UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO DAS CHAGAS MELO DE SOUSA

TORRE DE HANÓI: ENSINO DE POTENCIAÇÃO E UMA EXTENSÃO COM 4 PINOS

SOBRAL – CEARÁ
2023

FRANCISCO DAS CHAGAS MELO DE SOUSA

TORRE DE HANÓI: ENSINO DE POTENCIAÇÃO E UMA EXTENSÃO COM 4 PINOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Orientador: Dr. Edvalter da Silva Sena Filho

Co-Orientador: Ms. Davi Ribeiro dos Santos

SOBRAL – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Sousa, Francisco das Chagas Melo de.
Torre de Hanói: ensino de potenciação e uma extensão com 4 pinos [recurso eletrônico] / Francisco das Chagas Melo de Sousa. - 2023.
79 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Sobral, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho.
Coorientação: Prof. Me. Davi Ribeiro dos Santos.

1. Torre de Hanói. 2. potenciação. 3. ensino-aprendizagem. 4. jogos. I. Título.

FRANCISCO DAS CHAGAS MELO DE SOUSA

TORRE DE HANÓI: ENSINO DE POTENCIAÇÃO E UMA EXTENSÃO COM 4 PINOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universi- dade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Dr. Edvalter da Silva Sena Filho (Orientador)
Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA

Documento assinado digitalmente
gov.br JOSE NILTON DE ABREU COSTA
Data: 24/07/2023 22:50:09-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. José Nilton de Abreu Costa
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

Documento assinado digitalmente
gov.br AILTON CAMPOS DO NASCIMENTO
Data: 24/07/2023 18:12:54-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Ailton Campos do Nascimento
Universidade Federal do Ceará – UFC

Dr. Antônio Kelson Vieira da Silva
Universidade Federal do Piauí - UFPI

A Deus.

Aos meus pais, Antonio José e Antonia Irene.

À minha filha Íris Maria, à minha noiva Naila e à minha irmã Ana Vitória.

A todos que diretamente ou indiretamente me apoiaram nessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como mestrando, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

À toda minha família, em especial, meus pais Antonio José e Atonia Irene, pelo apoio, paciência e incentivo para superar todas as dificuldades que surgem nessa jornada chamada vida.

Obrigado minha irmã Ana Vitória, minha filha Íris Maria e minha noiva Naila, que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente!

Ao Professor Edvalter Sena pelas orientações, paciência e atenção dadas, que foram de suma importância para a conclusão desse trabalho. Agradeço a todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. a palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais sem nominar terão os meus eternos agradecimentos.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Aos demais colegas de profissão que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento dessa formação e conclusão dessa etapa. E aos alunos que contribuíram com sua efetiva participação e interação, recompensando-me com seu crescimento e desenvolvimento e, assim, também fazendo sentir-me valorizado e a valorizar minha profissão.

“É melhor lançar-se à luta em busca do triunfo mesmo expondo-se ao insucesso, que formar fila com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito; E vivem nessa penumbra cinzenta sem conhecer nem vitoria nem derrota.”

(Franklin Roosevelt)

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma proposta de atividade para o ensino de potenciação utilizando o jogo Torre de Hanói, onde esse servirá de ferramenta no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo, assunto visto em praticamente todo ensino básico da Matemática. Foi desenvolvida uma pesquisa na Escola Estadual de Educação Profissional Professora Maria de Jesus Rodrigues Alves, localizada na cidade de Pacujá-CE, na turma do 3º ano do curso Técnico em Administração, composta por 36 alunos. O objetivo é analisar os impactos desta proposta tanto na construção do conhecimento sobre potenciação quanto no desenvolvimento de habilidades como pensar estrategicamente, identificar padrões e relações, praticar cálculos mentais, entre outros. Acredita-se que esta abordagem ajudará professores a realizar um trabalho mais dinâmico e fará com que alunos tenham melhor motivação e menos dificuldades no aprendizado desse assunto. O presente trabalho também mostra uma extensão do jogo utilizando quatro pinos, as regras originais e realizando procedimentos semelhantes ao jogo tradicional. Ao analisar esse novo formato do jogo será verificado a existência de padrões. Esses padrões referem-se a análise de movimentos tanto individuais quanto, principalmente, totais dos discos. As relações entre as movimentações dos discos à medida que se aumenta seu volume. A partir daí obter uma lei que mostre a quantidade de movimentos necessários para finalizá-lo em função da quantidade de discos utilizada.

Palavras-chave: Torre de Hanói; potenciação; ensino-aprendizagem; jogos.

ABSTRACT

This work presents a proposal for an activity aimed at teaching exponentiation using the Tower of Hanoi game as a tool in the teaching and learning process of this content. This subject is covered in almost all basic Mathematics education. The research was conducted at the State School of Professional Education "Professora Maria de Jesus Rodrigues Alves,"located in Pacujá-CE, with the 3rd-year class of the Technical Administration course, consisting of 36 students. The objective is to analyze the impacts of this proposal on the construction of knowledge about exponentiation and the development of skills such as strategic thinking, pattern recognition, and practicing mental calculations, among others. It is believed that this approach will help teachers carry out a more dynamic work and lead to improved motivation and fewer difficulties for students in learning this subject. This work also explores an extension of the game using four pegs, maintaining the original rules while performing similar procedures to the traditional game. By analyzing this new format, patterns will be identified. These patterns will refer to the analysis of both individual and, especially, total movements of the disks. The relationships between the movements of the disks as their sizes increase will be studied. The goal is to establish a rule that shows the number of movements required to complete the game based on the number of disks used.

Keywords: Tower of Hanoi; exponentiation; teaching and learning; games.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma disciplina que permeia grande parte da vida escolar dos estudantes, sendo que a sua aprendizagem é fundamental para o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Dentre os diversos conteúdos matemáticos, a potenciação é um assunto importante e que pode gerar dificuldades aos alunos. Para auxiliar no ensino e aprendizagem deste conteúdo, é interessante o uso de estratégias didáticas que possam tornar o conteúdo mais acessível e interessante.

Devido à grande variedade de culturas, níveis socioemocionais, entre outros, provenientes de diferentes regiões onde os alunos estão inseridos, é esperado que alguns deles não tenham uma visão positiva da matemática, o que pode dificultar o processo de aprendizagem. É uma tarefa desafiadora mostrar aos alunos que a matemática não é tão difícil quanto parece, e fazê-los perceber seu potencial para aprender e construir conhecimento na disciplina, que é fundamental para sua formação integral como ser humano. Durante o Ensino Fundamental, muitos alunos podem desenvolver uma resistência pessoal à matemática, que se intensifica no Ensino Médio, e superar essa barreira é um desafio constante para os professores em todas as etapas da educação básica.

Segundo Santos, França e Santos (2007, p. 9):

> [...] a disciplina da Matemática tem às vezes uma conotação negativa que influencia os alunos, alterando mesmo o seu percurso escolar. Eles sentem dificuldades na aprendizagem da Matemática e muitas vezes são reprovados nesta disciplina, ou então, mesmo que aprovados, sentem dificuldades em utilizar o conhecimento "adquirido”, em síntese, não conseguem efetivamente terem acesso a esse saber de fundamental importância. A dificuldade na aprendizagem da Matemática provoca fortes sentimentos de aprovação ou de rejeição nos alunos. Alguns alunos, devido a um passado de insucessos em Matemática, acreditam que não são capazes, o que os levou a construírem baixa auto-estima.

Nas últimas décadas, têm havido discussões importantes sobre a importância de um sistema educacional sólido no Brasil. Com as novas diretrizes para o ensino médio e a iminente mudança curricular devido à confirmação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), como avaliação em larga escala, é necessário explorar maneiras lúdicas de ensinar os conteúdos desse nível de ensino, aproximando o conhecimento sistematizado das gerações anteriores dos jovens e adultos de hoje.

Existem vários obstáculos a serem enfrentados no âmbito do Ensino de Matemática, um deles é a dificuldade dos alunos entenderem ou assimilarem conceitos abstratos, “para os estudantes, a matemática é uma disciplina complexa demais, tornando-se algo difícil de compreender” (CARNEIRO, 2018, p. 22). Outro é a falta de interesse, esse problema é, em parte, uma consequência do anterior.

Pouca interação com o professor é outra barreira, o estudante “muitas vezes fica com receio de se pronunciar diante da presença do professor e das suas dificuldades” (CARNEIRO, 2018, p. 22). Também por falta de disponibilidade do docente ou por turmas muito grandes.

Tem-se também a ansiedade matemática, essa denominação ocorre quando “estudantes apresentam aversão, repulsa e medo da matemática” (CAMPOS, 2020, p. 1), ou seja, a presença de estímulos numéricos pode levar o estudante a ter uma reação negativa que afeta seu estado cognitivo, fisiológico e comportamental.

Falta de habilidades básicas, muitos alunos “apresentam dificuldades em executar operações aritméticas, em compreender a organização dos números, apresentando então pouca habilidade com o raciocínio aritmético” (ANDRADE; COLARES; COSTA, 2018, p. 11). Problemas ao lembrar e/ou compreender fórmulas e procedimentos, esse obstáculo é, em parte, também uma consequência do caso anterior.

Falta de contextualização, a matemática pode parecer abstrata e sem sentido se não for apresentada de maneira contextualizada, ou seja, se os alunos não conseguem ver como os conceitos matemáticos estão relacionados com o mundo real, e como eles podem ser aplicados em situações práticas (REIS; NEHRING, 2017).

Para superar essas adversidades, é importante que os professores de matemática estejam cientes delas e usem estratégias de ensino que ajudem a tornar a matemática mais interessante, contextualizada e acessível aos alunos. Isso pode incluir o uso de exemplos práticos, atividades de resolução de problemas em grupo, explicação de conceitos de maneira clara e simples, e oferecer feedback constante aos alunos. Além disso, é importante que os alunos tenham acesso a recursos de apoio, como tutorias, materiais extras e atividades de reforço.

Ainda, de acordo com Santos, França e Santos (2007, p. 14):

> [...] tanto os educadores matemáticos como a escola devem estar em constante evolução para atuarem no mundo moderno, o que será proveitoso não só para os alunos, futuros interessados, mas para todo conjunto da sociedade. Pois, não há dúvida que, diante dos avanços tecnológicos do século atual, o homem de hoje necessita de preparação para sobreviver em um mundo tão competitivo, e a aplicação da Matemática faz-se necessária, como por exemplo o relato de um marinheiro, que por ter o conhecimento de sua exata longitude, fato descoberto vinte séculos atrás, foi salvo de um possível naufrágio [...]

Neste sentido, esta pesquisa propõe uma estratégia didática para o ensino de potenciação através da Torre de Hanói, um jogo que envolve habilidades de raciocínio lógico e matemático, uma forma de introduzir a ideia de potenciação de forma desafiadora e inteligível para o aluno.

Segundo Kremer (2010, p. 34):

> A aprendizagem da matemática ocorre por um processo de evolução cognitiva que Piaget descreve na epistemologia genética como sendo conjuntos de conhecimentos e habilidades que a criança obtém em diferentes etapas do seu desenvolvimento. Somado a esse processo temos também os estímulos que o aprendente precisa receber para que sua aprendizagem seja significativa e os fatores psicossociais que interferem na aprendizagem matemática em função da construção do vínculo afetivo necessário para que o produto desse processo seja um indivíduo seguro de seu aprendizado.

A Torre de Hanói pode ser utilizada para abordar diversos conceitos matemáticos, como progressões geométricas, algoritmos e teoria dos conjuntos. Ajudar professores e alunos a alcançar uma aprendizagem mais efetiva e facilitar a incorporação de conceitos matemáticos importantes para a formação cidadã.

1.1 OBJETIVOS

Diante desse contexto, este trabalho irá apresentar uma proposta de atividade voltada para o estudo de potenciação a partir do jogo Torre de Hanói. Isto é, mostrará esse jogo como uma alternativa ou ferramenta que pode ser utilizada para o ensino de Matemática, facilitando a introdução e/ou desenvolvimento desse conteúdo que está presente em aplicações em diversas áreas como física, química, biologia, engenharia e finanças.

Além disso, também irá mostrar um estudo sobre uma extensão da Torre de Hanói, isto é, ampliar a quantidade de pinos para quatro e responder perguntas como: é possível estabelecer um número mínimo de movimentos capaz de solucionar o jogo mantendo as regras originais? É possível estabelecer uma lei que determine o número mínimo de movimentos dado uma quantidade x de discos qualquer?

1.1.1 Geral

O objetivo geral é mostrar que a partir do jogo Torre de Hanói é possível estabelecer um elo entre esse jogo e a potenciação, colaborando, como ferramenta, para o ensino de Matemática e dentro da realidade dos alunos.

Mostrar, também, que é possível fazer uma extensão da Torre de Hanói com quatro pinos. Apresentar e analisar resultados com a finalidade de conjecturar uma modelagem matemática. Essa modelagem deve ser capaz de fornecer a quantidade mínima de movimentos para finalizar o jogo.

1.1.2 Específicos

Ao final de todas as atividades com os alunos, deve-se notar que eles poderão conhecer as regras do jogo e entender a estratégia correta de efetuar a quantidade mínima de movimentos. Identificar a relação de dependência entre o número de discos e a quantidade mínima de movimentos necessários. Conhecer o conceito de potenciação e utilizá-lo na resolução de situações-problemas. Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação. Modelar e resolver situações-problemas usando os conhecimentos sobre funções exponenciais.

E, em relação aos estudos envolvendo a extensão da Torre de Hanói, deve-se entender a estratégia correta de efetuar a quantidade mínima de movimentos. Identificar a relação de dependência entre o número de discos e a quantidade mínima de movimentos necessários. Analisar informações obtidas da extensão do jogo como recurso para a construção de argumentação e da modelagem matemática. Conhecer o modelo matemático capaz de determinar a quantidade mínima de movimentos em função do número de discos utilizado. Modelar, generalizar e provar um modelo matemático capaz de determinar a quantidade mínima de movimentos para qualquer quantidade de discos que possa ser utilizado.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Será discorrido, no capítulo 2, algumas dificuldades que ocorrem durante o processo de aprendizagem envolvendo potenciação e sugestões/dicas possíveis de serem realizadas de modo a facilitar o ensino desse conteúdo.

No capítulo 3 será apresentado uma possível ferramenta facilitadora para o Ensino de Matemática. Tal ferramenta é o jogo. Assim, neste capítulo, será mostrado os benefícios do jogo, bem como exemplos de jogos relacionando com conteúdos que podem ser abordados, e o papel do professor na utilização dessa ferramenta.

No capítulo 4 será mostrado um jogo específico, a Torre de Hanói, além de apresentar esse jogo como ferramenta para o Ensino de Matemática. Será mostrado ainda como ele pode ser utilizado para o ensino de potenciação. Esta abordagem será apresentada em seis etapas: a primeira é a aplicação de uma avaliação diagnóstica; a segunda é a apresentação das atividades e as ferramentas que serão utilizadas; a terceira é uma revisão sobre assuntos relevantes para um bom desenvolvimento das atividades; a quarta é a divisão da turma em trios e análise dos "movimentos"realizados para finalizar o jogo da Torre de Hanói, essa etapa se divide em casos que depende da quantidade de discos utilizados; a quinta é a análise da lógica do jogo e obtenção da lei que determina a quantidade mínima de movimentos para finalizar o jogo em função da quantidade de discos; e a última é a aplicação de outra avaliação diagnóstica.

No capítulo 5 serão mostrados os resultados obtidos com a aplicação do jogo como ferramenta para o ensino de potenciação. Até aqui tem-se um bom estudo com intuito de contribuir com a melhoria da abordagem matemática com nossos alunos da educação básica, ou seja, contribuir com a melhoria do ensino no Brasil.

Durante esse estudo, foi identificada a possibilidade de também fazer um estudo sobre uma extensão da Torre de Hanói com quatro pinos, a qual é apresentada no capítulo 6. Neste capítulo mostram-se as observações das quantidades mínimas de movimentações para finalizar o jogo. Além disso, mostra-se uma conjectura sobre essa quantidade. Finalmente, no capítulo 7, tem-se as considerações finais.

2 DIFICULDADES EM MATEMÁTICA ENVOLVENDO POTÊNCIAS

A potenciação é uma operação matemática fundamental que representa as multiplicações consecutivas de um mesmo fator. A ideia de elevar um número a uma potência remonta a tempos antigos, tendo sido usada por civilizações como a babilônica, egípcia e chinesa em diversas aplicações práticas, como na construção de edifícios e na resolução de problemas cotidianos.

No livro *Introdução à História da Matemática*, de Eves (2011), relata que os babilônios, por exemplo, utilizavam um sistema sexagesimal de numeração, em que a base era 60. Nesse sistema as potências eram representadas por um conjunto de caracteres que indicavam as quantidades de unidades, dezenas, centenas, etc. Essa notação também foi utilizada pelos egípcios, que aperfeiçoaram os cálculos por meio de frações unitárias.

Na Grécia Antiga, matemáticos como Euclides e Arquimedes exploraram a potenciação em suas obras. Euclides, em sua obra *Os elementos*, traz no *Livro VII* duas definições que relacionam-se diretamente com as potências que utilizamos atualmente. Uma delas diz que "um número quadrado é o igual o mesmo número de vezes ou [o] contido por dois números iguais" (EUCLIDES, 2009, p. 270). A outra diz que "um cubo é o igual um número igual de vezes, um número igual de vezes, ou [o] contido por três números iguais" (EUCLIDES, 2009, p. 270).

Arquimedes desenvolveu um sistema numérico para representar números extremamente grandes em sua obra intitulada *O Contador de Grãos de Areia*. Esse sistema foi concebido para calcular o número de grãos de areia necessários para preencher uma esfera com raio igual à distância entre a Terra e o Sol. Arquimedes enfrentava dificuldades ao realizar cálculos com números muito grandes que envolviam multiplicação com a presença frequente do número 10. Para solucionar esse problema, ele criou uma tabela e desenvolveu um método de representação de números grandes utilizando algarismos especiais chamados por ele de "miríades", que atualmente conhecemos como expoentes. Essa abordagem permitiu simplificar o processo de realização de cálculos complexos.

Ao longo dos séculos, a potenciação tornou-se uma ferramenta cada vez mais importante em diversas áreas do conhecimento, desde a matemática, física, química, engenharia, ciências sociais, dentre outras. A notação atualmente utilizada, com a base elevada ao expoente indicado por um número sobrescrito, foi introduzida no século XVI pelo matemático alemão Michael Stifel, importante contribuição presente em sua obra *Arithmetica Integra* (1544). Além de contribuições no tratamento dos números negativos e radicais.

Hoje em dia, a potenciação é uma operação amplamente utilizada em diversas áreas do conhecimento, como na estatística, na análise de dados e na programação de computadores. A sua importância na matemática é inegável, sendo considerada uma das operações fundamentais ao lado da adição, subtração e multiplicação.

Veja, a seguir, alguns fatores que dificultam tanto a aprendizagem quanto o ensino relacionado ao estudo das potências.

2.1 FATORES QUE INFLUENCIAM A APRENDIZAGEM

A matemática é uma das disciplinas mais importantes do currículo escolar, pois é fundamental em diversos campos da vida, como a ciência, a tecnologia, a economia e até mesmo em tarefas cotidianas. No entanto, muitos estudantes brasileiros enfrentam dificuldades em aprender matemática e, mais especificamente, em entender conceitos de potências. Existem várias razões que podem explicar essa situação, incluindo a falta de recursos e investimentos na área da educação (FONSECA, 2022), a falta de professores especializados e a abordagem inadequada dos conteúdos matemáticos (GOMES, 2018).

Um dos fatores que dificultam a aprendizagem em matemática no Brasil é a falta de incentivo ao aprendizado dessa disciplina. Muitos estudantes consideram a matemática difícil e sem aplicação prática, o que acaba desmotivando-os a estudar a matéria. Além disso, muitos professores não conseguem transmitir de forma clara os conceitos matemáticos, o que dificulta a compreensão dos alunos. Segundo Vitti (1999, p. 19):

> O fracasso do ensino de matemática e as dificuldades que os alunos apresentam em relação a essa disciplina não é um fato novo, pois vários educadores já elencaram elementos que contribuem para que o ensino da matemática seja assinalado mais por fracassos do que por sucessos.

Uma das principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes em relação às potências é a falta de entendimento dos conceitos fundamentais. Muitos alunos não compreendem a ideia de que uma potência é a multiplicação de uma base por si mesma várias vezes. Isso pode levar a erros frequentes em cálculos simples, como a multiplicação de potências com a mesma base.

Por não entenderem os conceitos fundamentais, geram dificuldades ainda maiores como compreender a propriedade das potências com expoente negativo e fracionário. Os alunos muitas vezes têm dificuldade em entender que uma potência com expoente negativo é o inverso da mesma potência com expoente positivo e que uma potência com expoente fracionário é uma raiz da mesma potência com expoente inteiro. Além disso, a falta de habilidade em operar com potências também é um obstáculo para muitos estudantes, como já citado.

Outro fator que contribui para as dificuldades de aprendizagem em potências é a falta de prática. A resolução de problemas matemáticos envolvendo potências requer um alto nível de habilidade e prática, e muitos estudantes não têm acesso a atividades que lhes permitam aprimorar suas habilidades.

A forma como a matemática é ensinada também pode ser um obstáculo para os estudantes. Muitos professores utilizam uma abordagem baseada na memorização de fórmulas e procedimentos, em vez de ensinar aos alunos a lógica por trás dos conceitos matemáticos. Isso pode levar a uma falta de compreensão dos fundamentos da matemática e dificuldades em aplicá-la em situações do mundo real.

