UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JOSÉ CLAUDIMAR DE SOUSA

A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

SOBRAL – CEARÁ

2023

JOSÉ CLAUDIMAR DE SOUSA

A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ailton Campos do Nascimento.

SOBRAL – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Sousa, Jose Claudimar de.
A importância do ensino do princípio multiplicativo na educação básica [recurso eletrônico] / Jose Claudimar de Sousa. - 2023.
51 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Sobral, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Ailton Campos do Nascimento.
Coorientação: Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho.

1. Princípio Multiplicativo. 2. Análise Combinatória. 3. Educação Básica.. I. Título.

JOSÉ CLAUDIMAR DE SOUSA

A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 19 de junho de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
AILTON CAMPOS DO NASCIMENTO
Data: 15/07/2023 11:25:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ailton Campos do Nascimento (Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Andressa Gomes

Profª. Dra. Andressa Gomes
Universidade Federal do Piauí – UFPI

Edvalter da Silva Sena Filho

Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

Dedico este trabalho à minha esposa Maria Gleiciane Passos de Farias e às minhas filhas Raena Maria de Farias Sousa e Helena Maria de Farias Sousa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e por me conduzir, sempre me amparando em todos os momentos.

À minha amada esposa, Maria Gleiciane Passos de Farias, pelo apoio incondicional, por tanto incentivo, pela cirúrgica contribuição que emplacou essência a este trabalho e, sobretudo, por suportar com tanta serenidade toda a carga emocional intrínseca a esse curso, juntamente com a minha linda princesa Raena Maria de Farias Sousa. Essas são as duas pessoas que mais merecem essa conquista, mormente pelas renúncias do convívio familiar. Destaco aqui o presente de Natal que recebemos em 24/12/2022, a minha outra princesa Helena Maria de Farias Sousa. Agradeço mais uma vez a Deus, por tudo!

Aos familiares e colegas mais próximos, pelas palavras de otimismo nos momentos mais delicados, em especial à minha mãe Francisca Tavares de Sousa e ao meu pai José Oclécio de Sousa, que mesmo com dificuldade de compreender as "minhas pressas" sempre são tão atenciosos e preocupados comigo.

Ao meu orientador, Profº. Drº. Ailton Campos do Nascimento, pela leveza, compreensão e brilhantismo na condução deste trabalho.

A todos os Professores e à Professora que tive no PROFMAT, pela dedicação, ensinamentos, apoio e, principalmente, a compreensão no decorrer deste curso. Aqui eu preciso demonstrar maior gratidão ao grande Professor Edvalter Sena, por ter sido por incansáveis vezes mais do que um Professor: foi um grande companheiro, conselheiro e amigo. Muito obrigado, "Grande", por acreditar em mim e me "devolver ao jogo" por tantas vezes!

Aos meus colegas de curso, pelo companheirismo, pela partilha dos conhecimentos e dificuldades vividas durante a jornada. Destaco a maior parceria, sem desmerecer as demais, com o colega Rubens, o meu amigão!

À Universidade Estadual do Ceará, também à Universidade Federal do Ceará e à Universidade Estadual Vale do Acaraú, pela disponibilização de toda a estrutura física e de seu corpo docente para que esta realização fosse possível; e à CAPES, pelo apoio financeiro, sobretudo no início da caminhada por ocasião das viagens para Fortaleza.

Aos alunos e alunas, pela gentileza de participar do experimento e ao núcleo gestor da escola onde trabalho pela compreensão de sempre.

"Se você for receptivo e humilde, a Matemática o guiará pela mão."

(Paul Dirac)

RESUMO

Diante das dificuldades apresentadas por estudantes do Ensino médio para lidar com problemas de contagem durante esses quase 13 anos de docência neste nível de ensino na rede estadual de ensino do Ceará, o autor desta dissertação sentiu-se motivado, com a oportunidade dada pelo PROFMAT, a realizar um estudo abordando a importância do ensino do *Princípio multiplicativo* na Educação básica: Ensino Fundamental e Médio. Buscou-se entender o que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) preconiza sobre o ensino deste tema nessas duas fases da vida escolar trazendo exemplos das habilidades nas quais se insere a *Análise combinatória* e, de modo particular o *Princípio multiplicativo* (Princípio fundamental da contagem – PFC), expondo alguns exemplos e indicando neles variadas formas de resolução. Amparou-se na forte teoria dos conjuntos a fim de melhor compreender o princípio em estudo e nos ensinamentos de renomados estudiosos da área. Mostrou-se que a partir do PFC pode-se obter fórmulas que permitem cálculos mais "diretos" na resolução de alguns problemas, enfatizando as mais vistas em sala de aula, que são a *permutação simples*, a *permutação com repetição*, a *permutação circular*, o *arranjo simples* e a *combinação simples*, suscitando a relevância da familiarização com tais fórmulas em certos exames, como é caso do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM. Evoluiu-se chamando a atenção para a importância do bom domínio do PFC quando o indivíduo é submetido a exames diagnósticos, como as avaliações em larga escala, ou classificatórios, como é o caso das olimpíadas, dos concursos públicos e dos vestibulares, principalmente o ENEM. Nesta etapa foi realizada uma experiência com uma amostra de 10 estudantes do 3º ano de uma escola pública, aplicando-se um teste envolvendo questões dos supracitados exames e refletindo pedagogicamente sobre as respostas apresentadas através de comentários do autor deste trabalho.

