



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E DE TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTONIO RUBENS PEREIRA MARTINS

**ENGENHARIA DIDÁTICA: O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO
ALGÉBRICO POR MEIO DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS APLICADAS
NA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA NO ENSINO MÉDIO**

SOBRAL – CEARÁ

2023

ANTONIO RUBENS PEREIRA MARTINS

ENGENHARIA DIDÁTICA: O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO
POR MEIO DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS APLICADAS
NA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes.

SOBRAL – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Martins, Antonio Rubens Pereira.

Engenharia didática: o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de sequências didáticas aplicadas na resolução de situações-problema no ensino médio [recurso eletrônico] / Antonio Rubens Pereira Martins. - 2023.

93 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Sobral, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Daniel Brandao Menezes.

1. Pensamento Algébrico. 2. Engenharia Didática. 3. Teoria das Situações Didáticas. I. Título.

ANTONIO RUBENS PEREIRA MARTINS

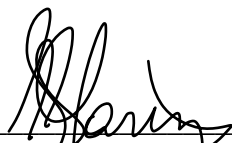
ENGENHARIA DIDÁTICA: O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO
ALGÉBRICO POR MEIO DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS APLICADAS
NA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao curso de
Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional (PROFMAT) do Centro
de Ciências e Tecnologia da
Universidade Estadual do Ceará, como
requisito parcial para obtenção do título
de Mestre em Matemática. Área de
Concentração: Matemática.

Aprovada em: 19 de junho de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes (Orientador)
Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA



Prof. Dra. Alessandra Senes Marins
Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA

Prof. Dr. Ailton Campos do Nascimento
Universidade Federal do Ceará – UFC

Este trabalho é dedicado a Deus, a Nossa Senhora Mãe Rainha, aos meus pais, a minha família, aos meus professores, por serem os meus alicerces.

“Não há maior sinal de loucura do que fazer uma coisa repetidamente e esperar a cada vez um resultado diferente.”

(Albert Einstein).

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela dádiva da vida, por me inspirar, confortar e fazer acreditar que tudo é possível com a presença do pensamento Divino;

A minha família, por me incentivar, apoiar e compreender nas dificuldades e na ausência por conta da dedicação nessa caminhada;

A minha querida Mãe (in memoriam), pela referência, por ser uma orientadora e educadora incansável;

Ao meu Pai (in memoriam), pelo esforço e dedicação proferidos na educação dos seus filhos;

Aos meus irmãos, por estarem sempre juntos no apoio incentivador;

Aos meus professores de toda a carreira estudantil, por serem a mola propulsora e condicional para aquisição do conhecimento complexo;

Aos meus amigos, por me apoiarem nos momentos difíceis, especialmente, aos meus colegas de carreira dessa disciplina;

Aos professores do Programa, pela dedicação e por acreditarem na capacidade de cada um de nós em cursar essa etapa de formação, em especial, ao meu orientador Professor Dr. Daniel Brandão.

Aos colegas da Turma, pelas contribuições dadas, em especial, os colegas Claudimar e Ana Cibely, pelo apoio e motivações proferidas durante esse processo de aprendizagem.

Aos meus alunos, por darem oportunas condições de ensinar e de aprender em diferentes realidades, em especial, os envolvidos neste trabalho.

RESUMO

Este trabalho acadêmico apresenta uma pesquisa realizada através de aplicações que oportunizam o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de sequências didáticas aplicadas na resolução de situações-problema no ensino médio. A abordagem metodológica utilizada para a pesquisa, é baseada em reflexões sobre o ensino e aprendizagem da álgebra, desde a sua fase introdutória a níveis mais avançados, com estruturas abstratas mais complexas. A pesquisa foi executada envolvendo um grupo de alunos do 1º Ano D, do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Profissional Francisca Maura Martins, do município de Hidrolândia – CE, usando todos preceitos metodológicos da Engenharia Didática em conjunção com a Teoria das Situações Didáticas – TSDs. Com base nas concepções de álgebra generalizada de Usiskin (1995), o trabalho busca desenvolver o pensamento algébrico por meio de sequências didáticas, envolvendo expressões algébricas de estruturas simples, como equações e sistemas de equações, seguidas de aplicações dessas estruturas, na resolução de situações-problema, em que procurou-se verificar o conhecimento algébrico destes conteúdos, bem como, verificar os principais erros cometidos por esse grupo de aprendizes. O trabalho foi estruturado levando-se em conta a metodologia seguida pela Engenharia Didática e suas etapas, que são: análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação. A metodologia de ensino, fundamentada dentro de uma perspectiva de construção na Teoria das Situações Didáticas, organizada conforme a Teoria de Análise do Conteúdo – TAC, desenvolvida por Bardin (2016), apresenta situações de ensino que, diante de conclusões obtidas a partir de resultados apresentados na realização de atividades elementares, condições para o desenvolvimento do pensamento algébrico, despertando habilidades na compreensão de situações abstratas e, automaticamente, alcançando conclusões satisfatórias em sua solução. O processo ocorreu, sempre, buscando provocar transformações no pensamento algébrico e, conseqüentemente, despertando mais empenho no desenvolvimento de operações de cunho algébrico e resolução de problemas.

Palavras-Chave: Pensamento Algébrico. Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas.

ABSTRACT

This academic work presents research carried out through applications that allow the development of algebraic thinking through didactic sequences applied in the resolution of problem situations in high school. The methodological approach used for the research is based on reflections on the teaching and learning of algebra, from its introductory phase to more advanced levels, with more complex abstract structures. The research was carried out involving a group of students of the 1st Year D, of the High School of the State School of Professional Teaching Francisca Maura Martins, in the city of Hidrolândia - CE, using all methodological precepts of Didactic Engineering in conjunction with the Theory of Didactic Situations - TSDs. Based on Usiskin's conceptions of generalized algebra (1995), the work seeks to develop algebraic thinking through didactic sequences, involving algebraic expressions of simple structures, such as equations and systems of equations, followed by applications of these structures, in the resolution of situations -problem, in which we tried to verify the algebraic knowledge of these contents, as well as to verify the main mistakes made by this group of learners. The work was structured considering the methodology followed by Didactic Engineering and its stages, which are: preliminary analysis, design and a priori analysis, experimentation and a posteriori analysis and validation. The teaching methodology, based on a perspective of construction in the Theory of Didactic Situations, organized according to the Theory of Content Analysis - CAT, developed by Bardin (2016), presents teaching situations that, in the face of conclusions obtained from results presented in carrying out elementary activities, conditions for the development of algebraic thinking, awakening skills in understanding abstract situations and automatically reaching satisfactory conclusions in their solution. The process always took place seeking to provoke transformations in algebraic thinking and, consequently, awakening more commitment in the development of algebraic operations and problem solving.

Keywords: Algebraic Thinking. Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Papiro de Rhind.	19
Figura 2 – Quadrado de $L = 2$.	22
Figura 3 – Quadrado de $L = 3$.	22
Figura 4 – Quadrado de $L = 4$.	22
Figura 5 – Construções de equações e funções no GeoGebra.	29
Figura 6 – François Viète, considerado “O pai da álgebra”.....	32
Figura 7 – René Descartes.	33
Figura 8 – Triângulo Didático de Brousseau 	48
Figura 9 – Teste do Aluno A (Atividade 1).....	59
Figura 10 – Teste do Aluno B (Atividade 1).....	60
Figura 11 – Teste do Aluno C (Atividade 1).....	61
Figura 12 – Teste do Aluno A (Atividade 2).....	65
Figura 13 – Teste do Aluno B (Atividade 2).....	66
Figura 14 – Teste do Aluno A (Atividade 3).....	67
Figura 15 – Teste do Aluno B (Atividade 3).....	68
Figura 16 – Teste do Aluno A (Atividade 4).....	71
Figura 18a – Teste do Aluno C (Atividade 4).....	73
Figura 18b – Teste do Aluno C (Atividade 4)	74

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – As concepções da Álgebra e o uso das variáveis	22
Quadro 2 – Vertentes fundamentais do Pensamento Algébrico	26
Quadro 3 – Classificação das perguntas como estratégias de mediação na metodologia de ensino Sequência Fedathi.....	47
Quadro 4 – Primeiro teste diagnóstico	57
Quadro 5 – Segundo teste diagnóstico	63
Quadro 6 – Terceiro teste diagnóstico	64
Quadro 7 – Quarto teste diagnóstico	70

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	A ÁLGEBRA E SEU DESENVOLVIMENTO	19
2.1	O desenvolvimento da Álgebra no Brasil	19
2.2	Concepções de Álgebra e a Educação Algébrica proposta nos PCNS	21
2.3	A Álgebra e o Pensamento Algébrico na Educação Escolar	24
3	AS FERRAMENTAS TECNOLÓGICAS CONTRIBUTIVAS NO ESTUDO DA ÁLGEBRA	27
3.1	Os Softwares no Âmbito Escolar e o papel da Tecnologia	27
3.2	O GeoGebra	28
3.3	Demonstrações de Construções Gráficas de Estruturas Algébricas no GeoGebra	29
3.4	Dificuldades enfrentadas na Implantação de Softwares no âmbito Escolar	30
4	APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA	32
4.1	O Uso de Mensagens Codificadas e a Álgebra	32
4.2	O Ensino-Aprendizagem da Álgebra em Documentos Oficiais	33
4.3	A Transição Aritmética/Álgebra	35
4.4	Contextos com Abstração e Estrutura Algébrica	37
4.5	Métodos Algébricos	38
5	METODOLOGIA	40
5.1	Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas	41
5.2	A Teoria da Análise do Conteúdo (TAC)	42
5.3	Análises Preliminares	43
5.4	Concepção e Análise a Priori	45
5.5	A Teoria das Situações Didáticas	48
5.6	Experimentação	51
5.7	Transposição Didática e Contrato Didático	52
5.8	Análise a Posteriori e Validação (Interna e Externa)	53
6	DISCUSSÕES E RESULTADOS	56

6.1	Observações concernentes ao primeiro teste diagnóstico em Análise preliminares ..	56
6.2	Aspectos observados no segundo teste diagnóstico	62
6.3	Aspectos observados no terceiro teste diagnóstico	63
6.4	Aspectos observados no quarto teste diagnóstico	69
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	78
	REFERÊNCIAS	80
	APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	
	AOS PAIS	84
	APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO DO MENOR	87
	APÊNDICE C – 1ª ATIVIDADE APLICADA	89
	APÊNDICE D – 2ª ATIVIDADE APLICADA	90
	APÊNDICE E – 3ª ATIVIDADE APLICADA	91
	APÊNDICE F – 4ª ATIVIDADE APLICADA	92
	ANEXO A – FOTO DE ENCONTRO PARA APLICAÇÃO DE ATIVIDADES....	93

1 INTRODUÇÃO

A Álgebra é um dos pilares fundamentais da Matemática, pois traz conceitos que desenvolvem e fortalecem a capacidade de compreensão abstrata dos conteúdos, como, a Geometria, o Cálculo, a Análise, a Estatística, a Probabilidade, citadas, aqui, como exemplos que fazem parte do currículo necessário para uma formação inicial e continuada com as devidas competências para o desenvolvimento integral nas disciplinas de Matemática. No entanto, na prática de sala de aula são identificadas muitas dificuldades na aprendizagem dos conteúdos de álgebra por parte dos estudantes, especificamente, nos conteúdos de fundamentação relevante, que são, equações e funções, constituindo, assim, grande impacto em qualquer nível de ensino e de aprendizagem.

Booth (1995) afirma que, “a álgebra é uma fonte de confusão e atitudes negativas consideráveis entre os alunos”. Para ela, uma das razões para esse “estado das coisas” é que os alunos, normalmente, consideram a álgebra uma matéria difícil por não existir a compreensão no significado das variáveis, dificultando, assim, o desenvolvimento do pensamento algébrico.

As experiências relatadas no cotidiano da sala de aula, na execução do trabalho docente, levaram a constatação de que muitos alunos apresentam defasagens em conteúdo de cunho algébrico, impossibilitando avançar na aprendizagem de outros conteúdos com estruturas algébricas mais complexas.

Diante desses fracassos, previamente observados, mensurados por meio dos resultados de avaliações externas, como, SPAECE e ENEM, fez-se necessário refletir sobre a idealização de novas situações didáticas para o ensino da matemática, especialmente, nos conceitos de estruturas algébricas, que exigem ideias abstratas na condução dessa aprendizagem por parte dos docentes.

A introdução da álgebra é, provavelmente, o momento de maior dificuldade dos estudantes dentro da aprendizagem de Matemática, que se configura devido a álgebra apresentar um perfil muito mais abstrato do que o conhecimento aritmético já conhecido pelos estudantes, até então. Essas dificuldades podem existir por diversos fatores, entre eles, a forma como se introduziu os primeiros ensinamentos desses conteúdos, e como se deu o cuidado dos procedimentos didáticos do tratamento da abstração nas aplicações de resolução de problemas contextualizados com o cotidiano. É preciso que, antes de trabalhar com variáveis, se desenvolva para o aprendiz o conceito dessas construções que estão baseadas, principalmente, em exemplos ou resoluções de problemas vivenciados pelos estudantes, sob pena de eles apresentarem dificuldade em sua compreensão.

Não adiantará por uma variável à frente de um aprendiz até que esta a veja variar. Quando a variável tiver realmente variado na experiência deste aprendiz, então haverá sentido colocar o nosso primeiro escolhido, em lugar de todos os números diferentes que já representam o nosso número escolhido, e não será necessário muito tempo para convencê-la de que, como economia de expressão, pode usar-se letra-código para o nosso número escolhido. (DIENES, 1974, p. 70).

O ensino de álgebra, no Brasil, tem passado por mudanças significativas nas últimas décadas, com o objetivo de tornar o aprendizado mais acessível e efetivo para os estudantes. Anteriormente a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (1996), o ensino de álgebra era visto como algo complexo e de extrema abstração, restrito apenas a estudantes de níveis mais avançados de ensino, como os universitários.

No entanto, desde a implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 1997, verificou-se uma mudança significativa na forma como a álgebra é ensinada nas escolas. Os PCN estabelecem diretrizes e objetivos claros para o ensino da álgebra, com ênfase no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico e resolução de problemas.

Essa abordagem mais centrada no aluno e menos focada na memorização de fórmulas tem sido efetiva em tornar a álgebra mais acessível e compreensível para estudantes de diferentes idades e níveis de conhecimento. Além disso, as tecnologias digitais, como softwares de simulação e ferramentas de visualização, têm ajudado a tornar o ensino da álgebra mais interativo e envolvente.

No entanto, apesar dos avanços, ainda há desafios a serem enfrentados no ensino de álgebra, no Brasil. Um deles é a falta de formação adequada dos professores, que, muitas vezes, não têm conhecimentos atualizados sobre as metodologias e recursos disponíveis para o ensino da álgebra. Além disso, a falta de investimento em infraestrutura e tecnologia nas escolas pode ser outro obstáculo para a implementação de práticas pedagógicas mais inovadoras.

É importante continuar investindo em capacitação de professores, bem como, em recursos e tecnologias que possam ajudar a tornar o ensino da álgebra mais efetivo e acessível para os estudantes. Com isso, será possível garantir que os estudantes brasileiros possam desenvolver habilidades fundamentais em matemática, como o raciocínio lógico e a resolução de problemas, preparando-os para enfrentar os desafios do mundo atual.

O desenvolvimento pedagógico que impulsionou a compreensão e a discussão inicial do desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais (AI) do Ensino Fundamental (EF) recorreu-se aos documentos nacionais brasileiros que tratam da Matemática nessa etapa de escolarização, que são: a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017); os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN dos AI, do EF e do EM (BRASIL, 1997);

o Guia de Livros Didáticos – Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2016 (BRASIL, 2015); bem como, os cadernos vinculados ao Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa que abrangem eixos de conteúdos matemáticos propostos no PNAIC dos AI do EF (BRASIL, 2014a; 2014b; 2014c; 2014d; 2014e e 2014f).

Optou-se por apresentar, inicialmente, a BNCC (BRASIL, 2017), que aborda de forma explícita o desenvolvimento do pensamento algébrico nos AI do EF e, a partir do entendimento desse assunto, presente nesse documento, organizou-se as ideias matemáticas que remetem de forma implícita ao pensamento algébrico que constam nos demais documentos citados acima.

Se tratando de linguagem simbólica, no contexto algébrico, há que se mencionar que, o simbolismo algébrico e o pensamento algébrico parecem impossíveis de dissociar, configurando-se, entre eles, uma conexão similar à de um ciclo – ovo e galinha: para ser expresso, o pensamento algébrico necessita de uma notação e, quanto mais adequada essa notação, mais ele se desenvolve e vice-versa.

McMullin (2001) reforça essa constatação ao afirmar que a manipulação de símbolos é o que faz a Matemática funcionar, ter sentido e ser necessária. Na realidade, não é possível fazer Matemática sem dispor dessa capacidade, mas a Matemática é muito mais que símbolos. Parafraseando McMullin, pode-se dizer que Álgebra é muito mais que notação algébrica.

Desse modo, a simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas, ao mesmo tempo que essa potencialidade do simbolismo se torna uma fragilidade para o contexto algébrico, quando a execução do pensamento abstrato se norteia sem referentes significativos. Sendo assim, a abordagem pedagógica utilizada pelo professor diante da sua metodologia didática durante o seu trabalho em sala de aula, é essencial na compreensão da linguagem abstrata e posteriormente na resolução de problemas.

Diante do fracasso dos alunos, previamente observado em avaliações internas e externas, após mensuração de resultados, surge a necessidade de refletir e mobilizar atitudes para novas situações didáticas no ensino da matemática, especialmente, os conceitos de estruturas algébricas, que exigem ideias abstratas na condução dessa aprendizagem por parte dos docentes.

Sabe-se que sempre há a necessidade de retomar estudo de alguns pré-requisitos com o objetivo de eliminar defasagens e tornar o foco da aprendizagem de conteúdos subsequentes mais proveitosos, possibilitando, assim, a consolidação da aprendizagem de

outros conteúdos mais prospectiva no avanço da aprendizagem matemática. Mas, diante desse processo de recomposição de aprendizagem, pode-se observar, em vários alunos, elevada resistência no estudo de conteúdos algébricos, que julgam como “difícil” a aprendizagem desses conteúdos, consequência de não possuir o pensamento algébrico desenvolvido com a condição de visualizar situações abstratas presentes no contexto algébrico.

Sessa (1995) pergunta: mas, quais são as primeiras experiências que o aluno tem com a álgebra ao chegar à escola? Geralmente ele trabalhará com situações de cálculo do valor desconhecido de uma equação, que, na maioria das vezes, apresenta uma única solução. Ou, então, resolverá um problema sem precisar dessa ferramenta: os recursos aritméticos de que dispõe costumam ser suficientes. Assim, tanto a proposta em forma de equação como a resolução por meio dessa, tornam-se uma imposição, além de essa nova ferramenta parecer uma complicação desnecessária.

Em virtude disso, idealizou-se com os alunos do referido grupo, no sentido de trazer, de forma recuperativa e em curto prazo, uma proposta de desenvolvimento do pensamento algébrico necessário para o domínio dos métodos de resolução de equações, sistemas de equações, inequações e funções em níveis mais avançados de desenvolvimento na abstração própria da álgebra, com suas aplicações relevantes na ciência e na vida moderna.

Como objetivo geral, intuiu-se desenvolver uma engenharia didática associada com a Teoria das Situações Didáticas por meio de um estudo do desenvolvimento do pensamento algébrico utilizando sequências didáticas aplicadas à resolução de situações-problema com um grupo de alunos do ensino médio para desenvolver as competências de compreensão do contexto algébrico e habilidades suficientes na resolução dessas situações-problema. Os objetivos específicos para essa pesquisa, foram:

1. Apresentar a proposta de estudo do desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de sequências didáticas, tendo como propósito a resolução de situações-problema durante o ensino médio;
2. Resolver equações algébricas com uma incógnita e propor para estudo o desenvolvimento de resolução de problemas que aborde situações reais e contextualizadas.
3. Investigar e analisar, com os alunos do ensino médio, o desenvolvimento das habilidades necessárias, diante de situações algébricas propostas que requeiram um pensamento de cunho algébrico mais avançado.

Diante disso, o presente trabalho, realizado com um grupo de discentes da turma do 1º Ano D, da Escola Estadual de Ensino Profissional Francisca Maura Martins (FMM), situada em Hidrolândia-CE, traz uma perspectiva de Engenharia Didática sobre tal situação,

apresentando uma proposta de Sequência Didática (SD) para o estudo da álgebra e, automaticamente, o desenvolvimento do pensamento abstrato para resolução de situações-problema, em que foi utilizada a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1976) no apoio das execuções de atividades e análise de resultados.