Tais dificuldades, de acordo com Prado (2000, p. 93) são evidenciadas devido a falta de: "atenção às aulas, atenção nos cálculos, base na matéria, interesse, tempo, treino e repetição, cumprir as tarefas de casa e acompanhamento dos pais". Os alunos também revelam que os professores "não explicam bem, não mantém disciplina na sala, deixam de corrigir todos os exercícios, não respeitam as dificuldades dos alunos".

Segundo Sanchez (2004, p. 174), os obstáculos no processo de aquisição de conhecimento podem ser manifestados nas seguintes formas:

> Dificuldades em relação ao desenvolvimento cognitivo e à construção da experiência matemática; do tipo da conquista de noções básicas e princípios numéricos, da conquista da numeração, quanto à prática das operações básicas, quanto à mecânica ou quanto à compreensão do significado das operações.
>
> Dificuldades na resolução de problemas, o que implica a compreensão do problema, compreensão e habilidade para analisar o problema e raciocinar matematicamente.
>
> Dificuldades quanto às crenças, às atitudes, às expectativas e aos fatores emocionais acerca da matemática. Questões de grande interesse e que com o tempo podem dar lugar ao fenômeno da ansiedade para com a matemática e que sintetiza o acúmulo de problemas que os alunos maiores experimentam diante do contato com a matemática.

Sanchez (2004, p. 174) cita, também, como dificuldades na construção do conhecimento, as barreiras relacionadas à própria complexidade da matemática:

> [...] como seu alto nível de abstração e generalização, a complexidade dos conceitos e algoritmos. A hierarquização dos conceitos matemáticos, o que implica ir assentando todos os passos antes de continuar, o que nem sempre é possível para muitos alunos; a natureza lógica e exata de seus processos, algo que fascinava os pitagóricos, dada sua harmonia e sua "necessidade", mas que se torna muito difícil pra certos alunos; a linguagem e a terminologia utilizadas, que são precisas, que exigem uma captação (nem sempre alcançada

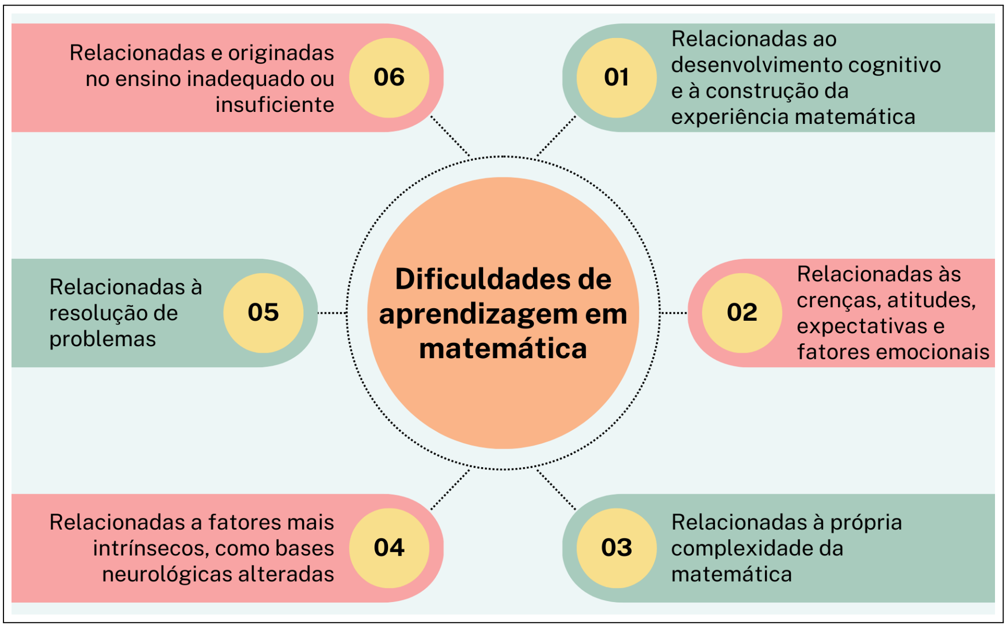
> por certos alunos), não só do significado, como da ordem e da estrutura em que se desenvolve.

Ainda, segundo Sanchez (2004, p. 174), empecilhos na apropriação do conhecimento podem ser apresentados das seguintes maneiras:

> [...] dificuldades mais intrínsecas, como bases neurológicas, alteradas. Atrasos cognitivos generalizados ou específicos. Problemas lingüísticos que se manifestam na matemática; dificuldades atencionais e motivacionais; dificuldades na memória, etc.
>
> Dificuldades originadas no ensino inadequado ou insuficiente, seja porque à organização do mesmo não está bem seqüenciado, ou não se proporcionam elementos de motivação suficientes; seja porque os conteúdos não se ajustam às necessidades e ao nível de desenvolvimento do aluno, ou não estão adequados ao nível de abstração, ou não se treinam as habilidades prévias; seja porque a metodologia é muito pouco motivadora e muito pouco eficaz.

Veja um resumo desses fatores na Figura 1, eles estão relacionados à aprendizagem matemática de um modo amplo, não apenas ao conteúdo de potências.

Figura 1 – Dificuldades de aprendizagem em matemática



Fonte**:** Adaptado de Sanchez (2004)

Além disso, a falta de investimentos em educação, isto é, em recursos e tecnologias educacionais, pode tornar ainda mais difícil para os estudantes a compreensão dos conceitos matemáticos. Muitas escolas públicas não contam com recursos suficientes para oferecer um ensino de qualidade em matemática, incluindo materiais didáticos atualizados e professores bem preparados. Além disso, muitos alunos não têm acesso a cursos de reforço ou apoio escolar para superar suas dificuldades.

Por fim, as dificuldades em matemática e potências podem ter consequências significativas na vida dos estudantes. Além de afetar o desempenho escolar e a capacidade de prosseguir nos estudos, a falta de habilidade em matemática também pode limitar as opções de carreira e afetar a vida profissional no futuro.

Diante dessas dificuldades, é fundamental que haja um esforço conjunto de educadores, gestores e governantes para melhorar a qualidade do ensino de matemática em geral e em potências em particular. É necessário que sejam feitos esforços para melhorar a qualidade do ensino de matemática no Brasil, incluindo investimentos em recursos educacionais e formação de professores mais capacitados. Além disso, é importante incentivar e motivar os alunos a aprender matemática e a desenvolver habilidades em potências desde os anos iniciais da educação básica, para que possam ter uma base sólida e um futuro promissor.

2.2 DESAFIOS NO ENSINO

O ensino de potenciação é um dos tópicos fundamentais da matemática, com aplicações em diversas áreas, incluindo física, química, biologia, engenharia e finanças. Na física, ela é usada para descrever grandezas como energia, velocidade, aceleração e intensidade de um campo. Na química, é utilizada para descrever a concentração de soluções e a quantidade de uma substância em uma reação.

Na biologia, para descrever o crescimento de populações, a taxa de mutação genética e o tamanho de células e organismos. Na engenharia, é usada para descrever a potência de motores, a capacidade de carga de estruturas e a eficiência de sistemas de energia renovável.

Em finanças, é amplamente utilizada para cálculos de juros compostos e crescimento de investimentos ao longo do tempo. Além disso, as potências também são usadas em modelos de avaliação de opções e futuros financeiros, que são essenciais para gerenciar riscos e tomar decisões de investimento informadas.

Entretanto, muitos estudantes enfrentam dificuldades em compreender e aplicar os conceitos relacionados às potências. Neste texto, discutiremos algumas estratégias para um ensino mais efetivo de potências.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) - já relata a potência como objeto do conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas no 6º ano do Ensino Fundamental, assim,

> (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias

> variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
>
> (EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora. (BRASIL, 2018, p. 257)

Uma das principais dificuldades encontradas pelos estudantes em relação às potências é a compreensão do conceito de expoente. É importante que o professor explique que o expoente representa o número de vezes que a base aparece na operação da multiplicação. Por exemplo, na expressão 2^3, a base é 2 e o expoente é 3, o que significa uma multiplicação de três fatores iguais e iguais a 2, isto é, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. Mas, para isso, é necessário que ocorra uma aprendizagem significativa, assim, de acordo com Antunes, *apud* Kremer (2010, p. 12),

> Quando um professor, após narrar um episódio ou uma experiência ou após exercitar um raciocínio, instiga seu aluno a dizê-lo de seu jeito próprio, compreendendo “o que” e percebendo “por que” diz ou faz, ele está transformando esse aluno e, dessa forma, produzindo aprendizagens significativas. (Celso Antunes, blog.educacional.com.br)

Além disso, é necessário a explanação das propriedades da potenciação, tais como a multiplicação e a divisão de potências de mesma base. Essas propriedades ajudam os estudantes a simplificar expressões e a resolver problemas envolvendo essa operação. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) -, em relação as potenciações, relatam

> Compreensão da potência com expoente inteiro positivo como produto reiterado de fatores iguais, identificando e fazendo uso das propriedades da potenciação em situações-problema. Atribuição de significado à potência de expoente nulo e negativo pela observação de regularidades e pela extensão das propriedades das potências com expoente positivo. (BRASIL, 1998, p. 72)

De acordo com Paias (2019, p. 43), a Matemática necessita de suas várias formas de composição de cada um de seus objetos. A busca desta pluralidade no Ensino de Matemática busca promover uma compreensão relevante destes objetos a partir de situações de aprendizagem.

Desse modo, o ensino do objeto potência deve levar o aluno a conseguir comunicar-se com a linguagem matemática como evidencia Paias (2019, p. 43):

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental evidenciam que os alunos devem comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e as diferentes representações Matemáticas.

O ensino de potências pode ser facilitado de diversas formas como, por exemplo, analisar os erros cometidos pelos alunos. Segundo Silva (2019, p. 14), “descobrir os possíveis problemas que se encontram por trás dos erros cometidos serve como uma forma de entender as dificuldades dos alunos e pensar em estratégias metodológicas que possam rever essa situação”.

Existem outras diversas alternativas que podem ser adotadas para melhorar a aprendizagem em potenciação. Veja algumas delas a seguir.

Ensinar o conceito de potenciação de forma clara e objetiva. É importante que o professor explique o conceito dessa operação de forma clara, utilizando exemplos e situações que façam sentido para os alunos. É preciso também destacar as suas propriedades, como, por exemplo, as propriedades da multiplicação e da divisão de mesma base.

Dispor de atividades lúdicas e dinâmicas. Jogos e atividades que envolvam potenciação podem tornar o aprendizado mais interessante e estimulante. Por exemplo, jogos de tabuleiro que envolvam o cálculo de potências podem ajudar os alunos a desenvolver habilidades de raciocínio lógico e matemático.

Utilizar tecnologia educacional. Softwares, aplicativos e outras ferramentas digitais podem ser utilizadas para tornar o aprendizado desse conteúdo mais dinâmico e interativo. Simuladores e jogos educacionais podem ser utilizados para explorar e experimentar conceitos relacionados às potências de forma mais concreta e visual.

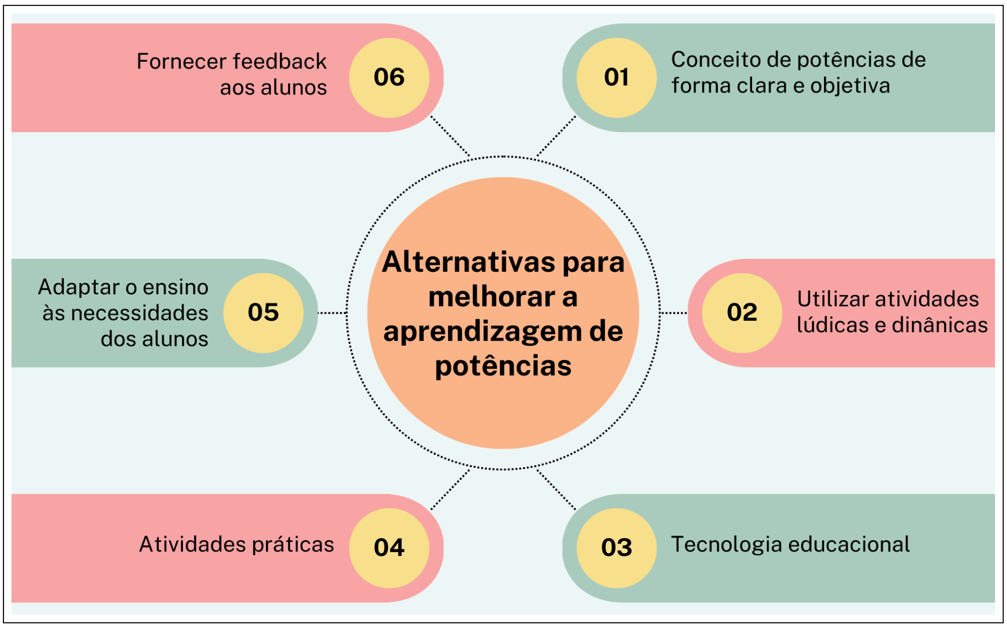
Realizar atividades práticas. Situações problema que envolvam potenciação, tais como o cálculo de juros compostos em aplicações financeiras, podem ajudar os alunos a compreender a relevância e a aplicação das potências no mundo real.

Adaptar o ensino às necessidades dos alunos. É importante que o professor adapte o ensino dessa operação às necessidades e habilidades individuais dos alunos. Alguns alunos podem precisar de mais tempo ou de uma abordagem diferente para compreender os conceitos relacionados às potências.

Fornecer feedback aos alunos. É relevante que os alunos recebam feedback constante sobre o seu desempenho e progresso no aprendizado da potenciação. Isso pode ajudá-los a identificar suas dificuldades e a ajustar sua estratégia de estudo.

Veja, na Figura 2, as alternativas citadas de forma resumida:

Figura 2 – Alternativas para melhorar a aprendizagem de potências



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Portanto, para melhorar a aprendizagem em potenciação é preciso adotar uma abordagem clara, objetiva e adaptada às necessidades dos alunos, utilizando atividades lúdicas, práticas, tecnologia educacional e feedback constante para estimular a compreensão e aplicação dos conceitos relacionados às potências.

3 O JOGO COMO FERRAMENTA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Ao longo do tempo, a humanidade nos mostra a construção de uma prática que concebemos por jogo. Sua definição acaba assumindo um contexto social e cultural. Dessa forma, suas diversas faces geram percepções e entendimentos diversos levando a divergência de conceitos. Segundo Kishimoto (2015, p. 2), é difícil definir o que seria o jogo, pois:

> [...] um mesmo comportamento pode ser visto como jogo ou não-jogo. Se para um observador externo a ação da criança indígena que se diverte atirando com arco e flecha em pequenos animais é uma brincadeira, para a comunidade indígena nada mais é que uma forma de preparo para a arte da caça necessária à subsistência da tribo. Assim, atirar com arco e flecha, para uns, é jogo, para outros, é preparo profissional.

A prática dos jogos está presente na sociedade desde a infância, e desempenha um papel fundamental na formação das abstrações inerentes aos indivíduos, como a socialização, o cumprimento de regras e condições, e o estímulo da imaginação e da criatividade. Ela fornece uma maneira de experimentar "sensações" que serão encontradas no cotidiano, como resolver problemas e refletir sobre as decisões tomadas, ou seja, estimula o raciocínio, a significância e o sentido. Segundo Huizinga (2001, p. 3-4):

> O jogo é mais que um fenômeno fisiológico ou reflexo psicológico. Ultrapassa os limites da atividade puramente física ou biológica. É uma função significante, isto é, encerra determinado sentido. No jogo, existe alguma coisa "em jogo". Que transcende as necessidades imediatas da vida e confere um sentido à ação. Todo o jogo significa alguma coisa.

Assim, uma ferramenta com grandes potenciais para auxiliar no ensino de Matemática são os jogos matemáticos. A utilização de jogos permite e cria condições de modo que todos os alunos consigam ver ou rever a possibilidade de aprender e conhecer. Com isso, os alunos podem sentir o gosto, o encanto e captação de atenção. Conforme Grando (2000, p. 15):

> A busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para o aluno, que lhe proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, enfim, à construção e que lhe possibilite um prazer em aprender, não pelo utilitarismo,mas pela investigação, ação e participação coletiva de um "todo" que constitui uma sociedade crítica e atuante, leva-nos a propor a inserção do jogo no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem.

O processo de ensino aprendizagem atual visa cada vez mais a formação humana integral do aluno. Por isso, a construção do conhecimento promovida pela disciplina de Matemática é fundamental para otimizar a capacidade dos alunos de raciocinar logicamente, afim de solucionar questões quantitativas e também de analisar e solucionar problemas do dia a dia com maior efetividade. Como enfatizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> [...] o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (BRASIL, 1998, p. 26)

Um modelo de ensino empregado pelos professores de Matemática consiste em passar o conteúdo na lousa, explicar esse conteúdo, realizar aplicação e correção de exercícios, tirar dúvidas e, finalmente, aplicar alguma avaliação, geralmente uma prova. É um método cabível, mesmo sendo um modelo tradicional.

Para Zaidan *et al.* (2010, p. 2):

> É importante destacar que, nos estudos, para melhor compreensão dos processos de ensino e de aprendizagem, procura-se conhecer como a pessoa pensa matematicamente e, ainda, como sente, intui, imagina, conta, mede, relaciona, reflete, generaliza, investiga, representa ou simboliza de maneira que construa pontes entre os seus conhecimentos e os novos, aprendendo a pensar matematicamente. Em muitos desses estudos, os pesquisadores investigam as práticas de ensino de matemática, as abordagens dos principais conceitos, o "fazer matemática" na escola por meio dos "diálogos" e outras mediações presentes nas relações da sala de aula. Também outros estudos relacionam a matemática aos processos formativos emocionais e nas relações com aspectos da diversidade sócio-econômico-cultural.

Olhando por esse lado, a Educação Matemática vem sofrendo reflexões, renovações e modificações diariamente, em virtude disso, existem diversos motivos para discutir sobre o tema, pois o modelo tradicional de ensinar o conteúdo é visto, muitas vezes, como rigoroso, formal e abstrato.

Com isso, recentemente, começaram a surgir e fortalecerem-se novas metodologias de ensino, práticas pedagógicas e tecnologias educacionais. A formação continuada dos professores se torna fundamental para a apropriação dessas metodologias e tecnologias. Assim, segundo Mota (2022, p. 1), o professor se torna "capaz de mediar os conflitos que possam surgir durante o ano letivo, auxiliando melhor colegas, pais, alunos e aos demais da comunidade escolar".

O uso de jogos no ensino de matemática tem se mostrado uma ferramenta valiosa para auxiliar os alunos a compreenderem conceitos matemáticos de maneira mais clara e lúdica. Os jogos oferecem uma forma divertida e interativa de explorar conceitos matemáticos e aplicar esses conhecimentos em situações reais. Isso ajuda a motivar os alunos e aumenta o seu interesse pela disciplina.

Um dos principais benefícios dos jogos é que eles incentivam os alunos a participarem ativamente do processo de aprendizagem, ajudando a tornar a matemática mais interessante e envolvente. Além disso, os jogos ajudam a desenvolver habilidades sociais, como trabalho em equipe, comunicação e resolução de conflitos. Segundo Santos *et al.* (2021, p. 1):

> A utilização de jogos pode ser forte aliada do professor no ensino da Matemática, que muitas vezes é encarada pelos alunos como disciplina difícil de ser aprendida. Com a utilização de jogos, é possível aumentar a curiosidade e a atenção dos alunos, tornando as aulas mais interessantes e prazerosas, e consequentemente a matéria a ser ensinada, facilitando que aumentem também a motivação e o envolvimento dos alunos para aprender os conteúdos. Além disso, também tem como vantagem fixar os conteúdos de forma dinâmica, reduzindo a dificuldade dos alunos que têm limitações quanto ao aprendizado da Matemática e facilitar a socialização entre os próprios alunos à medida que eles interagem durante os jogos.

Existem diversos tipos de jogos que podem ser usados no ensino de matemática, desde jogos de tabuleiro e cartas até jogos digitais. Jogos como o xadrez, o dominó, o Banco Imobiliário e o Jogo da Vida, por exemplo, são jogos clássicos que podem ser facilmente adaptados para ensinar conceitos matemáticos, como estratégia, probabilidade e aritmética.

Os jogos também podem ser usados para ensinar conceitos matemáticos mais complexos, como álgebra e geometria. Jogos como o Quebra-Cabeça de Tangram e o Cubo de Rubik, por exemplo, são jogos que ajudam a desenvolver habilidades de pensamento espacial e visualização, fundamentais para o aprendizado de geometria.

Além disso, os jogos também podem ser usados para ensinar conceitos de programação e lógica, com jogos como o Minecraft e o Roblox, que permitem que os alunos criem e programem seus próprios jogos. Observe a Figura 3.

