



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOÃO VANDERLE ALMEIDA FILHO

ENGENHARIA DIDÁTICA E SEQUÊNCIA FEDATHI: UMA PROPOSTA DE
ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO

SOBRAL – CEARÁ

2023

JOÃO VANDERLE ALMEIDA FILHO

ENGENHARIA DIDÁTICA E SEQUÊNCIA FEDATHI: UMA PROPOSTA DE ENSINO
DA MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes

Coorientador: Prof. Me. Davi Ribeiro dos Santos.

SOBRAL – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Almeida Filho, Joao Vanderle.

Engenharia didática e sequência fedathi: uma proposta de ensino da matemática financeira para o ensino médio. [recurso eletrônico] / Joao Vanderle Almeida Filho. - 2023.

92 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Sobral, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Daniel Brandao Menezes.

Coorientação: Prof. Me. Davi Ribeiro dos Santos.

1. Engenharia Didática. 2. Sequência Fedathi. 3. Juros Compostos. 4. Planilhas Eletrônicas.. I. Título.

JOÃO VANDERLE ALMEIDA FILHO

ENGENHARIA DIDÁTICA E SEQUÊNCIA FEDATHI: UMA PROPOSTA DE ENSINO
DA MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 20/06/2023



Documento assinado digitalmente
DANIEL BRANDAO MENEZES
Data: 18/07/2023 09:21:46-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE



Documento assinado digitalmente
WENDEL MELO ANDRADE
Data: 18/07/2023 08:37:40-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. Wendel Melo Andrade
Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação à Distância – CODED/CED



Documento assinado digitalmente
MARIA JOSE ARAUJO SOUZA
Data: 17/07/2023 21:49:05-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Profª. Dra. Maria José Araújo Souza
Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA

À minha mãe Isabel, por cuidar de mim com dedicação e amor, sempre zelosa com minha educação. Ao meu pai João, que com sua sabedoria e firmeza me ensinou como lidar com a vida. À minha esposa Luzimar e minha filha Laura, minhas maiores incentivadoras que, com amor, tornaram esta caminhada mais leve e fácil.

AGRADECIMENTOS

Graças a Ti, Senhor Deus, pelas maravilhas que acontecem em minha vida. Por sua benção e sua proteção. Aos meus pais, irmãos e familiares, pelas orações, pelo desejo no coração de me ver sempre prosperando profissionalmente e em todos os aspectos da minha vida. Aos meus amigos, que nos momentos difíceis ofereceram apoio e trouxeram palavras de incentivo, que me fortaleceram para seguir em frente. Ao meu orientador, Professor Dr. Daniel Brandão, pela contribuição valorosa para a concretude deste trabalho. Aos meus professores, por me proporcionar experiências de aprendizagem e contribuir com a elevação de meu conhecimento científico e formação profissional, que levo para a vida toda. Aos meus colegas de curso, pelo compartilhamento de experiências e vivência de momentos tão preciosos em nossas vidas ao longo deste tempo juntos. Meu carinho e minha admiração a todos vocês.

A luta pela vida nem sempre é vantajosa aos fortes nem aos espertos. Mais cedo ou mais tarde, quem cativa a vitória é aquele que crê plenamente. Eu conseguirei!

(Napoleon Hill)

RESUMO

Questões envolvendo dinheiro tendem a trazer preocupação para algumas pessoas e tranquilidade para outras. Dependendo das decisões tomadas dentre as variadas situações vivenciadas, as pessoas podem ser levadas a tomar dinheiro emprestado quando sua renda não for suficiente para cobrir suas despesas, ou mesmo, se bem administrado, parte do dinheiro pode ser destinado para investimentos, promovendo aumento da renda e aumento de patrimônio. Nas operações de empréstimos ou investimentos ocorrem a incidência de juros compostos e conhecer seus efeitos são decisivos para uma vida de abundância ou de escassez. Isso faz da Matemática Financeira um conteúdo ao qual todos os alunos deveriam ser apresentados, com garantia efetiva de aprendizagem. Temos por objetivo geral investigar as contribuições que a Sequência Fedathi e a Engenharia Didática oferecem para a aprendizagem de juros compostos por alunos do Ensino Médio. Utilizando a Sequência Fedathi e suas etapas (tomada de posição, maturação, solução e prova) apresentamos um modelo de interação da relação professor-aluno no processo de ensino e aprendizagem, a partir da proposição de situações-problema retiradas de edições do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), envolvendo tópicos de Matemática Financeira. Quanto à metodologia, utilizamos a Engenharia Didática, que é caracterizada pela criação de um ambiente de pesquisa que contribui para a organização da ação docente e propicia a formação do pensamento criativo dos alunos. No decorrer desta pesquisa, desenvolvemos as duas primeiras fases da Engenharia Didática – análise preliminar e *a priori* –, em que propomos cinco situações-problema como subsídio ao ensino de juros compostos. O conhecimento sobre as produções acadêmicas e científicas sobre o tema é de fundamental importância, a fim de descrever o cenário atual de seu ensino. Por esta razão apresentamos uma Revisão Sistemática de Literatura, que conta com a análise de trabalhos acadêmicos selecionados sob critérios que estão de acordo com os objetivos que se deseja alcançar com esta pesquisa. Como perspectiva futura, espera-se que as situações propostas possam ser experimentadas, avaliadas e validadas, dando continuidade a esta engenharia por docentes de Matemática do ensino Médio, em estudos posteriores.

Palavras-chave: Engenharia Didática. Sequência Fedathi. Juros Compostos. Planilhas Eletrônicas.

ABSTRACT

Issues involving money tend to bring concern to some people and tranquility to others. Depending on the decisions taken among the various situations experienced, people can be led to borrow money when their income is not enough to cover their expenses, or even, if well managed, part of the money can be destined for investments, promoting an increase in income. and increase in equity. Compound interest is incurred in lending or investment operations and knowing its effects is decisive for a life of abundance or scarcity. This makes Financial Mathematics a content to which all students should be introduced, with an effective guarantee of learning. Our general objective is to investigate the contributions that the Fedathi Sequence and the Didactic Engineering offer to the learning of interest composed by high school students. Using the Fedathi Sequence and its stages (taking a position, maturation, solution, and proof) we present an interaction model of the teacher-student relationship in the teaching and learning process, based on the proposition of problem-situations taken from editions of the Exame Nacional do High School (ENEM), involving Financial Mathematics topics. As for the methodology, we used Didactic Engineering, which is characterized by the creation of a research environment that contributes to the organization of teaching action and fosters the formation of students' creative thinking. In the course of this research, we developed the first two phases of Didactic Engineering – preliminary and a priori analysis – in which we proposed five problem-situations as subsidy to the teaching of compound interest. Knowledge about academic and scientific productions on the subject is of fundamental importance in order to describe the current scenario of its teaching. For this reason, we present a Systematic Literature Review, which includes the analysis of academic works selected under criteria that are in accordance with the objectives that one wishes to achieve with this research. As a future perspective, it is expected that the proposed situations can be tried, evaluated, and validated, continuing this engineering by high school Mathematics teachers, in further studies.

Keywords: Didactic Engineering. Fedathi Sequence. Compound Interest. Electronic Spreadsheets.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Fases da Engenharia Didática	22
Figura 2	– Ideia de Competência a partir da intersecção de conhecimento, habilidade e atitude	27
Figura 3	– Esquema investidor – banco – tomador	35
Figura 4	– Elementos da Sequência Fedathi	45
Figura 5	– Fases da Sequência Fedathi	48
Figura 6	– Resolução no Excel da situação problema	65
Figura 7	– Valor da atualização de cada parcela	67
Figura 8	– Resolução da situação problema 5 utilizando planilha eletrônica	69
Figura 9	– Protocolo utilizado na RSL	72
Figura 10	– Trabalhos incluídos na pesquisa, no período de 2012- 2022, de acordo com as palavras-chave	74
Figura 11	– Quantitativo em cada etapa da pesquisa	77
Figura 12	– Quantitativo de trabalhos por ano de publicação	78
Figura 13	– Quantitativo de trabalhos por repositório pesquisado	79

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	– Descrição das Fases da Engenharia Didática	23
Quadro 2	– Documentos e obras didáticas analisadas	25
Quadro 3	– Competências e habilidades ligadas à Matemática Financeira	29
Quadro 4	– Competência da Matriz de Referência do ENEM de que trata a noção de variação de grandeza	30
Quadro 5	– Taxa percentual e sua respectiva transformação em unitária	39
Quadro 6	– Evolução dos juros simples ao longo de seis períodos	39
Quadro 7	– Evolução dos juros compostos ao longo de seis períodos	41
Quadro 8	– Evolução dos juros composto ao longo de seis períodos.....	42
Quadro 9	– Resolução do exemplo 4	43
Quadro 10	– Questão 25 retirada da edição do ENEM do ano 2000	55
Quadro 11	– Questão 150 do Enem (2012) – 2º Dia – Caderno 5 – Amarelo – Aplicação Regular	57
Quadro 12	– Resolução da Situação Problema 2	58
Quadro 13	– Resumo das opções disponíveis para a compra do terreno	59
Quadro 14	– Questão 152 do Enem (2015) – 2º Dia – Caderno 5 – Amarelo – Aplicação Regular	61
Quadro 15	– Questão 160 do ENEM (2018) – 2º Dia – Caderno 17 – Amarelo – Reaplicação	63
Quadro 16	– Resumo das operações para o cálculo da aquisição do carro	64
Quadro 17	– Questão 154 do Enem (2019) – 2º Dia – Caderno – Amarelo – Aplicação Regular	66
Quadro 18	– Cálculo do valor presente de cada uma das duas parcelas	68
Quadro 19	– Fontes utilizadas na RSL	72
Quadro 20	– Palavras-chave utilizadas	73
Quadro 21	– Critérios de Inclusão	74
Quadro 22	– Quantitativo de trabalhos após a aplicação dos critérios de inclusão	75
Quadro 23	– Critérios de Exclusão	76
Quadro 24	– Trabalhos mantidos após aplicação dos critérios de exclusão	76
Quadro 25	– Relação dos trabalhos submetidos a análise	78

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNC	Confederação Nacional do Comércio
DM	Didática da Matemática
EB	Educação Básica
ED	Engenharia Didática
EF	Educação Financeira
EM	Ensino Médio
ENEF	Estratégia Nacional de Educação Financeira
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
MF	Matemática Financeira
MEC	Ministério da Educação
PEIC	Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor
PNL	Plano Nacional de Educação
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
SF	Sequência Fedathi
UECE	Universidade Estadual do Ceará
UFC	Universidade Federal do Ceará

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	ENGENHARIA DIDÁTICA	21
2.1	Caracterização	21
2.2	Etapas da engenharia didática	22
3	ANÁLISE PRELIMINAR	25
3.1	Matemática Financeira na BNCC e na Matriz do Enem	26
3.2	Análise dos livros didáticos no contexto da Matemática Financeira	31
3.2.1.	Livro Didático: Prisma	31
3.2.2.	Livro Didático: Diálogo	32
3.2.3.	Livro Didático: Matemática em Contextos	33
3.3	Matemática financeira	34
3.3.1	Aspectos Gerais	34
3.3.2	Contexto Histórico	37
3.3.3	Taxa de Juros e Regime de Capitalização Simples	38
3.3.4	Regime de Capitalização Composta	41
3.4	Sequência Fedathi	44
3.4.1	Caracterização	44
3.4.2	Fases da Sequência Fedathi	48
3.4.2.1	<i>Tomada de Posição</i>	48
3.4.2.2	<i>Maturação</i>	49
3.4.2.3	<i>Solução</i>	50
3.4.2.4	<i>Prova</i>	51
4	CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI	54
4.1	Situação-Problema 1	54
4.2	Situação-Problema 2	57
4.3	Situação-Problema 3	60
4.4	Situação-Problema 4	63
4.5	Situação-Problema 5	66
5	REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA	71
5.1	O percurso da RSL	71
5.2	Fontes da pesquisa	72
5.3	Palavras-chave e recorte temporal	73

5.4	Questões da pesquisa	73
5.5	Análise de dados	77
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	88
	REFERÊNCIAS	90

APRESENTAÇÃO

No capítulo 1 do trabalho temos a *Introdução*, onde apresentamos os aspectos gerais, a motivação para a escolha do tema, os objetivos que pretendemos alcançar e um resumo do referencial teórico e metodológico para a organização da pesquisa e coleta de dados foram utilizados.

No capítulo 2 abordamos a Engenharia Didática e como ela se constituiu metodologia de pesquisa e investigação científica do nosso trabalho, com uma descrição detalhada de cada uma das suas quatro fases: análise preliminar, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação.

O capítulo 3 traz a primeira da fase da Engenharia Didática, que é a análise Preliminar. Neste capítulo apresentamos um levantamento de como a legislação brasileira mais recente trata o ensino de MF, a partir do estudo da BNCC. Ainda nesta fase analisamos alguns livros didáticos disponibilizados pelo Ministério da Educação (MEC), para a orientar os professores no último processo de seleção dos livros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Também explicitamos o campo epistêmico da MF, com o contexto histórico e um tópico dedicado aos regimes de capitalização. Por fim, abordamos a Sequência Fedathi (SF) como metodologia ativa de sala de aula e mediação do processo de ensino e aprendizagem.

No capítulo 4 ocorre a estruturação da análise *a priori*, em que apresentamos uma descrição e concepção de cinco situações-problema como proposta de sequência didática para alunos do Ensino Médio. Aqui construímos um cenário de como pode ser vivenciada a fase de experimentação em uma aplicação futura, bem como descrevemos o lócus da pesquisa, a escolha dos participantes e dos pormenores que podem ocorrer na vivência da sala de aula.

O capítulo 5 traz uma Revisão Sistemática de Literatura, onde buscamos traçar um panorama dos trabalhos acadêmicos realizados sobre o tema a partir de artigos, dissertações e teses, publicados em Língua Portuguesa e disponibilizados em repositórios institucionais e sítios eletrônicos.

Por fim, no capítulo 6, apresentamos nossas considerações finais e apontamos os aspectos mais relevantes observados na pesquisa, buscando refletir sobre possibilidades e aprimoramento de pesquisas futuras.

1 INTRODUÇÃO

Tempo é dinheiro! Esta é uma afirmação que pode nos levar a pensar, que se trata de trocar tempo por dinheiro, quando se exerce atividade remunerada. Contudo, pela ótica da Matemática Financeira (MF), compreende-se uma ideia mais profunda, pois seu objeto de estudo é justamente a mudança do valor do dinheiro ao longo do tempo, que acontece em função do juro, o qual constitui a remuneração do fator capital (LOPES, 2020).

Quando o assunto é dinheiro, um dos aspectos que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando a educação financeira dos alunos, para que possam ter domínio sobre o cálculo de porcentagens, porcentagem de porcentagem e juros (BRASIL, 2018). A BNCC apresenta pelo menos uma habilidade relacionada à Educação Financeira (EF) a ser desenvolvida em cada ano da Educação Básica (EB).

Apesar disso, os currículos escolares são negligentes ao organizar experiências e transpor conhecimentos que desenvolvam a consciência financeira dos alunos. Apenas ao se tornarem economicamente ativos, boa parte da população enfrenta as dificuldades financeiras e sente os efeitos de uma EF deficiente. Na Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (PEIC), realizada pela Confederação Nacional do Comércio (CNC), temos a dimensão de como o endividamento das famílias brasileiras vem se agravando ao longo dos últimos anos. De acordo com a FECOMERCIO - SP (2022), o percentual de famílias endividadas no país vem crescendo de forma acelerada, encerrando o primeiro semestre deste ano em 78% – o maior patamar da série histórica para o período desde 2010.

Diante deste cenário, acreditamos que fortalecer o ensino de MF em crianças e adolescentes nas escolas, por meio da promoção de iniciativas que desenvolvam a consciência financeira, é uma das estratégias que podem ser utilizadas para que os brasileiros lidem melhor com questões relacionadas ao dinheiro, evitando o endividamento exacerbado e seu impacto na qualidade de vida e dignidade das famílias.

Nossa pesquisa é motivada por uma questão norteadora, a saber: *Como o ensino de Matemática Financeira pode influenciar no desenvolvimento de competências financeiras e a formação de cidadãos mais conscientes, em assuntos relativos a operações financeiras que utilizam juros compostos?* Para responder esta pergunta, apoiamos nossa pesquisa na análise de documentos que são referência para a construção

dos currículos das escolas, além de pesquisas já realizadas e publicadas sobre esse assunto. Trazemos como proposta a aplicação de situações-problema voltadas para as salas de aulas da Educação Básica e seus possíveis impactos na formação dos alunos.

Dentre as diversas metodologias que o professor dispõe para o seu fazer docente, destacamos a Engenharia Didática (ED), que pode ser adotada para melhorar a qualidade de suas aulas, à medida que o professor compreende o panorama didático atual de seu objeto de ensino. As experiências de aprendizagem vivenciadas nas aulas, segundo a ED, são planejadas e executadas a partir de situações em que o sujeito sai do papel de expectador e participa ativamente da construção do conhecimento. Desde a concepção, construção, até a observação e análise dos resultados, as ações são pensadas com vistas a favorecer a compreensão e o raciocínio matemático dos alunos (ARTIGUE, 1995; VIEIRA, 2020).

Para a mediação no processo de ensino e aprendizagem, apresentamos a Sequência Fedathi (SF), que é uma metodologia ativa de ensino desenvolvida por pesquisadores do Ceará, visando favorecer a aprendizagem a partir da vivência de experiências em sala de aula. A SF favorece a reflexão sobre o que se está estudando, ou seja, ao invés de receber respostas prontas, o aluno é incentivado a buscar e validar as soluções de problemas matemáticos, em regime de colaboração a partir da investigação e sistematização dos conhecimentos, elevando-o à condição de pesquisador (SANTANA; BORGES NETO, 2003).

A MF aborda uma extensa gama de conceitos e, por vezes, estes são bastante complexos. Diante disso, elencamos os seguintes objetivos a serem alcançados com o desenvolvimento da nossa pesquisa:

Objetivo geral:

Investigar as contribuições que a Sequência Fedathi e da Engenharia Didática na estruturação de uma sequência didática para a aprendizagem de juros compostos, voltada para alunos do Ensino Médio.

Objetivos Específicos:

- Apresentar a Sequência Fedathi como metodologia ativa de sala de aula, visando a mediação da relação professor-aluno no processo de ensino e aprendizagem;
- Apresentar os elementos da Engenharia Didática e sua contribuição, bem como o percurso de construção desta pesquisa;
- Realizar uma Revisão Sistemática de Literatura (RSL) a partir de trabalhos acadêmicos que abordam o tema de juros compostos.

A tomada de decisões assertivas sobre assuntos financeiros perpassa pelo domínio das fórmulas da Matemática Financeira, demandando o pleno desenvolvimento de competências e habilidades que estão mais diretamente relacionadas à Educação Financeira. Devemos, a partir daí, encontrar mecanismos para que os alunos do Ensino Médio tenham melhores condições de resolver situações-problema em avaliações como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e demais vestibulares, além de ter condições de gerenciar sua vida financeira, quando se tornarem economicamente ativos.

Realizamos, previamente, um estudo da legislação educacional, a fim de conhecer as competências e habilidades previstas no âmbito da Educação Financeira e como tem sido realizado o planejamento dos currículos escolares a partir desses documentos. Buscamos verificar se é possível a execução deste planejamento, dentro do que propõem as diretrizes, de maneira eficiente e verídica.

Um outro ponto importante e que deve ser levado em consideração, para além de conceitos matemáticos, fórmulas e regras, é o desenvolvimento de competências pessoais e sociais que permitam reflexões à respeito da aplicação destes conceitos na vida, para que as decisões relacionadas ao dinheiro sejam tomadas de forma mais consciente.

Inicialmente, discorreremos sobre a ED, suas características e fases (análise preliminar, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação). Para tanto, abordamos uma contextualização, a partir de cinco situações problema como proposta de ensino no contexto do Ensino Médio (EM). Estas situações tratam sobre o tópico de juros compostos e oportunizam o desenvolvimento de conceitos da MF e competências digitais, dando condições aos alunos de conhecer e fazer uso de planilhas eletrônicas para a tomada de decisões, em situações que envolvem o valor do dinheiro ao longo do tempo.

A SF é aqui apresentada como metodologia ativa de aprendizagem e traz uma proposta para a aplicação em sala de aula. A partir da vivência de suas quatro etapas (tomada de posição, maturação, solução e prova), visa despertar nos alunos o senso da pesquisa e reflexão, na resolução e validação de soluções encontradas no decorrer da resolução de problemas matemáticos.

Esperamos trilhar caminhos e oferecer sugestões ao trabalho do professor, para que este promova melhorias na percepção dos alunos e da sua aprendizagem, norteado pela vivenciada no contexto da ED e da SF. Almeja-se a possibilidade de colher elementos a ser utilizados no aperfeiçoamento desta metodologia ativa de ensino, em aplicações futuras.

Meu interesse pela Matemática vem desde os tempos de aluno da Educação Básica, quando ainda estava no Ensino Fundamental. Fui destaque em monitorias que tinham por objetivo contribuir com para a aprendizagem de colegas de sala que apresentavam dificuldades na disciplina. Meu fascínio pela Matemática cresceu cada vez mais durante o Ensino Médio, o que me motivou a prestar vestibular para Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), sendo aprovado em 2000.