Sendo assim, diante de todo o procedimento inicial, passando pelas primeiras ações da pesquisa até as análises levantadas na Engenharia Didática, segue-se, então, com a discussão da problemática e a justificativa, apresentando, finalmente, os objetivos do estudo.

Em seguida, temos a abordagem da metodologia da Engenharia Didática associada com a Teoria das Situações Didáticas em conjectura com a Teoria de Aplicação do Conteúdo (TAC) de Bardin (2016), numa ordem epistemológica, cuja organização cognitiva e didática se fundamenta pela concepção francesa, diante de uma proposta apresentada pelo francês Guy Brousseau, na década de 1980. Essa abordagem busca compreender como os alunos aprendem matemática e como os professores podem ensiná-la de forma mais eficaz, propondo situações organizadas e cuidadosamente planejadas para permitir que os discentes construam seu próprio conhecimento matemático de natureza algébrica.

O trabalho em estudo é composto por oito capítulos que abordam diferentes aspectos relacionados ao tema central, que é o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico por meio de Sequências Didáticas aplicadas na Resolução de situações-problema no Ensino Médio.

O primeiro que contém essa introdução. O segundo capítulo discorre sobre a Álgebra e seu desenvolvimento e sua introdução no ensino brasileiro, relatando, também, a origem da sua relevância no Movimento da Matemática Moderna – MMM, as abordagens das compreensões algébricas e sua inclusão nos livros didáticos, currículos, sala de aula.

O terceiro capítulo aborda a importância das ferramentas tecnológicas no estudo da álgebra, contributivas para a aprendizagem dos conteúdos algébricos, com menção aos softwares no ambiente escolar, especificamente, o GeoGebra.

O quarto capítulo faz menção a atratividade das Modelagens Matemáticas como suporte Algébrico, detalhando e exemplificando com modelos em estudo de equações, inequações e resolução de problemas de cunho algébrico, apresentando, diante de modelos propostos, situações reais elaboradas.

O quinto capítulo intensifica a aprendizagem da álgebra, fazendo relato do seu uso em mensagens codificadas e seu ensino por meio de documentos oficiais, bem como, a transição da Aritmética para a Álgebra. O capítulo enfoca questões com modelos de problemas enfatizando a importância do pensamento abstrato e seus métodos de resolução.

No sexto capítulo, o trabalho apresenta sua metodologia, consolidando sua proposta experimental e sua engenharia aplicada à execução das sequências didáticas em todas as suas etapas na turma de 1º Ano (Turma D) citada na sua introdução. São abordadas, nesse capítulo, as etapas de sondagem, análise de resultados e a intervenção nos mesmos, as características estilísticas dessas correntes, bem como, as influências que exercer.

O sétimo capítulo, “Discussões e Resultados”, levanta um debate diante das resoluções apresentadas no capítulo anterior, no que diz respeito a resolução de equações nos dois sentidos (incógnita e variável) e suas aplicações na solução dos problemas propostos.

Por fim, o oitavo capítulo, faz um breve fechamento com as considerações finais acerca dos experimentos desenvolvidos ao longo das atividades práticas e os avanços obtidos diante das SD aplicadas, não deixando de focalizar toda a história e as técnicas contributivas, desenvolvidas na aprendizagem da álgebra.

2 A ÁLGEBRA E SEU DESENVOLVIMENTO

Os primeiros registros da álgebra ocorreram por volta de 1650 a.C., com o papiro de Rhind, e, ao longo da história, veio passando por diversos momentos e transformações até a atualidade. Esse papiro detalhava a solução de 85 problemas de aritmética, fração, equações lineares, geometria, cálculos de área, volume, trigonometria básica e repartições proporcionais.



Figura 1 – Papiro de Rhind.

O ensino de matemática sofre mudanças constantemente com o passar dos anos, adequando-se as situações didáticas mais objetivas e eficientes no ensino dos seus conteúdos. A Álgebra é um campo da matemática que, com seu desenvolvimento, veio adquirindo outros significados. Em razão dessas mudanças, neste capítulo, procura-se compreender o desenvolvimento da Álgebra no Brasil, as Concepções de Álgebra e a Educação Algébrica proposta nos PCNS, a Álgebra sob o Âmbito Escolar e o Pensamento Algébrico na Educação Escolar, além de discutir sobre as complexidades atribuídas aos processos de ensino-aprendizagem de expressões algébricas através de sequências didáticas que, por vezes, perpassam como processos de outros conteúdos, que não algébricos, e se apresentam com dificuldades e possibilidades de compreensão de outras situações contextualizadas.

2.1 O desenvolvimento da Álgebra no Brasil

Ao discutir sobre o Ensino de Álgebra no Brasil, analisar-se-á sua ampliação educacional no decorrer das décadas e tomar-se-á como uma das referências o texto de Miguel, Fiorentini e Miorim (1993), que apresenta um estudo histórico sobre o ensino da Álgebra na

história da educação matemática brasileira. Nesse texto, os autores relatam que “a preocupação legal de introduzir a Álgebra no ensino brasileiro, na forma de aulas avulsas, ao lado de disciplinas já estabelecidas como a Aritmética, a Geometria e a Trigonometria, ocorre com a Carta Régia de 19 de agosto de 1799” (1993, p. 40). Assim sendo, considera-se que o ensino de Álgebra no Brasil e, conseqüentemente, o início do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, começou a se constituir no início do século XIX, porém, apenas no início do século XX o ensino é introduzido, de fato, na educação secundária.

Esta tradição será enfatizada pela primeira reforma educacional do ensino da fase republicana - a Reforma Benjamin Constant - e, embora a partir da Reforma Epitácio Pessoa (1901) já se perceba a tentativa de fracionamento dos conteúdos dessas áreas ao longo das séries, a tendência de mantê-las como compartimentos estanques deverá perdurar mesmo após a Reforma Francisco Campos (1931) que assume a denominação “Matemática” em vez de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1993, p. 41).

Contudo, o desenvolvimento ocorreu a partir do dualismo, Geometria e Álgebra. Os autores descrevem que até o início do Movimento da Matemática Moderna – MMM –, a Geometria sobressaía à Álgebra. Consideram que essa dualidade tem “origem no pensamento grego, notadamente no pensamento platônico” (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1993, p. 44). Ressaltam, ainda, que nesse pensamento, a Geometria era supervalorizada por ser tratar de uma teoria vinculada a nobreza e a Aritmética era deixada em segundo plano, visto que era direcionada aos comerciantes e artesões.

Dessa forma, os livros didáticos valorizavam as provas e as demonstrações no ensino da Geometria, mas, ao relatarem sobre a Álgebra, desvalorizavam a rigidez nas demonstrações fazendo “quase sempre mecanizado e automatizado” (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1993, p. 42). Esse processo ocorreu até o início do MMM, pois, a partir desse movimento, a Álgebra se constituiu como um conteúdo mais importante para o desenvolvimento tecnológico.

De fato, a Álgebra viria a desempenhar um lugar de destaque não apenas em sua concepção tradicional, mas, sobretudo, em sua concepção moderna. Isto porque, os grandes avanços da Matemática, nos dois últimos séculos, deram-se graças ao processo de algebrização da Matemática Clássica, tornando-a mais rigorosa, precisa e abstrata e, portanto, assim pensava se, mais aplicável. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM; 1993, p. 45-46).

Nesse período, em virtude do avanço tecnológico, a Álgebra começa a ganhar mais espaço que a Geometria. Contudo, com essa abordagem maior das compreensões algébricas, seu ensino foi instaurado por um rigor maior nas demonstrações havendo perda do seu caráter para a resolução de problemas.

Na década de 1960, com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna, que possuía como um dos seus objetivos a unificação dos três campos fundamentais da matemática escolar através da introdução de elementos unificadores, como a teoria dos conjuntos, funções e as estruturas algébricas, a álgebra passou a ocupar um lugar de destaque. O ensino da álgebra recebeu um maior rigor e assumiu uma acentuada preocupação com os aspectos lógico-estruturais dos conteúdos e a precisão da linguagem. Em consequência, a Álgebra perdeu o seu caráter pragmático, útil para resolver problemas. O programa de Álgebra, então, começava pelo estudo da teoria de conjuntos e a ênfase era nas operações e nas suas propriedades. (ARAÚJO, 2008, p. 333).

Consequentemente, o MMM acarretou resultados significativos ao ensino da Álgebra no Brasil. Porém, adjacente ao espaço adquirido com o movimento, vieram os questionamentos sobre o processo de ensino e aprendizagem tecnicista apresentado pelos professores, uma vez que, essa “nova” Álgebra atribuiu processos abstratos e rigorosos ao seu desenvolvimento e ensino, marginalizando seu caráter de resolução de problemas e valorizando sua abordagem abstrata e conteudista. Eles observam:

[...] a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões- tal como tem ocorrido em várias décadas, mostra que o seu ensino não tem recebido a devida atenção. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM; 1993 p. 40).

Compreende-se que, por mais que o conteúdo de Álgebra adquira, cada vez mais, importância nos livros didáticos, currículos, sala de aula, o ensino e aprendizagem devem ser questionados pelos professores a todo instante. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 60) já descreviam que a Álgebra deve ser abordada com novo enfoque “apresentando-a incorporada aos demais blocos de conteúdos, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico e não o exercício mecânico do cálculo”.

No entanto, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é o documento que determina as competências, as habilidades e as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver durante cada etapa da Educação Básica, corrobora com os mesmos pensamentos apresentados nos PCN.

2.2 Concepções de Álgebra e a Educação Algébrica proposta nos PCNS

Há que ressaltar, que situações de aprendizagem exigem estar centradas na construção de significados, mudanças e elaboração de estratégias e no desenvolvimento da capacidade para resolução de problemas, de modo que possibilite ao aprendiz desenvolver o pensamento indutivo e dedutivo.

As diferentes concepções da Álgebra, segundo Usiskin (1995), relacionam-se com os diferentes usos das variáveis apresentados a seguir:

Quadro 1 – As concepções da Álgebra e o uso das variáveis

CONCEPÇÕES DA ÁLGEBRA	USO DAS VARIÁVEIS
Aritmética Generalizada	Generalizadoras de Modelos
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo das Relações	Argumentos, parâmetros (relacionar gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: Usiskin (1995, p.20)

1 – Álgebra com aritmética generalizada

Essa concepção da Álgebra aborda as técnicas que proporcionam ao estudante a competência de traduzir e generalizar.

Para Usiskin (1995), é impossível estudar aritmética adequadamente sem lidar implicitamente e explicitamente com variáveis, pois, segundo ele, as duas descrições se assemelham.

A generalização de padrões torna as estratégias necessárias no entendimento da álgebra, facilitando, assim, o trabalho docente no ensino desse segmento.

Exemplo:

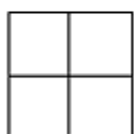


Figura 2

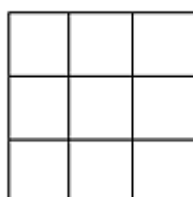


Figura 3

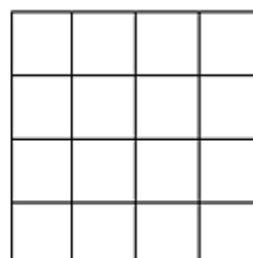


Figura 4

Questionamentos:

- Determine a quantidade de quadrinhos da Figura 3 e da Figura 4;
- Qual a quantidade de quadrinhos da Figura 3?
- Quantos quadrinhos teria a Figura 7?

2 – A Álgebra como procedimentos para resolução de certos tipos de problemas

Nessa concepção, deve-se deixar claro o significado de variáveis, fazendo compreender que elas são ou incógnitas ou constantes. Logo, a instrução-chave para o aluno

vai além de generalizar, simplificar e resolver, buscando sentenças equivalentes com estruturas mais fáceis de entendimentos e mesma solução. A resolução de problemas contribui para desenvolver a conexão com os elementos componentes de situações contextualizadas, desenvolvendo o raciocínio e, conseqüentemente, o pensamento algébrico.

Exemplo:

Pense em um número de modo que ao somar 25 a ele resultará 48. Qual o valor do número pensado?

3 – A Álgebra no estudo das relações entre grandezas

Essa concepção traz uma diferença fundamental da anterior, uma vez que esta, aborda variáveis no trato de relações com grandezas, desenvolvendo o raciocínio da variabilidade, e, assim, inicializando a percepção de dependências entre grandezas.

Exemplo:

Quanto custará 52 metros de fio elétrico, se 6 metros custam R\$ 18,00?

4 – A Álgebra no estudo das estruturas

A Abordagem dessa concepção mostra a necessidade de se trabalhar com o objeto arbitrário em estruturas definidas por propriedades. Sendo assim, pretende-se que os alunos tenham capacidade para trabalhar a álgebra de forma abstrata.

Exemplo 1:

Um funcionário recebeu, em um determinado mês, de uma Empresa A, uma quantia relacionada a um serviço prestado. Nesse mesmo mês, recebeu, também, uma quantia de uma Empresa B de R\$ 300,00 por outro serviço prestado. Escreva uma representação do valor recebido por esse funcionário, nesse mesmo mês.

Retomando a concepção da Aritmética generalizada abordada no tópico 1, pode-se construir uma pergunta sobre o Exemplo aplicado com outra estrutura.

“Sendo L a quantidade de quadrinhos em cada lado da Figura, qual expressão representaria a quantidade de quadrinhos em cada Figura”?

As concepções acima descritas estão em concordância com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), quando enfatizam sobre a importância fundamental de se desenvolver esses diversos aspectos da álgebra, principalmente, por meio de situações-problema, o que, muitas vezes, não ocorre em virtude de privilegiar o cálculo algébrico.

Pela exploração de situações problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas,

modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998 p. 50 - 51).

2.3 A Álgebra e o Pensamento Algébrico na Educação Escolar

Cada campo da Matemática está relacionado com os objetos com que esse campo trabalha mais diretamente. Referindo-se ao campo algébrico, podemos nos perguntar com que objetos a álgebra trabalha? Séculos atrás, essa resposta se limitaria ao estudo de expressões e equações. Na atualidade, essa resposta não é mais satisfatória, uma vez que a álgebra está centrada em relações matemáticas abstratas, fazendo abordagem em equações, inequações, funções ou outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos.

No entanto, no âmbito escolar, a visão da Álgebra consiste no trabalho persistente com expressões, prevalecendo o estudo literal direto das estruturas algébricas, apresentando de forma rápida, a perspectiva de que esse tema se limita a um conjunto de regras de transformações de expressões como monômios, polinômios, frações algébricas, processo de resoluções de equações do 1º e 2º grau e de sistemas. Essa perspectiva de ensino sem a priorização do abstrato, terminologia dos anos da década de 1990, ainda é utilizada nos programas curriculares e implantada em escolas, substituindo o planejamento de ensino de “Álgebra” pelo “cálculo” ou “cálculo algébrico”, permanecendo, assim, uma visão redutora da aprendizagem de Álgebra.

Uma perspectiva assumida por alguns autores, e que não se diferencia muito da concepção anterior, é a de que o objeto central da Álgebra são os símbolos. Este campo da Matemática seria, então, definido pelo uso que faz de uma linguagem própria – a linguagem algébrica, repassando uma ideia mais formal do que significativa na aprendizagem da Álgebra. Desse modo, faz sentido encarar o trabalho em Álgebra como a manipulação dos símbolos e das expressões algébricas. Essa perspectiva não anda longe da concepção formalista da Matemática – bem popular no início do século XX, com o logicismo de Gottlob Frege e Bertrand Russell e o formalismo de David Hilbert – segundo a qual a Matemática é essencialmente um jogo de símbolos sem significado. É evidente que não se pode minimizar a importância dos símbolos.

Segundo Keith Devlin (2012), “sem os símbolos algébricos” não existiria uma grande parte da Matemática, criando simplesmente a possibilidade de distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam”.

Desse modo, a simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas, ao mesmo tempo que essa potencialidade do simbolismo se torna uma fragilidade para o contexto algébrico, quando a execução do pensamento abstrato se norteia sem referentes significativos.

Mais recentemente, desde a década de 80 do século passado, emergiu outra visão da Álgebra, delimitando o que deve ser incluído nesse campo da Matemática, referente ao que se ensina na educação básica. Dessas discussões, surgiu igualmente o interesse pela caracterização do pensamento algébrico. Segundo o americano James Kaput (1999), para quem o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Esse processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático lecionado desde os primeiros anos de escolaridade.

Kaput identificou, em 1999, cinco facetas do pensamento algébrico, estreitamente relacionadas entre si: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (iii) o estudo de estruturas abstratas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos. Num texto mais recente, de 2008, Kaput referiu, de novo, esses cinco aspectos, integrando os dois primeiros (simbolismo e generalização), que designa como “aspectos nucleares” (*core aspects*) da Álgebra, e considerando os três últimos como “ramos” (*strands*) deste domínio com expressão na Matemática escolar.

Sendo assim, pode-se afirmar que o grande objetivo do estudo da Álgebra, na Educação Básica, é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, o que inclui a capacidade de manipulação de símbolos, mas, indo muito além disso, incluindo a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, sistemas de equações e de inequações e funções e, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios.

Diante disso, pode-se dizer que o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas.

Quadro 2 – Vertentes fundamentais do Pensamento Algébrico

Representar	<ul style="list-style-type: none">- Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais;- Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numéricos, tabelas, gráficos) e vice-versa;- Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Racionar	<ul style="list-style-type: none">- Relacionar (em particular, analisar propriedades);- Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras;- Deduzir;
Resolver problemas e modelar situações	<ul style="list-style-type: none">- Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009, p. 11).

3 AS FERRAMENTAS TECNOLÓGICAS CONTRIBUTIVAS NO ESTUDO DA ÁLGEBRA

3.1 Os Softwares no Âmbito Escolar e o papel da Tecnologia

Uma questão muito discutida, ainda, diz respeito ao papel da tecnologia, como, calculadoras e computadores. Os alunos devem usar calculadora simples no seu trabalho em Álgebra? Devem usar algum tipo de *software*? Se sim, com que objetivos? Com que cuidados?

Esses questionamentos fazem parte de muitas discussões no trato do ensino-aprendizagem da Matemática no seu cotidiano. Até que ponto podemos ter a garantia de que essas tecnologias podem contribuir ou interferir.

A falta de formação continuada para os professores fazer uso adequado dos equipamentos de informática também é um grande desafio para o uso da tecnologia na sala de aula. Mesmo nas poucas vezes que essas capacitações são realizadas, os próprios professores não evoluem, a maioria não procura se atualizar ou não disponibiliza de tempo suficiente para a informática em sala de aula (COSTA, 2015, p. 30).

Existem muitos tipos de *software* usados no ensino da Álgebra, pelo que se pode citar a folha de cálculo (como, o Excel). Diversas investigações mostram que o uso da folha de cálculo ajuda os alunos interiorizarem a noção de variável e desenvolverem sua capacidade de resolver certos tipos de problemas. No entanto, para alguns aspectos da aprendizagem da Álgebra, como a resolução de equações, esse instrumento digital parece não ter um efeito visível. A calculadora gráfica apresenta características próximas as da folha de cálculo. No entanto, enquanto a primeira dá especial saliência às tabelas e valores numéricos, a essa outra dá volta-se especialmente aos gráficos de funções. Trata-se de uma ferramenta que pode ser muito útil para estudar as funções lineares, afins (não lineares), de proporcionalidade inversa e quadráticas simples, previstas no programa, sendo, no entanto, necessário ter especial cuidado na definição das janelas de visualização.

Podemos citar aplicativos recentemente criados, como, por exemplo, programas que combinam potencialidades para o trabalho em Álgebra e Geometria, como, o GeoGebra. Estes aplicativos, tal como a calculadora gráfica, citada anteriormente, permitem relacionar as informações dadas algebricamente com as representações gráficas e em tabela e apresentam os objetos matemáticos numa representação mais próxima da usual.

Referindo-se a existência de programas de cálculo simbólico ou Álgebra computacional, temos o *DERIVE*. Esse programa permite fazer todo tipo de manipulação algébrica, desde a simplificação de expressões, à resolução de equações e sistemas, bem como,

cálculos mais avançados, como derivação e integração de funções e tem sido usado em diversos países, com alunos dos ensinos superior e secundário e, por vezes, até com alunos mais novos. Essas tecnologias favorecem o trabalho com diferentes formas de representação, promovendo o desenvolvimento da noção de variável e a visualização das formas simbólicas das funções. Representam, por isso, recursos de grande valor para a aprendizagem da Álgebra. No entanto, só por si, o seu uso não garante a aprendizagem dos alunos, sendo necessário saber quando e como devem esses usar a tecnologia.