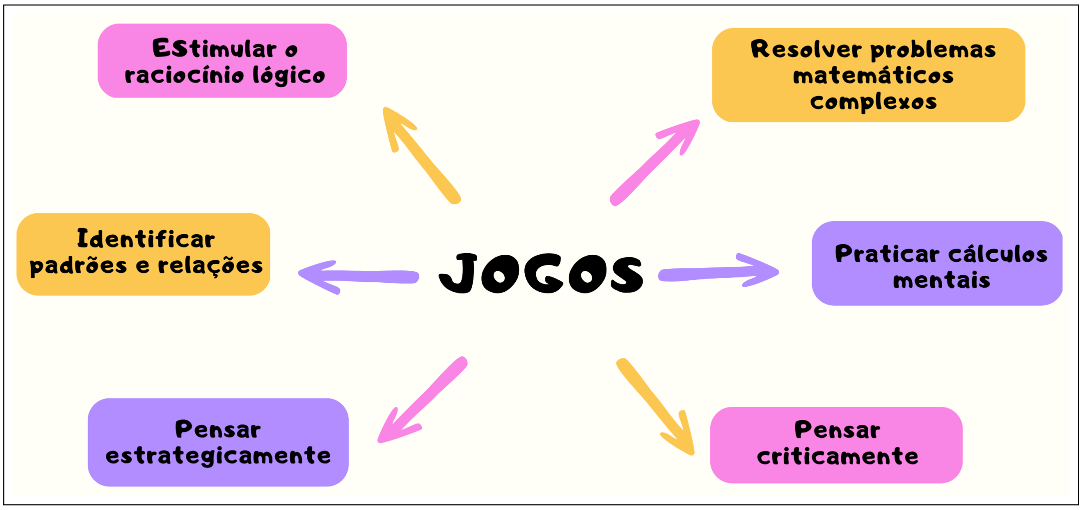
Figura 3 – Relação entre jogos e conceitos matemáticos

EXEMPLOS DE JOGOS	EXEMPLOS DE CONCEITOS MATEMÁTICOS A SEREM EXPLORADOS
Xadrez; Dominó; Banco Imobiliário; Jogo da Vida.	Estratégia, probabilidade e aritmética.
Quebra-Cabeça de Tangram; Cubo de Rubik.	Álgebra e geometria (ajuda a desenvolver habilidades de pensamento espacial e visualização).
Minecraft; Roblox.	Programação e lógica.

Fonte**:** Elaborado pelo autor

Os jogos podem ser usados em todas as idades, desde a educação infantil até o ensino superior. Podem ser adaptados para ensinar conceitos matemáticos de diferentes níveis de dificuldade. Ao jogar, os alunos podem aprender matemática de várias maneiras. Por exemplo, eles podem aprender a resolver problemas matemáticos complexos, desenvolver habilidades de pensamento crítico e estratégia, praticar cálculos mentais, identificar padrões e relações matemáticas e desenvolver habilidades de raciocínio lógico. Veja a Figura 4.

Figura 4 – Algumas contribuições dos jogos no ensino de matemática



Fonte: Elaborado pelo autor

Além disso, os jogos permitem que os alunos experimentem o aprendizado em um contexto prático e significativo, ajudando a desenvolver habilidades matemáticas essenciais como as já citadas na Figura 4.

3.1 O PAPEL DO PROFESSOR COMO MEDIADOR

O uso de jogos no ensino de matemática pode trazer muitos benefícios para os alunos, como tornar a aprendizagem mais envolvente e divertida, estimular o pensamento crítico e ajudar a desenvolver habilidades sociais, como trabalho em equipe e comunicação. No entanto, é importante que o professor atue como mediador nesse processo, garantindo que o jogo seja utilizado de maneira eficaz e que os alunos possam extrair o máximo de benefícios dele.

O papel do professor como mediador começa antes mesmo de o jogo ser utilizado em sala de aula. É importante que o professor escolha jogos adequados ao nível de seus alunos e aos objetivos de aprendizagem desejados. O professor deve se familiarizar com as regras e a mecânica do jogo e planejar como ele será utilizado em sala de aula, definindo claramente os objetivos de aprendizagem e as atividades que serão realizadas antes, durante e depois do jogo. Segundo Freitas (2020, p. 8):

> [...] para trabalhar com jogos de forma educativa no âmbito escolar é indispensável que o docente desenvolva estratégias que despertem o interesse das crianças. Essas atividades devam ser ministradas de uma maneira que as prepare para saber competir de maneira sadia e compreenda que perder ou ganhar são probabilidades de um jogo.

Durante o jogo, o professor deve monitorar o progresso dos alunos, orientando-os e tirando dúvidas quando necessário. É importante que o professor estimule a participação de todos os alunos, garantindo que todos tenham oportunidade de contribuir e se engajar no jogo. O professor também deve ser um observador atento, analisando o desempenho dos alunos e identificando possíveis dificuldades ou áreas que precisam de reforço.

Após o jogo, o professor deve liderar uma discussão sobre a experiência do jogo, incentivando os alunos a refletir sobre as habilidades e conhecimentos que foram desenvolvidos e como eles podem ser aplicados em outras situações. O professor pode usar a discussão para reforçar conceitos matemáticos, destacar as habilidades que foram desenvolvidas durante o jogo e ajudar os alunos a perceberem como eles podem utilizar essas habilidades em outras áreas da vida.

De acordo com Freitas (2020, p. 9):

> O professor deve ter uma relação mediadora nesse processo de atividades lúdicas e a prática pedagógica, para que ocorra uma aprendizagem significativa e não seja somente uma forma de diversão da criança. Essa prática facilita o trabalho do professor, e proporciona um melhor desenvolvimento da criança no processo de ensino e aprendizagem, sendo uma excelente forma de obter êxito na vida escolar e na vida em sociedade.

O papel do professor como mediador é fundamental para garantir que o uso de jogos no ensino de matemática seja eficaz. Ao planejar, monitorar e orientar o jogo, o professor pode ajudar os alunos a desenvolver habilidades matemáticas e sociais importantes, além de tornar a aprendizagem mais divertida e significativa.

4 TORRE DE HANÓI COMO INSTRUMENTO NO ENSINO DE POTÊNCIAS

O jogo Torre de Hanói, Figura 5, é uma excelente ferramenta para ensinar conceitos matemáticos, como recorrência, sequências e padrões, além de ajudar a desenvolver habilidades de resolução de problemas e raciocínio lógico.

O objetivo do jogo é mover todos os discos de uma haste para outra, seguindo algumas regras simples. Os discos são empilhados em ordem decrescente de tamanho, e só é permitido mover um disco de cada vez. Além disso, um disco maior nunca pode ser colocado em cima de um disco menor.

Figura 5 – Torre de Hanói

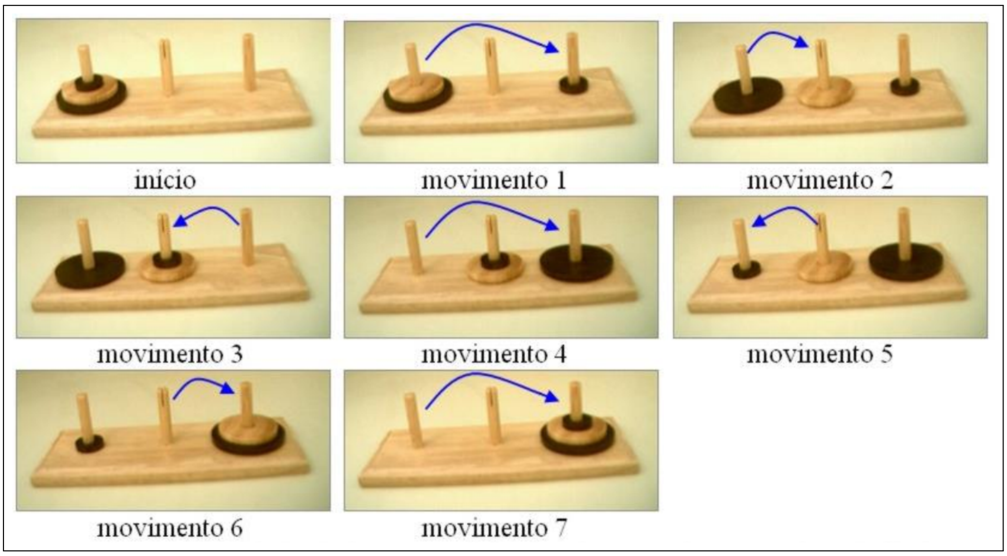
Fonte: Disponível em: <https://encurtador.com.br/empHL>

Embora pareça simples à primeira vista, o jogo envolve uma série de desafios que podem ajudar a desenvolver habilidades matemáticas importantes. Por exemplo, o jogo pode ser usado para ensinar conceitos de recursão, onde os alunos podem explorar como a mesma lógica é usada repetidamente para resolver problemas cada vez mais complexos.

Pode ser usado para ensinar conceitos de sequências e padrões, onde os alunos podem explorar como os padrões de movimento dos discos se repetem em cada movimento. E pode ser usado para ensinar conceitos de lógica, onde os alunos podem explorar as diferentes possibilidades.

A Torre de Hanói também pode ser utilizada como uma ferramenta no ensino de potências. Para relacionar esse jogo com as potências, pode-se utilizar a ideia de que cada movimento de um disco de uma haste para outra é um exemplo de uma operação de potência. Por exemplo, se tivermos três discos e quisermos movê-los todos para a terceira haste, teríamos que fazer $2^3 - 1 = 7$ movimentos no total, Figura 6. Isso ocorre porque cada movimento pode ser visto como uma operação de potência, em que o número de movimentos necessários é dado por $2^n - 1$, sendo n o número de discos.

Figura 6 – Torre de Hanói com 3 discos



Fonte: Adaptado de Silva (2015a, p. 36)

Há a possibilidade de ser adaptado para ajudar os alunos a compreenderem melhor as propriedades das potenciações, como a multiplicação de potências de mesma base e a divisão de potências de mesma base. Por exemplo, pode-se utilizar discos de diferentes cores para representar potências de bases diferentes, e pedir aos alunos que resolvam desafios envolvendo a multiplicação ou divisão dessas potências. Outra forma de utilizar a Torre de Hanói para esse conteúdo é através da construção de um algoritmo que solucione o quebra-cabeça de forma eficiente.

O jogo da Torre de Hanói é uma ferramenta útil no ensino de potenciação, pois ajuda a tornar o aprendizado mais lúdico e interativo. Ao jogar, os alunos são incentivados a pensar de forma estratégica e a relacionar as operações do jogo com as propriedades desta operação, tornando o aprendizado mais significativo e divertido.

4.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente trabalho foi desenvolvido na Escola Estadual de Educação Profissional Professora Maria de Jesus Rodrigues Alves, é uma escola de Ensino Médio e Técnico Profissional localizada na cidade de Pacujá/CE. É "consorciada", isto é, ela contempla alunos de outras cidades, Mucambo e Graça. A escola possui vagas limitadas distribuídas igualmente entre as três cidades, ou seja, todo ano são abertas 60 vagas para cada município, totalizando 180 vagas. Assim, há alunos de diferentes culturas, níveis cognitivos, engajamentos sociais, níveis emocionais, entre outros fatores.

Foi escolhida, dentre as turmas presentes na escola, a do 3º ano do curso Técnico em Administração, composta por 36 alunos, para participar de maneira mais ativa nas atividades propostas. A escolha desse grupo foi baseada em sua maior “bagagem” de conhecimento, já que se encontram no último ano da Educação Básica, bem como na disponibilidade para participar das atividades. Nessa turma, existem estudantes com dificuldades em matemática, ou seja, com baixo desempenho e que não enxergam (ou não percebem) a “beleza” que a disciplina pode proporcionar, embora haja também aqueles que apreciam a matéria.

As atividades envolvendo os alunos se divide em seis etapas bem específicas.

- A primeira é a aplicação uma avaliação diagnóstica inicial.
- A segunda é a apresentação das atividades e as ferramentas que serão utilizadas.
- A terceira é uma revisão sobre assuntos relevantes para um bom desenvolvimento.
- A quarta etapa é a divisão da turma em 12 trios e a análise dos “movimentos” realizados para finalizar o jogo da Torre de Hanói, essa etapa se divide em casos que depende da quantidade de discos utilizados.
- A quinta etapa é a análise da lógica do jogo e obtenção da fórmula que determina a quantidade mínima de movimentos para finalizar o jogo em função da quantidade de discos.
- A sexta etapa é a aplicação de uma avaliação diagnóstica final.

Na primeira etapa deve-se fazer a aplicação de uma avaliação diagnóstica inicial, como disposta Apêndice A. Tal avaliação é relevante para analisar o efeito que o jogo terá na construção do conhecimento ao ser comparado com a avaliação diagnóstica final e o processo que intercala essas avaliações.

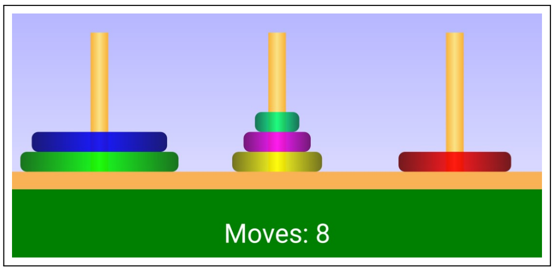
Na segunda etapa apresentam-se as atividades que serão desenvolvidas de uma maneira bem geral, mas mostrando para os alunos quais comandos serão utilizados para um bom andamento de todas as atividades previstas. Em seguida, apresenta-se a ferramenta a ser utilizada nas atividades, ou seja, apresenta-se a Torre de Hanói, Figura 7, bem como suas regras.

Figura 7 – Torres de Hanói presente na escola

Fonte**:** Acervo do autor

Ainda nessa etapa, também é mostrado o aplicativo "Tower of Hanoi" (TOWER..., 2011), Figura 8, disponível na PlayStore gratuitamente, usado durante a realização das atividades propostas, pois não havia Torre de Hanói física suficiente para todos. Para fins didáticos cada pino da Torre de Hanói foi numerado de 1 a 3 da esquerda para a direita.

Figura 8 – Aplicativo Tower of Hanoi em execução



Fonte**:** Adaptado da PlayStore (TOWER..., 2011)

Na terceira etapa realiza-se uma breve revisão sobre potências, progressões aritméticas, progressões geométricas e função exponencial. Tal revisão tinha por finalidade relembrar conceitos, estimular o raciocínio lógico e observar o conhecimento prévio dos alunos sobre esses assuntos.

Na quarta etapa faz-se a divisão da turma em 12 trios e, em seguida, eles começaram a analisar as movimentações dos discos e, em especial, a quantidade de movimentos realizados. Durante essa etapa os trios irão preencher um questionário como disposto no Apêndice C. Essa etapa se divide em casos, veja.

Caso 1: análise usando 1 e 2 discos. Eles terão um tempo para solucionar o jogo de até 5 minutos. Realizarão anotações sobre a quantidade total de movimentos que executaram. Realizarão anotações sobre a quantidade de movimentos de cada disco. Realizarão estimativa da quantidade mínima de movimentos para a quantidade seguinte de discos.

Caso 2: análise usando 3 discos. Eles terão um tempo para solucionarem o jogo de até 5 minutos. Terão que realizar estudos semelhantes ao do caso 1. Além disso, analisarão se houve movimentos semelhantes com a quantidade anterior de discos. Ainda, terão que analisar se houve diferença entre, por exemplo, mudar a torre do pino nº 1 para o pino nº 2 usando o pino nº 3 como intermediário e do pino nº 1 para o pino nº 3 usando o pino nº 2 como intermediário.

Caso 3: análise usando 4 discos. Eles terão um tempo para solucionarem o jogo de até 10 minutos. Farão estudos semelhantes ao do caso 2.

Caso 4: análise usando 5 discos. Eles terão um tempo para solucionarem o jogo de até 15 minutos. Realizarão anotações sobre a quantidade total de movimentos. Farão anotações sobre a quantidade de movimentos de cada disco. Analisarão se houve movimentos semelhantes com a quantidade anterior de discos. Realizarão estimativa da quantidade mínima de movimentos para a quantidade seguinte de discos.

Caso 5: análise usando 6 discos. Eles terão um tempo para solucionarem o jogo de até 20 minutos. Efetuarão estudos semelhantes ao do caso 4.

Caso 6: análise usando 7 discos. Realizarão estimativas e anotações sobre a quantidade total de movimentos com base nos resultados anteriores. Realizarão estimativas e anotações sobre a quantidade de movimentos de cada disco também com base nos resultados anteriores.

Caso 7: análise usando 8 discos. Realizarão pesquisas semelhantes ao do caso 6.

Caso 8: análise usando 9 discos. Farão, também, estudos semelhantes ao do caso 6. Realizarão estimativa da quantidade mínima de movimentos para a quantidade seguinte de discos.

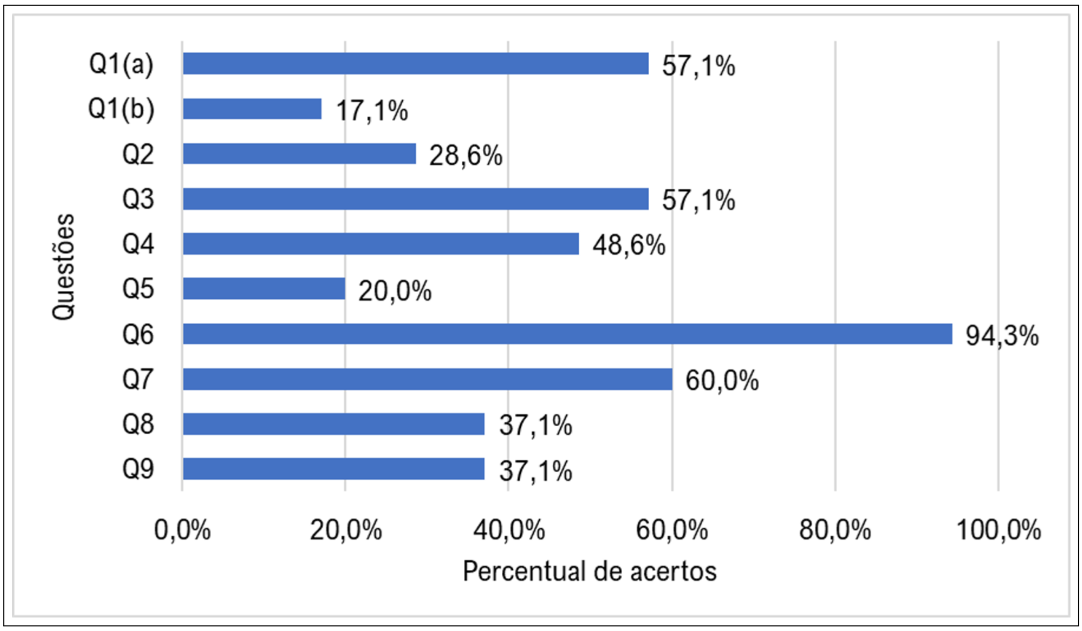
Na quinta etapa discutem-se os resultados obtidos pelos alunos. Também discutem-se suas proposições para obtenção de um modelo que determine a quantidade mínima de movimentos. Em seguida, mostra-se que a quantidade mínima de movimentos de cada disco gera uma progressão geométrica (P.G.) de razão $\frac{1}{2}$. Por fim, chega-se a fórmula ou lei que determina a quantidade mínima de movimentos usando a soma dos termos de uma P.G. infinita.

Na sexta etapa aplica-se uma avaliação diagnóstica final, como disposta Apêndice B. Tal avaliação é relevante para analisar o efeito que o jogo teve na construção do conhecimento ao ser comparado com a avaliação diagnóstica inicial e o processo que intercalou essas avaliações.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após a aplicação da avaliação diagnóstica inicial, etapa inicial, verifica-se que o percentual de acerto para cada item ou questão é: questão 1 (item a), 57,1%; questão 1 (item b), 17,1%; questão 2, 28,6%; questão 3, 57,1%; questão 4, 48,6%; questão 5, 20,0%; questão 6, 94,3%; questão 7, 60,0%; questão 8, 37,1% e questão 9, 37,1%. Percebem-se esses resultados na Figura 9. Entenda por acerto como sendo uma sequência lógica e plausível que resulte na resolução do problema.

Figura 9 – Gráfico com percentual de acertos do Diagnóstico Inicial



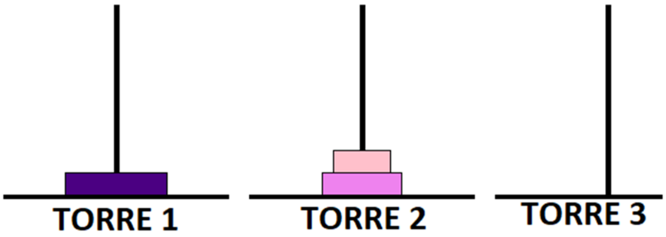
Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando as respostas e justificativas realizadas pelos alunos foi possível ver que uma das principais dificuldades é a má, ou até mesmo falta de, interpretação do problema, levando, assim, a conclusões errôneas. Para manter a identidade dos alunos em sigilo, serão chamados os 36 alunos por letras.

Os alunos tiveram um baixo rendimento no item (b) da questão 1, Figura 10, com um percentual de acerto de 17,1%. Isso pode ser justificado por alguns fatores, como os alunos não terem entendido as regras do jogo Torre de Hanói as quais estavam descritas no início da avaliação diagnóstica e, também, pelo enunciado do referido item não ter ficado tão claro ou explícito.

Figura 10 – Avaliação Diagnóstica Inicial: Questão 1

01. A figura abaixo mostra a Torre de Hanói com 3 discos após algumas movimentações, que se iniciam no pino 1.



a) Qual é o número mínimo de movimentos que podem ter sido efetuados até essa posição?

___

___

b) Qual o mínimo de movimentações necessárias para finalizar o jogo?

