilizada pelo professor durante seu trabalho em sala de aula, passa a ser um fator essencial para que se compreenda o sucesso ou o fracasso dos processos de ensino aprendizagem da Matemática.

Adiante, será abordada a metodologia da ED associada com a Teoria das Situações Didáticas, juntamente com elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática diante de uma visão francesa da Didática da Matemática com o objetivo de compreender como esses aspectos estão intercalados e como interferem no processo de ensino da Matemática.

2.1 Engenharia didática

Na década de 70 os pesquisadores começaram a considerar as características essenciais do conhecimento matemático na elaboração de sequências didáticas e materiais de ensino. Também havia uma preocupação entre a relação aquisição de conhecimento matemático e processos de aprendizagem em matemática. Devido a essas inquietações, nos anos 80, essas investigações tomam um caráter mais formal e passam a ser metodizadas e exploradas por pesquisadores franceses como Guy Brousseau e Yves Chevallard, que passam a desenvolver as bases do que seria denominada ED (ED), em seguida, em 1989, por Michèle Artigue.

A ED foi criada com o objetivo de aprimorar o sistema de ensino e pode ser definida como uma metodologia de pesquisa que, segundo Alves e Dias (2017), foi pensada e formulada para o ensino de Matemática. Em 1989, a ED foi associada a uma metodologia de análise de situações didáticas e compara-se o trabalho do pesquisador ao trabalho de um engenheiro, pois este, para realizar qualquer projeto, baseia-se em conhecimentos científicos de sua área e aceita submeter-se a um controle do tipo científico.

No entanto, precisa resolver processos e problemas fora dos limites das ciências as quais se apoia. O professor seria então o engenheiro responsável por criar uma proposta de acordo com cada situação a fim de tornar o conteúdo matemático compreensível para o aluno.

A ED tem uma natureza fortemente experimental baseada em situações didáticas em sala de aula. Almouloud e Coutinho (2008) relatam que, segundo o pensamento de Artigue, como metodologia de pesquisa, a ED define-se primeiramente por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Além disso, caracteriza-se também como pesquisa experimental através do registro em que se coloca e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Dessa forma, Almouloud e Coutinho (2008) colocam ainda que:

> A Engenharia diática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer) (ALMOULOUD; QUEIROZ; COUTINHO, 2008, p. 66).

Define-se dois direcionamentos para essa metodologia de pesquisa conforme Alves e Dias (2017) esclarece:

> Engenharia didática clássica ou de 1ª geração (ED1), compreendida como uma metodologia que visa o estudo dos fenômenos didáticos, que possam permitir os fenômenos em sala de aula, bem como, uma perspectiva de ED, visando o desenvolvimento de recursos de formação que, segundo a tradição, tem recebido a denominação de Engenharia Didática de 2ª geração (ED2) (ALVES; DIAS, 2017, p. 197).

Nessas duas tendências, a ED organiza-se em quatro etapas, sendo estas: análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação. Diante dessas etapas é possível que o professor inicialmente verifique os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto trabalhado em sala e analise as dificuldades que poderão ocorrer durante o processo de ensino.

De acordo com os resultados obtidos na primeira etapa, serão trabalhadas situações-problema com os alunos. É essencial ter variáveis didáticas importantes que orientem o processo de aprendizagem. Os estudantes podem formular soluções partindo de seus conhecimentos prévios e imediatos. Na etapa final, serão avaliados os dados colhidos durante a experimentação, o que foi produzido pelos estudantes e seu desempenho diante da situação apresentada a fim de confrontar esses registros com os da análise a priori, com o propósito de validar ou não as hipóteses formuladas durante a investigação.

É importante ressaltar que a ED utiliza como suporte a Teoria das Situações Didáticas como teoria de ensino. De acordo com Artigue (1988), essa teoria serve de base à metodologia da ED, que se ocupa da construção de uma teoria de controle baseada no sentido das situações envolvidas. A TSD foi desenvolvida por Brousseau e busca compreender as relações existentes entre aluno-professor-saber em sala de aula. Nessa teoria alunos e professores são as peças principais da relação de ensino e aprendizagem. Enquanto o aluno será o pesquisador formulando hipóteses e construindo conceitos, o professor será responsável por criar situações convenientes para que o aluno aja sobre o saber, modificando-o em conhecimento para si.

Além disso, serão discutidas as etapas da ED e os aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos, interligando com as etapas dessa metodologia considerada na pesquisa.

2.1.1 Análises preliminares

Sendo a ED uma metodologia de pesquisa, é necessária a aplicação de suas fases para estabelecer o processo de investigação e interpretação das informações. Na primeira etapa, serão realizadas as análises prévias, com o objetivo de identificar os problemas relacionados ao ensino e aprendizagem do objeto de estudo. Nessa etapa é necessário que ocorra um estudo bibliográfico sobre o conteúdo que será trabalhado pelo professor, refletindo sobre as condições e contextos do ambiente escolar que será investigado. O pesquisador se destina a elaboração de um quadro teórico didático sobre o tema ou conteúdo específico a ser ensinado, considerando as experiências anteriores de ensino. Pommer (2013) argumenta que:

> Nesta análise preliminar é feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino (POMMER, 2013, p. 23).

É nessa etapa que se estudam as possíveis causas do problema de pesquisa, assim como as maneiras pelas quais poderemos tratá-los. É importante também que ocorra uma análise e reflexão sobre os aspectos histórico-epistemológicos dos conteúdos a serem estudados, observando como esses tem sido ensinado atualmente e como ocorreu o processo de ensino no passado. Assumir as concepções dos alunos, os recursos didáticos que poderão ser utilizados, e ainda, prever possíveis dificuldades que serão vivenciadas pelos estudantes durante as atividades que serão realizadas. Também é nessa etapa que procuramos determinar as condições para que o processo de aprendizagem ocorra de maneira mais adequada e satisfatória.

De acordo com Artigue (1988) esta etapa pode ser analisada partindo de três dimensões: a epistemológica, a cognitiva e a didática. A epistemológica, está associada ao saber em estudo; a cognitiva refere-se as características relacionadas aos conhecimentos dos discentes sobre o objeto de estudo; e a didática está associada com os aspectos do sistema de ensino.

Na dimensão epistemológica é analisada a procedência do desenvolvimento matemático e a história do conteúdo, separando o saber científico e o que se deseja ensinar, ou seja, o conteúdo é transformado em saber escolar. A dimensão cognitiva, reflete sobre as concepções iniciais antes de ser realizada uma aplicação da sequência didática, as dificuldades dos alunos, principais erros e perguntas que podem ocorrer e a dimensão didática trabalha os elementos relacionados aos elementos da dimensão epistemológica, ações do professor e conteúdo de livros didáticos.

Gaston Bachelard foi um dos pensadores modernos que considera o ato de conhecer como um ato de negação e apresenta a noção de obstáculo epistemológico. Bachelard (1996) afirma que:

> Não se tratam de obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1996, p. 17).

Segundo ele, “um obstáculo epistemológico se incrusta no conhecimento não questionado”. Daí a importância do obstáculo epistemológico no que diz respeito ao processo histórico e evolutivo do conhecimento, no entanto, eles são rejeitados em relação ao saber ensinado.

Para entender esses obstáculos, é necessário que sejam considerados dois processos distintos: descoberta de noções matemáticas e conceitos matemáticos. Também é relevante ressaltar que o conteúdo Matemático antes de ser levado para a sala de aula, passa por uma investigação na área da Matemática Pura. É necessário que o professor tenha conhecimento aprofundado sobre o conteúdo a ser trabalhado, pois ele vai abordar também a parte histórica do objeto estudado além de trabalhar com fórmulas matemáticas que aparecerão durante o processo de ensino. Isso proporciona ao aluno um vasto aprendizado do objeto em estudo, a aprendizagem do aluno vai além da resolução de problemas e questões propostas, pois ele passa a conhecer a história por traz do conteúdo que está sendo visto.

De acordo com Pais (2002) uma sequência didática é formada por um determinado número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Pais (2011) ainda afirma que quando uma sequência é adotada de uma maneira generalizada epistemologicamente de; acordo com o conteúdo matemático selecionado, ela deve ser demonstrada em lento processo de avanços e retrocessos. Vale ressaltar também que o plano pedagógico deve ser muito bem preparado sendo o resultado de um longo processo de investigação sobre o objeto matemático.

Nesta etapa, o conhecimento do professor sobre o conteúdo matemático e sua vivência em sala de aula, que o fazem conhecer os possíveis obstáculos e dificuldades que impedirão o aluno de alcançar uma aprendizagem satisfatória, são fundamentais para a elaboração das situações-problema que serão trabalhadas durante a pesquisa. São nessas situações-problema que o professor buscará proporcionar a superação das dificuldades apresentadas pelos seus estudantes.

2.1.2 Concepção e análise a priori

É nesta fase que são escolhidas as variáveis didáticas. Artigue (1988) define dois tipos de variáveis: as variáveis macrodidáticas ou globais relativas à organização global da engenharia e as microdidáticas ou locais relativas à organização local da engenharia, ou seja, refere-se aos acontecimentos durante as situações didáticas em sala de aula. Almouloud e Silva (2012, p. 26) relata, que “o pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, chamadas de variáveis de comando (microdidáticas ou macrodidáticas)”.

De acordo com as análises prévias feitas, o pesquisador toma a decisão de agir sobre as variáveis que considera serem importantes ao problema da pesquisa e também sobre as variáveis que podem nortear para as soluções do problema. Almouloud e Coutinho (2008) afirmam que “o objetivo de uma análise a priori é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido”.

Para a definição das variáveis deverão ser considerados três pontos relevantes, sendo eles: descrição das escolhas realizadas no local e comparação com a situação didática escolhida; análise da situação proposta para o aluno, considerando as possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação; previsão dos possíveis comportamentos dos alunos, tentando demonstrar como esta fase permitirá controlá-los, assegurando que tais comportamentos ocorreram por conta do desenvolvimento visado pela aprendizagem. Logo, o professor/pesquisador deve estar seguro das escolhas das variáveis locais, ciente da possibilidade de transformar o conhecimento científico em conteúdo a ser trabalhado em sala de aula e que as situações-problema elaboradas deverão proporcionar aos alunos a construção de novos conhecimentos. Elas devem consentir ao aluno caminhos para investigar e criar estratégias de resolução para os problemas propostos. Almouloud (2007) afirma que:

> Essas situações-problema devem auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes, e no desenvolvimento de habilidades, como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar representação matemática em demonstrações de propriedades e teoremas etc. (ALMOULOUD, 2007, p. 176).

Diante disso, concluímos que o professor/pesquisador tem a função de elaborar uma sequência de situações didáticas de acordo com as variáveis definidas e mostrando o conteúdo a ser trabalhado, a fim de que o aluno resolva a situação proposta refletindo sobre ela e evolua matematicamente. Perante as dificuldades apresentadas pelo aluno, o que já poderá ter sido previsto anteriormente, o professor apresentará recursos para direcionar a superação das mesmas.

2.1.3 Experimentação

Na fase da experimentação, é o momento da aplicação das situações-problema, concordando com os objetivos da pesquisa e baseados na TSD, priorizando a construção do conhecimento pelo próprio aluno de forma que o professor interfira somente no que for necessário e disponibilize recursos e ferramentas para que este objetivo seja alcançado.

Almouloud e Coutinho (2008), descrevem que:

> A fase da experimentação é clássica: é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação. Ela é seguida de uma fase de análise a posteriori que se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela” (ALMOULOUD; QUEIROZ; COUTINHO, 2008, p. 67-68).

Nesta etapa é realizada a sequência didática planejada pelo professor na concepção e análise a priori, com o objetivo de observar situações de aprendizagem envolvendo os conceitos do objeto de estudo. A dinâmica das aulas planejadas para o período da experimentação deve seguir os passos da TSD e ser voltada para a coleta de informações dos alunos que serão analisadas na próxima fase.

Durante a coleta de dados é possível fazer uso de vários instrumentais, como relatórios, registros fotográficos, produções dos alunos, entrevistas, dentre outros que serão a seguir analisados pelo professor. Também é nesse momento que deve ser estabelecido um contrato didático, definido por Brousseau (1982) como o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelo aluno e o conjunto dos comportamentos dos alunos que são esperados pelo professor. Logo, podemos defini-lo como as relações estabelecidas entre o professor, os alunos e o conhecimento.

2.1.4 Análise a posteriori e validação (interna e externa)

Nesta etapa, Almouloud e Silva (2012) relatam que é realizada a análise dos dados coletados durante a etapa de experimentação, devendo ser registrados através de: relato de observações, registros fotográficos das produções escritas e gravações das entrevistas com os alunos. Segundo Almouloud (2007):

> A análise a posteriori de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, supondo que: (1) a observação foi preparada por uma análise a priori conhecida do observador; (2) os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas, e estruturados também pela análise a priori (ALMOULOUD, 2007, p. 178).

No decorrer deste momento, é feita uma comparação dos resultados obtidos na experimentação com o que foi definido na análise a priori, a fim de que sejam validadas as hipóteses durante a investigação. A ED admite que sejam feitos dois tipos de validação: interna e externa. De acordo com Laborde (1997, p. 105) a validação interna implica em "uma descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritária na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes".

Avaliam-se os resultados conforme os objetivos de cada aula. Já a validação externa, de acordo com Laborde (1997) visa na comparação dos alunos antes e depois da aplicação da sequência, logo após a fase da experimentação. Essa sequência pode ter sido realizada através de entrevistas individuais, ou em grupo, ou por meio de questionários, ou ainda na comparação entre as produções dos alunos internos à sequência didática e dos alunos externos ao contexto didático.

Esta pesquisa abordou uma quantidade de 15 alunos participantes, que foram avaliados em um curto período de aplicação e avaliação. Vale ressaltar que as produções não foram comparadas com outras externas a esta pesquisa, sendo também realizada a validação interna.

2.2 A teoria das situações didáticas

A Teoria das Situações Didáticas surgiu na década de 60, tendo sido idealizada pelo francês Guy Brousseau, com o objetivo de compreender as relações existentes entre aluno, professor e o meio (*milieu*) em que ocorre o aprendizado (sala de aula). Essa teoria coloca o aluno na posição de um pesquisador, pois este formula hipóteses, constrói modelos e conceitos, organiza teorias e participa fortemente do processo de aprendizagem, ao mesmo tempo que o professor providencia as situações favoráveis para que o aluno, ao tomar suas decisões, converta as informações em conhecimento para si. O autor define que "uma 'situação" é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado" (BROUSSEAU, 2008, p. 20). Além disso, esta teoria nos faz analisar a forma como podemos organizar e expor o conteúdo matemático aos alunos de forma a se obter uma aprendizagem que tenha sentido e contexto para o estudante, pois, o aluno só constrói o conhecimento quando se envolve pessoalmente com o problema proposto pela situação. Vieira (2020) ressalta que:

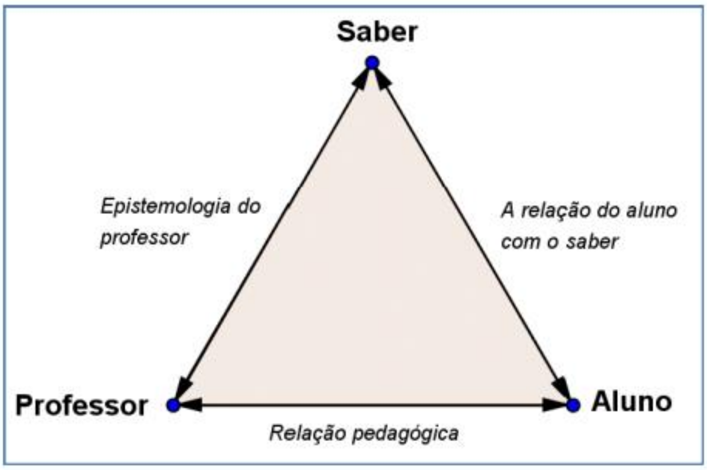
> Assim, a TSD é um modelo teórico, segundo o qual, considerando o ensino como projeto e ação social em que o aprendiz se apropria de um saber constituído ou em constituição, a didática da matemática se transforma numa ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos. Essa teoria ainda retrata que, cada conhecimento pode ser determinado com base em uma determinada situação. Dessa forma, essas situações permitem que o espaço de aplicação (sala de aula), seja organizado elencando os momentos de interações entre o professor, aluno e saber (VIEIRA, 2020, p. 36).

Uma situação didática é determinada quando acontecem relações pedagógicas dentro da tríade professor, aluno e o conhecimento matemático em situação de aprendizagem, considerando o meio. Com isso, a TSD, caracteriza-se como uma série de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas, que estabelecem as condições fundamentais para o desenvolvimento do comportamento dos estudantes.

A situação didática é o objeto central de estudo nessa teoria, por meio dela constatamos as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber. Freitas (2010, p.79) coloca que "é no meio que se provocam mudanças visando desestabilizar o sistema didático e o surgimento de conflitos, contradições e possibilidades de aprendizagem de novos conhecimentos".

A Figura 1 denominada triângulo didático representa as relações estabelecidas entre professor-aluno-saber.

Figura 1 – Triângulo didático



Fonte: Almouloud, (2007, p. 32).

Pela Figura 1 observamos que existem relações entre saber-professor, professor-aluno e professor-saber. O meio, que na figura mencionada é representado pelo interior do triângulo, é o elemento fundamental durante as interações professor-aluno-saber, pois possibilitará o progresso do conhecimento dos estudantes. O meio é o elemento das dificuldades e contradições. Espera-se que seja desta forma, pois é assim que existirá a superação por parte dos alunos.

O professor tem o dever de criar e organizar um meio com intencionalidade de ensino. Ele criará as situações para que os alunos adquiram os conhecimentos matemáticos desejados. Segundo Alves (2016a) o movimento dialético existente da relação entre professor, aluno e saber, fundamenta a TSD, atentando para o desenvolvimento de um pensamento sistemático, crítico e reflexivo, possibilitando apreender um grande repertório de fenômenos relacionados com o Ensino de Matemática. A situação didática deve ser elaborada a fim de que o aluno construa o saber, e é tarefa do professor planejar os meios didáticos que proporcionem o desenvolvimento intelectual dos alunos.

Dois conceitos importantes nesse contexto são os de situações didática e adidática. Como foi colocado anteriormente, uma situação didática é constituída pelas relações pedagógicas estabelecidas entre professor, alunos e o saber, com o objetivo de desenvolver no aluno autonomia para construir seu próprio conhecimento. Na situação adidática a estratégia pedagógica não é revelada ao aluno. Freitas (2010) explica que:

> As situações adidáticas representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso dos alunos nelas significa que ele, por seu mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento. Nesse sentido, elas não podem ser confundidas com as chamadas situações não-didáticas, que são aquelas que não foram planejadas visando uma aprendizagem” (FREITAS, 2010, p. 86).

Para Brousseau (1986), a situação adidática é representada pelo esforço independente do aluno, em determinados momentos de aprendizagem. O aluno deve ser encorajado a esforçar-se para adquirir domínio de novos conhecimentos com sua própria dedicação. O professor deve possibilitar ao aluno o máximo de independência, para que ele possa desenvolver suas próprias estratégias de resolução de problemas por meio de seus conceitos e suas elaborações construídas. Teixeira e Passos (2013) reforçam que “o professor deverá encontrar um equilíbrio na quantidade de informações que devem ser passadas ao aluno”.

Seguindo a ideia de Almouloud (2007) que o processo de aprendizagem pode ocorrer de maneiras diferentes para cada indivíduo e que é papel do professor reconhecer as melhores formas de proporcionar o ensino de matemática, a TSD é decomposta em quatro fases fundamentais para a mediação desse processo, sendo ela: 1. ação, 2. formulação, 3. validação e 4. institucionalização. Sobre a dialética de ação Almouloud (2007) define:

> Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do milieu. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação (ALMOULOUD, 2007, p. 37).

As interações entre o aluno e o meio constitui a dialética de ação, ele toma suas decisões por ações sobre o meio. Diante da situação-problema, os discentes têm liberdade para desenvolver suas próprias estratégias de resolução usando seus conhecimentos prévios, envolvendo um raciocínio de maneira mais experimental do que apenas seguindo regras. O aluno passa a agir para organizar a resolução do problema.

A dialética de formulação-2, caracteriza-se pela troca de informações entre alunos e outros indivíduos. Essas interações resultam na criação de uma estratégia de resolução da situação-problema, podendo ser escrita ou oral, em linguagem natural ou matemática. Aumouloud (2007) ressalta que esse é o momento em que o aluno expressa por meio da escrita ou da fala as ferramentas que utilizou e a solução encontrada. Vieira, Alves e Catarino (2019) colocam:

> Pode-se resumir que durante esta situação, os discentes irão transformar as ideias obtidas durante a situação da ação, e transformá-las em uma linguagem mais adequada, visando realizar conjecturas, teoremas e propriedades do assunto matemático (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019d, p. 268)

Na dialética de validação-3, o aluno deve mostrar a validade do modelo por ele criado. Nessa etapa deve haver uma apropriação de uma linguagem mais científica. O professor, por sua vez, poderá pedir mais explicações ou até mesmo rejeitar a solução dada pelo aluno, justificando o porquê de não concordar com ela. De acordo com Teixeira e Passos (2013) na dialética de validação:

> Os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação, formulação e validação caracterizam a situação didática, em que o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 165-166).

Essa etapa busca validar as afirmações que foram elaboradas nas fases de ação e formulação. Também nesse momento acontece o debate entre os alunos e entre alunos e professor.

Na última fase, temos a dialética de institucionalização-4. Depois de construído e validado nas etapas anteriores, o conhecimento passará a fazer parte oficialmente do saber matemático dos alunos. Eles poderão então utilizá-lo na resolução de problemas matemáticos. Teixeira e Passos (2013) acrescenta sobre a institucionalização:

> O professor, aí, retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização. É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto é claramente oferecido ao aluno (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 166).

