UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FÁBIO GOMES DE LIMA

DESIGUALDADES MATEMÁTICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO NA PERSPECTIVA DO NOVO ENSINO MÉDIO

SOBRAL – CEARÁ
2023

FÁBIO GOMES DE LIMA

DESIGUALDADES MATEMÁTICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO NA PERSPECTIVA DO NOVO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho

Co-Orientador: Prof. Me. Davi Ribeiro dos Santos

SOBRAL – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Lima, Fabio Gomes de.
Desigualdades matemáticas: uma proposta de ensino na perspectiva do novo ensino médio [recurso eletrônico] / Fabio Gomes de Lima. - 2023.
99 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Sobral, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho.
1. Desigualdades Matemáticas. 2. Novo Ensino Médio. 3. Unidades Curriculares Eletivas. I. Título.

FÁBIO GOMES DE LIMA

DESIGUALDADES MATEMÁTICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO NA PERSPECTIVA DO NOVO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em: 06/07/2023

BANCA EXAMINADORA

Edvalter da Silva Sena Filho

Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho (Orientador)
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE NILTON DE ABREU COSTA
Data: 24/07/2023 22:52:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Nilton de Abreu Costa
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

gov.br Documento assinado digitalmente
AILTON CAMPOS DO NASCIMENTO
Data: 24/07/2023 18:12:54-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ailton Campos do Nascimento
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Antonio Kelson V da Silva

Prof. Dr. Antônio Kelson Vieira da Silva
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Ao amigo Raimundo Verrísimo da Costa (*in memorian*).

AGRADECIMENTOS

À Deus pela saúde e pela força, para conseguir finalizar este mestrado e transformar o que era um sonho distante em realidade.

À minha família e amigos, pela compreensão na ausência para a dedicação às longas jornadas de estudos.

Aos meus pais Antônio e Sergina, ao meu irmão e às minhas irmãs. Como diz o seu Antônio Jacó, "tudo tem a sua hora", pois bem, a hora do sonhado mestrado chegou.

À minha companheira, Maria Marcélia, pelas muitas contribuições.

Aos amigos Paulo Henrique, José Janilson e à amiga Ana Cibely pela importante parceria ao longo do curso, em especial, no grupo de estudos que foi decisivo para a finalização exitosa deste mestrado.

A meu orientador, professor Dr. Edvalter da Silva Sena Filho pelas inúmeras contribuições na escrita deste trabalho e pelas brilhantes aulas nas disciplinas que ministrou.

Aos professores Dr. Daniel Brandão e Dr. Ailton Campos pelos conhecimentos compartilhados nas disciplinas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Ao professor Dr. Jorge Lira, cientista-chefe em educação básica do Ceará, um dos grandes responsáveis pela viabilidade desta turma do PROFMAT em Sobral.

À Secretaria da Educação do Ceará Secretaria da Educação do Estado do Ceará (SEDUC-CE), pelo fomento à formação continuada de professores, incluindo esta turma de mestrado.

À Universidade Estadual do Ceará (UECE), campus Quixadá pela oferta desta turma do PROFMAT em Sobral.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pela parceria realizada com a SEDUC-CE para a oferta desta turma do PROFMAT voltada para professores da rede estadual de ensino.

“A natureza é injusta? Tanto melhor, desigualdade é a única coisa suportável, a monotonia da igualdade só pode nos conduzir ao enfado.”

(Francis Picabia)

RESUMO

Este trabalho apresenta um Produto Educacional Produto Educacional (PE), voltado para o ensino de desigualdades matemáticas na última etapa do ensino básico, considerando o atual momento de reestruturação curricular à luz do Novo Ensino Médio Novo Ensino Médio (NEM), Lei N° 13.415/2017 e às diretrizes da Secretaria da Educação do Ceará SEDUC-CE. Serão abordadas, desigualdades: triangular, entre as médias, Cauchy-Schwarz, Bernoulli e Jensen, no formato de unidades curriculares eletivas, a serem potencialmente inseridas no catálogo de eletivas da SEDUC-CE e ministradas nas escolas de Ensino Médio em Tempo Integral do Ceará. Os fundamentos teóricos utilizados, se baseiam, fortemente, na Zona de Desenvolvimento Proximal Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Lev Semionovitch Vigotski e na teoria de resolução de problemas de George Polya. Este trabalho ficará à disposição dos professores, para utilização em sala de aula, como material de apoio, uma vez que, reúne uma teoria acessível e uma quantidade considerável de problemas resolvidos.

Palavras-chave: Desigualdades Matemáticas. Novo Ensino Médio. Unidades Curriculares Eletivas.

ABSTRACT

This work presents an Educational Product (PE), aimed at teaching mathematical inequalities in the last stage of basic education, considering the current moment of curricular restructuring in light of the New Secondary Education (NEM), Law No. 13.415/2017 and the guidelines of the Secretariat of Education of Ceará (SEDUC-CE). Inequalities, will be addressed: triangular, between the averages, Cauchy-Schwarz, Bernoulli and Jensen, in the format of elective curricular units, to be potentially inserted in the catalog of electives of SEDUC-CE and taught in High Schools in Full Time in Ceará . The theoretical foundations used are strongly based on the Zone of Proximal Development () by Lev Semionovitch Vygotsky and the theory of problem solving by George Polya. This work will be available to teachers, for use in the classroom, as support material, since it brings together an accessible theory and a considerable amount of solved problems.

Keywords: Mathematical Inequalities. New High School. Elective Course Units.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CHSA	Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
CN	Ciências da Natureza e suas Tecnologias
COETI	Coordenadoria de Educação de Tempo Integral
CREDE 6	6ª Coordenadoria Regional de Desenvolvolvimento da Educação
DCRC	Documento Curricular Referencial do Ceará
DOE-CE	Diário Oficial do Estado do Ceará
EEM	Escola de Ensino Médio
EEMTI	Escola de Ensino Médio em Tempo Integral
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FGB	Formação Geral Básica
IF	Itinerário Formativo
IFES	Instituições Federais de Ensino Superior
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
LGG	Linguagens e suas Tecnologias
MA	Média Aritmética
MAT	Matemática e suas Tecnologias
MG	Média Geométrica
MH	Média Harmônica
MQ	Média Quadrática
NEM	Novo Ensino Médio
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PE	Produto Educacional
PNE	Plano Nacional de Educação
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RFT	Relação Fundamental da Trigonometria
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática

SEDUC-CE	Secretaria da Educação do Estado do Ceará
SIGE	Sistema Integrado de Gestão Escolar
UECE	Universidade Estadual do Ceará
UFC	Universidade Federal do Ceará
UFPI	Universidade Federal do Piauí
UVA	Universidade Estadual Vale do Acaraú
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos últimos anos, sobretudo após 2009 quando o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) passou a ser a principal porta de acesso ao ensino superior, nas Instituições Federais de Ensino Superior (IFES) (BRASIL, 2011), muitas escolas e redes de ensino passaram a adequar os seus currículos à luz do que vinha sendo cobrado nas provas do ENEM, ou seja, a matriz de referência do ENEM delimitou a elaboração dos currículos e planos de ensino, visando garantir o acesso ao ensino superior, cumprindo assim um dos objetivos do ensino médio. Contudo, alguns conceitos matemáticos mais abstratos que não possuem imediata aplicação ou contextualização ao dia a dia dos estudantes, foram deixados de lado. Para (MEDEIROS, 2018) o ENEM influenciou a forma de se trabalhar em sala de aula, pautando os currículos nas aplicações e contextualizações dos conteúdos com foco na vida cotidiana dos estudantes.

Porém, agora em meio a implementação do Novo Ensino Médio (NEM), momento de reestruturação dos currículos escolares, considerando as muitas inovações trazidas pela reforma do ensino médio, através da Lei federal Nº 13.415/2017 (BRASIL, 2017), estabelecida pela conversão da Medida Provisória Nº 746 com a justificativa de urgência na adequação do ensino médio brasileiro à qualidade do ensino de outros países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). A reforma altera significativamente a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei Nº 9394/1996 e institui uma série de inovações ao ensino médio brasileiro, inclusive pressupõe um novo modelo de ENEM a partir de 2024. Com isso, os objetos de ensino estão sendo rediscutidos, para se chegar ao currículo que atenda à lei e aos interesses de cada rede de ensino e suas escolas.

Este trabalho dialoga, tão somente, com dois pontos da reforma do ensino médio. O primeiro é o ensino em tempo integral e o segundo é a flexibilização curricular. Não será feita aqui uma análise do impacto positivo ou negativo da reforma. Serão abordadas apenas as possibilidades de reposicionarmos o ensino da matemática, trazendo à pauta o ensino de conteúdos clássicos antes deixados de lado, considerando o aumento de carga horária e a flexibilização do currículo, tendo como referência as diretrizes da SEDUC-CE.

Como condição para a obtenção do título de mestre em Matemática, pelo PROFMAT, este trabalho traz uma proposta de PE, considerando a possibilidade do tratamento do objeto matemático, no formato de disciplinas eletivas a, potencialmente, comporem o catálogo de disciplinas eletivas da rede estadual de ensino público do Ceará. Cabe destacar, conforme (BRASIL, 2019) um PE é

> um processo ou produto educativo e aplicado em condições reais de sala de aula ou outros espaços de ensino, em formato artesanal ou em protótipo. Esse produto pode ser, por exemplo, uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, um conjunto de vídeo-aulas, um equipamento, uma exposição, entre outros. A dissertação/tese deve ser uma reflexão sobre a elaboração e aplicação do produto educacional respaldado no referencial teórico metodológico escolhido (BRASIL, 2019a, p. 15).

O intuito é apresentar um PE que dialogue com as perspectivas curriculares do novo ensino médio, considerando as diretrizes SEDUC-CE, por meio da apresentação das ementas de duas unidades curriculares eletivas. O trabalho é estruturado em quatro seções, a primeira delas, traz os aspectos norteadores da proposta de ensino, pautados nas teorias de ZDP de Lev Semionovitch Vigotski e nas quatro etapas para a resolução de problemas matemáticos de George Polya, bem como, as contribuições teóricas de outros autores.

A segunda secção apresenta os conhecimentos preliminares para o estudo das desigualdades clássicas, trazendo operações e propriedades elementares do estudo de desigualdades. A terceira secção, apresenta as definições, demonstrações e problemas resolvidos das desigualdades clásicas. A escolha das desigualdades aqui apresentadas, foi uma opção pessoal do autor, por contemplarem inúmeras possibilidades de problemas e permearem várias áreas da matemática.

Por fim, na quarta seção é apresentado o PE propriamente dito, pautado nos marcos regulatórios e nos documentos norteadores do currículo, ou seja, na BNCC e no Documento Curricular Referencial do Ceará (DCRC), trazendo concretamente as ementas de duas unidades curriculares eletivas que contemplem as desigualdades apresentadas. Tais ementas serão futuramente submetidas à Coordenadoria de Educação de Tempo Integral (COETI) da SEDUC-CE, orgão responsável por colher propostas de disciplinas eletivas elaboradas por professores da rede estadual de ensino.

As desigualdades matemáticas surgiram há muito tempo. Não é possível precisar quando e onde, nem muito menos quem foram os principais matemáticos a desenvolverem as técnicas básicas que hoje conhecemos, principamente as ideias apresentadas no ensino básico. Inicialmente, elas eram apenas resultados auxiliares em estudos de outras áreas, especialmente na astronomia. Mas, com o tempo, o conteúdo foi sendo formalizado e caiu no gosto acadêmico, passando a fazer parte de disciplinas dos principais cursos de matemática, permeando várias áreas, como por exemplo, geometria, álgebra e análise.

No ensino básico, o estudo de desigualdades, geralmente é iniciado ao final do ensino fundamental, quando os estudantes começam a ter contato com a álgebra. Tradicionalmente são apresentadas as equações polinomiais de primeiro e segundo graus e, como complemento, são introduzidas as inequações do primeiro grau e, às vezes, as inequações de segundo grau. Geralmente são usadas técnicas e propriedades básicas para resolver estas desigualdades. No ensino médio, os alunos quando estudam desigualdades, vêem apenas as mesmas já apresentadas no ensino fundamental, partindo apenas de uma nova perspectiva, às vezes, associadas ao estudo das funções afim e das funções quadráticas.

Diante da profusão de conteúdos e disciplinas no ensino médio, os professores acabam por priorizar os conteúdos mais requisitados em avaliações, principalmente nas avaliações externas da rede de ensino e nos exames de acesso ao ensino superior, sendo o ENEM, o principal deles. Nessas avaliações pouco aparecem questões de desiguadades, logo o conteúdo acaba sendo deixado de lado ou minimizado ao máximo. Nas escolas onde existem programas de preparação para olímpiadas, os alunos participantes dos treinamentos passam a ter contato com as desigualdades e suas aplicações, uma vez que este conteúdo faz parte das princiais olímpiadas de matemática, tais como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e Canguru de matemática.

Com o advento da Lei nº 13.415/2017 que alterou a LDB, Lei nº 9394/96 e estabeleceu mudanças profundas na estrutura do ensino médio brasileiro, entre as quais uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a BNCC e a oferta de diferentes possibilidades de escolhas aos estudantes por meio dos itinerários formativos, com foco nas diversas áreas de conhecimento e na formação técnica e profissional. Na perspectiva do NEM, onde existe a possibilidade de aprofundamento dos conteúdos matemáticos, por meio dos itinerários formativos, os quais, na arquitetura do NEM na rede estadual de ensino do Ceará, compreendem as disciplinas eletivas e as trilhas de aprofundamento. Tais componentes curriculares passam a ser algumas das oportunidades para o aprofundamento de temas matemáticos tão importantes quanto o estudo das desigualdades.

Este trabalho apresentará os conceitos e as propriedades básicas das desigualdades, bem como, apresenta os principais teoremas, demonstrações e aplicações de desigualdades, aqui denominadas de desigualdades clássicas: Desigualdade Triangular, Desigualdade entre as Médias, Desigualdade de Cauchy-Schwarz, Desigualdade de Bernoulli e Desigualdade de Jensen.

O Produto Educacional (PE) aqui proposto será respaldado no referencial teórico de Lev Semionovitch Vigotsk, com os seus tratados sobre ZDP e nas contribuições de George Pólya, com as quatro fases para a resolução de problemas matemáticos: a compreensão do problema; o estabelecimento de um plano de ação; a execução do plano e o retrospecto e, eventualmente, em estudos de outros autores que tratem do objeto em estudo.

Para (MORETTI, 2007) na aprendizagem de conceitos da matemática, uma preocupação deve ser levantada: a de como transformar objetos de pesquisa em objetos de ensino. Seguindo o pensamento de Moretti, este trabalho apresentará duas propostas de ementas de disciplinas eletivas e/ou unidades curriculares da trilha de aprofundamento integrada à Matemática e suas Tecnologias e Ciências da Natureza e suas Tecnologias, como opção para integrarem o catálogo da parte diversificada do currículo de Matemática da rede estadual de ensino à luz do DCRC para a etapa do Ensino Médio.

A motivação para a realização deste trabalho reside no fato do autor ser professor de matemática do ensino médio há mais de uma década e perceber que muitos conteúdos matemáticos, incluindo as desigualdades, são excluídos do currículo escolar, seja pela não possibilidade de contextualização imediata e integral, seja pela baixa usualidade prática no dia a dia dos estudantes ou por não serem requisitados sistematicamente nas avaliações externas. Considerando agora a possibilidade de aprofundamento em matemática, por meio dos Itinerários Formativos (Itinerário Formativo (IF)) trazidos pela Lei nº 13.415/2017, onde os professores de matemática podem sugerir ementas de disciplinas eletivas à SEDUC-CE, este trabalho apresenta uma possibilidade de suprir a ausência do conteúdo, desigualdades matemáticas, no ensino médio, por meio de disciplinas eletivas semestrais de 40 horas aulas.

Com o advento da reforma do ensino médio, por meio da Lei federal nº 13.415/2017, que altera a LDB, Lei nº 9394/96, passamos a ter um modelo de ensino pautado na pedagogia das competências e habilidades e perde-se de vista o enfoque nos aspectos científicos dos conhecimentos clássicos. Contudo, no Ceará, a SEDUC-CE apresenta no limite da lei, uma arquitetura curricular, onde é possível aprofundar e debaber determinados objetos do conhecimento, inclusive científicos. Uma dessas possibilidades está na elaboração e oferta das unidades curriculares eletivas.

Considerando que o tema desigualdades matemáticas é relevante para se trabalhar no ensino básico, coforme publicado em 1998 nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) de Matemática para o ensino fundamental e médio, que enfatizam o ensino e aprendizagem de uma matemática que contribua para o desenvolvimento intelectual e das capacidades exigidas na vida social, sendo que os ensinos fundamental e médio apresentem propostas de ensino contemplando as diversas dimensões da álgebra, sugerindo explicitamente, o ensino de desigualdades e inequações.

O DCRC para o ensino fundamental e para o ensino médio já traz expressamente a perspetiva da construção de competências que visam desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender o mundo e atuar nele. Bem como, reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive, com impactos no mundo do trabalho.

2 ASPECTOS NORTEADORES DA PROPOSTA DE ENSINO

Toda e qualquer proposta de ensino precisa, necessariamente, dialogar com os fundamentos das teorias clássicas da aprendizagem que tenham enfoque na cognição. Para nortear a proposta de ensino em questão, iremos nos ancorar em ideias fundamentais de Lev Vygotsky (1896-1934), cujo conceito substancialmente utilizado, será o de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Nos pautaremos também pelos princípios da teoria de resolução de problemas de George Polya (1897-1985), considerando as quatro etapas para a resolução de um problema matemático, sugeridas pelo autor. Eventualmente, estaremos invocando ainda trabalhos de outros autores e pensadores que dialoguem com o objeto em estudo, bem como, alguns aspectos históricos.

2.1 ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL

Lev Semenovich Vygotsky nasceu em Bielarus, país da antiga União Soviética, em 1896. Desde muito cedo Vygotsky interessou-se por várias áreas: psicologia, pedagogia, filosofia, literatura, deficiência física e mental (OLIVEIRA, 1995). Mesmo vindo a falecer cedo, o legado do seu trabalho é imensurável e até hoje norteia inúmeras pesquisas, sobretudo na educação.

Quanto a Vygotsky, trataremos aqui de forma mais específica do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que estabelece patamares no entendimento do modo como os indíviduos apreendem e se desenvolvem socialmente (ZANELLA, 2001; VEER; VALSINER, 1996). Para Vygotsky há dois níveis de desenvolvimento que os indivíduos podem atingir. O primeiro deles é o nível de desenvolvimento "real", que compreende o conjunto de atividades que o indivíduo consegue resolver sozinho, ou seja, refere-se às funções psicológicas já construídas até determinado momento. O segundo é o nível de desenvolvimento "potencial", isto é, o conjunto de atividades que o indíviduo não consegue resolver sozinho mas, que com a ajuda de um indivíduo mais velho e/ou mais experiente, ele consegue resolver.

Conforme (REGO, 1994),

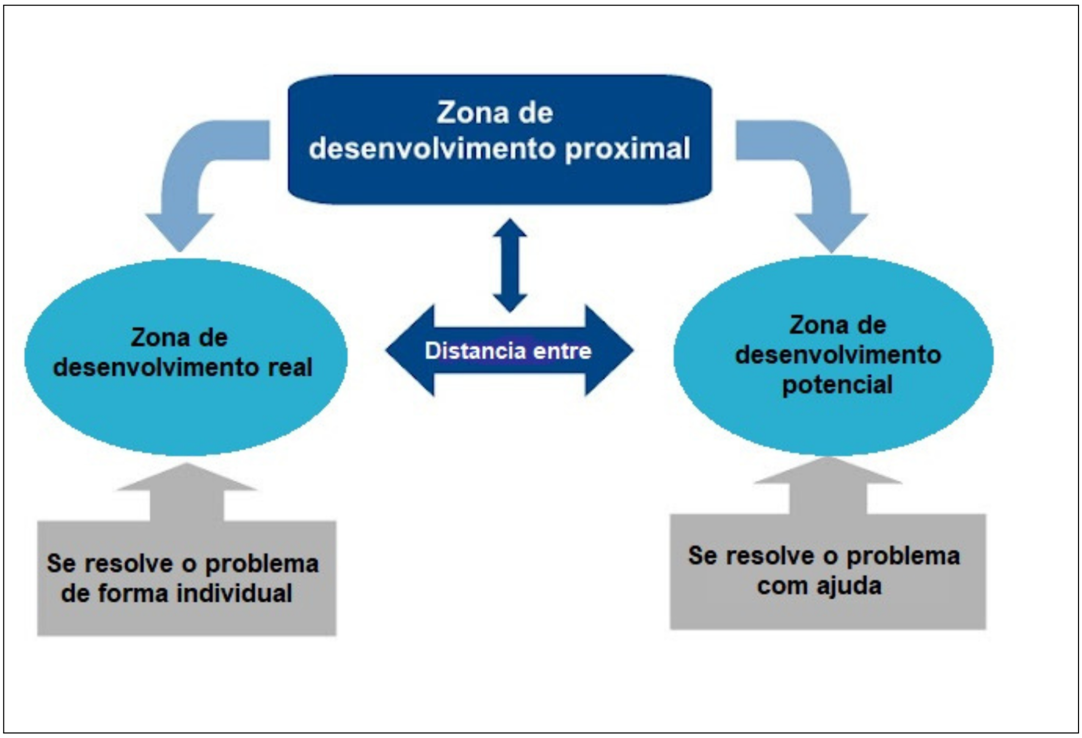
> O nível de desenvolvimento real pode ser entendido como referente àquelas conquistas que já estão consolidadas na criança, aquelas funções ou capacidades que ela já aprendeu e domina, pois já consegue utilizar sozinha, sem assistência de alguém mais experiente da cultura (pai, mãe, professor, criança mais velha etc.). Este nível indica, assim, os processos mentais da criança que já se estabeleceram, ciclos de desenvolvimento que já se completaram (REGO, 1994, p. 72).