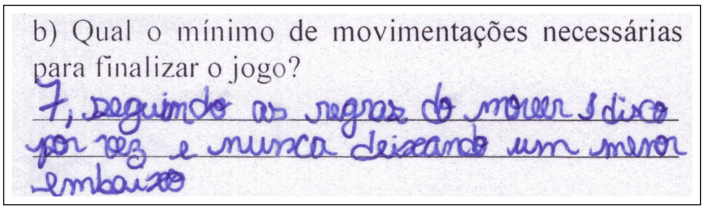
___

___

Fonte**:** Elaborado pelo autor

De acordo com esse resultado, os alunos que estão dentro do percentual indicado (17,1%), interpretaram quantos movimentos eram necessários para finalizar o jogo com base na figura disposta na questão, como era esperado e desejado, porém há uma porcentagem de acerto de 20,0%, levando-se em consideração a outra maneira que alguns alunos enxergaram o item, eles mostraram quantos movimentos eram necessários para finalizar o jogo a partir do seu início, ou seja, responderam o total de movimentos. Pode-se observar esse caso na Figura 11.

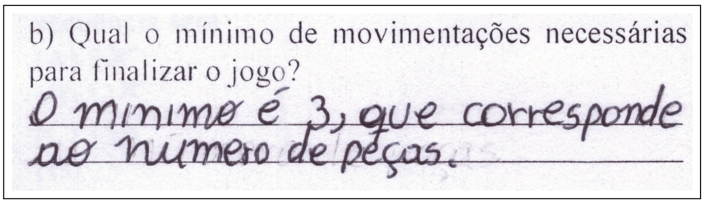
Figura 11 – Questão 1 / Item b / Resposta do aluno A


b) Qual o mínimo de movimentações necessárias para finalizar o jogo?
7, seguindo as regras de mover 1 disco por vez e nunca deixando um menor embaixo

Fonte**:** Acervo do autor

A Figura 12 enfatiza o fato de alguns alunos não terem compreendido as regras do jogo ou o enunciado, levando-os a conclusões precipitadas ou errôneas.

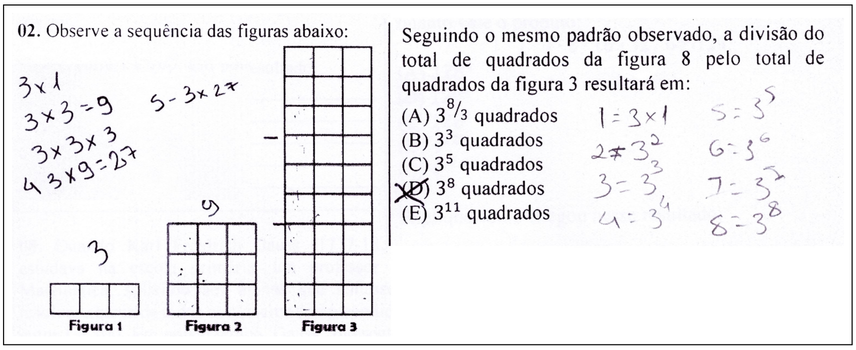
Figura 12 – Questão 1 / Item b / Resposta do aluno B



Fonte**:** Acervo do autor

Os alunos também não tiveram um rendimento satisfatório na questão 2, com um percentual de acerto de 28,6%, o baixo rendimento é justificado por não lembrarem ou, na pior das hipóteses, não saberem das propriedades da potenciação. Pode-se observar esse caso na Figura 13.

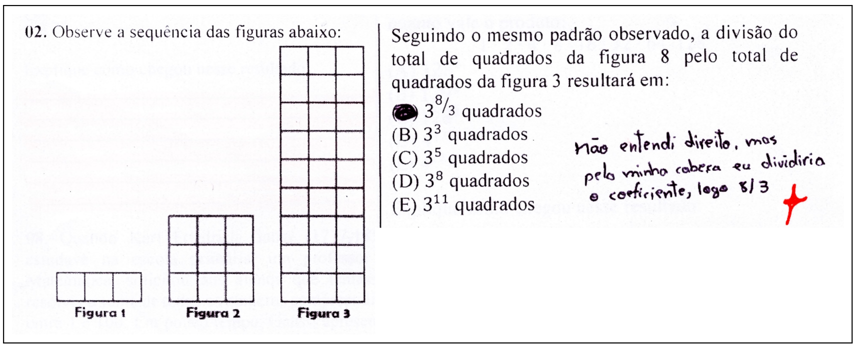
Figura 13 – Questão 2 / Resposta do aluno C



Fonte**:** Acervo do autor

Além disso, alguns estudantes não compreenderam o problema ou como as imagens dispostas nessa questão estavam sendo construídas, ou seja, não compreenderam que se tratava de uma progressão geométrica ou não enxergaram próximo disso. Pode-se observar esse caso na Figura 14.

Figura 14 – Questão 2 / Resposta do aluno D

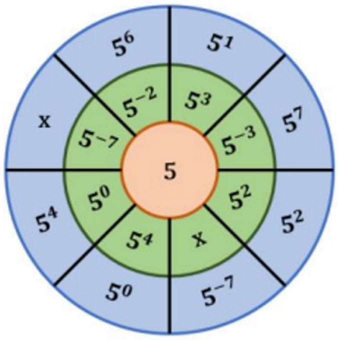


Fonte**:** Acervo do autor

Outra questão em que não houve um bom rendimento por parte dos alunos, foi a questão 5, Figura 15. O motivo principal foi um erro de digitação no enunciado do problema. Deveria ser 5^5 no lugar de 55.

Figura 15 – Avaliação Diganóstica Inicial: Questão 5

05. No círculo mágico abaixo, o produto dos três valores, partindo do centro para a extremidade, resulta sempre em 55.



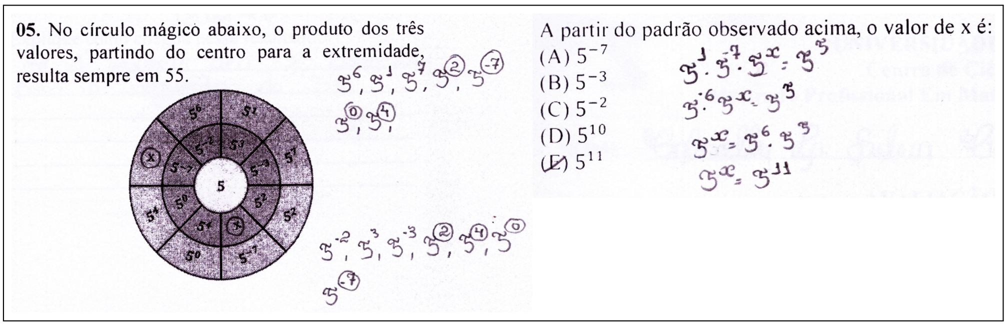
A partir do padrão observado acima, o valor de x é:

(A) 5^{-7}
(B) 5^{-3}
(C) 5^{-2}
(D) 5^{10}
(E) 5^{11}

Fonte: Elaborado pelo autor

Alguns alunos notaram o erro observando o comportamento das potências presentes na imagem disposta na questão bem como suas alternativas. Pode-se observar na Figura 16 que o aluno percebeu o erro.

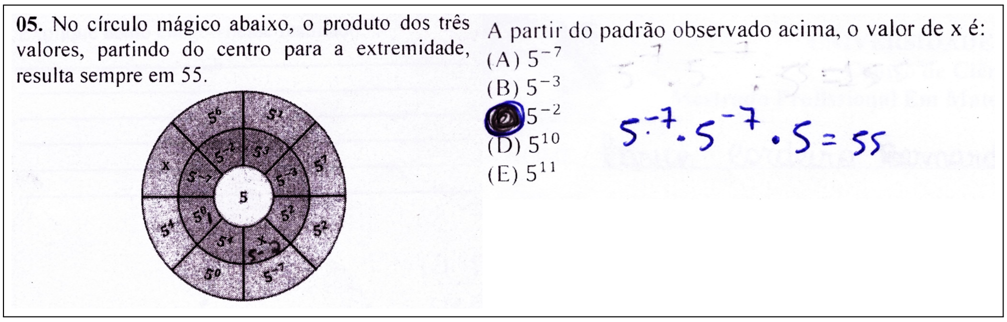
Figura 16 – Questão 5 / Resposta do aluno E



Fonte: Acervo do autor

Os alunos que não tiveram essa percepção acabaram por não resolver o problema tanto pelo fato de não conseguir chegar a alguma das alternativas quanto, assim como na questão 2, não lembrarem das propriedades das potências. Pode-se observar esse caso na Figura 17.

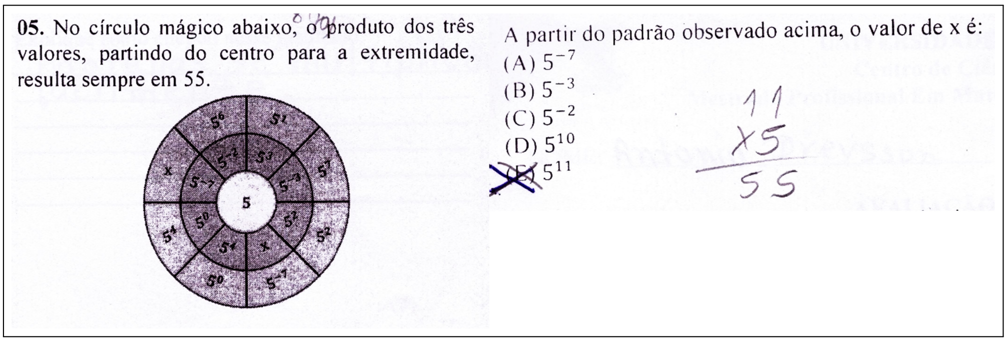
Figura 17 – Questão 5 / Resposta do aluno F



Fonte**:** Acervo do autor

Outros não compreenderam o que era necessário fazer para resolver o problema, bem como em outras questões, de acordo com relatos dos próprios alunos durante a aplicação dessa avaliação diagnóstica. Pode-se observar esse caso na Figura 18.

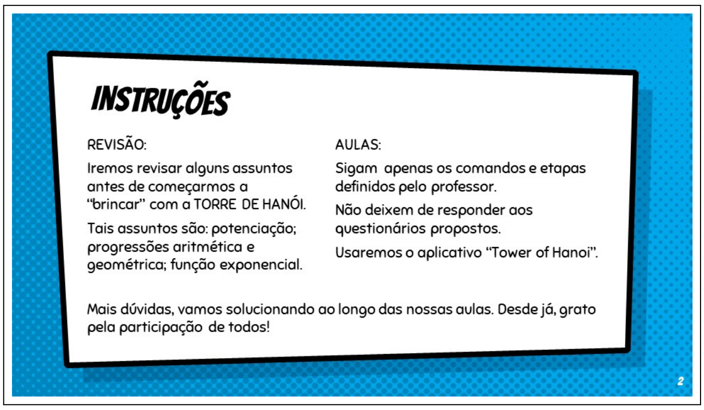
Figura 18 – Questão 5 / Resposta do aluno G



Fonte**:** Acervo do autor

Dando continuidade, chegando na segunda etapa, apresentaram-se as atividades que seriam desenvolvidas de uma maneira bem geral, mas mostrando para os alunos quais comandos seriam utilizados para um bom andamento de todas as atividades previstas. Como pode ser observado na Figura 19 a qual é uma parte da apresentação feita para os alunos.

Figura 19 – Instruções para o desenvolvimento das atividades



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Em seguida, apresentou-se a Torre de Hanói, Figura 7, bem como suas regras, deixando que os alunos pegassem e manipulassem as torres livremente. Também foi apresentado o aplicativo "Tower of Hanoi", Figura 20, o qual foi usado durante a realização das atividades propostas, pois não havia Torre de Hanói física suficiente para todos.

Figura 20 – Aplicativo Tower of Hanoi

Fonte**:** Adaptado da PlayStore (TOWER..., 2011)

Na etapa seguinte, terceira etapa, foram realizadas algumas revisões e explorado alguns problemas, Figura 21, com intuito de analisar o conhecimento prévio que os alunos tinham bem como fazê-los relembrar de conceitos e ideias relevantes, além de já começar a estimular o raciocínio para as próximas etapas.

Figura 21 – Alunos explorando situações problema

Fonte**:** Acervo do autor

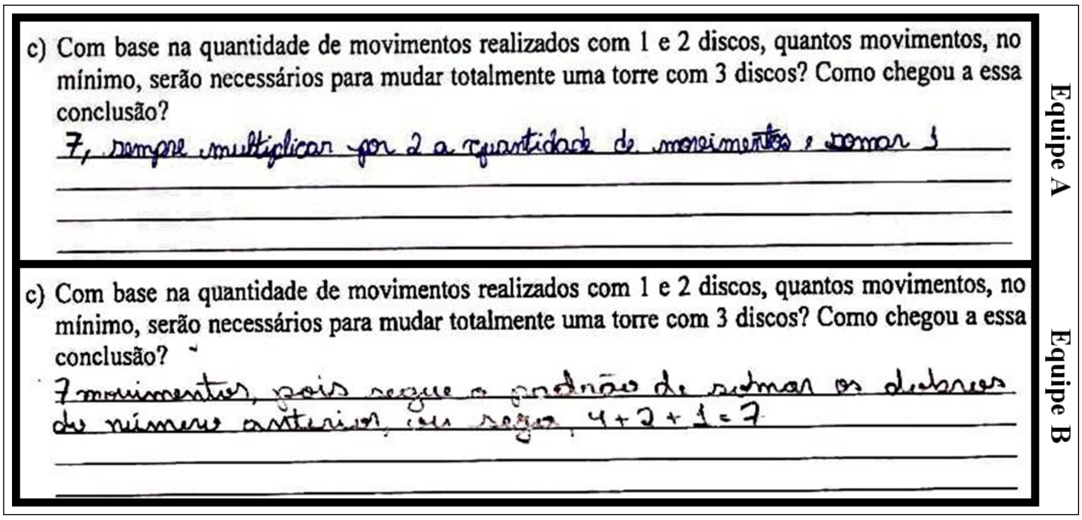
Na quarta etapa realizou-se a divisão da turma em trios e, em seguida, eles, Figura 22, começaram a analisar as movimentações dos discos e, em especial, a quantidade de movimentos realizados. Para manter a identidade dos alunos presentes nos trios, serão chamadas as 9 equipes por letras. Nessa etapa cada equipe foi preenchendo o questionário disposto no Apêndice C.

Figura 22 – Equipes trabalhando com a Torre de Hanói

Fonte: Acervo do autor

Durante esse processo, os alunos apresentaram respostas interessantes como o item (c) da questão 3, partindo do ponto de vista do que eles já tinham vivenciado até o momento, pode-se ver algumas dessas respostas na Figura 23.

Figura 23 – Questão 3 / Item c / Respostas das equipes A e B



c) Com base na quantidade de movimentos realizados com 1 e 2 discos, quantos movimentos, no mínimo, serão necessários para mudar totalmente uma torre com 3 discos? Como chegou a essa conclusão?

7, sempre multiplicar por 2 a quantidade de movimentos e somar 1

Equipe A

c) Com base na quantidade de movimentos realizados com 1 e 2 discos, quantos movimentos, no mínimo, serão necessários para mudar totalmente uma torre com 3 discos? Como chegou a essa conclusão?

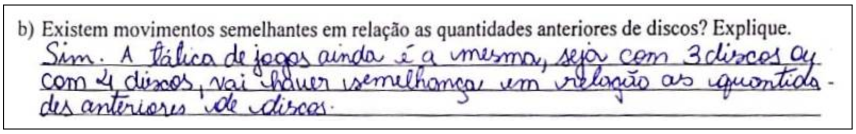
7 movimentos, pois segue o padrão de somar os dobros do número anterior, ou seja, 4+2+1=7

Equipe B

Fonte: Acervo do autor

Nota-se, também, no decorrer das aplicações de cada caso presente nessa etapa, as esquipes começaram a perceber que as movimentações tinham um certo padrão, isto é, analisando as respostas dos questionários, as equipes tiveram a percepção que as respostas para cada caso eram semelhantes, pois o que acabava mudando era apenas a quantidade de movimentos, como pode ser visto na Figura 24.

Figura 24 – Questão 5 / Item b / Resposta da equipe C

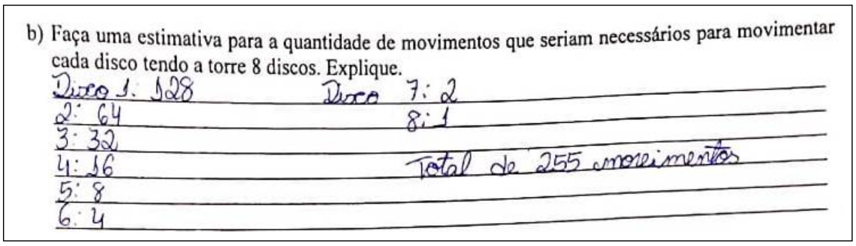

b) Existem movimentos semelhantes em relação as quantidades anteriores de discos? Explique.

Sim. A tática de jogos ainda é a mesma, seja com 3 discos ou com 4 discos, vai haver semelhança em relação as quantidades anteriores de discos.

Fonte: Acervo do autor

Pode-se ver na Figura 25 que os alunos perceberam o padrão de movimentos do jogo, ou seja, notaram que os discos, do menor para o maior, tinha o dobro de movimentos em relação ao disco seguinte.

Figura 25 – Questão 9 / Item b / Resposta da equipe D

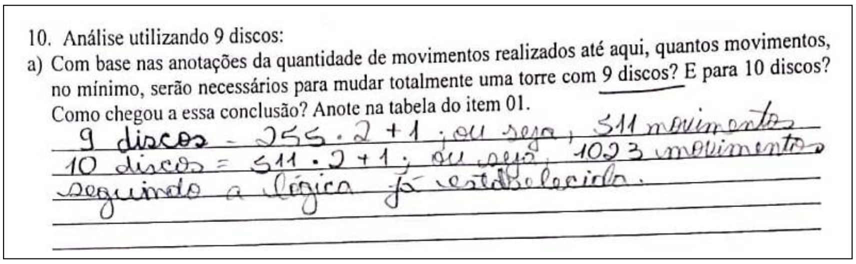

b) Faça uma estimativa para a quantidade de movimentos que seriam necessários para movimentar cada disco tendo a torre 8 discos. Explique.

Disco 1: 128 Disco 7: 2
2: 64 8: 1
3: 32
4: 16 Total de 255 movimentos
5: 8
6: 4

Fonte: Acervo do autor

Pode-se ver na Figura 26 que a observação realizada pelos alunos como a feita na Figura 25, ajudaram-lhes a realizar estimativas para casos posteriores.

Figura 26 – Questão 10 / Item a / Resposta da equipe E


10. Análise utilizando 9 discos:

a) Com base nas anotações da quantidade de movimentos realizados até aqui, quantos movimentos, no mínimo, serão necessários para mudar totalmente uma torre com 9 discos? E para 10 discos? Como chegou a essa conclusão? Anote na tabela do item 01.

9 discos = 255 . 2 + 1, ou seja, 511 movimentos
10 discos = 511 . 2 + 1, ou seja, 1023 movimentos
seguindo a lógica já estabelecida.

Fonte: Acervo do autor

Na quinta etapa, com base nas percepções das equipes, onde perceberam que a quantidade mínima de movimentos de cada disco formava uma progressão geométrica (P.G.), discutiu-se um modelo matemático que determina a quantidade mínima de movimentos para uma certa quantidade x de discos, como pode ser observado na Figura 27.

Figura 27 – Questões 1 e 2 / Respostas da equipe F

01. Tabela para registro da quantidade total de movimentos para cada quantidade "x" de discos utilizada.

Quantidade de discos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Total de movimentos	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

02. Tabela para registro da quantidade de movimentos de cada disco para cada quantidade "x" de discos utilizada.

	Quantidade de movimentos de cada disco							
Quantidade de discos	**Disco 1**	**Disco 2**	**Disco 3**	**Disco 4**	**Disco 5**	**Disco 6**	**...**	**Total de movimentos**
1	1						...	1
2	2	1					...	3
3	4	2	1				...	7
4	8	4	2	1			...	15
5	16	8	4	2	1		...	31
6	32	16	8	4	2	1	...	63
...	...	...	...	...	...	...	...	...
x	2^{x-1}	2^{x-2}	2^{x-3}	2^{x-4}	2^{x-5}	2^{x-6}	...	2^x-1

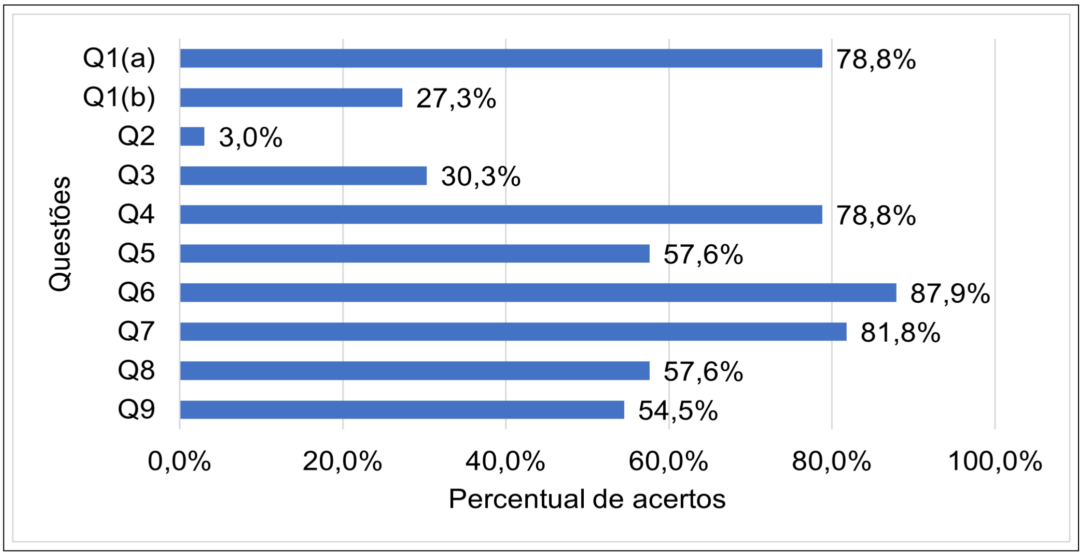
Fonte: Acervo do autor

Viu-se que esse modelo poderia ser encontrado através da soma dos termos de uma progressão geométrica (P.G.) infinita, equação 5.1, como observa-se abaixo, notou-se que a razão dessa P.G. era $\frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
T(x) &= 2^{x-1} + 2^{x-2} + \cdots + 2^{x-6} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^{x-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1-\frac{1}{2}} \\
&= 2^{x-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\frac{1}{2}} \\
&= 2^x \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right] \\
&= 2^x - \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^x \\
&= 2^x - 1
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

Após a aplicação da avaliação diagnóstica final (Apêndice B), etapa final, verifica-se que o percentual de acerto para cada item ou questão é: questão 1 (item a), 78,8%; questão 1 (item b), 27,3%; questão 2, 3,0%; questão 3, 30,3%; questão 4, 78,8%; questão 5, 57,6%; questão 6, 87,9%; questão 7, 81,8%; questão 8, 57,6% e questão 9, 54,5%. Entenda por acerto como sendo uma sequência lógica e plausível que resulte na resolução do problema. Percebem-se esses resultados na Figura 28.