A presença do professor nesta etapa é conclusiva. Aqui ele firma com os estudantes o novo conhecimento matemático que foi adquirido ao longo das quatro fases a que foram submetidos. Brousseau (2008, p. 21) revela ainda que o papel da institucionalização é "prover sentido de um saber".

Na TSD, o professor seguindo as etapas descritas, não fornece ao aluno as soluções das situações-problema, mas permite que ele participe ativamente da construção do conhecimento matemático necessário para solucioná-las. O estudante tem a possibilidade de desenvolver novos saberes baseado em seus conhecimentos prévios e interação com o meio e com os demais indivíduos que participaram do momento com ele.

2.3 Transposição didática e contrato didático

A fim de que sejam compreendidos os elementos epistemológicos, cógnitos e didáticos tratados nessa pesquisa, serão apresentadas as noções de transposição didática e contrato didático. O termo transposição didática foi introduzido pelo sociólogo Michel Verret em 1975 e rediscutido em 1985 por Yves Chevallard em seu livro *La Transposition Didactique.* onde mostra as transposições que um saber passa quando vai do campo científico ao campo escolar.

No auge da Didática da Matemática, Chevallard, em 1998 traz o conceito de Transposição Didática para analisar o sistema didático afirmando que:

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado transposição didática (CHEVALLARD, 1998, p. 39).

Chevallard coloca a Transposição Didática como a laboração de produzir um objeto de ensino, fazer um objeto de saber produzido pelo "sábio" ser objeto do saber escolar. De forma resumida podemos colocar a Transposição Didática como sendo o caminho percorrido do saber científico ao saber ensinado. Essa passagem é um processo de transformação do saber, que é modificado em relação ao saber proposto a ensinar. Noronha (2020) descreve que ocorre uma transformação de conhecimentos, com o objetivo de contribuir para o processo evolutivo e histórico do conhecimento científico.

A transformação do conhecimento científico em saber escolar não é apenas uma adequação ou uma transmissão de conhecimentos mais simplificada. Nesse processo, devemos analisar e compreender que há a produção de novos saberes.

Almouloud (2007, p. 113) numa linha mais didática coloca que a transposição didática procura investigar epistemologicamente os objetos do saber, que podem ser especificados em paramatemáticos e matemáticos. Esses são aplicados para o estudo de outros objetos matemáticos. No entanto, os objetos matemáticos "podem estudar também a si mesmo, e os objetos paramatemático, que apesar de não terem oficialmente a função de estudar objetos, possuem propriedades para resolver questões matemáticas" (OLIVEIRA, 2018, p. 34-35).

Sobre o contrato didático, inicialmente Brousseau (1986) sugere que o contrato é a "regra do jogo e a estratégia da situação didática". Coloca ainda que a evolução das situações didáticas pode modificar o contrato, proporcionando o surgimento de novas situações. Em seguida, apresenta a ideia de que há expectativas e papéis a serem obedecidos por um e outro parceiro, no que ele denominou de jogo didático.

Dessa forma, o contrato didático pode ser visto como uma relação que determina a responsabilidade de cada professor e aluno, considerando as regras estabelecidas durante o funcionamento do processo de ensino e aprendizagem. São as expectativas do professor em relação aos alunos e destes em relação ao professor, incluindo ainda o saber e as formas como esse saber é conciliado por ambas as partes.

Para Pais (2002) o contrato didático "é uma noção apropriada para compreender o fenômeno educacional, no plano mais específico da sala de aula, embora, na realidade do cotidiano escolar, aconteçam fatos não previsíveis, dificultando a realização dos objetivos propostos". Menezes (2006) reforça que:

> [...] podemos sintetizar a ideia de Contrato Didático como resultante das relações entre o professor e o aluno (ou grupo de alunos), relações essas que objetivam o ensino e a apropriação de um dado saber. Tal contrato implica não apenas em cada parceiro olhar para si próprio e para o seu papel nessa interação, mas, necessariamente, estabelece que expectativas um tem em relação ao outro, quais as responsabilidades de cada um na gestão do saber (MENEZES, 2006, p. 49).

Pode acontecer também de o contrato não ser efetivado devido à falta de interesse dos discentes pela resolução das situações-problemas propostas pelo professor. Nessas condições, haverá um rompimento do contrato.

3 ENSINO DAS SEQUÊNCIAS LINEARES RECURSIVAS: ANÁLISES PRELIMINARES

Muitas sequências são definidas recursivamente (isto é, por recorrência), ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediatos(s) (MORGADO; CARVALHO, 2015). É importante ressaltar que sequências diferentes podem ter a mesma fórmula de recorrência, basta que seus termos iniciais sejam distintos, pois isso causa uma alteração nos demais termos da sequência. Morgado e Carvalho (2015) ressaltam que "para que a sequência fique perfeitamente determinada é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termos(s)". Elas podem aparecer de duas formas diferentes: através de uma equação de recorrência ou através de uma expressão chamada de "fórmula fechada". Na primeira forma, a partir de um determinado termo, é possível encontrar cada termo posterior em função do(s) anterior(es).

Exemplo 1: Uma sequência em que o primeiro termo seja $x_1 = 2$ e cada termo a partir do segundo seja definido pela equação de recorrência: $x_n = 3x_{n-1} + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e $n > 1$.
Os termos iniciais dessa sequência são (2,7,22,67, ...).

Já na segunda forma, temos uma expressão que associa o termo x_n a cada número natural n.
Exemplo 2: Considere $x_n = 2n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Os termos iniciais são (3,5,7,9, …).

Como sequências distintas podem ter a mesma fórmula de recorrência, concluímos que uma relação de recorrência pode gerar infinitas sequências distintas entre si.

Vale ressaltar que nem toda sequência apresenta uma regra bem definida, e há ainda sequências que possuem uma regra, mas não é possível definir uma equação associada a mesma. Os termos de sequências dessa forma, apresentam uma propriedade em comum, e é por meio dessa que a sequência pode ser escrita. Por exemplo, apesar de podermos citar a sequência dos números primos (2,3,5,7,11, …), não é possível definir uma equação para determinar os próximos primos. Porém sabemos que todos os números da sequência possuem uma propriedade em comum, que é a de possuir somente dois divisores no conjunto dos números naturais.

Para cada sequência associamos uma equação característica, cujo grau está associado à ordem da sequência. Silva (2015) ressalta que “a ordem de uma recorrência é a diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos de sua equação”. Assim, essas sequências podem ser de várias ordens, sendo que são estudadas neste trabalho sequências de segunda ordem e terceira ordem. Morgado e Carvalho (2015), definem recorrências lineares de segunda ordem como sendo da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, com coeficientes constantes e $q \neq 0$. Associaremos a essa recorrência uma equação do segundo grau $r^2 + pr + q = 0$, chamada equação característica. Em Vieira (2020) temos a fórmula de recorrência de terceira ordem com coeficientes constantes $x_{n+3} + rx_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ com $q \neq 0$. Para cada recorrência linear desse tipo está associada uma equação característica de terceiro grau $x^3 + rx^2 + px + q = 0$.

Na seção a seguir, iniciaremos o estudo das sequências elementares vistas durante o ensino médio.

3.1 Sequências elementares

Em Matemática, uma sequência numérica é uma lista de números organizados de maneira lógica. Por exemplo:

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$$

É a sequência dos números naturais ímpares que pode também ser expressa por um termo geral, sendo:

$$1 + 2n \text{ ; para } n \geq 0$$

As sequências aritméticas e geométricas geralmente estudadas durante o Ensino Médio, que apresentam padrões de comportamento singulares, são conhecidas como algumas das sequências elementares. Neste tópico apresentaremos essas sequências e suas características.

3.1.1 Progressão Aritmética

Conforme a formalização dada em Morgado e Carvalho (2015), temos:

Definição 1 - Uma Progressão Aritmética **(**PA**)** é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de *razão* da progressão e representada pela letra *r*.

A representação matemática de uma progressão aritmética é $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$ em que:

$$a_2 = a_1 + r = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Logo: $a_{n+1} = a_n + r$ para todo $n \in \mathbb{N}$, em que a_1 representa o primeiro termo da sequência e r a razão e ambos são números reais.

Observe que uma progressão aritmética é um caso particular de uma sequência de recorrência, quando são conhecidos os valores do primeiro termo a_1 e da razão r, é possível determinar os demais termos da sequência.

As progressões aritméticas podem ser classificadas em: crescente; decrescente; ou constante. Essa classificação depende do valor da razão da PA. Temos as seguintes condições:

- Quando $r > 0$, dizemos que a PA é crescente;
- Quando $r < 0$, dizemos que a PA é decrescente;
- Quando $r = 0$, dizemos que a PA é constante.

Para determinar a razão de uma PA, basta fazer a diferença entre um termo e seu termo imediatamente anterior, a menos do primeiro termo que não admite antecessor, ou seja:

$$a_{n+1} - a_n = r$$

Exemplo 3: Considere $a_1 = 2$ e $r = 3$. Assim:

$$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 8 \dots\ a_{10} = 29 \dots$$

Exemplo 4: Seja $a_1 = 10$ e $r = -2$. Assim temos:

$$a_1 = 10, a_2 = 8, a_3 = 6 \dots\ a_{10} = -8 \dots$$

Exemplo 5: Considere $a_1 = 5$ e $r = 0$. Assim:

$$a_1 = 5, a_2 = 5, a_3 = 5 \dots\ a_{10} = 5 \dots$$

As sequências acima são progressões aritméticas classificadas respectivamente como crescente, decrescente e constante de razões $r = 3,\ r = -2$ e $r = 0$.

As progressões aritméticas apresentam propriedades importantes entre seus termos. Uma das mais importantes é a seguinte:

Propriedade: *Se* (a_n) *é uma progressão aritmética, então cada termo dessa sequência, a partir do segundo, é a média aritmética entre o anterior e o posterior*.

Essa propriedade é facilmente provada. Faremos abaixo a demonstração:

<u>Demonstração:</u> Considere a progressão aritmética de razão r $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$ e seus termos consecutivos $a_{n-1},\ a_n$ e a_{n+1}, com $n > 1$. Sabemos que:

$$a_n = a_{n-1} + r$$

E que:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Da primeira igualdade temos que:

$$r = a_n - a_{n-1}$$

E da segunda igualdade temos:

$$r = a_{n+1} - a_n$$

Dessa forma podemos escrever:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$
$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

□

Portanto, essa propriedade é válida para toda progressão aritmética. Cada termo a partir do segundo, é a média aritmética entre os termos anterior e posterior.

Também é possível reconhecendo o primeiro termo a_1, a razão r e o índice n de um termo qualquer, encontrar o valor desse termo. Já vimos que:

$$\begin{gathered} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} + r \end{gathered}$$

Somando essas $n - 1$ igualdades, temos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + r + \ a_2 + r + a_3 + r + \cdots + a_{n-2} + r + a_{n-1} + r$$

Veja que a parcela r se repete $n - 1$ vezes. Dessa forma, a igualdade acima pode ser escrita da seguinte maneira:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Essa fórmula é conhecida como termo geral da progressão aritmética. Assim dada (a_n) uma progressão aritmética, para todo $n \in \mathbb{N}$, é válida a expressão:

$$a_n = a_1 + (n - 1)$$

Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio em $n, a_n = a_1 + (n - 1) = r.n + (a_1 - r)$ é de grau 1. Se $r = 0$, isto é, se a progressão for estacionária, esse polinômio é de grau menor que 1. As progressões aritméticas de razão $r \neq 0$ são chamadas de progressões aritméticas de primeira ordem (MORGADO; CARVALHO, 2015).

As progressões aritméticas são estudadas no 1º ano do ensino médio, sendo um conteúdo presente na coleção “Matemática: ciência e aplicações” de Iezzi *et al.* (2016), livro utilizado na EEMTI Delmiro Gouveia. As Orientações curriculares do Ensino Médio de

Matemática e suas tecnologias (BRASIL, 2006) considera que as progressões aritméticas podem ser definidas como função afim e não deve ser tratada como um tópico independente, em que o aluno não a reconhece como função já estudada. Ressalta também que se deve evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem uso exclusivo de fórmulas.

3.1.2 Progressão geométrica

De acordo com Morgado e Carvalho (2015), temos a seguinte formalização:

Definição 2: Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente é chamado de *razão* da progressão e é representado pela letra q.

Sua representação matemática é dada por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, em que:

$$a_2 = a_1 . q$$
$$a_3 = a_2 . q$$
$$a_4 = a_3 . q$$
$$\vdots$$
$$a_{n+1} = a_n . q$$

De modo geral, podemos escrever $a_{n+1} = a_n . q$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{R}$, em que a_1 é o primeiro termo, q é denominado razão da progressão geométrica e ambos são números reais.

Veja que a progressão geométrica também é um caso particular de uma sequência de quando recorrência, em que quando conhecemos os valores do primeiro termo a_1 e da razão q podemos determinar os demais termos da sequência.

Assim como as progressões aritméticas, as progressões geométricas também podem ser classificadas quanto à variação dos seus termos. As PGs podem ser: crescentes, decrescentes, constantes ou alternantes. Temos as seguintes condições:

- Quando $a_1 > 0$ e $q > 1$, ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$, dizemos que a PG é crescente;
- Quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$, dizemos que a PG é decrescente;
- Quando $q = 1$, dizemos que a PG é constante;
- Quando $q < 0$, dizemos que a PG é alternante;

- Quando $q = 0$ e $a_1 \neq 0$ dizemos que a PG é estacionária, sendo constante a partir do segundo termo.

Numa progressão geométrica, a razão q é igual ao quociente entre qualquer termo, a partir do segundo, e seu anterior. Logo, podemos escrever:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Exemplo 6: Considere $a_1 = 4$ e $q = 2$. Assim:

$$a_1 = 4, a_2 = 8, a_3 = 16 \ldots\ a_6 = 128 \ldots$$

Exemplo 7: Seja $a_1 = 8$ e $q = \frac{1}{4}$. Assim temos:

$$a_1 = 8, a_2 = 2, a_3 = \frac{1}{2} \ldots\ a_6 = \frac{1}{128} \ldots$$

Exemplo 8: Considere $a_1 = 2$ e $q = 1$. Daí temos:

$$a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 2 \ldots\ a_6 = 2 \ldots$$

Exemplo 9: Considere $a_1 = 6$ e $q = -3$. Assim:

$$a_1 = 6, a_2 = -18, a_3 = 54 \ldots\ a_6 = -1458 \ldots$$

Exemplo 10: Seja $a_1 = 2$ e $q = 0$. Assim temos:

$$a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 0 \ldots\ a_6 = 0 \ldots$$

São exemplos de progressões geométricas. Na primeira sequência temos uma PG crescente, com $a_1 = 4$ e $q = 2$. Na sequência seguinte temos uma PG decrescente com $a_1 = 8$ e $q = \frac{1}{4}$. Na terceira sequência temos uma PG constante em que $a_1 = 2$ e $q = 1$. Na quarta sequência, classificamos a PG como alternante, com $a_1 = 6$ e $q = -3$. E na última sequência, temos uma PG estacionária.

As progressões geométricas também apresentam propriedades importantes entre seus termos. A propriedade apresentada a seguir é uma das mais exploradas durante o estudo das PGs.

Propriedade: *Se* (a_n) *é uma progressão geométrica, então cada termo dessa sequência, a partir do segundo, é a média geométrica entre o anterior e o posterior.*

Demonstração: Considere (a_n) uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$ de razão q e três termos consecutivos a_n, a_{n+1} e a_{n+2}, com $n > 1$. Sabemos que:

$$a_{n+1} = a_n \,.\, q$$

E que:

$$a_{n+2} = a_{n+1}.\, q$$

Logo, temos:

$$a_{n+2} = (a_n \,.\, q).\, q$$
$$a_{n+2} = a_n \,.\, q^2$$

Assim podemos escrever:

$$\begin{aligned} a_n.\, a_{n+2} &= a_n \,.\, a_n \,.\, q^2 \\ &= (a_n.\, q).\, (a_n.\,)q \\ &= (a_{n+1})^2 \end{aligned}$$

Portanto:

$$(a_{n+1})^2 = a_n.\, a_{n+2}$$
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n.\, a_{n+2}}$$

□

Assim, a propriedade é válida para toda progressão geométrica.

Como nas progressões aritméticas, também nas PGs, se conhecido o primeiro termo $(a_1 \neq 0)$ e $(q \neq 0)$ e dado um índice n de um termo qualquer, é possível encontrar o valor desse termo. Pela definição de progressão geométrica, já vimos que:

$$a_2 = a_1 . q$$
$$a_3 = a_2 . q$$
$$a_4 = a_3 . q$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} . q$$

Multiplicando membro a membro as $n - 1$ igualdades, temos:

$$a_2 . a_3 . a_4 ... a_{n-1} . a_n = a_1 . q \, . a_2 . q . a_3 . q \, ... \, a_{n-1} . q$$
$$a_2 . a_3 . a_4 ... a_{n-1} . a_n = a_1 . a_2 . a_3 . ... \, a_{n-1} . q . q . q . q \, ... \, q$$

Observe que o fator q aparece $n - 1$ vezes. Dessa forma a igualdade pode ser escrita da seguinte maneira:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Essa fórmula é conhecida como termo geral da progressão geométrica.

Caso o primeiro termo a_1 seja zero, ou seja, $a_1 = 0$, essa expressão também é válida e obtemos uma PG em que todos os termos são iguais a zero (SILVA, 2020). Caso a razão q seja zero, ou seja, $q = 0$, o termo geral da PG também será válido e teremos uma progressão geométrica estacionária, em que a partir do segundo termo todos são iguais a zero.

As PGs são contempladas no livro do 1º ano da coleção “Matemática: ciência e aplicações” de Iezzi *et al.* (2016), sendo tratadas tanto através de questões contextualizadas que exigem uma maior compreensão por parte do aluno para sua resolução, como também algumas questões mais diretas em que é necessário somente o uso de fórmulas.

3.2 Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano, nasceu em Pisa na Toscânia (Itália) por volta de 1170 (Figura 1). Ficou conhecido como Leonardo Fibonacci, Fibonacci significa filho de Bonaccio (ALMEIDA, 2014), é considerado como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média. Seu pai era um rico e influente mercador, o que possibilitou a Fibonacci muitas viagens e a manter o contato com estudiosos muçulmanos do mediterrâneo. Ele viajou por todo o mundo mediterrâneo e estudou com os matemáticos árabes mais renomados da época. Oliveira (2018) esclarece que Fibonacci iniciou seus estudos de matemática com professores islâmicos, e teve oportunidade de conhecer procedimentos matemáticos orientais. Ele teve contato com os métodos algébricos árabes e os numerais indo-arábicos e compreendeu inúmeras informações aritméticas e algébricas.

Figura 2 – Leonardo Pisano (Fibonacci)

Fonte: Enciclopédia livre (2023).

Em 1200, retornou à Itália e em 1202 publicou o livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo), introduzindo os numerais hindu-arábicos na Europa. Almeida (2014) coloca sobre essa obra:

> Organizado em 15 capítulo, o livro tem uma forte influência árabe, apresenta a leitura e a escrita dos números no sistema decimal indo-árabe, traz regras de cálculo, diversos problemas que incluem questões de cálculo de juros, conversões monetárias e medidas. Há uma grande coleção de problemas, dentre os quais o que deu origem à sequência de Fibonacci: O Problema da Reprodução de Coelhos, também considerado o mais famoso dos problemas de Leonardo (ALMEIDA, 2014, p. 2).

É neste livro que Leonardo apresenta seu famoso problema: “Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?” (BOYER, 2006). Tal problema dará origem a famosa Sequência de Fibonacci. Além do livro Liber Abaci, Fibonacci faz outras publicações ao longo de sua vida, tratando sobre álgebra, geometria, aritmética e trigonometria.

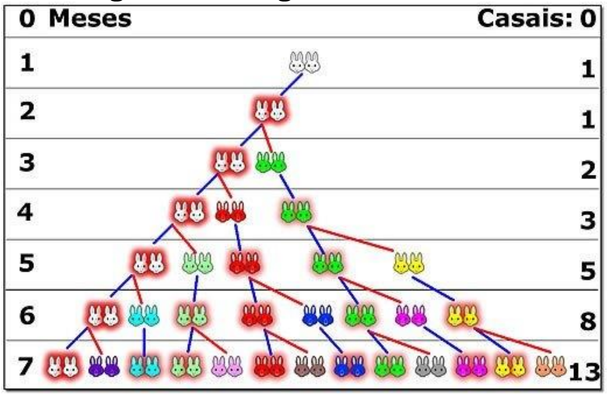
Voltando ao problema apresentado em seu livro *Liber Abaci*, Leonardo fez as seguintes observações seguindo os critérios estabelecidos anteriormente:

- No 1º mês havia apenas 1 casal de coelhos;
- No 2º mês continua havendo apenas 1 casal, visto que a maturidade sexual dos coelhos se dá somente a partir do segundo mês de vida;

- No 3º mês, nasce o segundo casal;
- No 4º mês, têm-se 3 casais.

Seguindo esse padrão teremos a configuração representada na Figura 3:

Figura 3 – Diagrama dos coelhos



Fonte: Coluna em Fórum PCs (2007).

Os números encontrados estabelecem a sequência numérica:

1,1, 2, 3, 5, 8,13, 21, 34, 55...

Observe que um termo posterior a partir do segundo, é obtido pela soma dos dois termos anteriores. Portanto a lei de formação dessa sequência é dada por:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,, \qquad n \geq 2, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Esta sequência pode ser também definida como uma recorrência linear homogênea de segunda ordem com $F_0 = F_1 = 1$. Ao resolver a equação de recorrência encontraremos uma fórmula fechada que nos permite calcular qualquer termo da sequência numérica. A lei de formação descrita acima pode ser escrita como:

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$

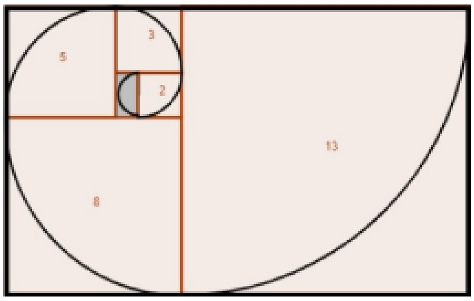
Sua equação característica é dada por $x^2 - x - 1 = 0$, pois sendo uma recorrência linear de segunda ordem é associada a uma equação do segundo grau. Resolvendo a equação, encontramos como raízes os valores:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; e \; x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Um fato interessante sobre essas raízes é que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ representa o número de ouro. Se dividirmos um número da sequência pelo seu anterior o resultado será cada vez mais próximo de 1,618.