3.2 O GeoGebra

GeoGebra é um software matemático, criado em 2001, como tese de Markus Hohenwarter, usado em vários países e traduzido para 55 idiomas. Apresenta um histórico de 300.000 downloads mensais e possui muito dinamismo nas suas aplicações. É gratuito com multiplataforma para todos os níveis de ensino, programado para uma variedade de combinações, as quais se pode citar algumas, como, a geometria, álgebra, tabelas, funções, estatística e cálculo.

É um *software* gratuito que auxilia na compreensão e manipulação dos elementos durante a resolução do problema, pois a visualização das figuras geométricas, por meio do aplicativo, “além de promover a intuição geométrica, auxilia na redução da abstração dos conceitos matemáticos” (PAIVA; ALVES, 2018, p. 72).

É uma ferramenta tecnológica que atualmente tem alta relevância no estudo da matemática, pois tem uma capacidade ampla de ofertar múltiplas contribuições no estudo de conteúdos de alta importância, como, a análise do comportamento das funções, apresentando de forma dinâmica, as representações cartesianas com muita precisão. É possível, também, analisar equações, relacionar variáveis com números e encontrar raízes em estruturas algébricas de vários níveis de complexidade. Suas aplicações e demonstrações no ensino de conceitos algébricos contribuíram fortemente para o desenvolvimento do pensamento algébrico e, conseqüentemente, para o raciocínio *abstract*, uma vez que, possibilita apresentar e mobilizar, de forma conjugada, a estrutura algébrica e sua representação geométrica.

Seguindo as recomendações de Yang (2011), os alunos, a partir da construção de figuras no GeoGebra, poderão estruturar os seus raciocínios e potencializar a utilização da lógica dedutiva através da visualização de figuras e análise das suas propriedades, enquanto estruturas dinâmicas. Dessa forma, procura-se responder à seguinte questão abrangente: Qual

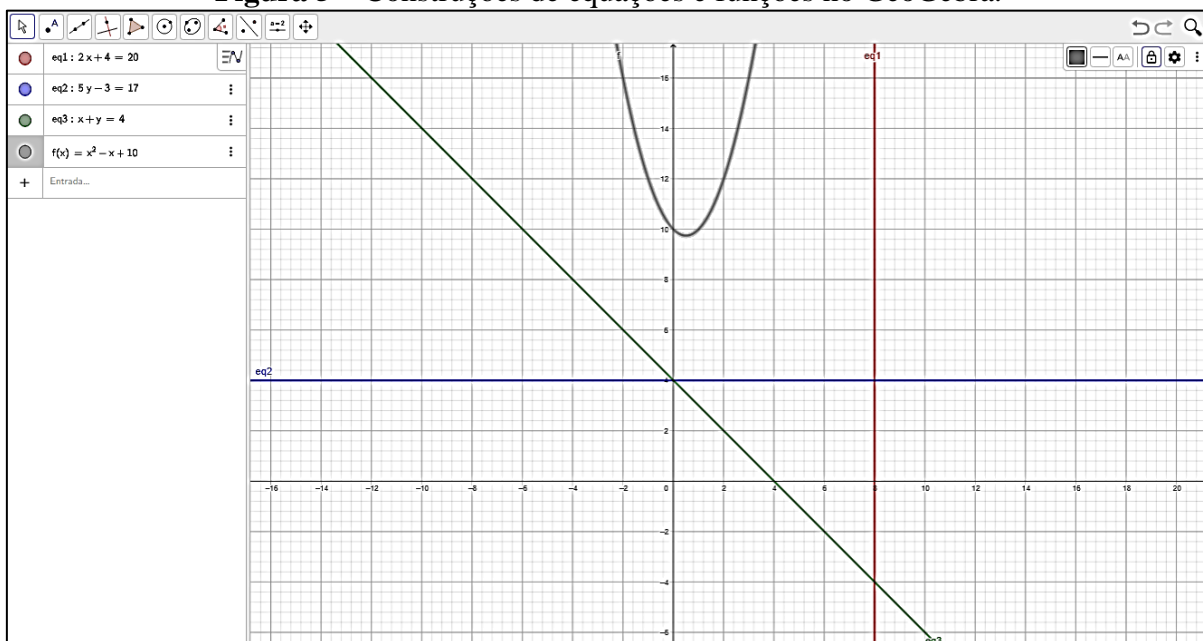
o poder que a tecnologia confere à demonstração, e de que forma o trabalho no Geogebra potencializa o raciocínio lógico-dedutivo?

3.3 Demonstrações de Construções Gráficas de Estruturas Algébricas no GeoGebra

O uso de tecnologia em sala de aula tem se tornado cada vez mais comum e importante no processo de ensino e aprendizagem. O software GeoGebra, por exemplo, é uma ferramenta versátil e gratuita que permite criar construções gráficas de estruturas algébricas. As construções gráficas são uma excelente maneira de visualizar e compreender conceitos abstratos da matemática, como equações e funções. Com o GeoGebra é possível criar representações visuais dessas estruturas, permitindo que os alunos explorem e manipulem as informações de forma interativa.

Na prática, podemos propor atividades que envolvem construções gráficas de estruturas algébricas utilizando o GeoGebra. Por exemplo, podemos pedir aos alunos que construam um gráfico para uma equação linear ou quadrática, utilizando os recursos da ferramenta para ajustar os valores dos coeficientes e ver o impacto na curva resultante. Também podemos solicitar que explorem as relações entre diferentes tipos de funções, como a função exponencial e a função logarítmica, e criem gráficos que mostrem essas relações. Além disso, é possível criar atividades que envolvem a manipulação de gráficos, como a combinação de funções para criar novas curvas.

Figura 5 – Construções de equações e funções no GeoGebra.



Fonte: o autor.

As construções gráficas com o GeoGebra também podem ser utilizadas para simular situações do mundo real, como o movimento de um objeto ou o comportamento de um sistema físico. Isso permite que os alunos visualizem e compreendam melhor conceitos complexos da física e da matemática.

Concomitantemente, preconiza-se o uso do *software* GeoGebra, com o objetivo de vislumbrar a representação gráfica da situação-problema proposta, promovendo, assim, a transposição didática, designada por Chevallard (1991), como sendo a passagem do saber sábio para o saber ensinado, ou seja, a conversão do conhecimento técnico em conhecimento pragmático. É importante, aqui, destacar que o professor, ao propor situações didáticas que necessitarão do uso do *software* GeoGebra, deve elaborá-las de maneira acessíveis à manipulação, induzindo o aluno ao manuseio do aplicativo durante o processo de resolução de futuras situações-problema.

Ao utilizar o GeoGebra em atividades propostas, os alunos são incentivados a trabalhar de forma colaborativa, a explorar e a descobrir conceitos matemáticos de forma interativa e dinâmica, contribuindo para a melhoria do seu desempenho e compreensão nas disciplinas que envolvem estruturas algébricas.

3.4 Dificuldades enfrentadas na Implantação de Softwares no âmbito Escolar

Denota-se que não basta a intenção e mudança dos objetivos nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, tendo por propósito a inserção da informática, em específico de *softwares* matemáticos, em sala de aula, pois, além de inúmeras escolas sofrerem da carência de laboratórios de informática, outros tantos ambientes escolares sentem a ausência de um profissional que possa atuar na manutenção dos equipamentos. Portanto, ora há ausência de equipamentos, outra de profissionais que os possa manter em funcionamento adequado. Assim sendo, a consequência é que, onde existem laboratórios, em várias ocasiões encontram-se equipamentos sem manutenção, que acabam sendo descartados, diminuindo, assim, a quantidade de computadores para o uso, impedindo um trabalho de qualidade por parte do professor. Situações como essas, por vários momentos, desmotivam os docentes a incluírem softwares que auxiliem na aprendizagem, bem como, levarem os discentes aos laboratórios. Costa (2015) também cita motivos que levam a desistência perante a inclusão da informática no ambiente da sala de aula:

A falta de formação continuada para os professores fazer uso adequado dos equipamentos de informática também é um grande desafio para o uso da tecnologia

na sala de aula. Mesmo nas poucas vezes que essas capacitações são realizadas, os próprios professores não evoluem, a maioria não procura se atualizar ou não disponibiliza de tempo suficiente para a informática em sala de aula (COSTA, 2015, p. 30).

Há, também, os problemas com a falta de infraestrutura adequada, como, *hardware* e conectividade, que podem dificultar a implantação e uso do *software*. Além disso, a incompatibilidade do aplicativo com os sistemas já existentes na escola pode ser um obstáculo para a implementação e uso efetivo.

Conforme pauta do Fórum Estadual das Licenciaturas em Matemática (FELIMAT – 2015) do Paraná, para que ocorra a capacitação de professores que consigam correlacionar os assuntos de sala de aula com a informática, faz-se necessário que a própria formação superior e continuada disponibilize em uma quantidade maior de disciplinas para essa formação/capacitação. Portanto, faz-se necessário que a formação, no decorrer da graduação, ofereça uma noção dos *softwares* e programas afins, para que, posteriormente, na atuação profissional, o professor tenha a capacidade de trabalhar os mais variados conteúdos da educação básica, por meio da informática.

[...] a utilização de novas mídias e tecnologias educacionais, como processos de dinamização de ambientes de aprendizagem; a oferta de atividades de estudo com utilização de novas tecnologias de comunicação; a promoção de atividades sociais que estimulem o convívio humano e interativo do mundo dos jovens; a organização dos tempos e espaços com ações efetivas de interdisciplinaridade e contextualização dos conhecimentos; a oferta de atividades de estudo com utilização de novas tecnologias de comunicação (PPP EEEP Francisca Maura Martins, 2015, p. 16).

O Projeto Político Pedagógico da EEEP Francisca Maura Martins traz o incentivo ao uso das tecnologias em sala de aula, entre alunos, professores, funcionários, escola e família. A necessidade da reorganização dos componentes curriculares a fim de se constituir a interdisciplinaridade, numa sinergia de contextualização, ao abordarem o trabalho, a ciência, a tecnologia e a cultura, é premissa primeira. Apresenta-se algo mais próximo ao real e a elevação de níveis cognitivos acontecerá, se o processo didático-pedagógico primar pela aprendizagem e pela atividade, ressaltando a reflexão nas atividades educativas do presente projeto pedagógico.

4 APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

A aprendizagem algébrica é uma área da inteligência que utiliza técnicas matemáticas avançadas para construir modelos e realizar previsões em diferentes tipos de dados. Ao contrário de outras formas de aprendizado que utilizam abordagens mais empíricas, a aprendizagem algébrica se baseia em modelos matemáticos bem estabelecidos para realizar análises e previsões precisas. É uma área em constante evolução, com muitas aplicações práticas em áreas como finanças, saúde, ciência de dados, engenharia e muitas outras. Com o crescente volume de dados disponíveis em todo o mundo, a aprendizagem algébrica se tornou cada vez mais importante para empresas e organizações que buscam *insights* úteis e relevantes a partir de seus dados. Além disso, a aprendizagem algébrica também é usada para criar sistemas inteligentes que podem automatizar tarefas complexas e ajudar a tomar decisões informadas em tempo real.

4.1 O Uso de Mensagens Codificadas e a Álgebra

Apesar dessa contribuição notória, assim como muitos matemáticos, al-Khowarizmi também não conseguiu construir equações completas com símbolos. Isso só ocorreu 700 anos depois. O cenário era a guerra entre França e Espanha, para evitar que suas táticas fossem descobertas pelos inimigos, ambos os lados usavam mensagens codificadas. Contudo, os franceses se deram melhor nessa tática, pois sempre que um integrante encarregado de passar mensagem da tropa espanhola era capturado, os franceses decifravam o código.

O advogado François Viète era chamado para decifrar os códigos espanhóis. Ele era apaixonado por álgebra e ficou na história como um dos responsáveis por introduzir os símbolos na matemática.



Figura 6 – François Viète, considerado “O pai da álgebra”.

Não é à toa que François Viète ficou conhecido como o “Pai da Álgebra” e, também, um dos maiores especialistas em cifras de todos os tempos. Ele era tão bom que o rei da Espanha foi se queixar ao Papa dizendo que Viète usava magia negra nas decodificações.

Outros matemáticos da época também contribuíram para o aperfeiçoamento da álgebra, como, o inglês Robert Record, que criou o símbolo de “igual a” (=). A álgebra totalmente simbólica foi aperfeiçoada pelo matemático e filósofo francês René Descartes.



Figura 7 – René Descartes.

René Descartes possibilitou a criação do plano cartesiano a partir da junção da álgebra com a geometria. Descartes fez a associação da álgebra com a geometria, resultando na criação do Plano Cartesiano e da Geometria Analítica. Ele é chamado de “Pai da Matemática Moderna” (SILVA, Brasil Escola).

4.2 O Ensino-Aprendizagem da Álgebra em Documentos Oficiais

O ensino-aprendizagem da álgebra são temas relevantes nos documentos oficiais que estabelecem as diretrizes curriculares para o ensino da Matemática nas escolas. No Brasil, um dos documentos mais importantes nesse sentido é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2018.

A BNCC define que a álgebra deve ser ensinada de forma integrada ao longo do ensino médio, destacando a importância de os estudantes desenvolverem habilidades como a resolução de equações e sistemas de equações, análise de gráficos e a representação de situações do mundo real por meio de expressões e equações algébricas. A BNCC também enfatiza a relevância de se ensinar a álgebra de forma contextualizada, conectando-a com situações do mundo real e outras áreas da matemática.

Além da BNCC, o Ministério da Educação (MEC) publicou as “Orientações Curriculares para o Ensino Médio”, que oferecem diretrizes para a elaboração de currículos e planos de ensino nas escolas. Esse documento destaca a necessidade de ensinar a álgebra a

partir de problemas e situações do mundo real, incentivando os estudantes a criar modelos matemáticos para representá-las.

Outro documento relevante é o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que define os critérios para a seleção dos livros didáticos utilizados nas escolas públicas do país. O PNLD estabelece que os livros de matemática devem abordar a álgebra de forma clara e objetiva, enfatizando a resolução de problemas e o uso de tecnologias como calculadoras e *softwares* de computação algébrica.

Além dos documentos oficiais, diversos estudos e pesquisas enfatizam a importância do ensino e da aprendizagem da álgebra de forma contextualizada e baseada em problemas reais, relacionando-a com outras áreas da matemática e incentivando o uso de tecnologias como ferramentas de ensino e aprendizagem.

Na BNCC (Brasil, 2017) foi apresentada a unidade temática intitulada Álgebra, que deve estar presente nos processos de ensino e aprendizagem desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, e tem por finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico. No documento, (BRASIL, 2017, p. 226) ainda são atreladas ideias matemáticas fundamentais a essa unidade (e por consequência, atreladas também ao pensamento algébrico) que são “equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade”. Além disso, visando o trabalho com essa unidade temática nos AI do EF, a BNCC (BRASIL, 2017, p. 226) sugere alguns exemplos de atividades envolvendo algumas das ideias matemáticas citadas acima:

Cabe destacar que, no documento (BRASIL, 2017) não é proposto o uso de letras para expressar as ideias matemáticas nos AI do EF, e, além disso, a unidade temática Álgebra está bastante relacionada com a unidade temática Números, tendo em vista o trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), que é bastante importante nessa etapa de escolarização.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), embora não abordem de forma explícita o estudo do pensamento algébrico e/ou um(a) unidade/bloco específico de Álgebra, trazem a possibilidade de se abordar uma “pré-álgebra” já nos AI do EF. No entanto, não fazem uma descrição sobre como seria feita tal abordagem. Apesar disso, ao longo no documento é apresentado a importância de o professor, ao planejar atividades, articular múltiplos aspectos dos diferentes blocos de conteúdo (Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação) de modo que o estudante compreenda os princípios básicos do corpo de conhecimentos matemáticos que são proporcionalidade, equivalência, entre outros.

Já no Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (BRASIL, 2015), embora também não se faça essa abordagem, é apresentado, como importante

a ser trabalhado com estudantes dos AI do EF, o estudo de sequências numéricas para o desenvolvimento da percepção de regularidade, que é uma ideia da álgebra ampliada e aprofundada ao longo da continuidade de sua vida escolar de modo que esse estudante use da linguagem simbólica e das técnicas próprias da álgebra.

Em síntese, os documentos oficiais que norteiam o ensino da matemática, no Brasil, destacam a relevância da álgebra para a formação dos estudantes ao longo do ensino médio, enfatizando a necessidade de ensiná-la de forma contextualizada, integrada e baseada em problemas reais. Além disso, esses documentos reconhecem o papel das tecnologias como ferramentas de ensino e aprendizagem.

4.3 A Transição Aritmética/Álgebra

A transição da aritmética para a álgebra é um momento importante na aprendizagem matemática, pois marca a transição de uma abordagem de resolução de problemas baseada em cálculos aritméticos para uma baseada na manipulação de símbolos algébricos.

Enquanto a aritmética lida, principalmente, com números e suas operações básicas, a álgebra envolve o uso de letras ou símbolos para representar quantidades desconhecidas e suas relações matemáticas. A álgebra permite uma representação mais geral e abstrata dos problemas, o que pode simplificar sua resolução e levar a soluções mais gerais e aplicáveis a uma variedade de problemas.

Segundo Swokowski e Cole (1994), a transposição aritmética para algébrica é uma habilidade que permite aos estudantes de matemática avançarem em seus estudos. Eles afirmam que “a transposição aritmética para algébrica é uma habilidade fundamental que os estudantes de matemática devem adquirir para avançar em seus estudos de álgebra e outras áreas relacionadas”.

A transição da aritmética para a álgebra geralmente ocorre na escola secundária, quando os estudantes começam a estudar equações, sistemas de equações e funções algébricas. É importante que os alunos entendam a diferença entre variáveis e números constantes, bem como, as propriedades algébricas básicas, como, a distributividade e a associatividade. Tem-se, também, como importante que os professores criem atividades que ajudem os alunos a desenvolver uma compreensão clara das diferenças entre aritmética e álgebra e a fazer a transição de uma para outra de maneira suave.

Conforme destacado por Stewart (2015), “a transposição aritmética para algébrica é uma técnica importante para transformar equações e expressões numéricas em equações e

expressões algébricas”. Ele afirma que “essa técnica é amplamente utilizada em muitas áreas da matemática, incluindo álgebra, trigonometria e cálculo”.

Aqui estão algumas atividades que podem ajudar nesse processo:

Explorando padrões numéricos: Os alunos podem começar a fazer a transição da aritmética para a álgebra, explorando padrões numéricos simples. Por exemplo, pode-se pedir aos alunos que encontrem o padrão em uma sequência de números (por exemplo, 2, 4, 6, 8, ...) e, em seguida, que usem essa regra para prever o próximo número na sequência. Posteriormente, os alunos podem ser orientados a criar uma expressão algébrica para representar o padrão encontrado.

Identificação de variáveis: É importante que os alunos compreendam a diferença entre números e variáveis na álgebra. Os professores podem criar atividades em que os alunos devem identificar variáveis em uma equação e explicar o que elas representam. Por exemplo, uma atividade pode pedir aos alunos que identifiquem a variável em uma equação, como, “ $y = 3x + 4$ ” e expliquem o que ela representa.

Resolvendo equações simples: À medida que os alunos começam a se sentir mais confortáveis com a ideia de variáveis, podem começar a resolver equações simples. Os professores podem criar atividades que exijam que os discentes resolvam equações simples, como “ $2x + 5 = 11$ ”, usando operações aritméticas básicas.

Traduzindo palavras em expressões algébricas: Uma atividade útil para ajudar os alunos a fazerem a transição da aritmética para a álgebra é pedir que traduzam problemas escritos em expressões algébricas. Por exemplo, um problema que diz “o dobro de um número mais três é igual a 11. Qual é o número?” pode ser traduzido para a equação “ $2x + 3 = 11$ ”.

Resolvendo problemas do mundo real: Uma maneira eficaz de ajudar os alunos a ver como a álgebra pode ser aplicada a problemas do mundo real é criar atividades que envolvam problemas práticos. Por exemplo, uma atividade pode pedir que os alunos usem a álgebra para resolver problemas financeiros, como calcular juros compostos ou encontrar o custo total de um produto após a aplicação de um desconto.

No início, a transição pode ser desafiadora para alguns alunos, pois envolve uma mudança no modo de pensar. Em vez de se concentrar em valores numéricos concretos, eles devem aprender a pensar em termos de expressões simbólicas e equações. Isso pode levar a uma compreensão mais abstrata da matemática, o que pode ser um desafio para alguns alunos.

Portanto, uma vez que os alunos compreendem os conceitos básicos da álgebra, eles podem aplicar essas habilidades a problemas mais complexos em matemática e outras

disciplinas, como física e engenharia. A álgebra também é um componente importante em muitas carreiras, como, finanças, ciência de dados e programação de computadores.