Palavras - chave: Princípio Multiplicativo. Análise Combinatória. Educação Básica.

ABSTRACT

Faced with the difficulties presented by high school students in dealing with counting problems during these almost 13 years of teaching at this level of education in the state education network of Ceará, the author of this dissertation felt motivated, with the opportunity given by PROFMAT, to carry out a study addressing the importance of teaching the multiplicative principle in Basic Education: Elementary and Secondary Education. We sought to understand what the National Common Curricular Base (BNCC) recommends about teaching this subject in these two phases of school life, bringing examples of the skills in which Combinatorics is inserted and, in particular, the Multiplicative Principle (Fundamental Principle of Counting – PFC), exposing some examples and indicating in them various forms of resolution. He relied on strong set theory in order to better understand the principle under study and on the teachings of renowned scholars in the area. It was shown that from the PFC it is possible to obtain formulas that allow more "direct" calculations in the resolution of some problems, emphasizing the ones most seen in the classroom, which are the simple permutation, the permutation with repetition, the circular permutation, the simple arrangement and the simple combination, raising the importance of familiarization with such formulas in certain exams, as is the case of the National Secondary Education Examination - ENEM. Evolved by calling attention to the importance of good command of the PFC when the individual is subjected to diagnostic tests, such as large-scale assessments, or classifications, as is the case of the Olympics, public competitions and entrance exams, mainly the ENEM . At this stage, an experiment was carried out with a sample of 10 students from the 3rd year of a public school, applying a test involving questions from the aforementioned exams and reflecting pedagogically on the answers presented through comments by the author of this work.

Keywords: Multiplicative Principle. Combinatorial Analysis. Basic education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática nos moldes tradicionais carrega o fardo de tornar o aprendizado "escravo" de fórmulas à medida que se propõe a indicar um caminho, muitas vezes único, para se chegar ao resultado pretendido.

Não obstante, tais fórmulas certamente exibem a sua importância quando fazem emergir soluções quase imediatas para situações complexas, à primeira vista, e que exigem considerável tempo de apreciação para que se construa um raciocínio promissor.

Alguns problemas de Matemática podem ser resolvidos apenas através de raciocínio simples e direto, mas há aqueles que requerem uma melhor elaboração do pensamento para que se constitua um caminho sólido e frutífero para a sua solução.

Para KRULIK e REYS:

> A resolução de problemas muitas vezes tem desempenhado um papel secundário em nosso currículo de matemática calcado fortemente no conteúdo e dirigido acentuadamente para as habilidades. [...] Acreditamos que um currículo de matemática deveria se basear mais em *estratégias* do que em *conteúdo*. (KRULIK e REYS, 1997, p.188)

Diante do exposto, convém refletir sobre as metodologias de ensino nas escolas, geralmente ancoradas no uso de fórmulas, no caso da Matemática, por exemplo, em detrimento das tentativas e descobertas, como ocorre na resolução de problemas dos mais diversos níveis de complexidade. Os autores concluem sugerindo que o currículo deveria se pautar mais nos métodos do que no conteúdo em si.

Em 1998 os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) discorriam sobre um problema como "[...] uma situação que demanda realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la." (BRASIL, 1998, p. 41).

Veja que os PCN's – 1998 referem-se ao problema como um obstáculo a ser superado por meio de um encadeamento de passos, ou seja, com ênfase nas tentativas e no método.

O entendimento supracitado certamente estende-se a qualquer situação desafiadora do nosso cotidiano, que pode ser considerada um problema, não necessariamente matemático, e que carece de um agir metódico, a fim de que se prospere em passos firmes na solução e a obtenha em tempo hábil.

Em entendimento consoante, Polya, (2006) aponta quatro etapas principais para a resolução de um problema, como segue:

- compreender o problema: entende- se que nesta etapa o(a) estudante procura se inteirar do problema, fazendo um levantamento do que se exige para a resolução e fazendo analogias a fim de que possa agir sobre este;
- elaborar um plano: aqui monta-se o seu plano de ação, relacionando em determinada ordem os dados do problema, o que o leva a um esquema de resolução, que em muitos casos é uma equação matemática;
- executar o plano: este deve ser o momento de lançar mão de todo o saber matemático para colocar o plano em prática;
- fazer o retrospecto ou verificação: nesta etapa deve ser feita uma revisão, analisando cada passo dado. É uma oportunidade para diagnosticar e corrigir algo de errado que tenha ocorrido pelo caminho.