Logo, ZDP é, provavelmente, a mais conhecida e difundida ideia de Vigotski associada a produções científicas na área da educação e pode ser compreendida como (VYGOTSKY, 1987; VYGOTSKY, 1998):

> “a distância entre o nível de desenvolvimento atual determinado pela resolução independente de problemas e o nível de desenvolvimento potencial determinado pela resolução de problemas sob orientação ou em colaboração com parceiros mais capazes” (Vygotsky, 1987, p.211; 1998b, p.202).

Portanto, considerando a ZDP como a distância entre aquilo que o indivíduo já domina, ou seja, o seu arcabouço de conhecimentos prévios e aquilo que ele pode aprender, quando estimulado e auxiliado por um indivíduo mais experiente, que podemos associar a este indívíduo mais experiente, sem qualquer prejuízo teórico, a figura do professor em sala de aula. A teoria de ZDP muitas vezes é posta em prática nas escolas, mesmo que de forma implícita, quando as escolas aplicam avaliação diagnóstica, planejam e executam intervenções e fazem, ao final do ciclo a avaliação da aprendizagem. Com este roteiro é possível aferir o nível de conhecimento/desenvolvimento "real"e planejar as ações para a obtenção do nível de conhecimento/desenvolvimento "potencial", sendo este, o nível de conhecimento desejado.

Figura 1 – ZDP (Esquema gráfico)



Fonte**:** https://educandooamanha.blogspot.com/2016/07/drops-pedagogia-vygotsky-e-zona-de.html

A Figura 1, logo acima, traz um esquema gráfico da ZDP. É interessante observar que essa distância entre a zona de desenvolvimento real e a zona de desenvolvimento potencial, representa o espaço para atuação do professor, ou seja, conhecer o nível de conhecimento prévio dos estudantes e definir o nível cognitivo que se deseja alcançar, seguindo as ideias de Vygotsky, permite ao professor mediar adequadamente o processo de ensino para se chegar ao desejado nível potencial.

Compreender a teoria vigotskiana de ZDP e aplicá-la, na prática, em sala de aula, pode aprimorar o trabalho docente, fomentando um aprendizado eficiente. Para (VYGOTSKI, 2007), o aprendizado pode ser definido como:

> um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas. O aspecto mais essencial de nossa hipótese é a noção de que os processos de desenvolvimento não coincidem com os processos de aprendizado. Ou melhor, o processo de desenvolvimento progride de forma mais lenta e atrás do processo de aprendizado; desta sequenciação resultam, então, as ZDP (Vygotsky 2007, p.103).

Além da contribuição de Vygotsky, trataremos aqui como aspecto norteador da proposta de ensino, as contribuições do matemático húngaro George Polya com a sua teoria de resolução de problemas, considerando a sequência de quatro etapas por ele descritas.

2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

George Polya, contribuiu fortemente em algumas áreas da matemática, como: análise combinatória, teoria dos números, análise numérica e teoria das probabilidades. Contudo, ao final da sua carreira passou a se interessar por assuntos ligados ao ensino de matemática, especialmente, resolução de problemas, buscando a elaboração de métodos sistemáticos no processo de resolução. Polya escreveu cinco livros sobre métodos sistemáticos de resolução de problemas, “How to Solve It”(1945), Mathematics and Plausible Reasoning"(volume I: Induction and Analogy in Mathematics, volume II: Patterns of Plausible Inference) (1954), "Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving"(volumes I and II) e "Mathematical Discover"(1962).

No “How to Solve It", traduzido para o português como "A Arte de Resolver Problemas”, o autor propõe ideias heurísticas que poderiam auxiliar estudantes e professores na resolução de problemas matemáticos. Tais ideias ganharam rapidamente interesse da comunidade acadêmica e passaram a ser estudadas, criticadas e aprimoradas por outros autores. Para (POLYA, 2006),

> "Primeiro, temos de compreender o problema, temos de percerceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-

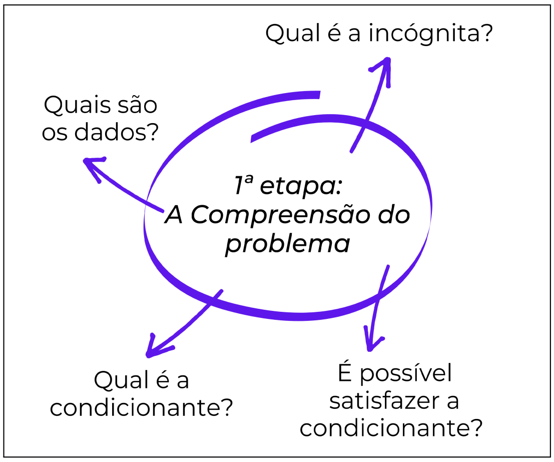
relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a idéia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a"(Polya 2006, p.4).

Figura 2 – As quatro etapas da resolução de problemas segundo Polya

Fonte**:** http://pcnpmatformadores.blogspot.com/2013/04/a-resolucao-de-problemas-o-que-e-um.html

As quatro etapas conforme esboçado na Figura 2, são etapas sequenciais, ou seja, precisam acontecer na ordem apresentada. A compreensão do problema, etapa inicial, pode a princípio parecer obvia, contudo é fase essencial para entender o que está sendo proposto e solicitado no problema. Polya sugere alguns questionamentos necessários nesta etapa: "qual é a incógnita?"; "quais são os dados?"; "qual é a condicionante?"e "é possível satisfazer a condicionante?". O referido autor sugere ainda que nesta etapa o aluno esboçe alguma figura ou esquema, separe os dados em partes e adote uma notação adequada.

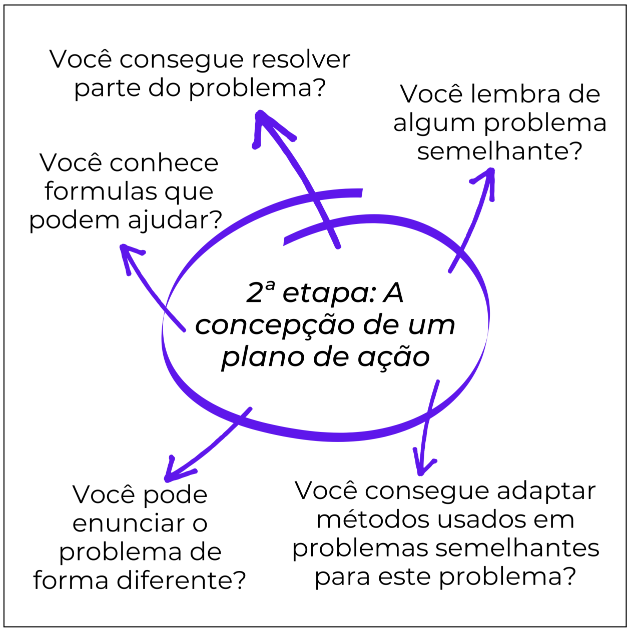
Figura 3 – Etapa 1: Questionamentos possíveis



Fonte**:** Elaborada pelo autor

A segunda etapa, a concepção de um plano de ação, provavelmente, é a etapa mais desafiadora e que necessita de maiores habilidades do estudante. Encontrar um plano de ação eficiente e que funcione depende muito do nível de conhecimentos prévios, da experiência com problemas semelhantes e de bons hábitos mentais, bem como, da execução bem sucedida da etapa anterior. Algumas indagações podem auxiliar na concepção do plano, como por exemplo: "Você se lembra de algum problema semelhante?"; "Você consegue adaptar métodos usados em problemas semelhantes para este problema?"; "Você conhece resultados ou fórmulas que possam ajudar?"; "Você pode enunciar o problema de forma diferente?"e "Você consegue resolver parte do problema?". Algumas estratégias, segundo Polya, podem ser adotadas nesta etapa, como, por exemplo, tentar visualizar casos particulares do problema que sejam mais acessíveis ou tentar transformar o problema em outro correlato.

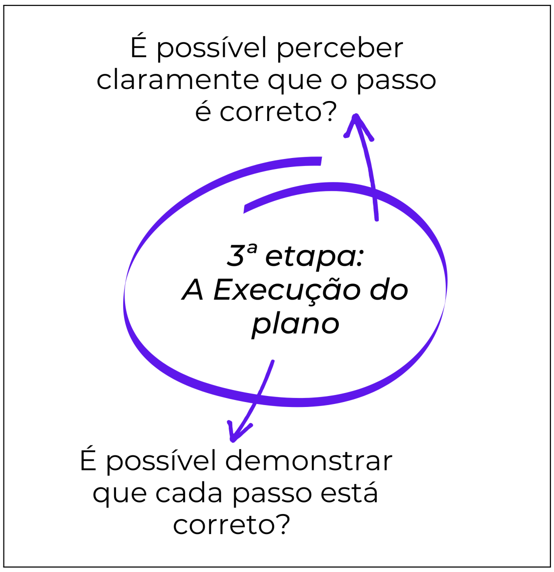
Figura 4 – Etapa 2: Questionamentos possíveis



Fonte**:** Elaborada pelo autor

A execução do plano tende a ser uma etapa simples, desde que as etapas anteriores tenham sido bem sucedida, em especial, a concepção do plano de ação. Nesta etapa é importante destacar a diferença entre intuição e formalização, para que a execução do plano seja deduzida conforme regras formais e que o estudante fique convicto da correção de cada passo. Polya sugere, nesta etapa, as seguintes indagações: "é possível perceber claramente que o passo está certo?"e "é possivel demonstrar que cada passo está certo?".

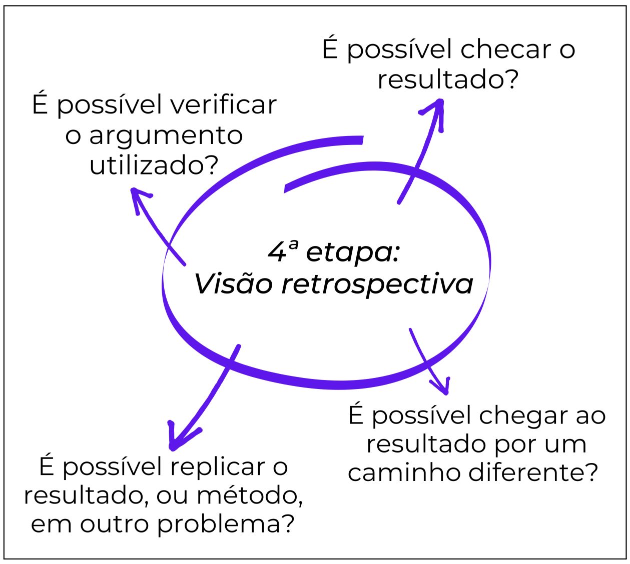
Figura 5 – Etapa 3: Questionamentos possíveis



Fonte: Elaborada pelo autor

Por fim, vem o retrospecto, etapa muitas vezes negligenciada, sobretudo, pelos estudantes. Porém, para (POLYA, 2006) "se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou a este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas". Algumas perguntas são sugeridas nesta etapa: "é possivel checar o resultado?"; "é possível verificar o argumento utilizado?"; "é possível chegar ao resultado por um caminho diferente?"e "é possível replicar o resultado ou o método, em outro problema?".

Figura 6 – Etapa 4: Questionamentos possíveis



Fonte: Elaborada pelo autor

Para (GAZZONI; OST, 2008):

> Utilizando-se o método proposto por Polya constata-se que, com mais facilidade, organizam-se as ideias e se obtém a solução do problema com uma melhor compreensão do que se não tivéssemos seguido seu método. Também é possível encontrar problemas análogos e tornar mais clara uma estratégia para sua resolução. Certamente esse método não é uma ferramenta milagrosa, mas torna-se necessário e eficiente seu uso em um grande número de problemas, principalmente os que apresentam um maior nível de dificuldade (Gazzoni & Ost, 2008, p.44).

O objeto matemático deste trabalho, desigualdades matemáticas, possibilita inúmeras oportunidades de abordagem por meio de problemas e aplicações contextualizadas ou não, onde os estudantes precisam desenvolver uma série de estratégias utilizando, muitas vezes, tão somente operações matemáticas básicas. Portanto, tratar da resolução problemas é absolutamente indispensável neste momento.

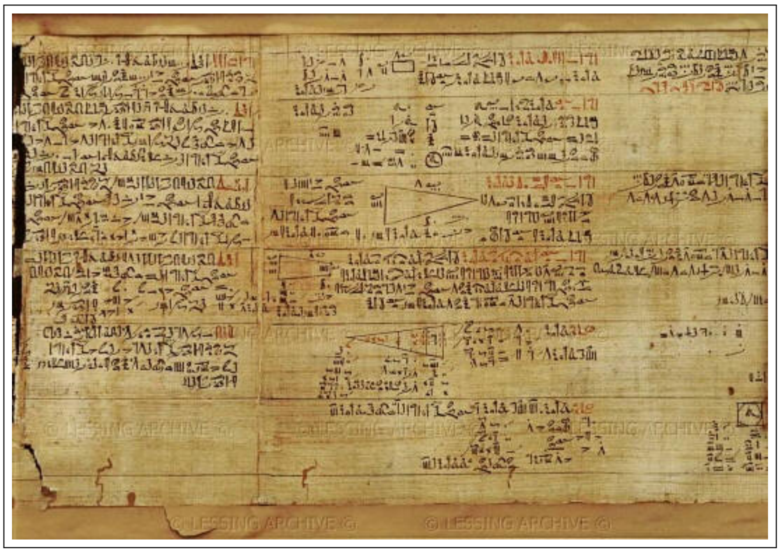
O ensino da matemática pautado na resolução de problemas pode instigar, para além da memorização ou aprendizagem mecânica, a capacidade de racíocinio criativo, necessário para iniciar a resolução do problema. Conforme (SMIRNOV; LEÓNTIEV, 1961) para resolver um problema o principal é considerar o esquema de sua solução e o método fundamental por meio do qual se pode encontrar a solução. Contudo, vale resaltar que o esquema citado pelos mencionados autores não é estático, ou seja, dependendo da natureza do problema, o esquema e/ou estratégias de resolução mudam.

Vários autores já se propuseram a definir o que seria um problema. Para (NEWELL A.; SIMON, 1972), “um problema é uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua ação”. Segundo (SAVIANI, 1980), “problema é uma necessidade a ser resolvida ou superada”, já para (CHI; GLASER, 1985), “o problema é uma situação na qual um indivíduo atua com o propósito de alcançar uma meta utilizando para tal alguma estratégia em particular”. Na mesma linha, (DANTE, 1998) define um problema matemático como "qualquer situação que exija do pensamento matemático e dos conhecimentos matemáticos para sua solução".

2.3 CONTRIBUIÇÕES HISTÓRICAS E NORMATIVAS

(WALLE, 2009), cita que “A maioria, senão todos, os conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados melhor através da resolução de problema”. Vale salientar que “os problemas ocupam um lugar central nos currículos desde a antiguidade” (STANIC; KILPATRICK, 1989). Existem inúmeras evidências históricas que apontam para a evolução da matemática pautada na resolução de problemas. Os antigos egípcios, chineses e gregos já exploravam os problemas matemáticos, conforme achados históricos como os famosos papiros de Rhind (ou Ahmes) e o papiro de Moscou, documentos que reúnem dezenas de problemas matemáticos envolvendo situações aritméticas, frações unitárias, equações lineares e de geometria, como o cálculo de áreas e volumes.

Figura 7 – Papiro de Rhind (ou Ahmes)



Fonte: http://matematicosdemogi.blogspot.com/2016/07/os-papiros-da-matematica-egipcia-rhind.html

A partir das evidências encontradas, principalmente, no papiro de Rhind, um dos mais importantes documentos da história da matemática, podemos concluir que o desenvolvimento da matemática, desde a antiguidade, tem forte apego na apresentação e resolução de problemas. Para (EVES, 2004):

> O papiro de Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra da falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos (EVES, 2004, p.70).

Figura 8 – Papiro de Moscou

Fonte: http://matematicosdemogi.blogspot.com/2016/07/os-papiros-da-matematica-egipcia-rhind.html

O papiro de Moscou é considerado o segundo papiro mais importante da época, assim como no papiro de Rhind, reúne uma coleção de problemas matemáticos. Portanto, considerando a perspectiva histórica do desenvolvimento da matemática a partir da resolução de problemas e os autores que defendem o ensino da matemática pautado na resolução de problemas, em especial, Polya e a sua sequência de etapas que devem ser observadas por estudantes e professores.

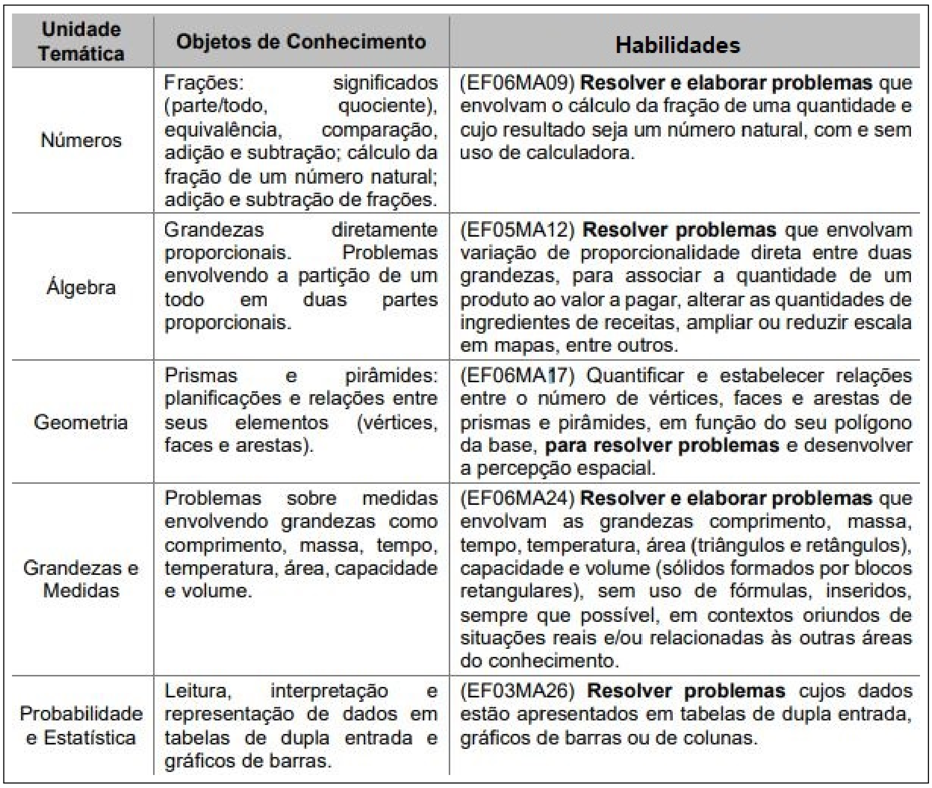
Considerando o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vygotsky quando diz que os indivíduos possuem conhecimentos prévios, zona de desenvolvimento "real"e uma zona de desenvolvimento "potencial"quando estimulado e/ou apoiado por um indivíduo mais experiente. Nos apoiaremos na credibilidade literária deste dois autores para apresentarmos um produto educacional que considera os aspectos cognitivos conforme a ZDP de Vygotsky e uma sequência didática conforme Polya para o tratamento do objeto matemático desigualdades.

Consideraremos também o que vem expresso nos dois principais documentos norteadores do currículo da educação básica. Em âmbito nacional, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a nível de estado, o Documento Curricular Referencial do Ceará (DCRC). Aprovada em 2018, a BNCC (BRASIL, 2018) é o principal documento normativo do país e traz:

> [...] o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2018, p.7).

A BNCC articula os conhecimentos de aritmética, álgebra, geometria, probabilidade e estatística, de modo que os estudantes desenvolvam entre outras “a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações” (BRASIL, 2018). A figura a seguir, apresenta um recorte das habilidades envolvendo a resolução de problemas conforme unidade temática e objeto do conhecimento.

Figura 9 – Resolução de Problemas na BNCC



Unidade Temática	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Números	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA09) **Resolver e elaborar problemas** que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
Álgebra	Grandezas diretamente proporcionais. Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.	(EF05MA12) **Resolver problemas** que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
Geometria	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas).	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, **para resolver problemas** e desenvolver a percepção espacial.
Grandezas e Medidas	Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	(EF06MA24) **Resolver e elaborar problemas** que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
Probabilidade e Estatística	Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada e gráficos de barras.	(EF03MA26) **Resolver problemas** cujos dados estão apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas.

Fonte**:** Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL 2018)

O DCRC, elaborado à luz da BNCC é constituido como um conjunto de diretrizes e orientações para nortear a elaboração dos currículos das escolas da rede estadual de educação básica, traz (CEARA, 2021):

> "O real aprendizado da Matemática significa o desenvolvimento, nas/os alunas/os, de competências e habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, as/os alunas/os devem mobilizar seus modos próprios de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e argumentos, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais elaborados"(DCRC, 2021, p. 157).

Tal documento traz ainda no rol das competências específicas da área de matemática, o seguinte: Competência Específica 3 - "Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente"e Competência Específica 4 - "Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas".

3 CONHECIMENTOS PRELIMINARES

Nesta seção, serão apresentadas três operações básicas das desigualdades, essenciais na resolução de inúmeros problemas. Para resolver problemas de desigualdades, em geral é necessário fazer manipulações, modificando as expressões, buscando tranformá-las em desigualdades equivalentes e que estejam estas, associadas a resultados conhecidos, por meio de teoremas demonstrados. Conhecer resultados oriundos de teoremas, dominar técnicas e estratégias de manipulações algébricas, para escrever as expressões equivalentes de uma desigualdade, são ferramentas essenciais na resolução de problemas de desigualdades.

Antes de iniciar o processo de manipulação de desigualdades é imprescindível saber quais operações são válidas para que se possa transformar a desigualdade dada até que se atinja um estágio em que os teoremas se apliquem facilmente, de forma direta. Não importando se são desigualdades estritas ($>$ *ou* $<$) ou não estritas ($\geq$ *ou* $\leq$), quando se usam técnicas válidas, as transformações de desigualdades estritas, continuam estritas e as transformações de desigualdades não estritas, continuam não estritas.