Se construirmos quadrados cujos lados têm medida igual aos números dessa sequência e dispomos de maneira geométrica, é possível construirmos um retângulo chamado Retângulo de Ouro (ALMEIDA, 2014). Traçando um arco seguindo a sequência de Fibonacci dentro desse retângulo, traçamos uma espiral perfeita.

Figura 4 – Espiral de Fibonacci



Fonte: Mangueira (2022).

Essa espiral está presente em diversos fenômenos da natureza, entre eles destacamos: as sementes na flor do girassol formam essa espiral; nas conchas dos caracóis; nas escamas da pinha, na copa das árvores.

Figura 5 – Flor de girassol

Fonte: Luis Pellegrini (2017).

A sequência de Fibonacci nasce a partir de um problema sobre a reprodução de coelhos e, a partir desse, observamos que a mesma se encontra em fenômenos naturais e também se aplica em situações do cotidiano, como no mercado financeiro e na ciência da computação.

Outros estudos feitos por Alfred (1965), Hoggatt Junior (1969), Vorobiov (1974) e Koshy (2001), discutem outras propriedades dessa sequência. Uma questão apresentada é a matriz de Fibonacci, em que a matriz Q elevada a n-ésima potência, resulta os termos de Fibonacci.

Dessa forma temos: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, essa matriz foi estudada por Charles H. King, em sua Tese de Mestrado em 1960, Califórnia (Almeida, 2014). Quando elevada a n-ésima potência, obtemos $Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Assim os números da sequência de Fibonacci podem ser obtidos através das potências da matriz Q. Observe os exemplos abaixo:

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = Q^2 . Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{bmatrix}$$

$$Q^4 = Q^3 . Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{bmatrix}$$

$$Q^5 = Q^4 . Q = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_6 & F_5 \\ F_5 & F_4 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, é possível determinar os números da sequência sem sua fórmula de recorrência utilizando a matriz geradora.

Almeida (2014) mostra a prova desse resultado através por indução Matemática. Vejamos:

Para $n = 1$, temos: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$, que é verdade.

Suponha que a igualdade seja válida para algum n inteiro positivo. Provaremos que é válida para $n + 1$.

Por hipótese, temos $Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$. Calculando Q^{n+1}, encontramos:

$$Q^{n+1} = Q.Q^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} + F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix}$$

Assim, mostramos a veracidade de $Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ para todo inteiro $n \geq 1$.

$\square$

3.3 Sequência de Lucas

François Édouard Anatole Lucas foi um matemático francês (1842-1891), criador do jogo matemático Torre de Hanói, atuou como professor de matemática durante os anos de 1872 a 1890 e publicou mais de 180 artigos nas diversas áreas da matemática (Figura 6) (SILVA, 2017a).

Desenvolveu trabalhos, em especial para a Teoria dos Números, deixando resultados relevantes para o período considerado. Lucas incluiu um novo ramo na matemática conhecido como matemática lúdica com a criação da Torre de Hanói, um jogo tipo quebra-cabeça que envolve, além de recorrência, função exponencial.

Lucas também trabalhou com o Quebra-cabeças de Baguenaudier, conhecido como Anéis Chineses que, embora não seja de sua autoria, ele fez considerações importantes a respeito do mesmo.

Figura 6 – François Édouard Anatole

Fonte: Enciclopédia livre (2020).

Ressalta-se que esse material é de autoria de Girolamo Cardano (1501-1576), no entanto Lucas apresenta suas considerações quanto ao material e sua resolução (Pontes, Gobbi, Sousa, 2018). Assim como na Torre de Hanói, o número de movimentos no quebra-cabeças chinês das argolas cresce exponencialmente com o número de argolas.

Lucas foi um dos matemáticos que mais contribuiu nos estudos dos números primos, sendo que capaz de estabelecer a primalidade do décimo segundo número primo de Mersene:

$M_{127} = 2^{127} - 1 = 170141183460469231687303715884104727,$ o maior número primo encontrado sem o auxílio de máquinas até hoje, que permaneceu como o maior primo conhecido por 75 anos (SILVA, 2017a).

Seus estudos sobre divisibilidade e fatoração renderam importantes resultados como a sequência de Lucas, que surge como uma generalização da sequência de Fibonacci. Os números de Lucas formam uma sucessão semelhante à de Fibonacci sofrendo mudanças nos dois primeiros termos que são 2 e 1 e os seguintes são obtidos pela soma dos dois termos antecessores (MANGUEIRA, 2022). Temos a seguinte lei de formação:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}\,, \qquad n \geq 2, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Com $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Ao escrever a equação característica dessa recorrência linear de segunda ordem, encontraremos a mesma apresentada pela sequência de Fibonacci e por consequência as mesmas raízes para tal equação.

Podemos destacar a seguinte propriedade entre os números de Fibonacci e os números de Lucas. Escolhendo 3 termos da sequência de Fibonacci e somando os extremos, encontraremos um número de Lucas. Exemplos:

$$1, 1, 2 \rightarrow 1 + 2 = 3 = L_3$$
$$3, 5, 8 \rightarrow 3 + 8 = 11 = L_6$$

Como na sequência de Fibonacci, Silva (2017a) exibe uma representação matricial de Lucas, em que a matriz Gelevada à n-ésima potência resulta nos termos da sequência de Lucas. Temos a matriz de Lucas apresentada da seguinte forma:

$$G = \begin{bmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Silva (2017a) faz a demonstração da igualdade acima por indução matemática e considerando $L_{-1} = -1, L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Vejamos:

Para $n = 0$, temos:

$$\begin{bmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, para $n = 0$, a identidade é verdadeira. Suponha que seja válida para n, então multiplicando ambos os lados da identidade $\begin{bmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$ à direita respectivamente por $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e por $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} L_n & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n+1}$$

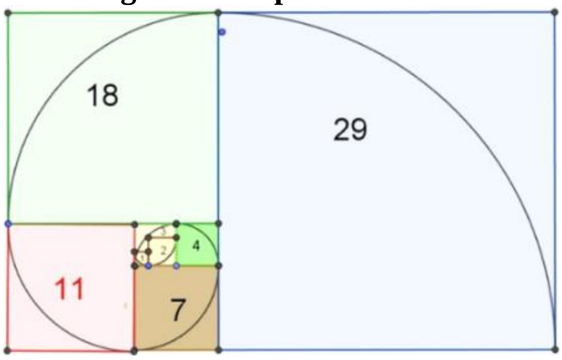
$$\begin{bmatrix} L_{n-2} & L_{n-1} \\ L_{n-1} & L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n-1}$$

$\square$

Ou seja, se a identidade é válida para n, ela também é válida para $n + 1$ e para $n - 1$. Logo, é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Também temos a representação geométrica dos números dessa sequência, semelhante a espiral de Fibonacci, no entanto, com os quadrados iniciais de lados medindo 2 e 1 respectivamente (MANGUEIRA, 2022).

Figura 7 – Espiral de Lucas



Fonte: Souza *et al.* (2022).

Na seção posterior será apresentada uma relação matemática importante entre os números da sequência de Lucas e os ternos Pitagóricos.

3.4 A sequência de Lucas e os ternos Pitagóricos

Terno Pitagórico é uma sequência de três números inteiros positivos que satisfazem ao Teorema de Pitágoras: "Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos". Com os números de Lucas é possível encontrar ternos pitagóricos executando operações simples com os valores escolhidos (SILVA, 2017b). Escolhemos 4 números consecutivos da sequência de Lucas, em seguida efetuamos as operações das etapas abaixo:

- 1ª: encontrar o produto dos extremos;
- 2ª: multiplicar por 2 o produto dos meios;
- 3ª: somar os quadrados dos meios.

Os números obtidos nas três etapas formarão um terno pitagórico. Vejamos alguns exemplos:

- Números de Lucas: 2, 1, 3 e 4
  - 1ª etapa: Produto dos extremos: $2 . 4 = 8$;
  - 2ª etapa: O dobro do produto dos meios $2 . 1 . 3 = 6$;
  - 3ª etapa: Soma dos quadrados dos meios: $1^2 + 3^2 = 10$.

Como $10^2 = 6^2 + 8^2$, os números encontrados formam um terno pitagórico.

- Números de Lucas: 3, 4, 7, 11
  - 1ª etapa: Produto dos extremos: $3 . 11 = 33$;
  - 2ª etapa: O dobro do produto dos meios $2 . 4 . 7 = 56$;
  - 3ª etapa: Soma dos quadrados dos meios: $4^2 + 7^2 = 65$.

Novamente temos um terno pitagórico formado pelos números 65, 56 e 33. Seguindo as etapas descritas é sempre possível gerar um terno pitagórico a partir dos Números de Lucas.

Além de contribuições importantes para a área da Teoria dos Números, Édouard Lucas foi também um grande pesquisador na área da Matemática Recreativa. A Torre de Hanói, por exemplo, é um jogo muito usado por professores nos dias atuais, que sempre traz resultados satisfatórios quando trabalhada em sala de aula (SILVA, 2017b).

3.5 Sequência de Pell

O matemático inglês John Pell (1611-1685) é reconhecido por sua natureza extremamente reservada e pouco comunicativa sobre seus métodos de estudo e pesquisa (Figura 8). Porém, era respeitado e visto como um matemático competente (MANGUEIRA, 2022). Fez poucas publicações e correspondia-se muito com outros estudiosos europeus, o que torna difícil determinar com certeza que contribuições são de sua autoria.

Figura 8 – Jonh Pell

Fonte: Noronha e Alves (2018).

Malcolm (2000) coloca que Jonh Pell vivia constantemente sem dinheiro e recursos, o que pode ser a causa para tão poucas publicações em seu nome. Porém, Walker (2011) esclarece que Pell preferia permanecer no anonimato, o que pode ser a causa de suas publicações não terem se evidenciaram tanto quanto os trabalhos de seus contemporâneos.

> O matemático John Pell é uma figura significativa na história intelectual da Inglaterra do século XVII- significativa, porém mais por suas atividades, contatos e correspondências do que por seus trabalhos publicados. Suas poucas publicações são, no entanto, valiosas fontes de informação sobre sua biografia intelectual (MALCOLM, 2000, pág. 7).

Embora a sequência receba o nome de Pell, Noronha (2020) relata que esta já era conhecida na antiguidade grega por volta de 100 d,C, sendo parte de um antigo algoritmo para criar sucessivas aproximações à $\sqrt{2}$, conhecido como escada de Theon.

A sequência de Pell é gerada pela recorrência linear de segunda ordem definida em Horadam e Mahon (1985) com a seguinte lei de formação:

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

Com $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$, para todo $n > 1, n \in \mathbb{N}$, gerando a seguinte sequência (0, 1, 2, 5, 12, 29, 70,...). O conjunto de números que formam a sequência são chamados *números de Pell* denotados por P_n. É importante ressaltar que ela pode ser trabalhada também com índices negativos, ou seja, com $n \in \mathbb{Z},$ Koshy (2014) deixa claro essa possibilidade. Como a recorrência é de segunda ordem, sua equação característica é representada por uma equação de segundo grau dada por $x^2 - 2x - 1 = 0$. Resolvendo-a encontramos as raízes:

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \ \ e \ \ x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

A raiz positiva dessa equação é conhecida como número de prata ou razão de prata.

O nome de Pell está também associado a equações do tipo $x^2 - Dy^2 = 1$, com $D, x, y \in \mathbb{Z}$ e D não sendo quadrado perfeito. Porém, Malcolm (2000) esclarece que essa associação é de natureza e profundidade desconhecidas e incertas, devido à extrema discrição do matemático Jonh Pell.

Para o modelo matricial, Noronha (2020) ao estudar os autores Ercolano (1979) e Horadam e Mahon (1985) descreve que o modelo matricial da sequência de Pell pode indicar um obstáculo profundo na detecção e tratamento das matrizes. Porém, encontra-se atualmente a abordagem matricial da sequência de Pell, Bicknell (1975) e Ercolano (1979) asseguram que os números de Pell podem ser determinados através das potências da matriz $R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, em que $R^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Em Alves (2016b) encontramos a descrição feita por Ercolano (1979). Podemos observar que:

$$R^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{bmatrix}.$$

Por indução matemática verificamos que:

$$R^{n+1} = R^n.R = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2P_n + P_{n-1} & P_n \\ 2P_{n-1} + P_{n-2} & P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

$\square$

3.6 Sequência de Leonardo

A sequência de Leonardo, conhecida também como os números de Leonardo, é uma sequência linear recorrente de segunda ordem. Semelhante à sequência de Fibonacci, diferenciando-a apenas pela adição de uma unidade ao final da lei de formação e valores iniciais distintos (VIEIRA *et al*., 2020). Sua fórmula de recorrência é dada por:

$$Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1$$

Com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$ e $Le_0 = Le_1 = 1$. Esta sequência vem sendo estudada pelos autores Shannon (2019), Vieira, Alves e Catarino (2019) e Mangueira *et al*. (2021). Os primeiros números de Leonardo são:

$$1, 1, 3, 5, 9, 15, \ldots$$

As propriedades numéricas de sequência também serão semelhantes às propriedades encontradas na sequência de Fibonacci. Alves *et al.* (2020) acredita que esses números foram estudados por Leonardo de Pisa, também conhecido por Leonardo Fibonacci, porém, não é uma ideia comprovada em nenhum trabalho na literatura, devido à escassez de pesquisas referentes a essa sequência.

Podemos ainda reescrever a lei de formação da sequência para $n + 1$ e obteremos $Le_{n+1} = Le_n + Le_{n-1} + 1$. Subtraindo agora $Le_n - Le_{n+1}$, teremos:

$$Le_n - Le_{n+1} = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1 - (Le_n + Le_{n-1} + 1)$$
$$Le_{n+1} = 2Le_n - Le_{n-2}$$

Temos uma nova relação de recorrência, com $n \geq 3, Le_0 = Le_1 = 1 \; e \; Le_2 = 3$. Sua equação característica é dada por $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$, possuindo três raízes reais:

Percebe-se que x_1 e x_2 são as mesmas raízes da equação característica da sequência de Fibonacci.

Catarino e Borges (2019) estabelecem uma nova relação de recorrência baseada nos números de Fibonacci, sendo $Le_n = 2F_{n+1} - 1$, $n \geq 0$ e ainda definem uma outra relação de recorrência: $Le_n = 2Le_{n-1} - Le_{n-3}$, com $n \geq 3$, em que é mantido os valores iniciais.

Em Mangueira, Alves e Catarino (2022) encontramos também uma generalização dos números de Leonardo, definida como os números de K-Leonardo, denotados por $Le_{k,n}$ e definida pela seguinte lei de recorrência:

$$Le_{k,n+1} = 2kLe_{k,n} - Le_{k,n-2}$$

Para $k \geq 1$ e $n \geq 2$ e seus termos iniciais sendo $Le_{k,0} = Le_{k,1} = 1$ e $Le_{k,2} = 3$. Os números iniciais dessa sequência são mostrados na Figura 9.

Figura 9 – Primeiros termos da sequência de K-Leonardo

n	$Le_{k,n}$
0	1
1	1
2	3
3	$6k - 1$
4	$12k^2 - 2k - 1$
5	$24k^3 - 4k^2 - 2k - 3$
6	$48k^4 - 8k^3 - 4k^2 - 12k + 1$
⋮	⋮

Fonte: Mangueira, Alves e Catarino (2022).

Sobre a forma matricial da sequência de Leonardo, Vieira *et al.* (2020) define como:

Para $K = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Le_3 & Le_2 & Le_1 \end{bmatrix}$, tem-se que:

$K^n = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} Le_{n+2} & Le_{n+1} & Le_n \end{bmatrix}$, $n \geq 1$. Vejamos o exemplo a seguir:

$$K^2 = [3 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2$$

$$K^2 = [3 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [9 \quad 5 \quad 3] = [Le_4 \quad Le_3 \quad Le_2]$$

Vieira *et al.* (2020) traz a demonstração para essa igualdade. Utilizando também a indução matemática podemos verificar sua veracidade.

Para $n = 1$, temos:

$$K = [3 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [5 \quad 3 \quad 1] = [Le_3 \quad Le_2 \quad Le_1]$$

Assim a igualdade é válida. Suponha que seja válida para $n \in \mathbb{N}$.

$$K^n = [3 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = [Le_{n+2} \quad Le_{n+1} \quad Le_n]$$

Dessa forma, será válido também para $n + 1$.

$$K^{n+1} = [3 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} = [3 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [Le_{n+2} \quad Le_{n+1} \quad Le_n]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [2Le_{n+2} - Le_n \quad Le_{n+2} \quad Le_{n+1}]$$

$$= [Le_{n+3} \quad Le_{n+2} \quad Le_{n+1}]$$

Portanto, a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Pode-se dizer que há ainda poucas informações sobre esta sequência sendo necessários estudos para se chegar a outras conclusões mais precisas sobre a sequência de Leonardo. Acredita-se até que esses números foram estudados por Leonardo de Pisa, conhecido como Leonardo Fibonacci, no entanto esse fato não se comprova em nenhum trabalho na literatura devido à escassez de pesquisas referentes a essa sequência, Vieira *et al*. (2020).

3.7 Sequência de Jacobsthal

Ernst Erich Jacobsthal (1882-1965), foi um matemático alemão especialista em Teoria dos Números. Alves (2017) relata que Jacobsthal fugiu de Berlim, na Alemanha, para Normandia e Suíça em 1939 e 1943. Foi um dos primeiros matemáticos a estudar os polinômios de Fibonacci. Os números de Jacobsthal são uma sequência de inteiros, denominados em memória deste matemático e baseada também na sequência de Fibonacci. A sequência de Jacobsthal é dada pela lei de recorrência:

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$$

Com $n \geq 2$ e $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$. Os termos iniciais dessa sequência são (0, 1, 1, 3, 5, 11, ...). A equação característica dessa recorrência é $x^2 - x - 2 = 0$, que possui duas raízes reais: $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$.

Figura 10 – Ernst Erich Jacobsthal

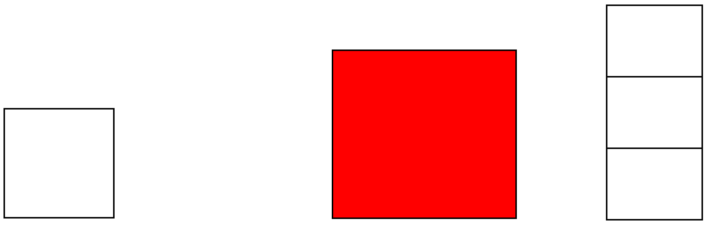
Fonte: Mangueira (2022).

Mangueira (2022) coloca que embora esta sequência seja considerada como uma particularidade da sequência de Lucas, ela apresenta diversas aplicações, em especial na área da computação, e aparecem também em muitos problemas de análise combinatória.

Na análise combinatória, destacamos um problema proposto e resolvido por Craveiro (2004): calculando o número de ladrilhamentos t_n possíveis para um retângulo 3 x n com dois tipos de ladrilhos, um da cor branca (1 x 1) e outro na cor vermelha (2 x 2), obedece aos números de Jacobsthal. Definindo $t_0 = 1$, temos que $t_1 = 1$, pois há apenas um ladrilhamento para o retângulo 3 x 1 com os dois tipos de ladrilhos dados.

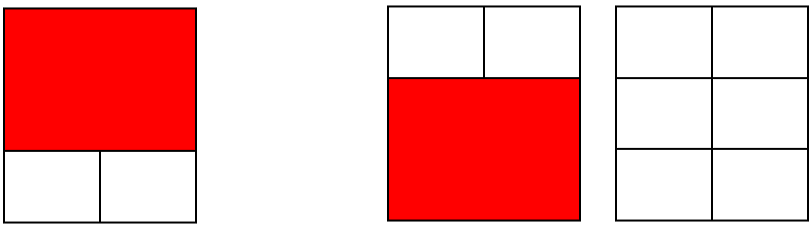
Em seguida para os retângulos 3 x 2 temos $t_2 = 3$, pois são 3 possibilidades diferentes para preencher o retângulo com os ladrilhos nas cores branca e vermelha. Seguindo para os retângulos 3 x 3 temos $t_3 = 5$. Continuando com a solução do problema, os próximos valores serão também números da sequência de Jacobsthal. As Figura 11, 12 e 13 ilustram essa situação:

Figura 11 – Ladrilhamentos para um retângulo 3x1



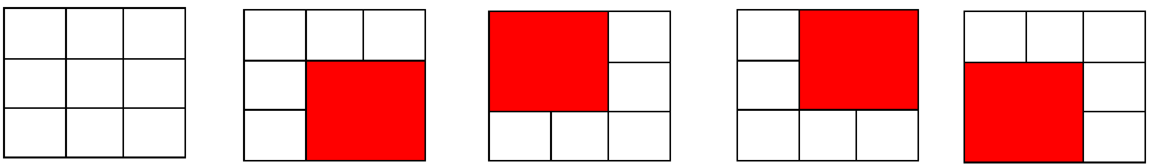
Um ladrilho de cor branca (1x1) e um ladrilho de cor vermelha (2x2) e um ladrilhamento para um retângulo 3x1.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Figura 12 – Ladrilhamento para um retângulo 3x2



Fonte: elaborada pela autora (2023).