É oportuno notar que o autor indica um caminho, que pode sofrer alguma variação, para a resolução de problemas que vai desde a sua compreensão até a verificação, o que não ocorre com tanta frequência, visto que as metodologias de ensino não tendem a primar pela investigação, pois dão mais importância ao resultado do que ao procedimento.

Em se tratando de números naturais, um método bastante eficaz para esta verificação é o método da indução, que será apreciado mais adiante em nosso trabalho.

Definindo problema, Dante (2010, p.11) afirma que de maneira genérica, pode-se dizer que é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo.

Aprecia-se nas palavras do eminente escritor que resolver um problema não deve ser uma tarefa que se restringe à aplicação procedimentos impulsivos ou de fórmulas prontas, requer um pensamento bem delineado.

O pensamento dos referidos autores coaduna com o objetivo deste trabalho, que é refletir sobre a importância do ensino do *Princípio multiplicativo*, sobretudo na resolução de problemas na educação básica, suscitando possíveis lacunas a fim de trilhar caminhos, focados no processo, que possam contribuir com a prática docente e, consequentemente para uma melhor compreensão deste imponente mecanismo de contagem, tanto por docentes como por discentes, já que tal princípio é o ponto de partida para uma clara compreensão do estudo da *Análise combinatória.*

Em face das ideias apreciadas até aqui e do objetivo ora mencionado, compreende-se que a proposta de ensino do *Princípio multiplicativo* na educação básica não deve se ater apenas a exemplos triviais para os quais a solução segue praticamente o mesmo curso, é preciso dar ênfase aos casos mais desafiadores.

O fato de a *Análise combinatória* ser muitas vezes compreendida como um ramo da Matemática que condiciona aprendizes a métodos prontos de resolver problemas impõe um cauteloso olhar sobre a relação ensino/aprendizagem em torno deste tema, precipuamente no que tange ao *Princípio multiplicativo.*

Para Morgado (1991, p.1), a Análise combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.

Seguindo a abordagem sobre o tema, o supracitado autor chama a atenção para alguns pontos cruciais no estudo/ensino de *Análise combinatória*:

- A engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema, apesar das técnicas gerais;
- A motivação para se privilegiar o estudo das permutações, arranjos e combinações que segundo ele, é o fato de serem os mais simples e de uso mais amplo, o que possibilita a aplicação na resolução de muitos problemas de *Análise combinatória.*
- A aplicabilidade na resolução de problemas de probabilidade finitas, que são um campo de aplicação da *Análise combinatória.*
- O risco que se corre quando se aplica os conceitos de forma mecânica a problemas padronizados. Segundo este autor, cria-se a impressão de que a Análise combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

Observa-se nas orientações de Morgado uma espécie de “cartilha” a ser seguida no ensino de *Análise combinatória* que se for bem seguida poderá produzir bons resultados.

Convém deixar claro que a arte da docência é exercida diariamente em sala de aula. Isso depende de fatores que fogem de qualquer “fórmula pronta”, tais como o conhecimento prévio, as habilidades individuais de quem ensina e de quem aprende, além da pré-disposição para a aceitação do tema.

2. FUNDAMENTAÇÃO LEGAL

2.1. Introdução no Ensino fundamental I

O uso do *Princípio multiplicativo* na resolução de problemas é habilidade aludida já nas séries iniciais do Ensino fundamental, conforme dicção da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como segue: “Considera-se habilidade do 1º ano do Ensino fundamental, segundo a BNCC, “Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias como o pareamento e outros agrupamentos.” (EF01MA02 - BRASIL, 2018, p. 279)

Infere-se aqui que nessa faixa de ensino os (as) aprendizes já tenham desenvolvido habilidades que utilizem técnicas de contagem que remetem ao *princípio multiplicativo*, como é o caso do pareamento.

Mais adiante, já no 3º ano do Ensino fundamental, o documento norteador da educação básica retoma a importância do domínio desses recursos essenciais para estudos mais avançados ao apontar que estudantes nesse nível de aprendizagem já devam “Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito.” (EF03MA03 - BRASIL, 2018, p. 287)

Além disso, devem saber:

> Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros. (EF03MA07 - BRASIL, 2018, p. 287)

Ao abordar a disposição retangular como recurso do qual se deve lançar mão a fim de resolver problemas, traz-se à tona, mais uma vez o uso do *princípio multiplicativo* como estratégia de quantificação de objetos, baseando-se nas filas de tal disposição, o que agiliza a tarefa.