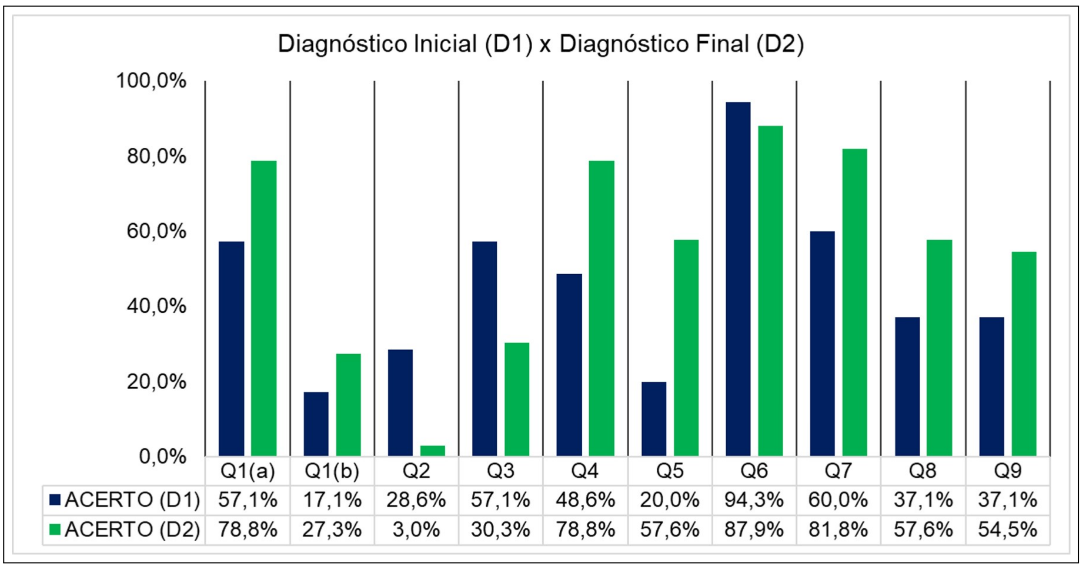
Figura 28 – Gráfico com percentual de acertos do Diagnóstico Final



Fonte: Elaborado pelo autor

Agora, será visto um comparativo entre as avaliações diagnósticas, Figura 29.

Figura 29 – Gráfico comparativo de acertos



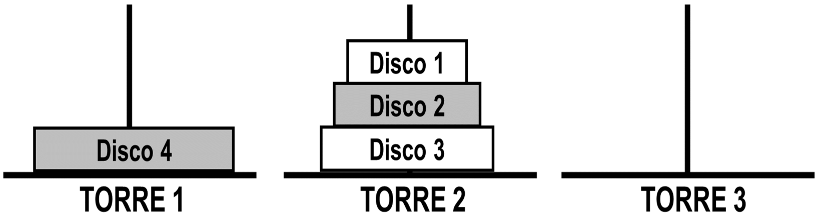
	Q1(a)	Q1(b)	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
ACERTO (D1)	57,1%	17,1%	28,6%	57,1%	48,6%	20,0%	94,3%	60,0%	37,1%	37,1%
ACERTO (D2)	78,8%	27,3%	3,0%	30,3%	78,8%	57,6%	87,9%	81,8%	57,6%	54,5%

Fonte: Elaborado pelo autor

Ressalta-se que no item (b) da questão 1, Figura 30, manteve-se o mesmo enunciado alterando apenas a quantidade de discos da imagem, acarretando o mesmo problema de interpretação da avaliação diagnóstica inicial.

Figura 30 – Avaliação diagnóstica final / Questão 1

01. A figura abaixo mostra a Torre de Hanói com 3 discos após algumas movimentações, que se iniciam no pino 1.



a) Qual é o número mínimo de movimentos que podem ter sido efetuados até essa posição?

____

____

b) Qual o mínimo de movimentações necessárias para finalizar o jogo?

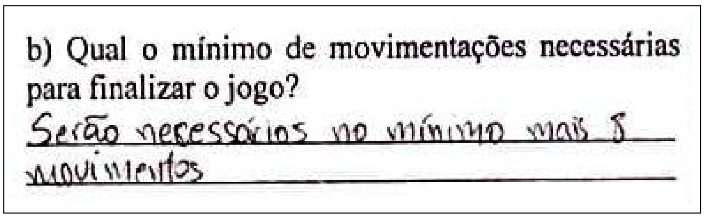
____

____

Fonte: Elaborado pelo autor

Ou seja, os alunos que estão dentro do percentual indicado (27,3%, registrando, assim, uma melhora nesse indicador), interpretaram quantos movimentos eram necessários para finalizar o jogo com base na figura disposta na questão, como era esperado e desejado. Pode-se observar um desses casos na Figura 31.

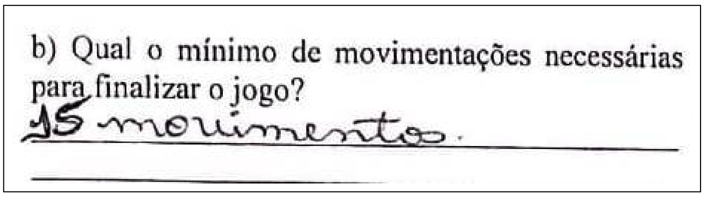
Figura 31 – Questão 1 / Item b / Resposta do aluno A


b) Qual o mínimo de movimentações necessárias para finalizar o jogo?
Serão necessários no mínimo mais 5 movimentos

Fonte: Acervo do autor

Porém há uma porcentagem de acerto de 54,4%, levando-se em consideração a outra maneira que boa parte dos alunos enxergaram o item, eles mostraram quantos movimentos eram necessários para finalizar o jogo a partir do seu início, ou seja, responderam o total de movimentos. Pode-se observar um desses casos na Figura 32.

Figura 32 – Questão 1 / Item b / Resposta do aluno B

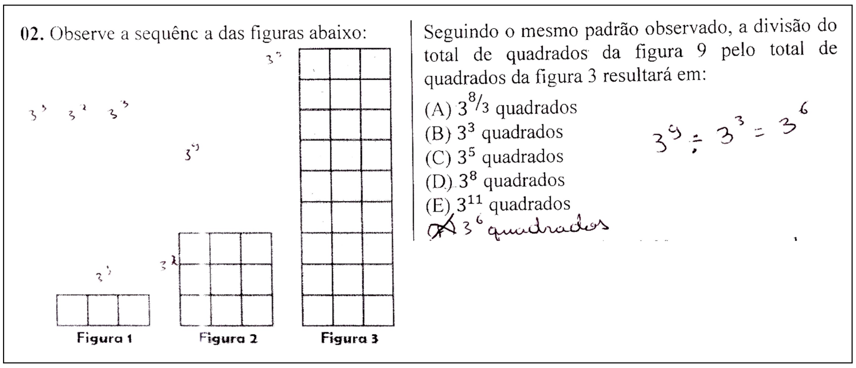

b) Qual o mínimo de movimentações necessárias para finalizar o jogo?

15 movimentos.

Fonte: Acervo do autor

O baixo rendimento dos alunos na questão 2 deve-se ao fato da divergência entre enunciado e alternativas, ou seja, não havia alternativa correta. Tiveram alunos que não responderam por causa deste contraste, em virtude disso alguns outros apenas marcaram uma alternativa de forma aleatória. Vale ressaltar que alguns alunos marcaram o item, que para eles, julgavam ser mais próximo da resposta correta. Mas teve aluno que criou uma nova alternativa a qual era a solução do problema, como se pode ver na Figura 33.

Figura 33 – Questão 2 / Resposta do aluno C


02. Observe a sequênc a das figuras abaixo:

Seguindo o mesmo padrão observado, a divisão do total de quadrados da figura 9 pelo total de quadrados da figura 3 resultará em:

(A) $3^{8/3}$ quadrados
(B) 3^3 quadrados
(C) 3^5 quadrados
(D) 3^8 quadrados
(E) 3^{11} quadrados
F) 3^6 quadrados

$3^9 \div 3^3 = 3^6$

Fonte: Acervo do autor

Em todas as questões da avaliação diagnóstica final há alterações sutis nos enunciados, tanto para analisar a melhoria da leitura e interpretação como, consequentemente, a melhoria nos níveis de acerto. De modo geral, como pode ser observado na Figura 29, houve uma melhora significativa em todos os aspectos, principalmente no aprender e saber utilizar a potenciação.

Portanto, enxergar a potenciação de forma lúdica, isto é, utilizar o jogo Torre de Hanói como ferramenta para o ensino dessa operação foi satisfatório, pois os alunos conseguiram ver, de forma concreta, como uma potência se comporta, além do estímulo no desenvolvimento do raciocínio lógico.

6 TORRE DE HANÓI ESTENDIDA COM 4 PINOS

Para o desenvolvimento dessa extensão, foram realizados dois experimentos (A e B). O experimento A consiste em analisar os resultados obtidos usando somente três pinos e aumentando a quantidade de discos em uma unidade começando com apenas um disco. Esse procedimento no experimento A é repetido aumentando a quantidade de pinos para 4 e mantendo-se as regras originais do jogo.

O experimento B consiste em analisar os resultados do experimento A e construir uma modelagem matemática que determine a quantidade mínima de movimentos usando 4 pinos em função da quantidade x de discos.

6.1 RESULTADOS DO EXPERIMENTO A

No início do experimento A, a análise da quantidade mínima de movimentos foi realizada observando apenas a quantidade total de movimentos feitos começando com um disco e aumentando essa quantidade em uma unidade, ou seja, não levava em conta a quantidade de movimentos individuais de cada disco. Mas após algumas repetições para as mesmas quantidades obtiveram-se resultados divergentes. Em virtude desse problema, foi seguido o método aplicado no capítulo 4 do presente trabalho, ou seja, analisar os movimentos de cada disco (como disposto na Figura 35), a partir daí os resultados para a repetição da mesma quantidade total de discos começou a se repetir, além de ter sido possível observar padrões nos movimentos.

Para essas observações foi utilizada a Torre de Hanói Estendida produzida por meu pai, Antonio José, como vista na Figura 34, além das Torres de Hanói presentes na escola e do software Excel.

Figura 34 – Torre de Hanói Estendida

Fonte: Acervo do autor

A construção da Figura 35 possui as seguintes informações. A primeira coluna informa a quantidade total de discos explorada. Da segunda coluna até a antepenúltima informa a quantidade mínima de movimentos para cada disco, onde $D1 < D2 < D3 < D4 < \cdots < Dx$ em relação ao diâmetro de cada disco, e a última coluna informa a quantidade mínima de movimentos para cada quantidade de discos utilizada. Os valores em preto são referentes a quantidade mínima de movimentos para cada disco obtidas realizando o experimento; os valores em vermelho são estimativas que foram realizadas depois de observados os padrões de movimentos à medida que ia aumentando a quantidade discos.

Os resultados para a Torre de Hanói com três pinos e como obtê-los já foi discutido e verificado no capítulo 5 do presente trabalho, ou seja, viu-se o “comportamento” do jogo e a lei que determina a sua quantidade mínima de movimentos no seu formato original a qual é $T(x) = 2^x - 1$. Observemos estes valores apresentados na Figura 35.

Figura 35 – Resultados da Torre de Hanói usando 3 pinos

Nº	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15	D16	D17	D18	D19	D20	...	Dx	TOTAL
1	1																				...		1
2	2	1																			...		3
3	4	2	1																		...		7
4	8	4	2	1																	...		15
5	16	8	4	2	1																...		31
6	32	16	8	4	2	1															...		63
7	64	32	16	8	4	2	1														...		127
8	128	64	32	16	8	4	2	1													...		255
9	256	128	64	32	16	8	4	2	1												...		511
10	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1											...		1023
11	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1										...		2047
12	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1									...		4095
13	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1								...		8191
14	8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1							...		16383
15	16384	8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1						...		32767
16	32768	16384	8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1					...		65535
17	65536	32768	16384	8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1				...		131071
18	131072	65536	32768	16384	8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1			...		262143
19	262144	131072	65536	32768	16384	8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1		...		524287
20	524288	262144	131072	65536	32768	16384	8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	...		1048575
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x	2^{x-1}	2^{x-2}	2^{x-3}	2^{x-4}	2^{x-5}	2^{x-6}	2^{x-7}	2^{x-8}	2^{x-9}	2^{x-10}	2^{x-11}	2^{x-12}	2^{x-13}	2^{x-14}	2^{x-15}	2^{x-16}	2^{x-17}	2^{x-18}	2^{x-19}	2^{x-20}	...	1	$2^x - 1$

Fonte**:** Elaborado pelo autor

A Figura 36 apresenta as primeiras tentativas de encontrar a quantidade mínima de movimentos para algumas quantidades de discos utilizando quatro pinos. As tentativas iniciais foram efetuadas até chegar a um volume de 17 discos, com isso começou-se a notar que a partir de um certo volume de discos, alguns deles seguiam o padrão de movimentos para três pinos.

Figura 36 – Resultados da Torre de Hanói usando 4 pinos / Caso 1

Nº	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15	D16	D17	D18	D19	D20	...	TOTAL
1	1																				...	1
2	2	1																			...	3
3	2	2	1																		...	5
4	4	2	2	1																	...	9
5	4	4	2	2	1																...	13
6	4	4	2	4	2	1															...	17
7	4	4	2	8	4	2	1														...	25
8	8	8	4	4	2	4	2	1													...	33
9	8	8	4	8	4	2	4	2	1												...	41
10	8	8	4	8	4	2	8	4	2	1											...	49
11	8	8	4	8	4	2	16	8	4	2	1										...	65
12	16	8	16	8	4	8	4	2	8	4	2	1									...	81
13	16	16	8	16	8	4	8	4	2	8	4	2	1								...	97
14	16	16	8	16	8	4	8	4	2	16	8	4	2	1							...	113
15	16	16	8	16	8	4	8	4	2	32	16	8	4	2	1						...	145
16	32	32	16	32	16	8	16	8	4	8	4	2	8	4	2	1					...	193
17	32	32	16	32	16	8	16	8	4	8	4	2	16	8	4	2	1				...	209
18																					...	
19																					...	
20																					...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x																					...	

Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 37 apresenta outras tentativas de encontrar a quantidade mínima de movimentos para algumas quantidades de discos utilizando quatro pinos. Essas tentativas foram efetuadas até chegar a um volume de 20 discos, ou seja, os volume de discos que já tinham sido realizados foram refeitos, com isso encontrou-se um valor diferente para o volume de 16 discos, nas primeiras tentativas a quantidade mínima de movimentos foram 193 e nessas outras foram 177, mas, ainda, a partir de um certo volume de discos, alguns deles seguiam o padrão de movimentos para três pinos. Com essas observações foram realizadas estimativas para os volumes de 21, 22 e 23 discos.

Figura 37 – Resultados da Torre de Hanói usando 4 pinos / Caso 2

Nº	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15	D16	D17	D18	D19	D20	D21	D22	D23	...	TOTAL
1	1																							...	1
2	2	1																						...	3
3	2	2	1																					...	5
4	4	2	2	1																				...	9
5	4	4	2	2	1																			...	13
6	4	4	2	4	2	1																		...	17
7	4	4	2	8	4	2	1																	...	25
8	8	8	4	4	2	4	2	1																...	33
9	8	8	4	8	4	2	4	2	1															...	41
10	8	8	4	8	4	2	8	4	2	1														...	49
11	8	8	4	8	4	2	16	8	4	2	1													...	65
12	16	8	16	8	4	8	4	2	8	4	2	1												...	81
13	16	16	8	16	8	4	8	4	2	8	4	2	1											...	97
14	16	16	8	16	8	4	8	4	2	16	8	4	2	1										...	113
15	16	16	8	16	8	4	8	4	2	32	16	8	4	2	1									...	145
16	32	16	16	8	16	8	4	8	4	2	32	16	8	4	2	1								...	177
17	32	32	16	32	16	8	16	8	4	8	4	2	16	8	4	2	1							...	209
18	32	32	16	32	16	8	16	8	4	8	4	2	32	16	8	4	2	1						...	241
19	32	32	16	32	16	8	16	8	4	8	4	2	64	32	16	8	4	2	1					...	305
20	64	32	64	32	16	32	16	8	16	8	4	8	4	2	32	16	8	4	2	1				...	369
21	64	64	32	64	32	16	32	16	8	16	8	4	8	4	2	32	16	8	4	2	1			...	433
22	64	64	32	64	32	16	32	16	8	16	8	4	8	4	2	64	32	16	8	4	2	1		...	497
23	64	64	32	64	32	16	32	16	8	16	8	4	8	4	2	128	64	32	16	8	4	2	1	...	625
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x																								...	

Fonte: Elaborado pelo autor

Com essas novas observações, notou-se que uma provável solução para obter a quantidade mínima de movimentos é movimentar, inicialmente, "isoladamente" uma certa quantidade de discos do volume total, os restantes fazem os movimentos do caso com três pinos, e, finalmente, repetem-se os processos com os discos que ficaram "isolados" para finalizar o jogo com o mínimo de movimentos possíveis.

Denota-se estes discos "isolados" de "fixos" e os demais de "caso 3 torres". Assim, de acordo com as observações anteriores, tem-se que a quantidade mínima de movimentos será dada pelo dobro de movimentos da parte "fixa" adicionado do valor para o "caso 3 torres". A partir daí projetaram-se tabelas como as dispostas a seguir, veja a Tabela 1. Antes, é válido ressaltar e fácil ver que para finalizar o jogo com 4 pinos e 1 disco faz-se apenas um movimento, e com 4 pinos e 2 discos faz-se pelo menos três movimentos.

Tabela 1 – 4 pinos / Resultados utilizando 3 discos

Fixos	Nº de Movimentos	Caso 3 Torres	Nº de Movimentos	Total
0	0	3	7	$2 \cdot 0 + 7 = 7$
1	1	2	3	$2 \cdot 1 + 3 = 5$
2	3	1	1	$2 \cdot 3 + 1 = 7$

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a Tabela 1, o mínimo é 5 movimentos para finalizar o jogo com três discos. Veja a Tabela 2.

Tabela 2 – 4 pinos / Resultados utilizando 4 discos

Fixos	Nº de Movimentos	Caso 3 Torres	Nº de Movimentos	Total
0	0	4	15	$2 \cdot 0 + 15 = 15$
1	1	3	7	$2 \cdot 1 + 7 = 9$
2	3	2	3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$
3	5	1	1	$2 \cdot 5 + 1 = 11$

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a Tabela 2, nota-se que o mínimo é 9 movimentos para finalizar o jogo utilizando quatro discos. Veja a Tabela 3.

Tabela 3 – 4 pinos / Resultados utilizando 5 discos

Fixos	Nº de Movimentos	Caso 3 Torres	Nº de Movimentos	Total
0	0	5	31	$2 \cdot 0 + 31 = 31$
1	1	4	15	$2 \cdot 1 + 15 = 17$
2	3	3	7	$2 \cdot 3 + 7 = 13$
3	5	2	3	$2 \cdot 5 + 3 = 13$
4	9	1	1	$2 \cdot 9 + 1 = 19$

Fonte**:** Elaborado pelo autor

De acordo com a Tabela 3, nota-se que o mínimo é 13 movimentos para finalizar o jogo utilizando cinco discos. Veja a Tabela 4.