4.4 Contextos com Abstração e Estrutura Algébrica

A abstração e a estrutura algébrica são conceitos fundamentais na matemática, utilizados para representar e resolver problemas em diferentes contextos. A abstração refere-se à capacidade de isolar características comuns de diferentes objetos ou situações, enquanto a estrutura algébrica se refere à maneira como essas características se relacionam entre si.

Segundo Goldin e Shteingold (2010), a abstração e a estrutura algébrica são habilidades importantes que os estudantes de matemática devem desenvolver para resolverem problemas em diferentes contextos. Os autores afirmam que “a abstração e a estrutura algébrica são habilidades fundamentais para a resolução de problemas em muitas áreas da matemática, incluindo álgebra, geometria e análise”.

Questões com abstração algébrica geralmente envolvem a criação e resolução de equações ou sistemas de equações com variáveis. Aqui estão alguns exemplos de questões com abstração algébrica:

Problema de idade: Maria tem o dobro da idade de seu filho. Há 10 anos, a idade de Maria era quatro vezes a idade de seu filho. Qual é a idade atual de cada um?

Problema de proporção: Em uma mistura de suco, a proporção de suco de laranja para suco de maçã é de 3 para 5. Se houver 20 litros de suco de maçã na mistura, quantos litros de suco de laranja há na mistura?

Problema de viagem: Um avião voa a uma velocidade de 500 km/h contra um vento de 50 km/h. O avião voa a uma velocidade de 600 km/h com o vento. Qual é a velocidade do avião em relação ao ar e qual é a velocidade do vento?

Problema de geometria: Um retângulo tem um comprimento que é o dobro da largura. A área do retângulo é de 48 metros quadrados. Qual é o comprimento e a largura do retângulo?

Problema de investimento: Um investidor aplica parte de seus recursos em uma conta que paga 4% de juros anualmente e o restante em uma conta que paga 7% de juros anualmente. Se o investidor tem um total de R\$ 10.000 aplicados e recebe R\$ 550 em juros durante um ano, quanto foi investido em cada conta?

Essas questões envolvem a criação de equações ou sistemas de equações que representam a situação apresentada e, em seguida, a solução das equações para encontrar as

respostas corretas. A habilidade em abstração algébrica é importante em matemática e em muitas áreas da vida cotidiana, como, finanças, engenharia e ciência.

4.5 Métodos Algébricos

Os métodos algébricos são amplamente utilizados na matemática para resolver problemas em diversas áreas, como álgebra, geometria, cálculo e física. Esses métodos envolvem a manipulação de equações e expressões algébricas para chegar a uma solução.

Os métodos algébricos são um conjunto de técnicas e conceitos matemáticos que envolvem a manipulação de equações e expressões algébricas. Eles são usados em muitas áreas da matemática, incluindo, álgebra, geometria, análise e álgebra linear. A álgebra é uma das áreas fundamentais da matemática e é usada em muitas disciplinas, como, física, engenharia, ciência da computação e economia.

Conforme destacado por Anton e Rorres (2010), “os métodos algébricos são uma ferramenta poderosa na resolução de problemas matemáticos”. Eles afirmam que “os métodos algébricos são utilizados para manipular equações e expressões algébricas, e são fundamentais para a compreensão de muitas áreas da matemática, como álgebra linear, cálculo e geometria analítica”.

Um dos principais objetivos dos métodos algébricos é resolver equações e sistemas de equações. Isso envolve a aplicação de técnicas, como, a simplificação de expressões algébricas, a manipulação de termos e a resolução de equações por meio de fatoração, substituição ou outras técnicas algébricas. Por exemplo, para resolver uma equação como $2x + 3 = 7$, podemos isolar a variável x , subtraindo 3 de ambos os lados, em seguida, dividindo por 2, obtendo $x = 2$.

Outro aspecto importante dos métodos algébricos é a manipulação de expressões algébricas para simplificá-las. Isso envolve a aplicação de propriedades algébricas, como, a propriedade comutativa, associativa e distributiva, para simplificar expressões complexas em formas mais simples e mais manejáveis. Por exemplo, podemos simplificar a expressão $3x + 2x - 5x + 4$, combinando termos semelhantes, obtendo $0x + 4$, que é igual a 4.

Os métodos algébricos também são usados em geometria para representar formas e relações espaciais por meio de expressões algébricas. Por exemplo, uma equação como $y = mx + b$ é usada para representar uma linha reta no plano cartesiano, em que m é o coeficiente angular e b , o coeficiente linear. Essa equação pode ser manipulada algebricamente para representar diferentes tipos de linhas, como, linhas paralelas ou perpendiculares.

Na análise, os métodos algébricos são usados para descrever funções matemáticas e suas propriedades. Por exemplo, a derivada de uma função é calculada usando métodos algébricos, como a regra da cadeia ou a regra do produto. Na álgebra linear, os métodos algébricos são usados para estudar a estrutura de espaços vetoriais e resolver sistemas de equações lineares.

Existem vários métodos algébricos diferentes que podem ser usados para resolver equações e simplificar expressões. Um dos métodos mais comuns é a simplificação de expressões algébricas usando as propriedades das operações matemáticas. Essas propriedades incluem a propriedade comutativa, a propriedade associativa e a propriedade distributiva, entre outras. A aplicação dessas propriedades permite simplificar expressões algébricas complexas e transformá-las em formas mais simples e manejáveis.

Outro método algébrico é a resolução de equações, que são expressões matemáticas que envolvem variáveis e são usadas para representar relacionamentos entre quantidades. A resolução de equações envolve o isolamento da variável e a determinação do valor dessa variável que satisfaz a equação. Existem várias técnicas que podem ser usadas para resolver equações, incluindo, a adição e a subtração de termos, a multiplicação e a divisão de ambos os lados da equação e a aplicação de propriedades algébricas para simplificar a equação.

Um terceiro método algébrico é a fatoração de expressões, que envolve a decomposição de uma expressão em seus fatores componentes. É uma técnica importante na simplificação de expressões e na resolução de equações. Existem várias formas que podem ser usadas para fatorar expressões, incluindo, a fatoração por agrupamento, por diferença de quadrados e por completar o quadrado.

5 METODOLOGIA

Uma discussão teórica, ainda fora da prática da sala de aula e dos propósitos didáticos de muitos profissionais ou sistemas educacionais, levantada por muitos estudiosos da área, infere que é preciso propor uma perspectiva de ensino de qualidade social, que circunda o contexto de vida dos alunos e suas respectivas famílias, fundamentada em eixos socioeconômicos e culturais, integralizando conhecimentos que provoquem formação pessoal e intelectual do aluno, causando, assim, uma ruptura de concepções de ensinamentos ineficientes, alargando propostas que, discutidas democraticamente, produzam e incrementem situações reais consolidadas para formação de políticas de ensino, principalmente, o de Matemática. A formação do conhecimento matemático, principalmente, o de natureza algébrica, não pode traçar apenas caminhos preparatórios com competências e habilidades de segmento unicamente acadêmico, pois a formação de vida com esse importante e belo conhecimento deve ter prosseguimentos e conjunturas nas trilhas de formações acadêmicas, pessoal e moral de um formando.

Diante do propósito de uma nova política de ensino, precisa-se considerar o aluno um ser ativo e criativo dentro e fora do contexto escolar ou acadêmico, fazendo imersão das tecnologias vigentes e eficientes, produzindo experiências pessoais que propulsionem, no futuro, novos elementos para novas estratégias de aprendizagens. As habilidades e as competências de efeitos múltiplos, que fomentem crescimento pessoal e acadêmico, não podem basear-se apenas em regras e técnicas com insistência maior nas unidades escolares ou sistemas de ensino, pois não são voltadas à construção de saberes pelo próprio aprendiz, para que se acentue, conscientemente, em suas concepções de que aprender é interessante para ele e para os seus objetivos de vida.

Diante dessa perspectiva, esta dissertação verificou que as atividades aplicadas durante o estudo podem promover o desenvolvimento de estratégias de resolução de um problema algébrico com um grupo de 18 alunos do 1º Ano (Turma D) do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Profissional Francisca Maura Martins (FMM), selecionados criteriosamente, conforme análise de aprendizagem, no momento em que a execução dessas atividades avançou de forma escrita e pesquisada, fazendo uso de tecnologias de pesquisa para o seu entendimento. Nesse sentido, também identificou modos de raciocínio dos alunos na construção de estratégias, procurando reconhecer avanços e dificuldades mais em relação à aplicação dos conceitos algébricos, cujo objeto principal foi o desenvolvimento do pensamento abstrato e sua representação simbólica. Sendo a Álgebra uma importante ferramenta

matemática, faz-se necessário compreender as razões pelas quais esse conhecimento ainda se encontra tão inacessível aos alunos. Essa análise dissertativa trata, como conhecimento algébrico, as formas de raciocínio aplicadas na determinação de incógnitas e variáveis, presentes nas questões algébricas propostas no Ensino Médio.

5.1 Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas

A Engenharia Didática, atualmente é reconhecida como uma metodologia de pesquisa que tem ganhado destaque nas últimas décadas, sobretudo no ensino de matemática. Segundo Brousseau (1986), um dos principais teóricos dessa abordagem, a Engenharia Didática tem como objetivo “organizar, planejar e construir situações didáticas com base em uma análise cuidadosa dos conhecimentos prévios dos alunos e em uma sequência lógica e progressiva de atividades, com o objetivo de permitir aos alunos construir seus próprios conhecimentos”.

Uma das principais vantagens da Engenharia Didática é que ela permite ao professor planejar as atividades de acordo com as necessidades e características de cada turma. Segundo Allevato (2015), “a Engenharia Didática possibilita que o professor elabore sequências didáticas adaptadas ao nível cognitivo dos alunos, o que torna o processo de aprendizagem mais significativo e efetivo”. Trata-se de uma metodologia de análise de situações didáticas, baseada em conhecimentos científicos, em que os problemas de situações de ensino apoiam-se numa proposta de acordo com cada circunstância, com a finalidade de tornar o conteúdo matemático compreensível para o aluno. A Engenharia Didática traz uma característica experimental baseada em situações didáticas em sala de aula.

Alves (2017) aponta dois direcionamentos para essa metodologia:

Engenharia Didática clássica ou de 1ª geração (ED1), compreendida como uma metodologia que visa o estudo dos fenômenos didáticos, que possam permitir os fenômenos em sala de aula, bem como, uma perspectiva de ED, visando o desenvolvimento de recursos de formação que, segundo a tradição, tem recebido a denominação de Engenharia Didática de 2ª geração (ED2) (ALVES, 2017a, p. 197).

De acordo com essas duas tendências citadas por Alves, a Engenharia Didática organiza-se em quatro etapas, sendo estas: análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação. Diante dessas etapas é possível que o professor, inicialmente, verifique os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto trabalhado em sala e analise as dificuldades que poderão ocorrer durante o processo de ensino.

De acordo com os resultados obtidos na primeira etapa, serão trabalhadas situações-problema com os alunos. É essencial ter variáveis didáticas importantes que orientem o

processo de aprendizagem. Os estudantes podem formular soluções partindo de seus conhecimentos prévios e imediatos. Na etapa final, serão avaliados os dados colhidos durante a experimentação, o que foi produzido pelos estudantes e seu desempenho diante da situação apresentada a fim de confrontar esses registros com os da análise a priori, com o propósito de validar ou não as hipóteses formuladas durante a investigação.

Tem-se como ferramenta fundamental para a execução da Engenharia Didática a Teoria das Situações Didáticas, que apresenta como filosofia de ensino uma abordagem baseada na sequenciação lógica e progressiva de atividades. De acordo com Michèle Artigue (1988), essa teoria serve de base à metodologia da Engenharia Didática, que se ocupa da construção de uma teoria de controle baseada no sentido das situações envolvidas. A TSD foi desenvolvida por Brousseau e busca compreender as relações existentes entre aluno-professor-saber, em sala de aula. Nessa teoria alunos e professores são as peças principais da relação de ensino e aprendizagem. Enquanto o aluno será o pesquisador formulando hipóteses e construindo conceitos, o professor será responsável por criar situações convenientes para que o aluno aja sobre o saber, modificando-o em conhecimento para si.

Em seguida, serão discutidas as etapas da Engenharia Didática com abordagens analíticas nos aspectos cognitivos e didáticos, ressaltando como importância a interligação entre as etapas dessa metodologia considerada nesse estudo.

5.2 A Teoria da Análise do Conteúdo (TAC)

A Teoria da Análise do Conteúdo é uma abordagem metodológica amplamente utilizada em diferentes áreas de pesquisa, como a comunicação, a psicologia, a sociologia e a antropologia. Essa metodologia permite uma análise sistemática e objetiva dos textos, e pode ser utilizada tanto para a análise de textos escritos quanto para a análise de discursos, imagens e outros tipos de mensagens.

Desenvolvida por Laurence Bardin, em 1977, essa teoria busca identificar e analisar os padrões de significado presentes em um conjunto de mensagens ou textos e tem como objetivo principal identificar as mensagens subjacentes em uma comunicação, levando em conta o contexto em que ela é produzida e recebida.

De acordo com Bardin (2016), a análise do conteúdo é um processo de investigação que se baseia em uma série de etapas metodológicas.

A **primeira etapa** consiste na definição da amostra de texto a ser analisada. Em seguida, é realizada uma leitura prévia do material, a fim de identificar os temas centrais e as categorias de análise que serão utilizadas.

Na **segunda etapa**, os textos são codificados, ou seja, são atribuídos códigos a cada uma das unidades de análise identificadas na etapa anterior. Esses códigos representam as categorias de análise definidas previamente, e servem para identificar e classificar as diferentes unidades de significado presentes nos textos.

Na **terceira etapa**, é realizada a categorização dos códigos, que consiste em agrupá-los em categorias mais amplas, a fim de identificar as mensagens subjacentes presentes nos textos analisados. Essa categorização permite identificar os temas centrais e as relações entre eles, e pode servir como base para a elaboração de hipóteses sobre o fenômeno estudado.

Por fim, na **quarta etapa**, é realizada a interpretação dos resultados obtidos, a partir da análise das categorias e das relações identificadas nas etapas anteriores. Nessa etapa, são elaboradas conclusões e inferências a respeito do fenômeno estudado, levando em conta o contexto em que ele ocorre.

5.3 Análises Preliminares

A engenharia didática é um campo de estudo que tem como objetivo projetar e desenvolver materiais instrucionais eficazes e eficientes para a aprendizagem. As análises preliminares na engenharia didática são um processo de investigação inicial, que visa identificar as necessidades, objetivos e características do público-alvo, bem como, as restrições e recursos disponíveis para a criação dos materiais instrucionais.

Algumas das análises preliminares na engenharia didática incluem:

Análise prévia do público-alvo: essa análise envolve a identificação das características do público-alvo, como, idade, nível educacional, experiência prévia, habilidades e conhecimentos relevantes para o conteúdo instrucional, ou seja, tem o objetivo de identificar os problemas relacionados ao ensino e aprendizagem do objeto de estudo. Nessa etapa, faz-se necessário que ocorra um estudo bibliográfico, levando-se em conta o conteúdo a ser trabalhado pelo professor e as condições e contextos do ambiente escolar que será investigado. Segundo Pommer:

Nesta análise preliminar é feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles

provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino (POMMER, 2013, p. 23).

Análise das necessidades de aprendizagem: essa análise envolve a identificação das necessidades de aprendizagem do público-alvo, como objetivos educacionais, competências a serem desenvolvidas, lacunas de conhecimento e habilidades que precisam ser reforçadas.

De acordo com Artigue (1988), essa etapa pode ser analisada partindo de três dimensões: a epistemológica, a cognitiva e a didática. A epistemológica, está associada ao saber em estudo; a cognitiva refere-se as características relacionadas aos conhecimentos dos discentes sobre o objeto de estudo; e a didática está associada com os aspectos do sistema de ensino.

Análise do conteúdo instrucional: essa análise envolve a revisão do conteúdo instrucional que será ensinado, incluindo a organização e sequência de tópicos, a precisão e relevância do conteúdo e a adequação do nível de complexidade para o público-alvo.

Merrill, M. D. (2002), afirma que a criação de conteúdo instrucional efetivo é baseada em quatro princípios fundamentais: (1) ativar a experiência prévia do aluno, (2) demonstrar a habilidade ou conhecimento a ser ensinado, (3) fornecer oportunidades de aplicação e prática e (4) fornecer feedback informativo. A análise do conteúdo instrucional envolve a identificação do conhecimento e habilidades essenciais que precisam ser ensinados, bem como, a organização e sequência dos tópicos de acordo com a complexidade e a relevância para os objetivos de aprendizagem.

Análise dos recursos disponíveis: essa análise envolve a identificação dos recursos disponíveis para o desenvolvimento do material instrucional, incluindo, tecnologia, materiais impressos, recursos humanos e financeiros.

Análise do ambiente de aprendizagem: essa análise envolve a identificação do ambiente de aprendizagem em que o material instrucional será utilizado, incluindo, o espaço físico, o tempo disponível e a disponibilidade de tecnologia.

Uma análise cuidadosa do ambiente de aprendizagem pode ajudar a identificar as necessidades e restrições que afetam o design do material instrucional, incluindo a seleção e uso de tecnologias, a adequação do espaço físico e a disponibilidade de recursos humanos e financeiros (SPECTOR, MERRILL, ELEN & BISHOP, 2014, p. 46).

Além das análises preliminares, vale ressaltar, também, que o plano pedagógico é um grande diferencial na execução da Engenharia Didática, desde que seja muito bem-preparado sendo o resultado de um longo processo de investigação sobre o objeto matemático.

Nessa etapa, o conhecimento do professor sobre o conteúdo matemático e sua vivência em sala de aula facilitam conhecer os possíveis obstáculos e dificuldades que impedirão o aluno de alcançar uma aprendizagem satisfatória, conhecimentos fundamentais para a elaboração das situações-problema que serão trabalhadas durante a pesquisa.

De acordo com Pais (2002), uma sequência didática é formada por um determinado número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Pais (2011) afirma, ainda, que quando uma sequência é adotada de uma maneira generalizada epistemologicamente de acordo com o conteúdo matemático selecionado, deve ser demonstrada em lento processo de avanços e retrocessos. Vale ressaltar, também, que o plano pedagógico deve ser muito bem-preparado, sendo o resultado de um longo processo de investigação sobre o objeto matemático.

O plano pedagógico é um documento que organiza e sistematiza as ações educativas que serão desenvolvidas em um curso ou disciplina, definindo objetivos, conteúdos, estratégias de ensino, avaliação e recursos necessários para alcançar os resultados esperados (MASETTO, 2012, p. 69).

Nessa etapa, o conhecimento do professor sobre o conteúdo matemático e sua vivência em sala de aula, que o fazem identificar os possíveis obstáculos e dificuldades que impedirão o aluno de alcançar uma aprendizagem satisfatória, são fundamentais para a elaboração das situações-problema que serão trabalhadas durante a pesquisa. São nessas situações-problema que o professor buscará proporcionar a superação das dificuldades apresentadas pelos seus estudantes.

5.4 Concepção e Análise a Priori

Na prática, trabalhar com concepção e análise a priori significa que se parte de premissas e ideias universais e imutáveis para chegar a conclusões lógicas e universais. Isso é importante porque permite que se chegue a considerações que são verdadeiras em todos os contextos e situações. Além disso, o trabalho com concepção e análise a priori também é importante para a defesa de argumentos e para a construção de teorias sólidas e bem fundamentadas.

Destaca-se, nesse processo, a importância do planejamento de ensino, conforme as análises preliminares e concepção e análise a priori, que envolve a elaboração de sequências didáticas. É necessário refletir e tomar decisões conscientes sobre diversos aspectos, como, os objetivos de aprendizagem, as estratégias de ensino, os materiais didáticos e a avaliação.

Libâneo (1994, p. 223) esclarece que o plano não pode ser “um documento rígido e absoluto”, por conta do seu caráter de orientação e abertura às mudanças, portanto, sempre em movimento. Pode-se, pois, afirmar que uma das características do plano de ensino é o dinamismo, a flexibilidade, pois o professor está sempre organizando e reorganizando o trabalho, em outras palavras, se necessário, replanejando.

Dessa forma, o planejamento de ensino contribui para o desenvolvimento de sequências didáticas mais eficientes e adequadas às necessidades dos alunos. A Concepção e Análise a Priori pode ser uma estratégia importante para fundamentar as decisões tomadas no processo de elaboração de sequências didáticas.