As operações e o conjunto problemas aqui apresentados, são elementares, pois foram pensados como ponto de partida, para os estudantes que nunca tiveram contato com o estudo de desigualdades ou para os que ainda apresentam dificuldades básicas na compreensão das operações e técnicas de resolução de problemas de desigualdades matemáticas. Esta seção pode ser apresentada diretamente aos estudantes, na íntegra. Para tanto, será evitado aqui um maior grau de formalismo na apresentação das operações e, a escolha dos problemas levou em consideração a simplicidade do enunciado e da solução, buscando familiarizar os estudantes com o tema, para facilitar o estudo das desigualdades clássicas, apresentadas na seção seguinte. A maioria dos problemas aqui apresentados foram baseados em (FORMIN, 2012), (SICHINEL, 2022) e (BONELLI, 2017).

3.1 SOMA DE CONSTANTE

Ao somar uma constante em ambos os lados, gera-se uma nova desigualdade, equivalente à desigualdade inicial, isso significa que se a primeira desigualdade é satisfeita, então a segunda desigualdade é satisfeita, e vice-versa, se a segunda desigualdade é satisfeita, então a primeira também é. Por exemplo,

$$4 < 5$$

é equivalente a

$$6 < 7$$

(somando 2 em ambos os lados). Outro exemplo seria:

$$5 \leq 6$$

é equivalente a

$$8 \leq 9$$

(somando 3 em ambos os lados).

Nestes dois exemplos é fácil ver se as desigualdades são ou não verdadeiras e igualmente fácil aceitar as equivalências. Contudo, nem sempre isso é assim, por exemplo:

$$x + 3 \geq 5$$

é equivalente a

$$x \geq 2$$

(somando -3 em ambos os lados). A equivalência está garantida, mas não conseguimos afirmar se a desigualdade é ou não satisfeita, sem que conheçamos o valor de x. Na manipulação das desigualdades temos, de fato, liberdade irrestrita para somar, não apenas constantes, mas também, incógnitas, desde que somadas a ambos os membros da desigualdade, por exemplo:

$$3y - x \geq 2y + 3x$$

é equivalente a

$$3y \geq 2y + 4x$$

(somando x em ambos os lados). Com esta primeira propriedade, é possível responder problemas do tipo:

Problema 1 *Sejam x e y números reais tais que $2x - y \geq 7 + x$. Mostre que $x \geq 7 + y$.*

Solução: Na desigualdade $2x - y \geq 7 + x$ somemos y em ambos os membros, obtendo $2x \geq 7 + x + y$, somemos agora $(-x)$, também, em ambos os membros da última desigualdade, obtemos $x \geq 7 + y$. □

Problema 2 *Sejam x, y e z números reais tais que:*

$$\begin{cases} 3x - 7y & \geq & 9 + 2x \\ 5y + 9 & \geq & z - 2y \end{cases}$$

Prove que $x \geq z$.

Solução: Observe que a primeira desigualdade envolve valores para x; a segunda, não. Observe, ainda, que a segunda desigualdade é a única que envolve z. Vamos então, isolar x na primeira e z na segunda desigualdade. Na desigualdade $3x - 7y \geq 9 + 2x$, vamos somar $(-2x)$ em ambos os lados, obtendo $x - 7y \geq 9$. Somemos agora $7y$, encontramos, então,

$$x \geq 7y + 9 \tag{3.1}$$

Na desigualdade $5y + 9 \geq z - 2y$, vamos somar $2y$ em ambos os lados, obtemos, então,

$$7y + 9 \geq z \tag{3.2}$$

Reunindo as desigualdades (3.1) e (3.2). Temos, por transitividade:

$$x \geq 7y + 9 \geq z \Rightarrow x \geq z$$

Ficando resolvido o problema. □

3.2 MULTIPLICAÇÃO POR CONSTANTE POSITIVA

A multiplicação por uma constante positiva, assim como na soma de uma constante, gera uma desigualdade equivalente. Por exemplo,

$$4 < 7$$

é equivalente a

$$16 < 28$$

(multiplicamos ambos os membros por 4). Outro exemplo:

$$-7 < -3$$

é equivalente a

$$-21 < -9$$

(multiplicamos ambos os membros por 3). Observe que a constante a ser multiplicada deve ser, necessariamente, positiva. Não podemos multiplicar por uma constante negativa esperando encontrar uma desigaldade equivalente. Por exemplo,

$$0 < 2$$

multiplicando ambos os membros por (-2), obtemos:

$$0 < -4$$

o que é claramente falso. Logo, esta desigualdade não é equivalente anterior. Na verdade, $-4 < 0$, o que nos sugere que quando multiplicamos por uma constante negativa, a desigualdade fica invertida, o que obviamente não nos leva às desejadas equivalências.

A "constante positiva", como na operação anterior, pela qual multiplicamos ambos os membros da desigualdade pode ser qualquer número real positivo, não sendo necessário conhecer o seu valor exato. Por exemplo,

$$2x + 3 \geq 8$$

é equivalente a

$$2xy + 3y \geq 8y$$

(multiplicamos ambos os membros por y), com y sendo um número real positivo, bem definido.

Quando necessitamos multiplicar os membros de uma desigualdade por uma variável, devemos observar atentamente as condições que as variáveis envolvidas devem satisfazer. Muitas vezes não temos informações suficientes para determinar se uma variável é ou não positiva, mas podemos restringir as possibilidades, considerando, por exemplo, que todas as variáveis envolvidas sejam positivas, o que é muito comum em problemas olímpicos. Deste modo, não cabe preocupação ao multiplicar a desigualdade por qualquer das vaviáveis.

Problema 3 *Sejam x, y e z números reais. Sabe-se que z é positivo e que*

$$xz - yz \leq 0$$

Mostre que $x \leq y$

Solução: Na desigualdade $xz - yz \leq 0$, vamos somar yz em ambos os membros da desigualdade, obtendo $xz \leq yz$. Como z é positivo, temos que $\frac{1}{z}$ também é positivo. Logo, multiplicando a desigualdade $xz \leq yz$, em ambos os lados por $\frac{1}{z}$, obtemos $x \leq y$. Como esta inequação é equivalente à inequação dada no enunciado do exercício, e aquela é verdadeira. Logo, é verdade que $x \leq y$. □

Problema 4 *Seja x um número real maior do que* 5*. Mostre que* $2x - 3 > 7$.

Solução: Como $x > 5$ é uma desigualdade verdadeira, considerando o enunciado do problema é possível então, escrever algumas desigualdades equivalentes usando as operações descritas anteriormente. Multipliquemos ambos os membros de $x > 5$, por 2, obteremos $2x > 10$. Agora, somemos (-3) em ambos os lados, obetemos $2x - 3 > 7$, como esta inequação é equivalente a $x > 5$ e $x > 5$ é verdadeira, podemos afirmar que $2x - 3 > 7$, também será verdadeira, para todo $x > 5$. □

3.3 POTÊNCIA POSITIVA

Elevar a uma potência positiva é uma prática bastante usual durante a manipulação de desigualdades e consiste em elevar ambos os membros da desigualdade a uma mesma potência positiva. Exemplos:

$$3 < \pi$$

é equivalente a

$$9 < \pi^2$$

(elevamos ambos os membros à potência 2). Veja que desta vez, temos uma restrição sobre as expressões envolvidas na desigualdade, ambos os membros precisam ser "não negativos". Não se pode elevar ambos os membros de uma desigualdade a uma potência, se algum deles for negativo. Se ambos os lados da desigualdade forem não negativos, a potência por ser irrestritamente qualquer número positivo. Por exemplo:

$$5 < 12$$

é equivalente a

$$5^x < 12^x$$

se x for, estritamente, positivo. Não importa o valor de x, basta que ele seja claramente positivo. É importante observar que a potência aplicada em um dos lados, deve ser a mesma aplicada no outro lado. Não é possível elevar um lado a uma potência e o outro a outra potência diferente. Apesar desta operação sucitar restrições, ainda assim, é uma operação extremamente eficiente na manipulação das desigualdades.

Problema 5 *Seja x um número real tal que* $x^3 \geq 0$. *Prove que* $x^5 \geq 0$.

Solução: Como $x^3 \geq 0$, então x^3 é não negativo. Portanto, podemos elevar ambos os membros de

$$x^3 \geq 0$$

a uma potência positiva. Se elevarmos estrategicamente a $\frac{5}{3}$, teremos:

$$(x^3)^{\frac{5}{3}} \geq 0^{\frac{5}{3}}$$
$$x^5 \geq 0,$$

exatamente o que queríamos provar. □

A partir destas operações básicas: soma de constante; multiplicação por constante positiva e elevar a uma potência, se os dois lados forem não negativos, podemos manipular inúmeras desigualdades, obtendo desigualdades equivalentes e válidas, considerando-se resultados clássicos da literatura matemática.

3.4 APLICAÇÕES INICIAIS

Os problemas a seguir têm como solução uma combinação das operações anteriormente apresentadas, considerando as estratégias de resolução de problemas de desigualdades.

Problema 6 *Mostre que a desigualdade* $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ *é verdadeira, para todo número real x, positivo.*

Solução: Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $(x-1)^2 \geq 0$. Logo,

$$(x-1)^2 \geq 0$$
$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$
$$x^2 + 1 \geq 2x.$$

Dado que, $x > 0$, temos,

$$x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

□

Problema 7 *Mostre que a desigualdade* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ *é verdadeira para quaisquer números reais a e b, positivos.*

Solução: Considerando que a e b, são números reais positivos, temos que $(a-b)^2 \geq 0$. Então

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &\geq 0\\ a^2-2ab+b^2 &\geq 0\\ a^2+b^2 &\geq 2ab.\end{aligned}$$

Como a e b são números reais positivos, então $ab > 0$. Logo,

$$a^2+b^2 \ \geq \ 2ab \ \Leftrightarrow \ \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ \geq \ 2.$$

□

Problema 8 *(Desigualdade de Nesbitt). Mostre que se a, b e c são números reais positivos, a desigualdade* $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \ \geq \ \dfrac{3}{2}$ *é verdadeira.*

Solução: Considerando o que foi mostrado no problema 7, se a, b e c são números reais positivos, valem as seguintes desigualdades:

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b} \ \geq \ 2, \ \ \frac{a+c}{c+b}+\frac{c+b}{a+c} \ \geq \ 2, \ \ \frac{b+a}{a+c}+\frac{a+c}{b+a} \ \geq \ 2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{a+c}{c+b} + \frac{c+b}{a+c} + \frac{b+a}{a+c} + \frac{a+c}{b+a} \ &\geq \ 2+2+2\\
\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{a+c}{c+b}\right)+\left(\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+c}{b+a}\right)+\left(\frac{c+b}{a+c}+\frac{b+a}{a+c}\right) \ &\geq \ 6\\
\frac{2a+(b+c)}{b+c}+\frac{(a+b)+2c}{a+b}+\frac{(a+c)+2b}{a+c} \ &\geq \ 6\\
\frac{2a}{b+c}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+b}{a+b}+\frac{2c}{a+b}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{2b}{a+c} \ &\geq \ 6\\
\frac{2a}{b+c}+1+1+\frac{2c}{a+b}+1+\frac{2b}{a+c} \ &\geq \ 6\\
\frac{2a}{b+c}+\frac{2c}{a+b}+\frac{2b}{a+c} \ &\geq \ 3\\
2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}\right) \ &\geq \ 3\\
\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c} \ &\geq \ \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

□

Problema 9 *Sejam x, y e z números reais. Mostre que*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

Solução: É facil ver que $(x-y)^2 \geq 0$, isto é, $x^2 + y^2 \geq 2xy$, para quaisquer que sejam x, $y \in \mathbb{R}$. Vamos, agora, multiplicar os dois lados da desigualdade por 2, obtendo:

$$\begin{array}{rcl} (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 & \geq & 0 \\ x^2 + y^2 - 2xy + y^2 + z^2 - 2yz + z^2 + x^2 - 2zx & \geq & 0 \\ x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 + x^2 & \geq & \text{2xy + 2yz + 2zx} \\ x^2 + y^2 + z^2 & \geq & xy + yz + zx. \end{array}$$

Como um quadrado é sempre não negativo, uma soma de quadrados também o é. De modo que, a desigualdade é válida e o problema fica resolvido. $\square$

4 DESIGUALDADES CLÁSSICAS

Nesta seção apresentaremos as propriedades operatórias elementares das desigualdades, bem como, as definições, teoremas e demonstrações das desigualdades: desigualdade triangular; desigualdade entre as médias, desigualdade de Cauchy-Schwarz, desigualdade de Bernoulli e desigualdade de Jensen. As definições serão acompanhadas de problemas, cuja soluções são aplicações diretas de teoremas associados a tais desigualdades.

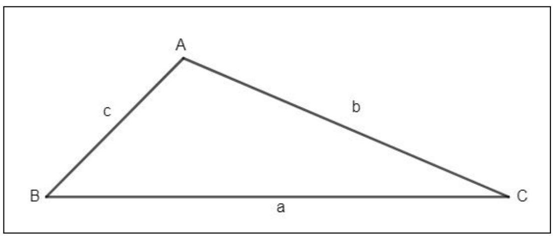
O título desta seção leva em consideração o aparecimento recorrente destas desigualdades em diversas áreas da matemática, tais como: na geometria, na álgebra e na análise, entre outras. Compreender bem tais desigualdades e conseguir resolver problemas associados, pode representar para os estudantes um importante ganho cognitivo que pode facilitar o avanço nos estudos matemáticos. A escolha destas cinco desigualdades foi uma opção do autor, levando em consideração as inúmeras possibilidades de problemas, em variados níveis de complexidade, permeando as várias áreas da matemática, como citadas acima. A maioria dos resultados aqui apresentados foram baseados em (SICHINEL, 2022), (CAMINHA, 2012), (GUIDORIZZI, 2001), (LIMA, 2010), entre outros trabalhos.

4.1 TRIANGULAR

Com origem na Geometria Euclidiana e presente na proposição 20, do texto clássico, "Os Elementos", associado a Euclides de Alexandria (séc. III a.C.), a desigualdade triangular é provavelmente uma das desigualdades mais importantes da matemática. Tal resultado, afirma basicamente que, num triângulo, o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados.

De modo empírico, conforme sugere (CAMPELO, 2013), podemos dizer que dado um triângulo qualquer (figura 10) com lados cujas medidas podem ser expressas por a, b e c, reais positivos, temos que: $a < b + c$, $b < a + c$ e $c < a + b$.

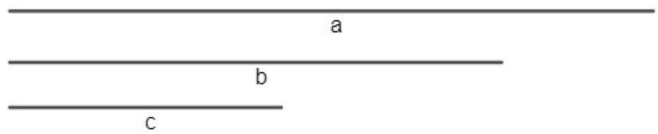
Figura 10 – Triângulo de medidas a, b e c



Fonte: Elaborada pelo autor

Tais desigualdades podem ser facilmente verificadas de modo intuitivo. Para tanto, basta tomar três segmentos de reta, conforme a figura 11, em que cada segmento tenha exatamente a mesma medida dos lados do triângulo da figura 10.

Figura 11 – Segmentos de reta com medidas a, b e c.

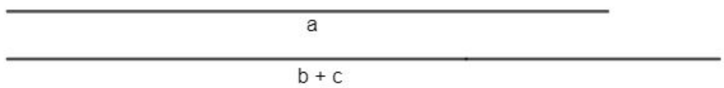


Fonte**:** Elaborada pelo autor

Em seguida, basta unir por exemplo, os segmentos de medidas b e c, gerando assim, um novo segmento de reta cuja medida será $b+c$. Então, por construção é fácil ver, figura 12, que

$$a < b+c.$$

Figura 12 – Segmentos de reta com medidas a, b + c.



Fonte**:** Elaborada pelo autor

De modo análogo, podemos verificar que $b < a+c$ e $c < a+b$.

A desigualdade triangular, estabelece uma condição necessária e suficiente para que três segmentos de comprimentos fixados a, b e c formem um triângulo, unindo às suas extremidades. Sendo a, b e c as medidas dos lados de um triângulo, deve valer:

$$\begin{cases} a < b+c \\ b < a+c \Rightarrow b-c < a \\ c < a+b \Rightarrow c-b < a \end{cases}$$

Com isso, podemos escrever:

$$|b-c| < a < b+c$$

Tal desigualdade pode ser reescrita usando a notação de módulo (valor absoluto) para quaisquer números reais a e b. Definamos, conforme (LIMA, 2013):

O valor absoluto (ou módulo) de um número real x, indicado pela notação $|x|$, é definido pondo-se:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

Outro modo de se definir o valor absoluto consiste em por:

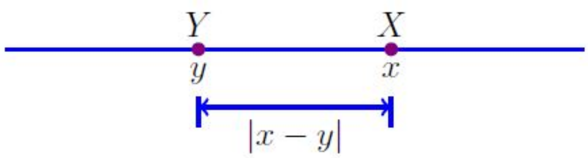
$$|x| = \text{máx}\{-x, x\},$$

isto é, o valor absoluto de x é o maior dos números $-x$ e x. (Quando $x = 0$ tem-se, claramente $-x = x = |x| = 0$.)

Nos problemas que envolvem o valor absoluto, como são em geral os casos de desigualdades triangulares é-se, em princípio, obrigado a fazer inevitáveis "considerações de casos", analisando separadamente cada situação conforme o sinal das expressões que aparecem no interior das barras verticais $|\ |$. Algumas raras vezes isto pode ser evitado usando-se esta outra caracterização de valor absoluto: $|x| = \sqrt{x^2}$. Neste caso, estamos recorrendo à convenção que regula o uso do símbolo $\sqrt{\ }$: para todo $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ é um número não-negativo cujo quadrado é a.

Ainda segundo (LIMA, 2013), outra importante interpretação do valor absoluto é a seguinte: se x e y são respectivamente as coordenadas dos pontos X e Y sobre o eixo $\mathbb{R}$ então $|x - y| =$ distância do ponto X ao ponto Y.

Figura 13 – Interpretação do valor absoluto como distância



Fonte: Elaborada pelo autor

A interpretação do valor absoluto $|x - y|$ como a distância, no eixo real, entre os pontos de coordenadas x e y, permite que se possa enxergar intuitivamente o significado e a resposta de alguns problemas envolvendo módulos.

Portanto, temos que $x = |x|$ ou $x = -|x|$, e assim

$$-|a| \leq a \leq |a| \text{ e } -|b| \leq b \leq |b|.$$

Somando as duas desigualdades simultâneas, membro a membro, obtemos

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Logo,

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

Tal desigualdade é conhecida como desigualdade triangular para os números reais a e b.

Teorema 3.1 (Desigualdade Triangular). Considere a e b números reais não nulos. Então,

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

Demonstração: Para provar a Desigualdade Triagular, usaremos o resultado acima apresentado, ou seja, $-|x| \leq x \leq |x|$. Portanto, segue que $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$. Com isso, temos que:

$$\text{se } a+b \geq 0, \text{ então } |a+b| = a+b \leq |a|+|b|, \text{ pela propriedade acima;}$$

$$\text{se } a+b < 0, \text{ então } |a+b| = -(a+b) = -a-b \leq |a|+|b|, \text{ também, pela propriedade acima.}$$

□

Apresentaremos agora, o caso geral da Desigualdade Triangular.

Teorema 3.2 (Desigualdade Triangular - Caso Geral). Sejam a_1, a_2, ..., a_n números reais não-nulos, com $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|,$$

a igualdade, ocorre se, e somente se, a_1, a_2, ..., a_n tiverem o mesmo sinal.

Demonstração: Para demonstrar o caso geral da Desigualdade Triangular, usaremos o Princípio da Indução Finita.

(i) Para $n=1$, temos que $|a_1| = |a_1|$, o que nos leva a um resultado verdadeiro.

(ii) Para $n=2$, teremos um caso associado ao resultado do teorema anterior, basta fazer $a=a_1$ e $b=a_2$.

(iii) Suponhamos agora que tal resultado seja verdadeiro para algum $k \in \mathbb{N}$, maior do que 2. De modo que, para a_1, a_2, ..., a_k números reais não-nulos, temos:

$$|a_1+a_2+\cdots+a_k| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|.$$

Consideremos agora a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1} números reais não-nulos. Podemos, então, concluir que:

$$\begin{aligned} |a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}| &= |(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}| \\ &\leq |a_1+a_2+\cdots+a_k|+|a_{k+1}| \qquad \text{(hipótese de indução)} \\ &\leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|+|a_{k+1}|. \end{aligned}$$

Assim, fica provado o caso geral da Desigualdade Triangular. □

4.1.1 Aplicações

Neste tópico serão apresentados problemas dos quais suas soluções recaem na desigualdade triangular, tais problemas e soluções são baseados em (FORMIN, 2012) e no módulo "elementos básicos de geometria plana - parte 2"de (PARENTE, 2019), disponível no Portal da Matemática.

Problema 10 *(Olimpíada Russa). Mostre que se é possível construirmos um triângulo com lados a, b e c, também é possível construirmos um triângulo com lados de comprimentos* $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$ *e* $\frac{1}{b+c}$.

Solução: É facil ver que todas as frações são positivas. Logo, basta mostrarmos que a maior delas é menor que a soma das outras duas. Aplicando a desigualdade triangular no triângulo de lados a, b e c. Teremos: $c < a+b$, por consequência, temos:

$$a+c < 2a+b < 2(a+b);$$
$$b+c < a+2b < 2(a+b).$$

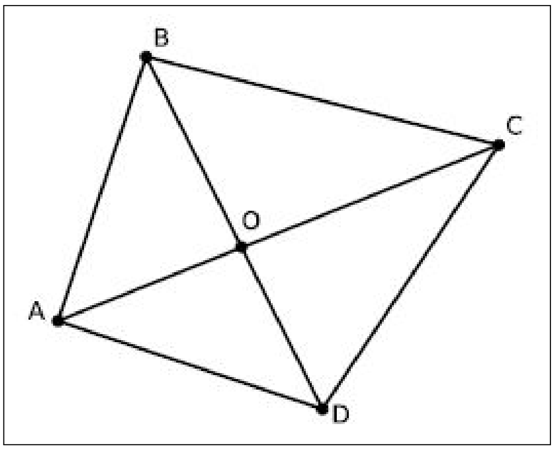
Portanto,

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c} > \frac{1}{2(a+b)}+\frac{1}{2(a+b)} = \frac{1}{a+b},$$ os outros casos seguem de modo análogo.

