



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

ANTÔNIO ELÍDIO DA SILVA

**PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA:
UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA**

**SOBRAL – CEARÁ
2023**

ANTÔNIO ELÍDIO DA SILVA

PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA:
UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes

SOBRAL – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Silva, Antonio Elidio da.

PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA: Uma
Revisão Sistemática de Literatura [recurso eletrônico]
/Antonio Elidio da Silva. - 2023.
80 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de
Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional -
Profissional, Sobral, 2023.

Orientação: Prof. Pós-Dr. Daniel Brandao Menezes.

1. Ensino de trigonometria, Revisão sistemática de
Literatura. I. Título.

ANTÔNIO ELÍDIO DA SILVA

PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA:
UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PRPOFMAT) do Programa de Pós- Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Aprovado em 19 de Junho de 2023

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 DANIEL BRANDAO MENEZES
Data: 13/07/2023 10:13:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Documento assinado digitalmente
 FABRÍCIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA
Data: 12/07/2023 22:10:21-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fabrício de Figueredo Oliveira Universidade
Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA



Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho
Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA

Com gratidão, dedico este trabalho a Deus, pois devo a Ele tudo que sou. As três pessoas mais importantes da minha vida: Cristiane Silva (esposa), João Élicris e Maria Cristiele (filhos).

AGRADECIMENTO

À Deus, por minha vida, família e amigos.

A Universidade Estadual do Ceará, seu corpo docente, direção e administração, por oportunizarem a janela em que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Ao Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes, que me auxiliou na germinação das ideias e durante todo o processo de desenvolvimento desta pesquisa.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Fabrício de Figueiredo Oliveira e Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho, pelas observações, questionamentos e críticas.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, muito obrigado.

RESUMO

O ensino de Matemática vem se mostrando, ao longo dos tempos, uma atividade cada vez mais desafiadora. Pesquisadores e estudiosos têm exercitado suas criatividade na busca de metodologias alternativas àquelas que costumeiramente estão presentes nos livros didáticos e que, em uma situação ou outra, não respondem aos anseios dos professores e estudantes. Diante disso, esta dissertação, desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), apresenta um estudo sistemático em que procurou averiguar a estruturação dos conteúdos de Trigonometria em três livros didáticos e diversos trabalhos dissertativos, ou artigos periódicos, com metodologias alternativas, como atividades prático-teóricas, uso de aplicativos matemáticos que favoreçam o processo de ensino de Funções Trigonométricas. Assim, essa pesquisa teve como questão norteadora: quais as contribuições que a literatura científica tem apresentado para o ensino de Trigonometria? Para responder esse questionamento, buscou-se observar, em variados trabalhos, as metodologias alternativas para o processo de ensino. Diante do exposto, o objetivo geral foi investigar as contribuições da literatura científica para o ensino de Trigonometria, tendo como objetivos específicos: a) destacar as contribuições da história do ensino de trigonometria; b) verificar os tipos de abordagens metodológicas sobre o ensino de Trigonometria e c) identificar as produções (dissertações e artigos) da literatura científica que podem contribuir para ensino de Trigonometria. O trabalho foi desenvolvido, inicialmente, pela observação e análise de três livros didáticos, observando sua estruturação quanto aos conceitos, metodologia, e aplicabilidade. Posteriormente, realizou-se uma revisão sistemática de quatro dissertações que tratam do tema ensino de Trigonometria e suas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem. Nas considerações, concluiu-se a existência de uma gama de procedimentos metodológicos, cabendo aos educadores matemáticos se apropriarem dessas alternativas.

Palavras-chaves: Ensino de trigonometria. Revisão sistemática de Literatura

ABSTRACT

Mathematics teaching has been shown to be an increasingly challenging activity over time. Researchers and scholars have exercised their creativity in the search for alternative methodologies to those that are usually present in textbooks and that, in one situation or another, do not respond to the wishes of teachers and students. In view of this, this dissertation developed in the Professional Master's Program in Mathematics in National Network - PROFMAT presents a systematic study in which it seeks to investigate the structuring of trigonometry contents in three textbooks and several dissertation works or periodical articles, which provide alternative methodologies such as practical-theoretical activities, use of mathematical applications, which favor the teaching process of teaching Trigonometric Functions. Thus, this work has as a guiding question to answer the question: What are the contributions that the scientific literature has presented for the teaching of trigonometry? To answer this question, we sought to observe alternative methodologies for the teaching process in several works. Given the above, the general objective of this dissertation was to investigate the contributions of the scientific literature to the teaching of trigonometry, I fear With the specific objectives it is intended: a)) highlight the contributions of the history of teaching trigonometry; b) verify the types of methodological approaches on the teaching of Trigonometry and c) identify the productions (dissertations and articles) of the scientific literature that can contribute to the teaching of Trigonometry. The work was initially developed through the observation and analysis of three textbooks, observing their structure in terms of concepts, methodology, and applicability. Subsequently, we carried out a systematic review of four dissertations that deal with the topic of trigonometry teaching and its contributions to the teaching and learning process. The work is thus distributed where, in our considerations, we concluded the existence of a range of methodological procedures, and it is up to mathematical educators to appropriate these alternatives.

Key words: Teaching trigonometry. Systematic Literature Review

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O Papiro Rhinds ou Ahmes	17
Figura 2 - Coordenadas Polares.....	27
Figura 3 – Transferidor graduado em graus	27
Figura 4 – Conjunto de transferidores medindo ângulos	28
Figura 5 – Ângulo considerado na região convexa.....	28
Figura 6 – Regiões angulares.....	28
Figura 7 – Imagem mostrando a região convexa e não convexa	29
Figura 8 – Intersecção de retas paralela por retas transversais	29
Figura 9 – Esquema para medir o raio da Terra	30
Figura10–Imagem base para demonstração da relação fundamental da Trigonometria	32
Figura11–Imagem resultante da demonstração da identidade trigonométrica...32	
Figura 12 – Triângulo resultante das demonstrações trigonométricas.....	34
Figura 13 – Imagem de apoio para a demonstração que segue.....	35
Figura14– Texto introdutório, dando entrada ao estudo das razões trigonométrica no triângulo retângulo	39
Figura 15 – Competência da BNCC para Trigonometria no retângulo	40
Figura 16 – Atividade proposta no livro	43
Figura 17 – Questão presente na lista de exercícios	43
Figura 18 – Exercício sobre transformação de ângulos	45
Figura 19 – Exercício com transformação angular, envolvendo minutos e segundos	46
Figura 20 – Exercício proposto para fixação do conteúdo.....	47
Figura 21 – Exercício proposto número 2.....	48
Figura 22 – Trabalhos classificados para análise	58
Figura 23 – Plano de aula	67
Figura 24 – Bambu Quebrado	69

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BOA	Base Orientadora da Ação
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CTD	Catálogo de Teses e Dissertações
ECA	Estatuto da Criança e Adolescente
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
GPS	Sistema de Posicionamento Global
IES	Instituição de Ensino Superior
MRA	Motivação da Realização da Atividade
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
PPG	Programa de Pós-Graduação
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RSL	Revisão Sistemática de Literatura
Scielo	<i>Scientific Electronic Library Online</i>
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação do Estado do Ceará
TAA	Teorema da Aproximação da Atividade
TEAM	Teoria da Formação das Ações Mentais
UVA	Universidade Estadual Vale do Acaraú

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	ENSINO DE TRIGONOMETRIA.....	15
2.1	Definição.....	15
2.2	A Trigonometria ao longo dos tempos	16
2.3	O ensino de Trigonometria no Brasil	19
2.4	Trigonometria no triângulo retângulo.....	26
2.4.1	O ângulo (ou região angular)	26
2.4.2	Relações trigonométricas do triângulo retângulo (Funções Trigonométricas do ângulo agudo)	29
3	A TRIGONOMETRIA PRESENTE EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS	36
3.1	Definição.....	36
3.2	Nível da organização estrutural.....	38
3.2.1	Livro A.....	38
3.2.2	Livro B.....	40
3.2.3	Livro C	40
3.3	Distribuição dos conteúdos.....	41
3.3.1	Livro A.....	41
3.3.2	Livro B.....	42
3.3.3	Livro C	42
3.4	Exercícios.....	43
3.4.1	Livro A.....	43
3.4.2	Livro B.....	43
3.4.3	Livro C	46
4	REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA.....	49
4.1	Definição.....	49
4.2	Questão de pesquisa.....	51
4.3	Seleção pela leitura dos resumos	53
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	60
5.1	Avaliação da metodologia presente nos livros didáticos	60
5.2	Avaliação das metodologias descritas nos textos selecionados	63
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática vem passando por transformações ao longo dos tempos, protagonizadas por educadores, professores e estudiosos que buscam transformar suas práticas pela aquisição e inovação do conhecimento através de métodos e técnicas que possam conduzir alunos e outros tantos professores a passos importantes, no sentido de tornar a aprendizagem e o ensino gradativamente mais aproximados com a ciência e a realidade. Em um mundo em constante redescoberta, alia-se a uma série de situações, como o desenvolvimento das tecnologias digitais, descobertas e mudança de mentalidade da comunidade educacional. Nessa esfera, Sousa *et al.* (2021, p. 36) afirmam que “há reconhecimento de que as tecnologias se constituem em recursos didáticos de fundamental importância para promover relação aproximada entre o estudante e o professor”.

Nesse viés, é relevante ressaltarmos que a Matemática, durante muito tempo, tem sido uma disciplina que proporciona a exclusão. Uma disciplina que, “pensada” para o sexo masculino, vem sendo tratada como reguladora de quem pode ou não pode aprendê-la. Sabe-la é sinal de “status” entre professores e alunos. Geralmente, os professores dessa disciplina são tidos como aqueles “seres” imponentes e intocáveis. E, apesar da própria sociedade julgar que a Matemática é direcionada a pessoas mais talentosas, essa tem sido uma prerrogativa que ela própria descarta. Essa conscientização cidadã se dá quando a educação matemática fornece diretrizes que procuram desenvolver nos estudantes “habilidades de ampliar a capacidade de selecionar as informações que possam melhorar a sua vida” (ECKERT, 2019, p. 110). E, nesse sentido, o ensino de Matemática está a serviço da construção do cidadão.

Nesse intuito, do ponto de vista do ensino de Matemática, não basta que o estudante adquira certos conhecimentos, mas que esses conhecimentos sejam significativos. É primordial dar funcionalidade ao seu ensino para que possa ser desfrutado no conjunto de necessidades que se tenha no decorrer de sua vida estudantil e fora da escola. Existe um valor pedagógico muito significativo na formação dos alunos, que tem por finalidade prepará-los para protagonizar mediante seus saberes.

Por isso, encontrar metodologias que sejam capazes de possibilitar a professores e alunos uma visão holística da Matemática, para que sua aprendizagem

seja uma construção contínua, é essencial. Através de jogos, história da Matemática, atividades teóricas e práticas, como metodologia, é possível tornar a aprendizagem prazerosa e significativa, levando a uma visão de aplicabilidade. Além disso, “recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, [...] planilhas eletrônicas têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas” (BRASIL, 2018, p. 276). Ainda, observando todo o contexto descrito na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), “é fundamental haver um contexto significativo [...] da própria história da Matemática” (BRASIL, 2018, p. 301).

Os cursos de Matemática apresentam, em sua maioria, programas tradicionais, que desenvolvem, com frequência, exercícios pragmáticos, de suma importância para a fixação dos conceitos sobre os diversos temas que são tratados, no entanto, que, em certo ponto, são ausentes de aplicações práticas, ou que levem os estudantes dessa disciplina a utilizarem atividades com outras ferramentas. Martins (2012, p. 19) entende que, “culturalmente, para ser professor de matemática basta dominar o conteúdo matemático”.

Nesse prisma, empregar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados, são competência sugeridas na BNCC que facilitarão o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Estudos nacionais e internacionais vêm apontando essa tendência e a necessidade de se implantarem medidas urgentes que “[...] contrariem a crescente tendência à compreensão da atividade matemática, tanto por parte de alunos como de professores, gerada por atitudes, crenças e emoções negativas aos conteúdos matemáticos” (MIGUEIS; AZEVEDO, 2007, p. 18 *apud* ALBUQUERQUE; MORI; LACANALLO, 2009, p. 158).

Face a isso, nosso interesse por analisar o processo de ensino de Trigonometria se faz por meio da inquietação frente ao desempenho evidenciado pelos estudantes do Ensino Médio e a busca de metodologias que possam trazer o gosto pela aprendizagem desse conteúdo. Desse fato surgiu a questão norteadora desse trabalho, a saber: quais as contribuições que a literatura científica tem apresentado para o ensino de Trigonometria?

Como toda ciência ou ramo matemático, a Trigonometria “surgiu da necessidade de calcular distâncias, principalmente distâncias inacessíveis” (SILVA, 2020, p. 15). O termo Trigonometria é de origem grega e significa “medida dos

triângulos”. É salutar entendermos que alguns feitos, nos primórdios da humanidade, foram possíveis graças à Trigonometria. Antes de que fosse formalizada como um ramo específico, ela ajudou na construção de corpos gigantescos, a medir distâncias e alturas.

Assim, fica claro que, tendo em conta esses contextos, grande é a relevância da Trigonometria na evolução da humanidade. Desse modo, o objetivo geral desta dissertação foi investigar as contribuições da literatura científica para o ensino de Trigonometria. E, por sua vez, os objetivos específicos foram: a) destacar as contribuições da história da Matemática no ensino de Trigonometria; b) verificar os tipos de abordagens no livro didático sobre o ensino de Trigonometria; e c) identificar as produções (dissertações e artigos) da literatura científica que podem contribuir para o ensino de Trigonometria.

Nesse sentido, o tema escolhido para esta pesquisa deu-se em função da grande contribuição que a Trigonometria tem para o desenvolvimento da humanidade, “desde os tempos antigos e principalmente nos dias atuais” (OLIVEIRA, 2015, p. 17). Realizar esse olhar aprofundado do processo de evolução metodológica referente ao ensino da Trigonometria ao longo dos tempos trará substancial entendimento de como atuar perante as dificuldades encontradas em sala de aula para o desenvolvimento da disciplina escolar.

Portanto, optamos por uma revisão sistemática de literatura como metodologia aplicada em trabalhos acadêmicos e científicos. “As revisões sistemáticas são consideradas estudos secundários, que têm nos estudos primários sua fonte de dados” (GALVÃO; PEREIRA, 2014, p. 183). Dessa forma, quando nos deparamos com contradições no estudo de um tema, podemos superar essas imperfeições, fazendo um levantamento melhor qualificado sobre o assunto, isso pode ser superado através de uma revisão sistemática de literatura.

Todavia, há diferenças entre revisão de literatura e revisão sistemática de literatura. A primeira refere-se à busca, análise e descrição de um corpo do conhecimento na procura de resposta específica. Para Mendes e Pereira (2020, p. 201), a revisão sistemática é um tipo de investigação científica e tem como objetivo resumir toda a informação existente sobre o assunto.

O desenvolvimento deste trabalho foi dividido em sete capítulos, tencionando responder à questão norteadora, sendo esta introdução é o primeiro deles. No segundo capítulo, abordamos o ensino da Trigonometria, destacando como

se deu ao longo dos tempos, no mundo, até chegar ao Brasil. Nesse capítulo, promovemos uma discussão com alguns autores que defendem o uso da história da Trigonometria como aporte para compreensão dos conteúdos programáticos. Discutimos o processo de escolarização dos jovens brasileiros, ficando essa atribuição a cargo dos padres Jesuítas que mudaram para o Brasil no início da colonização. Também apresentamos as unidades temáticas presentes na BNCC (BRASIL, 2018), com suas habilidades para o ensino da Trigonometria.

No terceiro capítulo, versamos acerca dos conceitos teórico-didáticos do estudo da Trigonometria no triângulo retângulo, suas principais funções e propriedades. Já, no quarto capítulo, discorreremos sobre três livros didáticos e as metodologias neles expressas por seus autores. As considerações são feitas levando em conta a organização dos conteúdos, seu alcance social e a abrangência de suas aplicabilidades na vida profissional, ademais de observarmos se as sequências didáticas favorecem o aprendizado de conceitos posteriores.

No quinto capítulo desta dissertação, trazemos todo o arcabouço metodológico de como foram realizadas as pesquisas, considerando a quantidade de trabalhos verificados e os tipos de documentos. Com relação ao sexto capítulo, este ficou reservado para a análise dos resultados obtidos, mediante os trabalhos acadêmicos classificados, lidos e avaliados, em comparação com os livros observados.

Finalmente, concluímos nossas análises com as considerações finais, colocando nossas percepções a respeito da existência de um rol de procedimentos indicados e que podem ser usados por professores para diversificar suas aulas, tornando o processo de ensino de Trigonometria atrativo e eficiente, sobretudo para aqueles que despertam o gosto pela Matemática.

2 ENSINO DE TRIGONOMETRIA

A trigonometria é ramo da matemática que está muito presente no cotidiano das pessoas. Utilizada desde os princípios da humanidade, auxiliando na soluções de problemas relacionados a navegação, a medida de grandes distancias tem sido um dos pilares da matemática no desenvolvimento do conhecimento.

2.1 Definição

A Trigonometria é uma importante parte da Matemática tangente ao estudo das relações entre lados e ângulos dos triângulos. Seu surgimento reside em períodos antigos, não sendo possível mensurar datas com exatidão. Menções sobre rudimentos de Trigonometria são citadas no famoso Papiro de Rhind, no qual aparece “uma teoria de triângulos semelhantes” (BOYER, 1974, p. 9).

Brolezzi (1991) assevera que, apesar da espantosa duração das civilizações antigas, como o Egito, os registros intencionalmente históricos são ínfimos. O estudioso lembra o fato de que quando um faraó subia ao trono procurava apagar as memórias de seu antecessor, e de todas as inscrições que esse pudesse ter deixado. Provavelmente essas ações se davam pela perspectiva de tomar para si a autoria das obras.