Almouloud e Silva (2012) apresentam um relato sobre a importância das variáveis didáticas no processo de ensino e aprendizagem. Os autores destacam que as variáveis didáticas podem influenciar significativamente a eficácia do ensino, sendo necessário que os professores as considerem ao planejar suas aulas.

Na descrição conceitual das variáveis didáticas, deve-se destacar três pontos norteadores como relevantes:

- descrição das escolhas realizadas no local e comparação com a situação didática escolhida, com a ciência de que as variáveis locais são seguras e possíveis de transformação do conhecimento científico em conteúdo a ser trabalhado em sala de aula;

- análise da situação proposta para o aluno, considerando as possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação, com a proposta de desenvolver a capacidade de elaboração de situações-problema e a construção de novos conhecimentos.

Almouloud (2007) afirma que:

Essas situações-problema devem auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes, e no desenvolvimento de habilidades, como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar representação matemática em demonstrações de propriedades e teoremas etc (ALMOULOUD, 2007, p. 176).

- previsão dos possíveis comportamentos dos alunos, tentando demonstrar como essa fase permitirá controlá-los, assegurando que tais comportamentos ocorreram por conta do desenvolvimento visado pela aprendizagem.

Na função de professor/pesquisador deste trabalho, elaborou-se uma sequência de situações didáticas construídas, baseadas na proposta metodológica de Fedathi, utilizada na engenharia didática deste trabalho, desenvolvida ao longo do cronograma projetado para a execução das atividades, as quais foram desenvolvidas conforme a descrição de suas etapas:

Quadro 3 – Classificação das perguntas como estratégias de mediação na metodologia de ensino Sequência Fedathi.

Classificação	Conceito
Pergunta de rotina	“Feita corriqueiramente na sala de aula, como meio de comunicação, de orientação, de pedido, de repreensão do professor aos estudantes e várias outras formas de interação, que podem, inclusive, tratar sobre o tema de estudo, mas em situações não instigativas”.
Pergunta investigativa	“São utilizadas como forma de desafiar, de mobilizar os alunos, de levá-los a pensar sobre o problema proposto pelo professor, para que eles possam compreendê-lo e ir à busca de uma solução”.
Pergunta diagnóstica	“Esta se faz geralmente no início da aula, como forma de o professor saber o nível de conhecimento da turma. O início da aula também pode ser um momento de o docente fazer o nivelamento da turma e este pode ser iniciado por meio de perguntas, para ter certeza de onde pode começar o ensino do conteúdo proposto”.
Contraexemplo	“Se refere à pergunta ou à atividade que incita o aluno a refletir sobre sua resposta ou atitude diante do tema em estudo”.
Pergunta avaliativa	“Feita pelo professor como forma de verificar se o aluno está seguro do que está fazendo ou se aprendeu o que foi ensinado”.

Fonte: Sousa (2015, p. 51).

Por seu idealizador ser matemático de formação, a Sequência Fedathi tem um forte embasamento em concepções matemáticas e se caracteriza como uma proposta lógico-dedutiva-construtiva, pois é uma metodologia de ensino que baseia a ação docente para a construção da argumentação lógico-dedutiva pelo aluno, permitindo, por meio das construções, que o discente faça conjecturas, experimente antes de formalizar o conhecimento.

A Sequência Fedathi é caracterizada, principalmente, por ter um olhar mais atento para as ações do professor dentro e fora da sala de aula, favorecendo a autonomia do aluno, que é estimulado ativamente durante este processo de ensino. Lembramos que a Sequência Fedathi tem como foco principal o professor, sua intencionalidade, seu comportamento, participação e interação com os alunos em sala de aula (BORGES NETO, 2017a, p. 5).

Durante a vivência da metodologia de ensino Sequência Fedathi, ainda no início da sessão didática, Sousa (2015, p. 61-62) destaca que “o professor deve combinar com os alunos as normas inerentes à resolução da situação que será apresentada como desafio, bem como, as regras gerais de convivência na sala de aula”. Essa ação, o Acordo Didático, é caracterizada ainda pelo autor como:

[...] O acordo didático significa, portanto, a combinação e os ajustes feitos entre professor e estudantes, de modo a garantir que cada uma das partes desenvolva na sala de aula o que for necessário, dentro da capacidade de cada um, para que o ensino e a aprendizagem sejam efetivados em um ambiente harmônico, também levando em consideração as possíveis desavenças que normalmente acontecem em um espaço aberto à investigação, à pesquisa (SOUSA, 2015, p. 61).

A Sequência Fedathi envolve um processo de mediação, enquanto ação docente, para inserir o discente na prática de pesquisador. Esse processo de mediação se refere aquele trazido em Vygotsky, considerando o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que se refere a distância entre o nível de conhecimento real, caracterizado pelo que o discente pode realizar de maneira independente, e o nível de conhecimento potencial, determinado pelo que aluno é capaz de fazer sob a orientação de um indivíduo mais capaz, no caso, com o auxílio do professor (PINHEIRO, 2018).

5.5 A Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) é uma teoria de aprendizagem desenvolvida pelo francês Guy Brousseau, na década de 60 com o objetivo de compreender as relações existentes entre aluno, professor e o meio (*milieu*) em que ocorre o aprendizado (sala de aula), que enfatiza a importância do contexto e da interação na aprendizagem matemática. Segundo Brousseau (1986), “a TSD é uma teoria de mediação do conhecimento matemático, uma vez que se concentra na análise das situações de ensino e aprendizagem que mediam o acesso ao conhecimento”.

Figura 8 – Triângulo Didático de Brousseau



Fonte: Brousseau (1986)

A TSD considera que a aprendizagem matemática ocorre a partir de situações que são construídas pelo professor e pelos alunos. Segundo Brousseau (1986), “o processo de aprendizagem é mediado pelas situações que são criadas pelo professor, a fim de permitir que

os alunos acessem o conhecimento matemático”. Essa teoria coloca o aluno na posição de um pesquisador, pois esse formula hipóteses, constrói modelos e conceitos, organiza teorias e participa fortemente do processo de aprendizagem. Além disso, essa teoria nos faz analisar a forma como podemos organizar e expor o conteúdo matemático aos alunos de forma a se obter uma aprendizagem que tenha sentido e contexto para o estudante, pois conforme Silva (2008), o aluno só constrói o conhecimento quando se envolve pessoalmente com o problema proposto pela situação.

De acordo com a TSD, as situações didáticas foram criadas com relação direta ao objeto de estudo realizado, dentro da engenharia didática proposta e auxiliada pela a sequência de Fedathi de modo a desafiar os alunos e promover sua reflexão sobre o conhecimento matemático algébrico. Para Brousseau (1998), “o professor deve criar situações que levem os alunos a construir conhecimento, ao invés de simplesmente reproduzi-lo”.

Dessa forma, a TSD destaca a importância de se compreender o contexto e as interações presentes nas situações didáticas, para promover uma aprendizagem significativa da matemática. Com isso, a TSD, caracteriza-se como uma série de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas, que estabelecem as condições fundamentais para o desenvolvimento do comportamento dos estudantes. A situação didática é o objeto central de estudo, nessa teoria. Por meio dela, constatamos as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber. Freitas (2010, p. 79) coloca que “é no meio que se provocam mudanças visando desestabilizar o sistema didático e o surgimento de conflitos, contradições e possibilidades de aprendizagem de novos conhecimentos”.

Uma situação didática é constituída pelas relações pedagógicas estabelecidas entre professor, alunos e o saber, com o objetivo de desenvolver, no aluno, autonomia para construir seu próprio conhecimento. As situações adidáticas são definidas como aquelas que não são situações de ensino, mas que oferecem ao discente a oportunidade de aprender matemática fora do ambiente escolar. Segundo Brousseau (1986), “as situações adidáticas são aquelas em que o aluno aprende matemática fora do contexto escolar, por meio de atividades que podem ser espontâneas ou orientadas”.

As interações entre o aluno e o meio constituem a dialética de ação, em que ele toma suas decisões por ações sobre o meio. Diante da situação-problema, os discentes têm liberdade para desenvolver suas próprias estratégias de resolução usando seus conhecimentos prévios, envolvendo um raciocínio de maneira mais experimental do que apenas seguindo regras.

De acordo com Freire (1996), “a dialética de formulação é um processo que busca a compreensão crítica da realidade, em que o educador e o educando formulam questões que desafiam a sua própria compreensão da realidade”. Nesse processo, as perguntas não são feitas de forma isolada, mas sim em um diálogo entre educador e educando, em que ambos se desafiam a pensar criticamente sobre a realidade.

Na dialética de validação, o aluno deve mostrar a validade do modelo por ele criado. Nessa etapa deve haver uma apropriação de uma linguagem mais científica. O professor, por sua vez, poderá pedir mais explicações ou até mesmo rejeitar a solução dada pelo aluno, justificando o porquê de não concordar com ela. De acordo com Teixeira e Passos (2013) na dialética de validação:

Os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação, formulação e validação caracterizam a situação didática, em que o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.165-166).

Essa etapa busca validar as afirmações que foram elaboradas nas fases de ação e formulação. Também nesse momento acontece o debate entre os alunos e entre alunos e professor. Nesse processo, o diálogo entre educador e educando é fundamental, pois é por meio dele que se verifica a validade do conhecimento produzido. Segundo Freire (1970), “o diálogo crítico é o método pelo qual educador e educando avaliam o conhecimento produzido e buscam novas informações para expandir a compreensão da realidade”.

Na dialética de institucionalização, é fundamental que os saberes produzidos sejam valorizados e reconhecidos como legítimos, tanto pelos educadores quanto pela sociedade em geral. Segundo Freire (1992), “é preciso que os saberes produzidos sejam valorizados e reconhecidos como legítimos, para que possam ser incorporados às instituições educacionais e transformar as práticas e os valores institucionais”. Depois de construído e validado nas etapas anteriores, o conhecimento passará a fazer parte, oficialmente, do saber matemático dos alunos. Eles poderão, então, utilizá-lo na resolução de problemas matemáticos.

A presença do professor nessa etapa é conclusiva. Aqui ele firma com os estudantes o novo conhecimento matemático que foi adquirido ao longo das quatro fases a que foram submetidos.

Na TSD, o professor, seguindo as etapas descritas, não fornece ao aluno as soluções das situações-problema, mas permite que ele participe ativamente da construção do conhecimento matemático necessário para solucioná-las. O estudante tem a possibilidade de

desenvolver novos saberes, baseado em seus conhecimentos prévios e interação com o meio e com os demais indivíduos que participaram do momento com ele.

5.6 Experimentação

Nessa fase, foram aplicadas as situações-problema, planejadas pelo professor na concepção e análise a priori, em acordo com os objetivos da pesquisa e baseados na Teoria das Situações Didáticas, dando autonomia à construção do conhecimento, pelo próprio aluno, sem interferência do docente pesquisador, exceto, no apoio, quando necessário na disponibilização de recursos.

“A experimentação é o processo que permite testar e avaliar, numa escala reduzida, novas ideias, tecnologias, métodos e conceitos, simulando o desempenho dos mesmos em condições controladas, antes da sua aplicação prática” (BARBOSA et al., 2011, p. 116).

A dinâmica das aulas planejadas para o período da experimentação deve seguir os passos da Teoria das Situações Didáticas e ser voltada para a coleta de informações dos alunos que serão analisadas na próxima fase. Aqui, nesta fase, está o que Brousseau (1982) estabelece como o contrato didático como o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelo aluno e o conjunto dos comportamentos dos alunos que são esperados pelo professor. Logo, pode-se defini-lo como as relações estabelecidas entre o professor, os alunos e o conhecimento.

Conforme Bardin, as atividades foram definidas e aplicadas, de acordo com o rol de problemas seguinte:

1. Seleção de exercícios: foram selecionadas uma série de exercícios de aplicações algébricas, com problemas que envolveram equações, sistemas de equações, inequações, funções e expressões algébricas. Em seguida, os alunos realizaram a leitura dos exercícios e identificaram as categorias de análise, como por exemplo, as operações matemáticas envolvidas, o tipo de problema, o contexto da situação-problema e as informações dadas no enunciado. Os alunos utilizaram uma planilha ou um quadro para registrar as informações.

2. Codificação dos exercícios: em seguida, os alunos codificaram os exercícios, atribuindo códigos para cada categoria de análise identificada. Por exemplo, o código “EA” foi utilizado para representar os exercícios que envolveram equações, o código “SP” para representar os exercícios que apresentaram uma situação-problema e o código “OM” para os que envolveram operações matemáticas como adição, subtração, multiplicação e divisão.

3. Categorização dos códigos: após a codificação dos exercícios, os alunos categorizaram os códigos, agrupando-os em categorias mais amplas. Por exemplo, os códigos “EA”, “SE” e “IN” foram agrupados na categoria “Resolução de problemas algébricos”, enquanto os códigos “GR” e “FT”, na categoria “Funções e gráficos”.

4. Interpretação dos resultados: por fim, os discentes realizaram a interpretação dos resultados, analisando as categorias e as relações identificadas nas etapas anteriores. É possível elaborar conclusões e inferências a respeito dos exercícios de aplicações algébricas, levando em conta o contexto em que eles são apresentados e as categorias de análise identificadas.

5.7 Transposição Didática e Contrato Didático

O termo transposição didática foi introduzido pelo sociólogo Michel Verret, em 1975, e rediscutido, em 1985, por Yves Chevallard, em seu livro *La Transposition Didactique*, no qual mostra as transposições que um saber passa quando vai do campo científico ao campo escolar.

Nessa etapa, o pesquisador busca, de forma clara, apresentar os elementos epistemológicos, cognitivos e didáticos, que serão utilizados no processo de seleção, organização e transformação dos conhecimentos científicos em conhecimentos escolares, que se adequem às características dos alunos em estudo, ao contexto educacional e às demandas curriculares.

Para Philippe Perrenoud, transpor um conteúdo científico para o ensino é sempre uma tarefa delicada e complexa, pois requer não apenas a transformação do conhecimento em termos didáticos, mas também, uma reflexão sobre as finalidades do ensino e sobre as relações entre a ciência e a sociedade.

A transformação do conhecimento científico no âmbito escolar não é promover didaticamente apenas uma adequação ou uma transmissão de conhecimentos mais simplificada. Nesse processo, o professor deve analisar e compreender que o seu plano didático é instrumento potencial para promover a produção de novos saberes.

“O professor, para garantir o êxito da transposição didática, deve buscar estabelecer um vínculo entre o conteúdo científico e a realidade dos alunos, contextualizando o conhecimento e promovendo a construção de conceitos a partir de experiências vivenciadas pelos estudantes” (GASPARIN, 2010, p. 105).

Em resumo, podemos colocar a Transposição Didática como sendo o caminho percorrido do saber científico ao saber ensinado. É um processo de transformação do saber, que é modificado em relação ao saber proposto a ensinar, com o objetivo de contribuir para o processo evolutivo e histórico do conhecimento científico.

O contrato didático é um conceito importante na área da educação, que se refere às expectativas e responsabilidades mútuas entre professores e alunos em relação ao processo de aprendizagem, considerando as regras estabelecidas durante o funcionamento do processo de ensino e aprendizagem. Traz a expectativa do professor em relação a aprendizagem dos alunos e vice-versa, incluindo, ainda, o saber e as formas como esse saber é conciliado por ambas as partes.

Segundo Brousseau (1998, p. 36), o contrato didático é “um acordo tácito ou explícito entre os alunos e o professor sobre o que pode ser aprendido, como pode ser aprendido, como deve ser ensinado e como o aprendizado será avaliado”.

No entanto, é importante ressaltar que o contrato didático não é algo fixo e imutável, mas, sim, um processo dinâmico e em constante evolução. Conforme as necessidades e interesses dos alunos mudam, ao longo do tempo, o contrato didático deve ser adaptado e modificado para atender a essas demandas. Como afirmou Chevallard (1999), “o contrato didático é um processo em constante evolução, que deve ser negociado e renegociado continuamente pelos atores da situação didática”.

É possível que o contrato didático não possa ser efetivado devido à falta de interesse dos discentes na participação das resoluções das atividades didáticas propostas pelo pesquisador, fazendo com que ele determine o rompimento do contrato.

5.8 Análise a Posteriori e Validação (Interna e Externa)

A análise a posteriori é uma abordagem de análise de dados que busca entender e explicar um fenômeno a partir da observação e interpretação de dados coletados. Essa abordagem tem sido amplamente utilizada em diferentes áreas de estudo, desde a economia até a psicologia. Segundo Hanushek e Woessmann (2012), a análise a posteriori é uma ferramenta poderosa para avaliar a eficácia de políticas públicas e programas educacionais.

Como afirmou King (1994), “a análise a posteriori é uma técnica de pesquisa que busca entender o que causou um determinado fenômeno ou evento, analisando dados já existentes em vez de coletar novos dados” (KING, 1994, p. 3).

Nessa etapa, relata-se a análise dos dados coletados durante a etapa de experimentação, devendo ser registrados por meio de: relato de observações, registros fotográficos das produções escritas e gravações das entrevistas com os alunos.

Uma das principais vantagens da análise a posteriori é que ela permite uma análise mais detalhada e aprofundada dos dados. Como afirmou Miles e Huberman (1994), “a análise a posteriori permite uma visão mais profunda dos dados coletados, permitindo que sejam identificadas relações entre diferentes variáveis e fatores que contribuíram para o resultado observado” (p. 10).

No entanto, é importante ressaltar que a análise a posteriori não é uma abordagem isenta de críticas. Alguns pesquisadores argumentam que a análise a posteriori pode ser afetada por vieses e limitações nos dados disponíveis. Como afirmou Yin (2009), “a análise a posteriori pode ser limitada pela qualidade dos dados disponíveis e pela falta de controle sobre o processo de coleta de dados” (p. 18).

A validação de dados é um processo essencial em uma pesquisa científica, pois garante que os dados coletados sejam precisos e confiáveis. Segundo Creswell e Plano Clark (2018), a validação de dados envolve a verificação da precisão e confiabilidade dos dados coletados, além de garantir que os dados representem, fielmente, o fenômeno estudado.

A validação interna e externa são aspectos essenciais na validação de dados de uma pesquisa científica. Segundo Shadish, Cook e Campbell (2002), a validação interna refere-se à capacidade, de um estudo, de estabelecer uma relação causal entre a variável independente e a variável dependente, enquanto a validação externa refere-se à generalização dos resultados para outras populações, contextos ou situações.

Para garantir a validade interna dos dados, os pesquisadores podem usar várias técnicas, como, o controle de variáveis de confusão, o uso de grupos de controle e a aleatorização. Como afirmaram Shadish, Cook e Campbell (2002):

“O controle de variáveis de confusão envolve a identificação e a eliminação de fatores que possam interferir na relação causal entre a variável independente e a variável dependente, enquanto o uso de grupos de controle e a aleatorização envolvem a comparação dos resultados entre o grupo experimental e o grupo de controle para estabelecer a relação causal” (p. 25).

Nesse momento, realizou-se uma comparação dos resultados obtidos na experimentação com o que foi definido na análise a priori, conforme a tabela de Fedathi (Tabela 2), a fim de que sejam validadas as hipóteses durante a investigação. A Engenharia Didática admite que sejam feitos dois tipos de validação: interna e externa.

Essa pesquisa foi realizada com 18 alunos participantes, avaliados em um curto período de aplicação e avaliação. Vale ressaltar que as produções não foram comparadas com outras externas a esta pesquisa, sendo, também, realizada a validação interna.

6 DISCUSSÕES E RESULTADOS

O trabalho descrito acima foi realizado com uma turma do primeiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Profissional Francisca Maura Martins na cidade de Hidrolândia no estado do Ceará. Essa turma trata-se do 1º ano D de turno integral e, na matrícula constavam 45 alunos, no entanto, de acordo com normas da própria instituição de ensino, no período de trabalho no qual se realizou a pesquisa, um total de 18 alunos, mudaram de sala para a realização do diagnóstico.

A referida turma do 1º D integral, era composta por alunos jovens com faixa etária de 17 anos em média. Além do fator idade, nessa turma também predominavam algumas características dos alunos que fazia da turma do 1º D um conjunto de alunos com costumes bem diversificados. Desse modo, algumas das principais características importantes para a denominação dessa turma eram diversificação de aprendizagem. Nesse contexto, é importante destacar essas características, pois essa diversidade foi um fator determinante para o trabalho com esse conjunto de alunos.

Ao destacar esse conjunto de fatores no trabalho com esse conjunto de alunos, foi possível perceber que a dinâmica de trabalho seria bastante diversificada, pois enquanto alguns alunos perceberiam algo com certa facilidade, para outros, o mesmo trabalho requereria mais tempo e também mais atenção.