Em seguida, já no 4º ano, a BNCC voltou a tratar dessa forma de dispor objetos como aplicação da multiplicação na resolução de problemas, além de outros significados da operação, como segue:

> Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (EF04MA06 - BRASIL, 2018, p. 291)

Ainda no 4º ano, a lei educacional traz de forma mais clara o uso do *princípio multiplicativo* na formação de agrupamentos por meio de duas coleções de objetos, evidenciando o uso de material concreto, como descreve:

> Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais. (EF04MA08 - BRASIL, 2018, p. 291)

Por fim, no 5º ano, a referida lei explicita o recurso aritmético utilizado na formação dos agrupamentos supracitados, como segue:

> Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas. (EF05MA09 - BRASIL, 2018, p. 291)

As habilidades ora expostas sugerem que estudantes nesse nível de ensino consigam, ao fim de tal ciclo escolar, formar e quantificar sequências do tipo a_ib_i, de dois conjuntos disjuntos A e B, sendo $a_i \in A$ e $b_i \in B$, em situações contextualizadas, ou não.

2. 2. Evoluindo para o Ensino fundamental II

Na 2ª etapa do Ensino fundamental, já no 8º ano, o *princípio multiplicativo* deve ser utilizado como ferramenta para estudos mais avançados, como é o caso da Probabilidade. Segundo a BNCC, a essa altura o domínio desse conhecimento deve apresentar-se como recurso para a obtenção de resultados significativos em cálculos de probabilidades, de acordo com a seguinte habilidade: “Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.” (EF08MA22 - BRASIL, 2018, p. 315)

Nessa última fase do Ensino fundamental, agora no 9º ano, já se exige que a ferramenta em estudo esteja à disposição na resolução de problemas mais específicos de probabilidade como: “Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.” (EF09MA20 - BRASIL, 2018, p. 319)

2. 3. Refinando o conhecimento no Ensino médio

No Ensino médio nosso objeto de estudo ganha contornos mais sofisticados, dada a gama de aplicações que se desenvolvem em seu entorno. É o que se observa em três inserções feitas pela BNCC para esta fase do ensino básico, a saber:

> “Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.” (EM13MAT310 - BRASIL, 2018, p. 315)

A habilidade ora elencada avalia que os (as) alunos (as) tenham ampliado o leque de técnicas de contagem, considerando o nível mais avançado dos desafios que surgem nos problemas.

A ampliação e o aprimoramento desses métodos devem munir o(a) estudante de repertório para também lidar com questões de probabilidade de maior complexidade processual, como sugere a habilidade: “Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.” (EM13MAT311 - BRASIL, 2018, p. 315)

Também trata desse assunto a habilidade: “Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.” (EM13MAT312 - BRASIL, 2018, p. 315)

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O *Princípio Fundamental da Contagem*, comumente conhecido como *Princípio Multiplicativo* é o preceito básico, como o próprio nome sugere, para o estudo de *Análise combinatória* no Ensino básico. Tudo parte da ideia apresentada nas séries iniciais do Ensino fundamental, conforme citado anteriromente.

Apoia-se na *teoria dos conjuntos* e dela extrai elementos importantes para apresentar alguns de seus importantes resultados.

Para Plínio, Margarida e Idani (2002, p.1), um conjunto é, então uma coleção de objetos de qualquer tipo – pessoas, plantas, animais, fenômenos. Os objetos que constituem o conjunto são chamados elementos do conjunto.

Segundo essa definição, são conjuntos, cuja representação se faz por letras maiúsculas do nosso alfabeto, os exemplos:

- meses do ano: A = {janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro};
- possíveis resultados do lançamento de um dado: B = {1, 2, 3, 4, 5, 6};
- vogais do nosso alfabeto: C = {a, e, i, o, , u};
- números reais que estão entre 5 e 10: $D = \{x \mid 5 < x < 10\}$.

Denomina-se *cardinalidade* de um conjunto a quantidade de elementos que ele possui. Algumas das formas de representar esse número, para um conjunto X, por exemplo, são $n\ (X)$, $\#\ X$ e $|\ X\ |$.

É oportuno lembrar que um conjunto pode ser finito ou infinito. Quando tem um elemento único é chamado de *unitário* e quando não tem elemento é chamado de *vazio*.

Além disso, um elemento x pode pertencer ou não a um conjunto X. Tal fato é representado pelos símbolos $\in$ (pertence) e $\notin$ (não pertence), respectivamente. Deste modo, se Y é um conjunto para o qual todo elemento é um número par, segue que $2 \in Y$ e $3 \notin Y$. Há ainda a relação de inclusão entre conjuntos, representada pelos símbolos: $\subset$ (está contido), $\not\subset$ (não está contido), $\supset$ (contém) e $\not\supset$ (não contém).

Outro fato relevante sobre o estudo dos conjuntos, mormente para o propósito deste trabalho, são as operações de *união* e *intersecção*.

Para que se definam tais operações é necessário delimitar o conjunto onde elas devem ocorrer. A essa delimitação dá-se o nome de *conjunto universo*, que é comumente representado pela letra U do nosso alfabeto ou pela grega *ômega* (Ω).