No quesito matemático, existem registros que se conservaram até hoje, possivelmente por estarem associados às atividades práticas, os egípcios não se preocuparam com generalizações.

Cada problema era resolvido de um modo particular, não havendo, na verdade, métodos gerais de resolução de problemas. O que faziam era registrar a resolução de cada problema passo a passo, e é graças a isso que podemos conhecer agora como era a matemática da época (BROLEZZI, 1991, p. 8).

E foi a partir da decifração dos hieróglifos que os conhecimentos matemáticos chegaram até nós. Como toda ciência ou ramo matemático, a Trigonometria “surgiu da necessidade de calcular distâncias, principalmente distâncias inacessíveis” (SILVA, 2020, p. 15). O termo Trigonometria é de origem grega e significa “medida dos triângulos”, ou medida dos três ângulos.

Dessa maneira, a Trigonometria é a área da Matemática que estuda e analisa a ligação entre os lados dos triângulos e seus ângulos. Também é utilizada em outras áreas de estudo, como a Física, Química, Biologia, Astronomia, Medicina, Engenharia e outras tantas.

2.2 A Trigonometria ao longo dos tempos

A Trigonometria conhecida atualmente conjecturou-se de forma analítica no século XVII. Foi preciso desenvolver uma representação algébrica que retratasse de maneira didática “seu simbolismo algébrico satisfatório e que não existia antes dessa época” (IEZZI, 2004). Sobre as primeiras menções acerca do conhecimento da Trigonometria, essas podem estar situadas no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo (a.C.). Noções de Trigonometria são descritas na história egípcia, em documentos como o famoso Papiro de Rhind (cerca de 1700 a.C.).

Os egípcios são valorizados pelas famosas construções de suas pirâmides, que exigiam um grande conhecimento geométrico e trigonométrico. Esses conceitos matemáticos foram imprescindíveis na engenhosidade das obras. Ao erguer as pirâmides, propriedades geométricas eram empregadas, como manter uma inclinação constante das faces. Segundo Boyer (1974), presumivelmente, tenha sido esse o motivo que levou os egípcios a introduzirem um conceito equivalente ao da cotangente.

Como sabemos, atualmente, o coeficiente angular é a medida que caracteriza a declividade de uma reta relativamente ao eixo das abscissas (Ox) de um plano cartesiano. Essa mesma reta pode ser formada de acordo com um dos infinitos pontos ou pelo ângulo construído entre ela e o eixo x . Por tais motivos, o coeficiente da reta é dado por $m = \text{tg } \alpha$.

A palavra egípcia *sept* significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação aos eixo vertical para cada variação de unidade de altura. O *sept* correspondia ao termo que é usado pelos arquitetos para indicar a inclinação de uma parede. A unidade de comprimento vertical era o cúbito; mas para medir a distância horizontal a unidade usada era a “mão” que media um sétimo de cúbito. Portanto, o *sept* da face de uma pirâmide era o quociente do afastamento horizontal pelo vertical, o primeiro medido em mãos, o segundo em cúbitos. No Prob. 56 pede-se o *sept* de uma pirâmide que tem 250 cúbitos de altura e uma base quadrada de lado de 360 cúbitos (BOYER, 1974, p. 14).

O Papiro de Rhind foi encontrado contendo uma série de problemas da época. Certamente, essa lista de exercícios ou problemas deveu-se ao processo de escolarização dos jovens estudantes no ensino e aprendizagem de Matemática, nesse caso em especial, da Trigonometria. Artefatos históricos revelaram que os Egípcios e Babilônios (1500 a.C.) usavam relógio de sol, tendo a mesma lógica descrita no cálculo do *sept*.

Figura 1-O papiro Rhind ou Ahmes.



Fonte: www.matematica.br

Costa (1997) complementa o fato de os babilônios demonstrarem um certo interesse pela Astronomia. As fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano estão interligados aos triângulos. Foram exímios astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Nesse rumo, a Trigonometria era e é aplicada como auxiliar da Astronomia, em que certas funções eram e são usadas para determinar posições dos corpos celestes.

Consoante Boyer (1974), tal procedimento deve-se ao grego Hiparco de Nicéia (sex II a.C.), o mais famoso grego da antiguidade. Ainda naquela época, Ptolomeu apresentou sua tábua de cordas, contendo o cálculo do seno dos ângulos de 0° a 90° , ângulos que seriam empregados nos estudos astronômicos em que ele

estava engajado. Hiparco e Ptolomeu deram imensas contribuições para o desenvolvimento da Matemática e da Astronomia.

A Trigonometria, para Boyer (1974, p. 116), “não foi obra de um só homem – ou nação”. Contudo, com os gregos, encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos. O termo Trigonometria também significa medida das partes de um triângulo. Há incerteza quanto ao conceito da medida de ângulo ter surgido com os gregos ou com os babilônios. No entanto, por conta de suas afinidades comerciais, os árabes foram grandes divulgadores dos conhecimentos matemáticos.

O comércio romano com o sul da Índia possibilitou a disseminação de conhecimentos matemáticos babilônios e gregos. Na Índia, se originou a mais antiga tábua de senos, cujos inventores são desconhecidos. Por volta do ano 500, Aryabhata elaborou tabelas usando *jiva* no lugar de seno (ROSA, 2014, p. 6).

De acordo com Rosa (2014), os árabes hesitaram em reconhecer a Trigonometria de *jiva*, originária da Índia. O matemático árabe Al-Battani legitimou a Trigonometria hindu, levando seus compatriotas a assumissem-na. Os árabes trabalharam com senos e cossenos e, em 980, Abū'l-Wafā sabia que $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cdot \text{cos } x$, embora isso pudesse facilmente ter sido deduzido pela fórmula de Ptolomeu: $\text{sen } (x + y) = \text{sen } x \cdot \text{cos } y + \text{sen } y \cdot \text{cos } x$, fazendo $x = y$.

A palavra hindu *jiva* – meia corda, dada ao seno, foi traduzida para o árabe que chamou o seno de *jiba*, uma palavra que tem o mesmo som que *jiva*. Daí, *jiba* se tornou *jaib* nos escritos árabes. A palavra árabe adequada, que deveria ter sido traduzida, seria *jiba*, que significa a corda de um arco, em vez de *jaib*, pois foi o estudo das cordas de arcos numa circunferência que originou o seno (FELIX, 2011, p. 27).

E ainda,

O nome seno vem do latim *sinus*, que significa seio, volta, curva, cavidade. Muitas pessoas acreditam que este nome se deve ao fato de o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso. Mas, na verdade, *sinus* é a tradução latina da palavra árabe *jaib*, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta que não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. Trata-se de uma tradução defeituosa que dura até hoje. Quando os autores europeus traduziram as palavras matemáticas árabes em latim, eles traduziram *jaib* na palavra *sinus*. Em particular, o uso de **Fibonacci** do termo *sinus rectus arcus* rapidamente encorajou o uso universal de seno (FELIX, 2011, p. 28).

O erro da tradução, conforme Boyer (1974), é justificado pelo fato de que, em árabe e em hebraico, costuma-se escrever somente consoantes, ficando a cargo do leitor a colocação das vogais. Juba e *jaib* têm as mesmas consoantes e a primeira palavra era pouco utilizada.

Quando olhamos para a Europa do século XIV, encontramos relatos de que foram dados passos importantes no desenvolvimento da matemática.

O desenvolvimento da Trigonometria acontecia paralelamente ao desenvolvimento das funções. Nicole d'Oresme deu grandes contribuições à construção futura de uma nova tábua de senos. Em seu tratado "*Treatise on the configuration of Qualities and Motions*", introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre variáveis (BATISTA, 2018, p. 5).

Em consonância com Costa (1997), é nesse período que o alemão Johannes Muller Von Königsberg propõe sua obra *Tratado sobre Triângulos*. Muller era mais conhecido como Regiomontanus. Seus cinco livros contêm uma formulação completa da Trigonometria.

A invenção posterior dos logaritmos e alguns dos teoremas demonstrados por Napier (1550-1617) mostram que a Trigonometria de Regiomontanus não diferia basicamente da que se faz hoje em dia. No *Tratado* ele calculou novas tábuas Trigonométricas, aperfeiçoando a de senos de Purbach, e introduziu na Trigonometria europeia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas. Podemos dizer que foi ele quem lançou as fundações para os futuros trabalhos na Trigonometria plana e esférica (COSTA, 1997, p. 38).

Mesmo sabendo que o uso de letras para representar símbolos matemáticos é oriundo do século III a.C., foi perto do final do século XVI que se resumiu basicamente um receituário para resolver equações. É a partir desse período que o processo de ensino de certas equações toma métodos que podem ser compreendidos de forma sistemática.

2.3 O ensino de Trigonometria no Brasil

A educação no Brasil, como sabemos, desde o início da colonização esteve a cargo dos padres Jesuítas. "O primeiro grupo de jesuítas chegou ao Brasil em 1549, junto com o primeiro governador-geral, Tomé de Souza" (MIORIM, 1998, p. 14). E, a respeito do ensino de Matemática, na época do Brasil Colônia, contemplava-se a

escrita de números no sistema de numeração decimal e as operações com números naturais (MIORIM, 1998).

Nessa seara, segundo Evangelista (2014), após a saída dos Jesuítas, em 1772, deu-se importância ao ensino da gramática, do latim, grego e filosofia. A Matemática passou a contar com disciplinas de Aritmética, Álgebra e Geometria, com poucos alunos e dificuldades para conseguir professores. Com a Ascensão do Império, veio a Constituição de 1824, que afirmava sobre a gratuidade da instrução pública, lei que só foi estabelecida três anos depois. Aparecia, nessa lei, a separação entre escolas para meninos e meninas.

Mesmo sendo incapaz de atender toda a população, a escola secundária, no início do século XIX, estava a cargo dos “colégios, liceus, ginásios, ateneus, cursos preparatórios anexos às faculdades e seminários religiosos” (MIORIM, 1998, p. 16). Em razão disso, o Colégio Dom Pedro, idealizado por Bernardo Pereira, então Ministro do Império, inaugurado em 25 de março de 1838, tornou-se referência da Educação Pública e, dessa forma, “as matemáticas, que eram as disciplinas de Aritmética, Álgebra, Geometria, e, posteriormente, a Trigonometria” (MIORIM, 1998, p. 16) passaram a estar presentes em toda as séries do curso.

Evangelista (2014) salienta o fato de que a chegada da república não modificou o contexto, em que frequentar um curso secundário para uma elite privilegiada era preparar-se para a educação superior, figurando as disciplinas de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. Todavia, esse objetivo poderia ser conquistado através de exames preparatórios, pois a escolarização não refletia uma obrigatoriedade.

Já o século XX trouxe relevantes discussões acerca do ensino de Matemática e, em especial, ao de Trigonometria. Discutia-se se a independência do estudo desse conteúdo frente aos conceitos de Geometria e Álgebra era ou não viável. Sobre esse cenário, Silva (2013, p. 21) disserta:

Havia uma vertente que afirmava ser um erro muito grave separar a Trigonometria e a Geometria, por exemplo, e principalmente ao considerá-la uma parte independente no currículo da Matemática ensinada no Ensino Médio, enquanto outros afirmavam que a Trigonometria era um conteúdo específico que deveria ser abordado de forma isolada.

À vista disso, observando as colocações do pesquisador, percebemos que essas divergências de opiniões são recorrentes em dias atuais. Porém, é necessário

atentar ao fato de que os conteúdos estudados, ainda que para uma melhor compreensão, de maneira separada, são complementares. Entretanto, é pertinente fazermos um parêntese e refletirmos dentro do contexto histórico e atual que propõe um tratamento particular à Trigonometria que remonta ao século XVI. Naquele tempo,

O matemático francês François Viète considerava a Trigonometria um ramo independente da Matemática e em geral não se referenciava a meias cordas num círculo. No *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579), ele preparou extensas tabelas para as seis Funções Trigonométricas com ângulos aproximados até minutos. No *Variorum de rebus mathematicis* (1593), há um enunciado equivalente à Lei de Tangentes, essa já havia aparecido em 1583, em *Geometria rotundi*, do dinamarquês Thomas Fincke (SILVA, 2020, p. 30).

Mas, precisamente, voltando nosso olhar para o século XX, alguns estudiosos do começo do século entendiam que conceber a Trigonometria como um ramo particular da Matemática, assim como pensadores citados logo acima, proporciona um conhecimento mais específico sobre suas propriedades. Em contraponto a isso, Evangelista (2014) reporta que, por iniciativa do catedrático Euclides Roxo (1890-1950), do Colégio Dom Pedro, foi proposta a unificação de disciplinas como Geometria e Trigonometria.

Como podemos notar, a defesa de uma compactação no estudo dos conteúdos matemáticos tem sido defendida por educadores, a longas datas. Notadamente, quando consideramos as situações decorrentes da nossa vida cotidiana ou profissional, depreendemos que estamos vivenciando, em mesmos momentos, os vários conhecimentos que estudamos de modo isolado na escola ou academia. Provavelmente, suposição nossa, seja essa a defesa que educadores continuaram a fazer no século XX concernente à possibilidade de estarmos estudando os conteúdos de forma unificada.

Nesse sentido, entendemos que é possível fazer esse estudo separado e, posteriormente, unificá-lo nas situações em que uma propriedade trigonométrica é explicada ou compreendida pela explanação de outra propriedade, seja na Geometria, Álgebra ou outra compactação da Matemática. Para tanto, cabe aos professores terem os devidos domínios dos conhecimentos, a fim de poderem construir, com seus alunos, essa integração dos vários assuntos matemáticos que são postos nos livros isoladamente, mas que carregam peculiaridades complementares.

É indispensável compreendermos as particularidades e similaridades, afinal, muitos problemas de Trigonometria podem ser resolvidos de maneira rápida e

simples com conhecimentos de Geometria. E, em várias outras situações que envolvem relações trigonométricas, elementos algébricos e geométricos são evocados para dar sentido de ser das relações.

Por conta desses entendimentos duais, a produção de material referente aos conceitos trigonométricos ainda sofre influências desses diversos pensamentos:

No início, alguns livros abordavam a Trigonometria elementar e noções de Trigonometria esférica, e a proposta era o tratamento da Trigonometria como conteúdo isolado dos demais segmentos matemáticos e das demais áreas, não havendo uma preocupação com o desenvolvimento conceitual das noções básicas da Trigonometria (SILVA, 2013, p. 21).

O tratamento dado à Trigonometria, em muitos livros, pode parecer descontextualizado, quando não relaciona as propriedades com as aplicabilidades. Segundo Costa, Pequeno e Pereira (2019, p. 6), “há mecanismos que possibilitam uma compreensão de forma mais natural desse ramo matemático”. Para o autor, isso vai depender do modo como o conteúdo é apresentado em sala de aula e, nesse ponto, superam-se, pela dinâmica do educador, as lacunas deixadas nos materiais didáticos.

Distinguimos que existe um compartilhamento dos diversos ramos da Matemática para que quando um estudante se depare com uma situação problema que precise associar conteúdo trigonométricos com outros conteúdos matemáticos para resolvê-la, desenvolva uma operação assertiva. Outro fator importante que pode ser considerado na reflexão do processo de ensino da Trigonometria diz respeito às origens de suas descobertas.

[...] história da Matemática contribui para a construção do conhecimento do aluno e é reconhecida como parte da Educação Matemática. Dessa forma, ao se trabalhar o conteúdo de Trigonometria, utilizando-se a história da Matemática para contextualizar e motivar essa aprendizagem passa-se, então, a dar-lhe significado, possíveis aplicações. Dessa maneira, oportuniza-se ao aluno maior facilidade em compreender e utilizar este conteúdo em seu cotidiano (SIMIONATO; PACHECO, 2008, p. 7).

De fato, quando propiciamos o conhecimento da descoberta matemática, e, especialmente, da Trigonometria como elemento de construção social, mediante uma aplicabilidade histórica, como uma ferramenta que oportuniza ao homem, em algum momento da história, resolver situações reais, percebemos que, para o aluno, as propriedades matemáticas ganham significados. Nessa acepção, o estudo da

Trigonometria também é pré-requisito para que, perante suas propriedades, seja possível navegar em outros campos do conhecimento, tal qual exemplificam Costa, Pequeno e Pereira (2019, p. 9): “A maior aplicabilidade já feita do conhecimento da Trigonometria foi na navegação”.

Além disso, é importante dar ênfase ao estudo da Trigonometria, contudo, podemos fazer suas interlocuções com elementos matemáticos que são discutidos atinentes a outros conceitos e que traduzem os mesmos conhecimentos. A Trigonometria não é um conteúdo isolado da Matemática, “a aquisição do conhecimento por meio da história da Trigonometria possibilita o uso de diferentes recursos, fazendo um elo, sempre que possível, com outras disciplinas” (SIMIONATO; PACHECO, 2008, p. 5).

Em conformidade com Evangelista (2014), já na década de 50, havia certo desdém em relação ao ensino de Matemática. Novas direções seriam, então, debatidas por ocasião dos Congressos Nacionais de Ensino de Matemática no tocante aos métodos, treinamento de professores e currículos didáticos.

De acordo com Silva (2013), a Trigonometria ensinada ao longo do século XX apresentava conteúdo desprovido de fatos históricos. Abordavam-se noções básicas de Trigonometria esférica. Os conteúdos eram apenas conceituais, não havendo preocupação em fazer relações entre teoria e prática. Nessa perspectiva, corroborando com o pesquisador, encontramos esse arcabouço pedagógico presente em alguns livros utilizados no processo de ensino e aprendizagem de Trigonometria no Brasil, perpassando ao século XXI.