Tabela 4 – 4 pinos / Resultados utilizando 6 discos

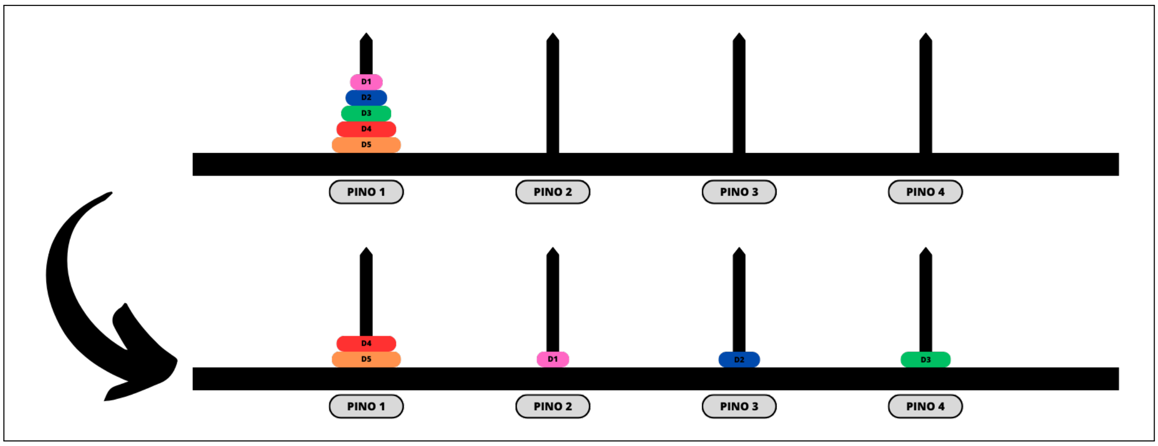
Fixos	Nº de Movimentos	Caso 3 Torres	Nº de Movimentos	Total
0	0	6	63	$2 \cdot 0 + 63 = 63$
1	1	5	31	$2 \cdot 1 + 31 = 33$
2	3	4	15	$2 \cdot 3 + 15 = 21$
3	5	3	7	$2 \cdot 5 + 7 = 17$
4	9	2	3	$2 \cdot 9 + 3 = 21$
5	13	1	1	$2 \cdot 13 + 1 = 27$

Fonte**:** Elaborado pelo autor

De acordo com a Tabela 4, nota-se que o mínimo é 17 movimentos para finalizar o jogo utilizando seis discos. Percebe-se que a construção da quantidade mínima de movimentos depende da relação vantajosa entre as partes denominadas “fixos” e “caso 3 torres”, ou seja, é favorável utilizar os quatro pinos até um certo volume de discos, depois deixá-los “isolados”, movimentar os restantes transportando-os do pino inicial para o final utilizando apenas os três pinos favoráveis para isso, e finalizar o jogo transportando os discos que ficaram “fixos” para o pino final.

Veja as Figuras 38, 39, 40 e 41 que apresentam uma situação simples para a extensão da Torre de Hanói com cinco discos de acordo com os resultados obtidos até aqui. Nelas estão presentes uma possível sequência e solução para mudança completa da torre que está no pino 1 para o pino 3 de acordo com os resultados dispostos na Tabela 36. Vale ressaltar que os pinos estão numerados da esquerda para a direita começando de 1 (PINO 1) e os discos também estão numerados obedecendo o diâmetro de cada disco, onde o disco 1 (D1) é o menor de todos, o disco 2 (D2) é o segundo menor e assim por diante.

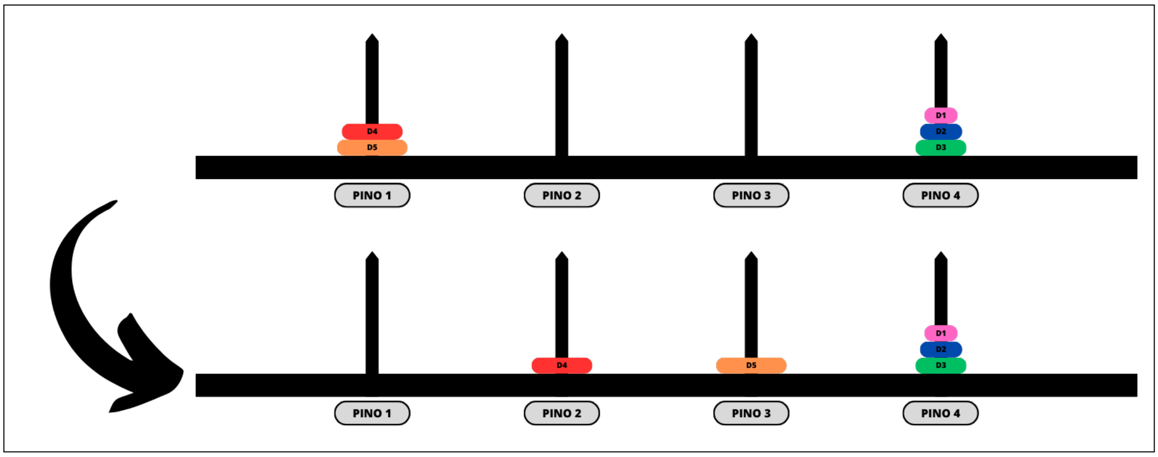
Figura 38 – Torre de Hanói usando 4 pinos e 5 discos (Parte 1)



Fonte: Elaborado pelo autor

Veja, na Figura 38, que, inicialmente e sempre obedecendo as regras do jogo, tem-se três pinos livres para movimentarmos os discos, assim podemos deslocar três discos, com isso o disco D1 (rosa) desloca-se para o pino 2, o disco D2 (azul), para o pino 3 e o disco D3 (verde), para o pino 4 com um movimento cada, totalizando, até aqui 3 movimentos. Observe também que, de acordo com a Tabela 3, os três primeiros discos serão os "fixos".

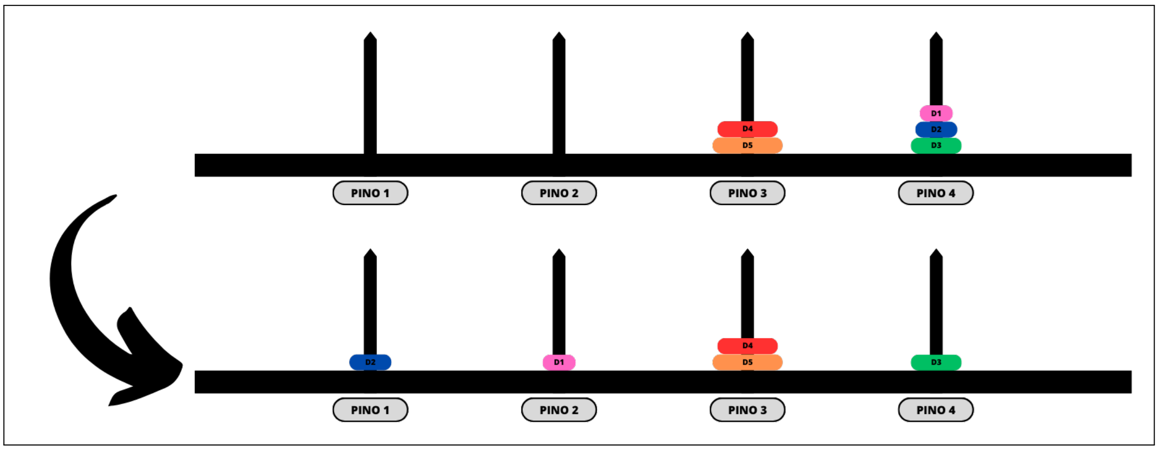
Figura 39 – Torre de Hanói usando 4 pinos e 5 discos (Parte 2)



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 39, os discos D2 (azul) e D1 (rosa) deslocam-se para o pino 4 com um movimento cada, totalizando, até aqui 5 movimentos. Com isso, tem-se dois pinos livres para movimentarmos os discos, assim, o disco D4 (vermelho) desloca-se para o pino 2 e o disco D5 (laranja), para o pino 3 com um movimento cada, totalizando, até aqui, 7 movimentos, sendo 5 dos "fixos" e 2 do "caso 3 torres".

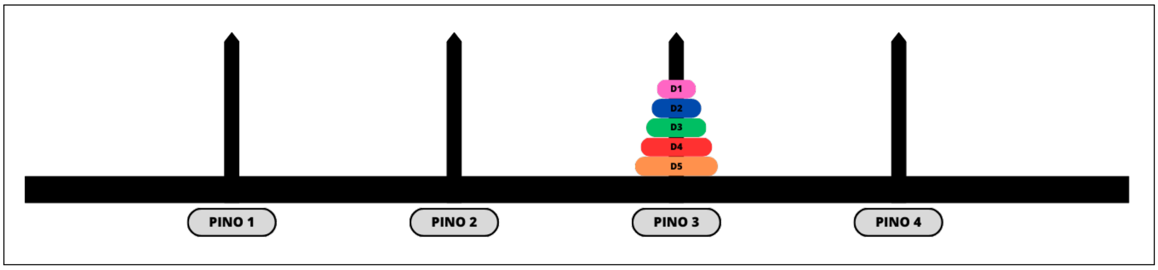
Figura 40 – Torre de Hanói usando 4 pinos e 5 discos (Parte 3)



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 40, o disco D4 (vermelho) desloca-se para o pino 3 com um movimento, totalizando, até aqui, 8 movimentos, sendo 5 dos “fixos” e 3 do “caso 3 torres”. Com isso, pode-se deslocar o disco D1 (rosa) para o pino 2 e o disco D2 (azul), para o pino 1 com um movimento cada, totalizando, até aqui, 10 movimentos, sendo 7 dos “fixos” e 3 do “caso 3 torres”.

Figura 41 – Torre de Hanói usando 4 pinos e 5 discos (Parte 4)



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 41, os discos D3 (verde), D2 (azul) e D1 (rosa) deslocam-se para o pino 3 com um movimento cada, finalizando, assim, o jogo. Totalizando 13 movimentos, sendo 10 dos “fixos” e 3 do “caso 3 torres”

Desse modo, note que os disco D1 (rosa), D2 (azul) e D3 (verde), os “fixos”, movimentaram-se inicialmente 5 vezes, em seguida, os discos D4 (vermelho) e D5 (laranja), o “caso 3 torres”, movimentaram-se 3 vezes, e para finalizar o jogo repetiu-se os 5 movimentos iniciais. Assim, foram necessários, no mínimo, $5+3+5 = 2 \cdot 5+3 = 13$ movimentos para mover completamente a torre do pino 1 para o pino 3 usando os pinos 2 e 4 como intermediários.

Obedecendo esse padrão observado, chegou-se a construção da Tabela 5, a qual apresenta uma possibilidade para a quantidade mínima de movimentos utilizando de 1 a 20 discos (Parte 1).

Tabela 5 – 4 pinos / Resultados para algumas quantidades de discos (Parte 1)

Nº de discos	Fixos	Nº de Movimentos	C aso 3 Torres	Nº de Movimentos	Total
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	$2 \cdot 0 + 1 = 1$
2	2	3	0	0	3
2	1	1	1	1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$
2	0	0	2	3	$2 \cdot 0 + 3 = 3$
3	1	1	2	3	$2 \cdot 1 + 3 = 5$
4	2	3	2	3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$
4	1	1	3	7	$2 \cdot 1 + 7 = 9$
5	3	5	2	3	$2 \cdot 5 + 3 = 13$
5	2	3	3	7	$2 \cdot 3 + 7 = 13$
6	3	5	3	7	$2 \cdot 5 + 7 = 17$
7	4	9	3	7	$2 \cdot 9 + 7 = 25$
7	3	5	4	15	$2 \cdot 5 + 15 = 25$
8	5	13	3	7	$2 \cdot 13 + 7 = 33$
8	4	9	4	15	$2 \cdot 9 + 15 = 33$
9	6	17	3	7	$2 \cdot 17 + 7 = 41$
9	5	13	4	15	$2 \cdot 13 + 15 = 41$
10	6	17	4	15	$2 \cdot 17 + 15 = 49$
11	7	25	4	15	$2 \cdot 25 + 15 = 65$
11	6	17	5	31	$2 \cdot 17 + 31 = 65$
12	8	33	4	15	$2 \cdot 33 + 15 = 81$
12	7	25	5	31	$2 \cdot 25 + 31 = 81$
13	9	41	4	15	$2 \cdot 41 + 15 = 97$
13	8	33	5	31	$2 \cdot 33 + 31 = 97$
14	10	49	4	15	$2 \cdot 49 + 15 = 113$
14	9	41	5	31	$2 \cdot 41 + 31 = 113$
15	10	49	5	31	$2 \cdot 49 + 31 = 129$
16	11	65	5	31	$2 \cdot 65 + 31 = 161$
16	10	49	6	63	$2 \cdot 49 + 63 = 161$
17	12	81	5	31	$2 \cdot 81 + 31 = 193$
17	11	65	6	63	$2 \cdot 65 + 63 = 193$
18	13	97	5	31	$2 \cdot 97 + 31 = 225$
18	12	81	6	63	$2 \cdot 81 + 63 = 225$
19	14	113	5	31	$2 \cdot 113 + 31 = 257$
19	13	97	6	63	$2 \cdot 97 + 63 = 257$
20	15	129	5	31	$2 \cdot 129 + 31 = 289$
20	14	113	6	63	$2 \cdot 113 + 63 = 289$

Fonte**:** Elaborado pelo autor

Continuando nesse padrão observado, tem-se a construção da Tabela 6, a qual apresenta uma possibilidade para a quantidade mínima de movimentos utilizando de 21 a 45 discos (Parte 2).

Tabela 6 – 4 pinos / Resultados para algumas quantidades de discos (Parte 2)

Nº de discos	Fixos	Nº de Movimentos	C aso 3 Torres	Nº de Movimentos	Total
21	15	129	6	63	$2\cdot129+63=321$
22	16	161	6	63	$2\cdot161+63=385$
22	15	129	7	127	$2\cdot129+127=385$
23	17	193	6	63	$2\cdot193+63=449$
23	16	161	7	127	$2\cdot161+127=449$
24	18	225	6	63	$2\cdot225+63=513$
24	17	193	7	127	$2\cdot193+127=513$
25	19	257	6	63	$2\cdot257+63=577$
25	18	225	7	127	$2\cdot225+127=577$
26	20	289	6	63	$2\cdot289+63=641$
26	19	257	7	127	$2\cdot257+127=641$
27	21	321	6	63	$2\cdot321+63=705$
27	20	289	7	127	$2\cdot289+127=705$
28	21	321	7	127	$2\cdot321+127=769$
29	22	385	7	127	$2\cdot385+127=897$
29	21	321	8	255	$2\cdot321+255=897$
30	23	449	7	127	$2\cdot449+127=1025$
30	22	385	8	255	$2\cdot385+255=1025$
31	24	513	7	127	$2\cdot513+127=1153$
31	23	449	8	255	$2\cdot449+255=1153$
32	25	577	7	127	$2\cdot577+127=1281$
32	24	513	8	255	$2\cdot513+255=1281$
33	26	641	7	127	$2\cdot641+127=1409$
33	25	577	8	255	$2\cdot577+255=1409$
34	27	705	7	127	$2\cdot705+127=1537$
34	26	641	8	255	$2\cdot641+255=1537$
35	28	769	7	127	$2\cdot769+127=1665$
35	27	705	8	255	$2\cdot769+127=1665$
36	28	769	8	255	$2\cdot769+255=1793$
37	29	897	8	255	$2\cdot897+255=2049$
37	28	769	9	511	$2\cdot769+511=2049$
38	30	1025	8	255	$2\cdot1025+255=2305$
38	29	897	9	511	$2\cdot897+511=2305$
39	31	1153	8	255	$2\cdot1153+255=2561$
39	30	1025	9	511	$2\cdot1025+511=2561$
40	32	1281	8	255	$2\cdot1281+255=2817$
40	31	1153	9	511	$2\cdot1153+511=2817$
41	33	1409	8	255	$2\cdot1409+255=3073$
41	32	1281	9	511	$2\cdot1281+511=3073$
42	34	1537	8	255	$2\cdot1537+255=3329$
42	33	1409	9	511	$2\cdot1409+511=3329$
43	35	1665	8	255	$2\cdot1665+255=3585$
43	34	1537	9	511	$2\cdot1537+511=3585$
44	36	1793	8	255	$2\cdot1793+255=3841$
44	35	1665	9	511	$2\cdot1665+511=3841$
45	36	1793	9	511	$2\cdot1793+511=4097$

Fonte**:** Elaborado pelo autor

Observando a construção das Tabelas 5 e 6 e retirando, convenientemente, alguns valores, tem-se a Tabela 7.

Tabela 7 – 4 pinos / Resultados para algumas quantidades de discos

Nº de discos	Fixos	Nº de Movimentos	Caso 3 Torres	Nº de Movimentos	Total
1	0	0	1	1	$2 \cdot 0 + 1 = 1$
2	1	1	1	1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$
3	1	1	2	3	$2 \cdot 1 + 3 = 5$
4	2	3	2	3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$
5	3	5	2	3	$2 \cdot 5 + 3 = 13$
6	3	5	3	7	$2 \cdot 5 + 7 = 17$
7	4	9	3	7	$2 \cdot 9 + 7 = 25$
8	5	13	3	7	$2 \cdot 13 + 7 = 33$
9	6	17	3	7	$2 \cdot 17 + 7 = 41$
10	6	17	4	15	$2 \cdot 17 + 15 = 49$
11	7	25	4	15	$2 \cdot 25 + 15 = 65$
12	8	33	4	15	$2 \cdot 33 + 15 = 81$
13	9	41	4	15	$2 \cdot 41 + 15 = 97$
14	10	49	4	15	$2 \cdot 49 + 15 = 113$
15	10	49	5	31	$2 \cdot 49 + 31 = 129$
16	11	65	5	31	$2 \cdot 65 + 31 = 161$
17	12	81	5	31	$2 \cdot 81 + 31 = 193$
18	13	97	5	31	$2 \cdot 97 + 31 = 225$
19	14	113	5	31	$2 \cdot 113 + 31 = 257$
20	15	129	5	31	$2 \cdot 129 + 31 = 289$
21	15	129	6	63	$2 \cdot 129 + 63 = 321$
22	16	161	6	63	$2 \cdot 161 + 63 = 385$
23	17	193	6	63	$2 \cdot 193 + 63 = 449$
24	18	225	6	63	$2 \cdot 225 + 63 = 513$
25	19	257	6	63	$2 \cdot 257 + 63 = 577$
26	20	289	6	63	$2 \cdot 289 + 63 = 641$
27	21	321	6	63	$2 \cdot 321 + 63 = 705$
28	21	321	7	127	$2 \cdot 321 + 127 = 769$
29	22	385	7	127	$2 \cdot 385 + 127 = 897$
30	23	449	7	127	$2 \cdot 449 + 127 = 1025$
31	24	513	7	127	$2 \cdot 513 + 127 = 1153$
32	25	577	7	127	$2 \cdot 577 + 127 = 1281$
33	26	641	7	127	$2 \cdot 641 + 127 = 1409$
34	27	705	7	127	$2 \cdot 705 + 127 = 1537$
35	28	769	7	127	$2 \cdot 769 + 127 = 1665$
36	28	769	8	255	$2 \cdot 769 + 255 = 1793$
37	29	897	8	255	$2 \cdot 897 + 255 = 2049$
38	30	1025	8	255	$2 \cdot 1025 + 255 = 2305$
39	31	1153	8	255	$2 \cdot 1153 + 255 = 2561$
40	32	1281	8	255	$2 \cdot 1281 + 255 = 2817$
41	33	1409	8	255	$2 \cdot 1409 + 255 = 3073$
42	34	1537	8	255	$2 \cdot 1537 + 255 = 3329$
43	35	1665	8	255	$2 \cdot 1665 + 255 = 3585$
44	36	1793	8	255	$2 \cdot 1793 + 255 = 3841$
45	36	1793	9	511	$2 \cdot 1793 + 511 = 4097$

Fonte**:** Elaborado pelo autor

A Figura 42 apresenta resultados e estimativas para uma possível quantidade mínima de movimentos para algumas quantidades de discos utilizando quatro pinos, para tal tem-se por base a Figura 37 e a Tabela 7. Veja.

Figura 42 – Resultados da Torre de Hanói usando 4 pinos / Caso 3

Nº	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15	D16	D17	D18	D19	D20	D21	D22	D23	D24	D25	D26	D27	D28	D29	D30	...	TOTAL
1	1																														...	1
2	2	1																													...	3
3	2	2	1																												...	5
4	4	2	2	1																											...	9
5	4	4	2	2	1																										...	13
6	4	4	2	4	2	1																									...	17
7	8	4	4	2	4	2	1																								...	25
8	8	8	4	4	2	4	2	1																							...	33
9	8	8	4	8	4	2	4	2	1																						...	41
10	8	8	4	8	4	2	8	4	2	1																					...	49
11	16	8	8	4	8	4	2	8	4	2	1																				...	65
12	16	16	8	8	4	8	4	2	8	4	2	1																			...	81
13	16	16	8	16	8	4	8	4	2	8	4	2	1																		...	97
14	16	16	8	16	8	4	16	8	4	2	8	4	2	1																	...	113
15	16	16	8	16	8	4	16	8	4	2	16	8	4	2	1																...	129
16	32	16	16	8	16	8	4	16	8	4	2	16	8	4	2	1															...	161
17	32	32	16	16	8	16	8	4	16	8	4	2	16	8	4	2	1														...	193
18	32	32	16	32	16	8	16	8	4	16	8	4	2	16	8	4	2	1													...	225
19	32	32	16	32	16	8	32	16	8	4	16	8	4	2	16	8	4	2	1												...	257
20	32	32	16	32	16	8	32	16	8	4	32	16	8	4	2	16	8	4	2	1											...	289
21	32	32	16	32	16	8	32	16	8	4	32	16	8	4	2	32	16	8	4	2	1										...	321
22	64	32	32	16	32	16	8	32	16	8	4	32	16	8	4	2	32	16	8	4	2	1									...	385
23	64	64	32	32	16	32	16	8	32	16	8	4	32	16	8	4	2	32	16	8	4	2	1								...	449
24	64	64	32	64	32	16	32	16	8	32	16	8	4	32	16	8	4	2	32	16	8	4	2	1							...	513
25	64	64	32	64	32	16	64	32	16	8	32	16	8	4	32	16	8	4	2	32	16	8	4	2	1						...	577
26	64	64	32	64	32	16	64	32	16	8	64	32	16	8	4	32	16	8	4	2	32	16	8	4	2	1					...	641
27	64	64	32	64	32	16	64	32	16	8	64	32	16	8	4	64	32	16	8	4	2	32	16	8	4	2	1				...	705
28	64	64	32	64	32	16	64	32	16	8	64	32	16	8	4	64	32	16	8	4	2	64	32	16	8	4	2	1			...	769
29	128	64	64	32	64	32	16	64	32	16	8	64	32	16	8	4	64	32	16	8	4	2	64	32	16	8	4	2	1		...	897
30	128	128	64	64	32	64	32	16	64	32	16	8	64	32	16	8	4	64	32	16	8	4	2	64	32	16	8	4	2	1	...	1025
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x																															...	