Baseado na TAC, os resultados levantados nas aplicações realizadas com o grupo de discente do 1º ano D da EEEP Francisca Maura Martins, mostraram:

6.1 Observações concernentes ao primeiro teste diagnóstico em Análise preliminares

O primeiro teste diagnóstico, na etapa de Análise preliminares da Engenharia Didática, foi composto por uma situação puramente algébrica, com a finalidade de verificar se os alunos já sabiam reconhecer uma estrutura algébrica de uma incógnita e aplicar valores a esta e, com isso, chegar ao valor solução por meio do senso abstrato da aproximação. Sendo assim, a situação proposta aos alunos foi a seguinte:

A atividade foi aplicada aos alunos no dia 04 de abril de 2023, conforme cronograma e, ficou acordado que eles deveriam entregar no mesmo dia. Assim, após os alunos devolverem a atividade fez-se a discussão do problema proposto a eles e, em seguida, apresentou-se a resolução, pois a discussão fez-se importante naquele momento para que os alunos pudessem esclarecer algumas dúvidas relacionadas ao conteúdo matemático e ao exercício. Com isso, a partir das dúvidas dos alunos poderia se compreender melhor a próxima atividade diagnóstica a ser conduzida.

Daqui em diante, serão mostradas as resoluções ou justificativas dadas por três alunos que responderam o teste. Apesar de 18 alunos terem respondido o teste diagnóstico, para esta pesquisa só serão analisados três testes pelo fato de que foram considerados somente essas três resoluções por considerar alguns aspectos característicos de semelhança nas atividades desses alunos e ao grupo participante. Essas características que eram comuns a esses alunos foi o que levou à delimitação do número de alunos e a suas respectivas atividades para serem analisadas sob as exigências impostas por este estudo. Desse modo, os alunos foram identificados, nesses testes, como, Aluno A, Aluno B e Aluno C, dividindo o grupo de estudo em três análise de níveis distintos.

Para analisar as atividades de cada aluno, serão considerados tanto os aspectos relativos ao conhecimento do aluno, ou seja, aos conhecimentos matemáticos trabalhados com esses alunos, quanto às dificuldades impostas pela atividade e a forma como o aluno deveria tratar o conhecimento para resolver a situação que lhe foi imposta, de modo a conseguir alcançar o objeto que era o da aprendizagem por meio da resolução de problemas. Assim, seguem-se os testes:

Figura 9 – Teste do Aluno A (Atividade 1)

a) Solução = 3

X	$3x + 35$	valor numérico
0	$3 \cdot 0 + 35$	35
1	$3 \cdot 1 + 35$	38
2	$3 \cdot 2 + 35$	41
3	$3 \cdot 3 + 35$	44
4	$3 \cdot 4 + 35$	47
5	$3 \cdot 5 + 35$	50
6	$3 \cdot 6 + 35$	53
7	$3 \cdot 7 + 35$	56

b) Solução = 30

X	$20 + 4x$	valor numérico
0	$20 + 4 \cdot 0$	20
1	$20 + 4 \cdot 1$	24
2	$20 + 4 \cdot 2$	28
3	$20 + 4 \cdot 3$	32
4	$20 + 4 \cdot 4$	36
5	$20 + 4 \cdot 5$	40
6	$20 + 4 \cdot 6$	44
7	$20 + 4 \cdot 7$	48
8	$20 + 4 \cdot 8$	52
9	$20 + 4 \cdot 9$	56
10	$20 + 4 \cdot 10$	60

c) Solução = 3

X	$10 - 4x$	valor numérico
1	$10 - 4 \cdot 1$	6
2	$10 - 4 \cdot 2$	2
3	$10 - 4 \cdot 3$	-2
4	$10 - 4 \cdot 4$	-6

d) Solução = 4

X	$2x - 3$	$x + 3$	$2x - 3 - x + 3$
0	$2 \cdot 0 - 3$	$0 + 3$	$3 - 3 = 0$
1	$2 \cdot 1 - 3$	$1 + 3$	$5 - 3 = 2$
2	$2 \cdot 2 - 3$	$2 + 3$	$7 - 3 = 4$
3	$2 \cdot 3 - 3$	$3 + 3$	$9 - 3 = 6$
4	$2 \cdot 4 - 3$	$4 + 3$	$11 - 3 = 8$
5	$2 \cdot 5 - 3$	$5 + 3$	$13 - 3 = 10$

e) Solução = 3

X	$x - 4$	$3x - 10$	$x - 4 - 3x + 10$
0	$0 - 4$	$3 \cdot 0 - 10$	$0 - 4 - 0 + 10 = 6$
1	$1 - 4$	$3 \cdot 1 - 10$	$1 - 4 - 3 + 10 = 4$
2	$2 - 4$	$3 \cdot 2 - 10$	$2 - 4 - 6 + 10 = 2$
3	$3 - 4$	$3 \cdot 3 - 10$	$3 - 4 - 9 + 10 = 0$
4	$4 - 4$	$3 \cdot 4 - 10$	$4 - 4 - 12 + 10 = -2$
5	$5 - 4$	$3 \cdot 5 - 10$	$5 - 4 - 15 + 10 = -4$
6	$6 - 4$	$3 \cdot 6 - 10$	$6 - 4 - 18 + 10 = -6$

Fonte: o autor.

É possível perceber que o Aluno A compreendeu a proposta da atividade diagnóstica, em definir, no entanto, que existia uma linearidade e que o valor da variável que atendia a proposta de solução ao ser definido, dava-se por aproximação. Assim, o Aluno A, para definir as soluções das equações, combinou diferentes informações, analisando abstratamente. Assim, é possível estabelecer que o conhecimento necessário para o sucesso do Aluno A, na resolução do problema proposto a ele, não estava completamente distante e, por isso, via-se, nesse aluno, uma perspectiva positiva com potencial para resolução de situações-problema de maneira correta. A esse caso, Almouloud (2007, p. 131) afirma que, o que atesta a aquisição de uma noção matemática são suas condições de utilização, além dos problemas que o sujeito é capaz de resolver usando essa noção, fazendo as devidas conexões intra e interdisciplinares. É na clareza da compreensão da estrutura algébrica que se visualiza com mais competência a resolução de problemas e que revela o significado que o aluno atribuiu a essa noção.

Figura 10 – Teste do Aluno B (Atividade 1)

a)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$3 \cdot x + 15$</th> <th>valor numérico</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>$3 \cdot 2 + 15$</td> <td>21</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>$3 \cdot 3 + 15$</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>$3 \cdot 4 + 15$</td> <td>27</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>$3 \cdot 5 + 15$</td> <td>30</td> </tr> </tbody> </table> <p>Solução: 5</p>	x	$3 \cdot x + 15$	valor numérico	2	$3 \cdot 2 + 15$	21	3	$3 \cdot 3 + 15$	24	4	$3 \cdot 4 + 15$	27	5	$3 \cdot 5 + 15$	30	b)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$20 + 4x$</th> <th>valor numérico</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>$20 + 4 \cdot 3$</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>$20 + 4 \cdot 4$</td> <td>36</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>$20 + 4 \cdot 5$</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>$20 + 4 \cdot 6$</td> <td>44</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>$20 + 4 \cdot 7$</td> <td>48</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>$20 + 4 \cdot 8$</td> <td>52</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>$20 + 4 \cdot 9$</td> <td>56</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>$20 + 4 \cdot 10$</td> <td>60</td> </tr> </tbody> </table> <p>Solução: 10</p>	x	$20 + 4x$	valor numérico	3	$20 + 4 \cdot 3$	32	4	$20 + 4 \cdot 4$	36	5	$20 + 4 \cdot 5$	40	6	$20 + 4 \cdot 6$	44	7	$20 + 4 \cdot 7$	48	8	$20 + 4 \cdot 8$	52	9	$20 + 4 \cdot 9$	56	10	$20 + 4 \cdot 10$	60
x	$3 \cdot x + 15$	valor numérico																																											
2	$3 \cdot 2 + 15$	21																																											
3	$3 \cdot 3 + 15$	24																																											
4	$3 \cdot 4 + 15$	27																																											
5	$3 \cdot 5 + 15$	30																																											
x	$20 + 4x$	valor numérico																																											
3	$20 + 4 \cdot 3$	32																																											
4	$20 + 4 \cdot 4$	36																																											
5	$20 + 4 \cdot 5$	40																																											
6	$20 + 4 \cdot 6$	44																																											
7	$20 + 4 \cdot 7$	48																																											
8	$20 + 4 \cdot 8$	52																																											
9	$20 + 4 \cdot 9$	56																																											
10	$20 + 4 \cdot 10$	60																																											
c)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$12 - 4 \cdot x$</th> <th>valor numérico</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>$12 - 4 \cdot 1$</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>$12 - 4 \cdot 2$</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>$12 - 4 \cdot 3$</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	x	$12 - 4 \cdot x$	valor numérico	1	$12 - 4 \cdot 1$	8	2	$12 - 4 \cdot 2$	4	3	$12 - 4 \cdot 3$	0	d)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$2x - 1$</th> <th>$x + 3$</th> <th>$2x + 3 = x + 1$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-1</td> <td>$2 \cdot (-1) - 1$</td> <td>$-1 + 3$</td> <td>$3 = -2$</td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td>$2 \cdot (-2) - 1$</td> <td>$-2 + 3$</td> <td>$5 = -1$</td> </tr> <tr> <td>-3</td> <td>$2 \cdot (-3) - 1$</td> <td>$-3 + 3$</td> <td>$7 = 0$</td> </tr> <tr> <td>-4</td> <td>$2 \cdot (-4) - 1$</td> <td>$-4 + 3$</td> <td>$9 = 1$</td> </tr> <tr> <td>-5</td> <td>$2 \cdot (-5) - 1$</td> <td>$-5 + 3$</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	x	$2x - 1$	$x + 3$	$2x + 3 = x + 1$	-1	$2 \cdot (-1) - 1$	$-1 + 3$	$3 = -2$	-2	$2 \cdot (-2) - 1$	$-2 + 3$	$5 = -1$	-3	$2 \cdot (-3) - 1$	$-3 + 3$	$7 = 0$	-4	$2 \cdot (-4) - 1$	$-4 + 3$	$9 = 1$	-5	$2 \cdot (-5) - 1$	$-5 + 3$							
x	$12 - 4 \cdot x$	valor numérico																																											
1	$12 - 4 \cdot 1$	8																																											
2	$12 - 4 \cdot 2$	4																																											
3	$12 - 4 \cdot 3$	0																																											
x	$2x - 1$	$x + 3$	$2x + 3 = x + 1$																																										
-1	$2 \cdot (-1) - 1$	$-1 + 3$	$3 = -2$																																										
-2	$2 \cdot (-2) - 1$	$-2 + 3$	$5 = -1$																																										
-3	$2 \cdot (-3) - 1$	$-3 + 3$	$7 = 0$																																										
-4	$2 \cdot (-4) - 1$	$-4 + 3$	$9 = 1$																																										
-5	$2 \cdot (-5) - 1$	$-5 + 3$																																											

Fonte: o autor.

Ao observar o Aluno B, nota-se que o aluno acertou, em partes, as questões propostas. Por uma análise prévia sobre a atividade teste, percebe-se uma limitação conforme o grau de complexibilidade das estruturas analisadas. No entanto, para Almouloud (2007, p. 105) “a avaliação formativa consiste em identificar as aquisições dos alunos, no momento da aprendizagem, para adequá-las à própria formação”, nesse sentido, significa que as respostas dada pelo Aluno B correspondeu justamente ao que foi proposto, ou seja, a resposta dada pelo Aluno B foi condizente com o que a questão solicitou, porém, o que se verificou na resposta é que o aluno conseguiu associar, numericamente, o valor da incógnita em apenas estruturas mais simples. Neste caso, não há erro cometido pelo Aluno B quando se refere à interpretação na inicialização das resoluções nas questões propostas, e sim, apenas no desenvolvimento de cunho algébrico mais complexos.

Figura 11 – Teste do Aluno C (Atividade 1)

A) $3x + 15 = 30$

x	$3 \cdot x + 15$	valor x
2	$3 \cdot 2 + 15$	21
3	$3 \cdot 3 + 15$	24
4	$3 \cdot 4 + 15$	27
5	$3 \cdot 5 + 15$	30
6	$3 \cdot 6 + 15$	

Solução: $3(5) + 15 = 30$

b) $20 + 4x = 60$

x	$20 + 4 \cdot x$	valor x
4	$20 + 4 \cdot 4$	28
6	$20 + 4 \cdot 6$	44
8	$20 + 4 \cdot 8$	52
10	$20 + 4 \cdot 10$	60
12	$20 + 4 \cdot 12$	

Solução: $20 + 4(10) = 60$

c) $12 - 4x = 0$

x	$12 - 4 \cdot x$	valor x
0	$12 - 4 \cdot 0$	
1	$12 - 4 \cdot 1$	
2	$12 - 4 \cdot 2$	
3	$12 - 4 \cdot 3$	
4	$12 - 4 \cdot 4$	

Fonte: o autor.

Na resolução proposta pelo o Aluno C, observa-se que o mesmo tem uma compreensão inicial na proposição ofertada para resolução. Porém, o sucesso de continuidade foi interrompido em itens iniciais, deixando claro, uma grande dificuldade no conhecimento algébrico, dando margem perceptível de dificuldades para resoluções de problemas. Isto pelo fato de que, a resolução dos mesmos requer o conhecimento algébricos para solucionarmos conforme a proposta. Ressalta-se a importância e a necessidade dos pré-requisitos algébricos para uma abordagem completas nas resoluções de problemas. Nesse sentido, Brousseau apud Almouloud (2007, p. 135) afirma que

Por consequência, o erro é considerado necessário para:

- desencadear o processo da aprendizagem do aluno;
- o professor situar as concepções do aluno e, eventualmente, compreender os obstáculos subjacentes;
- o professor adaptar a situação didática.

Ao fazer a análise dos testes dos três alunos nesta atividade diagnóstica, é possível concluir que o que se apresentou como um grande impasse para a realização dessa atividade para os Alunos A, B e C não foi o fator compreensão de inicialização da atividade, mas o campo

conceitual em relação ao estudo das equações e, por isso, é explicada a grande dificuldade desses alunos executarem o saber básico para a resolução de uma situação proposta. Observando esse fato, é importante evidenciar a afirmação de Pais (2006, p. 122).

Conceituar exige muito mais do que definir. Em termos de tempo, a conceitualização é muito mais demorada que a aprendizagem ou a memorização de uma definição. O domínio de um nível conceitual passa pelo domínio de sua definição, mas vai além. Trata-se de expressar um discurso objetivo em torno da ideia, relacionando-a com outros conceitos e teorias, revelando nuances que a definição é incapaz de expressar.

6.2 Aspectos observados no segundo teste diagnóstico

Geralmente, quando acontecem trabalhos que exigem um grande esforço do aluno em relação à aprendizagem de algum conteúdo matemático, logo em seguida são propostas atividades que têm como finalidade a avaliação do aluno em relação à aprendizagem dos conceitos e definições abordados e discutidos no estudo em questão. Por esse motivo, fez-se importante, após a realização da primeira etapa da resolução de equações pela análise da aproximação, consultar novamente os alunos por meio de testes diagnósticos para avaliar se, de fato, o trabalho empreendido teve algum significado com relação ao ensino aprendizagem.

Assim, por pensar que um último teste diagnóstico seria fundamental para ter uma visão, mesmo que geral, do impacto do trabalho realizado a favor da aprendizagem dos alunos, é elementar estabelecer que todo o trabalho se fundamentou no conceito de avaliação formativa definida por Almouloud (2007, p. 105) como uma avaliação, em que ela pode, também, ser feita para monitorar a evolução do comportamento dos alunos em situação de resolução de questões matemáticas. Ela intervém nas aprendizagens por meio da modificação das situações didáticas, dos contratos didáticos, dos objetivos e da própria construção das atividades matemáticas, visto que os processos de avaliação fazem parte das variáveis didáticas.

A partir do exposto, daqui em diante serão observados os impactos que este trabalho teve no ensino e aprendizagem dos alunos em relação a formação da estrutura algébrica de situações-problema. No entanto, é interessante, antes, fazer algumas ressalvas sobre o teste. Assim, serão colocadas em evidência algumas observações em torno da segunda e terceira propostas de atividades com abordagem, a partir de agora, em situações-problema propostas aos alunos.

O segundo teste diagnóstico, tinha o objetivo de avaliar como estava o conhecimento dos alunos em relação ao saber matemático com análise em situações-problema.

No entanto, este teste exigia que o aluno soubesse diferenciar um problema de uma incógnita e um problema que envolvia variáveis, identificando-os por meio de códigos propostos, se esses se tratavam de equações ou funções. Nesse sentido, o teste servirá para fazer comparações referentes à aprendizagem dos alunos com relação ao resultado do primeiro teste.

Quadro 5 – Segundo teste diagnóstico

Quadro 5: Segundo teste diagnóstico

1. Analise a sequência das figuras:




Figura 2

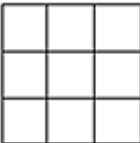


Figura 3

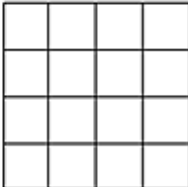


Figura 4

a) Determine a quantidade de quadrinhos da Figura 3;

b) Qual a quantidade de quadrinhos da Figura 4?

c) Quantos quadrinhos teria a Figura 7?

2. Utilizando-se os códigos "EA" para equação e "FA" para função, identifique os tipos de Problemas que temos e quantidade de variáveis em cada situação:

a) Pense em um número. Somando 25 ao número pensado teremos 48 como resultado. Qual o valor do número pensado?

b) O dobro de um número mais três é igual a 11. Qual é o número?

3. Quanto custará 52 metros de fio elétrico, se 6 metros custam R\$ 18,00?

4. Um funcionário recebeu, em um determinado mês, de uma Empresa A, uma quantia relacionada a um serviço prestado. Nesse mesmo mês, recebeu, também, uma quantia de uma Empresa B de R\$ 300,00 por outro serviço prestado. Escreva uma representação algébrica do valor recebido por esse funcionário, neste mesmo mês.

Fonte: o autor.

6.3 Aspectos observados no terceiro teste diagnóstico

O referido teste busca uma análise de contexto algébrico mais puro com aplicações diretas na resolução dos problemas propostos, pois o mesmo trazia situações-problema com proposição de construção algébrica representativa da situação colocada. A competência

demonstrada nessa avaliação deixava claro a familiaridade com as aplicações de expressões de cunho algébrico e suas estruturas de acordo com teste proposto. Este teste, oportuniza a condição de ver melhor o avanço da aprendizagem dos alunos com relação aos resultados dos dois primeiros testes.

Quadro 6 – Terceiro teste diagnóstico

Quadro 6: Terceiro teste diagnóstico

1. Utilizando-se de uma equação ou função matemática represente algebricamente os seguintes Problemas:
- a) Pense em um número. Somando 25 ao número pensado teremos 48 como resultado. Qual o valor do número pensado?

 - b) O dobro de um número mais três é igual a 11. Qual é o número?

 - c) Quanto custará 52 metros de fio elétrico, se 6 metros custam R\$ 18,00?

 - d) Um funcionário recebeu, em um determinado mês, de uma Empresa A, uma quantia relacionada a um serviço prestado. Nesse mesmo mês, recebeu, também, uma quantia de uma Empresa B de R\$ 300,00 por outro serviço prestado. Escreva uma representação algébrica do valor recebido por esse funcionário, neste mesmo mês.

Fonte: atividade elaborada pelo autor.

Figura 12 – Teste do Aluno A (Atividade 2)

Atividade 2

1. Analise a sequência das figuras:

2




Figura 3

3




Figura 4




Figura 5

a) Determine a quantidade de quadrinhos da Figura 3:
4

b) Qual a quantidade de quadrinhos da Figura 4?
9

c) Quantos quadrinhos teria a Figura 7?
36

2. Utilizando-se os códigos "EA" para equação e "FA" para função, identifique os tipos de Problemas que temos e quantidade de variáveis em cada situação:

a) Pense em um número. Somando 25 ao número pensado teremos 48 como resultado. Qual o valor do número pensado?
23
$$\begin{array}{r} 48 \\ -25 \\ \hline 23 \end{array}$$

b) O dobro de um número mais três é igual a 11. Qual é o número?
4
$$\begin{array}{r} 011 \\ -3 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 812 \\ 4 \end{array}$$

3. Quanto custará 52 metros de fio elétrico, se 6 metros custam R\$ 18,00?
52 m custam R\$ 162,00
$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 9 \\ \hline 162 \end{array}$$

4. Um funcionário recebeu, em um determinado mês, de uma Empresa A, uma quantia relacionada a um serviço prestado. Nesse mesmo mês, recebeu, também, uma quantia de uma Empresa B de R\$ 300,00 por outro serviço prestado. Escreva uma representação algébrica do valor recebido por esse funcionário, neste mesmo mês.