No início da graduação, em março de 2001, veio a oportunidade de lecionar Matemática no Ensino Médio em uma escola particular. No ano de 2002, tive minha primeira experiência na Rede Pública Estadual como professor temporário de Ensino Médio, assim continuando durante todo o curso de graduação, que foi concluído no final do ano de 2004. Neste mesmo ano fui aprovado em concurso público municipal, na cidade de Bela Cruz - CE, para lecionar a Matemática no Ensino Fundamental.

Em outubro de 2010, tomei posse como professor efetivo da Rede Estadual de Educação do Ceará, iniciando minhas atividades no Colégio Estadual Dom José Tupinambá da Frota, na cidade de Sobral - CE. Foi ali, durante as aulas de Matemática na terceira série do Ensino Médio, que surgiu o interesse de aprofundar meus estudos para tornar o aprendizado efetivo dos assuntos relacionados ao dinheiro, entendendo de que modo poderíamos formar alunos mais conscientes e capazes de administrar suas finanças ao se tornar economicamente ativos.

O resultado deste estudo foi tema do meu Trabalho de Conclusão de Curso, a Especialização em Ensino de Matemática, também cursada na Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), entre os anos de 2011 e 2013. Alguns trabalhos foram desenvolvidos durante minha participação como supervisor do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), também pela UVA, entre 2013 e 2016.

Foi essa trajetória, de vivência acadêmica e profissional, que me motivou a pesquisar e escrever sobre este tema, que particularmente considero ser um dos tópicos da matemática de maior relevância social, por tudo que ele representa na vida de todos os cidadãos, independente da área de atuação profissional, nível de escolarização ou posição social.

Quanto à metodologia, utilizamos a Engenharia Didática (ED), que é caracterizada pela criação de um ambiente de pesquisa que contribui para a organização da ação docente e formação do pensamento matemático criativo dos alunos. No decorrer desta pesquisa, desenvolvemos as duas primeiras fases da ED, em que propomos uma

sequência didática com cinco situações-problema visando construir um subsídio metodológico ao professor de matemática, voltado para o ensino de juros compostos. Esta sequência didática pode, posteriormente, ser experimentada, avaliada e validada por docentes em suas aulas de Matemática Financeira com alunos do Ensino Médio, dando continuidade a esta ED em pesquisas futuras.

Nas análises preliminares realizamos um estudo dos documentos legais que norteiam a elaboração dos currículos escolares brasileiros e a elaboração das avaliações de larga escala, como o ENEM.

Já na análise *a priori*, discutimos sobre como o professor pode aplicar situações-problema de MF utilizando a Sequência Fedathi como metodologia, ao detalhar quais devem ser os conhecimentos que serão pré-requisitos necessários para a resolução de cada uma delas, além de fazer uma previsão de quais serão os possíveis erros dos alunos.

Como produto final, deixamos uma proposta de ensino, com cinco questões retiradas de edições anteriores do ENEM. O critério para a escolha destas questões foi estar relacionadas ao tema desta pesquisa e buscamos itens que demandavam habilidades diferentes em cada um deles. Apresentamos, de forma sucinta, a possibilidade de uso de planilhas eletrônicas na resolução de algumas destas questões, a fim de ampliar o leque de estratégias para encontrar a solução e a generalização das respostas, a partir da programação destas planilhas.

2 ENGENHARIA DIDÁTICA

2.1 Caracterização

A Engenharia Didática (ED) foi a metodologia adotada como roteiro na construção deste trabalho. Utilizamos sua estrutura para alcançar os objetivos, responder à questão de pesquisa e planejar as situações-problema que compõem nossa proposta de ensino, visando uma futura experimentação e coleta de dados.

Nossa pesquisa tem embasamento teórico nas obras de Artigue (1988; 1996), Almouloud (2007), Almouloud e Coutinho (2008), Almouloud e Silva (2012), Alves (2011), entre outros.

Na França, da década de 1970, diversos pesquisadores preocupados com os problemas relacionados ao ensino e a aprendizagem em Matemática realizaram estudos, no intuito de reestruturar o formato de ensino e compreender os fenômenos que envolvem a relação entre o professor, o aluno e o saber matemático. Foi neste contexto foram criados os chamados Institutos de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (IREMs , sigla em francês) que alavancam o desenvolvimento de teorias em Didática da Matemática (DM) (ALVES, 2017).

Entre os estudiosos da época, destacamos Guy Brousseau, como precursor da Engenharia Didática a partir da obra *Les Mathématiques du Cours Préparatoire* (BROSSEAU, 1965). Porém, é a partir dos anos 80 que a ED foi mais amplamente divulgada, graças à contribuição de Yves Chevallard e Michèle Artigue. Em seu artigo *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Artigue (1988) compartilha na França e no exterior uma apresentação sistematizada da ED e a consolida como metodologia de pesquisa e investigação matemática.

A conexão entre teoria e prática é uma das vantagens da utilização da ED como metodologia de pesquisa, pois o professor pode aprofundar os conceitos a partir do planejamento estruturado de práticas a serem executadas em sala de aula, combinando saberes de diferentes ciências. Neste sentido, Artigue (1996) acrescenta que:

A Engenharia Didática, vista como uma metodologia para investigação, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um padrão experimental baseado em "conquistas didáticas" em sala de aula, isto é, no desenho, na realização, na observação e a análise de seqüências de ensino. (ARTIGUE, 1996, p. 247. Tradução nossa).

Outro diferencial da ED é a forma como valida o objeto de estudo pesquisado, como descrevem Almouloud e Coutinho (2008, p. 66):

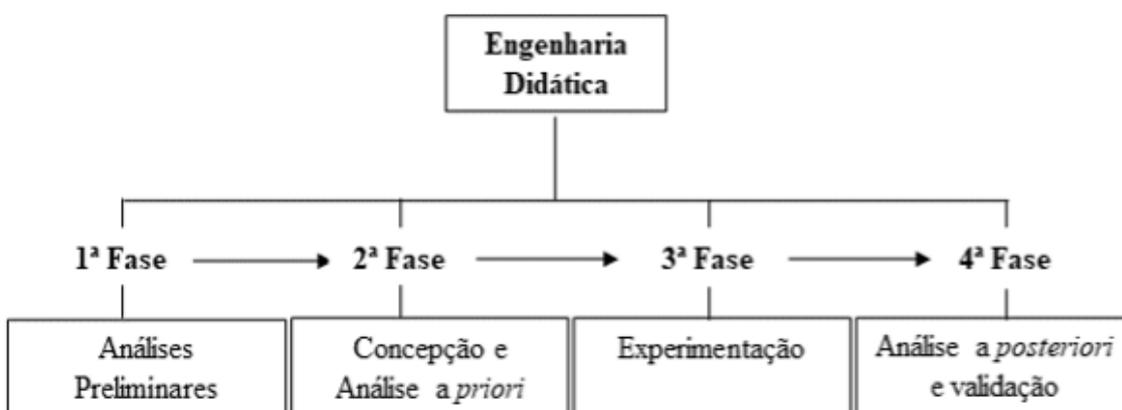
Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 66).

A partir da definição das variáveis didáticas da realização da pesquisa, a ED pode ser definida para dois níveis: o da *microengenharia*, que atende a variáveis locais, restritas ao âmbito da sala de aula e na relação direta com o processo de ensino e aprendizagem; e a *macroengenharia*, que busca investigar variáveis mais amplas, partindo de dificuldades de ordem metodológica e/ou institucionais (ARTIGUE, 1996; SOUSA, 2022).

2.2 Etapas da Engenharia Didática

As fases que estruturam uma ED são quatro: análise preliminar, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação, como mostra o esquema da Figura 1:

Figura 1 - Fases da Engenharia Didática.



Fonte: Adaptado de Azevedo (2020).

O conhecimento da descrição minuciosa de cada uma das fases da ED é de grande relevância para o professor que busca formas de melhoria para sua prática docente. A seguir, temos essa descrição, segundo Artigue (1988) *apud* Almouloud e Silva (2012):

Quadro 1 - Descrição das Fases da Engenharia Didática

FASE	DESCRIÇÃO
Análises preliminares	considerações sobre o quadro teórico didático geral e os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em questão, incluem a análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos, e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática
Concepção e análise <i>a priori</i>	o pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar chamadas de variáveis de comando (microdidáticas ou macrodidáticas).
Experimentação	consiste na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação
Análise <i>a posteriori</i> e validação	a análise <i>a posteriori</i> consiste em uma análise de um conjunto de dados colhidos ao longo da experimentação, como por exemplo, produção dos alunos, registros de observadores e registro em vídeo. Nessa análise, se faz necessário sua confrontação com a análise <i>a priori</i> para que seja feita a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação

Fonte: Adaptado de Almouloud e Silva (2012).

Em seguida temos uma apresentação sobre os procedimentos adotados na nossa pesquisa em cada uma dessas quatro fases.

Análises preliminares (Análises prévias): em âmbito nacional, pesquisamos na BNCC quais as competências e as habilidades que tratam da Matemática Financeira e que os alunos da Educação Básica precisam desenvolver. Além disso, fizemos um levantamento das questões em que foram cobrados os conteúdos de juros simples e compostos nas últimas dez edições do ENEM. Por fim, realizamos uma análise dos livros didáticos disponibilizados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com o intuito de perceber como os conteúdos estão sendo abordados em cada um deles.

Concepção e análise a priori: Aqui foram definidas as variáveis globais e locais durante a construção do plano de ação a ser executado em uma perspectiva futura. Quanto as variáveis globais, estas foram definidas a partir dos objetivos de cada situação-problema e, para as locais, foram construídas hipóteses com vistas a prever o comportamento dos alunos frente às situações propostas. Nesta fase, realizamos o planejamento das cinco situações-problema, entre elas, questões de edições do ENEM. Foram descritas, para cada uma destas situações, uma previsão circunstanciada das

atitudes que os alunos provavelmente apresentem, por ocasião da aplicação e a formulação de estratégias, que podem servir de norte ao professor, para intervir e mediar o ato da resolução dos problemas, caso seja necessário.

As duas fases posteriores, não foram desenvolvidas, dado o caráter de proposta didática deste estudo.

A seguir, detalhamos as análises preliminares desta pesquisa, com um estudo bibliográfico de documentos que são referência para a construção do currículo e de alguns livros do PNLD, a fim de conhecer como os conteúdos de Matemática Financeira estão organizados.

3 ANÁLISE PRELIMINAR

Apresentamos neste capítulo a primeira fase da ED. Nossa análise preliminar ficou restrita à dimensão didática, com foco nos recursos disponíveis que fundamentam o ensino de Matemática Financeira e contribuem, dando suporte ao professor no planejamento das aulas e na preparação da sua prática docente.

Em termos de legislação educacional, analisamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Como critério para a escolha de ambos, partimos da premissa de que seria fundamental analisar como estes documentos versam sobre Matemática Financeira, qual a orientação para as instituições de ensino sobre os objetos de conhecimento que devem estar no currículo e que competências e habilidades o aluno deve desenvolver para que sua aprendizagem seja considerada satisfatória.

Para a análise de recursos materiais no suporte ao trabalho do professor, além das duas matrizes oficiais, foram selecionadas e analisadas três obras didáticas. O critério que justifica a escolha destas obras se deve ao fato de todas terem concorrido no processo de escolha do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), para o triênio 2022-2024. As obras supracitadas estão no Quadro 2:

Quadro 2 - Documentos e obras didáticas analisadas previamente

Livro	Autores	Ano	Volume	Editora
BNCC	Brasil	2018	-	-
Matriz do ENEM	Brasil	2009	-	-
Prisma	José Roberto Bonjorno José Ruy Giovanni Júnior Paulo Roberto Câmara de Sousa	2020	Sistemas, Matemática Financeira e Grandezas	FTD
Diálogo	Editora responsável: Lilian Aparecida Teixeira	2020	Grandezas, Medidas e Matemática Financeira	Moderna
Matemática em Contextos	Luiz Roberto Dante Fernando Viana	2020	Estatística e Matemática Financeira	Ática

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A seguir, apresentamos uma análise sobre o ensino de Matemática Financeira na legislação educacional brasileira, ao estudar estes dois documentos oficiais e sua orientação sobre a criação e elaboração dos currículos nacionais e a elaboração das avaliações em larga escala da educação básica.

3.1 Matemática Financeira na BNCC e na Matriz de Referência do ENEM

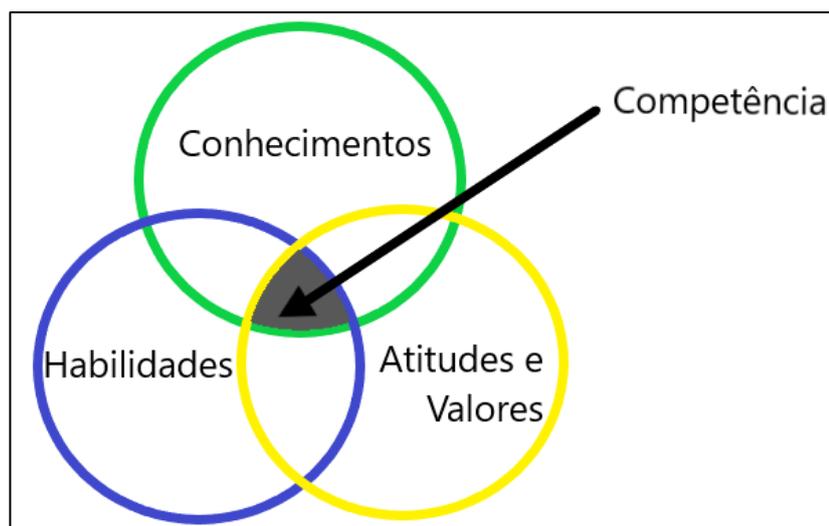
Para um país de dimensões continentais como o Brasil, definir um currículo escolar unificado para todas as instituições de ensino da Educação Básica é um desafio. Ainda assim, é preciso garantir que o mínimo de aprendizagem seja ofertado aos alunos em todas elas. Nesse contexto, em 2018 foi criada a Base Nacional Comum Curricular, sendo este um documento que preconiza determinados assuntos essenciais:

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7).

A implantação da BNCC, frente aos desafios presentes na sociedade atual, estabelece novos paradigmas para o ambiente escolar. Ela abandona o tradicional modelo educacional, em que a composição curricular era dividida em conteúdo e focava no mero acúmulo de conhecimento sem utilidade prática para a vida do aluno, visando reorganizar os saberes escolares por áreas de conhecimento, voltados para uma educação por competências (BRASIL, 2018).

O grande diferencial na educação por competênciaS é conceber uma visão integrada de aprendizagem em que o conhecimento (“saber”) será significativo para os estudantes, quando estiver associado a uma habilidade (“saber fazer”), despertando atitudes e construindo valores (“saber ser”). “As habilidades aliadas às atitudes constituem ferramentas pelas quais os estudantes mobilizam o conhecimento (os saberes) em situações da vida cotidiana” (DANTE; VIANA, 2020, p. 155). Na Figura 2 temos um esquema que ilustra a ideia de educação por competências:

Figura 2 - Ideia de Competência a partir da intersecção de conhecimento, habilidade e atitude.



Fonte: Adaptado de Dante e Viana (2020).

Na prática, alterar um paradigma é bem mais complexo do que se imagina. De imediato, é necessário que redes de ensino revejam e modifiquem suas visões comumente aceitas sobre esse assunto, e que sejam estabelecidas novas convenções sobre que direção o processo de ensino e aprendizagem deve tomar e como deverá ser realizado daqui por diante.

Professores em atuação precisam passar por formações continuadas, para que possam, antes de tudo, desenvolver em si as competências necessárias para uma prática docente satisfatória, uma vez que sua formação inicial não contemplou desenvolver uma educação por competências. Já os alunos devem compreender que deles é esperado bem mais do que decorar um conteúdo a ser cobrado em uma prova, mas além disso, eles devem internalizar o conceito de competência no contexto escolar, como definem Dante e Viana (2020):

[...] uma competência é uma característica fundamental de o estudante conseguir agregar os múltiplos recursos pessoais, unidos conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, emoções, entre outros, para obter uma resposta satisfatória a um problema colocado em um contexto definido. (DANTE; VIANA, 2020, p. 155).

Por estar em conformidade com o Plano Nacional de Educação (PNE), a BNCC é vinculada ao cumprimento de 10 Competências Gerais da Educação Básica. Dentre elas, destacamos aqui a Competência 2:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria as ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 9).

O processo de desenvolvimento desta competência é um verdadeiro convite à ação, que culmina na criação de soluções após o aluno vivenciar praticamente todas as etapas do método científico, desde a observação/investigação, até elaboração e teste das hipóteses, na formulação e resolução de problemas. Convém destacar que a construção do pensamento computacional foi incentivada ao incluir a tecnologia como alternativa na criação das soluções. Sobre esse incentivo, temos:

[...] a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. (BRASIL, 2018, p. 269).

Já no que diz respeito a Matemática Financeira, a BNCC propõe que “os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 269). Porém, o cálculo por si só não será suficiente se não vierem acompanhados de conhecimento do contexto em que serão empregados e de como farão parte da vida cotidiana do aluno. Nesse sentido, a BNCC acrescenta:

Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro. (BRASIL, 2018, p. 269).

Ao todo, a BNCC apresenta 05 competências e um total de 43 habilidades. O Quadro 3 expõe as competências e as respectivas habilidades que se espera que os alunos dominem para a resolução de problemas para a Matemática Financeira:

Quadro 3 - Competências e as habilidades ligadas à Matemática Financeira

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS	HABILIDADES
<p>COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1 Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.</p>	<p>(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.</p>
<p>COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2 Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.</p>	<p>(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.</p>
<p>COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.</p>	<p>(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.</p> <p>(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.</p>

Fonte: Adaptado de Brasil (2018).

A competência específica 1 contribui para a formação científica geral dos estudantes como cidadãos críticos e reflexivos, e prevê que sejam capazes de interpretar situações das Ciências da Natureza ou Humanas, divulgadas nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), analisando criticamente o que é produzido e identificando se o que foi divulgado induz ao erro, seja pela omissão ou adulteração das informações, quer de forma proposital ou não.

A competência específica 2 coloca os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social, que os mobilizam a propor ou participar de ações individuais ou coletivas, visando solucionar eventuais problemas.

Por fim, na competência específica 3, espera-se que os alunos dominem habilidades relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos, envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos,

geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros (BRASIL, 2018). Estes problemas devem agregar significado real, por retratar situações que os alunos enfrentarão em seus contextos de vida e de suas comunidades, sejam eles relacionado à Matemática, ao desenvolvimento tecnológico e computacional ou outras áreas de conhecimento.

A Matriz de Referência do ENEM possui 7 competências de área com um total de 30 habilidades. O Quadro 4 traz a competência de área 4, suas quatro habilidades e um recorte da proposta de organização curricular para o desenvolvimento dessa competência, envolvendo os assuntos que permeiam a Matemática Financeira:

Quadro 4 - Competência da Matriz de Referência do ENEM de que trata a noção de variação de grandeza

<p>Competência de área 4 Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.</p>
<p>H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas. H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais. H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação. H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.</p>
<p>Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.</p>

Fonte: Brasil (2009).

Esta competência, assim como observado na análise da BNCC, procura orientar o ensino com foco nos problemas que o aluno pode enfrentar no seu contexto de vida e de sua comunidade, ao trazer como premissa o trabalho com *os problemas do cotidiano*.

Quanto às habilidades, estas têm como objetivo abrir espaço para uma visão integrada de conhecimento e de mundo, que se trabalhadas em sua totalidade, promovem a aprendizagem em um nível ascendente de desenvolvimento. O aluno deve ser capaz, inicialmente, de identificar relações (H15), invocar conhecimentos matemáticos para resolver problemas (H16), analisar informações e construir argumentos (H17) e avaliar propostas sobre como pode intervir com ações individuais e coletivas para melhorar a comunidade em que vive.

Pelas análises apresentadas reconhecemos que, em termos de legislação educacional, o ensino de Matemática Financeira encontra-se amparado. A seguir, temos a análise de alguns dos livros didáticos disponíveis para a escolha das escolas no PNLD no triênio 2022-2024.

3.2 Estudo dos livros didáticos no contexto da Matemática Financeira

Os livros analisados fazem parte do acervo da biblioteca em que aconteceu a investigação da nossa pesquisa, sendo todos exemplares que acompanham o manual do professor. Isto nos permitiu fazer as análises em três dimensões diferentes: *(I)* como o conteúdo estudado é apresentado aos alunos; *(II)* como o autor relaciona este conteúdo ao desenvolvimento do pensamento computacional, ao propor o uso de tecnologias digitais na resolução de problemas, e; *(III)* se há no manual do professor orientações que direcionem a prática docente, para que se alcance satisfatoriamente o desenvolvimento das competências contempladas.

3.2.1 Livro Didático: Prisma (BONJORNNO, 2020)

Este livro abre o capítulo com um texto motivador sobre os descontos, fazendo ainda a indicação de quais competências gerais da BNCC, específicas das áreas de Matemática e das Ciências da Natureza serão contempladas. Na introdução, apresenta o conceito de porcentagem e exercícios sobre aumentos, descontos e lucros e prejuízos. Conceitua juros e as variáveis capital, taxa de juros, tempo e montante.