□

Problema 11 *Na figura 14 abaixo, verifique que:*

Figura 14 – Quadrilátero ABCD



Fonte: https://portaldaobmep.impa.br/

(i) $\dfrac{AB+BC+CD+DA}{2} < BD+AC$;
(ii) $BD+AC < AB+BC+CD+DA$.

Solução:

(i) Aplicando a desigualdade triangular nos triângulos $\triangle ABO$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$ e $\triangle AOD$, temos:

$$AB < AO+OB;$$
$$BC < BO+OC;$$
$$CD < OC+OD;$$
$$AD < AO+OD.$$

Somando as quatro desigualdades, membro a membro, o que é possível segundo (STEWART, 2013), podemos concluir que:

$$AB+BC+CD+DA < 2(AO+BO+CO+DO) = 2(BD+AC).$$

Logo,

$$AB+BC+CD+DA < 2(BD+AC) \Rightarrow \frac{AB+BC+CD+DA}{2} < BD+AC.$$

(ii) Basta aplicarmos a desigualdade triangular nos triângulos $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$ para obtermos:

$$BD < BC+CD;$$
$$AC < AD+DC;$$
$$BD < AD+AB;$$
$$AC < AB+BC.$$

Somando as quatro desigualdades, membro a membro, temos:

$$2(AC+BD) < 2(AB+BC+CD+DA).$$

Por fim, basta dividirmos a desigualdade por 2, para obtermos a desigualdade do enunciado, ou seja,

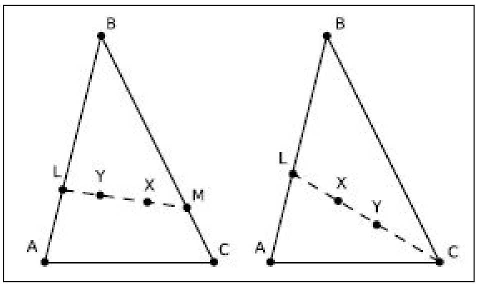
$$BD+AC < AB+BC+CD+DA.$$

$\square$

Problema 12 *Prove que a distância entre quaisquer dois pontos dentro de um triângulo não é maior do que a metade do perímetro do triângulo.*

Solução: Sejam X e Y dois pontos no interior do trângulo $\triangle ABC$. Trace uma reta unindo X e Y. Se X e Y não estão em mesmo lado do triângulo, tal reta intersecta os lados em dois pontos. Logo abaixo, temos a figura 15 que ilustra os dois casos possíveis.

Figura 15 – Triângulos Quaisquer



Fonte: https://portaldaobmep.impa.br/

No primeiro caso, $XY \leq LM$. Além disso, iremos aplicar a desigualdade triangular, teremos nos triângulos $\triangle BLM$ e $\triangle ALM$:

$$LM < BL + BM; \tag{4.1}$$

$$LM < AL + AM \text{ e } AM < AC + CM.$$

Logo,

$$LM < AL + AC + CM. \tag{4.2}$$

Então, somando as desigualdades 4.1 e 4.2, temos:

$$2LM < (BL + AL) + (BM + CM) + AC$$
$$2LM < AB + BC + AC = 2p.$$

Portanto, como $XY \leq LM$, então $XY < p$, once p é o semiperímetro do triângulo.

No segundo caso, considerando $M \equiv C$ e usando novamente a desigualdade triangular, temos:

$$LM < BL + BC;$$
$$LM < LA + AC.$$

Somando as desigualdades, membro a membro, vem que

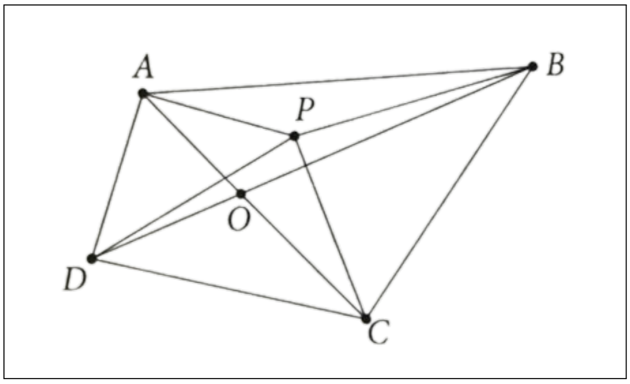
$$2LM < (BL + LA) + AC + BC = 2p.$$

Portanto, em ambos os casos, $XY \leq LM < p$, como desejado. Caso os dois pontos estejam em um mesmo lado do triângulo, o comprimento do segmento que os une é menor ou igual que o lado que os contém. Este por sua vez é menor que o semiperímetro, como consequência da desigualdade triangular. □

Problema 13 *Encontre um ponto no interior de um quadrilátero convexo tal que a soma das distâncias do ponto aos vértices é mínima.*

Solução: Sendo que o quadrilátero é convexo, suas diagonais se intersectam em algum ponto interior O. Supondo que os vértices do quadrilátero sejam A, B, C e D, tal como na figura 16. Então a soma das distâncias de O aos vértices é igual a $AC + BD$. Porém, para qualquer outro ponto P teremos, pela desigualdade triangular, $PA + PC \geq AC$. De modo análogo, $PB + PD \geq BD$.

Figura 16 – Quadrilátero convexo ABCD



Fonte: (FORMIN, 2012)

Com isso, temos que a soma das distâncias de P aos vértices não é menor do que $AC + BD$. Note que tal soma só será igual a $AC + BD$ se os pontos P e O coincidirem. Logo, o ponto O é o ponto procurado. □

4.2 ENTRE AS MÉDIAS

Quando vamos resolver problemas de desigualdades em matemática, é muito comum nos depararmos com situações que envolvem máximos e mínimos de expressões algébricas, interpretação geométrica de desigualdades entre médias, isso porque, as desigualdades algébricas são ferramentas poderosas para a resolução de problemas olímpicos, por exemplo.

Apresentaremos neste tópico um estudo sobre desigualdades entre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, com suas definições, demonstrações, exemplos e aplicações. O foco é apresentar a versatilidade deste conteúdo na resolução de inúmeros problemas de diversas áreas da matemática.

O conceito de média não é restrito aos estudos e/ou trabalhos dos matemáticos ou estatísticos, tal conceito está frequentemente presente em situações cotidianas diversas, as quais, muitas vezes usamos sem perceber. Conforme (CAZORLA, 2002) "esse processo está tão arraigado que, às vezes, às pessoas não percebem o grau apurado de suas estimativas...; aliás, muitas dessas pessoas nem conhecem o algoritmo da média, mas continuam a utilizar seu conhecimento intuitivo no planejamento de suas atividades rotineiras".

Para (MORGADO *et al.*, 2006), uma ideia bastante importante é a ideia de média. Uma média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa carterística da lista. De modo que, se a característica for a soma dos elementos da lista, utiliza-se a média aritmética; se for o produto dos elementos da lista, utiliza-se a média geométrica; se essa característica for a soma dos inversos dos elementos da lista, utiliza-se a média harmônica e se, por acaso, a característica for a soma dos quadrados dos números da lista, utiliza-se a média dos quadrados, ou média quadrática.

Média Aritmética

Dada uma lista de n números reais positivos a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a média aritmética, denotada por MA, ou por, $\overline{A}$ é assim definida:

$$MA = \overline{A} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

A Média Aritmética (MA) preserva a soma dos números da lista, observe.
De $MA = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$, segue que

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n \cdot MA = \underbrace{MA + MA + MA + \ldots + MA}_{n \ \ vezes}.$$

Problema 14 *Determinar a média aritmética dos números* 7, 10, 12 *e* 15.

Solução: Dados os números 7, 10, 12 e 15, temos:

$MA = \dfrac{7 + 10 + 12 + 15}{4} = \dfrac{44}{4} = 11.$ □

Problema 15 *(OBMEP). Um aluno compara as notas das* 6 *provas provas de Português que fez em 2004 e de outras 6, da mesma matéria, que fez em 2005. Ele repara que em 5 provas ele obteve as mesmas notas nos dois anos. Na outra prova a nota foi 86 em 2004 e 68 em 2005. Em 2004 a média aritmética das seis notas foi 84. Qual foi a média em 2005?*
(a) 78
(b) 81
(c) 82
(d) 83
(e) 87

Solução: Sejam a, b, c, d e e as cinco notas que se repetem em 2004 e 2005. A média em 2005, que queremos calcular é

$$\frac{a+b+c+d+e+68}{6} = \frac{a+b+c+d+e}{6} + \frac{68}{6}.$$

Logo, para sabermos a média em 2005, basta determinarmos $\dfrac{a+b+c+d+e}{6}$. Para isso, usaremos os dados sobre a média em 2004, que são

$$\frac{a+b+c+d+e+86}{6} = 84.$$

Segue que,

$$\frac{a+b+c+d+e}{6} + \frac{86}{6} = 84.$$

Donde,

$$\frac{a+b+c+d+e}{6} = 84 - \frac{86}{6}.$$

Portanto, a média em 2005 foi,

$$\frac{a+b+c+d+e}{6} + \frac{68}{6} = 84 - \frac{86}{6} + \frac{68}{6} = 81.$$

$\square$

Média Geométrica

Dada uma lista de n números reais positivos a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a média geométrica, denotada por MG ou, simplesmente, G, é assim definida:

$$MG = \sqrt[n]{a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

A Média Geométrica (MG) preserva o produto dos elementos da lista, observe. De $MG = \sqrt[n]{a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n}$, temos que

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = (MG)^n = \underbrace{MG \cdot MG \cdot MG \cdot \ldots \cdot MG}_{n\ \ vezes}.$$

Problema 16 *Determinar a média geométrica dos números 4, 20 e 100.*

Solução: Basta fazer,

$$\sqrt[3]{4 \cdot 20 \cdot 100} = \sqrt[3]{8000} = 20.$$

□

Problema 17 *Sabe-se que as medidas dos lados de um retângulo são* $10cm$ *e* $20cm$*. Determine as medidas dos lados de um quadrado que possua a mesma área do retângulo.*

Solução: A área do retângulo é dada por:

$$A = 10 \cdot 20 = 200cm^2.$$

A área do quadrado é dada por:

$$A = L^2 = 2 \cdot 100.$$

Portanto, o lado do quadrado é:

$$L = \sqrt{10 \cdot 20} = 10\sqrt{2}cm.$$

Logo, a medida do lado do quadrado será a média geométrica das medidas dos lados do retângulo de mesma área. □

Média Harmônica

Dada uma lista de n números reais positivos a_1, a_2, a_3, ..., a_n, tem-se que a média harmônica MH ou simplesmente H, é o inverso da média aritmética dos inversos dos números dados, é assim definida:

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1}}.$$

A Média Harmônica (MH) preserva a soma dos inversos dos números listados, conforme abaixo.

De $MH = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$, concluímos que

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{n}{MH}=\underbrace{\frac{1}{MH}+\frac{1}{MH}+\frac{1}{MH}+\cdots+\frac{1}{MH}}_{n\ \ vezes}.$$

Problema 18 *Determinar a média harmônica dos números 3, 5, 9 e 12.*

Solução: Basta fazer

$$MH=\frac{4}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}}=\frac{4}{\dfrac{60+36+20+15}{180}}=\frac{4\cdot 180}{131}=\frac{720}{131}\cong 5,5.$$

□

Problema 19 *Durante um experimento com líquidos, foi feita uma mistura totalmente homogênea. Nessa mistura, havia duas substâncias: a substância 1, com densidade d = 0,4 g/cm³, e a substância 2, com densidade d = 0,9 g/cm³. Sabendo que a massa da substância 1 e da substância 2 são iguais, a densidade dessa mistura é, aproximadamente:*

Solução: Vamos, inicialmente, representar as densidades como frações:

$$x_1=\frac{9}{10};\ x_2=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

Representando os inversos de x_1 e x_2, temos que:

$$\frac{1}{x_1}=\frac{10}{9}\ \text{ e }\ \frac{1}{x_2}=\frac{5}{2}.$$

Com esses dados, vamos, então, calcular a média harmônica:

$$MH=\frac{2}{\dfrac{10}{9}+\dfrac{5}{2}}=\frac{2}{\dfrac{20+45}{18}}=\frac{2}{\dfrac{65}{18}}=\frac{36}{65}\cong 0,55.$$

□

Média Quadrática

Dada uma lista de $n > 1$ números reais positivos a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a média quadrática MQ ou simplesmente Q é a ráiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos números a_1, a_2, a_3, ..., a_n, é assim definida:

$$MQ = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}}.$$

A Média Quadrática (MQ) preserva a soma dos quadrados dos números da lista, conforme a seguir.

De $MQ = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$, segue que

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = n(MQ)^2 = \underbrace{(MQ)^2 + (MQ)^2 + (MQ)^2 + \cdots + (MQ)^2}_{n \ \ vezes}.$$

Exemplo 1. Determinar a média quadrática dos números 2, 3, 5 e 9.

Solução: Basta fazer

$$MQ = \sqrt{\frac{2^2 + 3^2 + 5^2 + 9^2}{4}} = \sqrt{\frac{4 + 9 + 25 + 81}{4}} = \sqrt{\frac{119}{4}} = \sqrt{29,75} \cong 5,45.$$

Desigualdade entre as médias Aritmética e Geométrica

Para iniciarmos o estudo das desigualdades entre as médias aritmética e geométrica, iremos considerar o problema a seguir, envolvendo apenas dois números reais positivos.

Problema 20 *Sejam a_1 e a_2 números reais positivos, mostre que*

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}.$$

Solução: Se a_1 e a_2 são números reais positivos, sabemos que $\sqrt{a_1}$ e $\sqrt{a_2}$ são números reais e que $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$.

Portanto, segue que:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 &\geq 0 \\
(\sqrt{a_1})^2 - 2(\sqrt{a_1})(\sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_2})^2 &\geq 0 \\
a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 &\geq 0 \\
a_1 + a_2 &\geq 2\sqrt{a_1 a_2} \\
\frac{a_1 + a_2}{2} &\geq \sqrt{a_1 a_2}.
\end{aligned}$$

Logo, para dois números reais positivos, podemos escrever que $MA \geq MG$. □

Lema 4.2.1 *Seja m um número natural e sejam ainda MA e MG, respectivamente, a média aritmética e a média geométrica da lista de números reais positivos y_1, y_2, y_3, ..., y_m, a qual, sem perda de generalidade, vamos supor já devidamente ordenada $(y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_m)$.*
Então, ao substituirmos o menor elemento dessa lista, y_1, por MG e o maior elemento, y_m, por $\dfrac{y_1 \cdot y_m}{MG}$, resulta que:
(i) a média aritmética dos números da nova lista é menor do que ou igual à média MA. E só será igual, quando todos os números y_1, y_2, ..., y_m forem iguais.
(ii) a média geométrica dos números da nova lista permanece igual à média MG.

Demonstração: Suponhamos que L seja a lista de números reais positivos y_1, y_2, ..., y_m. Assim, as médias aritmética MA e a geométrica MG dos números de L são:

$$MA = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_m}{m} \text{ e } MG = \sqrt[m]{y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot ym}. \tag{4.3}$$

Nomearemos como L_1 a lista resultante quando substituirmos y_1 por MG e y_m por $\dfrac{y_1 \cdot y_m}{MG}$:

$$L_1 : MG, y_2, y_3, ..., y_{m-1}, \frac{y_1 \cdot y_m}{MG}.$$

Sejam, MA_1 e MG_1, respectivamente, as médias aritmética e geométrica dos números de L_1, assim:

$$MA_1 = \frac{MG + y_2 + \cdots + \dfrac{y_1 \cdot y_m}{MG}}{m} \text{ e } MG_1 = \sqrt[m]{MG \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot \frac{y_1 \cdot y_m}{MG}}. \tag{4.4}$$

Observe que:

$$MG_1 = \sqrt[m]{MG \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_{m-1} \cdot \frac{y_1 \cdot y_m}{MG}} \Rightarrow MG_1 = \sqrt[m]{y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_m} = MG.$$

Portanto, temos que

$$MG_1 = MG.$$

Vale ressaltar duas importantes observações:

Primeiramente, como

$$\begin{array}{rcl} y_1 & \leq & y_1 \\ y_1 & \leq & y_2 \\ y_1 & \leq & y_3 \\ & \vdots & \\ y_1 & \leq & y_{m-1} \\ y_1 & \leq & y_m \end{array}$$

então, multiplicando as desigualdades, membro a membro, temos:

$$y_1^m \leq y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m,$$

como a lista é formada, exclusivamente, por números positivos, vem que:

$$y_1 \leq \sqrt[m]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m} = MG.$$

A segunda observação é, como:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & \leq & y_m \\ y_2 & \leq & y_m \\ y_3 & \leq & y_m \\ & \vdots & \\ y_{m-1} & \leq & y_m \\ y_m & \leq & y_m \end{array}$$

logo,

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m \leq y_m^m.$$

Como a lista é formada apenas por números positivos, temos:

$$MG = \sqrt[m]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m} \leq y_m$$

Das duas observações acima, podemos concluir que $y_1 \leq MG \leq y_m$ e, dessa dupla desigualdade, podemos concluir que $y_1 - MG \leq 0$ e também que $1 - \dfrac{y_m}{MG} \leq 0$, donde $(y_1 - MG) \cdot \left(1 - \dfrac{y_m}{MG}\right) \geq 0$. De $(y_1 - MG) \cdot \left(1 - \dfrac{y_m}{MG}\right) \geq 0$, segue que:

$$\begin{array}{rcl} y_1 - \dfrac{y_1 \cdot y_m}{MG} - MG + y_m & \geq & 0 \\ y_1 + y_m & \geq & MG + \dfrac{y_1 \cdot y_m}{MG} \\ y_1 + (y_2 + \cdots + y_{m-1}) + y_m & \geq & MG + (y_2 + \cdots + y_{m-1}) + \dfrac{y_1 \cdot y_m}{MG} \\ \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1} + y_m}{m} & \geq & \dfrac{MG + y_2 + \cdots + y_{m-1} + \dfrac{y_1 \cdot y_m}{MG}}{m} \end{array}$$

Por 4.3 e 4.4, podemos, então, concluir que $MA \geq MA_1$, ou seja, a média aritmética dos números da nova lista é menor do que ou igual à da lista inicial.

Por fim, observe que se $MA = MA_1$, então $(y_1 - MG) \cdot \left(1 - \dfrac{y_m}{MG}\right) = 0$ e, portanto, $y_1 - MG = 0$ ou $1 - \dfrac{y_m}{MG} = 0$. Mas, as afirmações $y_1 = MG$ e $y_m = MG$ só ocorrem quando todos os números da lista L forem iguais.

Com efeito, se algum elemento y_i da lista L for diferente de y_1 (ou de y_m), então teremos $y_1 < y_i$ (ou $y_i < y_m$) e, portanto, $y_1^m < y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m$ (ou $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m < y_m^m$), ou seja, $y_1 < MG$ (ou $MG < y_m$). Deste modo, teríamos $y_1 \neq MG$ (ou $y_m \neq MG$). $\square$

Problema 21 (Desigualdade $MA \geq MG$ - Caso Geral) *Considerando os números reais positivos a_1, a_2, a_3, ..., a_n, mostre que:*

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n}.$$

Solução 1: Para realizarmos esta solução, faremos uso do lema 4.2.1. Sejam MA e MG, respectivamente, a média aritmética e a média geométrica da lista de números reais positivos

$$L : a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

Ao substituirmos o menor elemento da lista L, digamos x, por MG e o maior elemento, digamos z, por $\dfrac{x \cdot z}{MG}$, mantendo os demais inalterados, obtemos uma lista L_1 cuja média geométrica MG_1 e a média aritmética MA_1, segundo o lema, são tais que:

(i) $MA_1 \leq$MA e a igualdade só ocorrerá quando todos os números da lista forem iguais.

(ii) $MG_1 = MG$.

Sejam agora x_1 e z_1 o menor e o maior dos elementos da lista L_1, respectivamente. Substituindo x_1 por MG e z_1 por $\dfrac{x_1 \cdot z_1}{MG}$, obtemos uma nova lista L_2 cuja média geométrica MG_2 e a média aritmética MA_2, segundo o lema, são tais que:

(iii) $MA_2 \leq MA_1$ e a igualdade só ocorrerá quando todos os números da lista L_1 forem iguais.

(iv) $MG_2 = MG_1$.

Perceba também que, na lista L_2, pelo menos dois elementos são iguais a MG.

Vamos agora, em uma terceira etapa, substituir o menor e o maior dos elementos da lista L_2, digamos x_2 e z_2, respectivamente, por MG e por $\dfrac{x_2 \cdot z_2}{MG}$. Com isso, obteremos uma terceira lista L_3 cuja média geométrica MG_3 e a média aritmética MA_3, segundo o lema, são tais que:

(v) $MA_3 \leq MA_2$ e a igualdade só ocorrerá quando todos os números da lista L_2 forem iguais.

(vi) $MG_3 = MG_2$.

Perceba que a lista L_3 tem pelo menos três elementos iguais a MG.

Prosseguindo dessa forma, depois de no máximo n etapas, obteremos uma lista L^* com n números iguais a MG. Aplicando sucessivamente o lema, temos que se a média geométrica e a média aritmética de L^* forem, respectivamente, MG^* e MA^*, então:

$$MA^* \leq \cdots \leq MA_3 \leq MA_2 \leq MA_1 \leq MA. \tag{4.5}$$

$$MG^* = \cdots = MG_3 = MG_2 = MG_1 = MG$$

Contudo, sabemos que na lista L^* os n números são iguais a MG e isso significa que:

$$MA^* = \frac{\overbrace{MG + MG + \cdots + MG}^{n\ parcelas}}{n} = \frac{n \cdot MG}{n} = MG. \tag{4.6}$$

Por 4.5 e 4.6 obtemos que $MG = MA^* \leq MA$, ou seja, $MA \geq MG$, o que nos garante que

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n}.$$

□

Por fim, observe que só teremos $MG = MA$ se, em cada uma das etapas a média aritmética se mantiver constante. E isso só ocorreria se todas as listas tivessem seus elementos iguais; em paticular, a lista incial L. Portanto, $MG = MA$ só ocorre se todos os $a_i s$ forem iguais.