Figura 13 - Ladrilhamentos para um retângulo 3x3



O número de ladrilhamentos para o retângulo 3x3 com os dois tipos de ladrilhos: com um ladrilho 1x1 de cor branca e um ladrilho de cor vermelha 2x2 é $T_3 = 5$.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Sobre a correspondência dos números de Jacobsthal com matrizes, Koken e Bozkurt (2008) apresentam o seguinte: tem-se para $J = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, temos que $J^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Vejamos:

$$J^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_3 & 2J_2 \\ J_2 & 2J_1 \end{bmatrix}$$

$$J^3 = J^2.J = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_4 & 2J_3 \\ J_3 & 2J_2 \end{bmatrix}$$

Koken e Bozkurt (2008), provam a igualdade dada pela matriz geradora através da indução matemática.

Para $n = 1$, temos:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_2 & 2J_1 \\ J_1 & 2J_0 \end{bmatrix}$$

Logo para $n = 1$, é válida a igualdade.

Suponha que seja verdadeira para $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$J^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$$

Mostremos que é válida também para $n + 1$.

$$J^{n+1} = J^n.J = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{n+1} + 2J_n & 2J_{n+1} \\ J_n + 2J_{n-1} & 2J_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{n+2} & 2J_{n+1} \\ J_{n+1} & 2J_n \end{bmatrix}$$

Logo, a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Embasada na sequência de Lucas e Jacobsthal, Vieira *et al.* (2021) apresenta também a sequência de Jacobsthal-Lucas, que é definida pela relação de recorrência:

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$$

Com $n \geq 2$ e com termos iniciais $J_0 = 2$ e $J_1 = 1$. Seus termos iniciais são (2, 1, 5, 7, 17, 31, ...). Essa sequência preserva a mesma relação de recorrência da sequência de Jacobsthal com os termos iniciais da sequência de Lucas.

3.8 Sequência de Padovan

Richard Padovan (nascido em 1935) é um arquiteto italiano autor da sequência de Padovan (Figura 14). No entanto, ele atribui sua descoberta ao arquiteto holandês Hans van Der Laan (1904-1991), isso porque, após a Segunda Guerra Mundial em 1945, Hans van Der Laan juntamente com seu irmão iniciaram o processo de reconstrução de igrejas que haviam sido destruídas e, durante este processo, descobriram um novo padrão de medida dado por um número irracional (VOET; SCHOONJANS, 2012), conhecido como número de plástico ou número radiante com o valor de aproximadamente 1,32.

Figura 14 – Gérard Cordonier

Fonte: Vieira (2020).

O número de plástico é ideal para ser utilizado em escala geométrica e objetos espaciais. Segundo Voet e Schoonjans (2012, p. 255) "seu número plástico possui o vigor do seu próprio sistema proporcional, sendo testado e usado por arquitetos e matemáticos".

Não só Richard Padovan estudou esse número, o matemático francês Gérard Cordonier (1907-1977) também é conhecido por seu trabalho sobre o número radiante e, mesmo falecendo antes de publicar seus estudos, a sequência de Padovan também é conhecida como sequência de Cordonier.

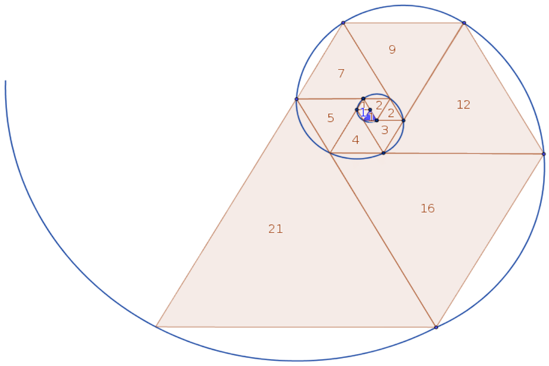
A sequência de Padovan é considerada uma espécie de prima da sequência de Fibonacci, porém de terceira ordem. É uma recorrência linear recursiva e sua fórmula é dada por:

$$Pa_n = Pa_{n-2} + Pa_{n-3}$$

Com $n \geq 3$ e seus termos iniciais são $P_0 = P_1 = P_2 = 1$. Sua equação característica é dada por $x^3 - x - 1 = 0$, que possui três raízes, sendo uma real dada pelo número de plástico e outras duas raízes sendo números complexos conjugados.

A sequência de Padovan também possui uma representação geométrica dada pela espiral de Padovan, Segundo Vieira e Alves (2019) ela é construída pela justaposição de triângulos equiláteros obedecendo a uma regra de construção característica. Inicialmente temos um triângulo equilátero de lado 1, respeitando a regra da construção, é adicionado um novo triângulo equilátero ao maior lado do polígono formado (Figura 15).

Figura 15 – Espiral de Padovan



Fonte: Vieira (2020).

Tem-se também a representação matricial da sequência de Padovan, sendo uma matriz 3x3 que foi estabelecido de acordo com por Sokhuma (2013), Seenukul (2015) e Yilmaz e Taskara (2013) onde eles "atrasam" a sequência alterando os valores iniciais para 0,0,1. Com isso, tem-se: para $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $L^n = \begin{bmatrix} Pa_{n-1} & Pa_{n+1} & Pa_n \\ Pa_n & Pa_{n+2} & Pa_{n+1} \\ Pa_{n+1} & Pa_{n+3} & Pa_{n+2} \end{bmatrix}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Encontramos em Vieira (2020), a seguinte representação para os valores iniciais dados na sequência $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ com $n \in \mathbb{N}$. Para $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que:

$$L^n = \begin{bmatrix} Pa_{n-5} & Pa_{n-3} & Pa_{n-4} \\ Pa_{n-4} & Pa_{n-2} & Pa_{n-3} \\ Pa_{n-3} & Pa_{n-1} & Pa_{n-2} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5$$

Vieira (2020) prova por indução a veracidade da matriz geradora dessa sequência. Para $n = 5$, temos:

$$L^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_4 & P_3 \end{bmatrix}$$

Logo, a igualdade é válida.

Suponha que seja válido para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Temos então:

$$L^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} Pa_{n-5} & Pa_{n-3} & Pa_{n-4} \\ Pa_{n-4} & Pa_{n-2} & Pa_{n-3} \\ Pa_{n-3} & Pa_{n-1} & Pa_{n-2} \end{bmatrix}$$

Verificamos agora que é válido para $n + 1$.

$$\begin{aligned} L^{n+1} = L^n.L &= \begin{bmatrix} Pa_{n-5} & Pa_{n-3} & Pa_{n-4} \\ Pa_{n-4} & Pa_{n-2} & Pa_{n-3} \\ Pa_{n-3} & Pa_{n-1} & Pa_{n-2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Pa_{n-4} & Pa_{n-5} + Pa_{n-4} & Pa_{n-3} \\ Pa_{n-3} & Pa_{n-4} + Pa_{n-3} & Pa_{n-2} \\ Pa_{n-2} & Pa_{n-3} + Pa_{n-2} & Pa_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Pa_{n-4} & Pa_{n-2} & Pa_{n-3} \\ Pa_{n-3} & Pa_{n-1} & Pa_{n-2} \\ Pa_{n-2} & Pa_{n} & Pa_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, a igualdade é válida para todo $n \geq 5$.

$\square$

3.9 Sequência de Perrin

Oliver Raoul Perrin (1841-1910) foi um engenheiro francês que demonstrava grande aptidão para a área da matemática, tanto é que em 1900 foi palestrante convidado do Congresso Internacional de Matemática em Paris.

A sequência de Perrin foi mencionada implicitamente em 1876 por Édouard Lucas e em 1899 a mesma foi definida por Raoul Perrin. Com várias aplicações, em particular em teoria dos grafos, essa sequência tem sido usada recentemente para descobrir coordenadas de táxis em redes urbanas de forma confidencial (SUGUMARAN; RAJESH, 2017). Esta sequência é definida pela relação de recorrência:

$$Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3}$$

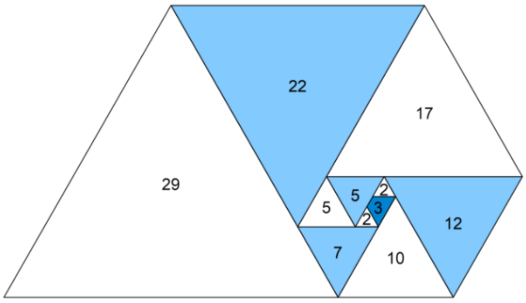
Com $n \geq 3$ e $Pe_0 = 3, Pe_1 = 0, Pe_2 = 2$. Esta diferencia-se da sequência de Padovan apenas pelos valores de seus termos iniciais. Os primeiros termos da sequência são:

3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, ...

Visto que, apresenta uma recorrência de terceira ordem, sua equação característica é dada por $x^3 - x - 1 = 0$. Percebe-se que a fórmula de recorrência é a mesma da sequência de Padovan e, portanto, suas raízes também serão as mesmas, sendo uma raiz real e as outras duas complexas.

Também encontramos uma representação geométrica para esta sequência denominada Espiral de Perrin. Construída de forma similar à espiral de Padovan, possuindo triângulos equiláteros iniciais de lados medindo 2, 3, 2 e 5 (MANGUEIRA, 2022). De acordo com o maior lado do novo polígono formado, será construído um novo triângulo equilátero com esse novo valor, formando a espiral de Perrin (Figura 16).

Figura 16 – Espiral de Perrin



Fonte: Mangueira (2022).

Yilmaz e Taskara (2013) trazem a representação matricial da sequência de Perrin. Mangueira et al. (2020) apresenta uma generalização em que encontrou mais seis matrizes relacionadas a essa sequência:

Para $P = [2 \quad 0 \quad 3]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [Pe_3 \quad Pe_2 \quad Pe_1]$, tem-se que:

$$P^n = [2 \quad 0 \quad 3]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = [Pe_{n+2} \quad Pe_{n+1} \quad Pe_n], \text{ com } n \geq 1.$$

A igualdade é provada através de indução matemática.

Para $n = 1$, temos:

$$P = [2 \quad 0 \quad 3]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [3 \quad 2 \quad 0] = [Pe_3 \quad Pe_2 \quad Pe_1]$$

Logo, a igualdade é válida.

Supondo que seja válida para $n \in \mathbb{N}$. Temos então:

$$P^n = [2 \quad 0 \quad 3]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = [Pe_{n+2} \quad Pe_{n+1} \quad Pe_n]$$

Mostremos que é válida para $n + 1$.

$$\begin{aligned} P^{n+1} = [2 \quad 0 \quad 3]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} &= [2 \quad 0 \quad 3]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [Pe_{n+2} \quad Pe_{n+1} \quad Pe_n]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [Pe_{n+1} + Pe_n \quad Pe_{n+2} \quad Pe_{n+1}] \\ &= [Pe_{n+3} \quad Pe_{n+2} \quad Pe_{n+1}] \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Como as sequências de Padovan e Perrin apresentam muitas semelhanças, podemos introduzir também a sequência Padovan-Perrin, que é uma sequência de terceira ordem, linear e recorrente. A mesma carrega as características matemáticas dos números de Padovan e Perrin. Em Vieira *et. al* (2021) temos a seguinte lei de recorrência dessa sequência:

$$S_n = S_{n-2} + S_{n-3}$$

Com $n \geq 3$, termos iniciais sendo $S_0 = 3a$, $S_1 = 1, S_2 = 2b$, e a e b inteiros. A equação característica é a mesma das sequências de Padovan e Perrin, portanto ela também apresenta as mesmas raízes, uma real e as outras duas complexas.

3.10 Sequência de Narayana

Narayana Pandita (1340-1400) foi um grande matemático indiano autor da obra Ganita Kaumudi em 1356 e um tratado algébrico conhecido como Bijaganita Vatamsa (Figura 17). Seu trabalho antecipou muitos desenvolvimentos em combinatória. Outras de suas obras contêm uma variedade de desenvolvimentos matemáticos, entre eles uma regra para calcular valores aproximados de raízes quadradas.

Há também evidências de que Narayana fez pequenas contribuições para as ideias do cálculo diferencial encontrado no trabalho de Bhaskara II. Kim (2009) escreve que seus textos foram os tratados mais significativos de matemática sânscrista depois dos textos de Bhaskara II, além da escola de Kerala (SARMA, 1972), Narayana também é lembrado pelo desenvolvimento de um método para geração sistemática de todas as permutações de uma determinada sequência.

Figura 17 – Narayana Pandita

Fonte: Javamen.com (2021).

A sequência de Narayana tem origem no problema proposto pelo matemático sobre a reprodução de vacas: “Uma vaca dá à luz a um bezerro todos os anos. Por sua vez, o bezerro dá à luz a outro bezerro quando tem três anos de idade. Qual o número de bezerros produzidos por uma vaca durante 20 anos? (RAMIREZ; SIRVENT, 2015, p. 91). Os números encontrados na solução do problema geram a sequência de Narayana, que pode ser caracterizada pela lei de recorrência:

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-3}$$

Com $n \geq 3$ e sendo $N_0 = N_1 = N_2 = 1$. Os primeiros termos dessa sequência são 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6... A equação característica dessa sequência é dada por $x^3 - x^2 - 1 = 0$, uma vez que se tem uma recorrência de terceira ordem, logo sua equação apresenta grau três possuindo três raízes, sendo uma real e duas complexas. O valor real representa a proporção de super-ouro com valor aproximado de 1,46, que é também o valor aproximado da razão entre os termos consecutivos da sequência da Narayana.

A matriz generalizada para a sequência de k-Narayana, sendo k um número inteiro qualquer diferente de zero, é apresentada por Ramirez e Sirvent (2015). Dessa forma:

$k = 1$, tem-se que: para $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $T^r = \begin{bmatrix} N_{r+1} & N_{r-1} & N_r \\ N_r & N_{r-2} & N_{r-1} \\ N_{r-1} & N_{r-3} & N_{r-2} \end{bmatrix}$, para todo $r \in \mathbb{N}^*$, $r \geq 3$. Por indução sobre r, temos:

Para $r = 3$

$$T^3 = \begin{bmatrix} N_4 & N_2 & N_3 \\ N_3 & N_1 & N_2 \\ N_2 & N_0 & N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo a igualdade é válida.

Suponha que seja válido para qualquer $r \in \mathbb{N}$. Temos então:

$$T^r = \begin{bmatrix} N_{r+1} & N_{r-1} & N_r \\ N_r & N_{r-2} & N_{r-1} \\ N_{r-1} & N_{r-3} & N_{r-2} \end{bmatrix}$$

Mostremos que é válido para $r + 1$.

$$T^{r+1} = T^r.T = \begin{bmatrix} N_{r+1} & N_{r-1} & N_r \\ N_r & N_{r-2} & N_{r-1} \\ N_{r-1} & N_{r-3} & N_{r-2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{r+1} + N_{r-1} & N_r & N_{r+1} \\ N_r + N_{r-2} & N_{r-1} & N_r \\ N_{r-1} + N_{r-3} & N_{r-2} & N_{r-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} N_{r+2} & N_r & N_{r+1} \\ N_{r+1} & N_{r-1} & N_r \\ N_r & N_{r-2} & N_{r-1} \end{bmatrix}$$

Portanto, a igualdade é válida para todo $r \geq 3$.

□

Os Quatérnios de Narayana são estudados por Vieira, Alves e Catarino (2021), que são números hipercomplexos estudados na álgebra abstrata, definindo da seguinte forma:

$$QN_n = N_n + iN_{n+1} + jN_{n+2} + kN_{n+3}, \text{ para } n \geq 0.$$

Trazem também a sequência (s,t) - Narayana, que é uma sequência de terceira ordem linear e recorrente, generalizando os coeficientes da sua respectiva fórmula de recorrência (s e t), definida da seguinte forma:

$$n_k = sn_{k-1} + tn_{k-3} \text{ , com } k \geq 3, n_0 = 0, n_1 = n_2 = 1$$

Nessa sequência, a partir do terceiro termo, teremos os coeficientes s e t também presentes em seus valores.

3.11 Sequência de Mersenne

Marin Mersenne (1588-1648) matemático, teórico musical, padre, teólogo e filósofo francês é o autor que deu origem aos números de Mersenne, que compõem a sequência que leva também seu nome (Figura 18). Durante sua vida dedicou-se à oração e aos estudos, e a atitude da Igreja Católica diante das descobertas de Galileu fez Mersenne interessar-se pela ciência e estabelecer contatos com os mais importantes cientistas da época.

Figura 18 – Marin Mersenne

Fonte: Deviantart (2023).

Ele organizava encontros com cientistas e viajava com frequência pela Europa para se encontrar com alguns deles. Costa (2015) relata que Mersenne mostrava sua insatisfação por não ter uma organização formal onde os estudiosos pudessem se encontrar para trocar e discutir ideias e descobertas. (MANGUEIRA, 2022) ressalta seus estudos, em especial na Teoria dos Números, mas Mersenne ficou conhecido sobretudo pelas suas contribuições relativas aos denominados primos de Mersenne.

Os números de Mersenne são números naturais da forma $M_n = 2^n - 1$, com $n \in \mathbb{N}$ e, embora números dessa forma já fossem conhecidos por Euclides, deve-se a Mersenne sua popularização.

Catarino, Campos e Vasco (2016) discutem a sequência de Mersenne, que corresponde à seguinte relação de recorrência:

$$M_{n+1} = 2M_n + 1$$

Para $n + 1$, ela pode ser reescrita da seguinte forma:

$$M_{n+2} = 2M_{n+1} + 1$$

Fazendo $M_{n+2} - M_{n+1}$, encontraremos uma nova relação de recorrência correspondente para esta sequência. Veja:

$$M_{n+2} - M_{n+1} = 2M_{n+1} + 1 - 2M_n - 1$$
$$M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n$$

Com $M_0 = 0, M_1 = 1$ e $n \geq 0$. A partir daí, podemos escrever a equação característica para essa recorrência como sendo $x^2 - 3x + 2 = 0$. Suas raízes são dadas por $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$. A raiz 2 representa a relação de convergência entre os termos consecutivos dessa sequência. Ou seja, a razão entre dois termos vizinhos da sequência de Mersenne será aproximadamente 2.

Alves, Catarino e Mangueira (2019) apresentam a representação matricial dos números de Mersenne.

Tem-se para $Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, temos que $Z^n = \begin{bmatrix} -2M_{n-1} & M_n \\ -2M_n & M_{n+1} \end{bmatrix}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Vejamos a prova dessa igualdade por indução matemática.

Para $n = 1$, temos:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2M_0 & M_1 \\ -2M_1 & M_2 \end{bmatrix}$$

Logo, a igualdade é válida.

Suponha que seja válida para $n \in \mathbb{N}$.

$$Z^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} -2M_{n-1} & M_n \\ -2M_n & M_{n+1} \end{bmatrix}$$

Mostremos agora que a igualdade é válida para $n + 1$.

$$\begin{aligned} Z^{n+1} = Z^n . Z &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2M_{n-1} & M_n \\ -2M_n & M_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2M_n & -2M_{n-1} + 3M_n \\ -2M_{n+1} & -2M_n + 3M_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2M_n & M_{n+1} \\ -2M_{n+1} & M_{n+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Por um longo período de tempo, vários matemáticos acreditavam que os números da forma $2^n - 1$ com n primo, fosse também um número primo. No entanto, em 1536, Hudalricus Regius, mostrou que $2^{11} - 1$ era composto, mudando o conceito existente anteriormente.

Os primos de Mersenne é um subconjunto formado pelos números de Mersenne que são também primos. Uma propriedade relevante que podemos citar a respeito dos números de Mersenne é que se $2^n - 1$, é primo, então n é primo. Algumas questões relacionadas aos primos de Mersenne ainda estão sem respostas como por exemplo, não se sabe se existem infinitos primos de Mersenne. Para tentar responder questões como essa, há uma busca computacional intensa pelos primos de Mersenne.

3.12 Sequência de Oresme

Nicole Oresme (1323 – 1382) foi um dos pensadores franceses mais originais da Europa do século XIV (Figura 19). Foi economista, matemático, físico, astrônomo psicólogo e musicólogo. Além disso estudou teologia no Colégio de Navarra da Universidade de Paris, tendo sido Bispo de Lisieux, pequena cidade da região da Normandia (HORADAM, 1974). Em 1370 foi também conselheiro do rei Charles V da França, tendo o orientado, em especial, nos assuntos financeiros.

Figura 19 – Nicole Oresme

Fonte: Mendonça e Borges Neto (2016).

Mendonça e Borges Neto (2016) relatam que há ainda historiadores, que nos esclarecem que outros estudiosos ressaltam os trabalhos de Oresme na área da Geometria Analítica, pois ele teria encontrado uma equivalência entre mapear valores e dispô-los em gráficos e sugerido o uso de um gráfico para ilustrar uma grandeza variável que dependesse de outra. Porém, somente na época de Descartes, foi possível avanços mais significativos e aprofundados na Geometria Analítica, o que não ocorreu com Oresme.

Acredita-se também que Oresme foi o primeiro a utilizar expoentes fracionários (GARBI, 2010). Seus trabalhos mais relevantes estão ligados com pontos por coordenadas e soma de séries infinitas.

De acordo com Horadam (1974), em meados do século XIV, o clérigo Nicole Oresme, determinou a soma dos seguintes números racionais $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32}, \frac{6}{64}, \frac{7}{128}, \frac{8}{256}, \dots, \frac{n}{2^n}$. Segundo Horadam (1974), Oresme não publicou nenhum desses resultados.

A sequência escrita acima também traz resultados para a área da Biologia, pois na medida em que, a partir dos dois primeiros termos, é possível estimar a quantidade de pais, avós e determinar tal proporção em qualquer geração.

A sequência dos números $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32}, \frac{6}{64}, \frac{7}{128}, \frac{8}{256}, \dots, \frac{n}{2^n}$, é descrita pela relação de recorrência $O_n = O_{n-1} - \frac{1}{4}O_{n-2}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, com $O_0 = 0$ e $O_1 = \frac{1}{2}$. Sua equação característica é dada por $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$, que pode ser escrita também como $4x^2 - 4x + 1 = 0$. Esta equação possui duas raízes reais e iguais, sendo essa $x = 2$. A raiz encontrada representa a relação de convergência da sequência entre seus termos consecutivos.