Fonte**:** Elaborado pelo autor

Assim, nota-se que uma possibilidade para obter a quantidade mínima de movimentos é obtida ao conseguir definir a relação vantajosa entre os discos considerados “fixos” e os do “caso 3 torres”.

6.2 RESULTADOS DO EXPERIMENTO B

Em posse dos resultados dos experimentos realizados com a extensão da Torre de Hanói para 4 pinos, iremos definir um modelo matemático que permita calcular a quantidade mínima de movimentos em função da quantidade x de discos.

Para fazermos uma modelagem matemática, inicialmente iremos observar a relação, de acordo com a Tabela 7, entre os termos $T(x+1)$ e $T(x)$, onde x corresponde a quantidade total de discos utilizada e $T(x)$, a suposta quantidade mínima de movimentos necessários para finalizar o jogo. Veja a Tabela 8.

É válido ressaltar que na Tabela 8, cada elemento presente na coluna com o título “Total” representa uma possível quantidade mínima de movimentos necessárias para finalizar o jogo de acordo com sua respectiva quantidade de discos; na coluna “Caso 3 Torres”, também já vista na Seção 6.1, cada elemento representa quantos discos do total trabalham com apenas três dos quatro pinos do jogo.

Tabela 8 – 4 pinos / Relação entre $T(x+1)$ e $T(x)$

Nº de discos	Total	Caso 3 Torres	$T(x+1)-T(x)$
1	1	1	2
2	3	1	2
3	5	2	4
4	9	2	4
5	13	2	4
6	17	3	8
7	25	3	8
8	33	3	8
9	41	3	8
10	49	4	16
11	65	4	16
12	81	4	16
13	97	4	16
14	113	4	16
15	129	5	32
16	161	5	32
17	193	5	32
18	225	5	32
19	257	5	32
20	289	5	32
21	321	6	64
22	385	6	64
23	449	6	64
24	513	6	64
25	577	6	64
26	641	6	64
27	705	6	64
28	769	7	128
29	897	7	128
30	1025	7	128
31	1153	7	128
32	1281	7	128
33	1409	7	128
34	1537	7	128
35	1665	7	128
36	1793	8	256
37	2049	8	256

Fonte: Elaborado pelo autor

Note, na Tabela 8, que cada elemento presente na coluna "$T(x+1)-T(x)$" é uma potência de 2 cujo expoente pode ser definido pelo elemento correspondente na coluna "Caso 3 Torres". Assim, podem-se gerar os valores na coluna "Total" através da seguinte recorrência.

$$T(1) = 2^0$$
$$T(2) = 2^0 + 2^1$$
$$T(3) = 2^0 + 2^1 + 2^1$$
$$T(4) = 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2$$
$$T(5) = 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^2$$
$$T(6) = 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^2 + 2^2$$
$$\vdots$$
$$T(x) = 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k$$

Com base nessas observações, define-se qual é o valor de k em função da quantidade x de discos. Para isso, veja o conjunto de pares ordenados em que o primeiro número do par é o elemento na coluna "Nº de discos" e o segundo número é o seu correspondente na coluna "Caso 3 Torres", Tabela 8. A partir dos pares ordenados fornecidos, pode-se determinar que a função é crescente e discreta, ou seja, ela aumenta apenas em incrementos inteiros. Observe a Tabela 9, ela irá ajudar na modelagem dessa função.

Tabela 9 – 4 pinos / Relação com os números triangulares

Nº de discos	Caso 3 Torres
1, 2	1
3, 4, 5	2
6, 7, 8, 9	3
10, 11, $\cdots$, 14	4
15, 16, $\cdots$, 20	5
21, 22, $\cdots$, 27	6
28, 29, $\cdots$, 35	7
36, 37, $\cdots$, 44	8
45, 46, $\cdots$, 54	9

Fonte**:** Elaborado pelo autor

Note, na Tabela 9, que o primeiro elemento de cada linha da primeira coluna é um número triangular. Os números triangulares são um dos casos dos números poligonais, segundo Silva (2015b, p. 59), eles são "exemplos de números figurados os quais correspondem à quantidade de pontos arranjados de modo a formar um polígono regular", neste caso, formam triângulos. De acordo com Almeida (2002, p. 72):

> Os números figurados poligonais podem ser obtidos mediante a soma de progressões aritméticas. Cada uma dessas progressões tem por primeiro termo 1; sua razão é 1, 2, 3, 4, 5,..., conforme tenhamos números triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais, heptagonais etc.

Nos pares ordenados definidos anteriormente, o segundo elemento irá se repetir até antes de o primeiro elemento ser um número triangular, quando isso ocorrer, ou seja, o primeiro elemento ser um número triangular, o segundo elemento irá aumentar em uma unidade, e assim segue-se o processo de criação desses pares ordenados iniciando de (1, 1). Pode-se, assim, representar esta função como: $f(h) = y$, em que y é o menor inteiro para o qual $h \leq \dfrac{y^2+y}{2}$.

A expressão $\dfrac{y^2+y}{2}$ é uma fórmula para calcular o número triangular para um valor inteiro y. Tal número é o resultado da soma dos números inteiros consecutivos de 1 a y, onde y é um inteiro positivo. Portanto, para encontrar o menor inteiro y para o qual h é menor ou igual ao número triangular de y, pode-se resolver a equação 6.1.

$$\frac{y^2+y}{2} = h \tag{6.1}$$

Multiplicando ambos os membros da equação 6.1 por 2, tem-se a equação 6.2.

$$y^2+y = 2h \tag{6.2}$$

Colocando a equação 6.2 em forma de quadrática, tem-se a equação 6.3.

$$y^2+y-2h = 0 \tag{6.3}$$

Pode-se usar a fórmula quadrática para encontrar as raízes da equação 6.3.

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8h}}{2} \tag{6.4}$$

No entanto, procura-se o menor inteiro positivo de y que satisfaça a equação 6.4. Para isso, utilizou-se a função piso, segundo Esquef (2012, p. 31), é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ denotada por $\lfloor x \rfloor$ que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o maior inteiro menor que ou igual a x. Da própria definição, se $n \leq x < (n+1)$, então $x = n$. Por exemplo, $\lfloor -5,2 \rfloor = -6$; $\lfloor 0,9 \rfloor = 0$ e $\lfloor 7,8 \rfloor = 7$.

Daí, pode-se descartar a raiz negativa e arredondar para baixo o resultado da raiz positiva. Portanto, a fórmula correta para encontrar o menor inteiro y para o qual h é menor ou igual ao número triangular de y é a equação 6.5.

$$y = \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8h}}{2} \right\rfloor \tag{6.5}$$

A função acima arredonda o resultado para baixo para o inteiro mais próximo. Por exemplo, para $h = 12$, tem-se a equação 6.6.

$$
\begin{aligned}
y &= \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8\cdot 12}}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{97}}{2} \right\rfloor \\
&= \lfloor 4,403\cdots \rfloor \\
&= 4
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

Isso significa que o menor valor inteiro y para o qual $h = 12$ é menor ou igual ao número triangular de y é 4, e por isso a resposta correta é $f(12) = 4$.

Daí, pode-se definir o valor de k para a recorrência vista anteriormente, assim, a lei ficará definida por

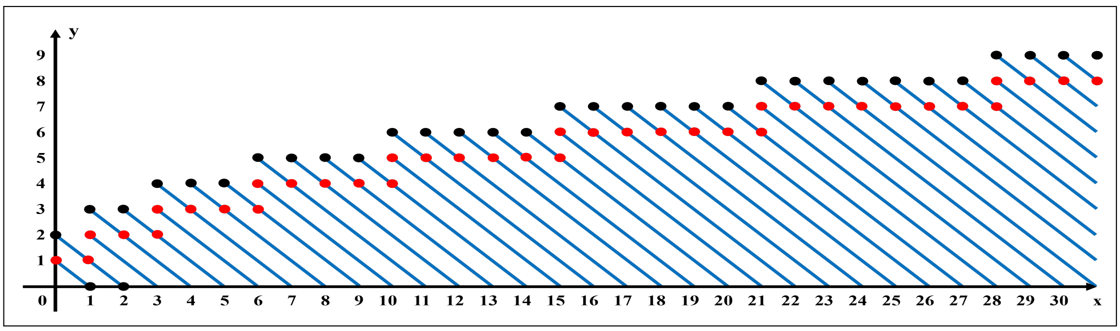
$$
\begin{aligned}
T(x) &= 1 + 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8(x-1)}}{2} \right\rfloor} \\
&= \sum_{1}^{x} 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8x-7}}{2} \right\rfloor}
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Portanto, uma possível modelagem que determina a quantidade mínima de movimentos para resolver o jogo da Torre de Hanói Estendida com 4 pinos e $x \geq 1$ discos é o somatório definido na equação 6.8.

$$
T(x) = \sum_{1}^{x} 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8x-7}}{2} \right\rfloor}. \tag{6.8}
$$

Para melhor compreensão dessa modelagem, observe a Figura 43, ela mostra uma parte do gráfico obtido com base nas Tabelas 5 e 6, em que o primeiro elemento do par ordenado é o elemento da coluna “Fixos” e o segundo elemento é seu correspondente na coluna “Caso 3 Torres”, o segmento de reta liga o ponto ao valor no eixo das abcissas que representa a quantidade total de discos para cada situação.

Figura 43 – Gráfico: “Fixos” x “Caso 3 Torres”



Fonte: Elaborado pelo autor

Os pontos destacados em vermelho no gráfico presente na Figura 43 referem-se ao padrão observado para a construção da lei de recorrência definida anteriormente. Veja aplicações dessa lei para alguns casos específicos.

Para $x = 1$, note que a quantidade mínima de movimentos necessários é 1, o que corresponde a, por exemplo, mover o único disco D1 do pino 1 para o pino 4, encerrando, assim, o jogo. Veja na lei de recorrência,

$$\begin{aligned} T(1) &= 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 1-7}}{2} \right\rfloor} \\ &= 2^{\left\lfloor \frac{-1+1}{2} \right\rfloor} \\ &= 2^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Para $x = 2$, percebe-se que a quantidade mínima de movimentos necessários é 3, o que corresponde a, por exemplo, mover o disco D1 do pino 1 para o pino 2, mover o disco D2 do pino 1 para o pino 4 e finalizar com o movimento do disco D1 do pino 2 para o pino 4. Veja na lei de recorrência,

$$\begin{aligned} T(2) &= 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 1-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 2-7}}{2} \right\rfloor} \\ &= 2^{\left\lfloor \frac{-1+1}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+3}{2} \right\rfloor} \\ &= 2^0 + 2^1 \\ &= 1 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Para $x = 3$, nota-se que a quantidade mínima de movimentos necessários é 5, o que corresponde a mover o disco D1 do pino 1 para o pino 2, mover o disco D2 do pino 1 para o pino 3, mover o disco D3 do pino 1 para o pino 4 e finalizar com o movimento do disco D2 do pino 3 para o pino 4 e o disco D1 do pino 2 para o pino 4. Veja na lei de recorrência,

$$\begin{aligned} T(3) &= 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 1-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 2-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 3-7}}{2} \right\rfloor} \\ &= 2^{\left\lfloor \frac{-1+1}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+3}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right\rfloor} \\ &= 2^0 + 2^1 + 2^1 \\ &= 1 + 2 + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Veja a lei de recorrência para $x = 4$.

$$
\begin{aligned}
T(4) &= 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 1-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 2-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 3-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 4-7}}{2} \right\rfloor} \\
&= 2^{\left\lfloor \frac{-1+1}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+3}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+5}{2} \right\rfloor} \\
&= 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 \\
&= 1+2+2+4 \\
&= 9
\end{aligned}
$$

Veja a lei de recorrência para $x = 5$.

$$
\begin{aligned}
T(5) &= 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 1-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 2-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 3-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 4-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 5-7}}{2} \right\rfloor} \\
&= 2^{\left\lfloor \frac{-1+1}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+3}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+5}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \right\rfloor} \\
&= 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^2 \\
&= 1+2+2+4+4 \\
&= 13
\end{aligned}
$$

Veja a lei de recorrência para $x = 10$.

$$
\begin{aligned}
T(10) &= 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 1-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 2-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 3-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 4-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 5-7}}{2} \right\rfloor} + \\
&\quad + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 6-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 7-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 8-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 9-7}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8\cdot 10-7}}{2} \right\rfloor} \\
&= 2^{\left\lfloor \frac{-1+1}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+3}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+5}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \right\rfloor} + \\
&\quad + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{41}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+7}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{57}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{65}}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{73}}{2} \right\rfloor} \\
&= 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 \\
&= 1+2+2+4+4+4+8+8+8+8 \\
&= 49
\end{aligned}
$$

Tem-se, então, a explanação de alguns casos específicos do somatório da extensão do jogo com quatro hastes. Tal explanação teve a finalidade de observar valores de acordo com o estudo realizado. Ressalva-se que outros resultados serão divulgados em trabalhos posteriores.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao concluir este trabalho, apresentou-se uma proposta de atividade voltada para o estudo de potenciação a partir do jogo Torre de Hanói. Essa proposta se mostrou uma alternativa ou ferramenta eficaz para o ensino de Matemática, pois ao final de todas as atividades com os alunos, notou-se que eles desenvolveram/aprimoraram diversas competências e habilidades.

Destaca-se que os alunos adquiriram uma familiaridade com o jogo. Muitos compreenderam a estratégia para efetuar a quantidade mínima de movimentos. Compreenderam a relação de dependência entre o número de discos e a quantidade mínima de movimentos necessários. Conheceram o conceito de potenciação e como utilizá-lo na resolução de situações-problemas. Desenvolveram/aprimoraram habilidades como pensar estrategicamente, praticar cálculos mentais, identificar padrões e relações, entre outros.

Os alunos apresentaram como principais dificuldades, no início da pesquisa, a falta de ou má interpretação dos problemas propostos levando-os a conclusões inadequadas. Também observou-se que alguns não haviam compreendido as regras do jogo. Posteriormente, pôde-se verificar que essas dificuldades foram amenizadas devido ao desenvolvimento/aprimoramento dos alunos como citado no parágrafo anterior.

Além disso, essa pesquisa também apresentou uma extensão da Torre de Hanói a qual foi uma ampliação da quantidade de pinos para quatro. A partir desse estudo obteve-se uma estratégia com a finalidade de obter a quantidade mínima de movimentos. Identificou-se a relação de dependência entre o número de discos e a quantidade mínima de movimentos necessários.

Ainda, analisou-se informações obtidas da extensão do jogo como recurso para a construção de argumentação e da modelagem matemática. Conheceu-se o modelo matemático capaz de determinar a quantidade mínima de movimentos em função do número de discos utilizado.

No final dessa pesquisa, o autor desse trabalho, no âmbito da docência, aprimorou-se em diversas dimensões, como atualização em relação à abordagem utilizando jogo, habilidades de comunicação e relacionamento interpessoal, reflexão sobre a prática pedagógica.

Nesse aspecto, o autor conseguiu evoluir sua habilidade de perceber os impactos que erros de digitação, má interpretação ou lacunas no conhecimento relativo aos estudantes causam no processo de ensino-aprendizagem. Por fim, recomenda-se a continuidade do estudo sobre a extensão da Torre de Hanói como, por exemplo, para k pinos e r discos em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Platão Redimido:** A Teoria dos Números Figurados na Ciência Antiga & Moderna. Curitiba, PR: Champagnat, 2002. ISBN: 85-7292-084-6.

ANDRADE, Wendel Melo; COLARES, Getuliana Sousa; COSTA, Maria Rosilane da. Uma análise sobre as dificuldades dos alunos nas operações fundamentais. *In:* CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 5., 2018, Campina Grande. **Anais V CONEDU** [...]. Campina Grande, SP: Realize Eventos Científicos & Editora, 2018. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHO_EV117_MD1_SA13_ID5749_09092018144501.pdf. Acesso em: 3 fev. 2023.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998. 174 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. 600 p.

CAMPOS, Ana Maria Antunes de. Dificuldades na aprendizagem da Matemática: discalculia, acalculia e ansiedade matemática. *ln:* Portal Planneta Educação. **Transformando o aprendizado.** São José dos Campos, SP, 12 nov. 2020. Disponível em: https://www.plannetaeducacao.com.br/portal/a/383/dificuldades-na-aprendizagem-da-matematica-discalculia-acalculia-e-ansiedade-matematica. Acesso em: 4 fev. 2023.

CARNEIRO, Leticia de Nazaré Souza. **Aprendizagem da Matemática:** Dificuldades para aprender conteúdos matemáticos por estudantes do Ensino Médio. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura Plena em Matemática) - Faculdade de Matemática, Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2018. Disponível em: https://bdm.ufpa.br:8443/jspui/bitstream/prefix/603/6/TCC_AprendizagemMatematicaDificuldades.pdf. acesso em: 4 fev. 2023.

ESQUEF, Rosa Maria Andrade. Modelando situações do nosso dia a dia: Usando as funções teto e piso. **Revista do Professor de Matemática**: 2º quadrimestre, [s. l.], v. 78, p. 31-35, 2012. Disponível em: https://www.rpm.org.br/ cdrpm/78/10.html. Acesso em: 10 jul. 2023.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600 p.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. 849 p. ISBN: 85-268-0657-2.

FONSECA, Bernardo A. Falta de infraestrutura e de recursos é o maior desafio em sala de aula, aponta pesquisa. *ln:* CNTE - Confederação Nacional dos Trabalhadores em Educação. **Desmonte da educação pública.** *[S.l.].* 29 jul. 2022. Disponível em: https://www.cnte.org.br/index.php/menu/comunicacao/posts/noticias/75199-falta-de-infraestrutura-e-de-recursos-e-o-maior-desafio-em-sala-de-aula-aponta-pesquisa. Acesso em: 29 jul. 2023.

FREITAS, Savana dos Anjos. A importância do lúdico e o papel do professor na educação infantil: uma revisão bibliográfica em periódicos nacionais. *In:* CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 7., 2020, Maceió, AL. **Anais VII CONEDU** [...]. Maceió, AL: Realize Eventos Científicos & Editora, 2020. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2020/TRABALHO_EV140_MD1_SA_ID5369_04092020160240.pdf. Acesso em: 16 fev. 2023.

GOMES, Manoel Messias. Fatores que facilitam e dificultam a aprendizagem. **Revista Educação Pública**, Rio de Janeiro, v. 18, n. 14, 17 jul. 2018. ISSN: 1984-6290. DOI: https://doi.org/10.18264/REP. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/18/14/fatores-que-facilitam-e-dificultam-a-aprendizagem. Acesso em: 29 jul. 2023.

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2000.

HUIZINGA, Johan. **Homo Ludens:** o jogo como elemento da cultura. Tradução: João Paulo Monteiro. 5. ed. São Paulo: Perspectiva, 2007. 243 p. (Estudos / dirigida por J. Guinsburg). Título original: Homo Ludens - vom Unprung der Kultur im Spiel. ISBN: 9788527300759. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4184246/mod_resource/content/0/homo_ludens_huizinga.pdf. Acesso em: 25 out. 2022.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **O jogo e a educação infantil**. São Paulo: Cengage Learning, 2015. 47 p. ISBN: 9788522126132. Disponível em: https://issuu.com/cengagebrasil/docs/9788522126132_livreto/1. Acesso em: 23 out. 2022.

KREMER, Karla de Araújo. **Dificuldades na aprendizagem de Matemática**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (Pós-graduação em Psicopedagogia) – Instituto a Vez do Mestre, Universidade Cândido Mendes, Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: https://www.avm.edu.br/docpdf/monografias_ publicadas/k215345.pdf. Acesso em: 03 fev. 2023.

MOTA, Bruna Germana Nunes. Formação continuada de docentes: quais os benefícios?. *ln:* Blog Universo Ateneu. **Educação.** *[S.l.]*. 18 ago. 2022. Disponível em: https://universo.uniateneu.edu.br/2022/08/18/formacao-continuada-de-docentes-quais-os-beneficios/. Acesso em: 15 out. 2022.

MUNDO EDUCAÇÃO. Exercícios sobre função exponencial. Mundo Educação, [S.d.]. Disponível em: <https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-funcao-exponencial.htm#questao-7416>. Acesso em: 12 abr. 2022.

PAIAS, Ana Maria. **Obstáculos no ensino e na aprendizagem do objeto matemático potência**. 2019. 308 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

PRADO, I. G. **Ensino de Matemática: o ponto de vista de educadores e de seus alunos sobre aspectos da pratica pedagógica.** 2000. 255 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2000.

REIS, Ana Queli Mafalda; NEHRING, Cátia Maria. A contextualização no ensino de matemática: concepções e práticas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 2, p. 339-364, 2017. ISSN: 1983-3156. DOI: https://doi.org/https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p339-364. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31841/pdf. Acesso em: 3 fev. 2023.
SÁNCHEZ, Jesús Nicasio García. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica.** Porto Alegre: Artmed, 2004. 296 p. ISBN: 9788536300689.