Fonte: o autor

Figura 13 – Teste do Aluno B (Atividade 2)

Atividade 2

1. Analise a sequência das figuras:




Figura 3




Figura 4




Figura 5

a) Determine a quantidade de quadrinhos da Figura 3;
4

b) Qual a quantidade de quadrinhos da Figura 4?
9

c) Quantos quadrinhos teria a Figura 7?
36

2. Utilizando-se os códigos "EA" para equação e "FA" para função, identifique os tipos de Problemas que temos e quantidade de variáveis em cada situação:

a) Pense em um número. Somando 25 ao número pensado teremos 48 como resultado. Qual o valor do número pensado?
EA, 2 variáveis

b) O dobro de um número mais três é igual a 11. Qual é o número?
EA, 2 variáveis

3. Quanto custará 52 metros de fio elétrico, se 6 metros custam R\$ 18,00?
FA

4. Um funcionário recebeu, em um determinado mês, de uma Empresa A, uma quantia relacionada a um serviço prestado. Nesse mesmo mês, recebeu, também, uma quantia de uma Empresa B de R\$ 300,00 por outro serviço prestado. Escreva uma representação algébrica do valor recebido por esse funcionário, neste mesmo mês.
FA

Fonte: o autor.

Figura 14 – Teste do Aluno A (Atividade 3)

Atividade 3

1. Utilizando-se de uma equação ou função matemática represente algebricamente os seguintes Problemas:

a) Pense em um número. Somando 25 ao número pensado teremos 48 como resultado. Qual o valor do número pensado?

$$X + 25 = 48$$

b) O dobro de um número mais três é igual a 11. Qual é o número?

$$X \cdot 2 + 3 = 11$$

c) Quanto custará 52 metros de fio elétrico, se 6 metros custam R\$ 18,00?

$$52 : 6$$

d) Um funcionário recebeu, em um determinado mês, de uma Empresa A, uma quantia relacionada a um serviço prestado. Nesse mesmo mês, recebeu, também, uma quantia de uma Empresa B de R\$ 300,00 por outro serviço prestado. Escreva uma representação algébrica do valor recebido por esse funcionário, neste mesmo mês.

Fonte: o autor.

Figura 15 – Teste do Aluno B (Atividade 3)

Atividade 3

1. Utilizando-se de uma equação ou função matemática represente algebricamente os seguintes Problemas:

a) Pense em um número. Somando 25 ao número pensado teremos 48 como resultado. Qual o valor do número pensado?

$$\begin{array}{r} X + 25 = 48 \\ \text{"48"} \\ - 25 \\ \hline 23 \end{array}$$

b) O dobro de um número mais três é igual a 11. Qual é o número?

$$\begin{array}{l} 2 \cdot X + 3 = 11 \\ 2 \cdot 4 + 3 = 11 \end{array}$$

c) Quanto custará 52 metros de fio elétrico, se 6 metros custam R\$ 18,00?

$$\begin{array}{l} 6 - 18 \\ 52 - X \end{array} \quad \begin{array}{l} 6x = 926 \\ x = \frac{926}{6} \\ \hline 154,33 \end{array} \quad \text{R\$ } 154,33$$

d) Um funcionário recebeu, em um determinado mês, de uma Empresa A, uma quantia relacionada a um serviço prestado. Nesse mesmo mês, recebeu, também, uma quantia de uma Empresa B de R\$ 300,00 por outro serviço prestado. Escreva uma representação algébrica do valor recebido por esse funcionário, neste mesmo mês.

$$A + B = 300$$

Fonte: o autor.

No segundo teste, observou-se que houve apenas duas categorias de respostas semelhantes, fazendo com que o rol de análise acontecesse somente com os alunos A e B. analisando-se, inicialmente, a forma como o Aluno A realizou a sua resposta. Por isso, assim como o primeiro teste, a primeira parte do diagnóstico, de acordo com a proposta, está correta, pois, de acordo com o que foi pedido pela situação-problema no *item a*, o Aluno A o respondeu bem. Assim, foi pedido que o aluno escrevesse a quantidade de quadrados da figura pela lógica proposta, buscando uma prévia analítica para os próximos itens, onde os mesmos diagnosticavam a visualização da quantidade de variáveis envolvidas nas situações-problema propostas. E, neste ponto, o aluno A empreendeu corretamente somente o *item a*, diferente do aluno B que, comparado com o primeiro teste realizado, o mesmo desenvolveu também a maioria dos itens propostos.

No que concerne o terceiro teste, os alunos A e B desenvolveram como foi proposto, observando-se que o Aluno B, apresentou maior nível de aprendizagem em buscar a aplicação

da estrutura algébrica nas situações de maior complexidade. Desse modo, a começar pelos *itens a e b* do teste, observa-se que o Aluno B conseguiu formalizar a equação, no entanto, ele não a expôs a simbologia para estruturação do contexto algébrico como colocou a situação, mas a forma como o aluno escreveu a equação demonstra significatividade para a resposta.

Analisando o *item c*, verifica-se que o Aluno B fez de acordo com o que foi pedido, mostrando a estruturação algébrica pela associação das grandezas variáveis propostas na situação-problema.

No *item d*, os Alunos A e B não utilizaram recursos algébricos para a resposta correta, sem relacionar os valores colocados pela situação-problemas.

Portanto, aqui ficaram evidenciadas as observações acerca do teste 2 e 3 dos Aluno A e B, como já mencionado, não apuradas as informações contidas no teste diagnóstico do Aluno C por não haver diferenciação de resposta perante os demais.

6.4 Aspectos observados no quarto teste diagnóstico

O quarto teste diagnóstico apresentou situações-problema consolidando resoluções completas, integrando todas as etapas abordadas nos testes aplicado anteriormente. As seguintes propostas fazem aplicações diversificadas, exigindo maiores habilidades dos alunos e abstrações de cunho algébrico, finalizando com análises de cada situação proposta para solucionar. Sendo assim, as situações propostas aos alunos se resumem em quatro situações propostas abaixo:

Quadro 7 – Quarto teste diagnóstico**Quadro 7: Quarto teste diagnóstico**

Em cada Problema seguinte, identifique as variáveis envolvidas e tente solucioná-los utilizando equações na sua resolução. “Escreva as variáveis explicitando o que ela representa”.

Problema de idade: Maria tem o dobro da idade de seu filho. Há 10 anos, a idade de Maria era quatro vezes a idade de seu filho. Qual é a idade atual de cada um?

Problema de proporção: Em uma mistura de suco, a proporção de suco de laranja para suco de maçã é de 3 para 5. Se houver 20 litros de suco de maçã na mistura, quantos litros de suco de laranja há na mistura?

Problema de geometria: Um retângulo tem um comprimento que é o dobro da largura. A área do retângulo é de 48 metros quadrados. Qual é o comprimento e a largura do retângulo?

Problema de investimento: Um investidor investe parte de seus recursos em uma conta que paga 4% de juros anualmente e o restante em uma conta que paga 7% de juros anualmente. Se o investidor tem um total de R\$ 10.000 investidos e recebe R\$ 550 em juros durante um ano, quanto foi investido em cada conta?

Fonte: atividade elaborada pelo autor.

Figura 16 – Teste do Aluno A (Atividade 4)

Atividade 4

Em cada Problema seguinte, identifique as variáveis envolvidas e tente solucioná-los utilizando equações na sua resolução. "Escreva as variáveis explicitando o que ela representa".

Problema de idade: Maria tem o dobro da idade de seu filho. Há 10 anos, a idade de Maria era quatro vezes a idade de seu filho. Qual é a idade atual de cada um?

Handwritten student work for the age problem:

Problema de proporção: Em uma mistura de suco, a proporção de suco de laranja para suco de maçã é de 3 para 5. Se houver 20 litros de suco de maçã na mistura, quantos litros de suco de laranja há na mistura?

Handwritten student work for the proportion problem:

Problema de geometria: Um retângulo tem um comprimento que é o dobro da largura. A área do retângulo é de 48 metros quadrados. Qual é o comprimento e a largura do retângulo?

Fonte: o autor.

A partir do exposto, o aluno A demonstrou um distanciamento da proposta algébrica, objeto de pesquisa desse trabalho, levando a entender e analisar que existe uma enorme limitação e, simultaneamente, um impacto extremo nesse tipo de atividade para o referido aluno. No entanto, é interessante, fazer alguma ressalva sobre o teste. Diante desta situação, é incoerente aplicar, no processo de ensino aprendizagem situações para alunos que apresentam ínfimos de conhecimentos na linguagem abstrata e algébrica.

Figura 17 – Teste do Aluno B (Atividade 4)

Atividade 4

Em cada Problema seguinte, identifique as variáveis envolvidas e tente solucioná-los utilizando equações na sua resolução. "Escreva as variáveis explicitando o que ela representa".

Problema de idade: Maria tem o dobro da idade de seu filho. Há 10 anos, a idade de Maria era quatro vezes a idade de seu filho. Qual é a idade atual de cada um?

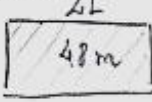
$$4F = M \quad M = 2F \quad 2F - 10 = 4F - 40$$

$$M - 10 = (F - 10) \cdot 4 \quad -2F = -30 \quad F = 15 \quad M = 30$$

Problema de proporção: Em uma mistura de suco, a proporção de suco de laranja para suco de maçã é de 3 para 5. Se houver 20 litros de suco de maçã na mistura, quantos litros de suco de laranja há na mistura?

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{20} \quad 60 = 5x \quad x = \frac{60}{5} \quad x = 12 \text{ l}$$

Problema de geometria: Um retângulo tem um comprimento que é o dobro da largura. A área do retângulo é de 48 metros quadrados. Qual é o comprimento e a largura do retângulo?



$$AR = b \cdot h \quad 2L^2 = 48 \quad L = \sqrt{24} \quad L = 2 \cdot \sqrt{6}$$

$$AR = 2L \cdot L \quad L = \sqrt{\frac{48}{2}} \quad L/R = 2L^2$$

Comprimento = $4 \cdot \sqrt{6}$ largura = $2 \cdot \sqrt{6}$

Problema de investimento: Um investidor investe parte de seus recursos em uma conta que paga 4% de juros anualmente e o restante em uma conta que paga 7% de juros anualmente. Se o investidor tem um total de R\$ 10.000 investidos e recebe R\$ 550 em juros durante um ano, quanto foi investido em cada conta?

$$10.000 \div 2 = 5000$$

<p>4% → 5000</p> <p>100% → 5000</p> <p>4% → x</p>		<p>7% → 5000</p> <p>100% → 5000</p> <p>7% → x</p>
<p><u>20000</u></p> <p><u>2000</u></p>		<p><u>35000</u></p> <p><u>3500</u></p>

Fonte: o autor.

Nesta atividade do Aluno B observa-se que ele definiu as funções de maneira coerente com a proposição do problema. Assim, ao analisar todas as situações-problema propostos na Atividade, verifica-se que o Aluno B apresenta mais consolidação ao conhecimento de cunho algébrico, fazendo e desenvolvendo estruturas não apresentada pelo o Aluno A. Desse modo, relacionou a variável independente com a variável dependente que ele variou com simbologias diversificadas no âmbito das resoluções apresentadas.

Figura 18a – Teste do Aluno C (Atividade 4)

Atividade 4
35

Em cada Problema seguinte, identifique as variáveis envolvidas e tente solucioná-los utilizando equações na sua resolução. "Escreva as variáveis explicitando o que ela representa".

Problema de idade: Maria tem o dobro da idade de seu filho. Há 10 anos, a idade de Maria era quatro vezes a idade de seu filho. Qual é a idade atual de cada um?

2 variáveis $x = 2y$ $x - 10 = 4(y - 10)$ então a mãe
 $xy = 10 + 10$ $xy = 20$ tem 10 anos e
o filho tem 20
anos

Problema de proporção: Em uma mistura de suco, a proporção de suco de laranja para suco de maçã é de 3 para 5. Se houver 20 litros de suco de maçã na mistura, quantos litros de suco de laranja há na mistura?

1 Variáveis $\frac{3}{5} \cdot 20 = \frac{5}{3} \cdot 20 = \frac{100}{3} = 33,33$

Problema de geometria: Um retângulo tem um comprimento que é o dobro da largura. A área do retângulo é de 48 metros quadrados. Qual é o comprimento e a largura do retângulo?

$a = b \cdot h$ Onde
 $C = 2 \cdot L$ $A = \text{área}$
 $C \cdot L = 48$ $b = \text{base}$
 $h = \text{altura}$

no caso a largura do retângulo seria de 7 metros quadrados

Problema de investimento: Um investidor investe parte de seus recursos em uma conta que paga 4% de juros anualmente e o restante em uma conta que paga 7% de juros anualmente. Se o investidor tem um total de R\$ 10.000 investidos e recebe R\$ 550 em juros durante um ano, quanto foi investido em cada conta?

2 Variáveis

Fonte: o autor.

Figura 18b – Teste do Aluno C (Atividade 4)

Comprimento = 48 cm
 largura = $118 \times 2 = 96 \rightarrow 96/3 = 32$

Perímetro = soma de todos os lados do retângulo
 $48 + 48 + 32 + 32 = 160$

Portanto a largura é 32 cm
 Área = comprimento \times largura
 $A = 32 \times 48 = 1536 \text{ cm}^2$

03 - $C = 2 \cdot l$ $CL \cdot L = 118$
 $2l^2 = 118$
 $l^2 = \frac{118}{2}$
 $l^2 = \sqrt{59}$

Fonte: o autor.

Em relação a proposta de resolução apresentada pelo Aluno C no teste diagnóstico proposto, observa-se que o mesmo procurou relacionar as variáveis existentes nos problemas, assim como o Aluno B. No entanto, depois de deixar de fazer uso desse meio, nota-se que o aluno C, no “Problema de proporção” tentou um “desvio” algébrico, tentando propor uma resolução aritmética, o que implicou na resolução incorreta do referido Problema. É possível notar que, na maioria dos problemas, o Aluno C tentou relacionar os valores por meio de relações estruturais algébricas, fazendo abordagem de processo utilizado desde a primeira atividade.

Assim, ao relacionar as informações por meio de variáveis, observa-se que apesar de o Aluno C não conseguir compreender algum problema, mas visualiza-se a concepção da ideia abstrata e algébrica no processo de resolução de problemas de cunho algébrico e de análises abstratas, solucionando com ampla consciência as soluções esperadas em cada situação-problema proposto, percebendo um distanciamento menor de dificuldades nas resoluções desenvolvidas, implicando seriamente respostas consolidadas em questão.

Fazendo uma análise geral do grupo de estudo em relação as atividades aplicadas, notou-se que, no Teste diagnóstico 1 e 2, levando-se em conta um avanço consecutivo de acertos, houve um declínio percentual nos itens desse grupo, ficando-se assim:

Tabela 1 – Resultado do teste diagnóstico 1 – Proposta: Sequencial Didático – Representativo: 18 alunos

Itens	%
A ao C	47,0
A ao D	35,0
A ao E	18,0
A ao F	0

Tabela 2 – Resultado do teste diagnóstico 2 – Proposta: Sequencial Didático – Representativo: 18 alunos

Questões	%
1 ^a	46,0
1 ^a e 2 ^a	32,0
1 ^a à 3 ^a	17,0
1 ^a à 4 ^a	0
Nenhuma	5,0

Ver-se, naturalmente, um declínio quando o propósito é a sequência de resoluções consecutivas, deixando a entender que o grupo não consegue manter a consecutividade de resolução em estruturas propostas idênticas.

Para o Teste 3, foi analisado levando-se em conta o quantitativo de acertos obtido. Sendo assim, ficou:

Tabela 3 – Resultado do teste diagnóstico 3 – Proposta: Quantitativo – Representativo: 18 alunos

Quantidade de Itens acertados	%
1	26,0
2	19,0
3	42,0
4	6,0
Nenhum	7,0

Observa-se, diante do exposto, que o quantitativo de resoluções, sem levar em conta a sequência didática, tem uma variabilidade divergente no terceiro item do Teste, pois teve-se um percentual maior no acerto de 3 itens. Chega-se à conclusão, neste último Teste, que houve

um distanciamento em relação as outras quantidades, percebendo-se que estes 41%, obteve um aproveitamento crescente de aprendizagem no decurso das aplicações diagnósticas.

Procurando-se executar uma atividade com análise de cunho algébrico, onde o pesquisado tivesse uma abordagem independente em cada resolução de situações-problema, o Teste Diagnóstico 4 tentou levantar o comportamento em 4 proposições de duas variáveis com estruturas mais avançadas em relação às anteriores.

Tabela 4 – Resultado do teste diagnóstico 4 – Proposta: Quantitativo Individual – Representativo: 18 alunos

Situações- problema	Quantidade de Alunos
1 ^a	5
2 ^a	6
3 ^a	7
4 ^a	0
Nenhuma	7

Com a mesma análise levantada no Teste diagnosticado 3, observa-se no quarto Teste proposto, que o grupo tem um índice divergente perante o anterior, deixando claro que, em situações isoladas e de análises independentes, o grupo em estudo diverge conforme o tipo de situação em análise. Devido o Teste apresentar resoluções de maior complexidade, percebe-se uma limitação diante da sua resolução.

Considerando tudo o que foi exposto aqui, é possível perceber que o trabalho com os testes diagnósticos auxiliou em uma melhor compreensão do saber matemático algébrico em questão, apesar de ainda notar algumas falhas nas respostas dadas pelos alunos nos referidos testes. Desse modo, nota-se que as respostas dadas as situações propostas apresentaram maior interação do conteúdo matemático na discriminação dessas respostas conforme cada tipo de Teste proposto. Assim, apesar das condições que levaram o trabalho a acontecer de um modo um tanto rudimentar, é possível considerar que o resultado foi significativo, pois foi possível perceber evoluções em torno do trabalho realizado pelos alunos.

Por isso, deve-se destacar a afirmação de Pais (2006, p. 31) que considera que:

Para levar o aluno a se envolver com o saber é preciso desenvolver atividades que multipliquem as articulações possíveis internamente entre os diferentes temas da Matemática, entre as várias maneiras de representar o conhecimento, entre o saber escolar e os conhecimentos do cotidiano e assim por diante. Dessa maneira, é possível prever um grande número de esquemas, mostrando que a aprendizagem acontece

também em função do tempo vivenciado pelo aluno e não somente nos momentos abstratos previstos no planejamento didático.

Portanto, foi baseando-se nessas afirmações em torno da aprendizagem da Matemática e, também, nas estratégias para o seu ensino que este trabalho aconteceu. Desse modo, vale ressaltar que, apesar de tudo que foi feito, não é possível considerar somente as relações entre o saber matemático e o seu ensino ou a relação aluno-professor, é importante considerar todo o conjunto de relações, pois somente neste, é que pode ser considerado que um aluno poderá alcançar uma aprendizagem significativa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao avaliar uma pesquisa, é imprescindível considerar alguns fatores pertinentes que darão relevância ao trabalho. Para este trabalho alguns fatores foram considerados como fundamentais, como é o caso das sequências didáticas utilizadas, baseadas nas sequências de Fedathi, aplicadas ao grupo de alunos participantes por meio de atividades avaliativas e empregadas com análise a priori, passando por experimentações e sua análise posteriori.

A avaliação empregada neste trabalho, além do tema escolhido para realizar a atividade e a sua aceitação, foram fatores determinantes para esse estudo. Diante dos itens supracitados será discutida a importância de cada um deles para este estudo, a começar pela escolha do tema. Assim, quando se direciona um trabalho a um grupo de alunos é necessário conhecê-lo antes de propor qualquer projeto. Sendo assim, “O desenvolvimento do Pensamento Algébrico por meio de sequências didáticas aplicadas na Resolução de Situações-Problema no Ensino Médio” foi relevante, pelo fato do grupo de alunos, ao qual esse trabalho se direcionou, possuir características que possibilitaram concluir que o tema era importante, pois o grupo de alunos escolhidos para o estudo representava um grande número de alunos do Ensino Médio pertinentes a Escola citada anteriormente, que caracterizavam por apresentar muitas dificuldades na análise textual na resolução de problemas de cunho algébrico.

Dois pontos importantes abordados neste trabalho são as estratégias de ensino e as atividades empregadas, organizadas com o propósito de desenvolvimento do pensamento abstrato, diante de situações contextualizadas de características algébricas. É relevante também a questão do planejamento, pois não é possível constituir um bom ensino, principalmente da matemática, sem planejar como direcioná-lo a determinado público. Por isso, fica evidente que a elaboração das atividades depende muito das estratégias empregadas, conforme um plano previamente estabelecido. Por fim, é colocada em questão a avaliação, pois é somente a partir dela que se pode definir a pertinência de todo trabalho realizado. Desse modo, pode-se considerar a avaliação como o fator principal para entender todo o processo do trabalho e, é a partir desse diagnóstico, que se torna possível obter os resultados.