Cerda-Morales (2019) apresenta a matriz de Oresme, sendo para $L = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $L^n = \begin{bmatrix} 2O_{n+1} & -\frac{O_n}{2} \\ 2O_n & -\frac{O_{n-1}}{2} \end{bmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Alves (2019) mostra por indução que a igualdade é verídica.

Para $n = 1$, temos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2O_2 & -\frac{O_1}{2} \\ 2O_1 & -\frac{O_0}{2} \end{bmatrix}$$

Logo, a igualdade é válida.

Suponha que seja verdadeira para $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$L^n = \begin{bmatrix} 2O_{n+1} & -\frac{O_n}{2} \\ 2O_n & -\frac{O_{n-1}}{2} \end{bmatrix}$$

Mostremos que a igualdade é válida para $n+1$.

$$L^{n+1} = L^n.L = \begin{bmatrix} 2O_{n+1} & -\frac{O_n}{2} \\ 2O_n & -\frac{O_{n-1}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2O_{n+1} - \frac{O_n}{2} & -\frac{O_{n+1}}{2} \\ 2O_n - \frac{O_{n-1}}{2} & -\frac{O_n}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(O_{n+1} - \frac{O_n}{4}) & -\frac{O_{n+1}}{2} \\ 2(O_n - \frac{O_{n-1}}{4}) & -\frac{O_n}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2O_{n+2} & -\frac{O_{n+1}}{2} \\ 2O_{n+1} & -\frac{O_n}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Encontramos ainda outros estudos sobre a sequência de Oresme, como por exemplo os polinômios de Oresme, que são vistos no trabalho de Cerda-Morales (2019) e dão origem a uma nova sequência de números a partir da generalização da sequência de Oresme (Tabela 1).

Tabela 1 – Sequências lineares recursivas

Progressão Aritmética	$a_n = a_1 + (n-1)r$
Progressão Geométrica	$a_n = a_1 . q^{n-1}$
Sequência de Fibonacci	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
Sequência de Lucas	$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$
Sequência de Pell	$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$
Sequência de Leonardo	$Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1$
Sequência de Jacobsthal	$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$
Sequência de Padovan	$Pa_n = Pa_{n-2} + Pa_{n-3}$
Sequência de Perrin	$Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3}$
Sequência de Narayana	$N_n = N_{n-1} + N_{n-3}$
Sequência de Mersenne	$M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n$
Sequência de Oresme	$O_n = O_{n-1} - \frac{1}{4} O_{n-2}$

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

4 UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: O ESTUDO DAS SEQUÊNCIAS LINEARES RECURSIVAS COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

A fase experimental deste trabalho foi desenvolvida na Escola de Ensino Médio em Tempo Integral Delmiro Gouveia, localizada na cidade de Ipu - Ceará durante a disciplinas eletiva da área de Matemática: Aprofundamento em Matemática, com um grupo de 15 alunos.

Esta pesquisa possui o parecer aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) (Anexo A), sendo então disponibilizado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (Apêndice A), na qual, foram assinados pelos quinze alunos participantes, assim como o Termo de assentimento de adolescentes (Apêndice B), que foram assinados pelos responsáveis dos adolescentes participantes.

A partir da transposição didática de sequências lineares recursivas, foi realizado um estudo do campo epistêmico-matemático com o propósito de explorar a construção das sequências lineares recursivas por meio de uma ED dentro de um contexto cognitivo-didático no âmbito da formação de estudantes do ensino médio.

Foram criadas situações didáticas compostas por situações-problemas fundamentadas na TSD, analisando a metodologia utilizada e suas concepções. Adiante, serão analisados os possíveis comportamentos e soluções apresentados pelos alunos durante as discussões das situações-problema, correspondendo assim a fase de concepção e a análise a priori da ED.

4.1 Concepções das situações didáticas

Na fase da análise prévia da ED, a construção de sequências lineares recursivas foi desenvolvida no campo epistêmico-matemático fundamentando a concepção das situações-problema. Nesta etapa definiremos as variáveis que orientarão as escolhas da pesquisa. Essas variáveis por sua vez, são definidas de acordo com uma perspectiva microdidática local, pretendendo que haja uma interação entre os processos matemáticos mostrados com as situações-problema propostas.

Almouloud (2016) caracteriza uma situação-problema como uma questão discursiva, mas com um enunciado claro e objetivo, na qual a finalidade principal é utilizar de forma implícita os objetivos matemáticos que visam ser alcançados por meio da resolução do problema. No entanto, é considerável transformar o processo evolutivo das sequências, com foco na sua construção em conteúdo a serem ensinados, visto que esse mesmo conteúdo sobre sequências lineares recursivas geralmente é pouco explorado durante o ensino médio.

Dessa forma, a concepção da situação didática deste trabalho visa tratar a construção de sequências lineares recursivas como um conteúdo a ser ensinado em sala de aula, elaborando uma hipótese didática referente ao desenvolvimento do processo indutivo do estudante para a construção das sequências lineares recursivas, com a perspectiva de investigar como os alunos desenvolverão essas sequências a partir de sua lei de recorrência fundamentada na metodologia de pesquisa da ED em conjunto com uma metodologia de ensino que é TSD.

A disciplina eletiva escolhida para realizar essa investigação foi a eletiva de Aprofundamento em Matemática. Nesse contexto podemos explorar conteúdos que geralmente são vistos de uma forma superficial e apresentar aos alunos a história dos matemáticos e estudiosos que desenvolveram as sequências numéricas que serão estudadas.

Revisando os conteúdos matemáticos desenvolvidos no campo epistêmico-matemático, tem-se o estudo das sequências numéricas já conhecidas que são as progressões aritméticas e as progressões geométricas que foram estudadas anteriormente. Partindo do estudo dessas sequências numéricas, foram selecionadas as seguintes sequências para serem construídas: sequência de Fibonacci, sequência de Lucas, sequência de Pell e sequência de Mersenne.

Além da construção dessas sequências, os alunos escreverão a equação característica dessas sequências e buscarão suas raízes. Dessa forma foram elaboradas situações-problema a respeito desses assuntos, conduzindo os alunos para a construção das sequências. Destacamos que neste conteúdo é necessário que o aluno tenha um conhecimento prévio sobre sequências numéricas, uma vez que usaremos as mesmas ideias das PAs e PGs para a construção das novas sequências apresentadas.

4.2 Análise a priori das situações didáticas

Seguindo a ED, nesta etapa é escolhida e definida a variável didática que será utilizada nesta pesquisa, sendo a microdidática, a fim de direcionar um plano de ação para que os objetivos da pesquisa sejam atendidos. Partindo daí esperamos prever o comportamento dos discentes em cada fase da TSD e ainda, faz-se um levantamento de hipóteses didáticas relativas às situações-problema.

Essas ações configuram uma análise preliminar. Nas seções anteriores, realizamos um estudo sobre as sequências lineares recursivas, destacando sua fórmula de recorrência, equação característica e a forma matricial destas sequências. Dessa forma, foram elaboradas situações didáticas, fundamentadas na TSD, convertendo-as numa atividade proposta aos estudantes do curso do ensino médio com o objetivo de estimular o processo cognitivo do aluno para que fosse desenvolvido um conhecimento ordenado nas quatro fases da TSD.

Situação didática 1: Sobre o matemático italiano Leonardo Fibonacci, vimos um interessante problema sobre "quantidade de pares de coelhos", problema que originou sua famosa sequência numérica. Vimos que os termos dessa sequência podem ser determinados pela seguinte fórmula de recorrência:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Com $n \geq 2$ e $F_0 = F_1 = 1$. Dessa forma, apresente os dez primeiros termos dessa sequência.

Nesse momento os alunos iniciam a resolução da primeira situação. Isso poderá acontecer individualmente ou em grupos. Os discentes podem trocar ideias e compartilhar informações para resolver a questão colocada neste primeiro item. É dado um intervalo de tempo para que o grupo apresente uma solução para esta situação. A seguir, são colocadas e discutidas as etapas de acordo com a TSD.

Situação de ação: Fundamentado no conhecimento referente as progressões aritméticas e progressões geométricas, conhecendo suas fórmulas de recorrência e após a realização da aula referente as sequências lineares recursivas, a apresentação do matemático Leonardo Fibonacci e seu famoso problema, espera-se que o aluno tenha a princípio a ideia de substituir o índice n por valores numéricos maiores ou iguais a 2 e resolva a expressão para determinar os próximos termos da sequência utilizando os valores iniciais dados $F_0 = F_1 = 1$.

Nesse momento, poderá haver dificuldades por parte dos alunos para encontrar os primeiros termos dessa sequência. Poderão ter dúvidas na hora de usar a lei de recorrência dada quanto à substituição dos índices dos termos da sequência. O professor então poderá questionar ao aluno como ele faria se estivesse buscando os termos de uma progressão aritmética por exemplo. Já com os valores dos termos iniciais, o professor poderá junto aos alunos pedir que observem como se comportam os números da sequência. Espera-se que o aluno encontre os primeiros termos da sequência: 1, 1, 2, 3, 5...

Situação de formulação: depois de encontrarem os primeiros termos da sequência de Fibonacci, espera-se que o aluno possa observar, como um termo posterior é determinado, ou seja, que o discente consiga compreender como se dá a construção da sequência, visto que após a construção inicial da sequência é possível que seja visto o padrão que ela segue. O aluno poderá perceber que mesmo sem o uso de cálculos na fórmula de recorrência ele será capaz de determinar os próximos termos da sequência, uma vez que o professor já comentou sobre essa possibilidade durante o momento da aula. O professor, ao observar as dificuldades dos alunos poderá fazer questionamentos que os levem a refletir sobre as estratégias de resolução da situação didática.

Situação de validação: a partir da fórmula de recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, espera-se que o aluno possa confirmar a ideia intuitiva que teve na etapa anterior observando que $n-2, n-1, n$ são os índices dos números de Fibonacci. Logo, o discente pode concluir que poderá determinar os dez primeiros termos dessa sequência através de somas de termos anteriores. Essa percepção deve ser feita quando o aluno tem os valores dos primeiros termos e compreende que os índices $n-2, n-1, n$, serão números naturais consecutivos.

Situação de institucionalização: o professor retoma o domínio da situação didática com o objetivo de analisar as soluções encontradas pelos alunos e verificar a sua validade. O docente apresenta aos estudantes a finalidade da atividade proposta, relatando a obtenção da construção da sequência de Fibonacci pelos alunos.

A construção dessa sequência numérica com o uso de sua lei de recorrência pretende despertar no aluno o interesse pelas sequências lineares e trazer algo que venha contribuir para o currículo da turma. O conhecimento obtido através da situação didática, passará a fazer parte oficialmente do saber matemático dos alunos. Eles conhecerão a sequência de Fibonacci e através das estratégias utilizadas e trocas de informações compreenderão como se dá sua construção.

Adiante, na situação didática 2, será construída a sequência de Lucas. Buscaremos determinar suas semelhanças e diferenças com a sequência de Fibonacci.

Situação didática 2: Lucas foi um matemático francês que entre suas contribuições, foi o criador do jogo matemático conhecido como Torre de Hanói. Além disso, Lucas também desenvolveu uma sequência numérica com a seguinte lei de formação:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

Com $n \geq 2$, $L_0 = 1$ e $L_1 = 3$. Construa a sequência de Lucas. Quais as semelhanças e diferenças entre a sequência de Lucas e a sequência de Fibonacci?

Situação de ação: Neste momento, já conhecendo a sequência de Fibonacci, espera-se que o aluno tenha a mesma ideia intuitiva e faça as substituições do índice n por números naturais obtendo os termos da sequência de Lucas. Caso haja dúvidas por parte do aluno nessa primeira fase, o professor poderá fazer questionamentos que o levem a refletir sobre as decisões que devem ser tomadas nessa primeira etapa.

Espera-se que o aluno apresente estratégias de resolução análogas as da situação anterior, visto que o discente já traz consigo o conhecimento da sequência anterior e poderá utilizar a mesma ideia para determinar os termos da sequência de Lucas. Espera-se também que o discente observe a lei de recorrência e veja que é a mesma da sequência da situação 1, mas que a sequência construída será diferente. Espera-se que o aluno encontre os primeiros termos da sequência: 1, 3, 4, 7, ...

Situação de formulação: depois de encontrarem os primeiros termos da sequência de Lucas e observando sua fórmula de recorrência, espera-se que o aluno já compreenda como são determinados os termos da sequência e possa observar que mesmo com leis de recorrências iguais, as sequências de Lucas e Fibonacci são diferentes devido aos seus termos iniciais, que apresentam valores diferentes. Para chegar a essa conclusão, basta que sejam observados os primeiros termos da sequência e comparados com os da situação didática 1.

Logo, o discente poderá construir a sequência sem necessariamente usar sua fórmula de recorrência, como foi mostrado na situação anterior. É relevante que o aluno observe que os primeiros termos dados no problema são essenciais para a construção da sequência, visto que é a partir desses que podem ser determinados os valores da sequência.

Situação de validação: a partir da fórmula de recorrência $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, espera-se que o aluno possa confirmar a ideia intuitiva que teve na etapa anterior observando que $n-2, n-1, n$ são os índices dos números de Lucas, semelhante ao que foi comprovado na sequência da situação 1. O professor poderá interagir quando for necessário através de questionamentos que instiguem as ideias dos alunos e pedindo que observem os números encontrados na sequência a fim de compreenderem a construção da mesma. Logo, o discente pode concluir que poderá determinar os termos dessa sequência através de somas de termos anteriores e observe que a diferença entre as sequências de Lucas e Fibonacci é devido aos valores dos seus termos iniciais.

Situação de institucionalização: nesta fase, o professor retoma o domínio da situação didática e analisa as respostas dadas pelos alunos para verificar a sua validade. O docente apresenta aos estudantes a finalidade da atividade proposta, relatando a obtenção da construção da sequência de Lucas pelos alunos. Verifica junto aos discentes que Fibonacci e Lucas tem sequências com a mesma lei de formação, mas com valores iniciais diferentes o que torna as sequências distintas.

Continuando com a construção de sequências lineares, abordaremos agora a sequência de Pell. Na situação didática a seguir, os alunos construirão a sequência e conhecerão sua equação característica para buscar suas raízes.

Situação didática 3: O matemático inglês John Pell, como vimos, fez poucas publicações. Mas, há também uma sequência conhecida como sequência de Pell, gerada com a seguinte lei de formação: $\begin{cases} P_0 = 0; \\ P_1 = 1; \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \end{cases}$

Com $n > 1$. A equação característica dessa sequência é dada por $x^2 - 2x - 1 = 0$. Construa a sequência de Pell. Como podemos relacionar a fórmula de recorrência da sequência com sua equação característica? Determine as raízes de sua equação característica.

Situação de ação: Neste momento, já conhecendo as sequências das situações anteriores, espera-se que o aluno já tenha a ideia de construção para a sequência de Pell. No entanto, é provável que o discente tenha ainda dificuldades para determinar os primeiros termos da sequência. Dessa forma, o professor poderá intervir com questionamentos que levem os alunos a reproduzir estratégias de resoluções nessa primeira etapa de ação.

Espera-se que o estudante possa encontrar os primeiros termos da sequência após as explicações e questionamentos feitos pelo professor durante a aula usando as mesmas ideias das situações anteriores. Com relação a equação característica, espera-se que o aluno possa observar que é uma equação do segundo grau e relacionar com a lei de recorrência $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ tendo a ideia intuitiva de comparar os índices $n, n-1, n-2$ com os expoentes de x na equação dada. Porém, os alunos podem apresentar dificuldades em perceber essa relação. Nesse momento o professor poderá intervir e levar seus alunos a refletirem para comparar a lei de recorrência com a equação dada. Os discentes devem procurar relacionar as equações a fim de encontrarem as semelhanças entre elas. A maneira para a resolução da equação do segundo grau dada já é um conhecimento prévio dos alunos, logo poderão determinar suas raízes com facilidade.

Situação de formulação: os estudantes, que já realizaram as situações didáticas anteriores, já tem ideia que essas sequências seguem uma regra de formação, e o professor anteriormente já instigou seus alunos a pensarem dessa forma. Logo, espera-se que eles possam observar que para encontrar os termos da sequência de Pell, dados os termos iniciais, basta que multiplique por 2 o termo de ordem $n-1$ e em seguida some com o termo de ordem $n-2$. Assim, poderão determinar os elementos da sequência sem necessariamente desenvolver os cálculos pela fórmula de recorrência. Embora, para os primeiros termos, acredita-se que os alunos usando a recorrência dada no problema, farão as substituições para os valores de n, resolvendo a expressão e determinarão os valores esperados.

Com relação a equação característica, já com algumas ideias formadas e com os questionamentos que o professor fez na etapa anterior para que seus alunos desenvolvessem estratégias de resolução, eles deverão observar a relação entre os índices dos termos da lei de recorrência com os expoentes de x, percebendo que a diferença entre n e $n-2$ é 2, logo a equação característica é de segundo grau. Por fim devem encontrar como raízes para a equação dada os valores $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Situação de validação: a partir da fórmula de recorrência $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$, espera-se que o aluno possa confirmar a ideia intuitiva que teve na etapa anterior observando que $n-2, n-1, n$ são os índices dos números de Pell. Comprove também a relação entre a equação característica e a lei de recorrência e determine suas raízes. Logo, o discente pode concluir que poderá determinar os termos dessa sequência através das operações de multiplicação e adição entre seus termos e desenvolver a solução da equação dada da maneira que julgarem mais adequada.

Situação de institucionalização: o professor retoma o domínio da situação didática e confere as respostas dadas pelos alunos. O docente apresenta aos estudantes a finalidade da atividade proposta, relatando a obtenção da construção da sequência de Pell e relacionando a equação característica com sua fórmula de recorrência. Verifica também junto aos discentes os valores das raízes encontradas para a equação.

Ainda sobre as sequências lineares recursivas iremos tratar a seguir da sequência de Mersenne, sua construção e sua equação característica.

Situação didática 4: Marin Mersenne foi um matemático francês que desenvolveu os números de Mersenne que compõem a sequência que leva seu nome também. Os números desta sequência são determinados pela relação de recorrência $M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n$. Com $M_0 = 0$, $M_1 = 1$ e $n \geq 0$. Construa a sequência de Mersenne. Em seguida escreva sua equação característica e determine suas raízes.

Situação de ação: já tendo compreendido a construção das sequências anteriores, os alunos devem utilizar a recorrência para determinar os termos dessa sequência como feito nas demais. Espera-se que o aluno já tenha uma estratégia para iniciar a resolução da situação, visto que já foram realizadas situações de construção de sequências através da lei de recorrência. Havendo dúvidas, o professor passa a intervir com os questionamentos, falando das situações anteriores, instigando seus alunos a observarem o que foi feito nos problemas anteriores e como chegaram as conclusões.

Com relação a equação característica, espera-se que o aluno observe que a diferença entre o maior e o menor índice dos termos da recorrência que são $n+2$ e n é 2 e possa relacionar com uma equação de segundo grau, seguindo também a ideia do que foi feito na situação didática 3. É provável que escrever a equação característica seja o momento de mais dificuldade nesta primeira etapa, portanto será o momento em que os alunos deverão trocar informações e compartilhar suas estratégias em grupo a fim de determinar a equação característica da sequência. Os alunos também devem resolver a equação que desenvolverem.

Situação de formulação: os estudantes irão observar que para encontrar os termos da sequência de Mersenne, dados os termos iniciais, além de utilizar a relação de recorrência, poderiam também relacionar os valores encontrados, com a expressão $2^n - 1$, uma vez que essa relação foi mostrada no momento da aula pelo professor e nesse momento, os discentes poderão perceber essa ligação entre as expressões apresentadas. A equação de recorrência que deve ser apresentada é $x^2 - 3x + 2 = 0$, as raízes encontradas para esta equação devem ser $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

Situação de validação: a partir da fórmula de recorrência $M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n$, os estudantes podem mostrar que os valores encontrados corresponderão aos mesmos da expressão $2^n - 1$, que são os números de Mersenne. Os alunos confirmarão que a equação encontrada $x^2 - 3x + 2 = 0$ representa a equação característica da recorrência e suas raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

Situação de institucionalização: nesse momento o professor verifica as resoluções feitas pelos estudantes, observa como foi construída a sequência, revelando que poderia seguir os caminhos apontados pelos alunos. Verifica a equação apresentada e suas raízes, analisando como foram obtidas essas respostas.

4.3 Experimentação

A etapa da experimentação ocorreu de forma presencial na Escola de Ensino Médio em Tempo Integral Delmiro Gouveia, na cidade de Ipu-Ceará, com um grupo de alunos da turma do 3º ano A, durante o primeiro semestre do ano letivo de 2023. Esta fase contou com a colaboração de 15 alunos, sendo 6 homens e 9 mulheres que aceitaram participar dos encontros para a realização dessa etapa.

A aplicação ocorreu durante uma semana no primeiro semestre do ano letivo de 2023 com cinco encontros, sendo que antes de iniciarmos os estudos tivemos um encontro de apresentação sobre o que ocorreria durante essa etapa. Cada encontro teve a duração de cinquenta minutos, no qual realizamos nossas aulas e apresentamos as situações didáticas fundamentadas na TSD.

As situações-problema propostas foram desenvolvidas através de exercícios sobre os quais, logo depois, ocorreram discussões em grupos entre os alunos a fim de que elaborassem estratégias de resoluções descritas no quadro branco e/ou papel (Tabela 2).

Tabela 2 - Cronograma de organização dos encontros

(Continua).

Aula	Atividades propostas para o encontro
1ª aula	Apresentação do conteúdo de estudos: sequências lineares recursivas, recordando as sequências elementares já vistas durante os anos anteriores do ensino médio: progressões aritméticas e geométricas.
2ª aula	Apresentação dos matemáticos autores das sequências que serão desenvolvidas pelos alunos. Exposição de informações relevantes sobre os estudiosos que nomeiam as sequências que serão o objeto de estudo.
3ª aula	Apresentação das leis de recorrências das sequências de Fibonacci, Lucas, Pell e Mersenne.