O *conjunto universo*, ora citado, é o conjunto que contém todos os elementos considerados para determinado estudo. Em Matemática, principalmente no estudo das funções, considera-se como conjunto universo cada um dos conjuntos numéricos, conforme a necessidade de abrangência. Tais conjuntos são:

- ✓ o conjunto dos números naturais, denotado pelo símbolo $\mathbb{N}$.
- ✓ o conjunto dos números inteiros, denotado pelo símbolo $\mathbb{Z}$.
- ✓ o conjunto dos números racionais, denotado pelo símbolo $\mathbb{Q}$.
- ✓ o conjunto dos números reais, denotado pelo símbolo $\mathbb{R}$.
- ✓ o conjunto dos números complexos, denotado pelo símbolo $\mathbb{C}$.

Conforme o exposto, dados dois conjuntos, A e B, a *união* de A e B é assim descrita: $A \cup B = \{x \in \mathrm{U} \mid x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in B\}$.

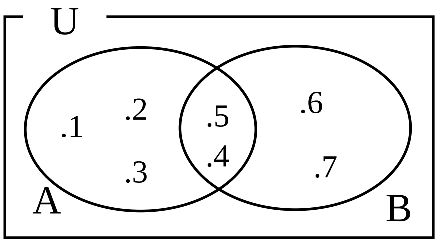
Já a *intersecção* de A e B é assim descrita: $A \cap B = \{x \in \mathrm{U} \mid x \in \mathrm{A} \text{ e } x \in B\}$.

Em vista disso, se A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {4, 5, 6, 7}, tem-se:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $A \cap B = \{4, 5\}$.

Podemos exibir esses resultados através de um recurso conhecido como *diagrama de Veen*, conforme a figura abaixo:

Figura 1: ***Diagrama de Veen*** **– união de dois conjuntos**

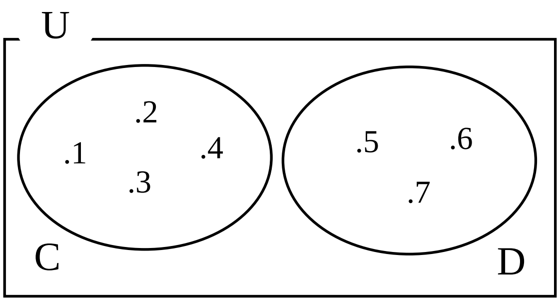


Fonte: Elaborada pelo autor

No caso exposto acima os conjuntos compartilham os elementos 4 e 5, ou seja, há *intersecção*. Mas há casos em que isso não ocorre. Então, se C = {1, 2, 3, 4} e D = {5, 6, 7}, segue que $C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $C \cap D = \{\ \}$ ou $C \cap D = \emptyset$.

Analogamente, podemos exibir esses resultados pelo *diagrama de Veen*, conforme a figura abaixo:

Figura 2: ***Diagrama de Veen*** **– união de dois conjuntos disjuntos**



Fonte: Elaborada pelo autor

Por tratar do *Princípio multiplicativo*, que é um método de contagem, este trabalho adotará como conjunto universo o conjunto dos números naturais, cuja estrutura é baseada em 4 axiomas de autoria do matemático italiano Giuseppe Peano, a saber:

i. Todo número natural tem um único sucessor;

ii. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

iii. Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro;

iv. Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$.). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Este último axioma é conhecido como *Axioma da Indução* (ou Princípio da Indução Finita) e apresenta-se como uma forte ferramenta para demostrar teoremas relativos a números naturais. Não por acaso, é instrumento basilar no primeiro ano do curso de Mestrado Profissional em rede nacional, PROFMAT, em suas diversas disciplinas, bem como em todo o andamento do curso.

A propósito, segue um exemplo de aplicação desse axioma, que foi objeto de avaliação de estudantes do referido curso de mestrado na edição 2019.1 do Exame Nacional de Qualificação – ENQ, que é um exame realizado duas vezes por ano e que objetiva avaliar a qualidade dos cursos ofertados nos diversos polos de atuação do PROFMAT no país. Tal exame tem caráter eliminatório, caso o (a) cursista na obtenha aprovação em uma das aplicações.

(ENQ – 2019.1) Prove, usando indução, que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133 para qualquer número natural *n*.

<u>Solução:</u>

Para $n = 1$, temos $11^{1+2} + 12^{2.1+1} = 11^3 + 12^3 = 1331 + 1728 = 3059 = 23.133$, que é um múltiplo de 133.