Silva (2013, p. 25) sugere que “o ensino da Trigonometria seja abordado com base em contextos históricos associados a questões socioeconômicas e culturais sobre o assunto, análise etimológica da palavra Trigonometria e de sua nomenclatura”, para que o estudante tenha consciência que todo cenário difundido referente à disciplina tenha funcionalidade e aplicabilidade. Em continuidade, para o Ensino Fundamental, Silva (2013) propõe que seja trabalhada a etimologia da palavra Trigonometria, para que o aluno entenda seu significado: do grego *trigonon* – triângulo – + *metron* – medida. Na sequência, o professor pode fazer a explanação do panorama histórico, com ênfase nos assuntos:

- seu surgimento e em quais contextos sociais, necessidades das civilizações antigas;

- explicar sobre a evolução da Trigonometria para a fundamentação teórica;
- fazer referência a datas importantes e mencionar as civilizações antigas como egípcios, babilônios, hindus e os nomes ligados às descobertas como Ptolomeu, Hiparco e outros.

Outrossim, consoante Gonçalves (2018, p. 28):

É importante enfatizar que trabalhar história da Matemática com os estudantes não é somente trazer fatos históricos isolados, nomes de matemáticos famosos ou fazer referência a datas. Mas sim pensar em proporcionar aos alunos experiências onde eles se envolvam e consigam fazer relações com os fatos ocorridos no passado e, se possível, aplicá-los no presente.

De fato, esse deve ser o propósito pelo qual se repercute, como meio de motivação, o conhecimento da história da Matemática. Supomos que quando o aluno conhece os significados e motivos pelos quais os fatos matemáticos foram ao longo dos tempos sendo desenvolvidos e suas finalidades, é plausível acreditarmos que passem a ver e usufruir dos conhecimentos de forma motivacional.

É significativo percebermos que os conceitos trigonométricos são tratados associados ao estudo da Unidades Temática e não de maneira isolada (BRASIL, 2018). A Geometria aparece no 8º ano do Ensino Fundamental, tendo como objeto do conhecimento “Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares”. Esse objeto tem como habilidades descrita na BNCC: construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de Geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares” (EF08MA15).

Isso posto, observando o modo como a BNCC dispõe sobre as Unidades Temáticas, verificamos que a classificação se dá em: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Portanto, a Trigonometria no Ensino Fundamental é o objeto do estudo da Geometria. Quando analisamos as Unidades Temáticas da BNCC para o Ensino Médio, notamos que os temas relacionados à Trigonometria são distribuídos dentro dessas temáticas. Em Números e Álgebra, temos a habilidade EM13MAT306, que é assim representada:

Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no

plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de Álgebra e Geometria (BRASIL, 2018, p. 546).

Possivelmente, o estudo de fenômenos periódicos são trabalhados no Ensino Médio regular como tópico de Trigonometria. No entanto, a BNCC não trata dessa forma isolada. Na Unidade Temática Geometria e Medida, destacamos a seguinte habilidade: “(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos” (BRASIL, 2018, p. 547).

Todavia, não podemos olhar para a BNCC como uma simplificação dos conteúdos programáticos existentes, mas pela associação que todos os conceitos apresentam uns em relação aos demais. Isso significa que as aprendizagens acerca dos diversos temas existentes não devem dar-se isoladamente, como se os conceitos trigonométricos fossem um ramo e os conceitos geométricos outro. Na realidade, esses conceitos se entrelaçam e se complementam para tornar o conhecimento matemático amplo e cheio de significados.

Nesse prisma, precisamos divisar os materiais escolares que temos e adaptá-los. É importante reconhecer que quando avaliamos grande parte dos livros didáticos utilizados no processo de ensino e de aprendizagem de Trigonometria, atualmente, estamos usando a mesma metodologia pensada em meados do século XX e reproduzida até os dias atuais.

Ademais, é elementar mencionar que a aprovação da (BNCC, ocorrida em 2018, ainda carece de toda uma estruturação física e pedagógica nas instituições de ensino, e os investimentos necessário para não acontecer de perder-se em normas e objetivos relevantes, sem coexistência com a realidade palpável.

A propósito dessas menções referendadas neste texto, possivelmente possamos encontrar mecanismos de superação mediante os diversos tratados científicos que ora poderão ser analisados e aproveitados pelos professores de trigonometria, fazendo com que haja a necessária contextualização como cotidiano prático, aplicações profissionais e relevância social.

2.4 Trigonometria no triângulo retângulo

A trigonometria surgiu em aproximadamente 300 a.C se constituindo uma ferramenta muito importante para a evolução da matemática. Os estudos relacionados aos triângulos retângulos são aplicados em diversas situações.

2.4.1 O ângulo (ou região angular)

O ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas são os lados do ângulo e a origem comum é o seu vértice.

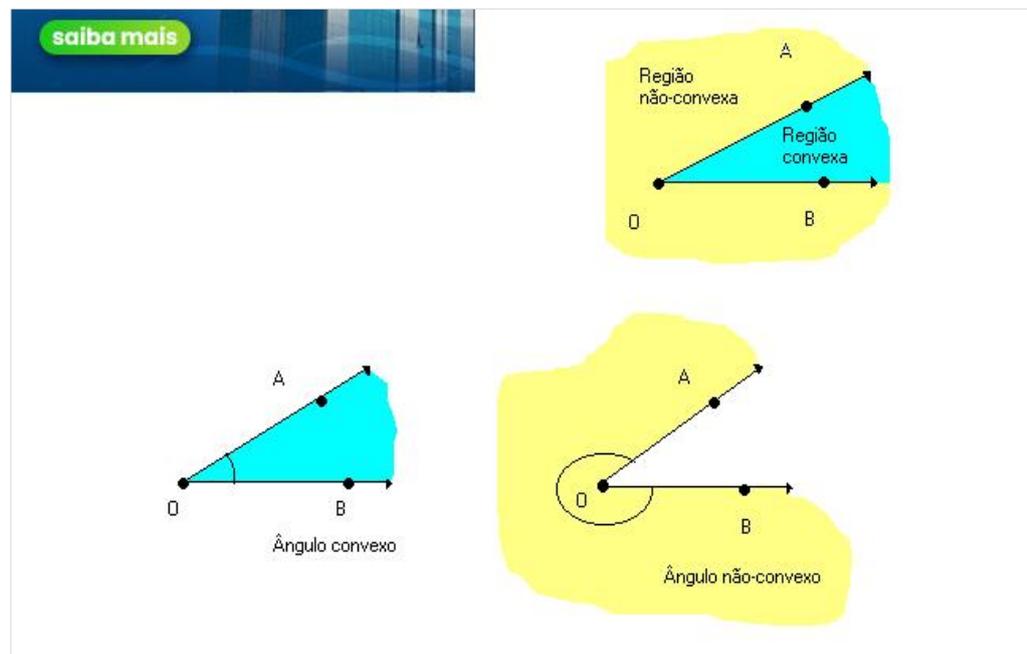
Definição.

Dadas, no plano, duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} e uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .

Um ângulo pode ser convexo ou não convexo.

De acordo com Dolce e Pompeu (2013), a região convexa fica no interior do ângulo. A figura abaixo se configuram as regiões convexas e não convexas.

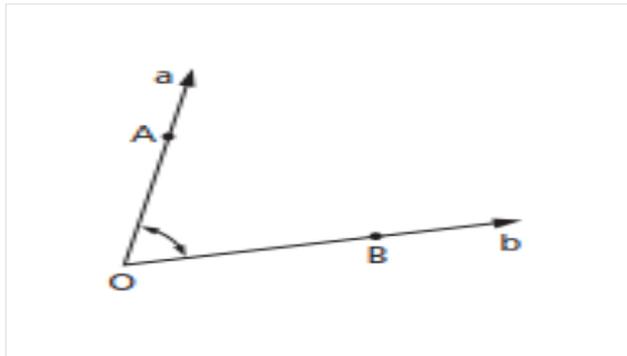
Figura 2 – Regiões angulares



Fonte: <https://www.somatematica.com.br>, acesso em 10 de junho de 2023.

Podemos representar um ângulo de várias maneiras. Se O é o vértice e se A e B são pontos quaisquer, um em cada lado, este ângulo será representado por $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$ (Figura 3). Se utilizarmos essa notação, a letra que designa o vértice deve aparecer entre as outras duas. Quando nenhum outro ângulo tem o mesmo vértice, torna viável usarmos apenas a letra que designa esse vértice e representá-lo apenas por \hat{O} .

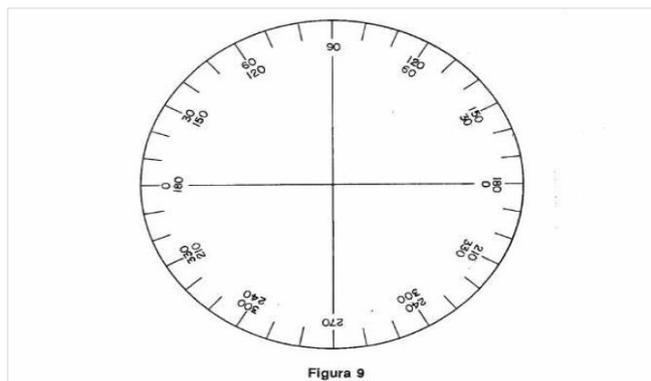
Figura 3 – Coordenadas polares



Fonte: Iezzi (2004).

Para medir um ângulo, utilizamos o transferidor, que nada mais é que um círculo graduado em uma unidade qualquer (Figura 2).

Figura 4 – Transferidor graduado em graus



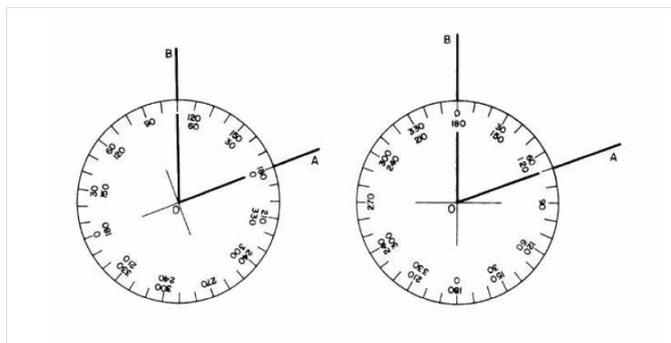
Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005).

A Figura 4 mostra um transferidor graduado em graus. O grau é a fração de $1/360$ do círculo.

Observamos, no transferidor, uma dupla escala. Isso ocorre porque o círculo pode ser percorrido nos dois sentidos. Quando escolhemos um deles (sentido anti-horário, que chamamos de positivo), dizemos que o círculo será orientado.

Notadamente, os matemáticos têm preferência pela orientação no sentido anti-horário, contudo, em outras atividades, como por exemplo na navegação aérea, o sentido adotado é o oposto. A figura abaixo (Figura 5) mostra o transferidor medindo ângulos. Se a medida de um ângulo \widehat{AOB} é θ , escrevemos simplesmente $\widehat{AOB} = \theta$

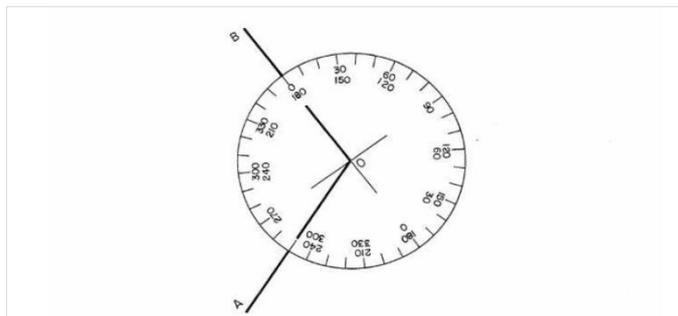
Figura 5 – Conjunto de transferidores medindo ângulos



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005).

As medidas demonstradas foram feitas com a escala colocada na região convexa do ângulo, $\widehat{AOB} = 250$. É conveniente, aqui, associarmos a cada ângulo uma segunda medida, obtida quando colocamos a escala na região não convexa (Figura 6).

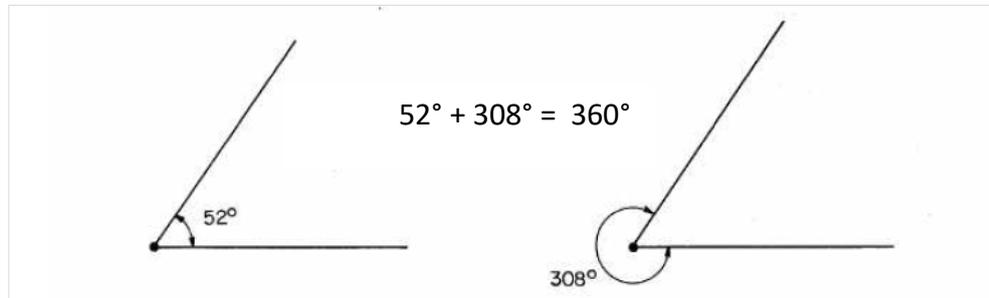
Figura 6 – Ângulo considerado na região convexa



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005).

Para que, em cada situação, não existam dúvidas sobre em que medida estamos, devemos adotar a seguinte convenção gráfica (Figura 7):

Figura 7 – Imagem mostrando a região convexa e não convexa



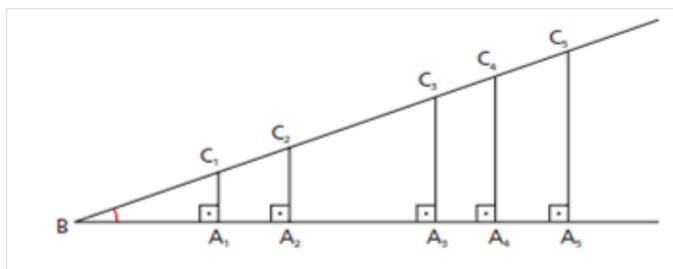
Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005).

2.4.2 Relações trigonométricas do triângulo retângulo (Funções Trigonômicas do ângulo agudo)

Nesta seção, definiremos os conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo tal que $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ (GAIESKI, 2014, p. 19).

Dado um ângulo agudo θ , marcamos sobre um de seus lados os pontos A_1, A_2, A_3 e conduzimos, por eles, as perpendiculares $\overline{A_1C_1}, \overline{A_2C_2}, \overline{A_3C_3}$, em relação aos segmentos $\overline{BA_1}, \overline{BA_2}, \overline{BA_3}$ (Figura 8) (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 15).

Figura 8 – Intersecção de retas paralela por retas transversais



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005).

Os triângulos $BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3$, etc. são todos semelhantes entre si.

Então:

$$1^{\text{o}}) \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \dots$$

(fixado agudo, θ o cateto oposto a θ a hipotenusa são diretamente proporcionais).

Essa relação depende apenas do ângulo θ e não dos comprimentos envolvidos. Convém darmos um nome para essa função de θ assim construída e definirmos para:

$$0^\circ < \theta < 90^\circ,$$

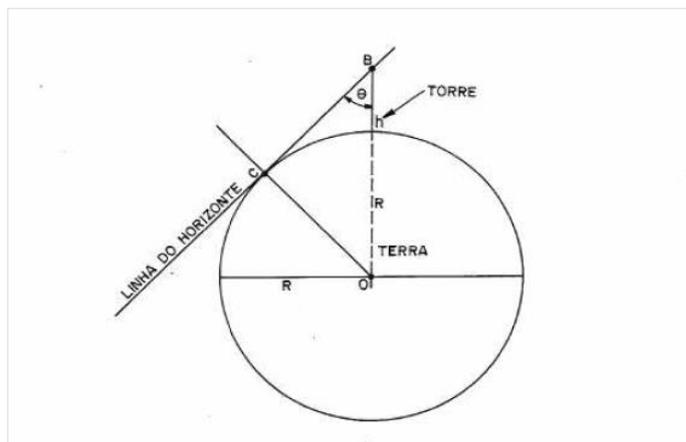
$$\frac{A_1C_1}{BC_1} = \text{sen}\theta, \text{ que se lê seno de } \theta.$$

Conforme as indicações de Carmo, Morgado e Wagner (2005), essa função é muito importante. Embora sua simplicidade, podemos resolver situações complexas. Suponhamos que se queira medir o raio da Terra, um comprimento geralmente inacessível às medidas diretas. Um processo usado desde os gregos é o seguinte: subimos a uma torre de altura h e medimos o ângulo θ que faz a reta BC do horizontal de B com a vertical BO do lugar. Pela figura a seguir (Figura 9), vemos que:

$$\frac{R}{R+h} = \text{sen } \theta, \text{ onde } R \text{ sen } \theta + h \text{ sen } \theta = R, \text{ isto é:}$$

$$R = \frac{h \text{ sen } \theta}{1 - \text{sen} \theta}$$

Figura 9 – Esquema para medir o raio da Terra



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005).

Se tivermos as medidas h e θ (que são acessíveis) e uma tabela de senos, conseguimos, então, calcular o raio da Terra R .

Nesse iname, voltando aos triângulos semelhantes da Figura 8, vemos que as relações:

$$2^{\circ}) \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \dots$$

(fixado agudo, θ o cateto adjacente a θ e a hipotenusa são diretamente proporcionais).

$$3^{\circ}) \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \dots$$

(fixado agudo, θ os catetos oposto e adjacente a θ são diretamente proporcionais)

Em que $A_1C_1 = \text{medida de } \overline{A_1C_1}$,

$BC_1 = \text{medida de } \overline{BC_1}$,

$A_2C_2 = \text{medida de } \overline{A_2C_2}$, etc.

Verificamos que as relações acima não dependem do tamanho dos triângulos ΔBA_1C_1 , ΔBA_2C_2 , ΔBA_3C_3 , mas dependem somente do valor do ângulo agudo θ .