Tabela 2 - Cronograma de organização dos encontros

(Conclusão).

Aula	Atividades propostas para o encontro
4ª aula	Construção das sequências numéricas pelos alunos.
5ª aula	Determinar a equação característica das sequências construídas, com ênfase nas sequências de Pell e Mersenne.
6ª aula	Análise feita pelos alunos dos momentos de dificuldades durante as atividades e exposição das considerações feitas pelo grupo.

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

O primeiro contato com o grupo de alunos ocorreu durante a eletiva de Aprofundamento em Matemática, que é a eletiva lecionada pela professora pesquisadora. Nesse momento a docente apresentou aos alunos um cronograma de como seriam os encontros do grupo e sobre o que seria estudado no momento da aula. Os alunos puderam se manifestar também tirando dúvidas sobre qual seria o objetivo desses encontros e como poderiam colaborar de maneira significativa. Foi um momento de esclarecimentos do que seria trabalhado nesta fase da pesquisa, em que os participantes tiveram a liberdade de expor suas sugestões.

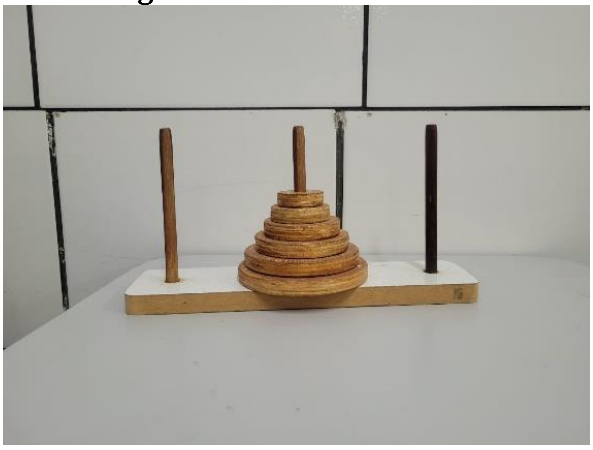
Na primeira aula, foi apresentado ao grupo o conteúdo de estudos: sequências lineares recursivas, recordando as sequências elementares já vistas durante os anos anteriores do ensino médio, que são as progressões aritméticas e geométricas. Nesse encontro os participantes puderam rever um conteúdo já explorado buscando seus conhecimentos prévios para a resolução dos exemplos dados pela professora. Foi feita uma breve explicação sobre o que são as sequências lineares recursivas e mostrados alguns exemplos para que os participantes compreendessem o objeto de estudo trabalhado.

Os estudantes puderam participar tirando dúvidas e, caso fosse de seu interesse, resolver exemplos no quadro também. A professora pediu que registrassem no caderno as atividades feitas naquele encontro e manifestassem oralmente sua opinião a respeito do assunto estudado naquele primeiro encontro.

O segundo encontro iniciou-se falando de alguns matemáticos que têm destaque quando se estuda as sequências numéricas. A professora começou a relatar sobre a história dos autores das sequências que seriam estudadas. O primeiro matemático a ser apresentado foi Fibonacci, sobre o qual alguns alunos disseram já ter ouvido falar, no entanto apenas informações incertas foram colocadas por eles. A professora relatou um pouco da história desse matemático e apresentou aos alunos o problema dos coelhos que originou a sequência de Fibonacci.

Alguns estudantes apresentaram curiosidade quando o problema foi exposto e já perguntaram se teria uma equação para resolvê-lo. Em seguida, foi apresentado o matemático Édouard Lucas, criador do famoso jogo Torre de Hanói (Figura 20).

Figura 20 – Torre de Hanói



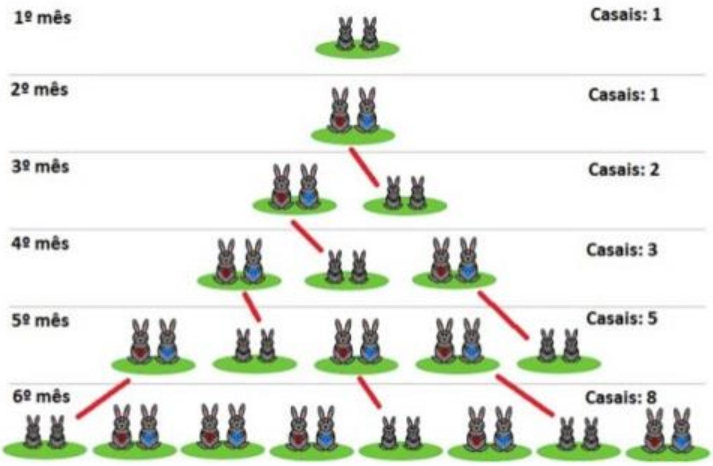
Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Os estudantes já conheciam o jogo que foi inclusive explorado em um outro momento em sala de aula quando o assunto foi função exponencial. Ao apresentar esse matemático, recordamos também sobre os números primos, visto que, Lucas foi um dos matemáticos que contribuiu para o estudo desses números. Também foram apresentados nesse segundo encontro os demais matemáticos: John Pell e Marin Mersenne. Por serem matemáticos desconhecidos por esses estudantes, foi possível observar que despertaram um certo interesse no momento de sua apresentação. Até esse momento apenas foi explanado a respeito da vida desses matemáticos sendo colocadas suas principais contribuições para o estudo das sequências lineares recursivas.

No terceiro encontro, o início foi voltado ao problema dos coelhos de Fibonacci. Os alunos passaram a se questionar como poderia ser resolvido e até fizeram alguns esboços no quadro para tentar solucionar o problema. Passado esse primeiro momento, foi apresentado aos alunos a lei de formação da sequência de Fibonacci.

A fórmula matemática causa uma certa estranheza e os alunos fazem um prejulgamento; alguns já se sentem incapacitados mesmo antes das explicações que seriam feitas pela professora. Logo depois de apresentada a lei de recorrência e feita uma breve explicação de como poderiam ser determinados os termos da sequência, os alunos trocaram ideias entre si e começaram a desenvolver escritos no caderno tentando relacionar os valores encontrados como uma solução para o problema dos coelhos. Na Figura 21 temos uma esquematização para a resolução do problema de Fibonacci.

Figura 21 – Os coelhos de Fibonacci



Fonte: Machado (2017).

Após esse primeiro momento, os alunos conheceram então a lei de formação da sequência de Lucas. Logo compararam com a anterior percebendo suas semelhanças. Alguns já afirmaram que seriam sequências formadas por valores iguais, outros já viram que eram diferentes nos termos iniciais. O mesmo foi feito com as sequências de Pell e Mersenne. Nesse encontro os alunos compartilharam ideias sobre o problema dos coelhos de Fibonacci e conheceram as fórmulas recursivas das sequências que estão sendo estudadas. No encontro seguinte iniciaram-se as atividades relacionadas aos estudos feitos até o momento.

No quarto encontro os alunos participantes demonstravam um certo entusiasmo para a aula. O problema mostrado na aula anterior (coelhos de Fibonacci) despertou o interesse de alguns que disseram já ter compreendido o problema e já vinham com estratégias de resolução. Aproveitando o momento de euforia e interesse dos alunos, a professora já propôs que iniciassem a realização das atividades. Entregou uma folha com as atividades propostas e pediu que os alunos trocassem ideias para a resolução dos itens. Entre as atividades propostas os alunos iriam construir as sequências lineares através da sua lei de formação.

Os estudantes poderiam discutir suas estratégias em grupos enquanto a professora estava presente para observar o que estava sendo realizado pelos participantes. Durante esse encontro a principal atividade foi essa. Os alunos em alguns momentos se questionavam se estavam fazendo de forma correta, alguns encontravam valores diferentes dos demais colegas ao calcular os termos das sequências e isso gerava dúvidas nas resoluções que estavam apresentando. Foi um momento de muita interação e discussão entre eles, no entanto sempre com a professora presente observando o que acontecia.

Todas as vezes que surgiam dificuldades por parte dos estudantes, a professora buscava questionar seus alunos a fim de que eles pudessem traçar estratégias que levassem à solução do problema em resolução. Alguns alunos conseguiam enxergar rapidamente o padrão da sequência em construção, como foi o caso da sequência de Fibonacci, em que após os primeiros termos encontrados, logo eles perceberam que poderiam seguir determinando os demais sem necessariamente usar a lei de recorrência apresentada. O mesmo aconteceu na sequência de Lucas, pois devido a semelhança com Fibonacci, os alunos observaram que poderiam usar a mesma ideia para determinar os termos da sequência numérica.

Para determinar os números da sequência de Pell, os alunos já demonstraram uma certa dificuldade. Por se tratar de uma lei de recorrência com coeficientes diferentes de um (1), isso pode ter sido um dos motivos para que os alunos se sentissem inseguros para trabalhar na construção da sequência. Até o momento, a sequência de Pell foi a que os participantes enxergaram como sendo a mais complicada de determinar os termos. Também não conseguiram determinar o padrão de crescimento dessa sequência até o final desse encontro. Alguns tentaram buscar o padrão, no entanto, cometeram equívocos no processo.

Logo depois, iniciou-se a sequência de Mersenne retornando à sua fórmula de recorrência. Novamente os alunos trocaram informações e compararam com as sequências já construídas anteriormente. Nessa sequência, eles perceberam um padrão de crescimento com mais facilidade e logo conseguiam determinar os próximos termos sem usar a fórmula de recorrência. Concluída a formação dos números de Mersenne, voltou-se novamente à sequência de Pell, a fim de que os alunos buscassem determinar o padrão de crescimento de seus termos.

Depois de discussões em grupos, observações e feitos alguns cálculos, os alunos conseguiram determinar o comportamento dos termos da sequência. Dessa forma, ao final dessas atividades os participantes observaram que poderiam construir as sequências estudadas através da fórmula recursiva, o que levaria algum tempo desenvolvendo os cálculos ou, que poderiam enxergar a relação existente entre os termos para que pudessem desenvolvê-la sem o auxílio da fórmula de recorrência. Nesse encontro foram construídas as quatro sequências lineares propostas nesse trabalho.

No quinto encontro, a proposta foi determinar a equação característica de cada sequência linear. Voltou-se a falar de Fibonacci: os alunos sempre recordando o problema dos coelhos e comentando sobre como foi interessante determinar sua solução. Foi mostrado aos estudantes como é feita a relação entre a lei de formação da sequência e sua equação característica. Como a discussão girava em torno da sequência de Fibonacci, foi mostrada inicialmente pela professora a equação característica da mesma, em seguida foi feita a resolução determinando suas raízes. Ainda sobre as raízes, falou-se do número de ouro que representa a raiz positiva da equação e sobre sua importância.

No grupo de alunos, alguns tinham conhecimento do número de ouro, mas não conheciam seu valor, apenas sabiam que existia o número na matemática e que recebe essa denominação. Então foi apresentado ao grupo informações importantes sobre a razão áurea e onde ela é vista na natureza e sua relação com a sequência de Fibonacci. Após esse momento inicial, foram repassadas as atividades da aula. Nesse encontro os alunos iriam relacionar a lei de recorrência das sequências com sua equação característica. Feitos os exemplos com as sequências de Fibonacci e Lucas, os estudantes, conseguiram compreender a construção dessa equação e usando seus conhecimentos prévios, sua resolução não foi uma tarefa difícil de ser realizada.

O objetivo agora era trabalhar as equações das sequências de Pell e Mersenne. Para a primeira - Pell- mesmo escrevendo a equação, os alunos ainda mostram dificuldades em entender porque trata-se de uma equação do segundo grau. Nesse momento foi importante que a professora interviesse junto as discussões em grupo dos alunos para esclarecer essas dúvidas e levá-los a refletirem comparando com os exemplos que foram feitos anteriormente.

Dessa forma, os alunos podem observar a semelhança e relacionar o grau da equação com os índices dos termos na lei de recorrência. Escrita a equação característica da sequência de Pell, os alunos determinaram suas raízes usando os conhecimentos prévios que já possuíam. Em seguida, foi proposto que os alunos escrevessem a equação característica da sequência de Mersenne. Alguns conseguiram formular rapidamente sua resposta, escrevendo a equação e determinando suas raízes, outros já se questionaram e levantaram outras discussões até chegarem à resposta para a tarefa.

No sexto encontro, as atividades foram concluídas. Os alunos que não haviam realizado as tarefas propostas na aula anterior, puderam trocar informações com os demais e concluir suas produções escritas. Após essa finalização de atividades, a professora deixou um momento para que os participantes pudessem expor suas observações sobre o trabalho desenvolvido. Os alunos colocaram que no início acreditavam que teriam muitas dificuldades para desenvolver as atividades propostas, mas, que após as primeiras explicações, tornou-se algo mais interessante para ser explorado.

O interesse inicial partiu dos problemas dos coelhos de Fibonacci, mas o interesse pela vida dos matemáticos também foi notável. Construir as sequências lineares e estudar a equação característica de cada uma delas através das situações-problema de acordo com as etapas da TSD contribui para que o processo de aprendizagem desse objeto de estudo fosse consolidado ao final dessa etapa. No capítulo a seguir, os dados e resultados coletados durante a execução da TSD serão apresentados e discutidos, conforme as produções mais relevantes para a validação desta pesquisa.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Nesta última fase, será feita a análise dos dados que foram coletados durante a etapa da experimentação desta pesquisa. Esta análise é feita de acordo com a fase de análise a posteriori da ED, tendo como suporte a TSD, com o objetivo de realizar a validação desta pesquisa. Assim, a seguir serão descritas observações relevantes apropriadas que ocorreram nos momentos de aplicação.

De acordo com Almouloud (2007) a fase da experimentação implica um retorno à análise a priori, pois são feitas possíveis correções e ajustes locais. Destaca-se também, que a experimentação é seguida pela fase da análise a posteriori que se fundamenta nos dados levantados durante a experimentação.

Com o objetivo de realizar uma transposição didática sobre o processo de construção de sequências lineares recursivas, desenvolveram-se situações-didáticas a partir de alguns conteúdos para serem trabalhados durante a fase da experimentação desta pesquisa. Dessa forma, a TSD foi utilizada para apoiar a etapa da experimentação da ED.

É essencial que, após a análise a posteriori, seja realizada uma validação dos dados colhidos na etapa de experimentação da ED, comparando os resultados obtidos e discutidos pelos discentes com o que foi previsto na análise a priori, levantando possíveis questionamentos e analisando o avanço, ou não, da engenharia sugerida. Artigue (1996) ressalta "confrontam-se análise a priori e análise a posteriori, validando, ou não, a hipótese da pesquisa".

A seguir, são apresentadas as análises feitas sobre as fases da TSD durante o momento de aplicação e resolução das situações propostas, observando o comportamento dos discentes levando em consideração seus conhecimentos prévios. As atividades foram elaboradas com o objetivo de o estudante compreender a formação das sequências lineares recursivas e relacionar a fórmula de recorrência com sua equação característica. Porém, logo no início, foi perceptível a existência de alguns obstáculos epistemológicos e bloqueios cognitivos para trabalhar com as leis de formação das sequências lineares recursivas de segunda ordem.

Para Bachelard (1996), esses obstáculos necessitam ser superados para que o conhecimento científico possa evoluir, caso isso não ocorra, residirá no estacionamento ou mesmo no retrocesso.

Na seção seguinte, são realizadas as observações e discussões fundamentadas nos apontamentos feitos durante as aplicações, focando na ED e na TDS. Dessa maneira, a validação desta pesquisa será feita de forma interna.

5.1 Análise a posteriori e validação interna da pesquisa

As situações didáticas ocorreram de maneira presencial na Escola de Ensino Médio de Tempo Integral Delmiro Gouveia, com um grupo de alunos que aceitaram participar do estudo proposto. Essas situações foram desenvolvidas por meio das atividades constituídas por questões norteadoras, com o objetivo de despertar nos alunos o interesse em envolver-se na resolução dessas situações.

Dessa forma, estaria efetivado a realização do contrato didático. As situações-problema discutem sobre a construção de sequências lineares recursivas, sua lei de formação e equação característica. Buscam levar o aluno a escrever os termos da sequência utilizando sua lei de formação inicialmente. Em seguida, espera-se que o aluno possa perceber que é possível determinar o valor dos demais termos sem necessariamente utilizar a lei de recorrência. Também tem o propósito de levar o aluno a compreender a formação das sequências estudadas e relacionar sua fórmula recursiva com uma equação de segundo grau.

Dessa forma, será realizada uma análise a posteriori verificando, discutindo e analisando os resultados que serão obtidos, levando em consideração algumas variáveis didáticas, para que suceda uma contribuição de conhecimento didático durante a transmissão do conteúdo. A validação desta pesquisa é de forma interna, ou seja, não é realizada uma comparação dos dados coletados com produções externas, baseadas na ED, através dos resultados obtidos da aplicação das situações didáticas.

A aplicação foi dividida em seis encontros de cinquenta minutos cada. No primeiro encontro foi apresentado o objetivo do estudo e feita uma breve explicação do que seria realizado durante as aulas. Foi o momento de esclarecimentos para os estudantes que participariam da aplicação. Em seguida, iniciou-se a introdução ao assunto tema de estudo. Os registros foram realizados através de fotos e produções dos alunos.

5.1.1 A situação didática 1

A situação didática 1 teve como objetivo construir a sequência de Fibonacci apresentando seus dez primeiros termos. Foi apresentada a fórmula de recorrência para que os alunos pudessem resolver a situação proposta.

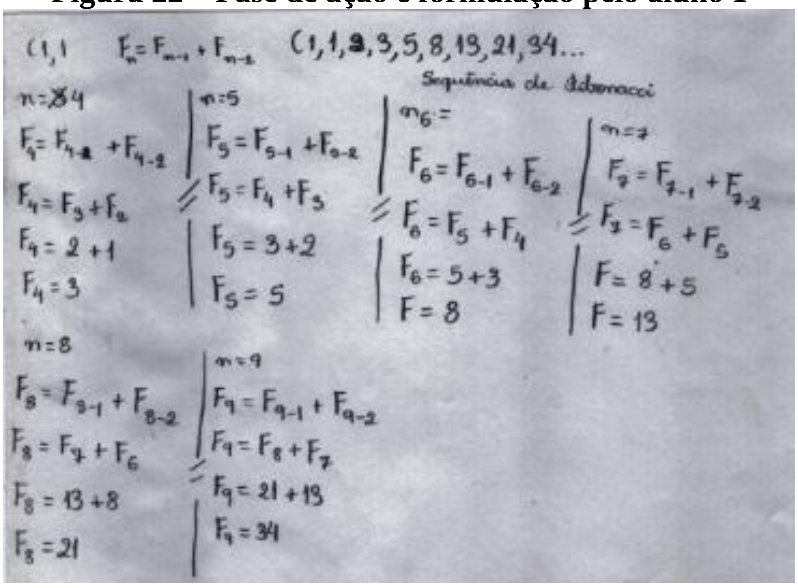
Nessa abordagem, os alunos decidiram, a priori, que iriam utilizar a fórmula dada para escrever a sequência pedida na atividade como era esperado segundo a análise a priori. Sendo dados os primeiros termos, os participantes teriam que determinar os demais. Porém, a professora percebeu que havia uma dificuldade para relacionar a fórmula de recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com os termos iniciais e também não sabiam ao certo que valores dariam a variável n.

Esse obstáculo ocorreu no início da atividade e precisou da intervenção da professora para que os alunos pudessem seguir conforme o esperado. Após a intervenção feita através de questionamentos, os alunos em grupos formularam estratégias de resolução e começaram a desenvolver a sequência por meio de sua fórmula recursiva substituindo o valor de n por 2, conseguindo, assim, determinar o próximo termo da sequência. Seguiram com esse mesmo raciocínio e fizeram as substituições de n por números naturais conforme o indicado na atividade.

Dessa forma, os alunos conseguiram escrever os primeiros termos dessa sequência. Alguns participantes do grupo conseguiram perceber, depois de algum tempo, a relação entre os termos da sequência e observaram que poderiam determinar os próximos termos sem necessariamente utilizar a fórmula de recorrência, seguindo mais uma vez o que era esperado na análise a priori.

Os alunos por meio de suas estratégias e discussões em grupo conseguiram realizar a primeira situação didática proposta. Na Figura 22, o aluno 1 apresenta a fase de ação e formulação para a situação. O aluno desenvolve a sequência utilizando a lei de recorrência.

Figura 22 – Fase de ação e formulação pelo aluno 1



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Os demais integrantes do grupo utilizaram a mesma ideia, fizeram uso da fórmula de recorrência para construir a sequência. A dificuldade para essa primeira atividade ocorreu no início, quando ainda não sabiam ao certo como deveriam começar a resolução, mas através das trocas de ideias, o grupo desenvolveu estratégias que levaram a resolução da questão. Alguns alunos observaram o padrão de crescimento da sequência após determinarem os primeiros termos.