Suponha que para certo $k \geq 1$ tenhamos $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ divisível por 133. Devemos provar que $11^{(k+1)+2} + 12^{2(k+1)+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3}$ é divisível por 133, como segue:

$$\begin{aligned} 11^{k+3} + 12^{2k+3} &= 11^{k+2} . 11 + 12^{2k+1} . 12^2 \\ &= 11^{k+2} . 11 + 12^{2k+1} . 144 \\ &= 11^{k+2} . 11 + 12^{2k+1} . (133 + 11) \\ &= 11 . 11^{k+2} + 133 . 12^{2k+1} + 11 . 12^{2k+1} \\ &= 11 . (11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 . 12^{2k+1}. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, 133 divide $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ e, como a segunda parcela também é divisível por 133, segue que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133.

Portanto, pelo princípio da indução, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133 para qualquer *n* natural.

3.1. O Princípio multiplicativo (ou Princípio Fundamental da Contagem - PFC)

Segundo Carvalho (2015), “problemas de contagem são, muitas vezes, considerados difíceis entre alunos e professores, apesar de as técnicas matemáticas necessárias serem bastante elementares”.

Nas palavras do eminente estudioso, estudar e ensinar contagem é uma tarefa pouco simpatizada. Entre os métodos de contagem abordados nas salas de aula, o *Princípio Multiplicativo*, cuja definição é a que segue, é aquele que exerce maior destaque.

Definição: Se uma decisão D_1 pode ocorrer de *m* formas distintas e uma decisão D_2 pode ocorrer de *n* formas distintas, então a decisão D_1, seguida da decisão D_2, pode ocorrer de $m \,.\, n$ formas distintas. De modo geral, se uma decisão D_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, ..., n$, então essas n decisões podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_n$ maneiras diferentes.

Morgado nos ensina que, em se tratando da aplicação do *Princípio multiplicativo*, devemos nos colocar no lugar de quem vai decidir e que decisões mais restritas devem ser tomadas com prioridade. Em face de seu primor, essa informação não pode ser omitida ao abordar o PFC.

Diante dessa definição e do que preconiza a BNCC, vejamos, de forma gradativa, alguns exemplos de situações que abordam as habilidades nas quais permeiam a utilização desse princípio.

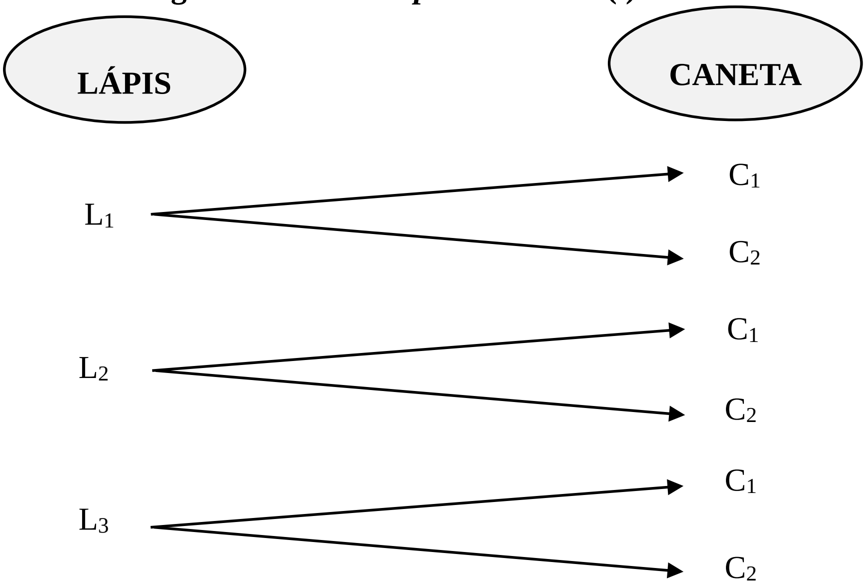
Exemplo 1. Entre os componentes de um *kit* escolar constam um lápis e uma caneta. Se há 3 modelos de lápis e 2 de caneta à disposição, quantas são as variações de *kits* contendo um lápis e uma caneta?

<u>Comentário:</u>

Na tentativa de obter uma reposta à situação apresentada, os (as) aprendizes podem, de forma impulsiva, imaginarem que a totalidade de lápis e canetas disponíveis deve fazer parte de cada *kit* e, assim, emitir a soma 3 + 2 = 5 como resposta. Podem, inclusive, se perguntarem se a omissão dos outros itens do "pacote" não seria fator impeditivo para se chegar ao resultado pretendido. Por fim, quem consolidou o aprendizado, certamente entenderá que cada um dos modelos de lápis deverá formar par com cada um dos modelos de caneta e exibir a sua solução de uma das formas a seguir:

a) por meio de um diagrama de árvore.

Figura 3: *Árvore de possibilidades* (*i*)



Fonte: Elaborada pelo autor

Agrupamentos: L_1C_1, L_1C_2, L_2C_1, L_2C_2, L_3C_1 e L_3C_2. Total: 6.

b) por meio de análise direta (*princípio multiplicativo*)

- 3 possibilidades de escolha para o lápis;
- 2 possibilidades de escolha para a caneta;
- Total: 3 *x* 2 = 6 possibilidades.

c) por meio de uma tabela.