Ao falar de juros simples, constrói de forma intuitiva a fórmula $J = Cit$. Mas, para juros compostos, utiliza-se da manipulação algébrica, conferindo um maior formalismo matemático ao deduzir a fórmula $M = C(1 + i)^t$. No capítulo seguinte, ainda dedicado à Matemática Financeira, aborda os sistemas de amortização *PRICE* e *SAC*, finalizando com uma seção que trata sobre orçamento familiar, chamando atenção para a importância do controle de gastos e estimulando o consumo sustentável. Ao final de cada capítulo, propõe atividades complementares com questões retiradas do ENEM e Vestibulares.

Em seções complementares, a obra estabelece de forma sucinta a relação entre juros simples com função afim e juros compostos com função exponencial. Explica o funcionamento dos juros do cartão de crédito e sobre inflação. Para cada capítulo há

uma seção denominada *Explorando a Tecnologia*. Na primeira seção, ofereceu instruções de como criar e programar uma planilha eletrônica para mostrar a evolução dos juros simples e compostos ao longo de um ano. Na segunda seção, as instruções oferecidas programam uma planilha eletrônica e criam uma calculadora que avalia se a antecipação do imposto de renda é favorável ou não.

No Manual do Professor encontramos um detalhamento minucioso sobre a BNCC e a educação por competências no ensino de Matemática, sugestões de metodologias ativas para a utilização em sala de aula e a indicação de softwares que favoreçam o desenvolvimento do pensamento computacional, como o *GeoGebra*, o *LibreOffice* e o *Scratch*, finalizando com uma leitura complementar sobre a avaliação nessa nova perspectiva de ensino.

3.2.2 Livro Didático: Diálogo (TEIXEIRA, 2020)

A organização curricular para o estudo de Matemática Financeira nesta obra divide o conteúdo em oito capítulos mais curtos que na obra anterior, que intercalam a construção de conhecimento e habilidades matemáticas necessários à resolução de problemas, com capítulos que conceituam termos que ajudam a explicar como é o mundo financeiro na vida adulta fora da escola. De modo geral, todos os capítulos iniciam trazendo uma situação contextualizada envolvendo o conteúdo, porém poucos fazem a indicação de quais competências serão contempladas.

Os capítulos voltados para a construção de saberes mais puramente matemáticos tratam de porcentagem, acréscimos e descontos, juro, equivalência de capitais e sistema de amortização, respectivamente. Com exceção de porcentagem, os demais assuntos trazem demonstrações algébricas das relações e conferem maior rigor matemático na exposição dos conteúdos.

Há ainda outros três capítulos que tratam de temas do cotidiano ligados a assuntos financeiros, abordando sobre alíquotas de IPI, indicadores econômicos (taxa de inflação, Produto Interno Bruto) e sociais (Índice de Desenvolvimento Humano e Coeficiente de Gini) e o último é focado na Educação Financeira, ensinando planejamento e controle de orçamento familiar.

Os exercícios e problemas propostos para os alunos retratam situações reais do cotidiano em diferentes contextos, mobilizam os saberes e as habilidades matemáticas,

mas exigem também conhecimento de outras áreas, leitura e interpretação textual, bem como a inferência de dados apresentados em gráficos e tabelas.

Com relação ao desenvolvimento do pensamento computacional, são propostos exercícios que requerem a utilização de calculadoras científicas. Já a utilização de planilhas eletrônicas é trabalhada na seção *Acessando a tecnologia* em um total de 07 vezes ao longo dos capítulos, onde os alunos são ensinados a programar planilhas eletrônicas para calcular e comparar juros simples e compostos, determinar o valor atual de uma quantia, demonstrar a amortização de capitais no sistema PRICE e utilizar planilhas eletrônicas no controle de gastos familiares.

Como suporte a prática docente, o manual do professor traz leituras que abordam temas transversais, como o combate à violência e a promoção da saúde mental e o convívio social em sala de aula. A obra apresenta comentários e sugestões que o professor pode seguir para potencializar o desenvolvimento das competências da BNCC contempladas. Outro tema abordado é a relação entre o computador e o ensino de Matemática e como desenvolver o pensamento computacional, colocando o aluno como centro do processo de aprendizagem. Por fim a avaliação é apresentada no novo contexto da aprendizagem por competências, como uma prática pedagógica constante a ser mantida e com a utilização de diferentes instrumentos.

3.2.3 Livro Didático: Matemática em Contextos (DANTE; VIANA, 2020)

A obra apresenta apenas dois capítulos sobre o tema, sendo o segundo dedicado à Matemática Financeira e dividindo o assunto em tópicos. Estão indicadas no início do capítulo as competências gerais da Educação Básica, as competências específicas e suas habilidades, tanto da área de Matemática como da área de Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Linguagens, e os temas contemporâneos transversais como Ciências e Tecnologia, Diversidade Cultural, Educação Financeira e Educação para o Consumo.

A principal característica observada foi a forte intensidade com a qual os assuntos são apresentados, de forma contextualizada, fazendo jus ao título da obra, em detrimento de um menor formalismo matemático. A exposição dos saberes matemáticos é sempre precedida por textos com situações do cotidiano, acompanhados de perguntas abertas, que implicam em reflexão por parte dos alunos. Já os exercícios propostos são,

na sua grande maioria, retirados de edições do ENEM e Vestibulares, entre outros problemas contextualizados.

Na construção do pensamento computacional, a obra traz uma seção que contribui para a construção do pensamento computacional, chamada de *Tecnologias Digitais*, e aparece uma única vez após a exposição do tópico matemático sobre sistemas de amortização. A seção traz o detalhamento sobre como programar uma planilha eletrônica para mostrar todas as parcelas de um financiamento, tanto no Sistema PRICE como no Sistema SAC. No final, traz perguntas para o aluno responder, demandando que eles tenham concluído com êxito a programação das planilhas em ambos os sistemas.

O Manual do Professor inicia trazendo orientações gerais sobre o Novo Ensino Médio e aborda sobre o professor como mediador do trabalho por competências. Apresenta as competências gerais da Educação Básica e as competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias. Expõe de forma esclarecedora o trabalho da educação por competências, elaboração e resolução de problemas, a investigação científica, a construção do pensamento computacional e o uso pedagógico de tecnologias digitais, a *etnomatemática*, orientações sobre avaliação, entre outros aspectos, além de trazer orientações específicas sobre como trabalhar cada capítulo.

Tanto os documentos que trazem a legislação educacional, quanto os livros didáticos analisados, contemplam tópicos relevantes de Matemática Financeira. Cabe as redes de ensino a criação de mecanismos para que estes saberes cheguem aos alunos, o que pode ser feito a partir da definição do currículo e orientação da ação docente.

A seguir, apresentamos os principais tópicos de Matemática Financeira que norteiam nosso trabalho, versando sobre seus aspectos históricos e epistemológicos.

3.3 Matemática Financeira

3.3.1 Aspectos Gerais

Nosso estudo teórico sobre MF está fundamentado principalmente nas obras de Assaf Neto (2012), Grando e Shneider, (2010) e Iezzi, Hazzan & Degenszajn (2013), entre outros. Abordaremos nessa seção alguns eventos marcantes no contexto histórico da MF e apresentaremos os conceitos que serão mais relevantes ao nosso estudo.

A MF é um dos ramos da Matemática presente no currículos das instituições de Educação Básica e, para tanto, os docentes devem estar vigilantes para que se garanta

o mínimo de competência financeira nos discentes pois, diferentemente de outros assuntos que envolvem cálculos, as questões relacionadas ao dinheiro acompanham as pessoas por toda a sua vida. Sobre o objeto de estudo da Matemática Financeira, Santos (2005, p. 157) descreve:

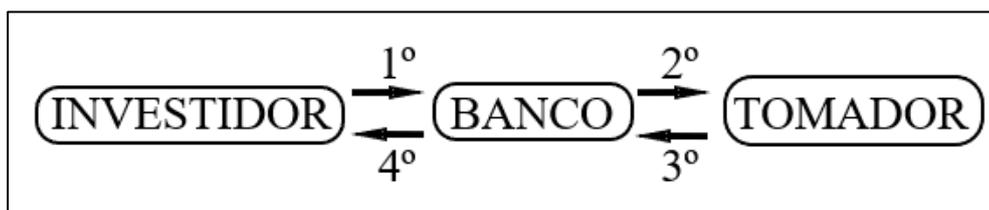
[...] Matemática Financeira é o ramo da Matemática Aplicada que estuda o comportamento do dinheiro no tempo. A Matemática Financeira busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo (*time value money*). As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira são a taxa de juros, o capital e o tempo. (SANTOS 2005, p. 157).

Para entender como dinheiro e tempo se relacionam, devemos antes de tudo conhecer dois conceitos importantes, que são: (a) *inflação*, que provoca a diminuição do poder aquisitivo pelo aumento de bens e serviços de forma generalizada e persistente, e (b) *deflação*, fenômeno análogo, que provoca a queda destes.

O efeito da inflação impacta diretamente o orçamento familiar, uma vez que, por exemplo, o valor monetário com que se compra uma cesta básica atualmente não será suficiente para comprá-la em um futuro próximo, pois os reajustes salariais nem sempre acompanham o aumento dos preços. Já a deflação acarreta problemas como a queda de investimentos com consequente queda da produção e aumento do desemprego (IEZZI; HAZZAN; DEGENSZAJN, 2013).

Outro fator que explica a relação dinheiro x tempo são as operações de empréstimos, que de acordo com Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2013, p. 38) “são feitas geralmente por intermédio de um banco que, de um lado, capta dinheiro de interessados em aplicar seus recursos e, de outro, empresta esse dinheiro aos tomadores interessados no empréstimo”. Esta ideia fica mais bem ilustrada a partir da Figura 3:

Figura 3 - Esquema investidor – banco – tomador.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A Figura 3 ilustra como acontecem as intermediações através da rede bancária, bem como o dinheiro aumenta de valor para os investidores e diminui de valor os tomadores de empréstimos, de acordo com o esquema descrito:

1º – O banco capta dinheiro de investidores, que geralmente são pessoas com Educação Financeira, que gastam menos do que ganham, conseguem acumular algum dinheiro e decidem colocá-lo sob a custódia do banco por um determinado tempo, visando receber uma recompensa pelo investimento. “A captação é feita sob várias formas, como, por exemplo, cadernetas de poupança e certificados de depósito bancário (cada aplicação recebe uma taxa de acordo com o prazo e os riscos envolvidos)” (IEZZI; HAZZAN; DEGENSZAJN, 2013, p. 38).

2º – O tomador, geralmente uma pessoa que precisa de mais dinheiro do que aquilo que consegue ganhar, pede dinheiro emprestado ao banco por um determinado prazo para atender às suas necessidades. “Os tomadores também podem obter financiamento sob diversas maneiras, e as taxas cobradas dependem do prazo do empréstimo, dos custos do capital para o banco e do risco de não pagamento por parte do tomado” (IEZZI; HAZZAN; DEGENSZAJN, 2013, p. 38).

3º – Ao final desse prazo, o tomador devolve ao banco o dinheiro que tomou emprestado acrescido de um valor extra pelo benefício do acesso a um dinheiro que não lhe pertencia. Quanto mais o tomador pede ao banco ou quanto maior for o *tempo* que ele ficou com o empréstimo, mais dinheiro extra ele precisa entregar de volta;

4º – Parte do valor extra que o tomador entregou ao banco é repassado ao investidor, na forma da recompensa. Quanto mais dinheiro ou quanto maior for o *tempo* que o investidor deixa seu dinheiro sob a custódia do banco, maior será sua recompensa.

Além de ensinar sobre como funcionam as intermediações financeiras, as pessoas devem ser levadas a refletir sobre que tipo de investidores estão preparados para ser: aqueles que o dinheiro trabalha para eles ou se serão elas que trabalharão para entregá-lo aos bancos. São as competências socioemocionais da Educação Financeira e o conhecimento de Matemática Financeira que vão determinar de que lado estarão.

A seguir, apresentamos alguns fatos históricos que nos ajudam a compreender a origem do dinheiro, do sistema financeiro e de alguns dos termos que utilizamos atualmente.

3.3.2 Contexto Histórico

Muitas mudanças aconteceram até que o dinheiro fosse usado da forma que conhecemos hoje. Os primeiros grupos humanos trocavam mercadorias entre si apenas para suprir suas necessidades, sem a preocupação da equivalência de valor, apenas considerando o excedente entre as quantidades que dispunham, pois a troca não tinha fins comerciais. Com o desenvolvimento do comércio, cresce a necessidade de se estabelecer padrões para avaliar as mercadorias a serem trocadas. Na Grécia, o boi foi usado como forma primitiva de moeda, já no Império Romano foi o sal, por seu poder de conservação dos alimentos, daí a origem da palavra *salário*. Diversas outras civilizações também instituíram suas “moedas” que variaram desde de pérolas, conchas, sementes, cerâmicas, dentes, couro de animais, entre outras (GRANDO; SHNEIDER, 2010).

A moeda, como conhecemos hoje, teve origem na Ásia Menor por volta do século VII a.C., quando peças de metal fundidas com a marca oficial da autoridade pública (o que conferia confiança às peças) passaram a ser utilizadas, sendo essa forma rapidamente aceita e se espalhando pelo mundo, também pela praticidade com que eram transportadas (IFRAH, 1997). Novamente, esbarrou-se na necessidade de equivalência de valores. Este problema foi resolvido ao se estabelecer como padrão a quantidade em cada uma dessas moedas de metal, criando assim o chamado “padrão-ouro”, que foi utilizado até o século XX (GRANDO; SHNEIDER, 2010).

Alguns comerciantes se especializaram em trabalhar na troca ou câmbio entre as moedas. Vendedores e compradores, vindos de diferentes países, eram chamados de *cambistas*. Para essas operações, instituía-se uma *taxa de câmbio*. O modo como eles operavam nos mercados, sentados em bancos de madeira, atuando como os profissionais que hoje conhecemos como *banqueiros* deu origem ao termo *banco* (GRANDO; SHNEIDER, 2010, p. 45). Segundo Robert (1989), isso lhes permitia acumular grandes somas de dinheiro, que de nada adiantava se ficassem paradas. Então, passaram a emprestar dinheiro a outros comerciantes e tirar proveito, obtendo lucro com esses empréstimos ao cobrar um valor extra, que hoje conhecemos como *juro*.

Quando um comerciante detinha uma grande quantidade de dinheiro, podia deixá-lo sob a custódia de um banco. Se ele precisasse efetuar um pagamento, poderia fazê-lo preenchendo um documento impresso pelo próprio banco, que o autorizava a deduzir o valor da sua conta corrente e depositar na conta do portador do documento a quantia estipulada nele (ROBERT, 1989). Foi nesse contexto que foi criado o termo

cheque, “sendo considerado como a primeira forma do papel-moeda” (GRANDO; SHNEIDER, 2010, p. 49).

Podemos dizer que o crescimento do comércio e do sistema bancário ao longo do tempo impulsionou o desenvolvimento da Matemática Comercial e Financeira, sendo hoje encontradas obras que separam a Matemática Comercial da Matemática Financeira. De acordo com Grando e Shneider (2010, p. 52), uma descrição possível sobre esse tema:

Acredita-se que a classificação de comercial ou financeira esteja mesmo ligada à forma de resolução dos problemas. Os cálculos relacionados à utilização de fórmulas matemáticas, porcentagens, juros e descontos simples, por exemplo, estão mais próximos do conceito de comércio; os cálculos de juros compostos, séries de pagamentos, amortizações de empréstimos bancários são entendidos como financeiros, pois, em geral, utilizam-se calculadoras financeiras para a solução dos problemas apresentados. (GRANDO; SHNEIDER, 2010, p. 52).

Esta divisão dos conteúdos para a Matemática Comercial é mais voltada, como o próprio nome já diz, às atividades comerciais, como compra e venda de produtos, enquanto a Matemática Financeira foi feita baseada na atividade bancária, voltada para as transações como empréstimos e investimentos.

A seguir, apresentamos os conceitos usados na Matemática Financeira atual e que tem relação direta com esta pesquisa.

3.3.3 Taxa de Juros e Regime de Capitalização Simples

O juro pode ser entendido como uma espécie de recompensa paga pelo tomador de empréstimos, por usar o capital do investidor ou prestador. O valor do juro é definido levando em conta três variáveis: a quantia emprestada, chamada de capital ou principal, o tempo de duração do empréstimo e a taxa de juros, indicada por i (*interest*, em inglês).

Uma taxa de juro considerada eficiente deve ser capaz de remunerar de forma satisfatória o risco envolvido na operação, seja esta um empréstimo ou aplicação, a perda de compra do capital pelo efeito da inflação e a quantia envolvida. Pode ser expressa de duas maneiras, sendo estas “*taxa percentual* ou *taxa unitária*” (ASSAF, 2012, p. 1).

A taxa percentual é calculada em porcentagens do capital e o valor do juro a cada centésima parte do capital. Já a taxa unitária centra-se na unidade do capital, refletindo o rendimento em certo período. Para transformar de taxa percentual para taxa

unitária dividimos a notação percentual por 100, e multiplicamos para realizar o processo inverso, como exemplifica o Quadro 5:

Quadro 5: Taxa percentual e sua respectiva transformação em unitária

Taxa percentual	Taxa unitária
0,12%	0,0012
5,7%	0,057
32%	0,32
120%	1,2
1300%	13,0

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Exemplo 1. Daniel realizou uma aplicação de R\$ 500,00 e doze meses depois resgatou R\$ 600,00. O capital ou principal corresponde a quantia de R\$ 500,00, o valor dos juros foi de R\$ 100,00 e a taxa de juros foi de $100/500 = 0,2 = 20\%$ ao ano.

Os juros são formados a cada período e incorporados ao capital utilizando dois critérios ou regimes: simples e compostos. No regime simples, os juros possuem o mesmo valor a cada período, porque são gerados com a taxa incidindo somente sobre o capital inicial e pagos ao final da operação (IEZZI; HAZZAN; DEGENSZAJN, 2013). Esse valor é obtido pelo produto do capital pela taxa. Ao valor acumulado de juros somados ao capital inicial damos o nome de *montante*, indicado por M.

Exemplo 2. Laura fez uma aplicação de R\$ 1 000,00 a uma taxa de 5% ao mês e manteve a aplicação durante seis meses. Admitindo que a aplicação foi capitalizada em regime de juros simples, o quadro a seguir mostra a evolução do saldo ao final de cada período, com os valores indicados em reais.

Quadro 6 - Evolução dos juros simples ao longo de seis períodos

Período	Saldo no início de cada mês	Juros Apurados	Montante ao final de cada mês
1º mês	1 000,00	$1\ 000,00 \times 0,05 = 50,00$	1 050,00
2º mês	1 050,00	$1\ 000,00 \times 0,05 = 50,00$	1 100,00
3º mês	1 100,00	$1\ 000,00 \times 0,05 = 50,00$	1 150,00
4º mês	1 150,00	$1\ 000,00 \times 0,05 = 50,00$	1 200,00
5º mês	1 200,00	$1\ 000,00 \times 0,05 = 50,00$	1 250,00
6º mês	1 250,00	$1\ 000,00 \times 0,05 = 50,00$	1 300,00

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Inferências a partir das informações apresentadas no quadro:

I. os juros possuem o mesmo valor em todos os períodos: $1\ 000,00 \times 0,05 = 50,00$;

II. o crescimento dos juros é linear (crescendo R\$ 50,00 a cada mês) e os valores dos montantes ($C + J$) ao final de cada período representam os termos de uma Progressão Aritmética, cujo primeiro $C + Ci$ de razão Ci ;

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$M = C + Ci + (n - 1) \cdot Ci$$

$$M = C + Ci + Cni - Ci$$

$$M = C + Cni = C + J$$

III. Logo, para determinar o valor do juro acumulado até um determinado período, devemos calcular o produto do capital inicial pela taxa e pelo número de períodos que a operação durou, ou seja:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

J = juros expressos em unidades monetárias;

C = valor inicial da operação financeira (empréstimo ou aplicação);

i = taxa de juros na forma unitária;

n = o número de períodos que a operação financeira ocorreu;

Assim, se no exemplo anterior desejássemos saber o juro devido e o montante acumulado no final do quinto período, teríamos:

$$J = ? \quad C = 1000,00 \quad i = 0,05 \text{ a.m.} \quad t = 5 \text{ meses}$$

$$J = 1000 \cdot 0,05 \cdot 5 = 250,00$$

$$M = C + J$$

$$M = 1\ 000,00 + 250,00 = 1\ 250,00$$

Exemplo 3. Qual é o montante de uma aplicação de R\$ 8 000,00 a uma taxa de 3% ao mês por um período de 12 meses?

$$J = ?$$

$$C = 8\ 000,00$$

$$i = 3\% = 0,03$$

$$t = 12$$

$$J = 8\ 000 \cdot 0,03 \cdot 12 = 2\ 880,00$$

$$M = 8\ 000,00 + 2\ 880,00 = 10\ 880,00$$

Assim o montante acumulado é de R\$ 10 880,00.