Lema 4.2.2 *Sejam a, b, x, y* $\in \mathbb{R}$ *positivos, tais que:*

$$x + y = a + b,$$

Se $x \geq a$ *e* $y \geq b$*, então* $x = a$ *e* $y = b$*.*

Demonstração: Como $x + y = a + b$ então $(x - a) + (y - b) = 0$.
Como $x \geq a$ e $y \geq b$, temos que $x - a \geq 0$ e $y - b \geq 0$.
Portanto,

$$0 \leq x - a \leq (x - a) + (y - b) = 0 \Rightarrow x - a = 0 \Rightarrow x = a.$$

Por outro lado,

$$0 \leq y - b \leq (x - a) + (y - b) = 0 \Rightarrow y - b = 0 \Rightarrow y = b.$$

□

Lema 4.2.3 *Dada uma lista de n termos a_1, a_2, a_3 , ..., a_n, se*

$$G = \sqrt[n]{a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}, \textit{ então:}$$

$$G = \sqrt[n+r]{a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n \underbrace{G\ G\ \cdots\ G}_{n\ vezes}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \underbrace{G + G + \cdots + G}_{n\ vezes}}{n+r}.$$

Demonstração: Como $G = \sqrt[n]{a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n} = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$,

$$G^n = a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n \text{ e } nG = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Então:

$$\sqrt[n+r]{a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n G^r} = \sqrt[n+r]{G^n G^r} = G = \frac{(n+r)G}{n+r} = \frac{nG + rG}{n+r} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + rG}{n+r}.$$

Portanto, o lema 4.2.3 fica provado. □

O lema 4.2.4 a seguir, mostra que a média geométrica não se altera, se inserirmos novos termos a uma lista, iguais a sua própria média geométrica.

Lema 4.2.4 *Seja a_1, a_2, ..., a_n uma lista de n números reais positivos. Pondo $G = \sqrt[n]{a_1\ a_2\ \cdots\ a_n}$, considere a lista aumentada a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2m}, com $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2m} = G$. Então:*

$$MG(2m) = \sqrt[2m]{a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_{2m}} = G = MG(n).$$

Demonstração: Como $G = \sqrt[n]{a_1\ a_2\ \cdots\ a_n}$, então $a_1 a_2 ... a_n = G^n$. Logo,

$$\sqrt[2m]{a_1\ a_2 \cdots\ a_n \underbrace{G\ G\ \cdots\ G}_{2m-n\ \ vezes}} = \sqrt[2m]{G^n G^{2m-n}} = G.$$

É possível provar que se $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais positivos, com $n \geq 2$, então:

$$\sqrt[n]{a_1\ a_2\ \cdots\ a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

ou seja,

$$MG(a_1, a_2, ..., a_n) \leq MA(a_1, a_2, .., a_n).$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. □

Apresentando agora uma segunda solução, considerando os lemas 4.2.2, 4.2.3 e 4.2.4 apresentados e demonstrados anteriormente.

Para o caso $n = 2$, temos

$$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 = a_1+a_2-2\sqrt{a_1\,a_2} \geq 0$$

Logo,

$$a_1+a_2 \geq 2\sqrt{a_1\,a_2}.$$

Portanto,

$$MA = \frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1\,a_2} = MG.$$

E ainda, se $MA = MG$, então,

$$\frac{a_1+a_2}{2} = \sqrt{a_1\,a_2} \Rightarrow (\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Vamos mostrar agora que se o resultado vale para todo $m = 2^k < n$, com $n \geq 3$, então o resultado também vale para n. Com efeito, dado um número natural $n \geq 3$, suponha que o resultado vale para todo $m = 2^k < n$ e seja $a_1, a_2, ..., a_n$ uma lista de n números reais positivos. Existe um número natural k tal que $m = 2^k < n \leq 2^{k+1} = 2m$. Pondo $G = \sqrt[n]{a_1\,a_2\,\cdots\,a_n}$, considere a lista aumentada com $2m$ números $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2m}$, com $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2m} = G$. Pelo Lema 4.2.4, a média geométrica da lista aumentada não muda, ou seja, $MG(2m) = MG(n) = G$. Sejam ainda $MA(n) = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ a média aritmética dos n números e $MA(2m)$ a média aritmética da lista aumentada com $2m$ números. Então

$$MA(2m) = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2m}}{2m} = \frac{a_1+a_2+\ \ +a_n+(2m-n)G}{2m} = \frac{nMA(n)+(2m-n)G}{2m}.$$

Temos ainda

$$MA(2m) = \frac{a_1+\cdots+a_{2m}}{2m} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}+\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}}{m}\right).$$

Recorrendo à hipótese feita sobre n, temos que a desigualdade vale para $m = 2^k$, logo

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m} \geq \sqrt[m]{a_1\,a_2\,\cdots\,a_m}$$

$$\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}}{m} \geq \sqrt[m]{a_{m+1}\,a_{m+2}\,\cdots\,a_{2m}}.$$

Portanto,

$$MA(2m) \geq \frac{\sqrt[m]{a_1\,a_2\,\cdots\,a_m}+\sqrt[m]{a_{m+1}\,a_{m+2}\,\cdots\,a_{2m}}}{2}.$$

Pelo caso $m = 2$, vem que

$$\frac{\sqrt[m]{a_1\,a_2\,\cdots\,a_m}+\sqrt[m]{a_{m+1}\,a_{m+2}\,\cdots\,a_{2m}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[m]{a_1\,\cdots\,a_m}\,\sqrt[m]{a_{m+1}\,\cdots\,a_{2m}}} = \sqrt{\sqrt[m]{a_1\,a_2\cdots a_{2m}}} =$$

$$\sqrt[2m]{a_1\cdots a_{2m}} = MG(2m) = G.$$

A última igualdade é decorrência do lema 4.2.4.

Portanto,

$$\frac{nMA(n)+(2m-n)G}{2m} = MA(2m) \geq G.$$

Daí,

$$MA(n) \geq G = MG(n).$$

Suponha agora que $MA(n) = MG(n)$.

Aplicando o Lema 4.2.3, teremos

$$MG(2m) = \sqrt[2m]{a_1 ... a_n \ a_{n+1} ... a_{2m}} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m}}{2m} = MA(2m).$$

Como,

$$\begin{aligned} MA(2m) &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m} + \frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}}{m}\right) \\ &\geq \frac{\sqrt[m]{a_1 \ a_2 \cdots a_m} + \sqrt[m]{a_{m+1} \ a_{m+2} \cdots a_{2m}}}{2} \\ &\geq \sqrt{\sqrt[m]{a_1 ... a_m}\ \sqrt[m]{a_{m+1} ... a_{2m}}} = MG(2m) \end{aligned}$$

e $MA(2m) = MG(2m)$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m} + \frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}}{m}\right) &\overset{(1)}{=} \frac{\sqrt[m]{a_1 \ a_2 \cdots a_m} + \sqrt[m]{a_{m+1} \ a_{m+2} \cdots a_{2m}}}{2} \\ &\overset{(2)}{=} \sqrt{\sqrt[m]{a_1 a_2 ... a_m}\ \sqrt[m]{a_{m+1} a_{m+2} ... a_{2m}}}. \end{aligned}$$

Da igualdade (1) e pelo lema 4.2.2,

$$\sqrt[m]{a_1 \ a_2 \cdots a_m} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m} \text{ e } \sqrt[m]{a_{m+1} \ a_{m+2} \cdots a_{2m}} = \frac{a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m}}{m}.$$

Como a igualdade vale para m por hipótese, então

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_m \ e \ a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_{2m} \tag{4.7}$$

Da igualdade (2) e como a igualdade vale para $m = 2$,

$$\sqrt[m]{a_1 \ a_2 \cdots a_m} = \sqrt[m]{a_{m+1} \ a_{m+2} \cdots a_{2m}} \tag{4.8}$$

Logo, de (4.5) e de (4.6), temos:

$$a_1 = \sqrt[m]{a_1 \ a_2 \cdots a_m} = \sqrt[m]{a_{m+1} \ a_{m+2} \cdots a_{2m}} = a_{2m}.$$

Com isso, $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = a_{m+1} = \cdots = a_{2m}$.
De modo particular, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Recorrendo agora ao Princípio da Boa Ordenação que conforme (EVARISTO; PERDIGAO, 2020) diz que todo subconjunto dos números naturais possui um menor elemento. Mostraremos que o resultado vale $\forall\ n \geq 2$. Suponha que o resultado seja falso para algum natural e sendo $n \geq 3$, o menor número natural tal que o resultado seja falso. Então, o resultado vale $\forall$ $m = 2^k < n$. Pelo que foi apresentado, valendo o resultado para $m = 2^k < n$, o resultado valeria para n, o que não ocorre. Logo, o resultado vale $\forall\ n \geq 2$. $\square$

Vale pontuar, o caso quando os termos são iguais, o que acarreta na igualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Dado $n \in \mathbb{N}$, tome uma lista de n termos $a_1, a_2, ..., a_n$. Suponha que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Logo,

$$MA(n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{na_1}{n} = a_1 = \sqrt[n]{(a_1)^n} = \sqrt[n]{a_1\ a_2 \cdots a_n} = MG(n).$$

Portanto, $MG(n) \leq MA(n)$ e a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. $\square$

Para (FORMIN, 2012), a desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica é extraordinária por duas razões. A primeira é que ela nos permite estimar a soma de dois números positivos em termos de seu produto. A segunda é que ela pode ser generalizada para mais de dois números. Aqui, por exemplo, está a desigualdade para quatro números positivos:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}, \text{ quaisquer que sejam } a, b, c, d \geq 0$$

onde, como de hábito, as expressões à esquerda e à direita da desigualdade são chamadas, respectivamente, a média aritmética e a média geométrica dos quatro números dados.

Esta versão da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica pode ser demonstrada da seguinte maneira:

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

para tanto, aplicamos , tão somente, a desigualdade entre as médias para dois números, duas vezes.

Uma importante técnica de resolução de problemas de desigualdade entre as médias, especialmente, entre as médias aritmética e geométrica é a de eliminar denominadores. Por exemplo, sejam a e b números reais positivos, tais que $a + b = 1$. Mostre que

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}.$$

Para resolvermos este exemplo, observe inicialmente que

$$\frac{a+1}{9}+\frac{b+1}{9}=\frac{1}{3}.$$

Desse modo,

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{1}{3}=\left(\frac{a+1}{9}+\frac{a^2}{a+1}\right)+\left(\frac{b+1}{9}+\frac{b^2}{b+1}\right).$$

Aplicando, agora, a desigualdade das médias, temos que

$$\left(\frac{a+1}{9}+\frac{a^2}{a+1}\right)+\left(\frac{b+1}{9}+\frac{b^2}{b+1}\right)\geq\frac{2a}{3}+\frac{2b}{3}.$$

Portanto,

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{1}{3}\geq\frac{2a}{3}+\frac{2b}{3}=\frac{2}{3}.$$

Neste caso, os denominadores $(a+1)$ e $(b+1)$ poderiam causar incômodos, por isso, precisamos somar frações cujos numeradores fossem $(a+1)$ e $(b+1)$, para que quando da aplicação da desigualdade entre as médias, numeradores e denominadores se cancelassem.

Para resolver problemas de desigualdades, é fundamental contar com técnicas e estratégias que escapem da aplicação direta dos conceitos e teoremas, as habilidades de calcular e estimar de forma rápida e precisa são essenciais.

Desigualdade entre as médias Geométrica e Harmônica

Para iniciar o estudo das desigualdades entre as médias geométrica e harmônica, considere os dois seguintes problemas.

Problema 22 *Dados dois números reais positivos a_1 e a_2, mostre que*

$$\sqrt{a_1a_2}\geq\frac{2}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}}.$$

Solução: Aplicando a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética para os números positivos $\dfrac{1}{a_1}$ e $\dfrac{1}{a_2}$, obtemos

$$\sqrt{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}}\leq\frac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}}{2},$$

logo, segue que,

$$\frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \leq \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}{2}.$$

Assim,

$$\sqrt{a_1 a_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}.$$

Portanto, concluimos que,

$$MG \geq MH.$$

□

Problema 23 (Caso geral das desigualdades entre as médias geométrica e harmônica) *Considere a_1, a_2, a_3, ..., a_n números reais positivos, então*

$$\sqrt[n]{a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n} \ \geq \ \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

e a igualdade só ocorre se $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

Solução: Aplicando a desigualdade $MA \geq MG$ para os números reais positivos $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \cdots, \frac{1}{a_n}$, obtemos:

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\frac{1}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}},$$

donde segue que:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n}}$$

$$\sqrt[n]{a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}}. \qquad (4.9)$$

Veja que a igualdade em (4.7) acarreta a igualdade $MA = MG$, que só ocorre se $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$. □

Desigualdade entre as médias Aritmética e Harmônica

Problema 24 *Sejam $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ números reais positivos, então*

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Solução: A demonstração desta desigualdade é imediata, uma vez que $MA \geq MG$ e $MG \geq MH$. Portanto, $MA \geq MH$, ou seja,

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Cabe observar que, de $MA \geq MH$, segue que,

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} &\geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \\ (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) &\geq n^2. \end{aligned}$$

$\square$

Desigualdade entre as médias Quadrática e Aritmética

Vamos analisar a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética, considerando inicialmente os problemas seguintes:

Problema 25 *Dados dois números positivos a_1 e a_2, mostre que*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} \geq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2$.

Solução: Conforme apresentado na seção 3 (Conhecimentos Preliminares). Sabemos que, dados a e b números reais não negativos, vale: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$. Logo, fazendo $a = a_1$ e $b = a_2$, em seguida, somando $a_1^2 + a_2^2$ a ambos os membros, obtemos

$$2(a_1^2 + a_2^2) \geq a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2,$$

de onde segue que,

$$a_1^2 + a_2^2 \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{2}.$$

Vamos multiplicar os dois membros desta desigualdade por $\frac{1}{2}$, obtendo

$$\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2) \geq \frac{1}{2}\frac{(a_1+a_2)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a_1^2+a_2^2}{2} \geq \frac{(a_1+a_2)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{a_1^2+a_2^2}{2} \geq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}} \geq \frac{a_1+a_2}{2}.$$

Portanto, concluimos que,

$$MQ \geq MA.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $(a_1-a_2)^2 = 0$, ou seja, só ocorre quando $a_1 = a_2$. $\square$

Problema 26 (Desigualdade entre as Médias Quadrática e Aritmética - Caso Geral) *Dados n números reais positivos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, tem-se*

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n},$$

ou seja,

$$MQ \geq MA.$$

Além do mais, a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

Solução: Sejam MA e MQ, as médias aritmética e quadrática dos termos a_i, com $i \in \{1,2,3,...,n\}$, respectivamente.

Sabe-se que $0 \leq (a_i - MA)^2$. Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i-MA)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2MA \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i + n \cdot (MA)^2 \\ &= n(MQ)^2 - 2 \cdot MA \cdot n \cdot MA + n(MA)^2 \\ &= n(MQ)^2 - n(MA)^2 \\ &= n[(MQ)^2 - (MA)^2]. \end{aligned}$$

Portanto, temos $n[(MQ)^2 - (MA)^2] \geq 0$, o que resulta em $(MQ)^2 \geq (MA)^2$. Concluímos, portanto que

$$MQ \geq MA.$$

E ainda, a igualdade vale se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n}(a_i - MA)^2 = 0$. Com isso, devemos ter, para todo $i \in \{1,2,3,...,n\}$, $a_i = MA$. O que significa que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = MA$. $\square$

Desigualdade entre as médias Harmônica, Geométrica, Aritmética e Quadrática

Para todo conjunto de n números reais positivos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, tem-se

$$MQ \geq MA \geq MG \geq MH$$

Além disso, em cada caso, a igualdade ocorre se, e somente se,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

Tais desigualdades já foram demonstradas anteriormente e trata-se de um importante teorema matemático que nos fornece inúmeras aplicações em diferentes áreas e é uma extraordinária ferramenta na resolução de problemas.

4.2.1 Aplicações

Os problemas aqui apresentados, bem como as suas soluções, com algumas adaptações, foram retirados de (GOMES; GOMES, 2010), (SICHINEL, 2022) e (SILVA, 2019a). Nestas obras é possível encontar uma série de outros problemas igualmente interessantes.

Problema 27 *Seja x um número real positivo. Prove que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.*

Solução: Pela Desigualdade das Médias,

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1, \text{ isto é, } x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

□

Problema 28 *(OBM 2021). Prove que $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ para quaisquer números reais positivos a, b e c.*

Solução: Observe que podemos reescrever o lado esquerdo da desigualdade como,

$$(a+b)(a+c) = bc + a^2 + ab + ac = bc + a(a+b+c).$$

Aplicando a desigualdade entes as média a bc e $a(a+b+c)$, vemos que,

$$bc + a(a+b+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Portanto, fica provado que

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

□

Problema 29 *Dados a, b e c números reais positivos tais que* $abc = 1$, *mostre que*

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

Solução: Aplicaremos a Desigualdade das Médias a cada um dos numeradores, veremos que

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} + \frac{2\sqrt{ca}}{\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}.$$

Reordenando e aplicando a Desigualdade das Médias a cada uma das parcelas, ficamos com

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} + \frac{2\sqrt{ca}}{\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}} &= \left(\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{b}}\right) + \left(\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}\right) + \left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}\right)\\ &\geq 2\sqrt{c} + 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}.\end{aligned}$$

Por fim, recorreremos à condição expressa no enunciado e aplicando a Desigualdade das Médias a $\sqrt{c}$, $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$, para obtermos

$$2\sqrt{c} + 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} \geq \sqrt{c} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + 3\sqrt[3]{\sqrt{abc}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

□

Problema 30 *Se* $x, y, z > 0$. *Prove que:*

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Solução: Como $x, y, z > 0$, podemos recorrer à desigualdade entre as médias aritmética e harmônica. Logo:

$$\begin{aligned}\frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{3} &\geq \frac{3}{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}}\\ 2(x+y+z) &\geq \frac{9}{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}}\\ 2\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) &\geq \frac{9}{x+y+z}\\ \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} &\geq \frac{9}{x+y+z}\end{aligned}$$

E a igualdade vale se, e somente se, $x+y = y+z = z+x \Leftrightarrow x = y = z$.

□

Problema 31 *Sejam $x > 0$ e $y > 0$ números reais tais que $x + y = 2$. Mostre que $x \cdot y \leq 1$.*

Solução: Aplicaremos a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética aos termos x e y. Logo, teremos:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}.$$

Como $x + y = 2$, então

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2.$$

Sabemos que,

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Como $x + y = 2$, temos

$$x^2 + y^2 = 2^2 - 2xy = 4 - 2xy.$$

Portanto,

$$x^2 + y^2 \geq 2 \Rightarrow 4 - 2xy \geq 2 \Rightarrow 2xy \leq 2 \Rightarrow xy \leq 1.$$

E $xy = 1$ se, e só se, $x = y = 1$. □

Problema 32 *Prove que dado um triângulo retângulo qualquer, a altura relativa à hipotenusa é menor ou igual à metade da hipotenusa.*

Solução: Tome um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a. Seja m a projeção do lado c sobre a hipotenusa e n a projeção do lado b sobre a hipotenusa, conforme a figura 17 abaixo:

Temos $m + n = a$. Sabemos que todos os segmentos a, b, c, m e n são necessariamente positivos. Com isso, podemos aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica, obtendo:

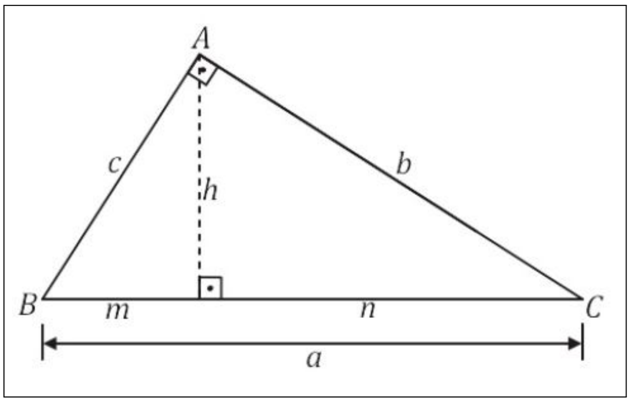
$$\sqrt{m \cdot n} \leq \frac{m + n}{2}.$$

Por semelhança de triângulos, obtemos a seguinte relação métrica no triângulo retângulo:

$$h^2 = m \cdot n.$$

Aplicando esta relação na desigualdade entre as médias, temos:

Figura 17 – Triângulo Retângulo



Fonte: Elaborada pelo o autor

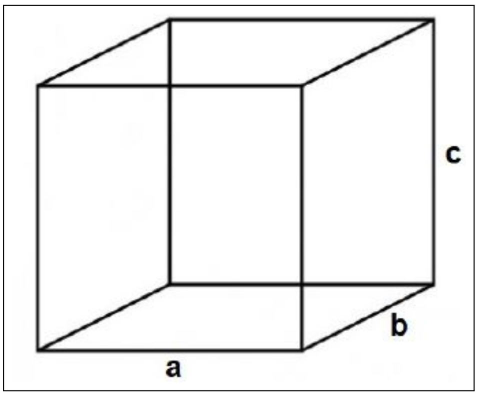
$$\sqrt{m \cdot n} \leq \frac{m+n}{2} \Rightarrow \sqrt{h^2} \leq \frac{m+n}{2} \Rightarrow h \leq \frac{m+n}{2} = \frac{a}{2}.$$

Portanto, é possível concluir que a altura relativa à hipotenusa é menor ou igual à metade da hipotenusa. □

Problema 33 *O volume de um paralelepípedo é* $216cm^3$ *e sua área total é* $216cm^2$*. Prove que o paralelepípedo é um cubo.*

Solução: Considere o paralelepípedo, conforme o da figura 18 abaixo, onde o comprimento = a, largura = b e altura = c.