Figura 4: Tabela de resultados (*i*)

Modelos de LÁPIS	Modelos de CANETA	Pares: LÁPIS/CANETA
L_1	C_1	L_1C_1, L_1C_2, L_2C_1, L_2C_2 L_3C_1 e L_3C_2.
L_2	C_2	
L_3	-	**Total: 6**

Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 2. Para um desfile cívico uma turma de 5º ano foi organizada em disposição retangular. Se foi possível formar, sem sobra, 5 filas com 7 componentes cada uma quantas pessoas há nessa turma?

<u>Comentário:</u>

Como no exemplo anterior, na tentativa de obter uma reposta à situação é possível que, de forma prematura, some-se os dois valores obtendo como resultado o valor 7 + 5 = 12. Porém, quem entendeu que a disposição retangular corresponde a um agrupamento de objetos cuja contagem pode ser obtida multiplicando o número de filas pelo número de componentes, ou o contrário encontrou como possíveis caminhos de sucesso na resolução:

a) por meio de uma tabela.

Figura 5: Tabela de resultados (*ii*)

Fila 1	Fila 2	Fila 3	Fila 4	Fila 5
a1	b1	c1	d1	e1
a2	b2	c2	d2	e2
a3	b3	c3	d3	e3
a4	b4	c4	d4	e4
a5	b5	c5	d5	e5
a6	b6	c6	d6	e6
a7	b7	c7	d7	e7

Fonte: Elaborada pelo autor

b) por meio de análise direta *(princípio multiplicativo*)

- 5 possibilidades de escolha para a fila;
- 7 possibilidades de escolha de um lugar na fila;
- Total: 5 *x* 7 = 35 possibilidades.

O *Princípio multiplicativo* é também um potente mecanismo auxiliar no estudo de Probabilidade.

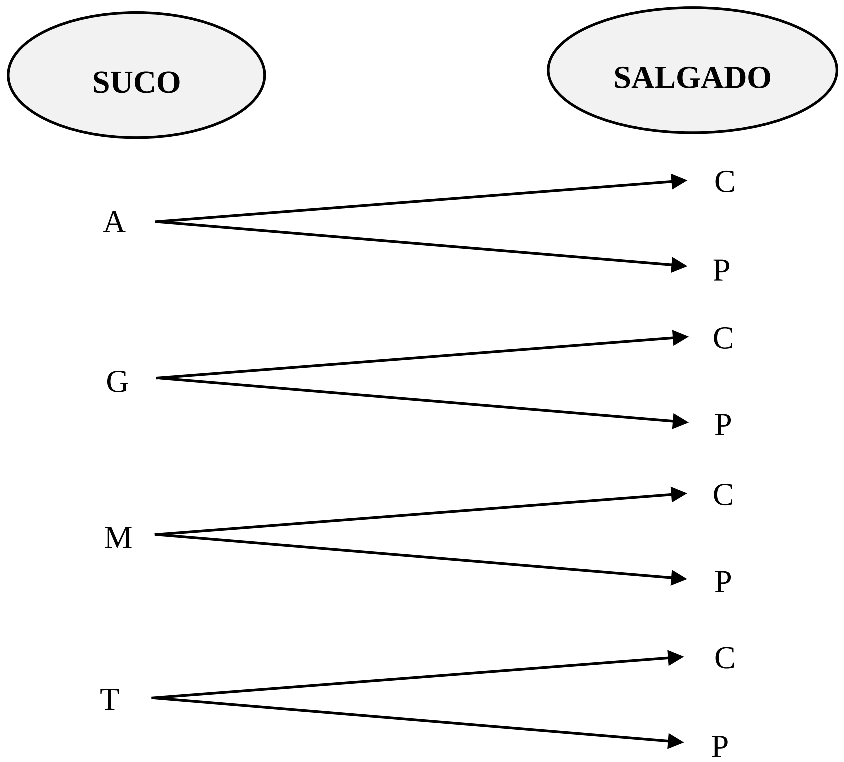
Vejamos alguns exemplos do uso desse princípio na resolução de problemas de probabilidade.

Exemplo 3. Um restaurante possui em seu cardápio 4 opções de suco (acerola, goiaba, manga e tamarindo) e 2 opções de salgado (coxinha e pastel). Uma pessoa escolheu um suco e um salgado, qual a probabilidade de que haja suco de manga em sua escolha?

<u>Solução:</u>

Denotando por *S* o espaço amostral do experimento; os sucos por (A), (G), (M) e (T), respectivamente; e os salgados por (C) e (P), respectivamente, podemos obter os resultados através da árvore de possibilidades, assim:

Figura 6: ***Árvore de possibilidades* (*ii*)**



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, o espaço amostral é S = {AC, AP, GC, GP, MC, MP, TC, TP}, donde segue que $n(S) = 8$. Daí, denotando por E o evento de interesse, a saber: escolher um suco de manga e um pastel, temos:

E = {MC, MP} e $n(E) = 2$.