3.3.4 Regime de Capitalização Composta

Sobre a composição dos juros no regime de capitalização composta, Assaf Neto (2012, p. 28) escreve:

O regime de juros compostos considera que os juros formados em cada período são acrescidos ao capital formando o montante (capital mais juros) do período. Este montante, por sua vez, passará a render juros no período seguinte formando um novo montante (constituído do capital inicial, dos juros acumulados e dos juros sobre os juros formados em períodos anteriores), e assim por diante (ASSAF NETO, 2012, p. 28).

Voltemos ao Exemplo 2, admitindo agora que a aplicação feita por Laura ocorra nas mesmas condições, porém capitalizada sob o regime de juros compostos. O Quadro 7 apresenta a evolução do montante ao longo dos seis meses:

Quadro 7 - Evolução dos juros compostos ao longo de seis períodos

Período	Saldo no início de cada mês	Juros Acumulados	Saldo (aproximado) ao final de cada mês
1º mês	1 000,00	$1\ 000,00 \times 0,05 = 50,00$	1 050,00
2º mês	1 050,00	$1\ 050,00 \times 0,05 = 52,50$	1 102,50
3º mês	1 102,50	$1\ 102,50 \times 0,05 = 55,13$	1 157,63
4º mês	1 157,63	$1\ 157,63 \times 0,05 = 57,88$	1 215,51
5º mês	1 215,51	$1\ 215,51 \times 0,05 = 60,78$	1 276,29
6º mês	1 276,29	$1\ 276,29 \times 0,05 = 63,81$	1 340,10

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Inferências a partir das informações apresentadas no Quadro 7:

I. Os juros são crescentes e calculados sobre o montante acumulado no período anterior e incorporados ao novo montante;

II. Para determinar o valor do montante acumulado até um determinado período, vamos considerar um capital C , a uma taxa i , aplicado por n períodos no regime de capitalização composta.

Assim, no Quadro 8 Temos:

Quadro 8 - Evolução dos juros composto ao longo de seis períodos

Período	Início do Período	Cálculo do Montante no período	Final do período
1º	C	$M_1 = C + C i$	$M_1 = C(1 + i)$
2º	M_1	$M_2 = M_1 + M_1 i = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i)$	$M_2 = C(1 + i)^2$
3º	M_2	$M_3 = M_2 + M_2 i = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i)$	$M_3 = C(1 + i)^3$
4º	M_3	$M_4 = M_3 + M_3 i = M_3(1 + i) = C(1 + i)^3(1 + i)$	$M_4 = C(1 + i)^4$
...
n	M_{n-1}	$M_n = M_{n-1} + M_{n-1} i = M_{n-1} (1 + i) = C(1 + i)^{n-1} (1 + i)$	$M_n = C(1 + i)^n$

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A fórmula generalizada deve ser utilizada para calcular o valor do montante após n períodos e é indicada habitualmente sem o índice:

$$M = C(1 + i)^n$$

III. o crescimento dos juros é exponencial e os valores dos montantes ao final de cada período representam os termos de uma Progressão Geométrica cujo primeiro termo é $C(1 + i)$ e razão $(1 + i)$, ou seja

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$M = C(1 + i)(1 + i)^{n-1}$$

$$M = C(1 + i)^n$$

M = montante ou valor futuro em unidades monetárias;

C = capital inicial ou valor presente da operação financeira (empréstimo ou aplicação);

i = taxa de juros na forma unitária;

n = o número de períodos que a operação financeira ocorreu;

Mediante dedução algébrica, é possível também o valor do capital, aqui também chamado de valor presente em função das outras variáveis:

$$C = \frac{M}{(1 + i)^n}$$

Exemplo 3. Suponhamos que uma pessoa tenha uma dívida de R\$ 15000,00 que vence daqui a 1 mês. Suponhamos ainda que ela consiga aplicar seu dinheiro a juros compostos, à taxa de 2% a.m. Quanto essa pessoa deverá aplicar hoje àquela taxa para ter dinheiro suficiente para pagar a dívida?

Para resolvermos essa questão, devemos encontrar o capital que aplicado por 1 mês a juros compostos e à taxa de 2% a.m., gera um montante de R\$ 15000,00. Assim, indicando esse capital por C, devemos ter:

$$C = \frac{15000}{(1 + 0,02)^1}$$

$$C = \frac{15000}{1,02}$$

$$C = 14705,88$$

Logo o valor investido deve ser de R\$ 14705,88, aproximadamente.

Exemplo 4. Um computador é vendido a prazo em 3 prestações mensais de R\$ 1000,00 cada uma, sendo a primeira um mês após a compra. Se o pagamento for à vista, o preço cobrado é R\$ 2 750,00. Qual a melhor alternativa de pagamento de um comprador que consegue aplicar seu dinheiro à taxa de juros compostos igual a 2% a.m.?

Se o comprador decide pagar em prestações, então ele investe o dinheiro e no vencimento de cada parcela, saca o valor correspondente e reinveste o saldo. O Quadro 9 mostra a evolução da operação ao longo dos três meses, com os valores em reais:

Quadro 9 - Resolução do exemplo 4

Período	Início do Período	Cálculo do Montante no período	Pagamento da parcela	Saldo no final do período
0	-	-	-	2 750,00
1º	2 750,00	$M_1 = 2\,750(1,02) = 2\,805,00$	$S = 2\,805,00 - 1\,000$	1 805,00
2º	1 805,00	$M_2 = 1\,805(1,02) = 1\,841,10$	$S = 1\,841,10 - 1\,000$	841,10
3º	841,10	$M_3 = 841,10(1,02) = 857,92$	$S = 857,92 - 1000$	-142,08

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Ao final dos três meses, podemos perceber que o saldo foi negativo, o que significa que o investimento não foi o suficiente para cobrir o valor da compra. Isto nos leva a concluir que, nessas condições, o pagamento à vista é a melhor opção.

Outra forma de decidir qual é a melhor opção é comparar os valores atuais das duas alternativas de pagamento e escolher a de menor valor atual.

Opção 1: Pagamento à vista o valor atual é evidentemente $V_1 = R\$ 2\,750,00$.

Opção 2: Pagamento em três parcelas iguais, com a primeira vencendo um mês depois:

$$V = \frac{1000}{(1,02)^1} + \frac{1000}{(1,02)^2} + \frac{1000}{(1,02)^3}$$

$$V = \frac{1000}{1,02} + \frac{1000}{(1,02)^2} + \frac{1000}{(1,02)^3}$$

$$V = 980,39 + 961,17 + 942,32$$

$$V = 2883,88$$

Como o valor atual do pagamento à vista é menor do que o valor atual do pagamento a prazo, a melhor alternativa é o pagamento à vista.

3.4 Sequência Fedathi

3.4.1 Caracterização

A Sequência Fedathi (SF) é uma proposta teórico-metodológica que teve origem nos anos 1990, pelo grupo intitulado Fedathi, a partir de experiências desenvolvidas tanto na Educação Básica quanto Superior, no Laboratório de Pesquisas Multimeios da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, mas que tem se expandido para diversas outras instituições de ensino.

A SF foi formalizada na área de Ensino de Matemática, a partir da Tese de Pós-Doutorado do Professor Hermínio Borges Neto, realizada no ano de 1996, na *Université de Paris VII (Université Denis Diderot U.P. VII, França)*. No Ceará, ele é considerado o precursor dos estudos em Didática da Matemática, por sua dedicação à pesquisa na área de Educação Matemática, contribuindo para a formação de profissionais, a partir da orientação de trabalhos e projetos por meio do Programa de Pós-Graduação da FACED/UFC e de parcerias com outras instituições educacionais (SOUZA, 2013).

A SF foi concebida para ser aplicada em sessões didáticas das aulas de Matemática, mas dada sua relevância foi disseminada para outros campos do conhecimento como Física, Pedagogia, Tecnologias e Educação Inclusiva, quer seja na Informática Educativa, Educação à Distância, Formação de Professores e/ou Inclusão Digital.

A SF está fundamentada sobre a ação docente. Borges Neto (2017, p. 6) lança um novo olhar sobre a forma como professor e alunos interagem:

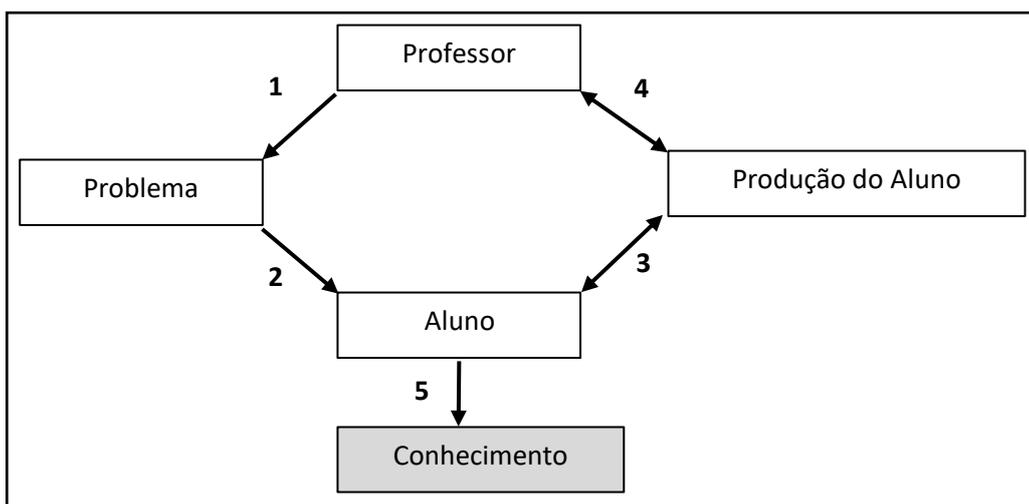
A Sequência Fedathi é caracterizada, principalmente, por ter um olhar mais atento para as ações do professor dentro e fora da sala de aula, favorecendo a

autonomia do aluno, que estimulado ativamente durante este processo de ensino. Lembramos que a Sequência Fedathi tem como foco principal o professor, sua intencionalidade, seu comportamento, participação e interação com os alunos em sala de aula (BORGES NETO, 2017, p. 6).

A aplicação da SF provoca mudanças na relação professor-aluno e no processo de ensino e aprendizagem. O professor cria um ambiente de curiosidade, reflexão e de descoberta acerca do conteúdo, altera o modelo de ensino à medida que deixa de ser o centro do processo em que apenas expunha o conteúdo aos alunos, que assistem passivamente a aula, para assumir uma postura de mediador, motivando a participação ativa dos alunos, que passam a protagonizar a construção da sua aprendizagem (MENDONÇA, 2017).

Desta forma, a “Sequência Fedathi, nesse processo, possui a finalidade de orientar a ação do professor, que conduzirá o aluno como um sujeito ativo e não como receptor de respostas prontas e de uma matemática acabada.” (MENEZES, 2018, p. 36). Na Figura 4 a relação professor-aluno-saber é ilustrada de forma simplificada:

Figura 4 – Elementos da Sequência Fedathi



Fonte: Souza (2010).

De acordo com Souza (2010), o aluno recebe o problema que tanto pode ter sido inicialmente selecionado pelo professor, com base no conhecimento que pretende desenvolver, como vir a partir de uma situação proposta pelos alunos. De posse do conhecimento do problema, os alunos devem explorá-lo e buscar uma solução por meio de suas produções. É nesse momento que fica evidente a ação do professor como

mediador do processo de ensino aprendizagem, pois sua interação com o aluno se intensifica, até que se alcance de forma satisfatória a construção do conhecimento.

O fundamento que constitui a SF é sua realização em quatro fases: *Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova*. De acordo com Souza (2013), tal como ocorre nas etapas do trabalho científico, estas fases são sequenciais e interdependentes, podendo tomar como referência as etapas do trabalho científico, “que dá oportunidade aos alunos de descobrirem a Matemática, partindo de situações desafiadoras que os designem a agir sobre o conteúdo proposto, assimilando e acomodando novos saberes” (MENEZES, 2018, p. 36).

Para que a aplicação da Sequência Fedathi aconteça de forma satisfatória, é imprescindível que o professor se dedique à realização de análises preliminares, a fim de eger as variáveis que contribuirão para o desenho do plano de estudo e o bom planejamento da sessão didática, sendo estas uma a análise teórica e a ambiental (PINHEIRO; PINHEIRO, 2017). Durante a análise preliminar teórica é definido o ponto de partida para a condução do estudo, em que é determinada uma base, conhecida como *Plateau*. Sobre o que é esperado do professor e da importância acerca desse momento de análise, Menezes (2018, p. 39) descreve:

O professor deve realizar uma investigação para saber em que grau de conhecimento estão os alunos. Esse momento na sequência é o primeiro passo para que o docente conheça seus alunos. À medida que conhece os alunos, conhecerá também suas deficiências por meio das perguntas, desafios e, também, da constância em fazer com que participem ativamente do processo. Daí a discrepância pode diminuir é o *Plateau*, conhecimento médio necessário para a aquisição do novo conhecimento. (MENEZES, 2018, p. 39).

A partir da determinação do *Plateau* é que o professor faz a escolha da situação didática a ser proposta aos alunos, considerando o conhecimento prévio destes, de forma que se sintam desafiados, mas que não percam o estímulo pela busca da solução. É necessário o equilíbrio: a atividade não deve ser difícil demais, para não desestimular aqueles com baixa proficiência matemática, nem fácil demais, para aqueles que já detém um nível maior de conhecimento e habilidade matemática.

Para a análise preliminar ambiental, o professor deve checar as condições em que deve ocorrer a execução da sessão didática. Destacamos a observação do espaço físico, verificando se este reúne as condições mínimas necessárias; se o público-alvo e os recursos humanos estão de acordo com os objetivos que se pretende alcançar; checar se

os recursos materiais disponíveis são suficientes e qual a duração ideal para o desenvolvimento da atividade.

Nesse sentido, uma nova concepção de planejamento da aula deve ser incorporada pelo professor que pretende usar a Sequência Fedathi como proposta de ensino, uma vez que diversos elementos da aplicação da SF não são contemplados pelo modelo tradicional.

Sobre o plano de aplicação da Sequência Fedathi, Sousa (2013) destaca elementos importantes a serem observados pelo professor, que deve preocupar-se para além do momento da sala de aula, dando a devida importância para o antes e o depois, em função da aprendizagem do aluno. É a partir das necessidades do aluno que os conteúdos e as estratégias são selecionados, assim como os recursos metodológicos que serão utilizados pelo professor devem primar por favorecer a ação mediadora desempenhada por ele no momento da sessão didática.

Ainda de acordo com Sousa (2013), a abertura da aula parte da resolução de uma situação-problema pelos alunos, a fim de que se gere problematização e diagnóstico acerca do tema abordado, tendo como objetivo definido a verificação de hipóteses. Cabe ao professor utilizar-se de perguntas como estratégia de intervenção, e aos alunos, cabe a elaboração de hipóteses e estratégias de investigação na busca de soluções da situação-problema, utilizadas para garantir a formalização do conteúdo que se pretende ensinar. A avaliação do processo é instrumento de validação da sequência e deve ser usada para balizar a organização da(s) próxima(s) aula(s) (SOUSA, 2013).

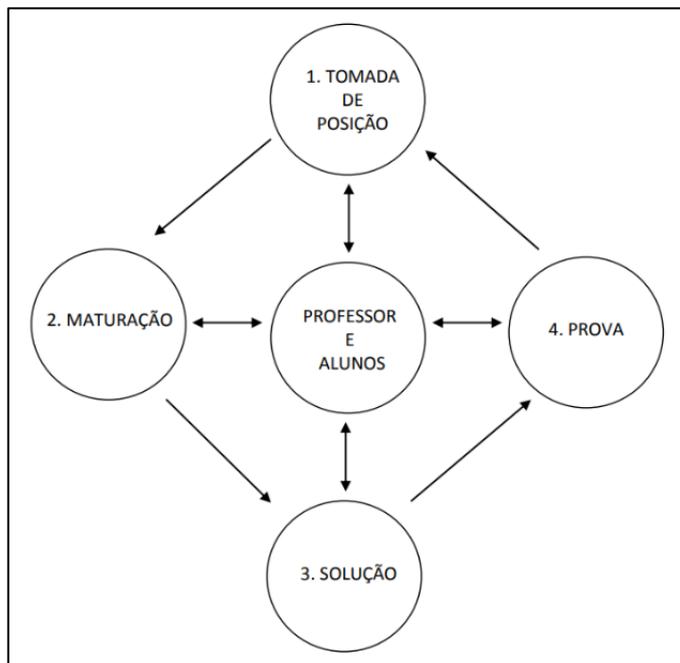
Após fase da *preparação*, tendo ocorrido a organização das ações do professor, alcançamos o estágio da *vivência*, que é quando acontece a execução das quatro etapas da sessão didática em sala de aula. Menezes (2018) destaca que somente pela vivência real dessas etapas pelo professor é que se produzem mudanças profundas da sua prática cotidiana, indo além de uma mera mudança em seu comportamento. A importância dessa vivência fica caracterizada nas palavras de Sousa (2015, p. 43):

A essência da Sequência Fedathi é a postura do professor na sala de aula durante sua vivência, porque faz a mediação didática. Então, ele deve utilizar esse momento para instigar os alunos a resolverem o problema e a refletirem sobre os resultados que eles encontrarem, tanto no caso de acertos como no caso de erros. (SOUSA, 2015, p. 43).

O aluno também é influenciado diretamente durante a vivência da Sequência Fedathi. Seu comportamento muda, e este sai da posição de mero expectador, para uma

participação ativa, como agente protagonista na construção de seus conhecimentos. A Figura 5 ilustra a participação de professor e alunos e como eles se relacionam com as quatro etapas (ANDRADE, 2011):

Figura 5 - Fases da Sequência Fedathi



Fonte: Andrade (2012).

De acordo com Andrade (2012), professor e alunos participam de todas as etapas, que podem ser desenvolvidas pela quantidade de vezes que se fizerem necessárias para que um determinado objetivo seja alcançado durante o processo de ensino e aprendizagem.

3.4.2 Fases da Sequência Fedathi

3.4.2.1 Tomada de posição

É quando acontece o contato inicial do aluno com o problema, que por sua vez deve estar relacionado ao conhecimento a ser aprendido por ele ao final do processo. Ao propor este problema, o professor precisa garantir que sua resolução inclua a aplicação de estratégias que evoquem o conteúdo que se pretende ensinar. De acordo com Souza (2010), seja partindo de uma situação generalizável ou uma circunstância possível de ser abstraída de seu contexto particular, para um modelo matemático genérico, é importante

que o problema tenha como um dos meios de resolução a aplicação do saber em jogo. Diversas são as maneiras em que a tomada de posição pode acontecer, conforme relata Souza (2010):

A abordagem do problema poderá ser feita de variadas formas, seja através de uma situação-problema escrita ou verbal, de um jogo, de uma pergunta, da manipulação de material concreto; de experimentações em algum software, podendo os alunos trabalharem sobre o problema de maneira individual e/ou em grupo. (SOUZA, 2010, p. 86).

Esse pode ser um momento oportuno para cativar o estudante e fortalecer o vínculo entre ele, o professor e o saber. Para tanto, o professor precisa criar uma situação didática eficaz, capaz de estimular o aluno a se reconhecer como autônomo em sua aprendizagem, quer seja por lhe propiciar uma participação ativa, ou por ampliar a sua rede de conhecimentos pelas interações com o grupo e com o professor. Menezes (2018) expõe, sobre a importância da ação docente durante essa etapa:

Ressalta-se o cuidado em trabalhar com uma linguagem técnica acessível, para que os alunos não se percam no caminho e sim estejam familiarizados com o ambiente, pois o problema deve ser adequado ao conhecimento dos estudantes. O docente possui importante papel no processo, pois assume comportamento estimulador em que dialoga com os estudantes com suporte em suas inquietações e indaga sobre a questão proposta com uma atitude diferenciada, conhecendo a situação de aprendizagem em que o aluno está. (MENEZES, 2018, p. 43).

A observação desses fatores alicerça o processo e motiva o aluno na tomada de posição, o que potencializa a continuidade das etapas de maneira satisfatória. Após esta etapa, seguimos para a próxima fase, que é a da maturação.

3.4.2.2 Maturação

Durante a fase da maturação são construídos os caminhos para a solução da situação-problema. De acordo com Menezes (2018, p. 45) a “maturação ocorre quando os alunos, de posse do problema, buscam seu entendimento para uma solução e, em seguida, partem à procura da resolução”. Ao se debruçarem sobre o problema, os alunos podem despertar algumas inquietações em seu cognitivo, originadas na forma de dúvidas, reflexões e hipóteses à respeito dos caminhos que devem seguir para encontrar a solução do problema (SOUZA, 2010).

As dúvidas surgem no início da maturação, quando geralmente o aluno pergunta “*qual é a fórmula?*” ou de que maneira o professor quer a resposta, podendo também ser solicitado a ele que aponte o caminho da resolução. Já as reflexões acontecem quando o aluno obtém algum progresso e precisa da validação do professor para seguir o caminho trilhado até então, ou se existem outras formas de resolução. Por fim, as hipóteses surgem quando os alunos sentem a necessidade de testar se suas respostas estão corretas (SOUSA, 2010).