Portanto, entendendo a importância dos itens acima, é relevante expressar com segurança que, este estudo foi pertinente para o campo do ensino de matemática neste segmento e para a Educação Matemática, pois se conclui que, ao realizar um trabalho que foi planejado tendo em vista as variantes algébricas aplicadas, que poderiam interferir na sua execução, os seus resultados, de modo geral, são favoráveis, quando se leva em conta a necessidade do estudo prévio dessa natureza, os resultados que se tem nessa etapa de ensino-aprendizagem e as

metodologias relevantes e necessárias para reverter determinadas situações, contribuindo, dentro do ensino básico, a recuperação do pensamento abstrato e a importância das estruturas algébricas na resolução de problemas, incluindo neste processo, diante de problemas particulares, o ensino das estruturas algébricas por meio da Resolução de Situações-problemas e o auxílio das tecnológicas existente para essas variantes.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M. **O percurso da didatização do pensamento algébrico no Ensino Fundamental: uma análise a partir da Transposição Didática e de Teoria Antropológica do Didático**. São Paulo, 2014. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2014.

ALLEVATO, N. S. (2015). **A engenharia didática: uma metodologia para elaboração de sequências didáticas em matemática**. Revista de Educação Matemática, 12(12), 151-166.

ALMEIDA, J, R; SANTOS, M, C. **Pensamento Algébrico: em busca de uma definição**. RPEM: Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, v. 6, n. 10, p.34-60, jan.-jun. 2017. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1124/pdf_207>. Acesso em: 27 ago. 2017.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba, PR. Editora UFPR, 2007.

ALVES, F. R. V. **Engenharia Didática para a Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori**. Unión: Revista Iberoamericana

ARAÚJO, L. F. **Rompendo o contrato didático: a utilização de estratégias metacognitivas na resolução de problemas algébricos**. Recife, PE: UFPE, 2009.

BARBOSA, E.; BORRALHO, A. **Pensamento algébrico e explorações de padrões**. Disponível em: <apm.pt/files/Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf>. Acesso em: 8 fev. 2009.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2016.

BOOTH, L. R. **Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. As ideias da álgebra**. Organizadores A. F. Coxford e A. P. Shulte; traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: ed. Atual, 1995.

BORGES NETO, J. (2017a). Fedathi: **8 sequências didáticas e outras possibilidades**. Editora CRV.

BORWEIN, J., & Bailey, D. (2013). **Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century**. CRC Press.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. BRASÍLIA: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, **Projeto Político-Pedagógico**. (2015), p. 16

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Editora Ática, 2008.

CHEVALLARD, Y. **A transposição didática: do saber sabido ao saber ensinado**. Porto Alegre: Artmed, 1991.

COSTA, Luciana Mendes da. **A importância do uso da informática no processo ensino aprendizagem da matemática**. 2015. 114 p. Relatório do Estágio Supervisionado III. Faculdade de Itapiranga, Itapiranga, SC, 2015.

DEVLIN, Keith, "**Introdução ao pensamento matemático**" (2012)

DIENES, Z. P. **Aprendizado Moderno da Matemática**. Rio De Janeiro: ZAHAR EDITORES, 1974.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**.

GASPARIN, J. L. (2010). **Uma Didática para a Pedagogia Histórico-Crítica**. Editora Autores Associados.

GOLDIN, G.A., & Shteingold, N. (2010). **Abstração e estrutura no pensamento matemático avançado**. Em J. Cai & E. Knuth (Eds.), **Algebrização precoce: Avanços na educação matemática** (pp. 79-92). Springer.

HOHENWARTER, Markus. **GeoGebra-Informações**. Tradução de Hermínio Borges Neto; e al. 2005 Disponível em: Acesso: 03 Set. 2016.

YANG, D.-C. (2011). **The impact of GeoGebra on the learning and teaching of mathematics: A review of the literature**. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 30(3), 341-368.

YIN, R. K. **Pesquisa de estudo de caso: delineamento e métodos**. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, 2009.

KAPUT, J. J. **Ensinando e aprendendo uma nova álgebra: introdução**. Em J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), **Algebra in the Early Grades** (pp. 5-16). Lawrence Erlbaum Associates. (1999)

KAPUT, J. J. **O que é álgebra? O que é raciocínio algébrico?** Em J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), **Algebra in the Early Grades** (pp. 5-15). Lawrence Erlbaum Associates. (2008).

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994. de Educación Matemática, n. 51, pp.83-106, 2017.

MCMULLIN, E. (2001). **Galileu e a interpretação das teorias científicas**. Em A. C. Bowen & J. R. Brown (Eds.), *Em defesa da ciência: ciência, tecnologia e política na sociedade moderna* (pp. 17-39). University Press of America.

MERRIL, M. D. (2002). **First principles of instruction**. *Educational Technology Research and Development*, 50(3), 43-59.

MIGUEL, A., Fiorentini, D., & Miorim, M. Â. (1993). **O ensino de álgebra na história da educação matemática brasileira**. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 74(177/178), 36-50.

Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular – BNCC: **Educação é a base**. Terceira versão Brasília: Ministério da Educação, Secretária Executiva, Secretária de Educação Básica, 2017

NASCIMENTO, João Kerginaldo Firmino do. **Informática aplicada à educação**. Brasília: Universidade de Brasília, 2007. 84 p.

NETO, Hermínio Borges, **O livro Sequência Fedathi no ensino de Matemática**. Editora: CRV; 1ª edição, 2020.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte, MG. Editora Autêntica, 2006.

PONTE, J.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Ministério da Educação, Portugal. Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC). Portugal, 2009.

POWELL, S. G. (2018). **Modeling Languages for Mathematical Optimization**. Cambridge University Press.

POWELL, M. J. D. (2018). **Algebraic modeling languages for mathematical optimization**. *Annals of Operations Research*, 263(1-2), 1-24.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. (Col. Tendências em Educação Matemática).

SANCHO, Juana María et al. **Tecnologias para transformar a educação**. Tradução Valério Campos. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SESSA, L. A. (1995). **A visão do aluno sobre a sala de aula de álgebra**. Em P. A. House (Ed.), *Tornando a matemática prática* (pp. 155-167). Conselho Nacional de Professores de Matemática

SHOEN, H. L. **A resolução de problemas em álgebra**. As ideias da álgebra. Organizadores A. F. Coxford e A. P. Shulte; traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: ed. Atual, 1995.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. “A Matemática de René Descartes (1596 – 1650)”; Brasil Escola. <Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/a-matematica-rene-descartes-15961650.htm>>. Acesso em 01 de junho de 2023.

SOUSA, Francisco Edison Eugenio de; VASCONCELOS, Francisco Herbert Lima; BORGES NETO, Hermínio; LIMA, Ivoneide Pinheiro de; SANTOS, Maria José Costa dos; ANDRADE, Viviane Silva de (org.). **Sequência Fedathi: uma Proposta Pedagógica para o Ensino de Ciências e Matemática**. Fortaleza: Edições UFC, 2013.

SPECTOR, J. M., Merrill, M. D., Elen, J., & Bishop, M. J. (Eds.). (2014). **Handbook of Research on Educational Communications and Technology** (4th ed.). Routledge.

TEIXEIRA, E. P., & Passos, C. L. B. (2013). **Prática de Ensino de Matemática: Visão na Perspectiva da Educação Matemática**. Artmed Editora.

TINOCO ET AL. **Caminho da álgebra na escola básica**. IV – SPEMRJ: Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro, 2008.

USISKIN, Z. (1995). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: Coxford, A. F.; Shulte, A. P. (Org.). **As Ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, p.9-22.

VIDIGAL, A. et al. **Fundamentos de Álgebra**. Belo Horizonte, MG, Brasil: Editora UFMG, 2009. 7, 21

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO AOS PAIS

Caro Responsável/Representante Legal:

Gostaríamos de obter o seu consentimento para o menor _____, participar como voluntário da pesquisa intitulada AO ESTUDO DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO POR MEIO DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS (SD) APLICADAS NA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE UMA ENGENHARIA DIDÁTICA COM A APLICAÇÃO DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS JUNTO A UM GRUPO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO, que se refere a um projeto de pesquisa.

O(s) objetivo(s) deste estudo são: apresentar a proposta de estudo do pensamento algébrico e as sequências didáticas, tendo como propósito final a resolução de situações-problema durante o ensino médio; investigar e analisar, com os alunos do ensino médio, o desenvolvimento das habilidades, diante de situações algébricas propostas que requer um pensamento de cunho algébrico mais avançado; resolver equações algébricas com uma incógnita e propor para estudo o desenvolvimento de resolução de problemas que aborde situações reais e contextualizadas. Esperamos com esse estudo que as sequências lineares possam ser mais exploradas durante o ensino médio.

Os resultados contribuirão para que o pesquisador explore métodos de ensino junto a esse grupo de alunos, avalie como a Engenharia Didática poderá contribuir no desenvolvimento do pensamento algébrico e ao mesmo tempo na capacidade de resolver problema, criando situações de ensino que contribuirá para que os estudantes possam explorar novos conteúdos matemáticos que não são vistos durante as aulas tradicionais de matemática.

A participação ocorrerá da seguinte forma: os participantes serão direcionados a um local reservado, portando consigo seu material escolar. Os encontros serão conduzidos pelo professor pesquisador, em forma de aulas com duração de 50 minutos cada. Nas aulas serão repassados o material necessário para o estudo e todo o suporte para a realização das atividades.

O nome não será utilizado em qualquer fase da pesquisa o que garante o anonimato e a divulgação dos resultados será feita de forma a não identificar os voluntários.

Não será cobrado nada, não haverá gastos decorrentes de sua participação.

Considerando que toda pesquisa oferece algum tipo de risco, nesta pesquisa o risco pode ser, sentir-se constrangido em participar do estudo com algum dos procedimentos que serão adotados, tendo a liberdade de deixar de participar do estudo em qualquer momento, sem haver nenhum prejuízo para a sua conduta.

É esperado o seguinte benefício da participação: os estudantes que participarem do grupo de estudos terão a oportunidade de participar de atividades sequenciais de cunho algébrico no qual possibilitam o desenvolvimento de habilidades, aprimorando assim o pensamento abstrato, ideal na resolução de problemas. Além disso, poderão participar de atividades com aplicação de modelagens matemáticas e uso de tecnologias, como por exemplo o uso do GeoGebra, possibilitando-os vivenciar a uma abordagem diferente das tradicionais no âmbito da sala de aula, para o ensino de estruturas algébricas e suas aplicações, contribuindo positivamente para um ensino moderno e eficiente e uma aprendizagem significativa na construção do conhecimento matemático.

Gostaríamos de deixar claro que a participação é voluntária e que poderá deixar de participar ou retirar o consentimento, ou ainda descontinuar a participação se assim o preferir, sem penalização alguma ou sem prejuízo de qualquer natureza.

Desde já, agradecemos a atenção e a da participação e colocamo-nos à disposição para maiores informações.

Esse termo terá suas páginas rubricadas pelo pesquisador principal e será assinado em duas vias, das quais uma ficará com o participante e a outra com pesquisador principal.

Antonio Rubens Pereira Martins,
(88) 992578788

Eu, _____, portador do RG nº: _____, confirmo que Antonio Rubens Pereira Martins explicou-me os objetivos desta pesquisa, bem como, a forma de participação. As alternativas para participação do menor _____ também foram discutidas. Eu li e compreendi este Termo de Consentimento, portanto, eu concordo em dar meu consentimento para o menor participar como voluntário desta pesquisa.

Hidrolândia – CE, ____ de _____ de 2023.

(Assinatura responsável ou representante legal)

Eu, _____ (nome do membro da equipe que apresentar o TCLE) obtive de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido do sujeito da pesquisa ou representante legal para a participação na pesquisa.

(Assinatura do membro da equipe que apresentar o TCLE)

(Identificação e assinatura do pesquisador responsável)

APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO DO MENOR

Título do projeto: O desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de sequências didáticas aplicadas na resolução de situações-problema por meio de uma engenharia didática com a aplicação da teoria das situações didáticas junto a um grupo de alunos do ensino médio.

Pesquisador responsável: Daniel Brandão Menezes

Pesquisador participante: Antonio Rubens Pereira Martins

Instituição: Universidade Estadual do Ceará UECE

Telefone celular do pesquisador para contato: (88) 99257-8788 (Rubens);
(85) 99683-7173 (Daniel).

Prezado (a) aluno (a), você está sendo convidado (a) para participar, como voluntário (a), de um estudo que tem como objetivo, estudar o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de sequências didáticas aplicadas na resolução de situações-problema por meio de uma engenharia didática e com aplicação da teoria das situações didáticas.

Este estudo está associado aos cursos de Matemática. A direção de sua escola está ciente e permitiu a realização da pesquisa. A realização do estudo é importante para avaliar e aumentar o conhecimento científico sobre como a engenharia didática e a teoria das situações didáticas podem contribuir com o estudo do pensamento algébrico e suas sequências didáticas algébricas na resolução de situações-problema no ensino médio.

O estudo será coordenado pelo Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes, professor permanente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional em cooperação técnica com a SEDUC - CE da Universidade Estadual do Ceará (UECE) e as atividades serão conduzidas pelo mestrando Antonio Rubens Pereira Martins. Sua participação no estudo será fornecer produções das atividades propostas pelo pesquisador. Todas as informações coletadas serão utilizadas exclusivamente para a realização da pesquisa.

Embora a pesquisa não lhe ofereça nenhum risco físico, você pode ficar constrangido (a) ou sem jeito. Caso isto aconteça, você pode pedir para não participar ou, caso já esteja participando, pode desistir. Caso você, mesmo com o consentimento de seus pais ou responsáveis, se recuse a participar do estudo ou de uma parte dele, sua vontade será respeitada.

Seu nome, assim como de seus colegas que também participarem do estudo, não será identificado em nenhum momento, sendo garantido o sigilo. O material coletado ficará disponível para sua consulta e de seus pais ou responsáveis em qualquer momento, sendo guardado sob a responsabilidade dos pesquisadores. A participação na pesquisa não acarretará

em nenhum custo financeiro a você ou aos seus pais ou responsáveis. Também não haverá nenhum tipo de compensação financeira relacionada à sua participação. Caso haja qualquer despesa adicional ela será de responsabilidade dos pesquisadores. Havendo qualquer dúvida você ou seus pais ou responsáveis poderão realizar uma ligação a cobrar para o número do coordenador da pesquisa (88) 992578788 (Rubens); (85) 99683-7173 (Daniel).

Este termo será redigido em duas vias, ficando uma cópia com você e outra com o pesquisador. Após a finalização do estudo os pesquisadores entregarão para a direção da escola um relatório sobre os principais resultados do estudo que ficará disponível para todos os alunos que participaram da pesquisa. Estas informações poderão auxiliar no planejamento, execução, acompanhamento e avaliação oclusal e postural. Além disto, os pesquisadores ficarão à disposição para o esclarecimento de eventuais dúvidas.

Diante do que foi exposto, solicito que você participe da pesquisa assinando este termo.

Nome completo do(a) aluno(a): _____

Assinatura do(a) aluno: _____

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes (pesquisador responsável)

Antonio Rubens Pereira Martins (pesquisador participante)

Hidrolândia – CE, _____ de _____ de 2023.

APÊNDICE C – 1ª ATIVIDADE APLICADA

O pensamento algébrico da incógnita em uma equação. Definição informal de equação.

“Conceito de Equação: é uma igualdade que traz um valor abstrato no qual torna a mesma verdadeira”.

Exemplo:

Na igualdade $2 \cdot 6 + 10 = 22$, se tornarmos abstrato o número 6, representando-o por uma letra ou figura, teremos uma equação. “ $2 \cdot x + 10 = 22$ ”

Resolver uma equação significa encontrar o número não conhecido, ou seja, o valor representado pela, de modo que o deixe essa igualdade verdadeira.

ATIVIDADES

1) “Alimentando” a tabela abaixo, numericamente, até encontrar o valor desconhecido representado por x, temos:

Veja o exemplo:

Tabela 2: Resolução da Equação $5 \cdot x + 10 = 45$ por aproximação:

x	$5 \cdot x + 10$	valor numérico
2	$5 \cdot 2 + 10$	20
3	$5 \cdot 3 + 10$	25
4	$5 \cdot 4 + 10$	30
5	$5 \cdot 5 + 10$	35
6	$5 \cdot 6 + 10$	40
7	$5 \cdot 7 + 10$	45

Portanto 7 é a solução da equação dada. Observe que não basta supor valores aleatórios, devemos perceber e buscar a tendência B de aproximação do número 45.

Agora resolva:

a) $3 \cdot x + 15 = 30$

d) $2 \cdot x - 1 = x + 3$

b) $20 + 4 \cdot x = 60$

e) $x - 4 = 3 \cdot x - 10$

c) $12 - 4 \cdot x = 0$

f) $15 \cdot x - 5 = 8 \cdot x + 30$

Fonte: atividade elaborada pelo autor.

APÊNDICE D – 2ª ATIVIDADE APLICADA

1. Analise a sequência das figuras:

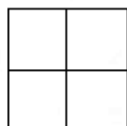


Figura 3

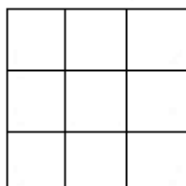


Figura 4

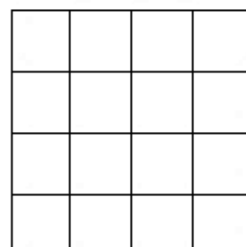


Figura 5

- a) Determine a quantidade de quadradinhos da Figura 3;
 - b) Qual a quantidade de quadradinhos da Figura 4?
 - c) Quantos quadradinhos teria a Figura 7?
2. Utilizando-se os códigos “EA” para equação e “FA” para função, identifique os tipos de Problemas que temos e quantidade de variáveis em cada situação:
- a) Pense em um número. Somando 25 ao número pensado teremos 48 como resultado. Qual o valor do número pensado?
 - b) O dobro de um número mais três é igual a 11. Qual é o número?
3. Quanto custará 52 metros de fio elétrico, se 6 metros custam R\$ 18,00?
4. Um funcionário recebeu, em um determinado mês, de uma Empresa A, uma quantia relacionada a um serviço prestado. Nesse mesmo mês, recebeu, também, uma quantia de uma Empresa B de R\$ 300,00 por outro serviço prestado. Escreva uma representação algébrica do valor recebido por esse funcionário, neste mesmo mês.

Fonte: atividade elaborada pelo autor.

APÉNDICE E – 3ª ATIVIDADE APLICADA

1. Utilizando-se de uma equação ou função matemática represente algebricamente os seguintes Problemas:

a) Pense em um número. Somando 25 ao número pensado teremos 48 como resultado. Qual o valor do número pensado?

b) O dobro de um número mais três é igual a 11. Qual é o número?

c) Quanto custará 52 metros de fio elétrico, se 6 metros custam R\$ 18,00?

d) Um funcionário recebeu, em um determinado mês, de uma Empresa A, uma quantia relacionada a um serviço prestado. Nesse mesmo mês, recebeu, também, uma quantia de uma Empresa B de R\$ 300,00 por outro serviço prestado. Escreva uma representação algébrica do valor recebido por esse funcionário, neste mesmo mês.

APÉNDICE F – 4ª ATIVIDADE APLICADA

Em cada Problema seguinte, identifique as variáveis envolvidas e tente solucioná-los utilizando equações na sua resolução. “Escreva as variáveis explicitando o que ela representa”.

Problema de idade: Maria tem o dobro da idade de seu filho. Há 10 anos, a idade de Maria era quatro vezes a idade de seu filho. Qual é a idade atual de cada um?

Problema de proporção: Em uma mistura de suco, a proporção de suco de laranja para suco de maçã é de 3 para 5. Se houver 20 litros de suco de maçã na mistura, quantos litros de suco de laranja há na mistura?

Problema de geometria: Um retângulo tem um comprimento que é o dobro da largura. A área do retângulo é de 48 metros quadrados. Qual é o comprimento e a largura do retângulo?

Problema de investimento: Um investidor investe parte de seus recursos em uma conta que paga 4% de juros anualmente e o restante em uma conta que paga 7% de juros anualmente. Se o investidor tem um total de R\$ 10.000 investidos e recebe R\$ 550 em juros durante um ano, quanto foi investido em cada conta?

Fonte: atividade elaborada pelo autor.

ANEXO

FOTO DE ENCONTRO PARA APLICAÇÕES DE ATIVIDADES