5.1.2 A situação didática 2

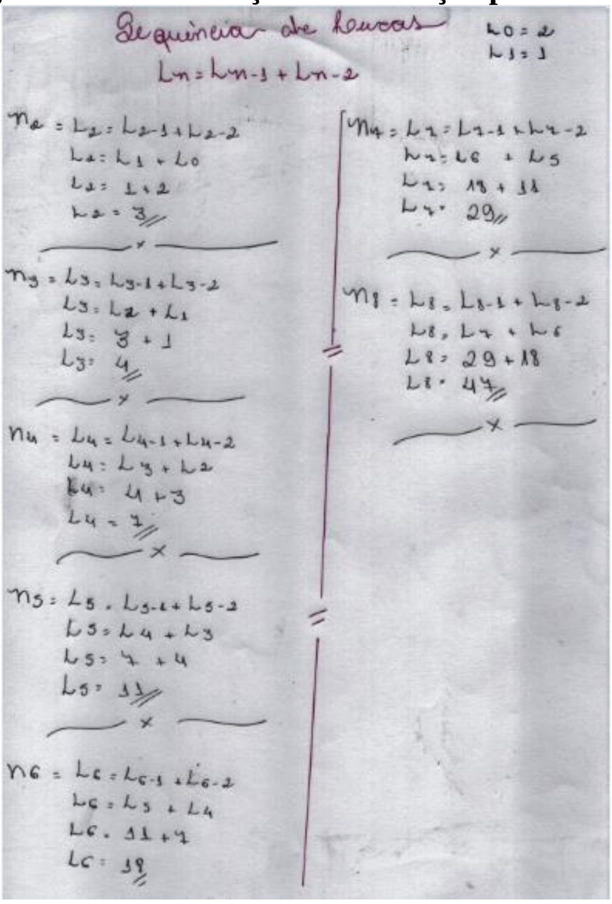
A situação didática 2 teve por objetivo construir a sequência de Lucas e compará-la com a sequência de Fibonacci. Como na situação anterior, foi dada a fórmula de recorrência para que os alunos realizassem a atividade proposta. Os alunos tomaram como exemplo o que haviam realizado anteriormente e seguiram o raciocínio análogo. Fizeram as substituições da variável n por números naturais e, já conhecidos os termos iniciais da sequência, conseguiram determinar os demais, conforme era esperado na análise a priori.

Diante disso, percebe-se que a situação de ação se desenvolveu como o previsto. Passados alguns momentos após iniciarem a resolução, perceberam também que poderiam determinar os próximos termos sem o auxílio da fórmula de recorrência. E quando questionados a respeito de suas semelhanças e diferenças com a sequência de Fibonacci, conseguiram perceber que seguiam o mesmo padrão entre os termos, mas que se diferenciavam pelos valores dos primeiros termos.

A situação de formulação também foi desenvolvida de forma satisfatória, mesmo que os alunos tenham levado um período de tempo discutindo e analisando as sequências, conseguiram determinar as semelhanças e diferenças entre as sequências de Fibonacci e Lucas.Para chegarem a essas conclusões, os alunos trocavam informações e comparavam suas respostas. Observa-se que a dificuldade em construir a sequência de Lucas, foi bem inferior se comparada com a construção da sequência de Fibonacci.

Os estudantes seguiram os mesmos passos e conseguiram formular suas respostas sem grandes dificuldades. Na figura 23, o aluno 2 apresenta a fase de ação e formulação para a sequência de Lucas. Por meio da fórmula de recorrência o aluno desenvolve os termos da sequência e realiza a atividade proposta como era esperado segundo a análise a priori.

Figura 23 – Fase de ação e formulação pelo aluno 2



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Assim percebe-se, na institucionalização, que o objetivo dessa atividade foi alcançado, pois a sequência de Lucas foi construída e compreendeu-se as semelhanças e diferenças entre as sequências mencionadas na atividade.

5.1.3 A situação didática 3

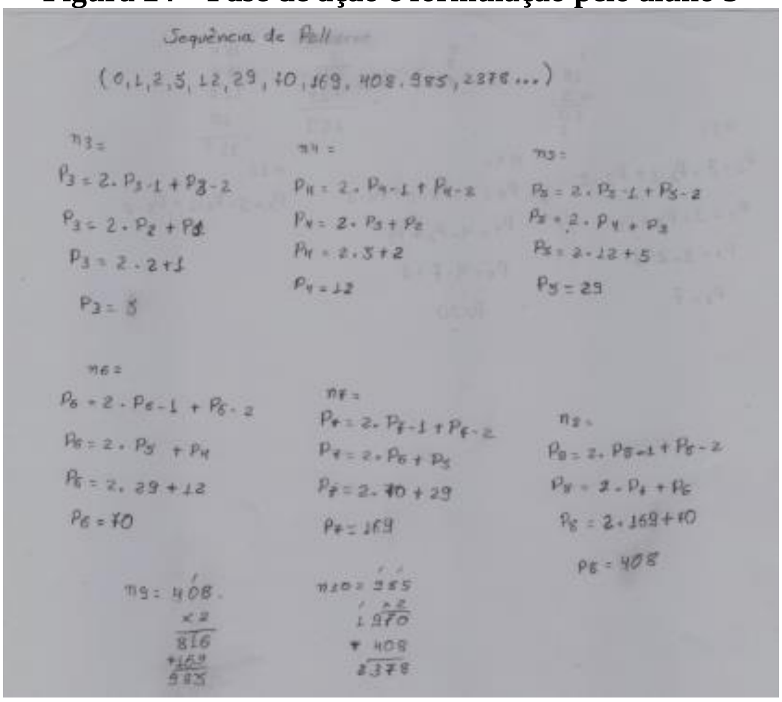
A situação didática 3 teve como objetivo construir a sequência de Pell, dada sua lei de formação, e relacionar a equação característica dessa sequência com sua fórmula de recorrência, além de, por fim, determinar as raízes da equação. O objetivo principal dessa atividade é que os alunos pudessem compreender como a equação característica pode ser obtida a partir da lei de formação da sequência. Na fase de ação dessa atividade, observa-se uma certa dificuldade por parte dos alunos. A professora intervém com questionamentos que levam os participantes a refletir sobre como podem obter os termos da sequência, como nas situações anteriores. Um dos alunos questiona se o número “2” na fórmula recursiva não vai precisar ser retirado, outro aluno já compreende que é apenas um fator que será multiplicado.

Dessa forma, após trocarem ideias, iniciam a situação de ação do processo de construção da sequência substituindo a variável n por números naturais e conseguem determinar os primeiros termos da sequência. Porém não compreendem ainda a relação entre os valores encontrados, portanto passam um período usando a fórmula recursiva para determinar os termos e construir a sequência.

Na análise a priori era esperado que eles usassem a fórmula de recorrência para determinar os primeiros termos, no entanto, para essa sequência os alunos realizaram muitos cálculos para determinar os primeiros termos da sequência. Quando são questionados sobre a equação característica, não têm uma ideia formada e a professora passa a fazer perguntas com a intenção de que o grupo possa criar estratégias de resolução e levar os alunos a entenderem como chegar à equação dada. Trocando informações, fazendo questionamentos e considerando o que foi exposto pela professora, os alunos conseguem compreender a relação entre a equação e a fórmula recursiva da sequência assim como, passam a determinar os termos da sequência sem sua lei de formação.

A resolução da equação característica foi feita pelo grupo sem dificuldades. Logo a situação de formulação foi concluída nessa etapa. Dessa forma, pode-se concluir que, na institucionalização, o objetivo da situação didática foi alcançado. Na figura 24, o aluno 3 desenvolve a sequência de Pell utilizando a lei de recorrência como o esperado. O aluno utiliza a fórmula de recorrência para determinar os termos da sequência.

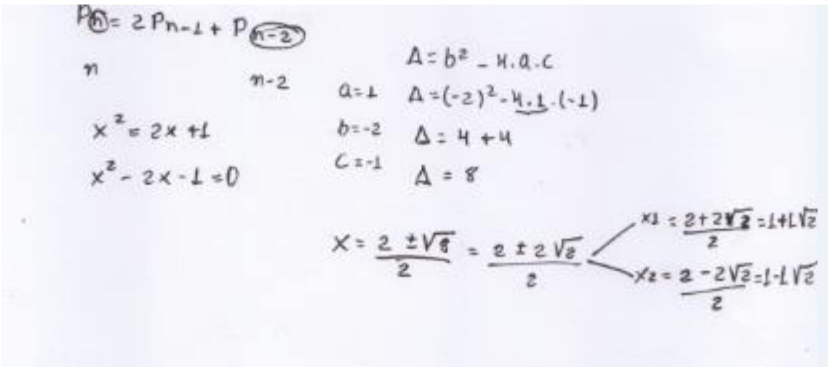
Figura 24 – Fase de ação e formulação pelo aluno 3



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na Figura 25, o aluno 4 determina as raízes da equação característica da sequência de Pell. Observando os índices n e $n-2$, o aluno compreende porque trata-se de uma equação de segundo grau e determina suas raízes.

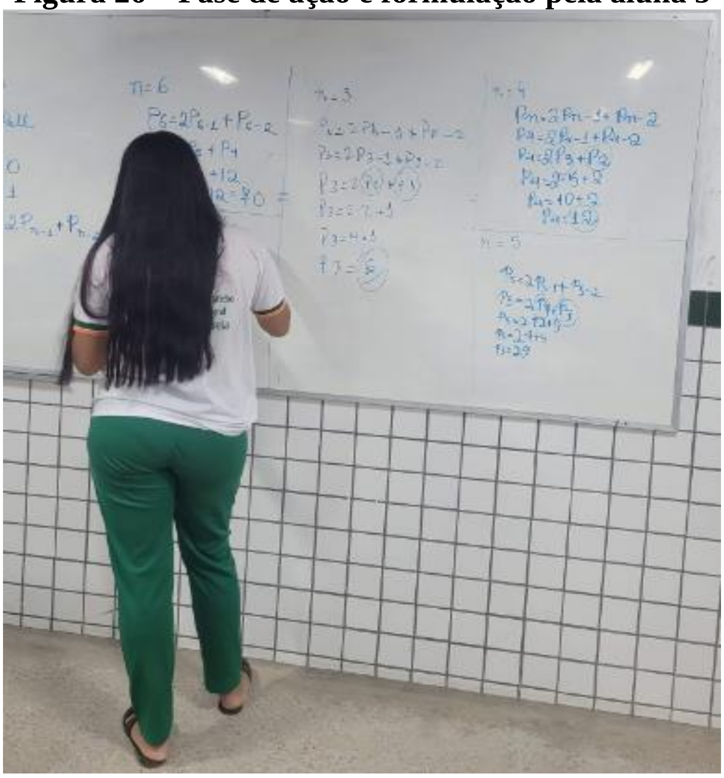
Figura 25 – Fase de ação e formulação para determinar as raízes da equação feita pelo aluno 4



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na Figura 26, a aluna 5 realiza a fase de ação e formulação para a situação didática. A aluna usa a fórmula de recorrência e desenvolve os cálculos para determinar os termos da sequência de Pell. Sem encontrar ainda um padrão entre os valores determinados, a aluna busca a construção da sequência pela lei de recorrência.

Figura 26 – Fase de ação e formulação pela aluna 5



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

5.1.4 A situação didática 4

Na situação didática 4, os alunos deveriam construir a sequência de Mersenne, escrever sua equação característica e determinar suas raízes. A primeira tarefa é realizada com certa facilidade, como era esperado pela análise a priori, pois os alunos já tinham realizado as atividades anteriores bem semelhantes a essa.

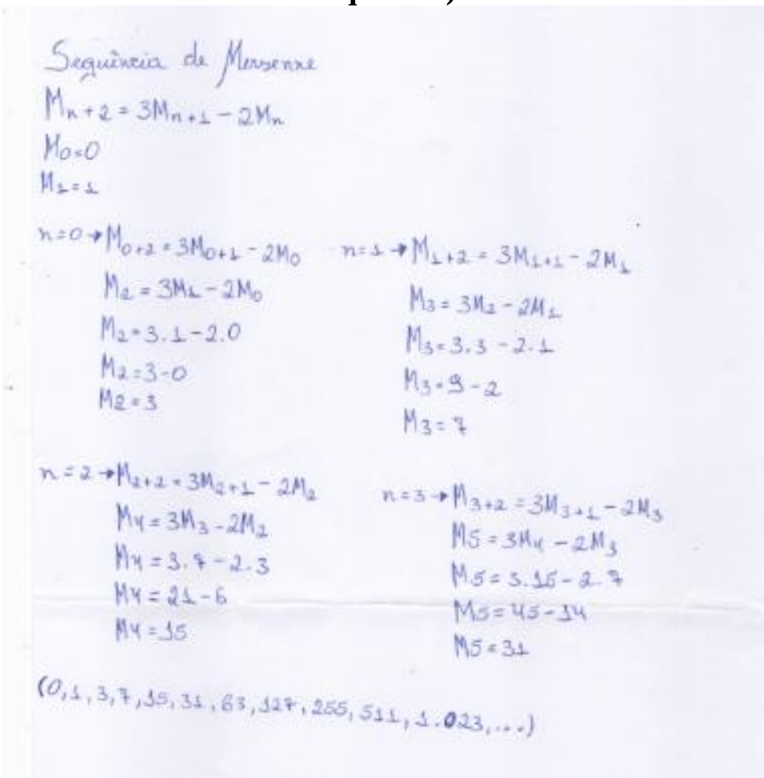
Determinar os primeiros termos da sequência tornou-se simples para os discentes. Porém, para encontrar a relação entre os valores determinados, sempre necessitam trocar ideias e comparar resultados. Na situação de ação, eles construíram a sequência, mas apresentaram certa dificuldade para escrever a equação.

Percebe-se que, mesmo feita na atividade anterior, determinar a equação característica de uma sequência ainda é uma tarefa que exige muito dos alunos, pois os mesmos ainda não conseguem relacionar os índices dos termos ao grau da equação. Só depois de trocarem ideias e compararem suas produções, conseguem chegar à equação característica da sequência e determinar suas raízes. Dessa forma, os alunos conseguem concluir a primeira etapa da situação didática. Depois de escreverem os termos da sequência e analisarem seus valores, os alunos conseguem observar o padrão existente entre os números encontrados e com isso são capazes de determinar os próximos termos sem necessariamente calcular pela fórmula de recorrência, conforme esperado na análise a priori.

A equação característica da sequência também foi resolvida corretamente, embora os obstáculos fossem evidentes no momento de realizarem esta etapa, e os discentes através da troca de ideias e compararem os resultados obtidos conseguiram escrever corretamente a equação e resolvê-la. Diante disso, os participantes conseguem concluir a etapa da formulação. Para a validação, os alunos comprovam através do uso da fórmula de recorrência que os termos da sequência estão de acordo com o padrão que eles observaram. Diante disso, na situação de institucionalização, podemos concluir que o objetivo proposto foi alcançado.

Na Figura 27, o aluno 6 apresenta a fase de ação e formulação determinando os termos da sequência utilizando sua fórmula de recorrência. O aluno encontra os primeiros termos e em seguida, percebe o padrão dos valores que aparecem. Desta forma, o aluno continua a sequência sem realizar os cálculos feitos anteriormente.

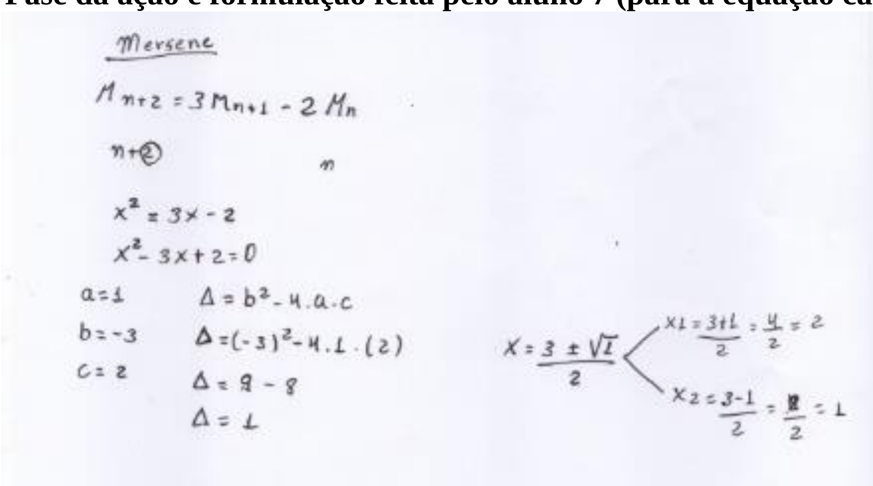
Figura 27 – Fase de ação e formulação feita pelo aluno 6 (para a construção da sequência)



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na figura 28, o aluno 7 realiza a fase de ação e formulação escrevendo a equação característica da sequência de Mersenne e determinando suas raízes. O aluno observa a diferença entre o maior e o menor índice dos termos que é dois e escreve uma equação de grau dois relacionada a fórmula de recorrência dada. Em seguida, o aluno determina as raízes dessa equação.

Figura 28 – Fase da ação e formulação feita pelo aluno 7 (para a equação característica)



Fonte: dados da pesquisa (2023).

Neste capítulo foi feita uma análise e discussão das soluções das situações didáticas que foram propostas a um grupo de alunos de 3º ano do ensino médio, observando o desempenho e a evolução do grupo. A ED admite dois tipos de validação: interna e externa. Nesta pesquisa, a validação foi realizada de forma interna, uma vez que se fundamentou nas situações didáticas apresentadas, ou seja, esta pesquisa analisou apenas as produções e o desempenho dos estudantes que foram observados nesta pesquisa, não havendo comparação com produções externas a esta aplicação.

Dessa forma, na validação desta pesquisa, foi feita uma comparação entre as etapas de análise a priori e a posteriori de acordo com os dados coletados durante a fase da experimentação. É importante considerar a fase de institucionalização da TSD, sendo de grande importância na validação da pesquisa, pois é nesta etapa que ocorre a confirmação da compreensão dos alunos e a concepção do que foi estudado em sala de aula.

No entanto, durante a resolução das situações-problemas, foram observados os obstáculos epistemológicos e cognitivos, identificando as dificuldades dos alunos em desenvolver algumas situações como iniciar a construção das sequências. Os alunos mostram dificuldades em compreender a formação das sequências e o comportamento de seus termos.

Determinar a equação característica a partir da lei de formação das sequências também foi uma tarefa em que os discentes apresentaram dificuldades, tanto para compreender a relação entre polinômio e lei de formação como para determinar grau desse polinômio. Para que esses obstáculos fossem superados, foi necessário que houvesse a troca de informações entre o grupo, o compartilhamento de ideias e soluções assim como também a intervenção da professora em alguns momentos.

Assim, a partir da discussão e análise dos dados coletados nesta pesquisa, compreende-se que os objetivos pretendidos foram alcançados, ocorrendo a validação interna.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho fundamenta-se de orientações didático metodológicas baseadas na ED e na TSD. Dessa forma foi realizada uma análise preliminar do objeto matemático, a partir de pesquisas encontradas em artigos científicos que contêm estudos sobre sequências lineares recursivas e suas equações características, publicados em periódicos de Matemática Pura, assim como, também, dissertações de mestrado que tratam do assunto abordado neste trabalho. Foram analisados também artigos que tratam da ED e da TSD publicados em periódicos de revistas de Educação Matemática e ensino de Matemática.

Diante disso, a partir do levantamento bibliográfico, foi apresentado o campo epistêmico-matemático que destaca o estudo das sequências lineares recursivas. Nesse cenário, esta pesquisa foi iniciada no campo epistêmico-matemático que engloba as sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Leonardo, Jacobsthal, Padovan, Perrin, Narayana, Mersenne e Oresme, apresentando a história dos matemáticos e estudiosos autores das sequências, suas recorrências, equação característica e forma matricial.

Nessa perspectiva matemática, foram selecionadas quatro sequências lineares recursivas como um conteúdo a ser transposto para o contexto didático-cognitivo, sendo elas: sequências de Fibonacci. Lucas, Pell e Mersenne. Essas sequências foram levadas para serem construídas e exploradas por um grupo de alunos do ensino médio, permitindo que fossem realizadas discussões dos conceitos e relações matemáticas em torno delas.

Esta pesquisa foi aplicada na eletiva de Aprofundamento em Matemática, com um grupo de alunos do 3º ano do ensino médio da E.E.M.T.I Delmiro Gouveia, localizada na cidade de Ipu-Ce. A ementa dessa disciplina eletiva permite trazer para a sala de aula conteúdos matemáticos que não foram explorados durante o curso do ensino médio ou aprofundar outros já vistos e, como pouco se vê sobre sequências numéricas, essa disciplina foi ideal para que os estudantes pudessem conhecer e estudar sobre o assunto.

Durante a etapa da experimentação, foi possível observar alguns obstáculos epistemológicos em relação à resolução dos problemas propostos, principalmente quando os alunos trabalhavam com a lei de recorrência das sequências, pois nesse momento apresentavam dificuldades para determinar os termos. No entanto, essas dificuldades foram superadas através de troca de informações e interações entre os alunos. Para esses participantes, foi a primeira vez que tiveram informações sobre matemáticos como Fibonacci ou Mersenne.

A torre de Hanoi já havia sido utilizada anteriormente como suporte para outro conteúdo, porém não havia sido citado seu autor no momento de seu uso. Construir essas sequências foi algo inédito para esses alunos. No momento da resolução das situações-problema, puderam utilizar seus conhecimentos prévios e em grupos determinar as soluções das atividades de forma que foram os autores de suas resoluções.

Em relação à abordagem teórica, para nortear os percursos metodológicos da pesquisa, foi utilizada a ED, em associação com a TSD, que contribuiu para a área da matemática e de ensino para a construção das sequências lineares recursivas e o estudo das suas equações características. O processo de construção das sequências seguiu através das situações-problema com o uso da fórmula de recorrência de cada uma delas. Nas resoluções os alunos participaram ativamente no processo de aprendizagem.

É considerável destacar que as sequências foram estudadas através de situações de ensino com base na TSD, analisadas e discutidas por meio de situações didáticas em que foram colocados problemas de conteúdos selecionados previamente, visando compreender o processo da construção das sequências lineares e estudar suas equações características.

É importante ressaltar a colaboração dos alunos que aceitaram participar desta pesquisa. Mesmo receosos no início, pelo fato de ser uma experiência diferente para eles, não hesitaram e seguiram ativos durante todos os encontros. Contribuíram e foram essenciais para este trabalho e, mesmo diante de algumas limitações, visto que nem todos conseguiam resolver as situações-problema propostas de maneira individual, eles discutiam as atividades até que se chegasse à compreensão e resolução fazendo com que o objetivo de cada situação fosse alcançado.