Estabelecemos, dessa forma, as funções para $0^\circ < \theta < 90^\circ$:

$\frac{BA_1}{BC_1} = \cos \theta$, $\frac{A_1C_1}{BA_1} = \operatorname{tg} \theta$, que se chamam cosseno de θ e tangente de

θ , respectivamente.

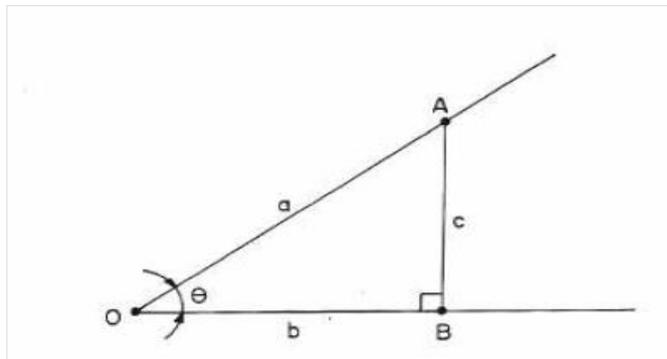
Essas funções são chamadas Funções Trigonômicas e não são independentes. Duas relações aparecem naturalmente:

$$1) \quad \operatorname{Sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1 \text{ e}$$

$$2) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}$$

Para demonstrá-las, consideramos um ângulo θ de vértice O e um triângulo OAB retângulo em B, como representamos a seguir (Figura 10):

Figura 10 – Imagem base para demonstração da relação fundamental da Trigonometria



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005).

Então, fazemos $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ e $\overline{AB} = c$. Aplicando o teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

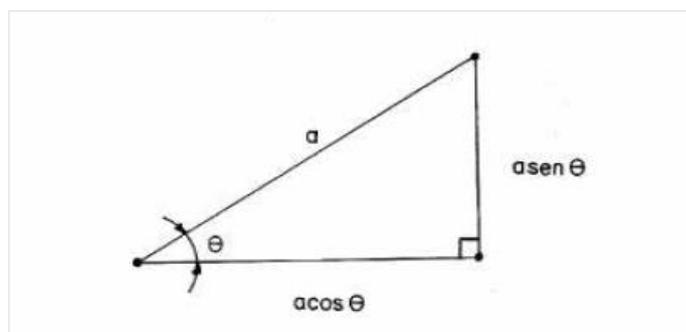
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

e

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{b}{c} = \operatorname{tag} \theta$$

Com $\sin \theta$, $\cos \theta$ e $\operatorname{tg} \theta$ são números positivos, vemos, ainda, que se identificamos uma dessas funções de θ , podemos calcular as outras duas. Também, se um triângulo retângulo tem um ângulo θ e hipotenusa de comprimento a , os catetos desse triângulo medem $a \cdot \sin \theta$ (o cateto oposto a θ) e $a \cdot \cos \theta$ (o cateto adjacente a θ) (Figura 11).

Figura 11 – Imagem resultante da demonstração da identidade trigonométrica



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005).

As proposições a seguir nos ajudam a organizar uma primeira tabela de senos.

Proposição 1. Se dois ângulos α e β são complementares ($\alpha + \beta = 90^\circ$)

Fundamental considerarmos que, Ângulos Complementares são ângulos cuja soma é igual a 90 graus. Por exemplo, 70° e 20° são complementares porque $70^\circ + 20^\circ = 90^\circ$. Sabendo que dois ângulos são complementares, é possível encontrarmos a medida de um deles a partir da medida do outro. Já Ângulos Suplementares são ângulos cuja soma é igual a 180 graus. Por exemplo, 150° e 30° são suplementares porque $150^\circ + 30^\circ = 180^\circ$. Desse modo, voltando aos caso dos Ângulos Complementares, levamos em conta que se, os triângulos retângulos contem seus ângulos agudos com medidas menores que 90° . Nesse caso, podemos considerar que: dado um Triângulo retângulo ABC, conforme (figura 11), temos as relação: $\alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 90 \rightarrow \beta = 90 - \alpha$

Ora, podemos determinar, pelas razões trigonométricas que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a} \text{ e } \operatorname{cos} \beta = \operatorname{cos}(90 - \alpha) = \frac{b}{a}$$

e ainda $\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen}(90 - \alpha) = \frac{c}{a} \text{ e } \operatorname{cos} \alpha = \frac{c}{a}$

Podemos concluir então que sendo α e β dois ângulos complementares, O cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu completar). Dessa relação podemos aferir que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$.

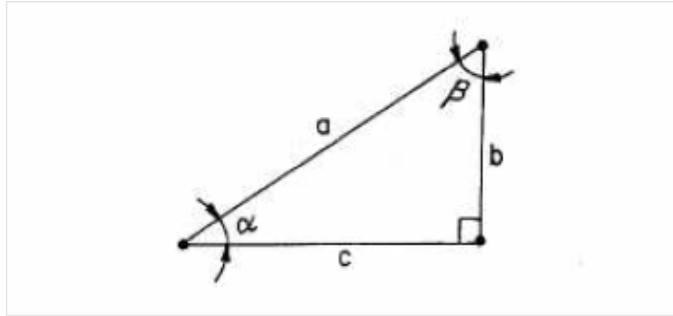
Demonstração: aplicando as definições no triângulo da figura anterior, temos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a} = a \cdot \frac{\operatorname{cos} \beta}{a} = \operatorname{cos} \beta$$

e

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c} = \frac{b/b}{c/b} = \frac{1}{c/b} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

Figura 12 – Triângulo resultante das demonstrações trigonométricas



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005).

Se conseguirmos calcular as Funções Trigonômicas de ângulos do intervalo $(0^\circ, 45^\circ)$, passamos a conhecer imediatamente as funções dos Ângulos Complementares, que estão no intervalo $(45^\circ, 90^\circ)$ e vice-versa.

Nosso próximo objetivo é mostrar que se θ é um ângulo do intervalo $(0^\circ, 45^\circ)$ cujas funções são conhecidas, podemos calcular as funções dos ângulos 2θ e $\theta/2$. Com isso, a partir das funções de um ângulo, conseguimos calcular as de muitos outros. Por exemplo, com as funções de 18° , obtemos as de $72^\circ = 90^\circ - 18^\circ$, $9^\circ = 18^\circ/2$, $36^\circ = 2 \cdot 18^\circ$, $54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$ etc.

Proposição 2.

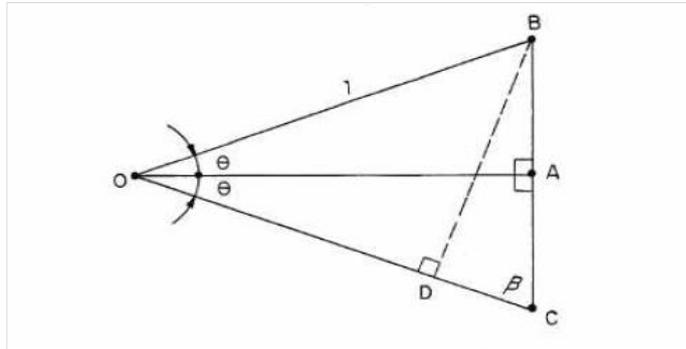
(a) Se $\theta \in (0^\circ, 45^\circ)$, então, $\text{sen } 2\theta = 2 \cdot \text{sen } \theta \cos \theta$

(b) Se $\theta \in (0^\circ, 45^\circ)$, então, $\text{sen } \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$

Essas fórmulas são importantes para resolvermos situações que fogem aos conceitos costumeiramente assimilados nos curso de Trigonometria, quando, na maioria dos exercícios praticados, utilizamos os ângulos notáveis $(30^\circ, 45^\circ$ e $60^\circ)$. Sabemos que grande parte dos problemas que envolvem cálculos de distância é resolvida usando a Trigonometria. Quando nos deparamos com um ângulo que esteja entre esse ângulos notáveis citados, precisamos de uma alternativa viável.

Para demonstrar, empregaremos a figura a seguir (Figura 13).

Figura 13 – Imagem de apoio para a demonstração que segue



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005).

Nesse caso, se atentarmos à figura formada por dois triângulos OAB e OAC, retângulos em A, iguais, tais que $\overline{OB} = \overline{OC} = 1$ e $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \theta$. Nessas condições, temos $\overline{AB} = \overline{AC} = \text{sen } \theta$ e $\overline{OA} = \text{cos } \theta$. Traçando BD perpendicular a OC, temos, ainda, $\overline{BD} = \text{sen } 2\theta$. Ora, o dobro da área do triângulo OBC é igual a $\overline{BC} \cdot \overline{OA}$ e, também, igual a $\overline{OC} \cdot \overline{BD}$. Portanto, $\text{sen } \theta \text{ cos } \theta = 1 \text{ sen } 2\theta$, o que manifesta a primeira parte da proposição.

Para mostrarmos a segunda parte, notemos que $\overline{OD} + \overline{DC} = 1$, ou $1 \cdot \text{cos } 2\theta + \overline{BC} \cdot \text{cos } \beta = 1$. Como $\overline{BC} = 2 \cdot \text{sen } \theta$ e $\text{cos } \beta = \text{sen } \theta$ (θ e β são complementares), encontramos $\text{cos } 2\theta + 2 \text{sen } \theta \cdot \text{cos } \theta = 1$ ou $\text{sen } \theta = \sqrt{\frac{1 - \text{cos } 2\theta}{2}}$.

Sendo assim, substituindo 2θ por θ e, conseqüentemente, θ por $\theta/2$, obtemos a relação procurada.

3 A TRIGONOMETRIA PRESENTE EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS

O livro é um instrumento que colabora no processo de acessibilidade à educação. Ajuda a responder indagações, nortear caminhos. É ponto de apoio na construção dos saberes, em que, sem sua presença, dar-se-ia, provavelmente a existência de possíveis lacunas na organização e formalização do conhecimento.

3.1 Definição

O livro didático é um instrumento pedagógico de grande ajuda para educadores na sua organização curricular. Como afirma Brandão (2013), o livro didático é útil para professores e alunos na prática do ensino e nas resoluções de exercícios. Com o apoio de um livro para organizar suas atividades, o professor evita interrupções ou omissão de sequências de conteúdos que devem ser apresentados de forma ordenada, favorecendo com isso um processo de ensino eficaz. Por ser um suporte teórico, o livro didático é essencial à prática pedagógica, principalmente quando traz, dentro da própria obra, todos os conceitos relacionados a determinado assunto, oportunizando a elaboração e desenvolvimento de um eficiente projeto pedagógico.

Podemos considerar, como apontam Santos e Martins (2011), a circunstância pela qual, ao longo dos anos, o livro didático tenha se constituído em uma ferramenta pedagógica que norteia e aperfeiçoa a prática pedagógica dos educadores. De fato, não é possível construirmos um itinerário formativo sem que haja uma base de apoio de ementas pré-estabelecidas nos livros didáticos referentes ao tema em estudo. O livro é um aliado do profissional, pois serve como instrumento de composição da aprendizagem dos diversos alunos.

No entanto, é imprescindível refletirmos sobre o fato de o livro didático ser um suporte, na maioria dos casos, definitivo e único a ser seguido, assumindo, assim, um papel onipotente. Cabe, portanto, ao professor educador buscar aprimorar sua atuação de forma criativa, sugerindo e diversificando sua atuação profissional, aproveitando todo o conteúdo sistematizado no livro didático, mas proporcionando ao grupo de estudantes trabalhos extras ou alterações que beneficiem e corroborem para o processo de ensino e aprendizagem.

Nesse rumo, sua função é de auxiliar e orientar no aprendizado dos alunos, os livros carregam informações das mais diversas, alcançado uma grande quantidade de estudantes. Os livros didáticos devem ser entendidos enquanto veículos. Como discorre Brandão (2013, p. 61), “devemos dar importância a linguagem [...] correta”, onde através de seus textos se expressam importantes aspectos do processo de circulação de um campo de conhecimento no ambiente escolar.

Para muitos estudiosos, há uma grande preocupação com a metodologia de ensino existente nos livros didáticos, na atualidade. Dante (*apud* BRANDÃO, 2013, p. 43) alude ao fato de que por ser o número de afazeres do professor extenso, quando ele dispõe de um bom livro didático, adquire potencial para realizar enfoques mais adequados. Ainda assim, é basilar refletir que, de modo geral, em alguns livros didáticos, são apresentados os diversos conceitos trigonométricos com suas fórmulas e uma série de exercícios repetidos que realçam a aplicação das fórmulas, levando os alunos a memorizarem mecanicamente.

Por outro lado, diante das dificuldades educacionais encontradas no Brasil, em especial a educação pública, conclui-se que o livro didático é muito importante para a educação brasileira, podendo ser decisivo para a qualidade do aprendizado, visto que, em particular os alunos, em alguns casos, só contam com ele para o seu aproveitamento. E, na grande maioria dos casos, é o único instrumento que professores e alunos têm para assegurar a reprodução e fixação dos conhecimentos necessários.

Dessa forma, ponderando sobre os obstáculos que a educação brasileira tem vivenciado nos últimos anos, como abandono escolar, reprovação e dificuldades em aprendizagem, muito temos pensado em programas e projetos direcionados para que o processo de ensino de matemática seja coerente com a evolução da humanidade em tempos atuais. Brandão (2013) destaca a contextualização como função relevante dos livros didáticos.

Nesse âmbito, a fim de realizarmos a análise, escolhemos três obras, sendo uma parte integrante do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLD), indicada como sugestão em escolas públicas, e outras duas conceituadas, utilizadas no Ensino Médio.

Os textos analisados estão representados no quadro a seguir (Quadro 1.)

Quadro 1 – Relação dos livros escolhidos para análise

Ano	Título	Autor(es)	Editora	Volume
2020	Matemática Ensino Médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias	Josá Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Junior, Paulo Roberto Câmara de Sousa	FTD	7
2004	Fundamentos de matemática Elementar: Trigonometria	Gelson Iezzi	Atual	3
2005	Trigonometria e Números complexos	Manfredo Perdigão do Carmo. Augusto César Morgado Eduardo Wagner	SBM	Único

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em nossas observações a respeito dos livros elencados, levamos em conta o Livro A como sendo *Matemática Ensino Médio*, o Livro B *Fundamentos de Matemática Elementar*, e Livro C o exemplar *Trigonometria Números Complexos*.

Nossas análises buscam verificar a organização estrutural e metodológica dispostas nos livros didáticos, como essas metodologias podem motivar o interesse de estudantes e professores no trato com os temas trigonométricos relacionados e, quais as manifestações de aplicabilidade em situações de cotidiano ou científicas que demonstrem a importância e necessidade do estudo da trigonometria. Verificamos como se dá a distribuição dos tópicos e exercícios para entendermos em que medida esses componentes estão ajustados em referência a distribuição didática dos assuntos, em ordem crescente de dificuldades na apresentação dos contextos, para que os estudantes possam ir assimilando as novas aprendizagens baseadas em situações anteriores que, influenciem na motivação e no significado do tema estudando.

3.2 Nível da organização estrutural

3.2.1 Livro A

Os autores abordam o conteúdo de Trigonometria num volume específico da coleção (analisamos apenas o volume que trata do tema de nossa pesquisa),

indicado para ser utilizado no terceiro ano do Ensino Médio. Em virtude da pandemia do Corona vírus, ocorrida nos anos de 2020-2021, esse material somente será adotado em nos terceiros anos de Ensino Médio em 2024.

Os autores introduzem o tema Trigonometria no triângulo, explanando sobre o significado dos termos que compõem a palavra Trigonometria, fazendo menção a alguns fatos históricos que deram origem aos conceitos trigonométricos.

Figura 14 – Texto introdutório, dando entrada ao estudo das razões trigonométrica no triângulo retângulo

Introdução

O significado da palavra trigonometria, do grego *trigonon*, "triângulo", e *metron*, "medida", remete ao estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

A origem da Trigonometria é incerta. No entanto, é possível afirmar que alguns de seus recursos já eram aplicados por antigas civilizações do Mediterrâneo e pela civilização egípcia. Além disso, o desenvolvimento dessa área da Matemática teve grande progresso com as necessidades geradas pelas navegações, Astronomia e Agrimensura.



- Tábua Plimpton 322, uma das tábuas com escritas cuneiformes, oriunda da civilização babilônica e datada de cerca de 1700 a.C. Essa tábua contém uma tabela de ternas pitagóricas, ou seja, conjuntos de três números naturais que são medidas dos lados de um triângulo retângulo. A civilização babilônica adotava a base sexagesimal, utilizada até hoje na medida de ângulos, em graus, e na medida de tempo, em hora, minuto e segundo.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020, p. 54).

Em seguida, os autores propõem uma situação contextualizada em que fazem referência à existência do Estatuto da Criança e Adolescente (ECA), que estabelece, entre outras coisas, o direito à educação para todos, sem discriminação. Nesse propósito há a inclusão de pessoas com deficiência, sobretudo as que fazem uso de cadeira de rodas, para que se reflita acerca da necessidade das construções das rampas nas escolas ou outras instituições. Dentro dessa conjuntura social acontece a introdução dos conceitos trigonométricos, mediante a construção de rampas que apresentam suas formas triangulares.

No livro, os autores buscam informar ao leitor quais são as competências gerais e específicas presentes na BNCC para o conteúdo em destaque. Como podemos observar (Figura 14), essas competências abrangem as habilidades que devem ser adquiridas pelos estudantes com o conceito desenvolvido no capítulo.

Figura 15 – Competência da BNCC para Trigonometria no retângulo



Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020, p. 52).