Figura 18 – Paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo o autor

Sabemos que o volume V do paralelepípedo é dado por:

$$V = a \cdot b \cdot c = 216.$$

Sabemos, também, que a área total é dada por:

$$A_t = 2 \cdot (ab+ac+bc) = 216 \Rightarrow ab+ac+bc = 108.$$

Aplicando a desigualdade entre as médias geométrica e harmônica, teremos:

$$MG \geq MH \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3 \cdot abc}{ab+bc+ac} = \frac{3abc}{108} = \frac{abc}{36}$$

$$\Rightarrow 36 \geq \frac{abc}{\sqrt[3]{abc}} = (abc)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow abc \leq 6^3 = 216.$$

Mas, como $V = abc = 216$, então a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c = 6$.

Portanto, conclui-se que o paralelepípedo é um cubo de aresta medindo $6cm$. □

Problema 34 *Determinar o valor máximo da função* $f(x) = sen(x) + cos(x)$, *com* $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Solução: O domínio da função é $0 < x < \frac{\pi}{2}$, com isso temos que $sen(x) > 0$ e $cos(x) > 0$. Logo, podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática aos termos $sen(x)$ e $cos(x)$.

$$\frac{sen(x)+cos(x)}{2} \leq \sqrt{\frac{sen^2(x)+cos^2(x)}{2}}.$$

Utilizando a Relação Fundamental da Trigonometria (RFT) conforme (IEZZI, 2004), temos:

$$sen(x)+cos(x) \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $sen(x) = cos(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$. Portanto, o valor máximo da função é $\sqrt{2}$, ou seja, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. □

Problema 35 *De todos os triângulos com perímetro fixo L, qual é o de maior área?*

Solução:

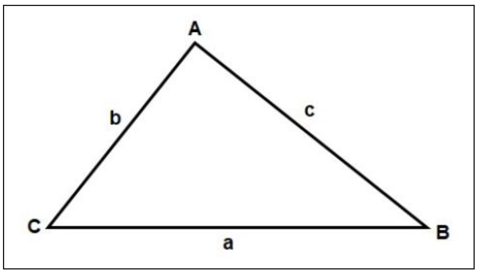
Considere um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, conforme ilustrado, na figura 19, cujo perímetro $L = a+b+c = 2p$ fixo e semiperímetro $p = \frac{L}{2}$.

Pela fórmula de Heron (PAULANTI, 2014), a área do triângulo $\triangle ABC$ é dada por:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Como queremos maximizar a área com perímetro constante, devemos maximixar o termo $(p-a)(p-b)(p-c)$. Como todos os termos $(p-a)$, $(p-b)$ e $(p-c)$ são positivos, podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, tal que:

Figura 19 – Triângulo ABC



Fonte: Elaborada pelo o autor

$$\frac{p-a+p-b+p-c}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$\frac{3p-2p}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq (p-a)(p-b)(p-c)$$
$$\frac{p^4}{3^3} \geq p(p-a)(p-b)(p-c) = A^2$$
$$\frac{p^2}{3\sqrt{3}} \geq A \Rightarrow A \leq \frac{L^2}{12\sqrt{3}}.$$

Logo, temos que a área máxima é $A = \dfrac{L^2}{12\sqrt{3}}$ e ocorre se, e somente se, $a = b = c$. Portanto, podemos concluir que de todos os triângulos com o mesmo perímetro, o de área máxima é o triângulo equilátero. □

Problema 36 *Se a, b e c são números reais tais que $a+b+c=1$, mostre que*

$$P = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

Solução: Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade, obtemos:

$$P = 1 + \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) + \frac{1}{abc}. \ (I)$$

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{abc}}.$$

Fazendo $\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}} = q$, segue que $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq 3q$. Da mesma forma,

$$\frac{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} = q^2 \Rightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \geq 3q^2,$$

tomando $\frac{1}{abc} = q^3$. Logo, podemos reescrever (I), como:

$$P \geq 1+3q+3q^2+q^3 = (1+q)^3. \ (II)$$

Por fim, usando a informação que $a+b+c=1$, temos

$$\frac{1}{3} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \frac{1}{q} \Rightarrow q \geq 3.$$

Portanto, em (II), conclui-se que $P \geq (1+3)^3 = 64$, ou seja, $P \geq 64$. □

Problema 37 *(ITA/2002 - Adaptado) Mostre que:*

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4} \ com\ x,\ y > 0.$$

Solução: Sabendo que $x,\ y > 0$, temos $\frac{x}{y} > 0$ e $\frac{y}{x} > 0$, aplicando de imediato a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica $MA \geq MG$, para os números $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$ teremos:

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$$

Com isso,

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\right)^4 \geq (2+2)^4 = 256 > C_{8,4} = 70.$$

□

4.3 CAUCHY-SCHWARZ

A desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz é também conhecida como desigualdade de Cauchy e/ou desigualdade Schwarz. Porém, é mais conhecida no meio matemático como desigualdade de Cauchy-Schwarz. Cada um dos matemáticos que compõem o nome abordou a desigualdade segundo sua própria vertente. Augustin Cauchy, matemático francês (1789-1857), defendeu a sua aplicação às somas infinitas. Já Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, matemático russo (1804-1889) focou na alicação a integrais, enquanto Hermann Amandus

Schwarz, matemático alemão (1843-1921) trabalhou com esta desigualdade em problemas de otimização (BRITO, 2016).

Esta desigualdade é aplicável contextos mais avançados da matemática, como na análise e na probabilidade, aparece ainda no meio olímpico, assim como a desigualdade entre as médias, tratada anteriormente, ela aparece frequentemente em contextos que envolvem raízes e/ou frações (SICHINEL, 2022).

Teorema 4.3.1 *(Cauchy-Schwarz). Se $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ são números reais quaisquer,*

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se:
(i) *Os x são todos iguais a zero ou;*
(ii) *Existe um número real λ tal que $y_i = \lambda x_i \ \forall \ i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Antes de demonstrar a desigualdade de Cauchy-Schwarz é interessante enunciarmos e demonstrarmos o seguinte corolário, conhecido na literatura como Lema de Titu. Em muitos problemas podemos preferi-lo à desigualdade de Cauchy-Schwarz (SICHINEL, 2022).

Lema 4.3.1 *(Lema de Titu). Se $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais e $b_1, b_2, ..., b_n$ são números reais positivos, então*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Demonstração: Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ conforme acima. Aplicando a deigualdade de Cauchy-Schwarz a $\left(\dfrac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \dfrac{a_2}{\sqrt{b_2}}, ..., \dfrac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)$ e $(\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, ..., \sqrt{b_n})$, encontramos que

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Analisando o caso da igualdade, temos: Como $b_1 + b_2 + ... + b_n$ são números positivos, suas raízes são diferentes de zero. Logo, pelo teorema da desigualdade de Cauchy-Schwarz, para que tenhamos a igualdade, deve existir uma constante λ tal que

$$\frac{a_i}{\sqrt{b_i}} = \lambda \sqrt{b_i}, \forall \ i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Daí, vem que

$$\frac{a_i}{b_i} = \lambda, \forall\, i \in \{1,2,...,n\}.$$

Observe que a recíproca, também, será verdadeira, se:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n},$$

podemos chamar esse valor de λ, e aí teremos

$$\frac{a_i}{\sqrt{b_i}} = \lambda\sqrt{b_i}, \forall\, i \in \{1,2,...,n\}.$$

o que nos leva à igualdade na desigualdade que aplicamos e, consequentemente, na desigualdade que mostranmos, ou seja, no Lema 4.3.1 (Lema de Titu). □

Finalmente podemos tratar da demonstração do teorema em questão. Apresentaremos aqui, duas demonstrações distintas, com o objetivo de proporcionar ao leitor mais opções no tratamento do assunto.

Demonstração 1: A desigualdade de Cauchy-Schwarz é homogênea, não apenas nas variáveis dadas, mas é homogênea, também, em $(x_1,x_1,...,x_n)$ e $(y_1,y_2,...,y_n)$ separadamente. Isto é, se multiplicarmos cada um dos x por uma certa constante $t > 0$, tanto o valor do lado esquerdo, quanto o do lado direito da desigualdade são multiplicados por t^2, e o mesmo acontece se multiplicarmos cada uma das variáveis y por t.

Deste modo, se $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ e $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$ são não nulos, podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$.

De fato, conforme a observação que acabamos de fazer, demonstrar a desigualdade para $(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n)$ é o mesmo que demonstar a desigualdade para

$$\left(\frac{x_1}{s_1},\frac{x_2}{s_1},...,\frac{x_n}{s_1},\frac{y_1}{s_2},\frac{y_2}{s_2},...,\frac{y_n}{s_2}\right)$$

sendo que

$$s_1 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \text{ e } s_2 = y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$

Agora, se

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0,$$

então

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

e ambos os lados da desigualdade são iguais a zero. Contudo, se

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=0,$$

então

$$y_1=y_2=\cdots=y_n$$

e, mais uma vez, as quantidades comparadas no enunciado do teorema se anulam. Podemos, então, supor que

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \text{ e } y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$$

não são nulos e, assim, que

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1.$$

Sob essa nova hipótese, queremos mostrar que

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\leq 1.$$

Observe que, aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica a (x_i^2,y_i^2), obtemos

$$\frac{x_i^2+y_i^2}{2}\geq\sqrt{x_i^2y_i^2}=|x_iy_i|.$$

Recorrendo a desigualdade triangular e à desigualdade acima, para todos os valores possíveis de i, encontramos que

$$\begin{aligned}|x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n| &\leq |x_1y_1|+|x_2y_2|+\cdots+|x_ny_n|\\ &\leq \frac{x_1^2+y_1^2}{2}+\frac{x_2^2+y_2^2}{2}+\cdots+\frac{x_n^2+y_n^2}{2}\\ &=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\\ &=1.\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade fica demonstrada.

Analisando os casos de igualdade, percebemos que a igualdade ocorre quando tivermos igualdade na desigualdade triangular e em cada uma das desigualdades entre as médias aritméticas e geométricas que aplicamos anteriormente. Para tanto, se faz necessário e suficiente que x_iy_i tenha o mesmo sinal para todos os índices i, e que $x_i^2=y_i^2\ \forall\ i\in\{1,2,...,n\}$. Mas isso, considerando que $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1$. No caso geral, inicialmente substituimos $(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)$ por $\left(\frac{x_1}{s_1},...,\frac{x_n}{s_1},\frac{y_1}{s_2},...,\frac{y_1}{s_2}\right)$. Portanto, no caso geral, a condição de iguadade será

$$\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}} \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}} \text{ se tem o mesmo sinal } \forall\, i, \text{ e}$$
$$\frac{x_i^2}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} = \frac{y_i^2}{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2} \;\forall\, i \in \{1,2,...,n\}.$$

Em outras palavras, $y_i = \pm\frac{\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}x_i \;\forall\, i \in \{1,2,...,n\}$, e o sinal deve ser o mesmo para todos os índices. Isso mostra que $\lambda := \pm\frac{\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}$ é tal que $y_i = \lambda x_i \;\forall$ $i \in \{1,2,...,n\}$.

É obvio que tudo isso só tem sentido, dentro da suposição de que $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ e $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$ sejam números reais não nulos. Caso uma dessas quantias seja zero, todas as variáveis expressas nela também serão zero e, com isso, teremos ou $y_i = \lambda x_i \;\forall\, i \in \{1,2,...,n\}$ com $\lambda = 0$, ou $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. $\square$

Demonstração 2: Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ números reais. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(x_1+\lambda y_1)^2 + (x_2+\lambda y_2)^2 + \cdots + (x_n+\lambda y_n)^2 \geq 0.$$

Podemos enxergar essa expressão como uma função em λ. Estaremos, então, lidando com um polinômio quadrático que, se fizermos a expansão, teremos

$$(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\lambda^2 + 2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\lambda + (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2).$$

Sendo esse polinômio não negativo $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, a parábola relativa ao seu gráfico não cruza o eixo das abscissas, toca-o em no máximo um ponto, ou seja, o polinômio tem no máximo uma raíz real. Logo, o seu discriminante (delta) será menor que ou igual a zero. O delta do polinômio é

$$[2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)]^2 - 4(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2).$$

Logo,

$$[2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)]^2 \leq 4(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2),$$

ou seja,

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2 \leq (y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, o polinômio tem uma única raiz real, isto é, se, e somente se,

$$(x_1+\lambda y_1)^2+(x_2+\lambda y_2)^2+\cdots+(x_n+\lambda y_n)^2=0$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Essa última igualdade só será possível se cada um dos termos entre parênteses for nulo, e isso, por sua vez, ocorre, tão somente, quando ou $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ e $\lambda=0$, ou $y_i=-\dfrac{x_i}{\lambda}$ $\forall\, i \in \{1,2,...,n\}$. □

4.3.1 Aplicações

Os problemas aqui apresentados são baseados no livro do (SICHINEL, 2022) sobre desigualdades nas principais olimpíadas de matemática. Os problemas escolhidos têm como solução aplicações imediatas da desigualdade 4.3.1, desigualdade de Cauchy-Schwarz e no Lema 4.3.1 (Lema de Titu).

Problema 38 *Sejam $a_1,...,a_n$ reais positivos. Prove que*

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geq 0$$

Solução: Como os números são todos positivos, podemos trabalhar com as raízes deles. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz 4.3.1 às sequências $\sqrt{a_1},...,\sqrt{a_n}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}},...,\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$, obtemos

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geq\left(\sqrt{a_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\cdots+\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2=n^2.$$

□

Problema 39 *Sejam a, b, c e d números reais positivos. Prove que*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Solução: Aplicando o Lema 4.3.1 (Lema de Titu), vemos que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}=\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d}\geq\frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}=\frac{64}{a+b+c+d},$$

como queríamos. □

Problema 40 *Dados os reais positivos a, b e c. Mostre que*

$$\sqrt{3a^2+ab}+\sqrt{3b^2+bc}+\sqrt{3c^2+ca}\leq 2(a+b+c).$$

Solução: Aplicando Cauchy-Schwarz 4.3.1 às sequências $(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})$ e $(\sqrt{3a+b},\sqrt{3b+c},\sqrt{3c+a})$, vemos que

$$(\sqrt{3a+b}\cdot\sqrt{a}+\sqrt{3b+c}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{3c+a}\cdot\sqrt{c})^2 \leq$$
$$(\sqrt{3a+b}^2+\sqrt{3b+c}^2+\sqrt{3c+a}^2)(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+\sqrt{c}^2),$$

isto é,

$$\begin{aligned}(\sqrt{3a^2+ab}+\sqrt{3b^2+bc}+\sqrt{3c^2+ca})^2 &\leq (3a+b+3b+c+3c+a)(a+b+c)\\ &= (4a+4b+4c)(a+b+c)\\ &= 4(a+b+c)^2.\end{aligned}$$

Extraindo a raíz, ficamos com

$$\sqrt{3a^2+ab}+\sqrt{3b^2+bc}+\sqrt{3c^2+ca} \leq 2(a+b+c).$$

□

Problema 41 *Sejam $a_1,a_2,...,a_n$ e $b_1,b_2,...,b_n$ números reais positivos tais que $a_1+a_2+\cdots+a_n = b_1+b_2+\cdots+b_n$. Prove que*

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}.$$

Solução: Pelo Lema 4.3.1 (Lema de Titu), vem que

$$\begin{aligned}\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} &\geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots+a_n+b_n}\\ &= \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)}\\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\\ &= \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.\end{aligned}$$

□

Problema 42 *Sejam a, b e c números reais. Prove que*

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.$$

Solução: Podemos escrever a desigualdade de forma equivalente, como

$$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca),$$

que por sua vez é equivalente a

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)^2.$$

Essa comparação entre a soma dos quadrados e o quadrado da soma é que nos dá a desigualdade de Cauchy-Schwarz 4.3.1 aplicada às sequências (a,b,c) e $(1,1,1)$. De fato, se $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$ e $y_1 = y_2 = y_3 = 1$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos diz que:

$$(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2) \geq (a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1),$$

isto é,

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2.$$

□

Problema 43 *(Nesbitt). Sejam a, b e c reais positivos. Prove que*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Solução: Usaremos o Lema 4.3.1 (Lema de Titu), para demonstrarmos de forma simples a famosa desigualdade de Nesbitt. Vejamos que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}.$$

Aplicando o Lema 4.3.1 (Lema de Titu) a (a,b,c) e $(ab+ac, bc+ba, ca+cb)$,

$$\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Agora,

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca).$$

De fato,

$$(a+b+c)^2 = 2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2) \text{ e } a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

conforme problema anterior. Logo,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb} \geq$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}.$$

□

4.4 BERNOULLI

Continuando o estudo sobre desigualdades, será apresentada agora a desigualdade de Bernoulli, cujo nome é uma referência aos irmãos Bernoulli, os suíços Jacob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), esta desigualdade é bastante útil na resolução de inúmeros problemas clássicos.

Teorema 4.4.1 (Bernoulli - Caso 1) *Sejam $x \geq 0$ um número real e $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Demonstração: Pelo desenvolvimento do Binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 1^{n-i} \cdot x^i \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \\
&= 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.
\end{aligned}$$

Mas, como $x \geq 0$, temos que

$$\binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \geq 0.$$

Então,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \quad \geq 1+nx.$$

Observe que se $n \geq 2$ e $x > 0$, temos

$$\binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n > 0,$$

de modo que a desigualdade é estrita, ou seja, $(1+x)^n > 1+nx$. □

Teorema 4.4.2 (Bernoulli - Caso 2) *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e x um número real tal que $x > -1$. Então,*

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Demonstração: Usaremos indução sobre n para demonstrar tal desigualdade. Se $n = 1$, temos a igualdade $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$, logo a desigualdade de Bernoulli é verdadeira neste caso.

Vamos admitir, como hipótese de indução, que a desigualdade é verdadeira para $n = k$, ou seja, que $(1+x)^k \geq 1+kx$ para todo real $x > -1$. Mostraremos que ela continua verdadeira para $n = k+1$, ou seja, que $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$, para todo real $x > -1$.

De fato, como $x > -1$, temos $x+1 > 0$. Além disso, utilizando a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k \cdot (1+x)\\ &\geq (1+kx)(1+x)\\ &= 1+x+kx+kx^2\\ &\geq 1+x+kx\\ &= 1+(k+1)x.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.4.3 (Bernoulli - Caso Geral) *Sejam $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,...,n$ tais que $x_i > -1$, para todo $i \in \{1,2,...,n\}$ e têm o mesmo sinal. Então,*

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

Demonstração: Provaremos este resultado usando o Princípio de Indução Finita.

(i) Para $n = 1$, temos:

$$1+x_1 \geq 1+x_1. \tag{4.10}$$

(ii) Suponhamos que, para algum k natural maior do que 1 e para quaisquer $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,...,k\}$ com o mesmo sinal, seja verdadeira a desigualdade 4.10, ou seja,

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_k) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k.$$

Para completar a prova, vamos verificar que o resultado é válido para $n = k+1$. Sejam, então, $x_i > -1$, $i \in \{1,...,k+1\}$, números reais quaisquer com o mesmo sinal. Então, como x_1, x_2, ..., x_{k+1} têm o mesmo sinal, segue que:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)x_{k+1} \geq 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1}) &\geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\ &= (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}+x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}\\ &= 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+(x_1+x_2+\cdots+x_k)x_{k+1}\\ &\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}.\end{aligned}$$

Por fim, temos que, pelo Princípio da Indução Finita, para $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,...,n\}$, tais que $x_i > -1$ e têm o mesmo sinal, a desigualdade 4.10 é verdadeira. $\square$

4.4.1 Aplicações

Os problemas apresentados neste tópico de aplicações da Desigualdade de Bernoulli, são baseados essencialmente em (CUNHA NETO, 2014), (FORMIN, 2012) e (ARAUJO JUNIOR, 2018), onde o estudo sobre o tema pode ser aprofundado. A escolha pelos problemas a seguir foi baseada na possibilidade de aplicação imediata dos resultados anteriormente vistos.

Problema 44 *Qual é o maior dentre os números* $2^{100}+3^{100}$ *e* 4^{80}*?*

Solução: A princípio, note que

$$2^{100}+3^{100} < 3^{100}+3^{100} = 2\cdot 3^{100}.$$

Iremos mostrar que $4^{80} > 2\cdot 3^{100}$, pois

$$4^{80} > 2\cdot 3^{100} > 2^{100}+3^{100}.$$

O que falta é equivalente a mostrar que $\dfrac{4^{80}}{3^{100}} > 2$. Para tanto, como

$$\frac{4^{80}}{3^{100}} = \left(\frac{4^4}{3^5}\right)^{20} = \left(\frac{256}{243}\right)^{20},$$

precisamos mostrar que $\left(\dfrac{256}{243}\right)^{20} > 2$. Para tanto, iremos utilizar a desigualdade de Bernoulli 4.4.3:

$$\begin{aligned}\left(\frac{256}{243}\right)^{20} &= \left(\frac{243+13}{243}\right)^{20}\\ &= \left(1+\frac{13}{243}\right)^{20}\\ &\geq 1+20\cdot\frac{13}{243}\\ &= 1+\frac{260}{243}\\ &> 1+1\\ &= 2.\end{aligned}$$

$\square$

Problema 45 *Dados n natural e a e b reais positivos, mostre que*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a=b$.