Quanto à postura do professor, este “deve ficar atento aos questionamentos da turma como sinal de compreensão do conteúdo e dar respostas que os levem a refletir mais ainda sobre sua intencionalidade e atitudes” (MENEZES, 2018, p. 45). “Os questionamentos também podem partir do professor através de perguntas estimuladoras, esclarecedoras e orientadoras” (SOUZA, 2010, p. 88). Ainda sobre a postura do professor durante a fase de maturação, Souza (2001) destaca:

[...] o professor estará atento aos alunos, observando o seu comportamento, interesses, medos, atitudes, raciocínios, opiniões e as estratégias aplicadas na análise e busca da solução da atividade, bem como suas interpretações e modos de pensar, a fim de perceber quando e como mediar e apontar informações necessárias frente às realizações dos alunos. (SOUZA, 2001, p. 62).

Quer feito por alunos ou pelo professor, todos os questionamentos impulsionam a etapa da maturação e fazem com que este momento seja de grande relevância na formulação do raciocínio, pois, “além de promover o desenvolvimento intelectual dos alunos, proporcionam ao professor o feedback necessário para certificar se estes estão acompanhando-o no desenvolvimento dos conteúdos ensinados” (SOUZA, 2010, p. 88).

3.4.2.3 Solução

Este é o momento em que os alunos são convidados a compartilhar suas resoluções e discuti-las com os outros colegas e o professor. Em grupo ou individualmente, podem ser explorados todos os recursos disponíveis, desde o uso do quadro para fazer as representações por meio de esquemas, tabelas, gráficos, desenhos ou por linguagem escrita, matemática e/ou exposições orais (SOUSA 2001).

Para maximizar o proveito a ser extraído da vivência dessa etapa, o professor deve ser atuante em seu papel de mediador, a fim de que se chegue ao modelo de resolução

que mais contempla as variáveis do problema proposto. Souza (2010, p. 92) descreve como deve ser essa atuação:

O professor deverá estimular e solicitar que estudantes expliquem seus modelos e justifiquem a escolha de determinados caminhos, indagando-os sobre a completude dos modelos criados, ou seja, se eles abrangem todas as variáveis do problema e se são suficientes para encaminhá-los à resposta procurada. Nesse momento, faz-se necessário dar tempo aos alunos para que pensem e reflitam acerca dessas realizações, avaliem suas respostas, por meio de ensaios, erros e tentativas, para, junto ao professor, validar os modelos criados. (SOUZA, 2010, p. 92).

As discussões devem apontar qual é o modelo de resolução que melhor satisfaz variáveis do problema proposto. Contudo, tão importante quanto encontrar a “resposta correta”, é refletir sobre as lacunas e as falhas deixadas pelos caminhos que não se adequaram à solução desejada, ou ao conhecimento que se pretendia construir com a sessão didática:

[...] pois o aluno está expondo o seu raciocínio perante os colegas e o professor, todo o conhecimento ou a falta dele é assim revelado, e o medo de que seja constringido dependendo da sua atuação é plausível. Afinal, o erro é sempre um indício de fracasso, pois é visto como resultado e não integrante do processo de aprendizagem. Deste modo, o respeito à opinião alheia deve ser cultivado entre todos sob pena de comprometer o exercício e o aperfeiçoamento da habilidade de expressão do aluno. (ANDRADE, 2011, p. 35).

Esse é um importante momento para que os alunos exercitem a autonomia e percebam a importância da sua participação no desenvolvimento da aprendizagem. Por isso, reconhecer e valorizar os erros pode gerar neles mais confiança e, assim, ele se sentirão mais confortáveis em experiências futuras ao expor suas resoluções, além de se tornarem capazes de evitá-los em situações posteriores (SOUSA, 2001).

3.4.2.4 Prova

Após as apresentações dos alunos, acontece a última das etapas ao nível da vivência da Sequência Fedathi, que é a *prova*. É nela que acontece a apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado. Sobre a ação do professor nesta etapa, Menezes (2018, p. 49) escreve:

A Prova é a etapa na qual o professor sistematiza as respostas dos alunos, mostrando e discutindo as etapas redundantes. Além disso, o docente pode simplificar, sofisticar ou ainda generalizar a situação contextualizada inicialmente formulada e, por fim, validar as respostas, elaborando o seu modelo de resultados baseados no conhecimento científico e no caminho encontrado pelo estudante. (MENEZES, 2018, p. 49).

Durante a fase da prova, o aluno deve assimilar o conhecimento previsto pelo professor para essa situação didática. Este também é o momento em que se constroem modelos gerais, ocorrendo a apresentação do conceito matemático formal ou generalização de uma expressão algébrica (fórmula), entre outros. São estes modelos gerais que instrumentalizam a resolução e conferem praticidade e otimização do tempo, quando utilizados na resolução de outros problemas semelhantes:

Nessa fase, a didática do professor será determinante para aquisição do conhecimento por parte dos alunos, pois, além de ter que manter a atenção e motivação do grupo, o professor precisará fazer uma conexão entre os modelos apresentados pelos alunos e o modelo matemático científico; deverá introduzir o novo saber através de sua notação simbólica em linguagem matemática, juntamente com as novas regras inerentes a esse conhecimento. (SOUZA, 2001, p. 64).

Apesar do objetivo principal ser a construção de conhecimento científico-matemático, a vivência das fases da Sequência Fedathi dá ao professor a oportunidade de avaliar se os objetivos estabelecidos na Tomada de Posição foram alcançados de forma satisfatória e de que forma sua mediação e a influência de sua postura interferiu nas intervenções realizadas e no sucesso da aplicação do processo como um todo. A reflexão sobre esses pontos pode implicar em mudanças profundas, que vão contribuir para o aperfeiçoamento da prática docente.

Já para os alunos, a mudança mais significativa é, sem dúvidas, sair da posição de coadjuvante para o papel principal na construção da sua aprendizagem. Apesar da Sequência Fedathi ter como foco a postura do professor em sala, o aluno participa ativamente, quando seus conhecimentos prévios são requeridos na Tomada de posição, a reorganização dos saberes e as interações bilaterais acontecem na Maturação, o desenvolvimento da expressividade e comunicação durante a Solução, para finalmente a assimilação de novos conhecimentos na etapa da Prova.

Todos esses aspectos conferem à Sequência Fedathi um caráter de metodologia de ensino com potencial para engrandecer o trabalho do professor em sala de aula e melhorar a qualidade da educação como um todo.

A seguir apresentamos a segunda fase da Engenharia Didática, que é a análise *a priori*, e com ela um conjunto de cinco situações-problema retiradas de edições anteriores do ENEM e que podem ser aplicadas em sala de aula pelo docente, mediadas pelas etapas da Sequência Fedathi. A proposta apresentada a seguir foi planejada para que, tanto professor quanto alunos, reflitam sobre sua postura durante o processo de ensino e aprendizagem.

4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI*

Este capítulo apresenta o plano de ação para a aplicação das situações-problema concebidas, levando em consideração as variáveis deste estudo. A análise destas situações tem o objetivo de realizar uma descrição de suas possibilidades e particularidades e, com isso, busca prever os possíveis comportamentos dos alunos na vivência da sequência didática. De posse destas previsões, o professor pode mediar cada sequência didática de modo a potencializar o desenvolvimento das competências e habilidades que esperou alcançar na fase do planejamento.

Os conhecimentos matemáticos que pretendemos mobilizar nas situações selecionadas são de Matemática Financeira, mais especificamente de juros simples e compostos, aumentos sucessivos e sistema de amortização constante. A partir da resolução destes problemas, espera-se que os alunos aprofundem seus conhecimentos sobre estes tópicos e estabeleçam novas estratégias, que venham a servir para a resolução futura de problemas semelhantes.

O uso da planilha eletrônica como estratégia de resolução, em duas dentre as cinco situações apresentadas, tem por finalidade mobilizar no aluno conhecimentos de outras áreas, como informática básica, bem como estimular o uso de tecnologias digitais e a formação do pensamento computacional, como propõe a BNCC. Foram utilizadas planilhas online do *Google*, por dispensarem instalação de *software* ou aplicativos, evitando possíveis despesas com a compra de licenças de uso, uma vez que qualquer computador ou *smartphone* conectado à internet permite o acesso à estas, democratizando assim a sua distribuição. Todas as situações-problema foram selecionadas de edições anteriores das provas do ENEM, por entendermos que este é o exame de maior relevância para a avaliação do estudante que finaliza a escolaridade básica.

A seguir, apresentamos as cinco situações-problema, descrevendo-as a fim de estruturar as fases Sequência Fedathi. Este é um momento importante do planejamento, pois irá subsidiar a validação, que é essencialmente interna..

4.1 Situação Problema 1

Esta situação didática tem por objetivo levar os alunos a perceber que uma aplicação financeira pode ser uma oportunidade para a realização de um sonho quando não se tem o valor suficiente, mesmo que este sonho tenha que ser adiado por um tempo.

Espera-se que os alunos reconheçam que os juros, a partir do segundo mês, incidem sobre o montante, que é o valor aplicado mais os juros acumulados no período anterior, ou seja juros sobre juros. Para a resolução desta questão são evocados os conhecimentos prévios sobre porcentagem e regime de capitalização composta:

Quadro 10 - Questão 25 retirada da edição do ENEM do ano 2000

João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R\$ 21.000,00 e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R\$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.

Para ter o carro, João deverá esperar:

- (A) dois meses, e terá a quantia exata.
- (B) três meses, e terá a quantia exata.
- (C) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$225,00.
- (D) quatro meses, e terá a quantia exata.
- (E) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$430,00.

Fonte: ENEM (2000).

Tomada de Posição: este é o momento em que o aluno lê a questão e identifica os dados relevantes para sua resolução. Esperamos que este tenha conhecimento de que a aplicação do dinheiro proporciona o crescimento do valor investido, e que, como a diferença entre o valor investido e o valor que ele precisa para comprar o carro é relativamente pequena, em poucos meses alcançará seu objetivo. Além disso, a taxa de juros está expressa em meses e o dinheiro é capitalizado mensalmente, então não há necessidade de transformação na unidade de tempo.

Maturação: durante esta fase os alunos utilizam os dados obtidos na fase anterior, para mobilizar os conhecimentos necessários para a resolução. Nesta fase, o professor como mediador do processo deve adotar a pedagogia da “mão no bolso”, abstendo-se de fornecer respostas prontas às perguntas dos alunos. Em vez disso, deve fazer perguntas que provoquem a reflexão dos alunos sobre possíveis caminhos a serem seguidos. Outra estratégia adotada é a de estimular o compartilhamento das ideias entre os alunos, sendo uma possibilidade para uma construção coletiva da solução.

A primeira estratégia prevista é que os alunos calculem o montante mês a mês, até que se atinja o valor desejado, utilizando-se de acréscimos sucessivos, como mostrado abaixo:

Após o 1º Mês:

$$J = 20\ 000 \times 0,02 = 400$$

$$M = C + J = 20\ 000 + 400 = 20\ 400$$

Após o 2º Mês:

$$J = 20\ 400 \times 0,02 = 408$$

$$M = C + J = 20\ 400 + 408 = 20\ 808$$

Após o 3º Mês:

$$J = 20\ 808 \times 0,02 = 416,16$$

$$M = C + J = 20\ 808 + 416,16 = 21\ 224,16$$

Assim, o aluno conclui que, após três meses de aplicação, João terá o suficiente para o carro e ainda lhe restará R\$ 224,16.

A segunda estratégia que pode ser seguida por um aluno com mais habilidade em cálculo mental é determinar que o valor de 2%, calculado sobre o valor investido de R\$ 20 000 é R\$ 400,00, e estimar que em três meses João terá em torno de R\$ 1200,00. A partir daí utilizar a fórmula dos juros compostos para confirmar suas estimativas:

$$M = C(1 + i)^t$$

$$M = 20\ 000(1 + 0,02)^3$$

$$M = 20\ 000(1,02)^3$$

$$M = 20\ 000(1,02)^3$$

$$M = 20\ 000(1,061208)$$

$$M = 21\ 224,16$$

Solução: os alunos devem compartilhar a sua resolução com o restante da turma, que pode estar correta ou não. Pode acontecer de os alunos apresentarem além da(s) estratégia(s) que encontraram a resposta correta, quais os caminhos de insucesso tomados durante fase da maturação e quais foram suas principais dificuldades. É esperado que ocorram perguntas, argumentações e debates durante as apresentações.

Para a apresentação da resolução do problema, os alunos podem utilizar pincel e quadro e, se necessário, uma calculadora, para agilizar os cálculos com operações

fundamentais. Ao final da apresentação, as respostas são apreciadas pelos demais alunos, onde são feitas algumas análises e exploração dos conceitos matemáticos.

Prova: A palavra retorna ao pesquisador, que retoma a responsabilidade da situação e faz observações sobre as formulações, validações e ações dos alunos durante a fase de exposição das resoluções, generalizando os resultados. O cálculo de juros compostos será institucionalizado como:

No regime de capitalização composta, a taxa de juros incide sobre o valor acumulado no período anterior, ou seja, capital mais juro, que é chamado de montante (M). Para calcular o montante (M) aplicado a um capital (C), a uma taxa fixa de juros (i), por um tempo de (t) períodos, temos: $M = C \cdot (1 + i)^t$

4.2 Situação problema II

Esta situação problema tem por objetivo levar os alunos a avaliar sobre as várias opções oferecidas para a aquisição envolvendo para valores financeiros. Para que a melhor opção seja a escolhida, espera-se que os alunos sejam capazes de identificar e resolver situações-problema que envolvam descontos e acréscimos sucessivos, com taxas de juros expressas em diferentes unidades de tempo.

Quadro 11 – Questão 150 do Enem (2012) – 2º Dia – Caderno 5 – Amarelo – Aplicação Regular

Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R\$ 55 000,00;
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R\$ 30 000,00, e mais uma prestação de R\$ 26 000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R\$ 20 000,00, mais uma prestação de R\$ 20 000,00, para dali a 6 meses e outra de R\$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R\$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R\$ 39 000,00.
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R\$ 60 000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo. Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Tomada de Posição: após leitura minuciosa do problema, esperamos que os alunos analisem a situação e percebam que será necessário calcular o valor final do terreno em cada uma das opções de venda à prazo, uma vez que para a 1ª opção, com o terreno sendo comprado à vista, seu valor já é conhecido.

Sabendo que o dinheiro pode ser investido, devem atentar-se ao fato de que os juros recebidos não devem incidir sobre o valor total do terreno, mas apenas sobre o valor aplicado, ou seja, descontado o valor na entrada do terreno. Outro detalhe que deve ser considerado é o fato da taxa de juro estar expressa ao semestre e entre as opções há parcelas com vencimento semestral e parcelas com vencimento anual.

Maturação: os alunos trocam informações entre si, sobre o caminho mais rápido para determinar o valor final do terreno em cada das opções, a partir do valor da entrada. Observa-se que o montante pode ser obtido com a aplicação do dinheiro em cada uma das opções. A previsão é de que os alunos organizem as informações em uma tabela, para uma melhor visualização da situação, prosseguindo com os cálculos e observando as especificidades de cada opção, como mostrado no Quadro 12:

Quadro 12 – Resolução da Situação Problema 2

Opção	Entrada (R\$)	Parcelamento (R\$)	Periodicidade	Valor final
1	55 000	0	-	55 000
2	30 000	1 x 26 000	semestral	56 000
3	20 000	1 x 20 000 + 1 x 18 000	semestral	58 000
4	15 000	1 x 39 000	anual	54 000
5	0	1 x 60 000	anual	60 000

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A partir do Quadro 12, é possível perceber que a quarta opção é a mais vantajosa, considerando que o valor final do terreno é o menor entre todas elas, e menor inclusive do que valor oferecido à vista. Ainda assim, é preciso determinar o quanto será conseguido com os investimentos e saber se é possível obter um saldo maior ao final de cada uma das operações.

Espera-se neste momento da resolução que os alunos calculem qual será o saldo final, se optarem por investir o dinheiro nas condições descritas no problema, com juros de 10% ao semestre, realizando o saque para pagamento da parcela e reinvestindo

o saldo, até o vencimento da parcela seguinte. Assim, o cálculo do saldo em cada uma das opções deve ser:

- *Opção 2:* Determinar o montante (M), em um investimento de R\$ 25 000,00, a uma taxa de 10% ao semestre, para no final desse período, descontar uma parcela (P) de R\$ 26 000,00 e verificar o saldo (S₁).

$$M = 26000(1,1) = 28600$$

$$S_1 = M - P = 28600 - 26000 = 2600$$

- *Opção 3:* Determinar o montante (M₁) em um investimento de R\$ 35 000,00, a uma taxa de 10% ao semestre, para no final desse período, descontar uma parcela (P) de R\$ 20 000,00. Em seguida reinvestir o restante (R) com a mesma taxa por igual período, para obter um montante (M₂), descontar uma parcela de R\$ 18 000,00 e verificar o saldo (S).

$$M_1 = 35.000,00(1,1) = 38.5000,00$$

$$R = 38.500,00 - 20.000,00 = 18.500,00$$

$$M_2 = 18.500,00(1,1) = 20.350,00$$

$$S_2 = 20.350,00 - 18.000,00 = 2.350,00$$

- *Opção 4:* Determinar o montante (M) em um investimento de R\$ 40.000,00, a uma taxa de 10% ao semestre, por dois semestres, para no final desse período, descontar uma parcela (P) de R\$ 39.000,00 e verificar o saldo (S).

$$M = 40.000,00(1,1)^2 = 40.000,00(1,21) = 48.400,00$$

$$S = 48.400,00 - 39.000,00 = 9.400,00$$

- *Opção 5:* Determinar o montante (M) em um investimento de R\$ 55.000,00, a uma taxa de 10% ao semestre, por dois semestres, para no final desse período, descontar uma parcela (P) de R\$ 60.000,00 e verificar o saldo (S).

$$M = 55.000,00(1,1)^2 = 55.000(1,21) = 66.550,00$$

$$S = 66.550,00 - 60.000 = 6.550,00.$$

Quadro 13 – Resumo das as opções disponíveis para a compra do terreno

Opção	Entrada (R\$)	Valor final	Saldo Final
1	55 000	55 000	0
2	30 000	56 000	2.600,00
3	20 000	58 000	2.350,00
4	15 000	54 000	9.400,00
5	0	60 000	6.550,00

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com isso, temos a confirmação de que a opção 4 é a mais vantajosa, pois além do valor final ser menor do que o valor à vista, ainda é a opção que deixa o maior saldo.

Solução: durante a fase de solução, esperamos que todos consigam apresentar suas estratégias de resolução, a partir da exposição e argumentações orais, apresentando as resoluções usando pincel e quadro, apontando as dificuldades encontradas, na elaboração do modelo seguido. Espera-se, ainda, que eventualmente algum dos sujeitos não consiga apontar qual é a opção mais vantajosa, mas que mesmo assim partilhem o registro de seus esforços para a resolução, para que possamos valorizar toda e qualquer ação no sentido de construir sua própria aprendizagem. O momento de compartilhamento de saberes deve ser proveitoso para o preenchimento das lacunas existentes no conteúdo abordado.

Prova: o pesquisador retoma a frente da situação, devendo utilizar-se das ideias contidas nas exposições dos participantes, e promover as reflexões necessárias para a construção de um modelo que sintetize a resolução de situações futuras semelhantes. Para questões como esta, envolvendo opções de investimentos e quitação de dívidas concomitantemente, podemos formalizar a seguinte estratégia de resolução:

Em situação que envolvem aplicações financeiras, com a finalidade de geração de renda e obtenção de valores a serem utilizados na quitação de dívidas parceladas, deve-se sacar do saldo da aplicação, na data do vencimento de cada parcela, o valor correspondente a ela, e reinvestir o saldo da aplicação para continuar a obter mais rendimentos. Repete-se este processo, até que todas as parcelas sejam quitadas ou que o saldo remanescente da aplicação não seja suficiente para cobrir parcelas futuras.

4.3 Situação-Problema III

Esta situação problema tem por objetivo levar o aluno a compreender que, em um sistema de amortização constante, o valor da parcela é decrescente, além de fazê-lo refletir sobre como isto impacta positivamente o orçamento familiar com o passar dos anos. Para isso, espera-se que eles sejam capazes de determinar a composição do valor de cada parcela, separando o que é juros e o que é amortização do principal. Para a resolução desta situação serão necessários conhecimentos de taxa de juros e operações fundamentais.

**Quadro 14 – Questão 152 do Enem (2015) – 2º Dia – Caderno 5 – Amarelo –
Aplicação Regular**

Um casal realiza um financiamento imobiliário de R\$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R\$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R\$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

(A) 2.075,00

(B) 2.093,00

(C) 2.138,00

Fonte: ENEM (2015).

Tomada de Posição: a previsão é que, após fazer a leitura da situação, o aluno perceba que a composição da parcela é de R\$ 500,00 somados aos juros do saldo devedor. De posse dessa informação, deve concluir que a amortização é constante e que o valor dos juros em cada parcela diminui à medida que o saldo devedor também diminui. Consequentemente, as parcelas são decrescentes com o passar dos meses.

Outra observação importante é que a taxa de juros é aplicada antes do pagamento da primeira parcela. Isto significa, por exemplo, que para o pagamento da primeira parcela ao final do primeiro mês, o casal deverá desembolsar R\$ 500,00 somados aos juros de 1% aplicados sobre o saldo devedor, que no caso é R\$ 180.000,00. Assim, o valor da primeira parcela seria de:

$$1^{\text{a}} \text{ Parcela: } 500,00 + 0,01 \cdot 180.000,00 = 500,00 + 1.800,00 = 2.300,00.$$

A partir dessa tomada de posição, o aluno deve construir as estratégias para determinar o valor da 10ª parcela, na fase de maturação.