Os autores explanam a parte teórica de maneira simplificada, não obstante, fazendo sempre correlações com a atualidade, enfocando aplicativos, tecnologia da informação e conexões com diversas atividades. Como essas explicações são minimizadas para um estudante com pouca experiência, que precisa aprofundar tais conhecimentos, outro material de apoio seria essencial. Os autores apresentam algumas demonstrações, sem, no entanto, mencionar todos os pré-requisitos necessários para uma melhor compreensão das propriedades.

3.2.2 Livro B

Neste material, o autor dispõe todo o conteúdo de Trigonometria no volume 3. Todavia, é um excelente material para aprofundamento teórico e que foi utilizado por este autor em seus anos de Estudo de Graduação em Ciências, com habilitação em Matemática, cursada na Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA).

Segundo o autor, o objetivo deste material é fornecer ao estudante secundarista um embasamento teórico básico sobre o tema da Trigonometria, levando-o, além de sua visão global sobre o assunto, a adquirir elementos suficientes para que possa cursar uma graduação na disciplina de Matemática ou área correlata de forma eficiente. Por isso, os autores procuram sempre expor as proposições e os teoremas acompanhados das respectivas demonstrações.

3.2.3 Livro C

Neste livro, os autores trazem uma abordagem, em seus primeiros capítulos, voltada para conceitos trigonométricos, desde a construção do ângulo até

as equações trigonométricas. Referem o entendimento pelo qual equações trigonométricas ajudam na solução de problemas de Geometria nos casos em que a incógnita escolhida é um ângulo. Buscam enfatizar na obra que, quando se conhece a hipotenusa de um triângulo retângulo e a soma dos catetos, para calcular algum outro elemento dessa figura, é possível colocar x para um dos ângulos, logo, se tem $\sin x + \cos x = s/a$. É a partir de exemplos como este que os autores demonstram os métodos usados para resolver as equações mais comuns em Trigonometria. Eles também explicam como as Funções Trigonométricas estão definidas para ângulos do intervalo $(0^\circ, 90^\circ)$ e as leis do seno e cosseno.

Esse livro foi elaborado para ser utilizado como suporte para aperfeiçoamento de professores. Os autores tratam Trigonometria e Números Complexos de maneira independente, posto que esses dois temas, nos cursos de Educação Básica, são estudados separadamente e em séries distintas. Mesmo que no estudo dos Números Complexos se aborde a forma trigonométrica para representar os complexos ou calcular suas potências e raízes, os alunos, ao estudarem esse assunto, assimilam quase que instintivamente, sem buscar relações com os conceitos estudados no curso de Trigonometria.

Neste livro, foi oferecida, pelos autores, uma variedade de conceitos abstratos, tendo como meta servir de modelos a situações concretas. No capítulo 9 do livro há menção à história da Trigonometria, enfatizando o fato da Trigonometria haver surgido devido às necessidades da Astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, para calcular o tempo, e para ser empregada na navegação e na Geografia.

Por fim, os autores expõem de modo abrangente as relações trigonométricas no triângulo retângulo, apresentando, conjuntamente com essas associações, a chamada relação fundamental da Trigonometria, ângulos a partir da relação fundamental na circunferência trigonométrica de raio unitário.

3.3 Distribuição dos conteúdos

3.3.1 Livro A

Neste livro, os conteúdos estão dispostos de forma sequencial lógica, isto é, apresentam uma revisão sistemática sobre proporcionalidade e semelhança de triângulos e, relações métricas no Triângulo Retângulo, assuntos que são pré-requisito

para a introdução das razões trigonométricas. Seguem as disposições dos conteúdos de acordo com o que está estabelecido na grande maioria da literatura.

Entretanto, é importante salientar a simplicidade com que os conteúdos aparecem ao longo do texto. Os autores fornecem uma sequência de tópicos básicos que os alunos precisam adquirir para prosseguirem em seus estudos. Notadamente, existe uma série de lacunas, e só consultando outros documentos um professor ou estudante que queira aprofundar suas habilidades teóricas no tema terá.

3.3.2 Livro B

O autor desse livro estrutura o conteúdo em uma ordem sequencial lógica, isto é, como já mencionado anteriormente, temos a revisão da Geometria como pré-requisito, o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo e posteriormente na circunferência trigonometria, seguindo para relações fundamentais da trigonometria.

À medida que adentramos aos capítulos, surgem novos elementos, levando o leitor a fixar novos conceitos e utilizando conceitos anteriores para poder compreender e reter propriedades presentes. O autor procura direcionar a sequência ao longo do texto, ressaltando a teoria, seguida de exercício.

3.3.3 Livro C

Com relação a este material, percebemos claramente que os autores organizaram os conteúdos de acordo como as sequências dos demais livros, sejam eles no Ensino Médio ou Ensino Superior. As sequências teóricas estão bastante coerentes, baseada na ordenação descrita na organização didática presente na literatura estudada nas escolas brasileiras, porém, em sua totalidade, em forma de abstrações matemáticas, não conectando com situações de cunho social ou atividades práticas.

O material é primordial para o aprofundamento teórico, cabendo ao estudioso já contar com um certo grau de afinidades com as propriedades trigonométricas.

3.4 Exercícios

3.4.1 Livro A

Neste aspecto, os autores deixam uma lacuna relevante. Mesmo apresentando, nas atividades, figuras e elementos que comprovem que a Matemática é uma ciência que tem aplicações nas situações do cotidiano; a lista de exercícios é simplificada, para proporcionar uma maior quantidade de resoluções.

Outra questão relaciona-se ao nível de evolução das atividades prescritas pelos autores. Os exercícios, em geral, não seguem uma sequência crescente de dificuldades, o que faz com que o professor precise indicar novos caminhos em quase todas as questões.

Entendemos que o professor é um mediador da aprendizagem. Todavia, constatamos que ainda, em nossas escola, os professores precisam explicar através de exemplos os algoritmos necessários para que o aluno desenvolva suas habilidades ao resolverem situações problemas. Além disso, quando as questões ou atividades que são indicadas nos livros obedecem a um certo grau de evolução, é possível que os alunos superem seus medos e desenvolvam suas capacidades, podendo encontrar caminhos, mediante exemplos anteriores que os levem aos resultados esperados.

Na sequência, mostramos como aparecem alguns exercícios propostos pelos autores nesta obra.

Figura 16 – Atividade proposta no livro

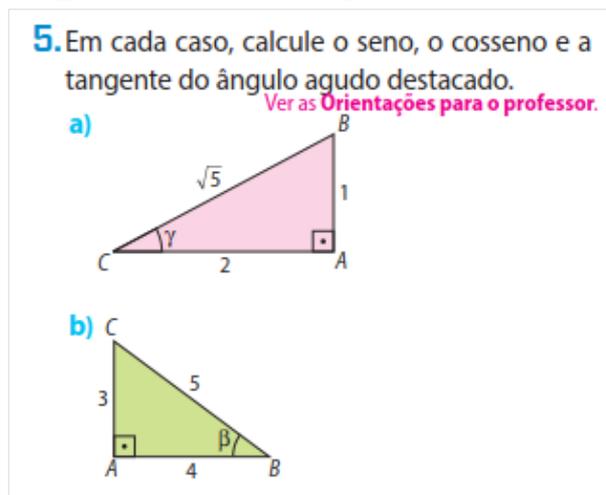
2. Considere duas pessoas a 4 km de distância uma da outra, localizadas em dois pontos A e B no solo. A pessoa no ponto A , olhando na direção de B , avistou, segundo um ângulo de 50° (com a horizontal), um helicóptero. No mesmo instante, a pessoa no ponto B , olhando na direção de A , avistou o mesmo helicóptero segundo um ângulo de 45° (com a horizontal). Aproximadamente, a que altura do solo o helicóptero estava naquele momento? Considere $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ e $\operatorname{tg} 50^\circ \approx 1,19$.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020, p. 61).

Notamos que os autores, ao proporem a segunda questão, esperam que o estudante já tenha adquirido as habilidades básicas para reconhecer o seno, o cosseno e a tangente como razões entre os lados de um triângulo retângulo e resolver problemas envolvendo razões trigonométricas e, por conseguinte, conheçam o descritor.

Já a quinta questão da lista parece ter um grau de dificuldade menor em sua resolução, dado que, em primeiro momento, foram praticados exercícios para determinar os valores de seno, cosseno e tangente, aplicando a relação e usando como base uma figura. Dessa forma, distinguimos que a quinta questão deveria aparecer antes da segunda, na lista de exercícios.

Figura 17 – Questão presente na lista de exercícios



Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020, p. 61).

3.4.2 Livro B

O autor apresenta uma concepção de distribuição das atividades propostas, partindo sempre de problemas simples e tentando chegar em questões que envolvam outros assuntos já vistos. Na obra, verificamos exercícios resolvidos em meio a exercícios propostos, com a pretensão de dar explicação sobre alguma novidade que aparece. Ao final do volume, os autores indicam as respostas dos

exercícios propostos, dando segurança aos resultados positivos e encorajando os negativos na busca de superação.

Compreendemos que, quando efetuamos uma resolução e, olhando o resultado ao final do livro, coincidimos com a resposta correta, tornamo-nos mais otimistas em partir para outros exercícios com graus de dificuldades maiores. Por outro lado, quando não encontramos as respostas que criamos ser correta, temos, então, a oportunidade de reconstruir os caminhos e fazer de novo.

As figuras a seguir (Figura 17 e 18) trazem a visualização dos exercícios sendo aprimorados para que o aluno seja capaz de responder os mais difíceis perante o desenvolvimento e resolução de outros menos difíceis.

Figura 18 – Exercício sobre transformação de ângulos

27. Exprima 225° em radianos.

Solução
 Estabelecemos a seguinte regra de três simples:

$$\begin{array}{l} 180^\circ \longrightarrow \pi \text{ rad} \\ 225^\circ \longrightarrow x \end{array} \Rightarrow x = \frac{225 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

Fonte: lezzi (2013, p. 28).

Nesse exemplo, o autor sugere a transformação do ângulo dado em graus para o ângulo expresso em radianos, estabelecendo um algoritmo simples de resolução por proporção. Já, na próxima questão, existe uma maior complexidade, pois os ângulos são dados em graus, minutos e segundos. O passo requer uma transformação preliminar para que se possa, novamente, utilizar o algoritmo aplicado na questão anterior.

exemplos sigam as situações mais elementares dos conceitos trabalhados, evoluindo para situações de dificuldades média e alta.

A lista de exercícios ao final de cada capítulo é bastante significativa em quantidade, o que pode, sem dúvida, levar o aluno a desenvolver com bastante eficácia e embasamento teórico dos conhecimentos adquiridos. No exemplo (Figura 19) referente à primeira lista de exercícios, visualizamos uma panorâmica deste fato.

Figura 20 – Exercício proposto para fixação do conteúdo

Exercícios

1. Para medir ângulos menores que um grau, são utilizadas duas sub-unidades, definidas da seguinte forma:
 minuto: $1' = \frac{1}{60}$
 segundo: $1'' = \frac{1}{60}$.

Neste sistema (sexagesimal), se um ângulo é igual, por exemplo, a 12 graus mais 35 minutos mais 42 segundos, escrevemos sua medida como $12^{\circ}35'42''$. Efetue as operações:

a) $34^{\circ}44'32'' + 17^{\circ}29'51''$
 b) $64^{\circ} - 22^{\circ}10'40''$
 c) $5^{\circ}40'32'' \times 5$
 d) $26^{\circ}43'12'' \div 3$

Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005, p. 21).

Observamos, para esse primeiro exercício proposto no final do capítulo, há um grau de dificuldades bastante elementar. Obviamente, esse livro é empregado em cursos preparatórios para professores. O seu estudo no Ensino Médio requer um nível de proficiência básico. Olhando, então, como está estruturado o segundo exercício da lista, entendemos que os autores promovem uma ascensão ao grau de dificuldades que essa atividade possa conter.

Como já esclarecido, por se tratar de um livro preparado para cursos de aperfeiçoamento de professores, compreendemos o fato de os exercícios nele contidos terem um maior grau de dificuldades do que os exercícios listados nos demais livros didáticos.

Figura 21 – Exercício proposto número 2

2. Um piloto decola de certa cidade *A* com seu avião, devendo alcançar a cidade *B* após duas horas de voo na rota 28° (v. bússola). Porém, duas horas após a decolagem, o piloto notou que, por engano, tinha tomado a rota 280° . Supondo que o avião tenha combustível suficiente, qual deverá ser o novo rumo para que ele consiga atingir a cidade *B*?

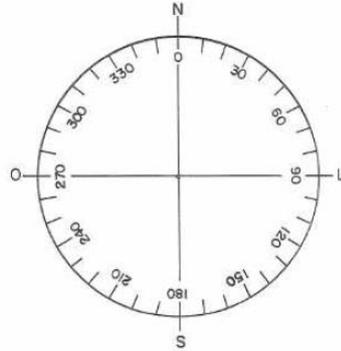


Figura 23

Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005, p. 22).

4 REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA

Uma revisão sistemática de literatura tem como objetivo fazer uma ajuntada de materiais semelhantes com vários autores, de forma que seja realizada uma pesquisa secundária com documentos primários para que se possa realizar uma análise.

4.1 Definição

A aplicação da Revisão Sistemática de Literatura (RSL) dá-se, como afirmam Brizola e Fantin (2016), em função da importância do pesquisador contar com uma sistemática prévia que guie seu processo de revisão, orientando os passos a serem seguidos, construindo análises que busquem responder às questões e diretrizes do foco do estudo em destaque.

A RSL deve conter etapas de aplicação e o autor precisa entender o papel das partes interessadas. Brizola e Fantin (2016, p. 29) elencam as fases que carecem ser seguidas no desenvolvimento da pesquisa:

- a) fontes de busca da temática;
- b) estratégias para o viés da pesquisa;
- c) avaliação dos estudos da literatura selecionados para serem utilizados na RSL;
- d) ferramentas a serem usadas na síntese dos resultados; e, por fim
- e) a apresentação do estudo.

Cumpridas essas etapas, o resultado deve apresentar um novo conhecimento de forma que as respostas obtidas possam ser replicadas e atualizadas por outros pesquisadores.

Desse modo, as fontes de pesquisa foram escolhidas por terem, em suas publicações ou eventos, o foco no ensino de Trigonometria e, nos repositórios, por permitirem o alcance de obras gratuitas nessa área. Além disso, possuem um grande alcance para teses, dissertações e artigos científicos, que são as produções de interesse da pesquisa.

Para extração do material, procuramos nas bases da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), teses e dissertações, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Google Acadêmico; periódicos na *Scientific Electronic Library Online* (SciELO), realizando manualmente o download de todos os trabalhos considerados relevantes diante dos critérios estabelecidos para escolha.

Consoante Martins, Medeiros Neta e Nascimento (2019, p. 5), “o Catálogo de Teses e Dissertações (CTD) é disponibilizado pela CAPES e apresenta como principal objetivo armazenar teses e dissertações dos Programas de Pós-Graduação que são reconhecidos”. Ademais, é possível encontrar no Sistema informações dos trabalhos como título, autor, ano de defesa, instituição, palavras-chave, biblioteca, linha de pesquisa, área de conhecimento.

Por seu turno, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) integra e dissemina, em um só portal de busca, os textos completos das teses e dissertações defendidas nas instituições brasileiras de ensino e pesquisa. O acesso a essa produção científica é livre de quaisquer custos. A BDTD contribui para o aumento de conteúdos de teses e dissertações brasileiras na internet, o que significa maior visibilidade da produção científica nacional e difusão de informações de interesse científico e tecnológico para a sociedade em geral. Também proporciona maior visibilidade e governança do investimento feito em programas de pós-graduação.

O Google Acadêmico é uma ferramenta do Google que possibilita a localização de artigo, teses, dissertações e outras publicações úteis para pesquisadores. E, sobre os periódicos, são publicações eletrônicas com pesquisas científicas que, como o nome já sugere, as edições obedecem a uma periodicidade. Significa que podem ser anuais, semestrais, trimestrais ou mensais. A escolha dessas plataformas, nesta pesquisa, se deu pelo fato de que agrupam, em suas bases, um número expressivo de pesquisas nacionais, abrangendo diversas instituições.

A escolha dessas bases de livre acesso viabilizou a replicação dos procedimentos utilizados nesta pesquisa por quaisquer outros pesquisadores ou pesquisadoras. Os resultados obtidos em cada base acerca de cada conjunto de palavras-chave empregadas, são mostrados no quadro a seguir (Quadro 2).

Quadro 2 – Lista quantitativa de trabalhos dos bancos de dados

Nº	Base	Conjunto de palavras-chaves	Especificações	Resultados
01	CAPES-teses e dissertações	Trigonometria and Ensino	2014-2022	69
02		Trigonometria and Método	2013-2022	54
03		Trigonometria	2013-2022	52
04		Trigonometria and História	2015-2016	59
05		Trigonometria and Aplicações	2021-2022	44
Total de trabalhos				278
06	Google acadêmico	Trigonometria and Ensino	2022-2023	41
07		Trigonometria and Método		37
08		Trigonometria		43
09		Trigonometria and História		29
10		Trigonometria and Aplicações		36
Total de trabalhos				186
11	SciELO	Trigonometria and Ensino	Artigos	9
12		Trigonometria and Método		1
13		Trigonometria		9
14		Trigonometria and História		1
15		Trigonometria and Aplicações		0
Total de trabalhos				20
16	BDTD	Trigonometria and Ensino	Dissertações	42
17		Trigonometria and Método		06
18		Trigonometria		46
19		Trigonometria and História		23
20		Trigonometria and Aplicações		19
Total de trabalhos				136
TOTAL GERAL				620

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 questão de pesquisa

Após o procedimento de escolha das fontes, em que foram acessados os sites dos eventos, repositórios e ferramentas de pesquisa para iniciar os trabalhos de aplicação das palavras-chave em quaisquer partes do texto e em que o uso da palavra-chave respeitou o idioma da fonte de pesquisa, o recorte temporal pré-estabelecido foi de 2012-2022, em que estabelecemos os trabalhos realizados nos últimos 10 anos. Ressaltamos que, para realizar a busca de forma que essas oferecessem elementos inerentes à nossa pesquisa, como trata-se do ensino de Trigonometria, foi necessário utilizarmos as combinações de palavras do tipo: “Trigonometria-ensino”, “trigonometria-história”, “trigonometria-método”, “trigonometria-prática”. Os termos foram assim eleitos por estarem relacionados ao objetivo deste trabalho.