SANTOS, Josiel Almeida; FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Lúcia Silveira Brum dos. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática.** 2007. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática), Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Santos.pdf. acesso em: 20 jan. 2023.

SANTOS, Renan André Barbosa dos; ANDRADE, Camila Souza de; JUCÁ, João Marcos Breia; BARRETO, Cristiano da Conceição. A utilização de jogos como ferramenta auxiliar no ensino da Matemática. **Revista Educação Pública**, Rio de Janeiro, v. 21, n. 42, 23 nov. 2021. ISSN: 1984-6290. DOI: https://doi.org/10.18264/REP. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/42/a-utilizacao-de-jogos-como-ferramenta-auxiliar-no-ensino-da-matematica. Acesso em: 20 dez. 2022.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Avaliação da aprendizagem em processo**: Matemática / 1ª série do ensino médio. São Paulo: Secretaria da Educação, 2018. 16 p. Disponível em: https://marciosandron.files.wordpress.com/2016/02/aap-matemc3a1tica-1c2aa-sc3a9rie-ensino-mc3a9dio-1c2b0bimestre_2018.pdf. Acesso em: 12 abr. 2022.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Avaliação da aprendizagem em processo**: Matemática / 1ª série do ensino médio. São Paulo: Secretaria da Educação, 2019. 12 p. Disponível em: https://midiasstoragesec.blob.core.windows.net/001/2019/10/aap-matemtica-1-srie-do-em_2019_3b.pdf. Acesso em: 12 abr. 2022.

SILVA, Claudenor Ancelmo Da. **A Torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas.** 2015. 62 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, RN, 2015.

SILVA, Israel Carley da. **Recorrências:** uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio. 2015. 97 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Departamento de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2015.

SILVA, Zildikelly Alves da. **Potenciação:** uma análise de erros na resolução de questões em uma turma do 7° ano do Ensino Fundamental. 2019, 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática), Departamento de Ciências Exatas, Centro de Ciências Aplicadas e Educação, Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2019.

TELARIS. **Material digital do professor:** Matemática - 8º ano - 1º bimestre - Sequência didática 3. Amazon AWS, 2020. Disponível em: https://plurall-content.s3.amazonaws.com/oeds/NV_ORG/PNLD/PNLD20/Telaris_Matematica/8ano/01_BIMESTRE/08_VERSAO_FINAL/03_PDFS/06_TEL_MAT_8ANO_1BIM_Sequencia_didatica_3_TRTAT.pdf. Acesso em: 12 abr. 2022.

TOWER of Hanoi. 1.0.1. PlayStore: Johan Möller, 2011. Requer Android 2.1 ou superior. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=johan.moller.towerofhanoi&hl=pt_BR&gl=US&pli=1. Acesso em: 10 mai. 2022.

VITTI, Catarina Maria. **Matemática com prazer:** A partir da história e da geometria. 2. ed. São Paulo: UNIMEP, 1999. 103 p. ISBN: 9788585541125.

ZAIDAN, Samira; DAVID, Maria Manuela Soares; ARAÚJO, Jussara de Loiola; GOMES, Maria Laura Magalhães; FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. **Educação matemática**. Belo Horizonte: UFMG/Faculdade de Educação, 2010. In: OLIVEIRA, D.A.; DUARTE, A.M.C.; VIEIRA, L.M.F. **DICIONÁRIO**: trabalho, profissão e condição docente. Disponível em: https://gestrado.net.br/wp-content/uploads/2020/08/405-1.pdf. Acesso em: 18 out. 2022.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Avaliação Diagnóstica Inicial

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET
Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional Profissional - PROFMAT

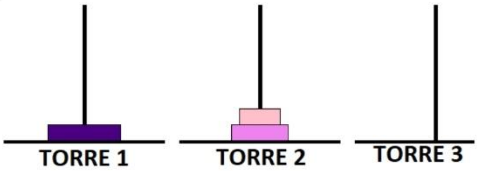
NOME: ____ DATA: ____/____/____

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

TORRE DE HANÓI

É um jogo matemático que consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O objetivo é mover todos os discos de um pino para o outro. Mas é necessário obedecer às seguintes regras: (I) um disco maior nunca pode ficar em cima de um disco menor; (II) mover apenas uma peça por vez.

01. A figura abaixo mostra a Torre de Hanói com 3 discos após algumas movimentações, que se iniciam no pino 1.



a) Qual é o número mínimo de movimentos que podem ter sido efetuados até essa posição?

____

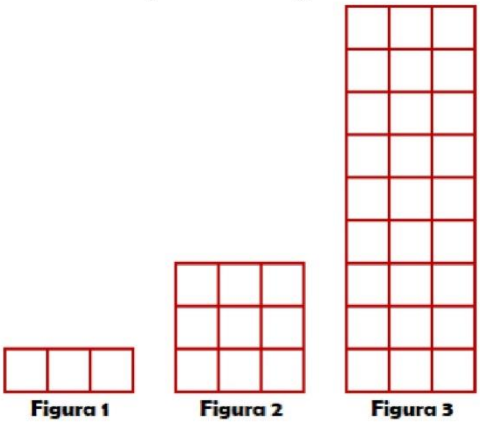
____

b) Qual o mínimo de movimentações necessárias para finalizar o jogo?

____

____

02. Observe a sequência das figuras abaixo:



Seguindo o mesmo padrão observado, a divisão do total de quadrados da figura 8 pelo total de quadrados da figura 3 resultará em:

(A) $3^{8/3}$ quadrados
(B) 3^3 quadrados
(C) 3^5 quadrados
(D) 3^8 quadrados
(E) 3^{11} quadrados

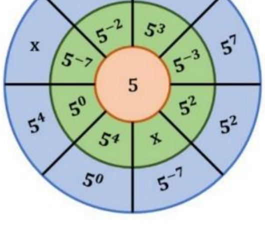
03. Wilian aplicou R$ 300,00 na poupança de um determinado banco onde seu dinheiro renderia conforme a função: $f(t) = 300 \cdot (1,1)^t$, com t representando o tempo em meses. Após 2 meses rendendo nesse banco, o dinheiro de Wilian aumentou para:

(A) R$ 121,00.
(B) R$ 300,00.
(C) R$ 363,00.
(D) R$ 660,00.
(E) R$ 1200,00.

04. A Vitória-régia é uma planta aquática típica da região amazônica. A área ocupada por essa planta, em metros quadrados, obedece a função $f(x) = 3 \cdot 2^x$, onde x representa o tempo, em dias, após a inserção da 1ª Vitória-régia num determinado lago. Após 8 dias da inserção de uma Vitória-régia num lago, a área ocupada por essas plantas será de:

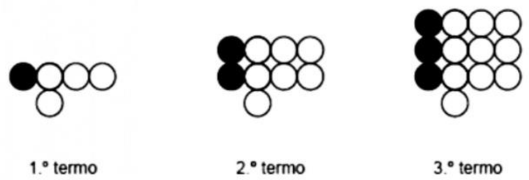
(A) 6 m².
(B) 24 m².
(C) 48 m².
(D) 256 m².
(E) 768 m².

05. No círculo mágico abaixo, o produto dos três valores, partindo do centro para a extremidade, resulta sempre em 55.



A partir do padrão observado acima, o valor de x é:
(A) 5^{-7}
(B) 5^{-3}
(C) 5^{-2}
(D) 5^{10}
(E) 5^{11}

06. Estão representados na figura, os três primeiros termos de uma sequência de conjuntos de bolas pretas e brancas que segue uma lei de formação.



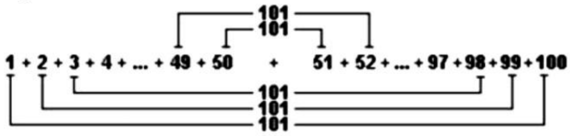
O 7º termo desta sequência terá
(A) 5 bolas pretas e 16 bolas brancas.
(B) 6 bolas pretas e 16 bolas brancas.
(C) 7 bolas pretas e 22 bolas brancas.
(D) 8 bolas pretas e 21 bolas brancas.
(E) 8 bolas pretas e 23 bolas brancas.

Explique como chegou nesse resultado:

07. Observe a sequência numérica a seguir:
1, 3, 5, 2, 7, 9, 11, 4, 13, 15, 17, 6, 19, 21, 23, 8, ...
Mantida a lei de formação, o próximo número na sequência será
(A) 5
(B) 11
(C) 15
(D) 25
(E) 29

Explique como chegou nesse resultado:

08. Quando Karl Friedrich Gauss (1777-1855), estudava na escola primária, um professor de Matemática, solicitou aos alunos que tentassem resolver a soma de todos os números compreendidos entre 1 e 100. Em pouco tempo, Gauss, apresentou o resultado da soma: 5050, cujo raciocínio básico é obtido multiplicando-se 101 por 50, como sugere a figura.



Utilizando a mesma ideia de Gauss, responda quanto vale o produto:

$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128$$

(A) 128^4
(B) 129^4
(C) 128^2
(D) 4^{128}
(E) 4^{129}

Explique como chegou nesse resultado:

09. Em determinada amostra encontram-se duas populações distintas de bactérias, a 1ª espécie, tem sua população duplicada a cada 20 minutos e a segunda espécie, duplica sua população em 30 minutos, conforme mostra a figura:

De acordo com as informações, após 3 horas, a quantidade total de bactérias das duas espécies será de:
(A) 14 bactérias.
(B) 64 bactérias.
(C) 128 bactérias.
(D) 512 bactérias.
(E) 576 bactérias.

Explique como chegou nesse resultado:

APÊNDICE B – Avaliação Diagnóstica Final

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET
Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional Profissional - PROFMAT

NOME: ____ DATA: _____/_____/______

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

TORRE DE HANÓI

É um jogo matemático que consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O objetivo é mover todos os discos de um pino para o outro. Mas é necessário obedecer às seguintes regras: (I) um disco maior nunca pode ficar em cima de um disco menor; (II) mover apenas uma peça por vez.

01. A figura abaixo mostra a Torre de Hanói com 4 discos após algumas movimentações, que se iniciam na torre 1.

a) Qual é o número mínimo de movimentos que podem ter sido efetuados até essa posição?

____

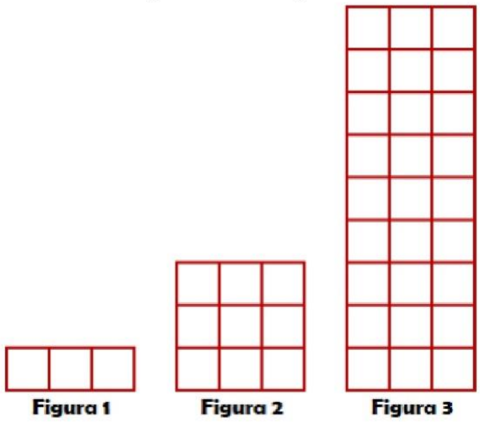
____

b) Qual o mínimo de movimentações necessárias para finalizar o jogo?

____

____

02. Observe a sequência das figuras abaixo:



Seguindo o mesmo padrão observado, a divisão do total de quadrados da figura 9 pelo total de quadrados da figura 3 resultará em:

(A) $3^{8/3}$ quadrados
(B) 3^3 quadrados
(C) 3^5 quadrados
(D) 3^8 quadrados
(E) 3^{11} quadrados

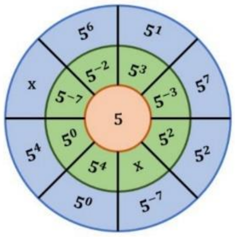
03. Wilian aplicou R$ 300,00 na poupança de um determinado banco onde seu dinheiro renderia conforme a função: $f(t) = 300 \cdot (1{,}1)^t$, com t representando o tempo em meses. Após 2 meses rendendo nesse banco, o dinheiro de Wilian aumentou em:

(A) R$ 121,00.
(B) R$ 660,00.
(C) R$ 363,00.
(D) R$ 66,00.
(E) R$ 63,00.

04. Um botânico, encantado com o pau-brasil, dedicou-se, durante anos de estudos, a conseguir criar uma função exponencial que medisse o crescimento dessa árvore no decorrer do tempo. Sua conclusão foi que, ao plantar-se essa árvore, seu crescimento, no decorrer dos anos, é dado por $C(t) = 0{,}5 \cdot 2^{t-1}$. Analisando essa função, qual a altura dessa árvore após 6 anos?

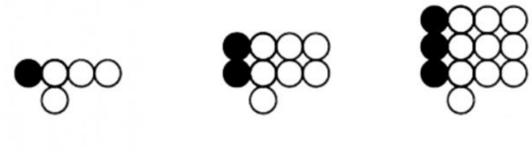
(A) 64 m
(B) 32 m
(C) 16 m
(D) 8 m
(E) 5 m

05. No círculo mágico abaixo, o produto dos três valores, partindo do centro para a extremidade, resulta sempre em 5^5.



A partir do padrão observado acima, o valor de x é:
(A) 5^{-7}
(B) 5^{-3}
(C) 5^{-2}
(D) 5^{10}
(E) 5^{11}

06. Estão representados na figura, os três primeiros termos de uma sequência de conjuntos de bolas pretas e brancas que segue uma lei de formação.



1.º termo 2.º termo 3.º termo

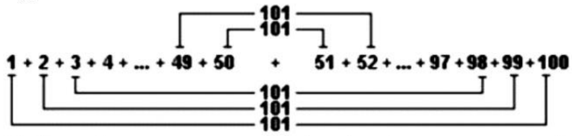
O 8º termo desta sequência terá
(A) 5 bolas pretas e 16 bolas brancas.
(B) 6 bolas pretas e 16 bolas brancas.
(C) 7 bolas pretas e 22 bolas brancas.
(D) 8 bolas pretas e 21 bolas brancas.
(E) 8 bolas pretas e 25 bolas brancas.

Explique como chegou nesse resultado:

07. Observe a sequência numérica a seguir:
1, 3, 5, 7, 2, 9, 11, 13, 15, 4, 17, 19, 21, 23, 6, 25, ...
Mantida a lei de formação, o próximo número na sequência será
(A) 8
(B) 26
(C) 27
(D) 29
(E) 31

Explique como chegou nesse resultado:

08. Quando Karl Friedrich Gauss (1777-1855), estudava na escola primária, um professor de Matemática, solicitou aos alunos que tentassem resolver a soma de todos os números compreendidos entre 1 e 100. Em pouco tempo, Gauss, apresentou o resultado da soma: 5050, cujo raciocínio básico é obtido multiplicando-se 101 por 50, como sugere a figura.



Utilizando a mesma ideia de Gauss, responda quanto vale o produto:
$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128 \cdot 256 \cdot 512$$
(A) 512^5
(B) 513^5
(C) 512^4
(D) 5^{512}
(E) 5^{513}

Explique como chegou nesse resultado:

09. Em determinada amostra encontram-se duas populações distintas de bactérias, a 1ª espécie, tem sua população duplicada a cada 20 minutos e a segunda espécie, duplica sua população em 30 minutos, conforme mostra a figura:

De acordo com as informações, após 3 horas, a quantidade total de bactérias das duas espécies será de:
(A) 14 bactérias.
(B) 64 bactérias.
(C) 128 bactérias.
(D) 512 bactérias.
(E) 576 bactérias.

Explique como chegou nesse resultado:

Para a produção da avaliação diagnóstica inicial, as questões presentes foram retiradas de:

• Questão 1: TELARIS (2020, p. 6).

• Questões 2, 3, 4 e 5: SÃO PAULO (Estado) (2019, p. 3, 4 e 7).

• Questões 6, 7, 8 e 9: SÃO PAULO (Estado) (2018, p. 3, 4, 12 e 13).

Para a produção da avaliação diagnóstica final, as questões presentes foram adaptadas de:

• Questão 1: TELARIS (2020, p. 6).

• Questões 2, 3 e 5: SÃO PAULO (Estado) (2019, p. 3, 4 e 7).

• Questões 4: MUNDO EDUCAÇÃO ([s.d.]).

• Questões 6, 7, 8 e 9: SÃO PAULO (Estado) (2018, p. 3, 4, 12 e 13).

APÊNDICE C – Questionário

Governo do Estado do Ceará
Secretaria da Ciência Tecnologia e Educação Superior
Universidade Estadual do Ceará – UECE
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA REDE NACIONAL PROFISSIONAL - PROFMAT

QUESTIONÁRIO

01. Tabela para registro da quantidade total de movimentos para cada quantidade "x" de discos utilizada.

Quantidade de discos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Total de movimentos										

02. Tabela para registro da quantidade de movimentos de cada disco para cada quantidade "x" de discos utilizada.

	Quantidade de movimentos de cada disco							
Quantidade de discos	**Disco 1**	**Disco 2**	**Disco 3**	**Disco 4**	**Disco 5**	**Disco 6**	**...**	**Total de movimentos**
1							**...**	
2							**...**	
3							**...**	
4							**...**	
5							**...**	
6							**...**	
...	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**
x							**...**	

03. Análise utilizando 1 e 2 discos:

a) Anote na tabela do item 01 o total de movimentos que foram necessários para movimentar 1 disco.

b) Anote na tabela do item 01 o total de movimentos que foram necessários para movimentar 2 discos.

c) Anote na tabela do item 02 a quantidade de movimentos que foram necessários para movimentar cada disco tendo a torre 1 disco.

d) Anote na tabela do item 02 a quantidade de movimentos que foram necessários para movimentar cada disco tendo a torre 2 discos.

e) Com base na quantidade de movimentos realizados com 1 e 2 discos, quantos movimentos, no mínimo, serão necessários para mudar totalmente uma torre com 3 discos? Como chegou a essa conclusão?

04. Análise utilizando 3 discos:

a) Anote na tabela do item 01 o total de movimentos que foram necessários para movimentar 3 discos.

b) Existem movimentos semelhantes em relação as quantidades anteriores de discos? Explique.

c) Se sua torre se encontra no pino nº 1 e muda para o pino nº 2 usando o pino nº 3 como intermediário, em seguida muda do pino nº 1 para o pino nº 3 usando o pino nº 2 como intermediário, muda alguma coisa na quantidade de movimentos? Por quê? Algo permanece igual? Explique.

d) Com base na quantidade de movimentos realizados até aqui, quantos movimentos, no mínimo, serão necessários para mudar totalmente uma torre com 4 discos? Como chegou a essa conclusão?

e) Anote na tabela do item 02 a quantidade de movimentos que foram necessários para movimentar cada disco tendo a torre 3 discos.

05. Análise utilizando 4 discos:

a) Anote na tabela do item 01 o total de movimentos que foram necessários para movimentar 4 discos.

b) Existem movimentos semelhantes em relação as quantidades anteriores de discos? Explique.

c) Se sua torre se encontra no pino nº 1 e muda para o pino nº 2 usando o pino nº 3 como intermediário, em seguida muda do pino nº 1 para o pino nº 3 usando o pino nº 2 como intermediário, muda alguma coisa na quantidade de movimentos? Por quê? Algo permanece igual? Explique.

d) Com base na quantidade de movimentos realizados até aqui, quantos movimentos, no mínimo, serão necessários para mudar totalmente uma torre com 5 discos? Como chegou a essa conclusão?

e) Anote na tabela do item 02 a quantidade de movimentos que foram necessários para movimentar cada disco tendo a torre 4 discos.

06. Análise utilizando 5 discos:

a) Anote na tabela do item 01 o total de movimentos que foram necessários para movimentar 5 discos.

b) Existem movimentos semelhantes em relação as quantidades anteriores de discos? Explique.

c) Com base na quantidade de movimentos realizados até aqui, quantos movimentos, no mínimo, serão necessários para mudar totalmente uma torre com 6 discos? Como chegou a essa conclusão?

d) Anote na tabela do item 02 a quantidade de movimentos que foram necessários para movimentar cada disco tendo a torre 5 discos.

07. Análise utilizando 6 discos:

a) Anote na tabela do item 01 o total de movimentos que foram necessários para movimentar 6 discos.

b) Existem movimentos semelhantes em relação as quantidades anteriores de discos? Explique.

c) Com base na quantidade de movimentos realizados até aqui, quantos movimentos, no mínimo, serão necessários para mudar totalmente uma torre com 7 discos? Como chegou a essa conclusão?

d) Anote na tabela do item 02 a quantidade de movimentos que foram necessários para movimentar cada disco tendo a torre 6 discos.

08. Análise utilizando 7 discos:

a) Anote na tabela do item 01 a estimativa (realizada no item 07.c) do total de movimentos que foram necessários para movimentar 7 discos.

b) Faça uma estimativa para a quantidade de movimentos que seriam necessários para movimentar cada disco tendo a torre 7 discos. Explique.

09. Análise utilizando 8 discos:

a) Com base nas anotações da quantidade de movimentos realizados até aqui, quantos movimentos, no mínimo, serão necessários para mudar totalmente uma torre com 8 discos? Como chegou a essa conclusão? Anote na tabela do item 01.

b) Faça uma estimativa para a quantidade de movimentos que seriam necessários para movimentar cada disco tendo a torre 8 discos. Explique.

10. Análise utilizando 9 discos:

a) Com base nas anotações da quantidade de movimentos realizados até aqui, quantos movimentos, no mínimo, serão necessários para mudar totalmente uma torre com 9 discos? E para 10 discos? Como chegou a essa conclusão? Anote na tabela do item 01.

b) Faça uma estimativa para a quantidade de movimentos que seriam necessários para movimentar cada disco tendo a torre 9 discos. Explique.