Maturação: nesta fase, espera-se que o aluno compreenda que para realizar o pagamento da n -ésima (P_n), como a amortização tem o valor fixo de R\$ 500,00 na data do vencimento da n -ésima, o casal terá pago $(n - 1)$ parcelas e, tem-se, portanto, que o saldo devedor da n -ésima (S_n) é dado por:

$$S_n = 180.000,00 - (n - 1) \cdot 500,00 = 180.500,00 - 500,00 \cdot n$$

Portanto, para calcular o saldo devedor no vencimento da 10ª parcela, temos:

$$S_{10} = 180.500,00 - 500,00 \cdot 10 = 180.500,00 - 5.000,00 = 175.500,00$$

E que o valor da 10ª parcela será de:

$$P_{10} = 500,00 + 0,01 \cdot 175.500,00$$

$$P_{10} = 500,00 + 1.7550,00$$

$$P_{10} = 2.255,00$$

Como exposto durante as análises preliminares, é possível que o aluno reconheça os valores do saldo devedor mês a mês como os termos de uma Progressão Aritmética decrescente, de razão $r = -500$ e primeiro termo $a_1 = 180.000,00$. Assim, o valor do saldo devedor no vencimento da n -ésima parcela pode ser determinado a partir da expressão do termo geral da PA, dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_n = 180.000 + (n - 1) \cdot (-500)$$

Sendo o cálculo do valor da parcela, mantido como exposto acima.

Solução: acontece algumas vezes que, mesmo encontrando a resposta correta, o aluno não consegue formalizar seu raciocínio. Por isso esta fase tem sua importância, pois mais uma vez é esperado que, para além dos alunos conseguirem chegar à solução do problema, consigam expor suas ideias para enriquecer a troca de experiências e argumentações ainda que não tenham obtido êxito.

Ao usar os conhecimentos de Progressão Aritmética, o aluno demonstra que consegue mobilizar outros saberes matemáticos, alheios ao assunto em questão, mas implícitos à solução, que é a amortização e juros compostos.

O professor pesquisador deve valorizar todas as exposições, corretas ou não, para que possa mostrar os possíveis erros, de modo a evitar que sejam cometidos em situações futuras semelhantes.

Prova: A palavra retorna ao professor pesquisador, que tem a responsabilidade de condensar as exposições na fase da Solução e fazer a formalização do saber matemático a ser desenvolvido nos alunos com essa situação. Assim:

Para determinar o valor o saldo devedor em um financiamento com sistema de amortização constante, deve-se considerar a quantidade n de parcelas pagas e aplicar e na forma do termo geral de uma P.A. decrescente, em que o primeiro termo (a_1) dessa

P.A. é o valor inicial do financiamento e a razão ($r < 0$) será esse valor inicial dividido pela quantidade de parcela:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

O valor da parcela da n -ésima (P_n), é o resultado da soma do módulo da razão da *P.A.*, definida acima, com a taxa de juros (i) aplicada ao saldo devedor na data do vencimento da parcela, ou seja: $P_n = |r| + a_n \cdot i$

4.4 Situação Problema IV

Esta situação problema tem por objetivo levar os alunos a avaliar as várias opções oferecidas para a aquisição envolvendo valores financeiros. Espera-se que os alunos compreendam que em um financiamento os juros não incidem sobre o valor pago na entrada, mas somente sobre o valor financiado.

Quadro 15 – Questão 160 do ENEM (2018) – 2º Dia – Caderno 17 – Amarelo – Reaplicação

Um rapaz possui um carro usado e deseja utilizá-lo como parte do pagamento na compra de um carro novo. Ele sabe que, mesmo assim, terá que financiar parte do valor da compra.

Depois de escolher o modelo desejado, o rapaz faz uma pesquisa sobre as condições de compra em três lojas diferentes. Em cada uma, é informado sobre o valor que a loja pagaria por seu carro usado, no caso de a compra ser feita na própria loja. Nas três lojas são cobrados juros simples sobre o valor a ser financiado, e a duração do financiamento é de um ano.

O rapaz escolherá a loja em que o total, em real, a ser desembolsado será menor. O quadro resume o resultado da pesquisa.

Loja	Valor oferecido pelo carro (R\$)	Valor do carro novo (R\$)	Percentual de Juros (%)
A	13.500,00	28.500,00	18 ao ano
B	13.000,00	27.000,00	20 ao ano
C	12.000,00	26.500,00	19 ao ano

A quantia a ser desembolsada pelo rapaz, em real, será

- (A) 14.000.
- (B) 15.000.
- (C) 16.800.
- (D) 17.255.
- (E) 17.700.

Tomada de Posição: após a leitura do anúncio, os alunos devem compreender que o valor a ser pago pelo carro usado servirá como entrada para a aquisição do carro novo, concluindo que os juros vão incidir somente sobre valor financiado, que é a diferença entre o valor novo e o valor da entrada. Outro fator que os alunos devem observar é que a taxa de juros é anual, em regime de capitalização simples, e o vencimento é uma parcela única um ano após compra.

Maturação: durante esta fase, espera-se o aluno saiba que, para determinar o valor da quantia a ser desembolsada pelo rapaz, deve seguir os dois passos descritos abaixo:

I. calcular o valor a ser financiado (V_f) subtraindo o valor da entrada, que é o que foi oferecido pelo carro velho (C_v) do valor carro novo (C_n), ou seja:

$$V_f = C_n - C_v$$

II. Determinar o valor que o rapaz deve desembolsar (V_d), calculando o valor do acréscimo que o valor financiado vai sofrer ao aplicar a taxa de juros (i) correspondente da loja:

$$V_d = V_f \cdot (1 + i)$$

Para organização das resoluções, o aluno pode adotar a estratégia de construir uma tabela, com os valores em reais, como temos no Quadro 16:

Quadro 16 – Resumo das operações para o cálculo da aquisição do carro

Loja	Entrada (C_v)	Carro Novo (C_n)	Valor financiado ($V_f = C_n - C_v$)	Valor a desembolsar ($V_d = V_f \cdot (1 + i)$)
A	13.500,00	28.500,00	15.000,00	15.000,00(1,18) = 17.700,00
B	13.000,00	27.000,00	14.000,00	14.000,00(1,2) = 16.8000,00
C	12.000,00	26.500,00	14.500,00	14.500,00(1,19) = 17.255,00

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para estimular o pensamento computacional dos alunos, propomos a resolução desta questão com uso de uma planilha eletrônica. Esperamos que os alunos sejam capazes de programar a planilha para que, ao digitar as informações recebidas pela loja de carros, o rapaz possa ter de imediato o valor que pretende desembolsar. A planilha eletrônica que utilizamos como modelo foi a planilha do *Google*. Apresentamos uma

possível solução e a sequência de quais comandos devem ser executados para que se tenha o resultado desejado na Figura 6:

Figura 6 - Resolução no Excel da situação problema 4

	A	B	C	D	E	F
1	Loja	Valor oferecido pelo carro	Valor do carro novo	Taxa de juros da loja	Valor financiado	Valor a desembolsar
2	A	R\$ 13.500,00	R\$ 28.500,00	18%	R\$ 15.000,00	R\$ 17.700,00
3	B	R\$ 13.000,00	R\$ 27.000,00	20%	R\$ 14.000,00	R\$ 16.800,00
4	C	R\$ 12.000,00	R\$ 26.500,00	19%	R\$ 14.500,00	R\$ 17.255,00
5					0	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Nas colunas A, B, C e D são registradas, respectivamente, a identificação das lojas, o valor que elas ofereceram pelo carro usado do rapaz, o valor do carro novo vendido pela loja e a taxa de juro percentual cobrada, em caso de financiamento. Já as colunas E e F foram programadas para calcular automaticamente o valor a ser financiado e o valor a ser desembolsado, respectivamente. Essa programação pode ser feita a partir da sequência de comandos a seguir:

I – Na célula “E2” digitar o comando “=(C2 – B2)” e estender este comando para as demais células da mesma coluna;

II – Na célula “F2” digitar o comando “=(E2)*(1 + D2)” e estender este comando para as demais células da mesma coluna.

Estes dois comandos foram os únicos necessários para que, de posse das condições oferecidas pela loja, o rapaz conhecesse de imediato o valor a ser desembolsado. Em uma situação real, caso decidisse visitar muitas lojas, ele conseguiria otimizar o tempo ao fazer esses cálculos com a planilha e comparar valores.

Solução: para apresentar as soluções dessa situação, os alunos podem fazer uma argumentação oral para descrever o passo a passo, tanto da resolução por escrito no papel, quanto da programação da planilha eletrônica. Se preferirem, podem usar o quadro e o pincel para registrar os cálculos, ou até mesmo apresentar a tela do computador onde realizaram a programação da planilha eletrônica, para mostrar o resultado do trabalho aos

demais alunos da turma. A mediação do professor nessa etapa é importante para que os alunos consigam expor suas ideias e contribuir com a construção do aprendizado coletivo.

Prova: nesta fase o professor retoma a palavra, a fim de organizar as principais ideias apresentadas e formalizar o conteúdo a ser ensinado para os alunos. O assunto pode ser institucionalizado como:

O valor atualizado do preço (P) de um produto que sofrerá um acréscimo cuja taxa percentual de acréscimo é (i) sobre um determinado preço inicial (P_0), é dado por $P = P_0 \cdot (1 + i)$.

4.5 Situação Problema V

Esta situação problema tem por objetivo reconhecer quanto dinheiro uma pessoa “perde” ao optar por comprar à prazo ao invés de à vista. Para isso, espera-se que os alunos sejam capazes de calcular o valor presente de uma dívida financiada em parcelas iguais. Para resolver essa situação-problema, os alunos devem utilizar seus conhecimentos sobre juros compostos e valor presente.

Quadro 17 - Questão 154 do Enem (2019) – 2º Dia – Caderno – Amarelo – Aplicação Regular

Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R\$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R\$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado. O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de

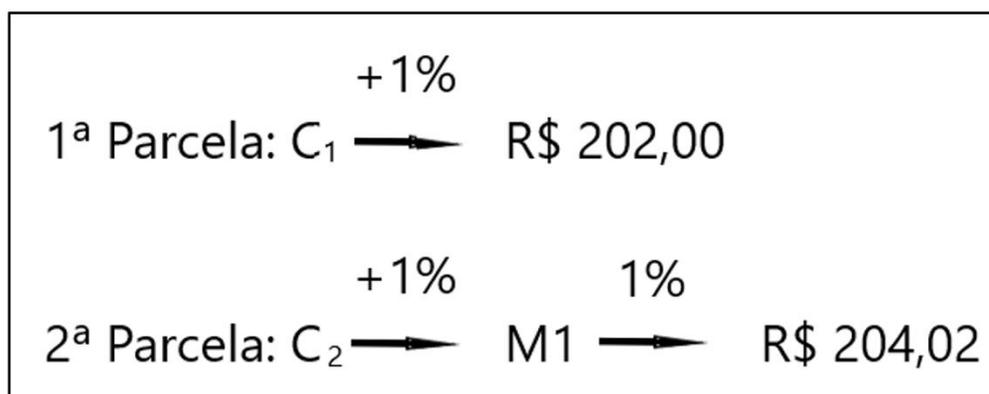
- (A) 398,02
- (B) 400,00
- (C) 401,94
- (D) 404,00
- (E) 406,02

Tomada de Posição: após realizar a leitura da questão, os alunos devem observar que a primeira parcela foi capitalizada por um período, enquanto a segunda parcela foi capitalizada por dois períodos no regime de capitalização composta, a uma taxa de 1% em cada um desses períodos. Assim, para conhecer o valor que consta na nota fiscal, deve-se calcular o valor de cada parcela antes das capitalizações sofridas e somá-las, a fim de obter o valor à vista do produto.

Maturação: a troca de informações amplia as possibilidades de determinar a solução dos problemas, uma vez que pode haver uma complementaridade dos saberes prévios dos alunos a partir da construção coletiva do conhecimento. O professor, como mediador nesse processo, deve conduzir a fase da maturação, instigando os alunos à reflexão e investigação das variáveis do problema, a fim de mobilizar os saberes necessários à sua resolução.

Espera-se que o aluno construa um esquema que mostre o fluxo de pagamento ao longo dos dois períodos a fim de estruturar o pensamento e obter uma visão geral da situação. A Figura 7 pode ser uma das estratégias seguidas pelos alunos:

Figura 7 - Valor da atualização de cada parcela



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Na Figura 7 chamamos de C_1 e C_2 os valores à vista da primeira e da segunda parcela, respectivamente, e de M_1 o valor do montante acumulado ao final do primeiro mês na segunda parcela. Note que, sobre a primeira parcela, incidiram juros compostos a uma taxa de 1% ao mês uma única vez e, na segunda parcela, incidiram juros compostos a uma taxa de 1% ao mês por dois meses. Nossa previsão é que o aluno recorra à fórmula dos juros compostos para solucionar o problema:

$$M = C(1 + i)^t$$

Onde M é o montante, C é o capital, i a taxa de juros e t , o número de períodos da capitalização. No Quadro 18, desenvolvendo o cálculo, temos:

Quadro 18 - Cálculo do valor presente de cada uma das duas parcelas

Primeira parcela	Segunda parcela
$202,00 = C_1(1 + 0,01)^1$ $\frac{202,00}{1,01} = C_1$ $C_1 = 200,00$	$204,02 = C_2(1 + 0,01)^2$ $\frac{204,02}{1,01^2} = C_2$ $\frac{204,02}{1,0201} = C_2$ $C_2 = 200,00$

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

O aluno também pode encontrar a solução com um desenvolvimento algébrico, colocando o capital inicial, também chamado de valor presente (VP), em função das demais variáveis:

$$VP = \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2}$$

$$VP = \frac{202,00}{(1+0,01)^1} + \frac{204,02}{(1+0,01)^2}$$

$$VP = \frac{202,00}{(1,01)^1} + \frac{204,02}{(1,01)^2}$$

$$VP = \frac{202,00}{1,01} + \frac{204,02}{1,0201}$$

$$VP = 200,00 + 200,00$$

$$VP = 400,00$$

Portanto, o valor que deve constar na nota fiscal deverá ser de R\$ 400,00.

Pode ser proposto aos alunos a programação de uma planilha eletrônica que, inserindo nesta planilha o Valor Futuro, a taxa percentual em regime de juros compostos e o número de períodos a serem antecipados, a planilha retornasse o Valor Presente.

Figura 8 - Resolução da situação problema 5 utilizando planilha eletrônica

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Número de Períodos	Taxa de juros	Valor Futuro	Valor Presente					
2	1	0,01	R\$ 202,00	R\$ 200,00					
3	2	0,01	R\$ 204,02	R\$ 200,00					
4				R\$ 0,00					
5				R\$ 0,00					
6				R\$ 0,00					

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Nas colunas A, B e C são registradas, respectivamente, a quantidade de períodos que o valor será antecipado, a taxa unitária de juros compostos cobrada e o valor futuro desse capital. Já a coluna D foi programada para calcular automaticamente o valor presente equivalente. Essa programação pode ser feita a partir da sequência de comandos a seguir:

I – Na célula “D2” digitar o comando “=C2/(1 + B2)*A2” e estender este comando para as demais células da mesma coluna;

Este comando foi o único necessário para que, de posse das condições oferecidas pela situação, possamos conhecer de imediato o valor presente. Em uma situação real, se por algum motivo, o responsável pelo departamento financeiro de uma determinada empresa precisasse realizar este tipo de cálculo com frequência, conseguiria otimizar o tempo ao fazer esses cálculos, melhorando a eficiência do seu trabalho.

Solução: para expor suas resoluções, os alunos são convidados a expor suas argumentações e cálculos utilizando quadro e pincel.

Prova: a partir das apresentações dos alunos e das argumentações dos demais, o professor pode formalizar o conteúdo objetivado com essa situação, como:

Considerando uma taxa de juro na forma decimal e na mesma unidade de medida de tempo do período, temos que:

- O valor futuro (VF) de um certo valor presente (VP), é dado pelo produto entre esse VP e $(1 + i)^t$. Ou seja,

$$VF = VP \cdot (1 + i)^t$$

- Já o valor presente (VP) de um de um capital é dado pelo quociente entre o valor futuro (VF) e $(1 + i)^t$. Ou seja,

$$VP = \frac{C_1}{(1+i)^1}$$

A seguir, trazemos uma Revisão Sistemática de Literatura (RSL) em que procuramos compreender o cenário de escrita acadêmica e científica acerca dos temas que abordamos até este momento. Para a realização de RSL, elaboramos um protocolo de seleção dos trabalhos analisados, conforme mostrado adiante.

5 REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA

Neste capítulo, apresentamos uma visão geral sobre as pesquisas que utilizam planilhas eletrônicas como instrumento de ensino e aprendizagem da Matemática Financeira na Educação Básica. Dentre estas, mapeamos quais adotaram a Engenharia Didática como procedimento metodológico, e se há pesquisas que utilizam a Sequência Fedathi para mediar a aplicação, com a finalidade da coleta de dados.

Para traçarmos esse panorama, utilizamos uma Revisão Sistemática de Literatura (RSL), que é uma modalidade de pesquisa sistemática que segue protocolos específicos para aferir estudos anteriormente publicados, com o objetivo de encontrar respostas para determinadas questões, conhecer técnicas eficazes sobre uma temática específica, além de identificar as lacunas a serem preenchidas, deixadas pelas pesquisas existentes.

Neste processo são apresentados, explicitamente, como ocorreu a seleção dos trabalhos, a partir de que critérios os estudos científicos analisados foram incluídos ou excluídos, em quais bases de dados foram realizadas as consultas bibliográficas e que argumentos de busca foram utilizados em cada uma delas. A RSL pode ser entendida também como uma pesquisa científica, composta por seus próprios objetivos, problemas de pesquisa, metodologia, resultados e conclusão (OKOLI, 2015).

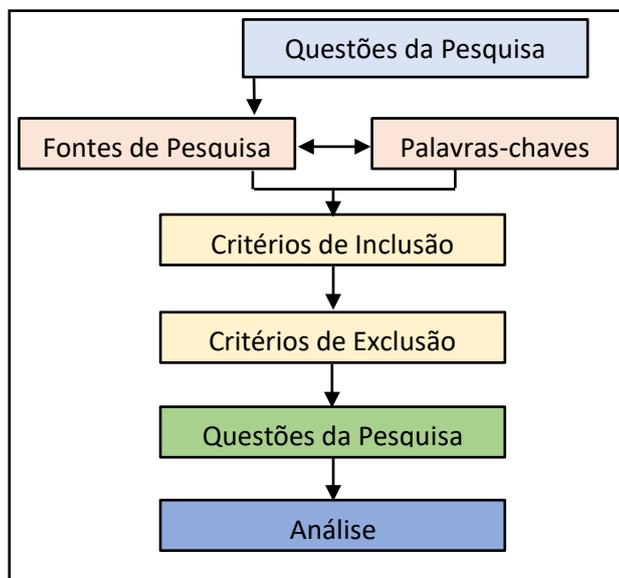
A escolha da temática para esta RSL foi motivada pela necessidade de investigar o ensino de Matemática Financeira na Educação Básica, na perspectiva da Engenharia Didática e da Sequência Fedathi, visando compreender também quais as contribuições o uso de planilhas eletrônicas como instrumento de ensino e aprendizagem pode oferecer na aplicação dos conceitos matemáticos e no desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas que envolvam o valor do dinheiro no tempo.

5.1 Metodologia Aplicada à Revisão Sistemática de Literatura

O protocolo utilizado nesta RSL foi elaborado com vistas a orientar o processo de seleção dos trabalhos a serem revisados. Primeiro, foram definidas algumas questões específicas a partir da questão central, as fontes ou repositórios onde foram realizadas as buscas, as palavras-chave, os critérios de exclusão e inclusão, o recorte temporal e a análise que responde as questões específicas. Nosso foco está em trabalhos que usam a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e a Sequência Fedathi

como mediação durante a fase da Experimentação ou coleta dados. A Figura 9 apresenta de forma ilustrada os passos aqui utilizados:

Figura 9 – Protocolo utilizado na RSL



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

5.2 Fontes da Pesquisa

Os dados obtidos provém de fontes de pesquisa e repositórios, escolhidos por apresentar um vasto acervo de produções acadêmicas e disponibilizar o gratuito acesso a estas de forma integral, além de serem comprovadamente confiáveis. No Quadro 19, temos os tipos de fonte utilizadas:

Quadro 19 - Fontes utilizadas na RSL

Tipo de Fonte	Fonte
Ferramenta de pesquisa	Google Acadêmico
Periódicos	Science Direct CAPES
Repositório	SciELO CAPES Teses e Dissertações BDTD

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

5.3 Palavras-chave da pesquisa e recorte temporal

O procedimento de escolha das fontes tendo sido finalizado, acessamos os sites para a realização da busca de trabalhos, com a utilização das palavras-chaves no título do trabalho, sem incluir citações, para trabalhos publicados em Língua Portuguesa e com recorte temporal estabelecido de 2006 a 2022.