Por fim, esta pesquisa proporcionou a alunos que estão no último ano do ensino médio, conhecer um pouco mais sobre sequências lineares recursivas, sendo esse um conteúdo pouco explorado no ensino básico. Esses estudantes puderam acrescentar em seus conhecimentos matemáticos esse objeto de estudo que foi discutido de forma dinâmica e diferenciada durante os encontros

Esta pesquisa permitiu ainda o desenvolvimento de uma compreensão epistemológico-matemático no ensino. Diante disso, espera-se que este trabalho venha a servir de referência e fonte de pesquisa para outros trabalhos que procuram explorar, com a abordagem da TSD, conteúdos matemáticos que são poucos desenvolvidos nas escolas públicas durante o ensino médio da educação básica.

REFERÊNCIAS

ALFRED, U. **An introduction to Fibonacci discovery.** California: Fibonacci Association/ San Jose State College, 1965. 56p.

ALMEIDA, E. G. S. **Propriedades e Generalizações dos Números de Fibonacci.** 2014. 43f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, 2014.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: UFPR, 2007. 218p.

ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 109-141, 2016.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.

ALVES, F. R. V. Engenharia didática (análises preliminares e análise a priori): O caso das equações diferenciais de segunda ordem. **Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista**, v. 2, n. 2, p. 1-22, 2016a.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 51, p. 83-106, 2017.

ALVES, F. R. V. Sequência de Oresme e algumas propriedades (matriciais) generalizadas. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 16, p. 28-52, 2019.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C.; MANGUEIRA, M. C. D. S. Discovering theorems about the gaussian Mersenne sequence with the maple´s help. **Annals of Computer Science and Information System**, v. 17, n. 2, P. 169-177, 2019.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M.; VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. S. Teaching recurrent sequences in Brazil using historical facts and graphical illustrations. **Acta Didactica Napocensia**, v. 13, n. 1, p. 87-104, 2020.

ALVES, F. R. V.; DIAS, M. A.; Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED). **REVEMAT**, v.12, n. 2, p. 192-209, 2017.

ALVES, F. R. V.; Sequências generalizada de Pell- SGP: Aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. **Revista Thema**, v. 13, n. 2, p. 27 a 41, 2016b.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

BACHELARD, G. A **Formação do Espírito Científico:** contribuição para uma psicanálise do. 5a. reimp. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. 316p.

BICKNELL, M. Primer on Pell sequence and related sequences. In: BICKNELL, M. **The Fibonacci Quarterly**, California: Vilcox High School, 1975. p. 345-349, 1975.

BOYER, U. C. **História da matemática.** 2a ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 2006. 496p.

BRASIL. **Orientações curriculares para o ensino médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, v. 2, 2006. 135p.

BROUSSEAU, G. D'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique. In: **Actes de la deuxième école d'été de Didactique des mathématiques**, Olivet: IREM d'Orléans, 1982. p. 39-60.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33–115, 1986.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008. 128p.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. VANHAMME, J.; VANHAMME, W**. La problématique et l'enseignement des mathématiques**. Louvain la neuve: Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, 1976. p. 101-117.

CATARINO, P. M. M. C.; BORGES, A. On Leonardo numbers. **Acta Mathematica**, v. 89, p. 1-12, 2019.

CATARINO, P.; CAMPOS, H.; VASCO, P. On the Mersenne sequence. **Annales Mathematicae et Informaticae**, v. 46, p. 37–53, 2016.

CERDA-MORALES, G. Oresme polynomials and their derivatives. **ArXiv preprint**, v. 1, p. 1-11, 2019.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica:** del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1998. 196p.

COSTA, T. J. M. B. 2015. 65f. **Os números perfeitos e os primos de Mersenne.** Dissertação (Mestrado em Matemática para professores) – Centro de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2015.

CRAVEIRO, I. M. **Extensões e interpretações combinatórias para os números de Jacobsthal, Fibonacci e Pell.** 2004. 117f. Tese (Doutorado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

ELORZA, N. S. L. **O uso de jogos no ensino e aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental:** levantamento de teses e dissertações. 2013. 344f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2013.

ERCOLANO, J. Matrix generators of Pell sequences. **Fibonacci Quart**, v. 17, n. 1, p. 71-77, 1979.

FILLOS, L. M.; BONETE, I. P.; CAETANO, J. J. A história da matemática na educação básica: uma investigação com professores sobre o hábito da leitura. **Vidya**, v. 31, n. 2, p. 91-104, 2011.

FREITAS, J. L. M. Teoria das situações didáticas. In: MACHADO, S. D. A. **Educação matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008. p. 77-111.

GÁLVEZ, G. A didática da matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática**, Porto Alegre: Editora Penso, 1996. p. 26-35.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2010, 450p.

HOGGATT JUNIOR, V. E. **Fibonacci and Lucas numbers**. Santa Clara: University of Santa Clara/ The Fibonacci Association, 1969. 100p.

HORADAM, A. F.; MAHON, J. Pell and Pell-Lucas polynomials. **The Fibonacci Quarterly**, v. 23, n. 1, p. 7–20, 1985.

HORADAM, A. Oresme numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 12, n. 3, p. 267–271, 1974.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática:** ciência e aplicações. 1. 9.ed. São Paulo: Saraiva, v. 1, 2016. 444p.

KIM, P. **Mathematics in India.** Nova Jersey: Princeton University Press Princeton, 2009. 360p.

KOKEN, F.; BOZKURT, D. On the Jacobsthal-Lucas numbers by matrix methods. **International Journal of Contemporary Mathematical Sciences**, v. 3, n. 33, p. 1629-1633, 2008.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**. New York: Wileyand Sons publications, 2001. 648p.

KOSHY, T. **Pell and Pell-Lucas numbers with applications**. Alemanha: Springer, 2014. 454p.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations d’apprentissage des mathématiques en classe. défis et tentatives. **Didaskalia**, v. 10, p. 97-112, 1997.

LIBÂNEO, J. C. **O processo de ensino na escola**. São Paulo: Cortez, 1994. p. 77-118.

LIMA, V. S.; SILVA, A. R.; CÔA, A.; CARRARA, A.; FURLAN, C. R.; GRANDINO, E. F.; ASSARICE, F. S.; ALONSO, G. A. S.; TAVARES, M. C.; NATAL, N. G.; PIMENTA, P. G.; RIZZO, P. R. Progressões aritméticas e geométricas: história, conceitos e aplicações. **Intellectus – Revista Acadêmica Digital**, v. 23, p. 1-35, 2013.

MALCOLM, N. The publications of John Pell frs (1611-1685): some new light and some old confusions. **Notes and Records of the Royal Society of London**, v. 54, n. 3, p. 275-292, 2000.

MANGUEIRA, M. C. S. **Engenharia Didática:** Um processo de Hibridização e Hipercomplexificação de Sequências Lineares Recursivas. 2022. [s.f]. Dissertação (Mestrado em Educação da Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2022.

MANGUEIRA, M. C. S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Os números híbridos de K-Leonardo. **Brazilian Electronic Journal Of Mathematics**, v. 3, n. 5, p. 71-84, 2022.

MANGUEIRA, M. C. S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. C. Uma experiência da engenharia didática no processo de hibridização da sequência de Leonardo. **Revista Binacional Brasil-Argentina Diálogo entre as ciências**, v. 10, n. 2, p. 271-297, 2021.

MANGUEIRA, M. C.S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A generalização da forma matricial da sequência de Perrin. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 5, n. 1, p. 384-392, 2020.

MENDONÇA, A. F.; BORGES NETO, H. Nicole Oresme: Perspectivas históricas para uso em sala de aula. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 9, p. 48-62, 2016.

MENEZES, A. P. A. B. **Contrato didático e transposição didática:** inter-relações entre fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino fundamental. 2006. 259f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 4.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 321p.

NORONHA, W. F. R. **Engenharia didática clássica sobre a sequência de Pell e seus modelos de generalização**. 2020. 192f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2020.

OLIVEIRA, F. S. **O estudo das sequências através de padrões numéricos.** 2011. 31f. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

OLIVEIRA, R. R. **Engenharia didática sobre o modelo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci:** Relações recorrentes n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais. 2018. 222f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2018.

PAIS, L. C. **Didática da atemática:** uma análise da influência francesa. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 127p.

PAIS, L. C. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. 128p.

POMMER, W. M. **A engenharia didática em sala de aula:** Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as equações diofantinas lineares. 2013. São Paulo: s.e., 2013. 72p.

RAMIREZ, J. L.; SIRVENT, V. F. Uma nota sobre a sequência k-Narayana. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, v. 45, p. 91-105, 2015.

SARMA, K. V. **A history of kerala school in hindy astronomy**. Panjab: Panjab University, 1972. 220p.

SEENUKUL, P. Matrices which have similar properties to Padovan-matrix and its generalized relations. **Journal of Science and Technology**, v. 7, n. 2, p. 90–94, 2015.

SHANNON, A. A note on generalized Leonardo numbers. **Note on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 25, n. 3, p. 97–101, 2019.

SILVA, A. S. **Um estudo sobre sequências e séries e uma análise como esse conteúdo se apresenta nos livros didáticos do ensino médio**. 2020. 142f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020.
VOROBIOV, N. N. **Números de Fibonacci**. Moscou: Editora Mir, 1974. 88p.

SILVA, B. A. **Números de Fibonacci e números de Lucas**. 2017. 81f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017a.

SILVA, I. C. **Recorrências:** uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio. 2015. 85f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, 2015.

SILVA, R. J. **Ternos Pitagóricos e sequências numéricas.** São Paulo: Fundação Biblioteca Nacional, 2017b. 130p.

SOKHUMA, K. Padovan q-matrix and the generalized relations. **Applied Mathematical Sciences,** v. 7, n. 56, p. 2777-2780, 2013.

SOUZA, M. F. **O uso das TIC no processo de ensino e aprendizagem da matemática:** das práticas às concepções docentes. 2010. 166f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2010.

SUGUMARAN, A.; RAJESH, K. Perrin graceful graphs. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 114, n. 6, p. 131–137, 2017.

TEIXEIRA, L. R. M. Dificuldades e Erros na Aprendizagem da Matemática. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2004, São Paulo. **Anais...** Encontro paulista de educação matemática, São Paulo: SBEM/USP, 2004.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Zetetike**, v. 21, n. 1, p. 155–168, 2013.

VIEIRA, R. P. M. **Engenharia didática (ED):** o caso da generalização e complexificação da sequência de Padovan ou Cordonnier. 2020. 267f. Dissertação (Mestrado Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2020.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. A sequência de Padovan e o número plástico: uma análise prévia e a priori. **Research, Society and Development**, v. 8, n. 8, p. e26881212, 2019.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A generalização dos quatérnios de Narayana. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 6, n. 3, p. 12-22, 2021b.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Uma exploração da sequência de padovan num curso de licenciatura em matemática. **Indagatio Didactica**, v. 11, n. 4, p. 261–279, 2019.

VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. A forma matricial dos números de Leonardo. **Ciência e Natura**, v. 42, p. 1-13, 2020.

VIEIRA, R. P. M.; SOUZA, T. S. A.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Um estudo dos números hiperbólicos de Jacobsthal-Lucas. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 21, p. 81-89, 2021.

VOET, C.; SCHOONJANS, Y. Benedictine thought as a catalyst for 20st century liturgical space: the motivations behind Dom Hans van der Laan’s ascetic church architecture. **Philosophy**, v. 2012, p. 255-261, 2012.

WALKER, I. **Explorations in recursion with John Pell and the Pell sequence**. 2011. 47f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Portland: Portland State University, 2011.

YILMAZ, N.; TASKARA, N. Matrix sequences in terms of Padovan and Perrin numbers. **Journal of Applied Mathematics**, v. 2013, p. 1-7, 2013.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Você está sendo convidado (a) para participar do estudo: A CONSTRUÇÃO DE SEQUÊNCIAS LINEARES RECURSIVAS POR MEIO DE UMA ENGENHARIA DIDÁTICA COM A APLICAÇÃO DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS JUNTO A UM GRUPO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**,** realizado por Ana Cibely Aragão Monteiro, mestranda pela Universidade Estadual do Ceará-UECE. Nesse estudo pretendemos: apresentar o estudo das sequências lineares recursivas durante o ensino médio; investigar, junto aos alunos do ensino médio, a formação das sequências lineares recursivas através das situações-problema propostas; desenvolver e resolver a equação característica das sequências lineares propostas para estudo. O motivo que nos leva a estudar esse assunto deve-se a investigar métodos de aprendizagem para sequências lineares recursivas.

Sua participação consistirá em participar de encontros presenciais e responder a atividades sobre o tema estudado. Os dados preservam a identidade dos participantes, utilizarei o método presencial. As aulas serão presenciais de cinquenta minutos cada, serão seis encontros ao todo e ocorrerão no primeiro semestre do ano letivo de 2023. Durante os encontros os participantes receberão as atividades para resolução. O(a) senhor(a) será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador(a) ou pela instituição.

Esse estudo apresenta risco mínimo: Os participantes podem sentir-se constrangido com algum dos procedimentos anteriormente citados, tendo a liberdade de deixar de participar do estudo em qualquer momento, sem haver nenhum prejuízo para a sua conduta. Também estarão sujeitos a riscos ergonômicos, esse risco será amenizado com pausas durante as aulas quando necessário. Qualquer desconforto causado ao participante, o mesmo poderá a qualquer momento deixar de participar da pesquisa. Também estão assegurados o direito a pedir indenizações e a cobertura material para reparação a dano causado pela pesquisa ao participante da pesquisa. (Resolução CNS nº 466 de 2012, IV.3.h, IV.4.c e V.7). Sua participação trará como benefícios a oportunidade de conhecer sobre sequências lineares recursivas e estudar sobre a origem de sequências matemáticas famosas, como por exemplo a Sequência de Fibonacci. Além disso, poderão participar da aplicação das situações-problema envolvendo quatro sequências lineares recursivas possibilitando-os vivenciar a uma abordagem diferente das tradicionais no âmbito da sala de aula, para o ensino de Sequências, contribuindo de uma forma significativa para a construção do conhecimento matemático.

Serão garantidos o sigilo de identidade e privacidade dos dados coletados durante todas as fases da pesquisa. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Os resultados da pesquisa estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a sua permissão. Os dados e instrumentos utilizados no estudo ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de cinco anos e, após esse tempo, serão destruídos.

Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma via será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Se você tiver alguma consideração ou dúvida, sobre a sua participação na pesquisa, entre em contato com o pesquisador responsável, Ana Cibely Aragão Monteiro, e-mail: cibely10@gmail.com, telefone: (88) 997427459 e com o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual do Ceará, localizado na Av. Dr. Silas Munguba, 1700, Campus do Itaperi, Fortaleza-Ceará –UECE. CEP 60.714903- Fone. 3101.9890. Email: cep@uece.br. Horário de funcionamento: 8h às 12h e 13h às 17h de segunda a sexta. Acordando com esse Termo de Consentimento, você autoriza o(a) pesquisador(a) a utilizar os dados coletados em ensino, pesquisa e publicação, estando a sua identidade preservada.

Você concorda com o TCLE? Sim ( ) Não ( )

Assinatura do participante da pesquisa: ____

Assinatura do pesquisador: ____

APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTOS DE ADOLESCENTES

TERMO DE ASSENTIMENTO DE ADOLESCENTES

Você, ... está sendo convidado/a para participar de uma pesquisa sobre SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS que tem como objetivo, estudar a construção de sequências lineares recursivas por meio de uma ED e com aplicação da teoria das situações didáticas. Meu nome é Ana Cibely Aragão Monteiro. Seus pais permitiram que você participe. Queremos saber o que você pensa sobre isso, para que todos nós possamos compreender como a ED e a Teoria das Situações Didáticas podem contribuir com o estudo das sequências lineares recursivas no ensino médio.

Os adolescentes que irão participar dessa pesquisa têm idade entre 16 e 18 anos. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu. Não terá nenhum problema se desistir. A pesquisa será feita na EEMTI Delmiro Gouveia onde os adolescentes participarão das aulas durante os encontros da disciplina Eletiva Aprofundamento em Matemática e desenvolverão atividades em grupos e individuais. O uso deste material é considerado seguro. Embora a pesquisa não lhe ofereça nenhum risco físico, você pode ficar constrangido (a) ou sem jeito. Caso isto aconteça, você pode pedir para não participar ou, caso já esteja participando, pode desistir. Caso você, mesmo com o consentimento seus pais ou responsáveis, se recuse a participar do estudo ou de uma parte dele, sua vontade será respeitada. Caso aconteça algo errado, você pode falar logo comigo, Ana Cibely Aragão Monteiro, durante o momento em que estivermos juntos ou mais tarde, se tiver alguma dúvida, pelo telefone (88) 99742-7459. As coisas positivas que podem resultar desta pesquisa estão ligadas ao ensino das sequências lineares no ensino médio. Ninguém saberá que você está participando da pesquisa, não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem o nome verdadeiro das crianças que participaram da pesquisa. Se você entendeu as coisas negativas e as coisas positivas que podem acontecer, pode dizer “sim” e participar, mas a qualquer momento, pode dizer “não” e desistir sem ninguém ficar chateado com você, nós pedimos que assine estas duas folhas ficando uma delas com você. Muito obrigada!

Ipu , ____ de ___________________ de 2023.

Assinatura do adolescente:____

Assinatura do/a responsável:____

Assinatura da pesquisadora:____

ANEXO A – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA DA PESQUISA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ - UECE

Plataforma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: O ESTUDO DAS SEQUÊNCIAS LINEARES POR MEIO DA ENGENHARIA DIDÁTICA
Pesquisador: ANA CIBELY ARAGAO MONTEIRO
Área Temática:
Versão: 2
CAAE: 67317223.3.0000.5534
Instituição Proponente: Universidade Estadual do Ceará
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 6.021.932

Apresentação do Projeto:
Trata-se de uma pesquisa qualitativa, de caráter exploratório e descritivo, que pretende investigar situações didáticas sob a perspectiva das construções de sequências lineares recursivas por meio de uma Engenharia Didática associada com a Teoria das Situações Didáticas junto a um grupo de alunos do ensino médio. O estudo será realizado na Escola de Ensino Médio de Tempo Integral Delmiro Gouveia – EEMTI Delmiro Gouveia, localizada na cidade de Ipu, com 15 alunos do ensino médio, durante 5 encontros. As aulas, que totalizarão 250 minutos, serão registradas através de fotos e anotações das produções dos participantes.

Objetivo da Pesquisa:
Objetivo Geral:

Investigar situações didáticas sob a perspectiva das construções de sequências lineares recursivas por meio de uma Engenharia Didática associada com a Teoria das Situações Didáticas junto a um grupo de alunos do ensino médio.

Objetivos Específicos:

- Apresentar o estudo das sequências lineares recursivas durante o ensino médio;
- Investigar, junto aos alunos do ensino médio, a formação das sequências lineares recursivas

através das situações-problema propostas;

- Desenvolver e resolver a equação característica das sequências lineares propostas para estudo.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos:

Quanto aos riscos da pesquisa, a pesquisadora elenca constrangimento dos participantes, durante as etapas da pesquisa, bem como riscos ergonômicos.

Benefícios:

A pesquisadora aponta como benefícios do estudo a oportunidade de conhecer sobre sequências lineares recursivas e estudar sobre a origem de sequências matemáticas famosas, como por exemplo a Sequência de Fibonacci. São conteúdos que geralmente não estão contemplados no currículo escolar. Além disso, poderão participar da aplicação das situações-problema envolvendo quatro sequências lineares recursivas possibilitando-os vivenciar uma abordagem diferente das tradicionais no âmbito da sala de aula, para o ensino de Sequências, contribuindo de uma forma significativa para a construção do conhecimento matemático.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

O estudo possui relevância e aplicação social, pois poderá proporcionar aos alunos o contato com o estudo da matemática, com vivências que fogem da abordagem tradicional, contribuindo para despertar o interesse do estudo das sequências lineares.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

A Folha de Rosto, a Carta de Anuência, o TCLE e o TALE estão de acordo com as resoluções 466/2012 e 510/2016 da CONEP

Recomendações:

Anexar relatório final da pesquisa ao seu término.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Projeto aprovado, para apreciação do colegiado.

Considerações Finais a critério do CEP:

Endereço: Av. Silas Munguba, 1700
Bairro: Itaperi **CEP:** 60.714-903
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3101-9890 **Fax:** (85)3101-9906 **E-mail:** cep@uece.br

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ - UECE

Continuação do Parecer: 6.021.932

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2072311.pdf	02/04/2023 08:35:54		Aceito
Outros	TERMO.pdf	30/03/2023 21:34:27	ANA CIBELY ARAGAO MONTEIRO	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	ENGENHARIADIDATICAPROJETO.pdf	30/03/2023 21:32:47	ANA CIBELY ARAGAO MONTEIRO	Aceito
Cronograma	cronograma.pdf	30/03/2023 21:31:48	ANA CIBELY ARAGAO MONTEIRO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.pdf	30/03/2023 21:30:44	ANA CIBELY ARAGAO MONTEIRO	Aceito
Outros	Anuencia.pdf	10/02/2023 20:26:55	ANA CIBELY ARAGAO MONTEIRO	Aceito
Folha de Rosto	coordenador.pdf	10/02/2023 20:18:49	ANA CIBELY ARAGAO MONTEIRO	Aceito
Outros	APENDICEB.pdf	05/01/2023 13:27:36	ANA CIBELY ARAGAO MONTEIRO	Aceito
Orçamento	ORCAMENTO.pdf	05/01/2023 13:21:29	ANA CIBELY ARAGAO MONTEIRO	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	diretora.pdf	05/01/2023 13:18:58	ANA CIBELY ARAGAO MONTEIRO	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

Endereço: Av. Silas Munguba, 1700
Bairro: Itaperi **CEP:** 60.714-903
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3101-9890 **Fax:** (85)3101-9906 **E-mail:** cep@uece.br

FORTALEZA, 25 de Abril de 2023

Assinado por:
CIBELE GADELHA BERNARDINO
(Coordenador(a))