Quando colocamos termos isolados como: metodologia, ensino, prática e história, percebemos uma abrangência nos resultados, visto a precisão de associarmos esses termos ao assunto Trigonometria. Em continuidade, ao usarmos as fontes de busca CAPES, averiguamos um número exorbitante de trabalhos identificados com esses termos. Todavia, nas plataformas Google Acadêmico, Scielo e BDTD esses resultados foram em menor escala, podendo serem filtrados de maneira mais simplificada.

Para a combinação “Trigonometria–ensino”, consideramos, na pesquisa CAPES, os resultados voltados para mestrado profissional e em programas de ensino de Matemática. Somente após essa filtragem obtivemos um resultado de dados semelhante aos outros pares de termos.

Os procedimentos de busca foram realizados através de *notebook* e acesso à internet em dias diferentes a parti do mês de março de 2022.

Iniciamos as buscas na base de dados da CAPES, selecionando a opção painel de busca. Posteriormente, refiamos as pesquisas apenas para dissertação e, tencionando concentrar os trabalhos mais recentes e voltados às áreas específicas de ensino de Matemática.

O mesmo procedimento foi aplicado no Google Acadêmico, com a restrição para os dois últimos anos, visto o número alto de publicações. Para esse busca, levamos em conta, como elenca a pesquisadora:

Os descritores utilizados nas buscas nas duas bases de dados foram associados em pares e para que eles fossem combinados no momento da busca, utilizamos o operador booleano AND. Os operadores booleanos são operadores lógicos, palavras que associam os descritores, são elas AND, OR e NOT. O operador AND possibilita a associação dos descritores no momento da busca, resgatando resultados com todos os termos, o operador OR amplia os resultados buscando um dos termos utilizados e o operador NOT exclui registros que contenham o descritor inserido após o operador (GAIESKI, 2014, p. 52).

A buscas nas quatro bases de dados resultaram em um montante de 1.640 trabalhos, conforme exposto no quadro demonstrado anteriormente. Assim, seguimos para a fase de escolha dos trabalhos, já tendo determinados os elementos que justifiquem as escolhas.

4.3 Seleção pela leitura dos resumos

No primeiro momento da pesquisa, definimos um conjunto de textos atinentes ao ensino de Trigonometria e efetuamos a verificação dos artigos e dissertações que continham, em suas apresentações, metadados, títulos, palavras-chaves e resumo com os termos ensino de Trigonometria, método de ensino, aplicações práticas de Trigonometria como processo de ensino.

As pesquisas foram feitas, primeiramente, no banco de dados da CAPES, posteriormente no banco do Google Acadêmico, depois na Sielo e BDTD. No tocante ao Google Acadêmico, o banco já direcionou os trabalhos selecionados para os repositórios, cerca de 180 trabalhos foram observados. Todos os trabalhos foram abertos, sendo verificada a presença das palavras-chave ou não.

Após, seguimos duas etapas de seleção. Na primeira, realizamos a leitura do título, resumo e palavras-chave. É importante mencionarmos que observamos a leitura dos títulos dos 640 trabalhos, porém os resumos se referem apenas aos 18 trabalhos escolhidos e adiante citados. Como critérios de inclusão, incorporamos os trabalhos que tinham como objeto de estudo o ensino de Trigonometria, método, história ou metodologia prática para o desenvolvimento da Trigonometria. Os resumos foram lidos nas bases de dados, seguindo a ordem dos descritores que obtiveram resultados.

O escopo da pesquisa era mapear os artigos ou dissertações nas situações de ensino na Educação Básica e que trouxessem fundamentação metodológica direcionada à proposta de trabalho relacionada diretamente ao ensino de Trigonometria.

O procedimento de leitura foi importante, tendo em vista a necessidade de reconhecermos o contexto dos trabalhos escolhidos e verificarmos se as pesquisas neles apresentadas satisfazem nosso objetivo de estudo. Através das leituras dos textos, procuramos contemplar, dentro de suas propostas, a sistematização do ensino de Trigonometria de forma que se pudesse favorecer o processo de ensino.

Essas observações poderiam ser notadas diante de vários aspectos metodológicos, como atividades práticas e teóricas envolvendo esses temas. O ensino da Trigonometria, envolvendo a história da Matemática e as aplicações das relações trigonométricas nos diversos campos científicos, levando a uma aprendizagem significativa.

Nesse aspecto, o processo de leitura também é significativo para constatar se os critérios de inclusão e exclusão estavam sendo considerados. Os trabalhos baixados foram guardados em pastas específicas, tanto para dissertações quanto para artigos.

Os critérios de inclusão e exclusão atentaram aos seguintes elementos:

- a) inclusão: dissertações e artigos que tratassem do ensino de Trigonometria, destacando a metodologia de ensino através da história da Matemática, ferramentas tecnológicas ou atividades teórico práticas.
- b) exclusão: dissertações ou artigos que não tratassem do processo de ensino de Trigonometria ou que estivessem direcionados ao Ensino Superior e arquivos repetidos que tivessem indisponíveis.

Os critérios de inclusão e exclusão foram estabelecidos levando em consideração a busca por dissertações e artigos que tratassem sobre o processo de ensino de Trigonometria, haja vista os benefícios que esses trabalhos científicos pudessem agregar ao ensino de Trigonometria na educação do Ensino Médio. É importante salientarmos a carência de uma educação no campo da Matemática voltada para uma aprendizagem satisfatória, que possa fazer com que aqueles que despertam o interesse pelo estudo da Matemática, nesse caso, o estudo da Trigonometria, possam desempenhar suas aprendizagens de forma prazerosa. Nesse caminho, seguindo a afirmação de Oliveira (2015), o ensino de Trigonometria é fundamental no campo da Matemática. Há uma série de eventos tecnológicos que são produzidos a partir dos conhecimentos trigonométricos.

Uma vez ocorrido o processo de seleção dos trabalhos, dos 620 encontrados na primeira busca, a quantidade foi reduzida, num primeiro momento, para 40 documentos, entre artigos e dissertações, sendo que, após procedermos a limpeza dos casos repetidos, ficamos com 18 trabalhos selecionados por resumo, com base nos critérios de inclusão e exclusão, sendo 13 dissertações e cinco artigos.

Dentre esses 18 trabalhos selecionados pelo resumo, estão as dissertações que sustentam o foco de análise desta pesquisa. No quadro abaixo (Quadro 3), estão organizados os 18 trabalhos que constituem o corpus de trabalhos potencialmente relevantes ao estudo, trazendo informações sobre: ano de defesa e nível, título da dissertação ou tese, nome do autor(a) e orientador(a), Instituição de Ensino Superior (IES) e Programa de Pós-Graduação (PPG).

Quadro 3 – Lista de trabalhos classificados para leitura

Ano defesa/ Nível	Título	Autor(a) Orientador(a)	IES-PPG
2014 Dissertação	Trigonometria e aplicações	Regis Vancley Gaieski; Laert Bemm	Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas
2016 Dissertação	Proposta Metodológica para o ensino de Trigonometria baseada na Psicologia Pedagógica	Robewilton da Silva Alves; Marcelo Gomes Pereira	Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra
2014 Dissertação	O surgimento das Trigonometrias em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas	Everaldo Raiol da Silva; Maria José de Freitas Mendes	Universidade Federal do Pará, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas
2016 Dissertação	O ensino da Trigonometria por meio das aulas práticas	Carlos Eduardo Moraes Pires; Mikrail Petrovich Vishnevski	Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campo dos Goitacazes
2013 Dissertação	O ensino de Trigonometria: perspectivas do Ensino Fundamental ao Médio	Wellington da Silva; João Peres Vieira	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
2015 Dissertação	O ensino da Trigonometria usando o software Geogebra como ferramenta de ensino-aprendizagem	Eilson Santiago; Roque Mendes Prado Trindade	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT
2016 Dissertação	Análise de livros didáticos de Matemática: função exponencial	Cristina Masetti; Bárbara Lutaif Bianchini	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

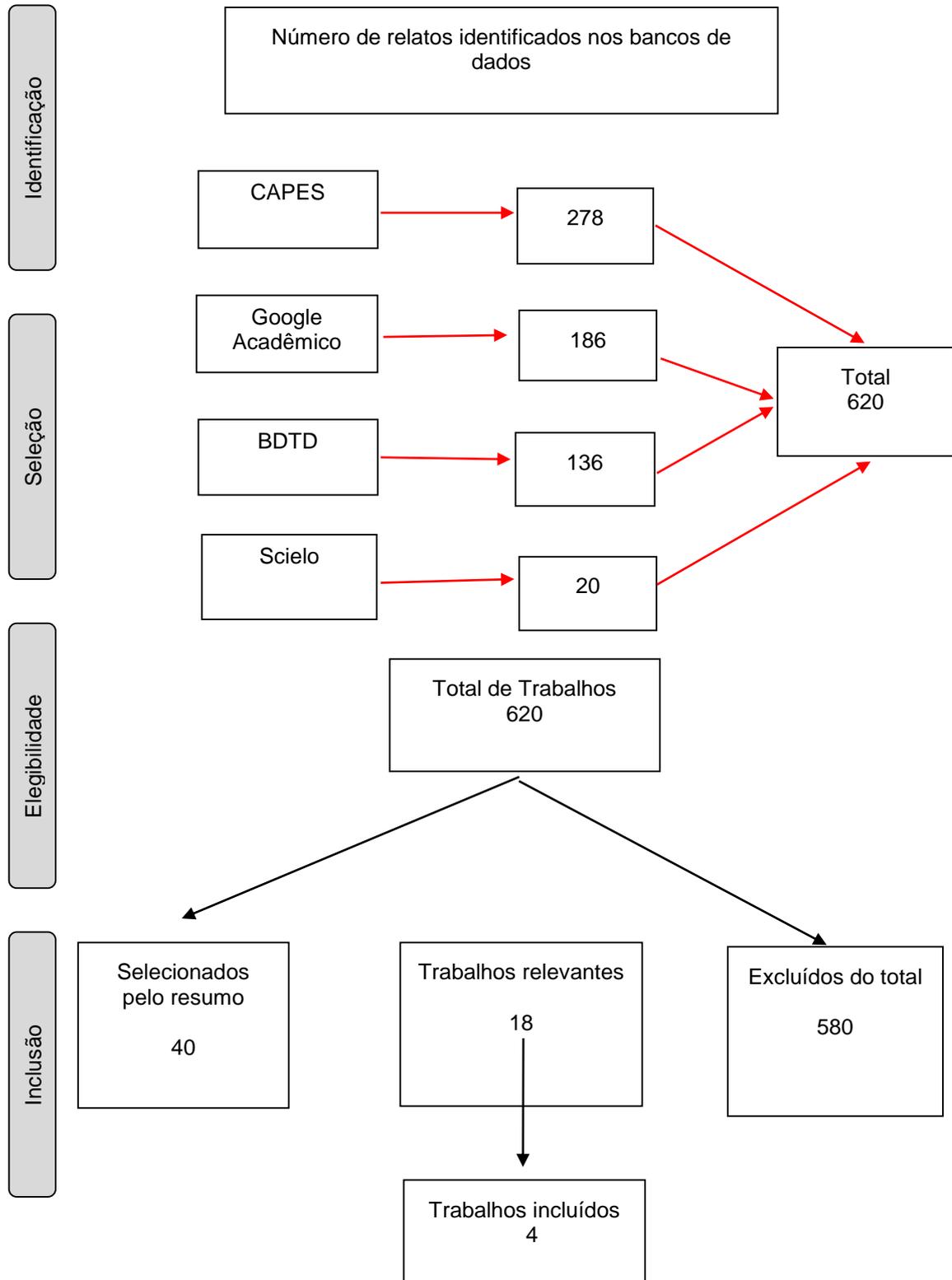
2018 Dissertação	Trigonometria em uma oficina de usinagem	Emerson Alves Batista; Luís Alberto D'Afonseca	Universidade Federal de Viçosa-MG, Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas
2015 Dissertação	Aplicação da Trigonometria nas Ciências	Joerk da Silva Oliveira; Joselito de Oliveira	Universidade Federal de Roraima, Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
2014 Dissertação	A resolução de problemas como método de ensino de Trigonometria	Davi Vieira Ramos de Oliveira; Vinicius Augusto Takahashi Arakawa	Universidade Estadual de Santa Cruz, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas-PROFMAT
2020 Dissertação	Ensino e aprendizagem de Trigonometria: uma abordagem histórica, evidenciando o elo entre teoria e prática	Nívia Monique Silva; Luciana Aparecida Elias	Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas
2021 Dissertação	Uso do Geogebra no estudo de Trigonometria	Rafael Santos Miranda; Giovane Ferreira Silva	Universidade Federal do Maranhão, Matemática em Rede Nacional
2019 Dissertação	Trigonometria: história e aplicações no contexto escolar	Regina Claudia Tinto Zeca Silva Cristiane Alexandra Lazaro	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (Bauru), Programa: Matemática em Rede Nacional,
2021 Artigo	O ambiente remoto como ferramenta promotora de práticas laboratoriais no ensino de Trigonometria em cursos de licenciatura em Matemática	Ana Carolina Pereira, Gisele Oliveira Pereira da Costa	Instituto Federal de Mato Grosso – Campus Confresa, Revista Prática Docente. v. 6, n. 2, e027, mai/ago 2021

2020 Artigo	Revisão sistemática na área de ensino e educação matemática: análise do processo e proposição de etapas	Luiz Otavio Rodrigues Mendes Ana Lucia pereira	Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 22, n. 3, p. 196-228, 2020
2013 Artigo	Ensino de Trigonometria numa abordagem histórica: um produto educacional	Severino Carlos Gomes	Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 563-577, ago. 2013
2022 Artigo	Trigonometria: conhecimento de conteúdo e de ensino fundamentados em uma revisão sistemática de literatura	Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues Maria Alice Veiga Ferreira de Souza Edmar reis Thiengo	Revista de Ensino de Ciências e Matemática, Rencima, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-23, out./dez.2022
2016 Artigo	A transição das razões para as Funções Trigonométricas	Maria Elisa Esteves Lopes	Bolema, Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 1127 - 1144, dez. 2016

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para finalizar mais uma etapa, concluindo a fase de leitura dos documentos, escolhemos quatro dissertações, que consistiram no rol de trabalhos analisados para o encerramento desta investigação. De acordo com Costa e Zoltowski (*apud* KAWASE, 2020, p. 59), “as etapas finais para uma revisão sistemática tratam sobre: extração dos dados dos trabalhos selecionados, avaliação dos trabalhos, síntese e interpretação dos dados”. Na figura a seguir (Figura 23), indicamos os mecanismos de busca e escolha dos documentos, sua sistematização e as opções para análise final.

Figura 22 – Trabalhos classificados para análise



Fonte: Fluxograma PRISMA adaptado de Moher *et al.* (2009).

Os quatro documentos escolhidos para análise estão distribuídos na sequência (Quadro 4), identificados a partir do ano, pelo título, nome do autor, fonte de pesquisa e idioma.

Quadro 4 – Documentos escolhidos

ANO/TIPO	Título, Autor e Ano	Autor	Fonte	Idioma
2020 Dissertação	Ensino e aprendizagem de Trigonometria: uma abordagem histórica, evidenciando o elo entre teoria e prática	Nívia Monique Silva	CAPES	Português
2016 Dissertação	Proposta metodológica para o ensino de Trigonometria baseada na Psicologia Pedagógica.	Robewilton da Silva Alves	CAPES	Português
2015 Dissertação	O ensino da Trigonometria, usando o software Geogebra como ferramenta de ensino	Eilson Santiago	CAPES, Google Acadêmico, BDTD	Português
2016 Dissertação	O ensino da Trigonometria por meio das aulas práticas	Carlos Eduardo Morais Pires	CAPES, BDTD	Português

Fonte: Elaborado pelo autor.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Resultados e discussões devem apresentar discussões interessantes e que podem ser desafiadoras. A conclusão deve apresentar análise crítica sobre os apuramentos obtidos.

5.1 Avaliação da metodologia presente nos livros didáticos

Quando observamos o livro *Matemática do Ensino Médio*, de Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020), notamos que busca informar ao leitor quais são as competências gerais e específicas presentes na BNCC para o conteúdo. Os capítulos desse material trazem, em seu início, um enfoque histórico e uma imagem que procura relacionar os conteúdos e suas possíveis aplicações.

Contudo, não corre o mesmo com o livro de Iezzi (2004), pois este tem o objetivo de fornecer ao estudante secundarista um embasamento teórico básico sobre o tema Trigonometria, levando-o tanto a ter uma visão global do assunto quanto a adquirir elementos suficientes para que possa cursar uma graduação na disciplina de Matemática, ou área correlata, de forma eficiente.

Já no capítulo nove do Livro de Carmo, Morgado e Wagner (2005), há menção à história da Trigonometria, enfatizando o fato da Trigonometria haver surgido devido às necessidades da Astronomia, para prever as efemérides celestes, calcular o tempo e ser utilizada na navegação e na Geografia.

Referente ao desenvolvimento dos conceitos, no livro de Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020), percebemos a intenção dos autores em trazer uma conexão entre os conteúdos e as realidades vivenciadas pelos estudantes. Desde conceitos históricos que deram origem ao tema, como situações de aplicabilidade do cotidiano, mas que envolvem relações de equações matemática do tópico em estudo.