Solução: Vamos dividir os dois membros da desigualdade $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$, por 2^n. Daí, vemos que basta provar que

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n \geq 2.$$

Como $-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}>-1$ e $-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}>-1$, aplicaremos a Desigualdade de Bernoulli 4.4.3 a cada parcela do primeiro membro acima e somaremos os resultados, o que nos leva a,

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n \geq 2+n\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-1\right).$$

Basta, agora, aplicarmos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, para obtermos:

$$\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-1 \geq 2\sqrt{\frac{a}{2b}\cdot\frac{b}{2a}}-1=0,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $\frac{a}{2b}=\frac{b}{2a}$, i.e., se, e só se, $a=b$. □

Problema 46 *Mostre que a função exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=a^x$, com $a>1$, é ilimitada superiormente, isto é, dado um número real $\alpha>0$, existe $x\in\mathbb{R}$, tal que $a^x>\alpha$.*

Solução: De fato, como $a>1$, existe um número real $b>0$ tal que $a=1+b$.
Tomando $n\in\mathbb{N}$ tal que $n>\frac{\alpha-1}{b}$, tem-se:

$$n>\frac{\alpha-1}{b}\Rightarrow 1+nb>\alpha.$$

Logo, tomando $x\in\mathbb{R}$ tal que $x>n$, tem-se que:

$$a^x=(1+b)^x>(1+b)^n\geq 1+nb>\alpha.$$

Portanto, temos que a função exponencial de base $a>1$ é ilimitada superiormente. □

Problema 47 *Sejam x e y números reais positivos. Prove que a desigualdade abaixo é verdadeira*

$$x^y+y^x\geq 1.$$

Solução: Vamos, incialmente, mostrar que para $a,b\in(0,1)$ vale a desigualdade

$$a^b\geq\frac{a}{a+b-ab}.$$

Pela Desigualdade de Bernoulli 4.4.3, temos

$$a^{1-b} = (1+a-1)^{1-b} \leq 1+(a-1)(1-b) = a+b-ab,$$

isto é,

$$a^b \geq \frac{a}{a+b-ab}.$$

De modo análogo, temos:

$$b^a \geq \frac{b}{a+b-ab}.$$

No caso em que $0 < x, y < 1$, pelas desigualdades acima, temos:

$$x^y + y^x \geq \frac{x}{x+y-xy} + \frac{y}{x+y-xy} = \frac{x+y}{x+y-xy} > \frac{x+y}{x+y} = 1.$$

No caso em que $x \geq 1$ ou $y \geq 1$, é fácil ver que a desigualdade $x^y + y^x > 1$ é sempre verdadeira. Portanto, temos que para quaisquer x e y números reais positivos, tem-se:

$$x^y + y^x > 1.$$

Como queríamos mostrar. □

4.5 JENSEN

A Desigualdade de Jensen é outra importante desigualdade que vale a pena ser abordada aqui, pois ela é a chave para resolver inúmeros problemas envolvendo funções contínuas. A denominação Desigualdade de Jensen é uma homenagem ao matemático dinamarquês Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925). Serão apresentadas aqui a definição, demonstração e algumas aplicações da famosa desigualdade, precedidas dos conceitos de função convexa e função côncava.

Definição: Uma função f de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ é dita convexa se a região sobre seu gráfico, ou seja, o conjunto

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq f(x)\right\}$$

for um conjunto convexo. Isto equivale a afirmar que para quaisquer x e y pertencentes a $[a,b]$ e para todo $t \in [0,1]$ tem-se

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y).$$

Por outro lado, se tivermos:

$$f(tx+(1-t)y) \geq tf(x)+(1-t)f(y),$$

dizemos que a função é côncava.

Teorema 4.5.1 *Sejam I um intervalo de reta e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Se $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ e $y_1, y_2, ..., y_n \in [0,1]$, com $y_1+y_2+\cdots+y_n = 1$, então $x_1y_1+\cdots+x_ny_n \in I$, e além disso:*
(i) f convexa $\Rightarrow f(x_1y_1+\cdots+x_ny_n) \leq y_1f(x_1)+\cdots+y_nf(x_n)$;
(ii) f côncava $\Rightarrow f(x_1y_1+\cdots+x_ny_n) \geq y_1f(x_1)+\cdots+y_nf(x_n)$.

Demonstração: Faremos a demonstração por meio do princípio da indução matemática sobre $n > 1$, para o caso em que f é convexa, sendo o outro caso análogo. Por definição, temos o caso $n = 2$. Suponha agora que para um certo $n > 1$ e todos,

$$x_1, x_2, ..., x_n \in I \text{ e } y_1, y_2, ..., y_n \in [0,1],$$

com $y_1+y_2+\cdots+y_n = 1$, tenhamos

$$x_1y_1+\cdots+x_ny_n \in I \text{ e } f(x_1y_1+\cdots+x_ny_n) \leq y_1f(x_1)+\cdots+y_nf(x_n).$$

Considere agora,

$$x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \in I \text{ e } y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1} \in [0,1],$$

com $y_1+y_2+\cdots+y_n+y_{n+1} = 1$. Se $y_{n+1} = 1$ então $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ e nada há a fazer. Se não, defina:

$$\lambda = \frac{x_1y_1+\cdots+x_ny_n}{1-y_{n+1}} = s_1x_1+\cdots+s_nx_n,$$

onde, $s_i = \dfrac{y_i}{1-y_{n+1}}$, $i = 1,2,...,n$. Como

$$s_1+\cdots+s_n = 1,$$

vem da hipótese de indução que $\lambda \in I$.Daí, teremos que

$$\begin{aligned} f(x_1y_1+\cdots+x_ny_n+x_{n+1}y_{n+1}) &= f((1-y_{n+1})\left(\frac{x_1y_1+\cdots+x_ny_n}{1-y_{n+1}}\right)+y_{n+1}x_{n+1}) \\ &= f((1-y_{n+1})\lambda+y_{n+1}x_{n+1}) \\ &\leq (1-y_{n+1})f(\lambda)+y_{n+1}f(x_{n+1}). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Já que f é convexa, aplicando a outra metade da hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} f(\lambda) = f(x_1s_1 + \cdots + x_ns_n) &\leq s_1f(x_1) + \cdots + s_nf(x_n) \\ &= \frac{y_1}{1-y_{n+1}}f(x_1) + \cdots + \frac{y_n}{1-y_{n+1}}f(x_n). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Reunindo as desigualdades 4.11 e 4.12, obtemos

$$f(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n + x_{n+1}y_{n+1}) \leq y_1f(x_1) + \cdots + y_nf(xn) + y_{n+1}f(x_{n+1}).$$

Portanto, por indução, temos que se f é convexa, então

$$f(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \leq y_1f(x_1) + \cdots + y_nf(x_n).$$

□

4.5.1 Aplicações

Os problemas aqui apresentados foram baseados em (CAMPELO, 2013), (SOUSA, 2020) e (SILVA, 2019b). Nestes trabalhos é possível encontrar uma série de outros problemas cuja solução recaem na importante desigualdade de Jensen.

Problema 48 *(Olimpíada indiana/1995). Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos cuja soma é* 1. *Prove que:*

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Solução: Tome a função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ definida no intervalo $(0,1)$. Derivando-a duas vezes, obtemos:

$$f''(x) = (1-x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3x}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}} \geq 0.$$

Logo, f é convexa no intervalo $(0,1)$, conforme (DELFINO, 2010). Então, podemos aplicar a desigualdade de Jensen 4.5.1:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Temos, portanto, que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

□

Problema 49 *(Desigualdade de Young). Sejam p e q reais positivos tais que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Prove que para quaisquer x e y reais positivos, temos*

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

Solução: Como a função logaritmo natural $f(x) = ln(x)$ é côncava, pela desigualdade de Jensen 4.5.1, temos:

$$f\left(x\frac{1}{p}+y\frac{1}{q}\right) \geq \frac{1}{p}f(x)+\frac{1}{q}f(y),$$

uma vez que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Daí, segue que:

$$ln\left(x\frac{1}{p}+y\frac{1}{q}\right) \geq \frac{1}{p}ln(x)+\frac{1}{q}ln(y) \Leftrightarrow ln\left(x\frac{1}{p}+y\frac{1}{q}\right) \geq ln\left(x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\right).$$

Logo,

$$x\frac{1}{p}+y\frac{1}{q} \geq x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}.$$

Por outro lado,

$$xy = (x^p)^{\frac{1}{p}}(y^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Portanto, recorrendo à desigualdade anterior, temos que

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

□

Problema 50 *Considere* α, β *e* γ *as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer ABC. Então,*

$$sen\alpha + sen\beta + sen\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

E ainda, a igualdade ocorre se, e somente se o triângulo ABC é equilátero.

Solução: A função contínua $f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = senx$. Note que $f''(x) = -senx$ e que $senx > 0$, $\forall x \in (0,\pi)$. Portanto, $f''(x) < 0$ o que nos garante que f é uma função côncava (SILVA, 2019b). Logo, pela desigualdade 4.5.1 temos que $\forall x_1, x_2, x_3 \in (0,\pi)$ e $t_1, t_, t_3 \in (0,1)$,

$$t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+t_3f(x_3) \leq f(t_1x_1+t_2x_2+t_3x_3).$$

Particularmente, se $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{3}$, $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ e $x_3 = \gamma$, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}f(\alpha)+\frac{1}{3}f(\beta)+\frac{1}{3}f(\gamma) &\leq f\left(\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{3}\gamma\right)\\
\frac{1}{3}sen\alpha+\frac{1}{3}sen\beta+\frac{1}{3}sen\gamma &\leq sen\left(\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{3}\gamma\right)\\
sen\alpha+sen\beta+sen\gamma &\leq 3sen\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Contudo, temos que α, β e γ são as medidas dos ângulos internos de um triângulo, o que nos revela que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Logo,

$$
sen\alpha+sen\beta+sen\gamma \leq 3sen\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)=3sen\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}.
$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e só se, $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$, ou seja, se, e somente se, o triângulo *ABC* é equilátero. □

O conteúdo apresentado nesta seção, as desigualdades clássicas, por meio de definições, demonstrações e vários problemas resolvidos deve servir como material de apoio aos professores que eventualmente venham a ministratar as unidades curriculares eletivas que serão propostas detalhadamente na seção seguinte. O Produto Educacional (PE), irá contemplar todas as desigualdades aqui apresentadas e o rigor na apresentação do conteúdo aos alunos vai depender do objetivo do professor e das características de cada turma e/ou escola, considerando para tanto a aprovação das eletivas pela COETI e a sua inserção no catálogo da SEDUC-CE.

5 A CONCEPÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Esta é a fase mais relevante deste trabalho, iremos tratar aqui de forma concreta do Produto Educacional (PE) já mencionado anteriormente, levando em consideração o momento de reformulação das políticas educacionais do ensino médio, por meio da reforma do ensino médio, instituída pela Lei federal nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017, fruto da conversão da medida provisória nº 746 que alterou, entre outras, a Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

Por força da lei, as escolas e redes de ensino públicas e privadas, tiveram prazo de até cinco anos para se adequarem às novas regras. Portanto, agora em 2023 o novo ensino médio é uma realidade. Não nos deteremos aqui sobre uma análise do impacto positivo ou negativo da reforma. Nos interessa, tão somente, dois pontos: a flexibilização curricular, tratada no artigo 4º da Lei 13.415/2017 que altera o artigo 36 da Lei 9394/1996, que passa a vigorar com a seguinte redação "O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino" (BRASIL, 2017).

O segundo ponto de interesse é o que vem expresso no artigo 13º da Lei 13.415/2017 que institui a política de fomento à implementação de escolas de ensino médio em tempo integral, que no nosso entendimento é *conditio sine qua non* para o aumento de carga horária e exequibilidade do novo arranjo curricular. A reforma do ensino médio prever que as redes de ensino façam adequações nas áreas de conhecimento e nas respectivas competências e habilidades de acordo com os critérios estabelecidos em cada sistema de ensino.

Portanto, consideraremos aqui a realidade da rede estudual de ensino público do Ceará, no seu aspecto normativo e nas orientações da Secretaria da Educação (SEDUC-CE), quanto a arquitetura curricular e o tempo integral nas escolas da rede, de forma ainda mais específica, na Escola de Ensino Médio em Tempo Integral Maria Menezes Cristino que é uma das 51 escolas de ensino médio que compõem a 6ª Coordenadoria Regional de Desenvolvolvimento da Educação (CREDE 6), da SEDUC-CE e o seu currículo atual.

Em 2017, por meio da Lei Nº 16.287, de 20 de julho, aprovada pela assembleia legislativa do estado, o governo do Ceará, instituiu a Política de Ensino Médio em Tempo Integral no âmbito da rede estadual de ensino, objetivando a progressiva adequação das escolas já em funcionamento, ou que vierem a ser criadas, para a oferta de Ensino Médio em Tempo Integral, com 45 (quarenta e cinco) horas semanais. O Art. 5º da lei, autoriza o poder executivo a incluir, mediante decreto, na estutura organizacional da SEDUC-CE, Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral (Escola de Ensino Médio em Tempo Integral (EEMTI)).

Em 2022, a então Escola de Ensino Médio (EEM) Maria Menezes Cristino passa a ser denominada EEMTI Maria Menezes Cristino e inicia a oferta de ensino médio em tempo integral, mediante o decreto estadual Nº 34.852, de 06 de julho de 2022. Publicado no Diário Oficial do Estado do Ceará (DOE-CE) do dia 07 de julho de 2022. No mesmo ano, a escola inicia, também, a oferta do Novo Ensino Médio (NEM), instituido pela lei federal Nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. As mudanças são profundas, não só na carga horária e no currículo o que requer uma necessária adaptação dos estudantes, professores e servidores.

A EEMTI Maria Menezes Cristino está localizada no KM 77, da rodovia CE 240, distrito de Araquém, município de Coreaú. A escola foi inaugurada em 2012 e atende a estudantes residentes no distrito de Araquém e outros, das localidades rurais adjacentes. Conforme (COSTA, 2018) a construção da escola constituiu a realização de um sonho para a comunidade de Araquém e localidades circuvizinhas.

De acordo com dados do Sistema Integrado de Gestão Escolar (SIGE), a EEMTI Maria Menezes Cristino tem 215 alunos matriculados em 2023, distribuidos em seis turmas, sendo: duas turmas de primeira série; duas turmas de segunda série e duas de terceira série, denominadas, respectivamente, de 1ª série A, com 40 alunos; 1ª série B, com 39 alunos; 2ª série A, com 40 alunos; 2ª série B, com 35 alunos; 3ª série A, com 31 alunos e 3ª série B, com 30 alunos. As turmas de primeira e segunda séries, são turmas em tempo integral, têm 9 tempos (de 50 minutos) de aulas por dia, ou seja, de 7h às 16h40min e as turmas de terceira série, são turmas regulares, de tempo parcial, ambas no turno manhã de 7h às 11h30min.

Quando a escola iniciou em tempo integral em 2022, contemplou apenas as turmas de primeira série, agora em 2023, as turmas de primeira e segunda séries e em 2024, fecha o ciclo de implementação, daí a escola ficará com todas turmas, das três séries do ensino médio, em tempo integral. O currículo da EEMTI de 45h semanais é dividido em duas partes. A primeira é a Formação Geral Básica (FGB) que compreende as disciplinas básicas divididas em quatro áreas: linguages e suas tecnologias; matemática; ciências da natureza e suas tecnologias e ciências humanas e sociais aplicadas, a FGB compreende 18 horas aulas semanais. A segunda parte é o IF, que é dividido em quadro dimensões, a saber: unidades curriculares eletivas, unidades curriculares obrigatórias, trilhas de aprofundamento e projeto de vida. O IF comprrende uma carga horária de 27 horas aulas por semana.

A arquitetura curricular varia conforme a série, veja nas figuras a seguir, a estrutura do currículo para as turmas de primeira e segunda séries de tempo integral. Na figura 20, temos a distribuição das 12 disciplinas da FGB, distribuídas nas quatro áreas do conhecimento, com suas respectivas cargas horárias.

Figura 20 – Formação Geral Básica (FGB) - 1ª série

ÁREA		COMPONENTE/UNIDADE CURRICULAR	1a SÉRIE DIURNO MÍN	1a SÉRIE DIURNO MÁX
FORMAÇÃO GERAL BÁSICA	LINGUAGENS E SUAS TECNOLOGIAS	LÍNGUA PORTUGUESA	3h/a	
		ARTE	1h/a	
		LÍNGUA INGLESA	1h/a	
		EDUCAÇÃO FÍSICA	1h/a	
	MATEMÁTICA	MATEMÁTICA	3h/a	
	CIÊNCIAS DA NATUREZA E SUAS TECNOLOGIAS	QUÍMICA	1h/a	2h/a
		FÍSICA	1h/a	2h/a
		BIOLOGIA	1h/a	2h/a
	CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS	FILOSOFIA	1h/a	2h/a
		GEOGRAFIA	1h/a	2h/a
		HISTÓRIA	1h/a	2h/a
		SOCIOLOGIA	1h/a	2h/a
TOTAL DA FORMAÇÃO GERAL BÁSICA			18h/a	

Fonte: https://www.seduc.ce.gov.br/ano-letivo-2023/

Na figura 21, temos a estrutura do currículo do IF, considerando as componentes de aprofundamento e as componentes do projeto de vida, para os alunos da primeira série do ensino médio.

Figura 21 – Itinerários Formativos (IF) - 1ª série

ITINERÁRIOS FORMATIVOS	FORMAÇÃO PARA CIDADANIA	1h/a
	NTPPS	4h/a
	LÍNGUA ESTRANGEIRA	2h/a
	ESTUDO ORIENTADO	2h/a
	APROFUNDAMENTO EM LÍNGUA PORTUGUESA	2h/a
	APROFUNDAMENTO EM MATEMÁTICA	2h/a
	CULTURA DIGITAL – LETRAMENTO DIGITAL	2h/a
	PROJETO INTEGRADOR	2h/a
	UNIDADE CURRICULAR ELETIVA	2h/a
	UNIDADE CURRICULAR ELETIVA	2h/a
	UNIDADE CURRICULAR ELETIVA	2h/a
	UNIDADE CURRICULAR ELETIVA	2h/a
	CLUBE ESTUDANTIL	2h/a
TOTAL DA FORMAÇÃO ITINERÁRIOS FORMATIVOS		27 h/a

Fonte: https://www.seduc.ce.gov.br/ano-letivo-2023/

Na figura 22, temos a distribuição das componentes curriculares do IF, para os alunos da segunda série do ensino médio.

Figura 22 – Itinerários Formativos (IF) - 2ª série

ITINERÁRIOS FORMATIVOS	FORMAÇÃO PARA CIDADANIA		1h/a
	NTPPS		4h/a
	REDAÇÃO		2h/a
	ESTUDO ORIENTADO		2h/a
	CULTURA DIGITAL – CIDADANIA DIGITAL		2h/a
	UNIDADE CURRICULAR ELETIVA		2h/a
	UNIDADE CURRICULAR ELETIVA		2h/a
	CLUBE ESTUDANTIL		2h/a
	TRILHA DE APRENDIZAGEM EIXO: INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA	UNIDADE CURRICULAR DA TRILHA	2h/a
		UNIDADE CURRICULAR DA TRILHA	2h/a
		UNIDADE CURRICULAR DA TRILHA	2h/a
		UNIDADE CURRICULAR DA TRILHA	2h/a
		UNIDADE CURRICULAR DA TRILHA	2h/a
TOTAL DA FORMAÇÃO ITINERÁRIOS FORMATIVOS			27 h/a

Fonte**:** https://www.seduc.ce.gov.br/ano-letivo-2023/

A FGB é a mesma tanto para a primeira quanto para a segunda série, em componentes curriculares e em carga horária. No IF, a principal diferença do currículo da primeira para a segunda série é a presença das trilhas de aprofundamento integradas, na segunda série, são quatro as trilhas/blocos possíveis, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (CHSA) + Linguagens e suas Tecnologias (LGG); CHSA + Matemática e suas Tecnologias (MAT); CHSA + Ciências da Natureza e suas Tecnologias (CN) e MAT + CN.

As trilhas são baseadas em quatro eixos estruturantes: Investigação Científica (6 Habilidades relacionadas ao pensar e fazer científico), Processos Criativos (6 Habilidades relacionadas ao pensar e fazer criativo), Mediação e Intervenção Sociocultural (6 Habilidades relacionadas à convivência e atuação sociocultural) e Empreendedorismo (6 Habilidades relacionadas ao autoconhecimento, empreendedorismo e Projeto de Vida).

As trilhas iniciam na segunda e continuam na terceira série, a cada semestre o enfoque muda, conforme o eixo estruturante. Na segunda série, primeiro semestre o enfoque é na Investigação Científica, no segundo semestre, o eixo é o de Processos Criativos. Já na terceira série, primeiro semestre o eixo é Mediação e Intervenção Sociocultural e no segundo semestre, o foco é no Empreededorismo.

Como a escola ainda não fechou o ciclo de implementação do tempo integral, as turmas de terceira série, ainda são turmas regulares de tempo parcial, com 25 horas-aula por semana. Conforme a figura 23 a seguir.

Figura 23 – Mapa de Disciplinas - 3ª série

3ª Série | Ensino Médio | Regular | Manhã - A					
Tipo		**Cod.**	**Disciplina**	**C.H.**	
BASE COMUM		160	BIOLOGIA	2 hrs	
BASE COMUM		530	EDUCAÇÃO FÍSICA	1 hrs	
BASE COMUM		780	FILOSOFIA	1 hrs	
BASE COMUM		800	FÍSICA	2 hrs	
BASE COMUM		890	GEOGRAFIA	2 hrs	
BASE COMUM		970	HISTÓRIA	2 hrs	
BASE COMUM		1130	LINGUA ESTRANGEIRA (INGLES)	1 hrs	
BASE COMUM		1140	LÍNGUA PORTUGUESA	4 hrs	
BASE COMUM		1200	MATEMÁTICA	5 hrs	
BASE COMUM		1620	QUÍMICA	2 hrs	
BASE COMUM		1730	SOCIOLOGIA	1 hrs	
PARTE DIVERSIFICADA		101519	FORMAÇÃO PARA CIDADANIA E DESENV. DE COMP. SOCIOEMOCIONAIS	1 hrs	
PARTE DIVERSIFICADA		3330	LINGUA ESTRANGEIRA (ESPANHOL)	0 hrs	
PARTE DIVERSIFICADA		3470	REDAÇÃO	1 hrs	
Carga horária total da turma: 25 hs					

Fonte: SIGE ESCOLA

Analisando as figuras 21 e 22, logo acima, podemos observar que os estudantes da primeira série precisam cursar quatro unidades curriculares eletivas e os da segunda série, duas unidades curriculares eletivas. Estas disciplinas eletivas são semestrais, com carga horária de 40 horas-aula. A oferta das eletivas pelas escolas deve levar em consideração o número de turmas em tempo integral e a distribuição por áreas do conhecimento, conforme a figura 24 abaixo.