O Quadro 20 mostra as seis etapas da pesquisa e de que forma as palavras foram combinadas com o objetivo de selecionar trabalhos que englobassem, em um primeiro momento, Matemática Financeira e Planilhas Eletrônicas. Em seguida o uso dos termos “Engenharia Didática” e Sequência Fedathi” contribuíram para que os trabalhos selecionados estivessem delimitados ao ensino. Por fim as palavras foram combinadas três a três, para filtrar os trabalhos que relacionassem estes termos. Em todas as etapas, as palavras-chave que compunham os termos foram colocadas entre aspas:

Quadro 20 – Palavras-chaves utilizadas

Etapas	Português
1 ^a	“Juros Compostos” “Planilhas Eletrônicas”
2 ^a	“Juros Compostos” “Sequência Fedathi”
3 ^a	“Juros Compostos” “Engenharia Didática”

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A seguir, trazemos as questões respondidas a partir desta RSL.

5.4 Questões da pesquisa

Para um detalhamento mais refinado, que direciona o mapeamento dos trabalhos analisados sobre o ensino de Matemática Financeira e o uso de planilhas na Educação Básica, foram levantados os seguintes questionamentos:

Q1 – Como é a abordagem do ensino de juros compostos na Educação Básica?

Q2 – Em que aspectos a Engenharia Didática, enquanto metodologia de pesquisa, contribui com a prática docente nas aulas sobre juros compostos?

Q3 – Como a utilização de tecnologias digitais alia a planilha eletrônica como recurso didático para a aprendizagem de juros compostos?

Para responder a estas questões, temos um conjunto de Critérios de Inclusão (CI), que para uma melhor identificação, para cada um deles ficou estabelecido um código composto pelas letras CI, acompanhadas de um número. O Quadro 21 apresenta de forma sistemática esses critérios.

Quadro 21 – Critérios de Inclusão

CI-01: Presença das palavras-chave em Língua Portuguesa, em qualquer parte da obra.
CI-02: Recorte temporal: 2012-2022
CI-03: Tipologia do texto: Artigo, Dissertação ou Tese.
CI-04: Disponibilidade: texto integral, <i>online</i> , gratuita.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Iniciamos a seleção dos trabalhos que apresentavam estes termos em qualquer parte da obra, a fim de cumprir o CI-01. Todas as fontes de pesquisa e repositórios oferecem a possibilidade de busca da palavra-chave diretamente no site.

A aplicação de filtros nos sites das fontes permite estabelecer o recorte temporal de 2012 a 2022, antes mesmo da inicialização da consulta, de modo a contemplar o critério de inclusão CI-02, concomitantemente a busca e verificação das palavras-chave. Dessa forma, a Figura 10 apresenta a distribuição por fonte de pesquisa e palavras-chaves, sendo incluídos 882 trabalhos, nesta etapa:

Figura 10 – Trabalhos incluídos na pesquisa, no período de 2012- 2022, e de acordo com a aplicação das palavras chaves

Google Acadêmico	“juros compostos” “planilhas eletrônicas”	435
	“juros compostos” “Sequência Fedathi”	9
	“juros compostos” “Engenharia Didática”	80
Science Direct	“juros compostos” “planilhas eletrônicas”	0
	“juros compostos” “Sequência Fedathi”	0
	“juros compostos” “Engenharia Didática”	0
CAPES Periódicos	“juros compostos” “planilhas eletrônicas”	1
	“juros compostos” “Sequência Fedathi”	0
	“juros compostos” “Engenharia Didática”	2
SciELO	“juros compostos” “planilhas eletrônicas”	0
	“juros compostos” “Sequência Fedathi”	0
	“juros compostos” “Engenharia Didática”	1
CAPES Teses e Dissertações	“juros compostos” “planilhas eletrônicas”	45
	“juros compostos” “Sequência Fedathi”	71
	“juros compostos” “Engenharia Didática”	229

BDTD	“juros compostos” “planilhas eletrônicas”	6
	“juros compostos” “Sequência Fedathi”	0
	“juros compostos” “Engenharia Didática”	3

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Quanto à tipologia do texto, consideramos artigos, teses ou dissertações, de modo a contemplar o CI-03. Foi realizado um levantamento, a fim de desconsiderar os textos que diferem da tipologia especificada. Assim, foram retirados da pesquisa textos que tratavam de livros ou trabalhos de conclusão de graduação e resumos expandidos. Neste mesmo levantamento foram observados os trabalhos que atendiam ao CI-04, que trata da disponibilidade e acesso, sendo texto integral, *online* e gratuito. Nesta etapa, permaneceram o conjunto de obras expressas na Tabela 22, em que cada coluna apresenta a quantidade de trabalhos que atendem aos critérios de inclusão estabelecidos:

Quadro 22 - Quantitativo de trabalhos após a aplicação dos critérios de inclusão

Tipo de Fonte	Fonte	CI-01 e CI-02	CI-03	CI-04
Ferramenta de pesquisa	Google Acadêmico	524	412	381
Periódicos	Science Direct	0	0	0
Periódicos	CAPES Periódicos	3	3	3
Repositório	SciELO	1	1	1
Repositório	CAPES Teses e Dissertações	345	345	345
Repositório	BDTD	9	9	9
	Total	882	770	739

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Após aplicar os critérios CE-01 e CE 02, foram identificados 882 trabalhos sendo a grande maioria no Google Acadêmico (524 trabalhos), seguido pelo repositório do Banco de Teses e Dissertações da CAPES (345 produções). Quanto ao CE-03, a maioria das outras fontes de pesquisa já apresentavam a tipologia especificada, com exceção do Google Acadêmico, onde foram identificados apenas 412 trabalhos após a abertura dos arquivos e conferência da tipologia.

Por fim, quanto ao CE-04, disponibilidade do texto integral, online e gratuito, foram incluídos 361 trabalhos do Google Acadêmico e todos os outros da demais fontes. Assim, nesta fase de identificação foram eleitas 739 produções, que seguiram para a fase de seleção com a aplicação dos critérios de exclusão.

Na próxima etapa aplicamos os critérios de exclusão, identificados pelas letras CE seguidos de um número para referenciá-los, como mostrado no Quadro 23:

Quadro 23 - Critérios de Exclusão

CE-01: Se tratar de assunto repetido.
CE-02: Não se tratar de juro compostos com uso de planilhas eletrônicas
CE-03: Pesquisas que não foram realizadas com alunos do Ensino Médio

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Nesta fase da pesquisa, os trabalhos são selecionados mediante análise e em seguida excluídos conforme não haja adequação aos CE. O Quadro 24 apresenta os trabalhos mantidos:

Quadro 24 – Trabalhos mantidos após aplicação dos critérios de exclusão

Tipo de Fonte	Fonte	Critérios de Inclusão	Artigos mantidos após aplicação de CE-01	Artigos mantidos após aplicação de CE-02	Artigos mantidos após aplicação de CE-03
Ferramenta de pesquisa	Google Acadêmico	381	359	144	45
Periódicos	Science Direct	0	0	0	0
Periódicos	CAPES Periódicos	3	3	3	2
Repositório	SciELO	1	1	1	0
Repositório	CAPES Teses e Dissertações	345	108	16	9
Repositório	BDTD	9	4	4	4
	Total	739	475	168	60

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

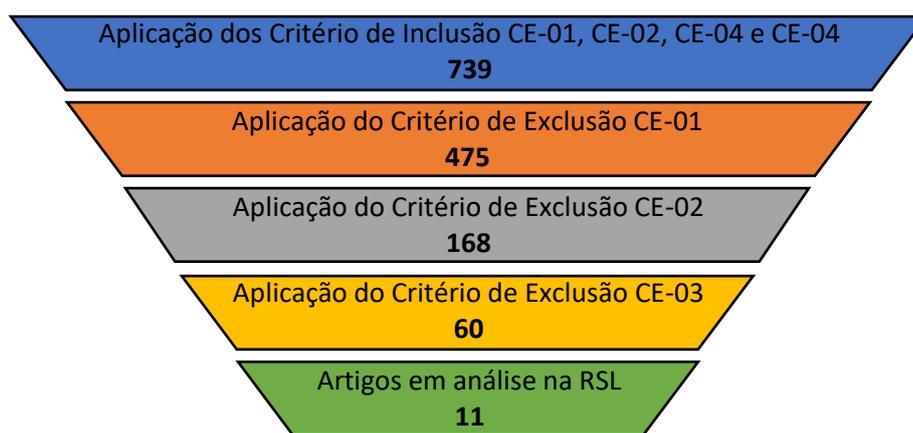
Nesta etapa, foram analisados os títulos dos trabalhos e retirados os que estavam repetidos na mesma base ou na intersecção entre outras bases. Conforme o CE-01, alguns se tratavam de resultados repetidos, restando um quantitativo de 475.

Em seguida, foi realizado um levantamento a partir dos títulos, sendo excluídos os trabalhos que apresentavam explicitamente a utilização de softwares diferentes do uso de planilhas eletrônicas, visando atender ao critério CE-01. Assim, restaram 168 trabalhos e, após novo filtro, aqueles nos quais teve o estudo realizado em outros níveis que não fossem o Ensino Médio, em atendimento ao critério CE-02, restaram 60 trabalhos. Para os trabalhos que apresentavam informações insuficientes no

título, foi realizada a averiguação da presença das palavras-chave em cada documento para a identificação de quais deveriam ser mantidos ou excluídos, conforme o caso.

Por fim, após a aplicação de todos os critérios de inclusão e exclusão, realizamos a leitura sistemática dos resumos dos 60 trabalhos restantes e selecionamos com base nesta leitura, 11 trabalhos para compor o conjunto de obras analisadas nesta RSL. A Figura 11 fornece uma visão geral de como ocorreu a seleção destes trabalhos em cada etapa da pesquisa:

Figura 11 – Quantitativo em cada etapa da pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Os onze trabalhos foram submetidos à análise exploratória de dados, na perspectiva quanti-qualitativa, com ênfase na utilização Engenharia Didática e Sequência Fedathi como metodologia de pesquisa e coleta de dados, respectivamente, e nos aspectos que relacionam a Matemática Financeira e o ensino de juros integrado à utilização de planilhas eletrônicas.

5.5 Análise de dados

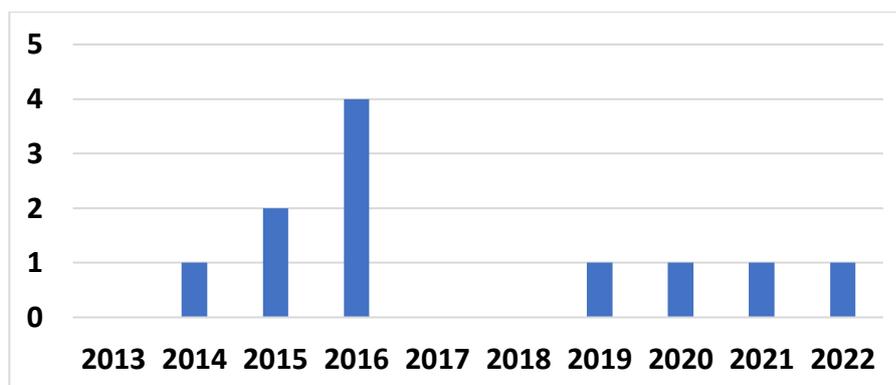
Os artigos obtidos foram identificados pela letra T, seguida de um número, conforme organizado no Quadro 25, e foram objetos de análise a fim de responder as questões da pesquisa:

Quadro 25 – Relação dos trabalhos submetidos a análise

Identificação	Título, Autor e Ano de Publicação.	Fonte
T1	Construção de uma Sequência Didática com situação-problema envolvendo Matemática Financeira (GIMENES, 2016).	Google Acadêmico
T2	Educação Financeira no Ensino Médio (GOUVEIA, 2019).	CAPES Teses e Dissertações
T3	Educação Financeira no Ensino Médio: uma Sequência Didática o desenvolvimento da tomada de decisões (MARTINS; COUTINHO, 2022).	Google Acadêmico
T4	Educação Financeira para o Ensino Médio (VENTURINI, 2016).	Google Acadêmico
T5	Ensino de Matemática Financeira com a utilização de tecnologias (SOUSA, 2014).	BDTD
T6	Juros Compostos, Financiamentos E Sistemas de Amortização utilizando a Planilha Excel (SOUSA, 2015).	Google Acadêmico
T7	Matemática Financeira no Ensino Médio (CARAMELO, 2016).	CAPES Teses e Dissertações
T8	Matemática Financeira no Ensino Médio: uma proposta de ensino contextualizada, utilizando planilhas eletrônicas (CAMPOS, 2021)	CAPES Teses e Dissertações
T9	O Ensino de Juros Compostos por meio de Sequências Didáticas (SECCO; CABRAL, 2020).	Google Acadêmico
T10	Resolução de problemas de Matemática Financeira com planilhas eletrônicas (HOBOLD, 2016).	Google Acadêmico
T11	Sequências Didáticas para a inserção do ensino da Matemática Financeira no Ensino Básico – A questão do Letramento Financeiro (SANTOS FILHO, 2015)	Google Acadêmico

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

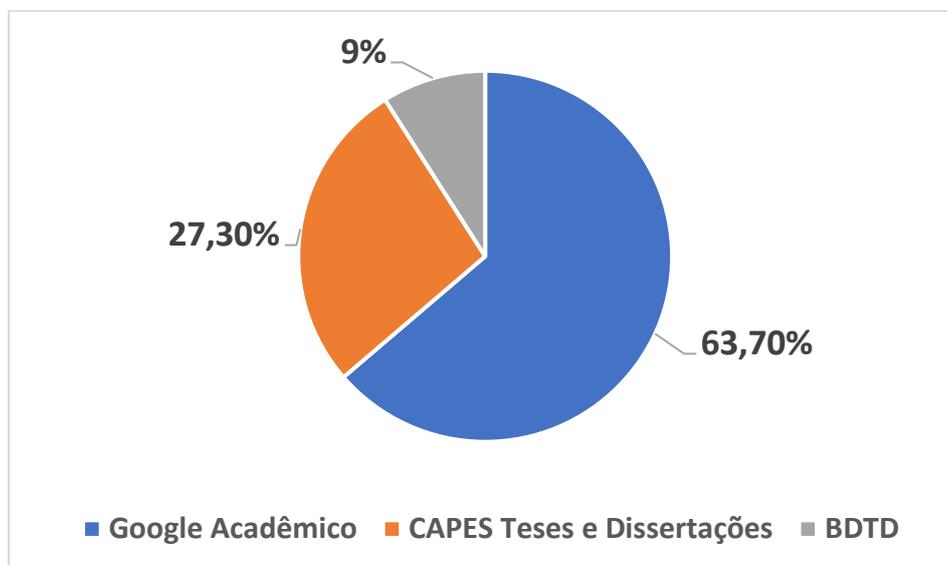
A partir de uma análise prévia, constatamos características generalizadas sobre os trabalhos, como o ano de publicação, apresentado no gráfico da Figura 12, com destaque para o ano de 2016, com quatro publicações:

Figura 12 - Quantitativo de trabalhos por ano de publicação

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

O gráfico da Figura 13 apresenta as publicações de acordo com a base em que foram pesquisadas:

Figura 13 - Quantitativo de trabalhos por repositório pesquisado



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A seguir, temos uma análise qualitativa dos trabalhos selecionados. Foi realizada a leitura de cada um, a fim de responder às questões levantadas nesse trabalho.

Questão 01 - Como é a abordagem do ensino de juros compostos na Educação Básica?

O trabalho T1 apresenta sua metodologia iniciando com uma avaliação diagnóstica, na forma de pesquisa de opinião, perspectivando conhecer o que alunos sabem de Matemática Financeira e se sabem, quais os assuntos que mais demonstram interesse. O autor defende a utilização de vídeos para motivar o estudo sobre o dinheiro, para, em seguida, exibir o conteúdo com a apresentação dos conceitos e proposição de exemplos.

De forma contextualizada, T2 apresenta a necessidade de se estimular a Educação Financeira e expõe recortes da Estratégia Nacional da Educação Financeira. Realiza, inicialmente, uma entrevista utilizando formulário. A análise das respostas deste formulário serve como parâmetro para definir se o indivíduo é ou não alfabetizado, sendo considerado alfabetizado aquele que acertar pelo menos 75% dos conceitos presentes neste formulário. Apresenta conceitos importantes relacionados ao dinheiro, que

usualmente não são abordados nos livros didáticos, como Custo Efetivo Total (CET), cartão de crédito, cheque especial, empréstimo, financiamentos, entre outros.

Em T3, os autores defendem a importância de mobilizar habilidades que promovem a Educação Financeira, inseridas nos conceitos de Matemática Financeira, a partir de situações que se conectam com a realidade social e econômica brasileira. Foi feito um levantamento dos problemas e aspectos históricos a partir de análise de livros e produções científicas e acadêmicas.

O trabalho T4 também cita a Estratégia Nacional de Educação Financeira como uma das medidas para oferecer conhecimento aos brasileiros, para que tomem decisões financeiras de modo racional sem ser ludibriados pelos bancos, mencionando que isto ainda está longe de ser a realidade da política brasileira. Aborda também o ensino de juros simples e compostos associado às Progressões Aritméticas e Geométricas, respectivamente, com seções de conceituação e dedução da fórmula por meio de exemplos, atividades e gráficos.

A abordagem em T5 inicia com um relato histórico sobre a Matemática Financeira e a evolução da moeda no decorrer do tempo. Ao apresentar o conceito de juro, faz a associação de juros simples com Progressão Aritmética e de juros compostos com Progressão Geométrica a partir de situações-problema. Em seguida, deduz as fórmulas matemáticas e define os mais variados tipos de taxas: proporcionais, equivalentes, efetiva e nominal, além do conceito de inflação. Um diferencial é a apresentação de descontos por dentro e por fora e, em comum com outros autores, a apresentação dos sistemas de amortização, SAC e PRICE ou Francês.

A abordagem sobre os aspectos históricos da Matemática Financeira trazida por T6 remete às moedas que o Brasil já teve ao longo sua história, desde a primeira troca de Reis para Cruzeiro em 1942, até a última troca de Unidade Real de Valor para Real, em 1994. Quanto aos tópicos de Matemática Financeira, são apresentados desde porcentagem, juros simples e compostos, transformações entre taxas, descontos, financiamentos e sistema de amortização.

Em T7, o autor inicia seu trabalho a partir da análise qualitativa de 03 (três) livros e 01 (um) material didático disponibilizado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, nos quais são identificadas a abordagem na construção do conteúdo. Em seguida, o trabalho traz razão, proporção e regra de três como pré-requisitos para o estudo de Matemática Financeira. Também são apresentados os conceitos de juros simples e compostos e a dedução das fórmulas relacionadas aos conceitos. Há uma seção que

apresenta demonstrações destas relações matemáticas, utilizando matemática do Ensino Superior com ilustrações gráficas.

O trabalho T8 traz um contexto histórico da criação da moeda e a origem dos bancos, discorrendo sobre termos importantes que fazem parte do cotidiano contemporâneo da Matemática Financeira, como Mercado Financeiro, inflação, correção monetária, políticas econômicas, tipos de investimentos e carga tributária. Como pré-requisito para o estudo de juros, traz os conceitos de funções e das progressões aritméticas e geométricas. Quanto aos tópicos de Matemática Financeira, destaca conceitos de juros simples e compostos, as várias formas de taxas de juros, séries de pagamentos e sistemas de amortização.

O conteúdo de juros foi trabalhado em T9 em sala de aula, em que utilizou-se a planilha eletrônica para efeito de revisão do conteúdo e também para criar relações entre a Matemática Financeira e o uso da tecnologia, a fim de ampliar os horizontes dos alunos, “pois permite preparar os alunos para enfrentar o mundo do trabalho, já que estes têm o direito de acompanhar a tecnologia para não ser um alienado tecnológico (FREO; BONA, 2015, p. 5).

A princípio, T10 faz uma apresentação sobre a Lei de Diretrizes e Bases e a Estratégia Nacional de Educação Financeira, e que contribuições estas podem trazer para o desenvolvimento da Educação Financeira nas escolas. Os discentes estudam sobre empréstimos, financiamentos, taxa de juros e as diferenças entre comprar à vista e a prazo, bem como rendimentos em opções de investimentos, entre outros. O conceito de juro é apresentado de forma sucinta e as fórmulas são trabalhadas a partir da resolução de exemplos da vida cotidiana. Em T10 também são abordados tópicos sobre taxas equivalentes, séries de pagamentos uniformes e sistemas de amortização, sendo discorrido sobre o Sistema de Amortização Constante – SAC e o Sistema PRICE ou Francês. A evolução da amortização em ambos os casos é mostrada em gráficos e tabelas.

Em T11, o autor discorre sobre o significado do termo letramento financeiro como “...a capacidade que um indivíduo tem de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Inclui o raciocinar matematicamente e o uso de conceitos, procedimentos, ferramentas e fatos matemáticos...” (SANTOS FILHO, 2015, p. 6). Na abordagem do conteúdo é estabelecida uma relação com outros assuntos matemáticos como função afim e construção de gráficos. Há o cuidado em demonstrar cada uma das fórmulas. São trabalhadas situações didáticas que o autor chama de

“cenários”, abordando desde juros, taxas equivalentes, desconto racional, séries de pagamentos e depósitos e sistemas de amortização.

Questão 02 – Em que aspectos a Engenharia Didática, enquanto metodologia de pesquisa, contribui com a prática docente nas aulas de juros compostos?