Outro fator importante diz respeito à associação existente entre a Matemática e as questões sociais que envolvem crianças e adolescentes. Nas razões trigonométricas apresentadas, por exemplo, há preocupação em fazer uma abordagem do tema que permita articular os direitos da criança e do adolescente. Ao abordar as construções de rampas, alude a questões sociais, como acessibilidade e normas. Isso pode ser verificado quando a inclinação da rampa não possibilita que uma pessoa com necessidades especiais realize seu traslado de maneira segura.

Como é orientado na BNCC (BRASIL, 2018), as redes de ensino devem construir seus currículos, tendo como meta as aprendizagens essenciais estabelecidas por ela. Sem embargo, o documento não determina como as instituições de Ensino Básico devem promover esses aprendizados. As escolas possuem liberdade para escolher a estratégia pedagógica que utilizarão, ou seja, como os conteúdos, competências e habilidades serão trabalhados no dia a dia dos estudantes. A mais tradicional é a que versa sobre os assuntos de modo compartimentado

Esse tipo de disposição dos assuntos está evidenciado no livro *Fundamentos de Matemática Elementar*. Pela sua forma sequencial lógica, é possível, ao estudante, fazer a revisita aos tópicos, quando um conteúdo seguinte não for completamente compreendido.

Ainda, podemos notar as recomendações da BNCC, a saber:

[...] a área de Matemática e suas tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído [...] no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos (BRASIL, 2018, p. 529).

A BNCC orienta que deve haver uma conexão entre os aprendizados em etapas anteriores e etapas atuais. O aluno precisa migrar para o Ensino Médio com uma bagagem suficiente de conhecimentos capazes de fazê-lo progredir durante o percurso nesse nível de ensino e desse para o Ensino Superior.

A observação que fazemos leva-nos a questionar as ações propriamente ditas para a superação dessas etapas, visto que os currículos escolares não atendem esse pré-requisito, demandando existir maturação dos conceitos, além do “compromisso com a formação e o desenvolvimento humano global, em suas dimensões intelectual, física, afetiva, social, ética, moral e simbólica” (BRASIL, 2018, p. 14).

O livro de Iezzi (2004), citado acima, está organizado de maneira a levar o estudioso do assunto a ir identificando propriedades “menores” para utilizá-las mediante a compreensão de dificuldades ou aprendizagens “maiores”, tornando seu aprendizado relevante, como assevera Klein (2009, p. 25):

Aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação interage com uma estrutura do conhecimento, já existente e específica (conceito subsunçor), produzindo uma nova informação que adquire um novo significado, inclusive para os subsunçores preexistentes. Ou seja, há uma interação não arbitrária e não literal que contribui para a diferenciação, a elaboração e a estabilidade da própria estrutura cognitiva, fazendo com que o indivíduo adquira um corpo de conhecimento claro, estável e organizado, que passa a ser a principal variável independente, na aquisição de novas informações da mesma área.

Sabemos que o livro didático é uma ferramenta indispensável para o processo de ensino e aprendizagem. Todavia, a ordenação dos exercícios ao logo dos capítulos, sua construção e compreensão é substancial para fixação dos conceitos previamente apresentados. À vista disso, é exatamente perante a resolução dos exercícios que o estudante comprovará se sua aprendizagem foi satisfatória e se está preparado para realizar os testes, vestibulares, concursos ou repassar as teorias apreendidas para outros estudantes.

Com esse propósito, é importante que a distribuição dos exercícios que respondem a determinado conceito matemático possa ser oferecido ao educando de forma evolutiva de dificuldade, guiando-o a utilizar teoremas anteriores para solucionar, através dos exemplos menos complexos às questões mais complexas.

O livro *Fundamentos de Matemática Elementar* traz essa concepção de distribuição das atividades sugeridas, em que os exercícios vão sendo aprimorados para que o aluno seja capaz de responder às questões mais difíceis mediante o exercício de outras questões menos difíceis.

Averiguamos que o livro *Matemática para o Ensino Médio*, de Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020), anseia oferecer aos estudantes elementos que os levem a: compreender e fazer uso de diferentes linguagens matemáticas (simbólica, algébrica e gráfica), ampliando as possibilidades de comunicar, ler e interpretar situações do dia a dia; analisar e entender situações, envolvendo fenômenos periódicos que podem ser modelados por Funções Trigonométricas. Entretanto, a parte teórica é apresentada de modo bastante resumido, cabendo ao professor buscar outros meios de informações.

Com relação ao Livro de Carmo, Morgado e Wagner (2005), sua organização é semelhante ao livro de Iezzi (2004). Todavia, para um estudo mais aprofundado, o livro de Iezzi (2004) oferece um arsenal de conteúdos bem mais abrangente. Podemos dizer que, para fazer um estudo sistemático do Livro de Carmo,

Morgado e Wagner (2005), seria interessante que o estudioso consulte, paralelamente, o livro de Lezzi (2004).

5.2 Avaliação das metodologias descritas nos textos selecionados

Na dissertação de Silva (2020), encontramos uma metodologia de ensino da Trigonometria que dá ênfase ao elo entre teoria e prática. A discussão decorre sobre o tema seno e cosseno, assunto bastante recorrente e presente nos cursos de Ensino Fundamental e Médio. O trabalho objetiva propor uma contextualização histórica, procurando desmistificar e humanizar a matemática, levando à reflexão e percepção de que o surgimento da Trigonometria se deu mediante a problemas práticos da sociedade.

Na perspectiva de aproximar o ensino de Matemática ao interesse do aluno, cabe a educadores e gestores do ensino de Matemática divisar métodos que sejam eficientes e tornem a aprendizagem significativa. Uma viagem pela história das descobertas matemáticas ao longo dos tempos, ou o conhecimento das aplicações dos diversos ramos nos quais a Matemática se subdivide pode funcionar como elemento motivador na aprendizagem.

Em seu trabalho, Silva (2020) ressalta a história da Trigonometria, dando um passeio, em princípio, pelo Egito, citando achados referentes ao Papiro Rhind e às construções das pirâmides. Alude à Matemática babilônica, em que Astronomia e religião eram elementos preponderantes nas aplicações trigonométricas. “A Grécia se destacou com grandes sábios que se dedicaram a esses estudos, entre eles podemos citar Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, Aristarco de Samos, Eratóstenes de Cirene, Hiparco de Nicéia e Ptolomeu de Alexandria” (SILVA, 2020, p. 22).

Assim, algumas ciências utilizam dos conceitos trigonométricos para solucionarem suas situações práticas. Na Astronomia, o cálculo do tamanho da sombra de eclipses e do raio dessa sombra; determinação do raio lunar, distâncias entre planetas. Na Agricultura, usam-se mecanismos como Teodolito para determinar distâncias horizontais. Na navegação marítima e Astronômica, o uso do Sistema de Posicionamento Global (GPS), que utiliza satélites transmissores de sinais e aparelhos receptores.

Silva (2020) realizou sua pesquisa medindo alturas inacessíveis pela sombra: semelhança de triângulos, realizada com alunos de 8º e 9º anos. Nessa

atividade, aborda o contexto histórico das semelhanças de triângulo com Tales de Mileto, fazendo a atividade prática com materiais como trenas, e empregando como apoio as sombras dos prédios ou árvores para montar as proporções.

É essencial frisarmos a necessidade de diversificar o processo de ensino de Matemática para que esse trabalho não se torne enfadonho. No entanto, assimilamos que o estudo dos temas relacionados requer um período de dedicação com os teoremas para que se possa apreender suas aplicabilidades e veracidade. Há alguns procedimentos metodológicos, mas, pelo estudo teórico e sistemático, a aprendizagem pode ser construída.

É possível que haja comparação entre aula teórica e ensino tradicional. Porém, o ensino tradicional tem sua origem nos conceitos de Tomás de Aquino: “A pedagogia da essência, ou pedagogia tradicional, tem o objetivo de expor o homem a valores e dogmas tradicionais e eternos” (BORGES *et al.*, 2021, p. 181). Essa pedagogia apresentada ao Brasil, em princípio pelos Jesuítas, sofreu modificações dada a precisão de adaptação à realidade local dos nativos que aqui se encontravam. Os jesuítas respeitaram suas crenças e seus costumes.

Dentro do propósito dessa pedagogia, Tomás de Aquino entendeu que a educação é o meio para atingir o ideal da verdade e do bem. Na pedagogia tradicional, o homem é conduzido à sua essência mais profunda, fazendo-se compreender como homem.

Borges *et al.* (2021) reiteram o quão é cuidadoso o trabalho de educar, em que, para tal feito, é necessária uma formação completa na respectiva área. O educador ensina pela palavra, pela ação pedagógica e pelo próprio exemplo.

Desse modo, dentro dessa dinâmica do processo de ensino e aprendizagem, beneficiamo-nos da aula teórica, como certifica Pires (2016, p. 21):

[...] A aula teórica é extremamente eficaz no que diz respeito à velocidade de transmissão da informação, bem como à sua quantidade. Ideal para transmitir definições, conceitos, informações sobre tratamento e mecanismos de ações. É suficiente para preparação para exames seletivos que exigem conhecimento teórico. Daí os cursos preparatórios não usarem laboratórios nem recursos lúdicos. Mas não é apenas dos cursos preparatórios a preferência a este tipo de aula. É, sem dúvida, a mais usada também nas escolas regulares.

A aula teórica é aquela na qual o professor discorre concernente a determinado assunto ou tema. É extremamente importante que o professor faça

conclusões confiáveis sobre conceitos matemáticos que os estudantes tenham dúvidas. Apesar de existirem procedimentos metodológicos diversos, é pela exposição que essas primeiras imperfeições devem ser lapidadas.

Outra atividade proposta por Silva (2020) foi utilizando cordas de uma circunferência para determinar a função seno e cosseno. O público-alvo dessa sugestão de atividade foram alunos do 2º ano do Ensino Médio. Os objetivos dessa atividade seriam de relacionar função seno e cosseno, medindo alturas com o auxílio do teodolito e realizando construção do círculo trigonométrico no Geogebra.

As indicações metodológicas apontadas pela professora reforçam a ideia de que, motivando o pensamento matemático através de situações concretas ou fatos históricos, leva-se o aluno a desenvolver o gosto pelo estudo e aprendizagem. Ainda, em sua dissertação, procura mostrar a relevância de um processo de ensino e aprendizagem de Trigonometria, quando o aluno associa os estudos a uma realidade profissional. Unir teoria e prática pode estimular o gosto pela aprendizagem. Elementos dessa natureza podem não estarem presentes de forma acentuada no livro adotado por determinada instituição escolar. Contudo, esses assessórios pedagógicos podem trazer incremento ao estudo de Trigonometria.

Outra proposta pedagógica interessante sobre o ensino de Trigonometria foi de Alves (2016), baseada na Psicologia Pedagógica. Em seu estudo, referencia os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) na medida em que esse documento “ênfatiza a possibilidade de modelar a maneira de ensinar Matemática com o auxílio de recursos tecnológicos. Alves (2016) reflete o que é indicado pelos PCNs, que o aluno possa se perceber como integrante da sociedade e, ao mesmo tempo, agente transformador, apropriando-se de diferentes linguagens e tecnologias.

O autor fundamenta seu trabalho nas ideias de Vygotsky, em que compreender o desenvolvimento mental dos indivíduos proporciona maior equilíbrio mental, sendo ponte para ajudá-lo no processo de ensino. Volta seu olhar para as concepções defendidas por pesquisadores como Salvador (2000), Talizina (2000), Galperin (2009), Leontiev (1991), Nunes (2009), os quais propõem que, pela realização das atividades, relaciona-se o sujeito com a realidade, levando-o a um resultado final, podendo ser práticas, do conhecimento, da formação de valores, da comunicação.

O pesquisador propõe uma série de aulas em que em cada sequência vai aprimorando os processos mentais dos alunos através da Teoria das Ações Mentais,

contendo as definições, modos de apresentá-las aos estudantes, atividades e exercícios. Alves (2016), em sua pesquisa, também realça o fator relação professor-aluno e aluno-aluno como imprescindíveis no processo pedagógico.

De acordo com a Teoria da Aproximação da Atividade, elaborada por Talizina, o principal propósito que o docente deve almejar é o sucesso da aprendizagem do aluno, e, mencionados pelo pesquisador, os objetivos são expressos em forma de tarefa e, os conteúdos planejados com clareza.

Pelo Teorema da Aproximação da Atividade (TAA), o aluno, quando está resolvendo os problemas, reconhece os objetivos que oportunizam desenvolver habilidades, também adquire os conhecimentos psicológicos, lógicos e específicos. As habilidades psicológicas dos alunos são diferentes. Alguns se aproximam da memória visual, outros da memória auditiva, alguns do pensamento dirigido e há quem precise do pensamento lógico-abstrato. Nesse viés, compete ao professor, segundo Alves (2016), fazer uso correto da memória do aluno.

Nessa proposta pedagógica, ele também menciona que, para a aprendizagem alcançar o sucesso, outro fator se torna essencial, a Motivação da Realização da Atividade (MRA). A etapa motivacional do discente e sua vontade são componentes primordiais. Essa motivação pode ser externa, quando estudar um tema satisfaz a conquista de outro objetivo; e interna, quando estudar atende à necessidade cognitiva do aluno.

Dessa maneira, na proposta apresentada, o pesquisador orienta que o caminho para o planejamento da atividade passa pela determinação das habilidades utilizadas para o alcance dos objetivos a partir da Teoria da Formação das Ações Mentais (TEAM). Nessa teoria, a primeira etapa é a materialização. Podemos usar recursos como o Geogebra para facilitar essa interação. A segunda etapa é a percepção, dividida em imagem visual e esquemas simbólicos cognitivos. A terceira etapa é a forma verbal (em silêncio no momento de resoluções de atividades). A quarta etapa é a mental, que se constitui da fixação do conceito e da ação.

Por fim, na proposta pedagógica sobre o ensino de Trigonometria, Alves (2016, p. 36) conceitua acerca da Base Orientadora da Ação (BOA): “é um conjunto de ações e condições no qual o aluno deve se apoiar durante a realização da ação”. Nessa linha, trazemos uma proposta de aula desenvolvida por Alves (2016) para o ensino de Trigonometria (Figura 22):

Figura 23 – Plano de aula

5.1 AULA 1

Deve ser realizada em modo de apresentação com 45 minutos de duração e com objetivo principal de recordar conceitos prévios (tipos de triângulos) e definir ângulo. O objetivo secundário é: falar um pouco da história da Trigonometria e suas aplicações (o texto com toda a história da trigonometria encontra-se no apêndice D).

Fonte: Alves (2016).

- Slide 1

O título deve conter aquilo que será apresentado, uma vez que traz ao aluno, em sua mente, imagens e recordações do assunto, ou seja, estamos utilizando a etapa perceptiva do TFAM. Utilize o título "Trigonometria"

BOA - definição de ângulos e tipos de triângulos.
 Segue algumas orientações ao docente sobre a aula, isto é, o que é importante mencionar, abordar e tratar.
 a aula deve ter o caráter motivador;
 o docente deve lançar desafios;
 falar um pouco da história da Trigonometria, sem textos longos, apenas tópicos;
 recordar conceitos: ângulos, triângulos gerais e triângulos retângulos;
 mostrar onde a trigonometria está aplicada no cotidiano das pessoas.

Fonte: Alves 2016

A dissertação de Santiago (2015) apresenta uma proposta de ensino e aprendizagem de Trigonometria em triângulos, por meio de software Geogebra. O pesquisador assinala achados arqueológicos que realçam uma tecnologia primitiva, como fragmentos de tabela, envolvendo grandezas triangulares. Em suas considerações teóricas, aparece o contexto descrito nos PCNs em que, assim como Alves (2016), defende a utilização de ferramentas matemáticas que possam levar o aluno a expressar-se de forma escrita, gráfica e oral. Santiago (2015) sobreleva o fato do crescente desenvolvimento da tecnologia da informação e a real necessidade de professores atuais se adaptarem a essa nova realidade, sendo capazes de usar as ferramentas tecnológicas educacionais.

O uso de recursos tecnológicos agregam, aos professores, possibilidades didáticas e ampliam as metodologias adotadas no processos de ensino e aprendizagem. Outro aspecto é a probabilidade em despertar a curiosidade dos alunos e motivá-los a realizem investigações matemáticas do conteúdo abordado através do uso de seus próprios recursos tecnológicos.

A proposta de Santiago (2015) direciona-se a alunos do 9º ano, série em que, na maioria dos currículos escolares, estudam-se as relações trigonométrica do triângulo retângulo. Todavia, esse tema é retomado na disciplina de Trigonometria do Ensino Médio. As atividades desenvolvidas por ele foram sobre construção de ângulos agudos, colinearidade de pontos e construção de triângulos, identificação do Teorema de Pitágoras por construção. O autor utilizou, em suas atividades, recursos computacionais, no entanto, destaca que as ferramentas são subsidiárias ao trabalho dos professores.

O Geogebra é um software matemático que contém muitos elementos geométricos – algébricos e trigonométricos – que, ao serem usados por pessoas que dominam o ambiente virtual, pode oferecer uma metodologia dinâmica e motivacional no processo de aprendizagem da Matemática. Algumas das vantagens obtidas no uso do Geogebra são: a agilidade, praticidade, estímulo, interação no processo de resolução das atividades. Nossa percepção é a de que há uma preocupação iminente de professores e pesquisadores em desenvolver metodologias ativas que sejam capazes de atrair o gosto pelo ensino da Trigonometria.