Figura 24 – Distribuição de eletivas por áreas do conhecimento

NÚMERO DE TURMAS EM TEMPO INTEGRAL	LINGUAGENS E SUAS TECNOLOGIAS		MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS		CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS		CIÊNCIAS DA NATUREZA E SUAS TECNOLOGIAS		FORMAÇÃO PROFISSIONAL		TOTAL DE UNIDADES CURRICULARES ELETIVAS COM PROFESSOR
	Nº DE UNIDADES CURRICULARES ELETIVAS	CH SEMANAL	Nº DE UNIDADES CURRICULARES ELETIVAS	CH SEMANAL	Nº DE UNIDADES CURRICULARES ELETIVAS	CH SEMANAL	Nº DE UNIDADES CURRICULARES ELETIVAS	CH SEMANAL	Nº DE UNIDADES CURRICULARES ELETIVAS	CH SEMANAL	
2	2	4	1	2	2	4	2	4	1	2	8
3	3	6	2	4	3	6	3	6	1	2	12
4	4	8	2	4	4	8	4	8	2	4	16
5	5	10	3	6	5	10	5	10	2	4	20
6	6	12	4	8	6	12	6	12	2	4	24
7	7	14	5	10	7	14	7	14	2	4	28
8	8	16	6	12	8	16	8	16	2	4	32
9	9	18	6	12	9	18	9	18	3	6	36
10	10	20	7	14	10	20	10	20	3	6	40
11	11	22	8	16	11	22	11	22	3	6	44
12	12	24	9	18	12	24	12	24	3	6	48
13	13	26	10	20	13	26	13	26	3	6	52
14	14	28	10	20	14	28	14	28	4	8	56
15	15	30	11	22	15	30	15	30	4	8	60

Fonte: http://imagens.seplag.ce.gov.br/PDF/20221227/do20221227p13.pdf

O Produto Educacional (PE) aqui proposto é da forma de ementas de duas unidades curriculares eletivas, denominadas: passeio pelas desigualdades matematicas I e passeio pelas desigualdades matemáticas II. Os objetos de conhecimento da primeira disciplina eletiva são as desigualdades triangulares e as desigualdades entre as médias. Já a segunda eletiva, tem como objetos do conhecimento, o estudo das desigualdades de Cauchy-Schwarz, desigualdade de Bernoulli e a desigualdade de Jensen. Ambas têm como objetivos da aprendizagem - Competência: Empregar estratégias de utilização dos conceitos de desigualdade triangular e de desigualdade entre as médias, na resolução de problemas e - Habilidades: Manipular desigualdades, usando as operações básicas; identificar problemas que possam ser resolvidos usando os conceitos e definições estudadas; resolver problemas matemáticos diversos se utilizando das técnicas estudadas.

As ementas das unidades curriculares eletivas aqui propostas, serão submetidas a análise da Coordenadoria de Educação em Tempo Integral e Educação Complementar (COETI) da SEDUC-CE. Tal coordenadoria, ao final de cada ano letivo abre prazos para que as escolas submetam sugestões de ementas de disciplinas eletivas, apresentadas pelos seus professores. As ementas aprovadas passam a fazer parte do catálogo das unidades curriculares eletivas do ano letivo seguinte.

As ementas elaboradas dialogam com a proposta da SEDUC-CE, pois atendem a todos os requisitos da COETI, tais quais as eletivas já inseridas no catálogo atual. Uma vez aprovadas pela coordenadoria, tais eletivas serão ofertadas pela EEMTI Maria Menezes Cristino, de forma sequencial, inicialmente a eletiva "passeio pelas desigualdades matemáticas I"e no semestre seguinte, a eletiva "passeio pelas desigualdades matemáticas II". Ocasião em que será possível aferir o impacto do produto proposto. Conforme (MOREIRA; NARDI, 2009) é fundamental que o produto educacional desenvolvido no mestrado profissional “possa ser disseminado, analisado e utilizado por outros professores”.

Uma vez presentes no catálogo da SEDUC-CE tais eletivas podem ser disseminadas, analisadas e utilizadas por outros professores, conforme sugerem os autores citados anteriormente, o que representa, em grande medida, os objetivos deste trabalho. Inclusive, esta dissertação pode ser utilizada, parcialmente, como material de apoio aos professores quanto ao conteúdo a ser trabalhado em sala de aula, tais como, a apresentação de definições, demonstrações e problemas resolvidos, contidos nas secções intituladas conhecimentos prévios e resultados clássicos.

Considerando as disciplinas eletivas, conforme a arquitetura do currículo cearense, como oportunidades de aprofundamento nas diversas áreas do conhecimento, especialmente na matemática. Propomos que o trabalho do professor ao ministrar as eletivas aqui propostas, observem os conceitos de zona de desenvolvimento "real", ou seja, valorizem os conhecimentos prévios dos estudantes e que o professor incorpore a figura do indivíduo mais experiente, conforme Vigotski, para que os estudantes consigam assimilar o conteúdo e com isso, atingir a sua zona de desenvolvimento "potencial", ou seja, agindo como um professor pesquisador. Tal qual para (GARCIA, 2007), professor pesquisador é aquele professor que parte de questões relativas a sua prática com o objetivo de aprimorá-la.

Na esteira do conceito de professor pesquisador, sugerimos ainda que o tratamento do objeto matemático em questão seja feito conforme as etapas sugeridas por Polya para a resolução de problemas, considerando que as desigualdades matemáticas representam um campo amplo para a elaboração de problemas instigantes. Cabe ressaltar que o método Polya representa uma sequência de etapas a serem observadas. Mas, o sucesso de cada etapa e a consequente resolução do problema, depende dos conhecimento prévios e das estratégias utilizadas na resolução de problema de outros problemas.

De acordo com (DANTE, 1991).

> Devemos propor aos estudantes várias estratégias de resolução de problemas, mostrando-lhes que não existe uma única estratégia, ideal e infalível. Cada problema exige uma determinada estratégia. A resolução de problemas não deve se constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problalemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos alunos diante de um problema novo. (Dante, 1991, p.26)

Em síntese, o produto educacional fruto deste trabalho consiste na apresentação das ementas de duas unidades curriculates eletivas à COETI da SEDUC-CE, conforme o currículo das escolas de ensino médio em tempo integral do Ceará, à luz do NEM, implementado pela lei 13.415/207. O objeto matemático, são as desigualdades matemáticas clássicas: desigualdade triangular, desigualdade entre as médias, desigualdade de Cauchy-Schwarz, desigualdade de Bernoulli e desigualdade de Jensen.

Do ponto de vista teórico, sugerimos aos professores que eventualmente venham a ministrar tais componentes eletivas observem o conceito de ZDP de Vigotski e as etapas para a resolução de problemas matemáticos sugeridas por Polya. As ementas das eletivas estão presentes nos apêndices desta dissertação figuras 25 e 26.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho partiu de uma constatação do impacto do ENEM na elaboração dos currículos do ensino médio, de modo a contemplar fortemente a matriz de referência do exame, visando garantir o acesso dos estudantes ao ensino superior. Este fato levou à redução dos conteúdos matemáticos abordados no ensino médio, sobretudo aqueles que não possuem imediata aplicação e/ou contextualização à realidade cotidiana (MEDEIROS, 2018).

O PE apresentado supre, ainda que parcialmente, a lacuna de conteúdos nos currículos, sobretudo às desigualdades matemáticas, considerando o contexto do NEM e a atual estrutura curricular do Ceará. As ementas das duas disciplinas eletivas sugeridas, contemplam as cinco desigualdades clássicas abordadas no trabalho, a desigualdade triangular, desigualdade entre as médias, desigualdade de Cauchy-Schwarz, desigualdade de Bernoulli e desigualdade de Jensen. O estudo de conteúdos matemáticos clássicos ainda no ensino médio é substancialmente importante, para que os alunos tenham contato com a matemática para além das suas demandas diárias e quem sabe, possam admitir gosto pela matemática enquanto ciência.

Como este trabalho apresentou um PE viável, considerando a legislação atual e as diretrizes da secretaria da educação, as ementas das disciplinas eletivas aqui propostas serão submetidas à análise da COETI, orgão da SEDUC-CE responsável por receber e analisar as propostas de eletivas recebidas de professores e escolas da rede estadual de ensino. Espera-se que tais ementas sejam aprovadas e passem a compor o catálogo de eletivas para o ano letivo de 2024.

As eletivas aqui propostas, entituladas: “passeio pelas desigualdades matemáticas I” e “passeio pelas desigualdades matemáticas II”, figuras 25 e 26, contidas nos apêndices, estão estruturadas conforme as eletivas já contidas no atual catálogo, o que pode facilitar a análise e aprovação. Tais eletivas devem ser ministradas de forma sequencial, considerando a disposição dos conteúdos, conforme apresentados no decorrer da seção 4.

Os fundamentos normativos, leis estaduais e nacionais, bem como a BNCC e o DCRC foram considerados na elaboração deste PE. Cabe salientar que as ementas das eletivas propostas sugerem que sejam consideradas as etapas de resolução de problemas de Polya e as relações de ZDP com educação prática, em sala de aula. Com isso, este trabalho se presta a um aprofundamento matemático bem específico, o que é previsto no NEM, na parte do IF.

Por fim, podemos concluir que este trabalho permite repensar o currículo de matemática do ensino médio, atendendo aos instrumentos normativos e as orientações da secretaria da educação do estado do Ceará, possibilitando aos alunos uma ampliação de experiências cognitivas e com isso preparando melhor tais alunos para o ensino superior.

REFERÊNCIAS

ARAUJO JUNIOR, P. R. R. **Desigualdades Elementares e suas Aplicações no Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí - UFPI. Teresina - PI., 2018.

BONELLI, R. **Desigualdades Matemáticas e Aplicações.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista. Rio Claro - SP., 2017.

BRASIL. **Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Sobre o Exame Nacional do Ensino Médio**. [S.l.]: Brasília: MEC, 2011.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017.** [S.l.]: Diário Oficial da União, 2017.

BRASIL. **Ministério da Educação, Secretaria Executiva, Secretaria de Educação Básica. Base nacional comum curricular**. [S.l.]: Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Documento de Área – Ensino**. [S.l.]: Brasília: CAPES, 2019.

BRITO, F. W. M. **Otimização: uma aplicação para desigualdade das médias e para desigualdade de Cauchy-Schwarz.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba - UFPB. João Pessoa - PB., 2016.

CAMINHA, A. **Tópicos de Matemática Elementar: introdução à análise funcional**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2012.

CAMPELO, A. **A desigualdade triangular e a desigualdade de Jensen.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Fortaleza - CE., 2013.

CAZORLA, I. M. **A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos.** Dissertação (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas-SP., 2002.

CEARA. **Secretaria da Educação. Documento Curricular Referencial do Ceará: ensino médio**. [S.l.]: Fortaleza: SEDUC, 2021.

CHI, M. T. H.; GLASER, R. **Problem-Solving Ability**. [S.l.]: Pittsburgh, Pittsburgh University, 1985.

COSTA, P. **O Ensino de Física Baseado em Dois Enfoques: Metodologia Científica e Divulgação da Física Contemporânea.** Dissertação (Mestrado) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE – Campus Sobral e Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA – Campus Cidao, Sobral, 2018.

CUNHA NETO, L. G. **Desigualdades aritméticas e geométricas: teoremas e problemas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Sergipe - UFS. São Cristovão - SE., 2014.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática 2. ed.** [S.l.]: São Paulo: Ática, 1991.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problema de Matemática.11. ed.** [S.l.]: São Paulo: Atica, 1998.

DELFINO, A. R. **Um método ótimo para otimização convexa irrestrita.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná - UFPR. Curitiba - PR., 2010.

EVARISTO, J.; PERDIGAO, E. **Introdução à Álgebra Abstrata. 3. ed.** [S.l.]: Maceió, 2020.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FORMIN, D. e. a. **Círculos Matemáticos: a experiência Russa**. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GARCIA, V. C. G. **Fundamentação teórica para as perguntas primárias: O que é Matemática? Porque Ensinar? Como se ensina e como se aprende?** [S.l.]: Apostila, 2007.

GAZZONI, A.; OST, A. **A resolução de um problema: soluções alternativas e variações na formulação**. [S.l.]: VIDYA, 2008.

GOMES, C.; GOMES, J. **Tópicos de Matemática: Olimpíadas - ITA - IME. Vol. 1.** [S.l.]: Rio Grande do Norte: Vestseller, 2010.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cáculo. 5. ed.** [S.l.]: Rio de Janeiro: LTC, 2001.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria. 3. ed.** [S.l.]: São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L. **Análise Real: funções de uma variável. 10. ed.** [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MEDEIROS, A. O enem como ferramenta (re)formuladora do currículo escolar e da prática docente. **Revista Eletrônica DECT**, Revista Eletrônica DECT, Vitória (ES), v. 8, n. 02, p. 146–167, 2018.

MOREIRA, M. A.; NARDI, R. O mestrado profissional na área de ensino de ciências e matemática: alguns esclarecimentos. **R.B.E.C.T.**, v. 2, n. 3, 2009.

MORETTI, M. T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. **In: MACHADO, S. D. A. (org). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. 3. ed.**, Campinas - SP: Papirus, p. 149–160, 2007.

MORGADO, A.; LIMA, E.; CARVALHO, P.; WAGNER, E. **A Matemática do Ensino Médio Vol. 2**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NEWELL A.; SIMON, H. A. **Human Problem Solving**. [S.l.]: Pittsburgh, Carnegie-Mellon University, 1972.

OLIVEIRA, M. K. d. **Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento, um processo sócio-histórico 2. ed.** [S.l.]: São Paulo: Scipione, 1995.

PARENTE, U. L. **Elementos básicos de geometria plana - parte 2**. 2019. Último acesso em 28 de julho de 2023. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/>.

PAULANTI, C. **Área das Figuras Planas. Uso da Fórmula de Heron.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF. Campos dos Goytacazes - RJ., 2014.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Tradução e Adaptação de Heitor Lisboa de Araújo**. [S.l.]: Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

REGO, T. C. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação. 21. ed.** [S.l.]: Rio de janeiro: Vozes, 1994.

SAVIANI, D. **Educação - Do Senso Comum a Consciência Filosófica**. [S.l.]: São Paulo, Autores Associados, 1980.

SICHINEL, V. A. **Desigualdades: uma viagem olímpica**. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2022.

SILVA, M. **Médias, Desigualdade das Médias e a Resolução de Problemas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo - UFES. Vitória - ES., 2019.

SILVA, P. C. **As desigualdades elementares e suas aplicações.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN. Natal - RN., 2019.

SMIRNOV, A. A.; LEÓNTIEV, A. N. **Psicología**. [S.l.]: Habana: Imprenta Nacional de Cuba, 1961.

SOUSA, E. S. B. **Desigualdades Matemáticas: Contexto para o Ensino Médio com Problemas Olímpicos.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Piauí - UFPI. Teresina - PI., 2020.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. **Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum**. [S.l.]: In R. I. Charles E. A. Silver (Eds.), The teaching and assessing of mathematical problem Solving. Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989.

STEWART, J. **Cálculo, volume I**. [S.l.]: São Paulo: Cengage Learning, 2013.

VEER, R. V. D.; VALSINER, J. **Vygotsky: uma sintese**. [S.l.]: São Paulo (SP): Unimarco; Loyola, 1996.

VYGOTSKI, L. A formação social da mente. in: Interação entre aprendizado e desenvolvimento (cap. 06). 7º ed. São Paulo: Martins Fontes, p. 87–106, 2007.

VYGOTSKY, L. S. **Thinking and speech (N. Minick, Trans.). In R. W. Rieber A. S. Carton (Eds.), The collected works of L. S. Vygotsky: Vol. 1. Problems of general psychology (pp. 39-285)**. [S.l.]: New York: Plenum Press, 1987.

VYGOTSKY, L. S. **The problem of age (M. Hall, Trans.). In R. W. Rieber (Ed.), The collected works of L. S. Vygotsky: (Vol. 5. Child psychology) (pp. 187-205)**. [S.l.]: New York: Plenum Press, 1998.

WALLE, J. A. V. **Matemática: No Ensino Fundamental. 6. ed.** [S.l.]: Porto Alegre: ArtMed, 2009.

ZANELLA, A. V. **Vygotski: contexto, contribuiçoes a psicologia e o conceito de zona de desenvolvimento proximal**. [S.l.]: Itajai: UNIVALI, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A – EMENTA DA PRIMEIRA DISCIPLINA ELETIVA

Figura 25 – Passeio pelas desigualdades matemáticas I

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

CÓDIGO	UNIDADE CURRICULAR ELETIVA	DURAÇÃO
MAT024	PASSEIO PELAS DESIGUALDADES MATEMÁTICAS I	40 H/A

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL:
Assimilar os resultados clássicos das desigualdades Triangulares e das Desigualdades entre as Médias.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS:
Aprender as definições das desigualdades Triangular e Desigualdade entre as Médias.
Identificar problemas que possam ser resolvidos usando estas desigualdades.
Ser capaz de manipular as desigualdades até que seja possível aplicar as definições conhecidas.
Resolver problemas usando as definições conhecidas.

JUSTIFICATIVA

O estudo das desigualdades matemáticas é absolutamente necessário, pois permite que os estudantes se apropriem de ferramentas capazes de auxiliá-los na resolução de inúmeros problemas, nas várias áreas da matemática, como geometria, álgebra, cálculo, análise e etc. Sendo capazes de resolver problemas envolvendo áreas, volumes, máximos e mínimos de funções, problemas de otimização e as várias desigualdades aritméticas.

OBJETOS DO CONHECIMENTO

Definição de Desigualdade Triangular.
Estudo do módulo ou valor absoluto de números reais.
Aspectos geométricos e algébricos da desigualdade triangular.
Estudo das Médias: Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática.
Desigualdade entre as médias Aritmética e Geométrica.
Desigualdade entre as médias Geométrica e Harmônica.
Desigualdade entre as médias Aritmética e Harmônica.
Desigualdade entre as médias Quadrática e Aritmética.

OBJETIVOS DA APRENDIZAGEM

COMPETÊNCIA:
Empregar estratégias de utilização dos conceitos de desigualdade triangular e de desigualdade entre as médias, na resolução de problemas.
HABILIDADES:
Manipular desigualdades, usando as operações básicas.
Identificar problemas que possam ser resolvidos usando os conceitos e definições estudadas.
Resolver problemas matemáticos diversos se utilizando das técnicas estudadas.

RECURSOS DIDÁTICOS

Quadro branco.
Pincel marcador.
Apostilas impressas.
Notebook.
Data show.

AVALIAÇÃO

Participação e interação no decorrer das aulas.
Resolução de problemas no quadro branco.
Prova escrita ao final da disciplina, com 100 minutos de duração.

SUGESTÃO PRODUTO FINAL / CULMINÂNCIA

Apresentação de banners expondo e explicando os conceitos e aplicações das desigualdades estudadas.

OBSERVAÇÕES

Sugerimos que o professor considere as quatro etapas de George Polya para resolução de problemas matemáticos.

REFERÊNCIAS

FORMIN, D. et al. Círculos Matemáticos: a experiência Russa. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
https://poti.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=22
https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=70

2022-01-033110_2022

Fonte**:** Elaborado pelo autor em template disponibilizado pela COETI

APÊNDICE B – EMENTA DA SEGUNDA DISCIPLINA ELETIVA

Figura 26 – Passeio pelas desigualdades matemáticas II

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

CÓDIGO	UNIDADE CURRICULAR ELETIVA	DURAÇÃO
MAT025	PASSEIO PELAS DESIGUALDADES MATEMÁTICAS 2	40 H/A

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL:
Assimilar os resultados clássicos das desigualdades de Cauchy-Schwars, desigualdades de Bernoulli e das desigualdades de Jensen.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS:
Aprender as definições desigualdades de Cauchy-Schwars, desigualdades de Bernoulli e das desigualdades de Jensen.
Identificar problemas que possam ser resolvidos usando estas desigualdades.
Ser capaz de manipular as desigualdades até que seja possível aplicar as definições conhecidas.
Resolver problemas usando as definições conhecidas.

JUSTIFICATIVA

O estudo das desigualdades matemáticas é absolutamente necessário, pois permite que os estudantes se apropriem de ferramentas capazes de auxiliá-los na resolução de inúmeros problemas, nas várias áreas da matemática, como geometria, álgebra, cálculo, análise e etc. Sendo capazes de resolver problemas envolvendo áreas, volumes, máximos e mínimos de funções, problemas de otimização e as várias desigualdades aritméticas.

OBJETOS DO CONHECIMENTO

Definição de Desigualdade Cauchy-Schwars.
Definição de Desigualdade de Bernoulli.
Definição de Desigualdade de Jensen.
Resolução de problemas envolvendo as desigualdades de Cauchy-Schwars, desigualdades de Bernoulli e das desigualdades de Jensen.

OBJETIVOS DA APRENDIZAGEM

COMPETÊNCIA:
Empregar estratégias de utilização dos conceitos de desigualdades de Cauchy-Schwars, desigualdades de Bernoulli e das desigualdades de Jensen na resolução de problemas.
HABILIDADES:
Manipular desigualdades, usando as operações básicas.
Identificar problemas que possam ser resolvidos usando os conceitos e definições estudadas.
Resolver problemas matemáticos diversos se utilizando das técnicas estudadas.

RECURSOS DIDÁTICOS

Quadro branco.
Pincel marcador.
Apostilas impressas.
Notebook.
Data show.

AVALIAÇÃO

Participação e interação no decorrer das aulas.
Resolução de problemas no quadro branco.
Prova escrita ao final da disciplina, com 100 minutos de duração.

SUGESTÃO PRODUTO FINAL / CULMINÂNCIA

Apresentação de banners expondo e explicando os conceitos e aplicações das desigualdades estudadas.

OBSERVAÇÕES

Sugerimos que o professor considere as quatro etapas de George Polya para resolução de problemas matemáticos.

REFERÊNCIAS

FORMIN, D. et al. Círculos Matemáticos: a experiência Russa. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
https://poti.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=22
https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=70

Fonte: Elaborado pelo autor em template disponibilizado pela COETI