Apesar de apresentar de forma sucinta, em T1 fica evidente que ao utilizar a Engenharia Didática ao elaborar o cenário da análise *a priori*, o professor é capaz de prever as dificuldades dos alunos e criar materiais de estudo que viabilizem a aprendizagem. Durante a análise *a posteriori* ficou comprovado, pelo nível de acerto dos alunos, que a vivência da correção dessas atividades potencializa a aprendizagem.

Em se tratando de sequência didática, T2 não se limita apenas ao ensino de juros, mas trabalha também outros assuntos importantes, como operações de crédito e investimentos. Essa abordagem favorece aos que tem o primeiro contato com a Matemática Financeira, oferecendo-lhes uma visão ampla e construção de habilidades financeiras que permitirão maior gestão dos recursos.

Partindo das ideias de Brousseau e Almouloud, T3 utilizou a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Durante a análise *a priori* constata-se a necessidade de recursos adicionais que subsidiem o trabalho do professor e toma-se conhecimento dos saberes prévios que os alunos devem dominar, além de apresentar métodos de estratégias de resolução de exemplos. A fase da experimentação contribui para a construção do conhecimento e a transmissão dos saberes. Foram trabalhadas nesta fase, cinco situações didáticas abordando poupança, investimentos, endividamento do cheque especial e de decisões sobre pagar à vista ou a prazo.

A coleta de dados em T4 foi realizada com alunos do 1º Ano do Ensino Médio. Foram três atividades, sendo a primeira com quatro problemas. Dois destes problemas partem de fotografias de anúncios reais, que propõem a cobrança de juros em compras à prazo, garantindo que os alunos estejam conectados com situações reais do cotidiano. A segunda atividade apresenta dois problemas envolvendo o Sistema de Amortização Constante e a terceira atividade outros dois envolvendo o Sistema de Amortização PRICE.

Na proposta de aplicação de sequência didática, T5 descreve e orienta os seguintes aspectos: objetivos, público-alvo, pré-requisitos, materiais e tecnologia, recomendações metodológicas, dificuldades previstas, descrição geral e possíveis

continuações ou desdobramentos. Nas recomendações metodológicas orienta que podem ser usadas calculadoras convencionais ou científicas, a depender da disponibilidade dos modelos. Quando se utilizam planilhas eletrônicas, a aula pode desenvolver-se no laboratório de informática das escolas, que costumam ter o pacote Office instalado, permitindo a utilização do BrOffice Calc. Quanto ao tempo, a sugestão é de 08 (oito) aulas com 50 minutos cada uma.

A abordagem em T6 traz a construção de conceitos e dedução das fórmulas, a partir da explanação sobre o conteúdo e exemplos resolvidos. O diferencial aqui é estratégia do *aprender fazendo*, pois para cada conceito é anexada a proposta de uma situação-problema que o aluno resolve, tanto na forma algébrica quanto com a utilização do Excel. Ao todo, são dezoito atividades que permeiam praticamente todos os tópicos de Matemática Financeira, propondo diversas estratégias para o uso do recurso tecnológico.

Na sequência didática proposta pelo autor em T7, foi utilizado o portal Matemática Multimídia (M3), desenvolvido pela Unicamp. Este portal traz recursos de áudio, vídeo, experimentos e *softwares*. Para a construção dos conceitos, o recurso digital utilizado na atividade “*Como comprar sua moto*” foi desenvolvido em duas atividades. Na primeira atividade foi feita uma simulação sobre poupar um valor fixo de R\$ 100,00 reais mês a mês, para servir como entrada na compra da moto, sendo o restante pago por meio de um financiamento com uma taxa de juros fixa, e após isso, verificar o acumulado depois de poupar por 24 meses. A segunda atividade propõe calcular a amortização em parcelas fixas, sendo realizado um financiamento à taxa de 1% do restante a pagar, após deduzir o valor da entrada.

Para a proposta didática, T8 destaca competências e habilidades da BNCC que devem ser dominadas pelos estudantes ao final de quatro aulas, abordando conversão da moeda, cálculo de impostos, de salário, inflação e poupança. O planejamento dessas aulas traz ao público-alvo, objetivos, justificativas, os pré-requisitos, a descrição e o roteiro da aula, com exposição de gráficos, tabelas, exemplos de exercícios resolvidos e propostos.

O ensino de juros compostos em T9, aconteceu em aula expositiva e dialogada, com a resolução de exemplos em sala, acompanhado pelo livro didático. Foram estabelecidas 4 aulas para o trabalho de coleta de dados dessa sequência didática. Na primeira aula foi ensinado a utilizar a planilha eletrônica, tendo em vista que alguns alunos não a conheciam. Ainda nesta aula, foi possível trabalhar juros compostos e, nas três aulas seguintes, foram realizados exercícios retirados dos livros didáticos que, para a

sua resolução, os alunos deveriam trocar informações entre si e contar com o auxílio do professor.

A abordagem da sequência desenvolvida em T10 foi a partir de uma combinação entre teoria e prática, com a demonstração das fórmulas e a aplicação delas por meio da resolução de exercícios.

Na sequência didática desenvolvida pelo autor em T11, o conteúdo é apresentado de forma bem peculiar, iniciando com a construção do conceito, seguida de um enredo com personagens vivendo uma situação cotidiana. Dentro deste enredo são formuladas várias situações-problema, que são resolvidas a partir dos conceitos apresentados. Damos destaque para a seção “o que deve ser evitado”, que o autor coloca ao final de cada uma das situações, com o intuito de alertar ao professor que, ao replicá-la, obedeça ao ritmo de desenvolvimento do conteúdo e evite dificuldades desnecessárias para os alunos.

Questão 03 – Como a utilização de planilha eletrônica, como recurso didático, influencia na aprendizagem de juros compostos?

Durante a fase de experimentação da Engenharia Didática, T1 desenvolveu-a com quatro grupos de quatro alunos, com resolução de atividades na forma escrita e com a utilização de calculadora. Apesar de defender e mostrar a resolução das atividades com a utilização de planilhas eletrônicas, os alunos não chegaram a manuseá-las.

O impacto que a metodologia provocou foi favorável, pois em uma nova pesquisa de opinião *a posteriori*, os alunos evidenciaram seu nível de satisfação e consequente interesse pelo assunto, além dos dados obtidos com a pesquisa apontarem para uma melhoria nos índices de aprendizagem.

Em T2, as planilhas são utilizadas na demonstração de amortização nos sistemas SAC e PRICE e, da forma como está apresentada, contribui para o aluno decidir qual a melhor de amortização e elencar as principais diferenças entre elas, sendo possível decidir com mais discernimento.

Para a resolução das situações didáticas em T3, foram utilizadas calculadoras como recurso didático. As planilhas eletrônicas foram utilizadas quando se tratou de investimentos, fortalecendo a conscientização sobre o uso do dinheiro para o equilíbrio das finanças pessoais e familiares.

A estratégia de resolução para cada uma das questões em T4 foi a utilização de papel e caneta e, em seguida, a utilização de planilhas eletrônicas. Foram exploradas tanto as fórmulas prontas do Excel, como a programação da planilha ao inserir as fórmulas diretamente nas células. O autor destaca a dificuldade inicial em manipular as funções da planilha, bem como algumas dúvidas entre as taxas na forma decimal ou percentual. Superadas estas dificuldades iniciais, o nível de compreensão dos alunos foi satisfatório com a utilização das planilhas eletrônicas, além de ser um item que os estimulou a estudar e se aprofundar sobre essa forma de resolução.

Durante o desenvolvimento das atividades, a proposta didática em T5 traz uma resolução das situações-problema com calculadoras simples e científica. Também trouxe a sequência de teclas que deveriam ser apertadas, a fim de se encontrar as respostas esperadas. Já a resolução das atividades com planilhas eletrônicas aconteceu ao fornecer uma lista de comandos a serem digitados dentro das células, para que fossem obtidas as soluções das questões de forma automatizada.

Para a resolução utilizando o Excel em T6, primeiramente foram apresentados os comandos necessários para os desenvolvimentos dos tópicos de Matemática Financeira. Para cada uma das 18 atividades, foram geradas duas resoluções, sendo uma algébrica e outra com o Excel, ora com os comandos do software, ora a partir de uma lista de comandos digitados nas células. Isso conferiu ao trabalho um alcance amplo em termos abrangência de conteúdo, permitindo ao aluno uma maior utilização da tecnologia.

As planilhas eletrônicas ficaram em segundo plano em T7. Porém, na tela do software, foi possível visualizar todos os valores envolvidos nas operações de poupança e crédito, além da possibilidade de alterar a visualização para a forma gráfica. Ainda assim, as resoluções foram organizadas em tabelas fora do software, tanto na dedução das fórmulas quanto na resolução das questões, com diferentes simulações no valor a ser poupado e no valor das parcelas no financiamento do saldo devedor da moto. Conforme o autor, ensinar Matemática Financeira é muito importante, pois é um assunto que interfere no cotidiano dos alunos e reflete em sua realidade, com potencial para mudar o comportamento de seus familiares em relação às questões financeiras (CARAMELO, 2016).

Em T8, durante todas as aulas foram utilizadas planilhas eletrônicas, que podem ser acessadas por leitores e outros professores que desejem replicá-las em suas aulas, por meio de links disponibilizados pelo autor. As planilhas eletrônicas foram incluídas no planejamento e nas aulas "...na intenção de tornar as aulas mais criativas e

dinâmicas e colocar o professor no papel de mediador e o aluno no centro da construção do saber” (CAMPOS, 2021, p. 97).

De acordo com T9, nas aulas em que os alunos utilizaram os recursos tecnológicos, foi possível criar uma planilha com listas de comandos, de modo que se obtivesse o valor dos juros e do montante a partir das fórmulas $J = C[(1 + i)^t - 1]$ e $M = C(1 + i)^t$, respectivamente, em diversos problemas propostos no livro didático. A utilização da planilha eletrônica foi positiva, pois apesar da dificuldade em interpretar os problemas, “os alunos perderam o medo de calcular, pois não precisavam fazer isso, conseqüentemente resolveram as situações propostas” (FREO; BONA, 2015, p. 21).

Quanto à utilização de planilhas eletrônicas para o ensino de Matemática Financeira, T10 destaca a comparação entre a evolução do montante com capitais aplicados em juros simples e juros compostos. Outro ponto enfatizado é a resolução de todos os problemas a partir de uma sequência de comandos digitados nas células, sendo estes responsáveis pela automação dos cálculos ao se inserir os dados.

Quanto aos recursos tecnológicos, T11 descreve a função 16 da calculadora científica HP 12c, além de funções do Excel necessárias para a utilização dos problemas propostos. Ao todos, foram resolvidos 05 problemas envolvendo os assuntos trabalhados em sala usando o Excel e, em todos os casos, foram utilizadas as fórmulas prontas do software. Com a realização deste trabalho, veio a “possibilidade de perceber as dificuldades que podem ser encontradas ao tentar implementar o ensino de Matemática Financeira no ensino básico brasileiro” (SANTOS FILHO, 2015, p. 90).

A partir da análise dos trabalhos selecionados foi possível constatar que há muitas publicações no intuito de levar conhecimento financeiro aos discentes da Educação Básica. Foi possível perceber como este vasto conhecimento é difundido, uma vez que dentre os trabalhos analisados estavam presentes todos os tópicos de Matemática Financeira demandados neste nível de ensino.

A competência financeira que leva as pessoas vai muito além de memorizar fórmulas. Ela passa pelo desenvolvimento de outras competências, que levam os alunos a ter uma Educação Financeira e aprender a lidar com o dinheiro com sabedoria. Todos os autores estudados demonstram preocupação sobre o desenvolvimento dessas habilidades, almejando que as próximas gerações possam desfrutar da criação e da manutenção de patrimônio financeiro a partir dos ensinamentos escolares.

As tecnologias digitais estão a serviço do desenvolvimento e difusão das habilidades financeiras nos alunos. Apesar da carência de aparato tecnológico nas escolas,

a utilização de planilhas e outros recursos digitais já são realidade pelo Brasil, como demonstrou a análise dos trabalhos.

Almejamos que mais pesquisas e trabalhos nesse sentido possam se multiplicar e tornar a sociedade consciente do valor do dinheiro no tempo, bem como formas inteligentes de utilizá-lo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As reflexões que ora fazemos buscam expor sobre o quão exitoso foi o alcance dos objetivos que estabelecemos, e se a resposta que encontramos para a pergunta norteadora foi satisfatória, a partir da dimensão de abrangência desse trabalho. Para tanto, relembramos que nosso objetivo geral que era investigar as contribuições que a Sequência Fedathi e a Engenharia Didática oferecem para a aprendizagem de juros compostos pelos alunos do Ensino Médio.

Diante do exposto, podemos concluir que o planejamento da prática docente a partir da Engenharia Didática pode contribuir positivamente para o processo de ensino, uma vez que o professor passa a ter ciência daquilo que precisa ser ensinado na análise preliminar, e a prever as possíveis fragilidades dos alunos, na fase da análise *a priori*. Com isso, pode aperfeiçoar cada vez mais suas aulas e potencializar a aprendizagem de seus alunos.

Já com a Sequência Fedathi, foi possível repensar o papel do professor, antes visto como centro do processo de ensino, em que passa a atuar como mediador, à medida que o aluno passa do papel de coadjuvante para protagonista da sua aprendizagem. Cada uma das fases da SF tem sua importância e vivenciá-las de forma plena no processo de aprendizagem pode provocar no aluno o senso de investigação e pesquisa, conferindo-lhe autonomia para a aquisição de novos conceitos.

Cabe ao professor instigar a participação dos alunos, a fim de que interajam e toquem experiências entre si, despertando o senso de curiosidade e de pesquisa, que podem levar à descobertas e aprendizados novos e mais significativos.

Ficou evidente no estudo da BNCC, da Matriz Curricular do ENEM e dos livros didáticos que há propostas metodológicas, que não apenas garantem a presença da Matemática Financeira no currículo, como também trazem orientações para que o professor trabalhe com um embasamento que proporcione ao aluno a formação básica necessária para resolver situações envolvendo o tema.

As situações apresentadas foram retiradas de edições anteriores do ENEM e sugerem um nível de dificuldade esperado, tendo em vista o que o aluno enfrentará na vida adulta, bem como sugerem a abordagem do tema com aporte da tecnologia, apresentando uma conexão ao contexto que os alunos vivenciam enquanto cidadãos.

A vivência das questões de edições do ENEM leva o aluno a acreditar no seu potencial, vendo que é possível fazer uma boa avaliação, desde que haja preparação e estudo condizentes com o nível de questões que se apresentam neste tipo de prova.

Nossa pergunta norteadora foi respondida em um nível satisfatório, dentro dimensão alcançada pela revisão sistemática de literatura. Pela análise de cada um dos trabalhos selecionados, foi possível perceber que a utilização de recursos tecnológicos, como planilhas eletrônicas confere dinamismo, que favorece o cognitivo, o emocional e o lado motivacional, incentivando-o a aprender cada vez mais.

Cada autor explorou de uma forma especial os assuntos de Matemática Financeira e forneceu um conjunto de estratégias metodológicas, que podem auxiliar professores que experimentem replicar as propostas destes trabalhos. Todos os tópicos da MF foram abordados e, ao se debruçar sobre esses trabalhos, tanto o professor quanto alunos, podem ter acesso a um material rico de informação e conhecimento. Espera-se que possam ser desenvolvidas competências e as habilidades para decidir com coerência situações que envolvam gerência de recursos financeiros, principalmente aquelas em que há incidência de juros.

A conclusão a que chegamos é que o estudo da prática das experiências já vivenciadas nos ajuda errar cada vez menos, nos aperfeiçoando profissionalmente e contribuindo para que possamos difundir os conhecimentos que os alunos precisam, com maior destreza e eficácia.

A limitação que podemos identificar em nosso trabalho é a inexistência da aplicação com uma turma. Mas, de fato, este não era nosso objetivo, nem por isso há impedimento de fazê-lo não apenas por nós com por todos que assim desejarem.

Somos conscientes das dificuldades que os alunos enfrentam para a aprendizagem de Matemática na Educação Básica, por isso cada vez mais se faz necessário o investimento em recursos didáticos e tecnológicos, na revisão de currículos, na Formação de Continuada de Professores e no fomento de iniciativas que democratizem e promovam a difusão do aprendizado.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, V. S. **A Sequência Fedathi e o Ambiente Virtual de Ensino Telemeios na Determinação da Equação de uma Reta**. 2011. 186f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/1981-1322.2012v7n2p22/23452>. Acesso em: 20 nov. 2022.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Paraná: UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62>.
- ALVES, F. R. V. Didática das Ciências e Matemática (DCeM): surgimento e implicações para a formação do professor. **Investigações em Ensino de Ciências**. v. 22, n. 3, p. 291-320, 2017.
- ALVES, F. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. 2011a. 353 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php. Acesso em: 06 dez. 2022.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lausane, Paris p. 243-274, 1996. Disponível em: http://kleio.ch/HEP_VS/hepvsvideo/8_INGENIERIE_DIDACTIQUE_ARTIGUE.pdf. Acesso em: 21 fev. 2023.
- ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988. Disponível em: <https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/>. Acesso em: 10 nov. 2022.
- AZEVEDO, I. F. **Situações didáticas profissionais (SDP): uma perspectiva de complementaridade entre a teoria das situações e a didática profissional no contexto das olimpíadas de matemática**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2020.
- BORGES NETO, H. **Sequência Fedathi no Ensino de Matemática**. Fortaleza: Editora da UFC, 2017.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 01 out.2022.

BRASIL. **Matriz de referencia do ENEM.** Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 01 mar., 2023.

CAMPOS, S. T. A. P. **Matemática Financeira no Ensino Médio: uma proposta de ensino contextualizada, utilizando planilhas eletrônicas.** 128 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de São Paulo, Diadema, 2021.

CARAMELO, C. B. S. **Matemática Financeira no Ensino Médio.** 80 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2016.

FECOMÉCIOSP. **Endividamento atinge 78% das famílias brasileiras, maior taxa dos últimos 12 anos.** Disponível em: <https://www.fecomercio.com.br/noticia/endividamento-atinge-78-das-familias-brasileiras-maior-taxa-dos-ultimos-12-anos>. Acesso em: 09 fev., 2023.

FERREIRA, C. B. **Matemática financeira com planilhas eletrônicas: uma proposta para o Ensino Médio.** 102 f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2021.

GIMENES, D. G. **Construção de uma sequência didática com situações-problema envolvendo matemática financeira.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/7739>.

GOUVEIA, R. C. B. **Educação Financeira no Ensino Médio.** 51 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2019.

HOBOLD, J. **Resolução de problemas de Matemática Financeira com planilhas eletrônicas.** 48 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Amazonas, 2016.

MARTINS, F. V.; COUTINHO, C. Q. S. **Educação Financeira no Ensino Médio: uma Sequência Didática o desenvolvimento da tomada de decisões.** Rev. Prod. Disc. Educ. Matem., v. 11, n. 1, p. 51-62, 2022.

MENDONÇA, A. F. A pesquisa acadêmica em Educação Matemática no Ceará. **Seqüência Fedathi no Ensino de Matemática.** Fortaleza: Editora da UFC, 2017.

MENEZES, D. B. **O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva da Sequência Fedathi: Caracterização do Comportamento de um Bom Professor.** 128 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

OKOLI, C. A guide to conducting a stanlone systematic literature rewiw. **Communications of the Association for Information System**, v. 37, n. 43, p. 879-910, 2015. Disponível em: <http://aisel.aisnet.org/cais/vol37/iss1/43/>

PINHEIRO, A. C. M.; PINHEIRO, T. S. M. Proposta Metodológica do uso do ambiente computacional como recurso didático para o ensino de conceitos matemáticos. In: **Sequência Fedathi no Ensino de Matemática**. Fortaleza: Editora da UFC, 2017.

SANTOS FILHO, M. J. **Sequências Didáticas para a inserção do ensino da Matemática Financeira no Ensino Básico – A questão do Letramento Financeiro**. 103 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

SECCO, L. C. M.; CABRAL, N. F. O Ensino de Juros Compostos por meio de Sequências Didáticas. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 12, e17691211068, 2020.

SILVA, J. G. A. **Situações Didáticas Olímpicas (SDO): uma engenharia didática de formação (EDF) no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual Vale Do Acaraú (UVA) para o ensino de Geometria Plana**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2020.

SOUSA, R. T. **Categorias do Raciocínio Intuitivo e o ensino de parábolas em Geometria Analítica com aporte do software GeoGebra**. 222 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2022.

SOUZA, M. J. A. **Aplicação da Sequência Fedathi e a exigência de um novo contrato didático**. Fortaleza: Editora da UFC, 2013.

SOUSA, A. B. **Juros compostos, financiamentos e sistemas de amortização utilizando a planilha excel**. 90 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2015.

SOUSA, F. E. E. **A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de matemática por meio da Sequência Fedathi**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/14363>

SOUZA, M. J. A. **Sequência Fedathi: Apresentação e Caracterização**. Fortaleza: Edições UFC, 2013.

SOUZA, M. J. A. **Informática Educativa na Educação Matemática: estudo de Geometria no ambiente do software Cabri-Géomètre**. 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2001.

VENTURINI, R. C. P. **Educação financeira para o ensino médio**. 115 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2016.