Em seu trabalho, Santiago (2015) realizou um levantamento diagnóstico, visando entender as concepções dos alunos tangente ao ensino de Matemática. Posteriormente, realizou atividades em duas turmas, uma empregando o software Geogebra para facilitar a visualização e, em outra, apenas lápis, borracha, régua e compasso. Após todos os procedimentos, os resultados, conforme Santiago (2015), mostram que o uso do software facilitou a execução, a visualização e reduziu o tempo de aplicação das mesmas atividades, uma vez que todos os alunos conseguiram concluir as atividades e obtiveram bom índice de acertos. Nesse sentido, elucida-se a importância do estudo de ferramentas tecnológicas que possam oferecer benefício no processo de ensino.

Nessa esfera, Pires (2016) efetuou uma proposta para o ensino da Trigonometria no triângulo retângulo de maneira prática, ou seja, fazer experimentos dos conceitos, propriedades, fórmulas e teoremas estudados na Trigonometria. O

trabalho considerou como público-alvo alunos e professores de 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio. O tema foi escolhido por intermédio de uma pesquisa com um grupo de oito professores que levaram em conta problemas no ensino de Trigonometria, falta de conhecimentos básicos, interesse e recursos pedagógicos.

Importante notabilizar a relevância defendida por Pires (2016) sobre a eficácia das aulas teóricas. São essencialmente importantes e não se pode confundir com aula tradicional. Discorrer e refletir em relação aos assuntos é fundamental para a aprendizagem. Já a aula prática tem como característica o uso de equipamentos e, para tanto, o estudante pode ou não estar embasado nos conhecimentos teóricos. As atividades práticas foram realizadas por Pires (2016) em uma turma de 1º ano, com 42 alunos.

A dissertação contou com uma série de atividades teóricas acerca do uso do triângulo retângulo, seguido de atividades práticas em sala de aula, utilizando figuras, palitos plásticos para confecção de triângulos e verificação dos teoremas. Posteriormente, foram executadas diversas situações teóricas com o intuito de comprovar os teoremas e fazer as devidas demonstrações.

A última etapa da proposta, consoante Pires (2016), foi medir a largura do rio, usando materiais concretos como: madeiras, rolo e barbante, pregos, martelo, esquadro, trena ou fita métrica, e o rio. Sob a supervisão do educador, foram feitos todos os procedimentos descritos nesse tipo atividade, já estudados teoricamente. As demais atividades dessa etapa contaram com o cálculo de tamanho de uma árvore, escada encostada em muro, o famoso problema do bambu quebrado e outras atividades. A figura a seguir (Figura 23) mostra uma das atividades práticas desenvolvida por Pires (2016).

Figura 24 – Bambu Quebrado



Fonte: Pires (2016).

Nessa atividade, em conformidade com Pires (2016), os alunos mediram a altura do bambu, encontrando 1,10 metros, e a distância entre o bambu vertical e a ponta diagonal, sendo 1,40 metros. Usando o Teorema de Pitágoras, em que o bambu, na diagonal, é a hipotenusa, e os catetos são o chão e o bambu na vertical, conseguimos calcular a altura do bambu.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve como um objetivo investigar dissertações e artigos que tivessem como tema o conceito de Trigonometria, nas bases de dados eletrônicos como CAPES, BDTD e em artigos publicados em periódicos (SciELO), enfocando as contribuições da literatura científica para o ensino de Trigonometria. Nesse propósito, examinamos três exemplares de livros didáticos voltados ao tema Trigonometria, buscando averiguar as organizações curriculares neles expostas frente aos outros diversos trabalhos que apresentassem metodologias alternativas para o ensino da disciplina. No que concerne aos livros com conteúdo direcionados ao ensino de Trigonometria do Ensino Médio, um deles faz parte do Plano Nacional do Livro Didático e é adotado em algumas escolas de Ensino Médio (2021/2024).

Nossas análises disseram respeito ao nível de organização dos conteúdos, à organização dos tópicos e à distribuição dos exercícios, relacionando esses arranjos com os eventos sociais práticos, percebendo em que livros existem essa conectividade entre os temas e suas praticidades, sejam elas na indústria, nos serviços sociais, ou em situações comuns. Além disso, examinamos a possibilidade de um retro alinhamento dos assuntos e exercícios, de maneira que haja continuidade no processo de ensino, mas especialmente na aprendizagem.

Atinente ao livro *Prisma Matemática*, concluiu-se que objetiva que o estudante compreenda que a Matemática é para ser utilizada na vida. Esse fato é visivelmente notório pela preferência dos autores em começarem os capítulos colocando textos que informam sobre essas conectividades com o mundo real, ademais de trazerem apontamentos sobre questões sociais, como direitos de crianças e adolescentes pela acessibilidade.

O livro *Fundamentos de Matemática Elementar* caracteriza-se por oferecer uma visão global dos conteúdos matemáticos do Ensino Médio, além de um denso conteúdo voltado para vestibulandos, ou alunos que buscam uma preparação mais sólida e, também, aos universitários que desejam e precisam revisar conceitos, sendo que essa mesma dinâmica é apresentada no livro *Trigonometria e Números Complexos*.

É importante salientarmos que, na maioria das escolas, os alunos são preparados, em geral, para participarem de avaliações externas, principalmente as

referentes ao Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE), Prova Brasil e Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Tangente ao processo de investigação sistemática, obtivemos como resultado dos trabalhos, entre dissertações e artigos, quatro dissertações que trazem o tema ensino de Trigonometria, que mostraram a existência de diferentes modalidades metodológicas de ensino de Trigonometria e que podem ser aproveitadas pelos professores em diversas situações escolares. Por sua vez, concernente aos procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa, ocorreram mediante o mapeamento de diversos trabalhos realizados acerca do processo de ensino de Trigonometria em seus aspectos históricos, práticos e metodológicos, visando encontrar pesquisadores que abordassem discussões referentes a esses assuntos. E, em consequência, observamos que há uma gama de estudiosos que tratam do assunto, seja no campo da praticidade, da metodologia, ou outro aspecto que favoreça o processo de ensino de Trigonometria.

Dessa maneira, analisar propostas relevantes na área de ensino de Trigonometria tem como um dos objetivos ser útil e significativo para estudantes e pesquisadores. Propostas diferenciadas para futuros professores, ou os ainda estudantes, podem ser repetidas por eles em suas práticas, facultando sua própria automotivação, indicando diferentes alternativas metodológicas na tendência, por favorecer as atividades profissionais.

No presente trabalho, encontramos evidências que apontam diferentes modos de abordar o tema ensino de Trigonometria, seja por meio de atividades práticas entre professores e alunos, em que se realiza a interlocução com os vários campos do saber científico, como Astronomia, Geografia, entre outros, e que podem levar o estudante a uma viagem pela história; seja aplicando os conteúdos em exemplos palpáveis, que mesmo teóricos mostrem-se pertinentes, a nosso olhar, proporcionando um gosto pelo estudo da Matemática, seja através de aplicativos tecnológicos. E, mesmo se o interesse do estudante se encaminha para um outro campo científico, é possível que suas concepções sobre o ensino de Matemática seja de relevância para as ciências.

Ressaltamos as práticas que procuram levar em consideração a sensibilidade e a aproximação entre os sujeitos, apresentando uma nova perspectiva para o ensino da Trigonometria. O pesquisador não alimenta o abandono do quadro

branco e do pincel, porém acrescenta um novo ingrediente para, através do exercitar, o aluno construa seu saber matemático.

Nesse prisma, ficou evidenciado que os professores precisam de instrumentos variados para promoverem um ensino em que haja sucesso de aprendizagem, trazendo tendência de outros pesquisadores em salientam a Psicologia Pedagógica. Uma metodologia que orienta um caminho em que a Teoria da Formação das Ações Mentais propicia, ao estudante, adquirir habilidades, podendo potencializar o processo de ensino e aprendizagem de Trigonometria.

Aliado a esses elementos, as pesquisas revelaram que o desenvolvimento de atividades, como uso de software em situações que contam com ferramentas tecnológicas, como computador, pode fornecer oportunidades aos estudantes de melhorar suas habilidades de formulação, na visualização gráfica, compreensão, elaboração de estratégias e, ainda, pode estimular o interesse em aprender Trigonometria, contribuindo para um melhor desempenho de aprendizagem.

Nesse sentido, podemos presumir sobre a necessidade de, como professores, estarmos inteirados das novidades tecnológicas, acessando sistemas de informações, aprimorando e reciclando nossas metodologias para podermos dialogar com um mundo cada vez mais técnico. E, nesse âmbito, entendemos que o primeiro passo para podermos adentrar em novos métodos é o da sensibilização.

Outrossim, corroborando com esses aspectos, percebemos, face à análise dos trabalhos que, responder perguntas, recorrer à teoria, revisitando conteúdos, mostrar, através de um experimento, são procedimentos suficientes na busca da compreensão de um saber. Os resultados demonstram o aparecimento de dúvidas no momento da prática e depreende que não é possível, ao aluno, perguntar daquilo que não compreende. Desse modo, revisar conteúdos traz maior sustentação teórica.

Concluimos, portanto, para que a possibilidade de confrontarmos diversas metodologias, assimilando que não há regra única e pronta, no processo de ensino de Trigonometria, abre um leque de oportunidades em que educadores da área podem diversificar suas práticas pedagógicas. Tais resultados evidenciam que há espaço para a criatividade, dentro da grande importância que o estudo da Trigonometria apresenta aplicabilidades e exploração para construção do conhecimento. É preciso, contudo, conhecer a sensibilidade de cada grupo para que, diante das necessidades das turmas, cada educador possa implementar uma ou outra metodologia e, assim, produzir conhecimento.

Por último, mas não menos importante, mencionamos o fato de que a pesquisa nos ofereceu a oportunidade de constatarmos a variedade de alternativas descritas na literatura científica, que podem fomentar o ensino de Trigonometria. Cabe, por conseguinte, a nós, professores, desenvolvermos o hábito da pesquisa de forma a contribuir tanto para o nosso aprimoramento quanto para as metodologias de ensino.

Dessa maneira, esperamos que este trabalho seja utilizado como elo motivador para professores em geral, em especial na área da Trigonometria, como fonte de consulta ao longo de seu aperfeiçoamento metodológico profissional.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Rosana Aparecida; MORI, Nerli Nonato Ribeiro; LACANALLO, Luciana Figueiredo. Salas de recursos e o uso de jogos para o ensino de conceitos matemáticos. **Revista Educação Especial**, Santa Maria, v. 22, n. 34, p. 155-164, 2009. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/educacaoespecial/article/view/532>. Acesso em: 03 out. 2022.

ALVES, Robewilton da Silva. **Proposta Metodológica para o Ensino da Trigonometria Baseada na Psicologia Pedagógica**. 2016. 101 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/21759>. Acesso em: 12 jan. 2023.

BATISTA, Emerson Alves. **Trigonometria em uma Oficina de Usinagem**. 2018. 108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, Florestal/MG, 2018. Disponível em: <https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/24406/1/texto%20completo.pdf>. Acesso em: 20 set. 2022.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática: Ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias**. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BORGES, Éder *et al.* **Pedagogia Tradicional: O Papel do Professor no Processo de Ensino-Aprendizagem. Memorial TCC Caderno da Graduação**, Curitiba, v. 7, n. 1, p. 177-198, 2021. Disponível em: <https://memorialtcccadernograduacao.fae.edu/cadernotcc/article/view/335>. Acesso em: 12 jan. 2023.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Bluncher, 1974.

BRANDÃO, Jefferson Dagmar Pessoa. **O papel do livro didático no Processo de Ensino Aprendizagem: uma introdução do conceito de Função**. 2013. 86 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande/PB, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018.

BRIZOLA, Jairo; FANTIN, Nádia. Revisão da literatura e revisão sistemática da literatura. **Revista de Educação do Vale do Arinos**, Juara, v. 3, n. 2, p. 23-39, 2016. Disponível em: <https://periodicos.unemat.br/index.php/relva/article/view/1738>. Acesso em: 10 fev. 2023.

BROLEZZI, Antonio Carlos. **A arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da história da matemática**. 1991. 79 p. Dissertação (Mestrado em Didática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria números complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).

COSTA, Bruno de Paula; PEQUENO, Pedro Igor Evangelista; PEREIRA, Cícero da Silva. Dificuldades de aprendizagem da trigonometria. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 6., 2019, Campina Grande. **Anais VI CONEDU**. Campina Grande: Realize Editora, 2019. p. 1-12. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/59909>. Acesso em: 02 abr. 2023.

COSTA, Nilce Menenguelo Lobo da. **Funções Seno e Cosseno**: Uma sequência de Ensino a partir dos contextos do “Mundo Experimental” e do Computador. 1997. 250 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997. Disponível em: <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11139>. Acesso em: 26 set. 2022.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 10**: geometria espacial, posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

ECKERT, Marco Aurélio. **Educação matemática e cidadania**: entrelaçamentos possíveis. 2019. 155 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul Porto alegre, 2019.

EVANGELISTA, Antônia Dinamária Gomes. **Regras Matemáticas e suas Justificativas**: Breve Histórico sobre o Ensino de Matemática no Brasil e uma reflexão acerca da inclusão de Demonstrações na Prática Docente. 2014. 110 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Ceará, Ceará, 2014. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/9158>. Acesso em: 10 fev. 2023.

FELIX, Diego Dias. **História da Trigonometria**: Um levantamento dos trabalhos produzidos nos cursos de Especialização e Graduação do Departamento de Matemática. 2011. 43 f. Trabalho De Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande/PB, 2011.

GAIESKI, Reges Vanclei. **Trigonometria e Aplicações**. 2014. 51 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

GALVAO, Taís Freire; PEREIRA, Mauricio Gomes. Revisões sistemáticas da literatura: passos para sua elaboração. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, Brasília, v. 23, n. 1, p. 183-184, 2014. Disponível em: http://scielo.iec.gov.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1679-49742014000100018. Acesso em: 15 fev. 2023.

GONÇALVES, Rafael Marques. **A Trigonometria e a História da Matemática em sala de aula**: uma experiência com a construção de instrumentos de navegação e do relógio de sol. 2018. 69 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciado em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/179421>. Acesso em: 28 ago. 2022.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática Elementar, 3: Trigonometria**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática Elementar, 3: Trigonometria**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

KAWASE, Eduarda Megumi. **Revisão Sistemática sobre Produção de Vídeos na Escola para Alunos Surdos**. 2020. 87 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos/SP, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/12846>. Acesso em: 02 abr. 2023.

KLEIN, Marjúnia Èdita Zimmer. **O Ensino da Trigonometria Subsidiado pelas teorias da aprendizagem significativa e dos campos conceituais**. 2009. 121 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <https://tede2.pucrs.br/tede2/handle/tede/3357>. Acesso em: 10 fev. 2023.

MARTINS, Jéssica Souza; MEDEIROS NETA, Olivia Moraes de; NASCIMENTO, Francinaide de Lima Silva. O Catálogo de Teses e Dissertações como fonte para estudos bibliométricos do campo da Educação Profissional. **Research, Society and Development**, Itajubá, v. 8, n. 8, p. 2525-3409, 2019. Disponível em: <https://www.redalyc.org/journal/5606/560662199025/560662199025.pdf>. Acesso em: 29 fev. 2023.

MARTINS, Ricardo Lisboa. **Concepções sobre a matemática e seu ensino na perspectiva de professores que ensinam matemática em licenciaturas de Alagoas**. 2012. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

MENDES, Luiz Otavio Rodrigues; PEREIRA, Ana Lucia. Revisão sistemática na área de Ensino e Educação Matemática: análise do processo e proposição de etapas. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 22, n. 3, p. 196-228, 2020.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MOHER, D. *et al.* Preferred reporting items for systematic reviews and meta-analyses: the PRISMA statement. **PLoS Med.**, [S. l.], v. 6, n. 7, p. e1000097, 2009.

OLIVEIRA, Joerk da Silva. **Aplicação da Trigonometria nas Ciências**. 2015. 124 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2015.

PIRES, Carlos Eduardo Moraes, **O Ensino de Trigonometria por meio de aulas práticas**. 2016. 110 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro, 2016.

ROSA, Neiva. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**. Produções Didático-Pedagógicas. 2014. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unioeste_mat_pdp_neiva_rosa.pdf. Acesso em: 12 mar. 2023.

SANTIAGO, Elison. **O Ensino da Trigonometria Usando o Software Geogebra como Ferramenta de Ensino – Aprendizagem**. 2015. 95 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2015.

SANTOS, Vanessa dos Anjos dos; MARTINS, Liziane. A importância do Livro Didático. **Candombá – Revista Virtual**, Salvador, v. 7, n. 1, p. 20-33, 2011. Disponível em: <http://web.unijorge.edu.br/sites/candomba/pdf/artigos/2011/a1.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2023.

SILVA, Nívia Monique. **Ensino Aprendizagem de Trigonometria: Uma Abordagem Histórica Evidenciando o Elo entre Teoria e Prática**. 2020. 70 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Jataí, Jataí, 2020.

SILVA, Wellington da. **O ensino de trigonometria: Perspectivas do Ensino Fundamental ao Médio**. 2013. 91 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/92419>. Acesso em: 16 set. 2022.

SIMIONATO Ivane Marcarini; PACHECO, Edilson Roberto. **Um olhar histórico à trigonometria como fonte de motivação em sala de aula**. 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/700-4.pdf>. Acesso em: 02 set. 2022.

SOUSA, Francisca Genifer Andrade de *et al.* Contribuições das novas tecnologias digitais à aprendizagem matemática. In: MOREIRA, Marília Maia; SILVA, Amsranon Guilherme Felício Gomes da; ALVES, Francione Charapa. **O ensino de matemática na educação contemporânea: o devir entre a teoria e a práxis**. Iguatu, CE: Quipá Editora, 2021. cap. 2, p. 32-42.