Logo, pela probabilidade de Laplace (razão entre os resultados favoráveis e os resultados possíveis), o resultado procurado é $p = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ = 0,25 = 25%.

<u>Solução alternativa (*princípio multiplicativo*):</u>

- ✓ Número de elementos do espaço amostral: $n(S) = 4 \text{ x } 2 = 8$.
- ✓ Número de elementos do evento: $n(E) = 1 \text{ x } 2 = 2$.

Igualmente, pela probabilidade de Laplace, o resultado procurado é:

$p = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ = 0,25 = 25%.

Exemplo 4. Em um cesto há 3 meias azuis e 5 meias verdes. Retirando-se sucessivamente e sem reposição duas dessas meias, qual é a probabilidade de a primeira ser verde e a segunda ser azul?

<u>Solução:</u>

- ✓ Evento V: a primeira meia é verde. Logo, $P(V) = \frac{5}{8}$;
- ✓ Evento A: a segunda meia é azul.

Observe que, ao retirar uma meia que, espera-se ser verde, restam no cesto apenas 7 meias, das quais 3 são azuis. Ou seja, o espaço amostral foi alterado e, consequentemente a probabilidade de se retirar uma meia azul foi alterada. Isso significa que a segunda retirada depende da primeira. Ou seja, temos a probabilidade condicional de A dado que V já ocorreu.

Em símbolos temos, $p(A/V) = \frac{3}{7}$.

Portanto, pelo *princípio multiplicativo*, a probabilidade dos eventos <u>dependentes</u> é $p(V \cap A) = p(V) \text{ x } p(A/V) = \frac{5}{8} \text{ x } \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$.

<u>Solução alternativa (*princípio multiplicativo*):</u>

- ✓ Número de elementos do espaço amostral: $n(S) = 8 \text{ x } 7 = 56$.

- ✓ Número de elementos do evento: $n(E) = 5 \times 3 = 15$.

Logo, pela probabilidade de Laplace, $p = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{15}{56}$.

Exemplo 5. Retira-se 2 cartas de um baralho de 52 cartas, com reposição. Vamos calcular a probabilidade de a primeira ser uma dama e a segunda ser um 10.

<u>Solução:</u>

- ✓ Evento A: a 1ª carta é uma dama. Logo, $p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
- ✓ Evento B: a 2ª carta é um 10. Logo, $p(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Veja que, como houve reposição o espaço amostral não foi alterado pela ocorrência do evento A, não afetando a probabilidade de ocorrência do evento B.

Portanto, pelo *princípio multiplicativo*, a probabilidade dos eventos <u>independentes</u> é $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$.

<u>Solução alternativa (*princípio multiplicativo*):</u>

- ✓ Número de elementos do espaço amostral: $n(S) = 52 \times 52 = 2704$.
- ✓ Número de elementos do evento: $n(E) = 4 \times 4 = 16$.

Logo, pela probabilidade de Laplace, $p = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{16}{2704} = \frac{1}{169}$.

3.2. Fórmulas fechadas

O *Princípio multiplicativo* é a ferramenta essencial para a construção de novas ideias e conceitos na *Análise combinatória*. Como fruto da eficiente aplicação desse princípio temos as chamadas "fómulas fechadas", que servem para simplificar operações e resoluções de certos problemas de contagem. As principais fórmulas fechadas conhecidas e ensinadas na educação básica são a *Permutação simples*, a *Permutação com repetição*, a *Permutação Circular*, o *Arranjo simples* e a *Combinação simples*.

3.2.1. Permutação simples

Permutar significa trocar de posição. Dito isso, define-se *Permutação simples* de n objetos distintos como qualquer agrupamento ordenado desses n objetos.

Para $n \geq 1$, o número de permutações simples de n objetos é representado por P_n e calculado a partir da relação $P_n = n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \,.\, (n-3) \,.\, \cdots \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = n!$

O número $n!$ é denominado "*n* fatorial" ou "fatorial de *n*" e representa a multiplicação do número natural *n* por todos os números naturais menores do que ele.

À luz do *Princípio multiplicativo*, essa aplicação nada mais é do que a tomada de *n* decisões consecutivas na escolha de *n* objetos para ocupar *n* lugares.

Como exemplo, temos a ocupação de 6 vagas por 6 automóveis em um estacionamento.

O *Princípio multiplicativo* nos garante que, nas escolhas sucessivas, há 6 vagas disponíveis para o 1º automóvel ocupar, 5 para o 2º automóvel, 4 para o 3º automóvel, 3 para o 4º automóvel, 2 para o 5º automóvel e 1 para o 6º automóvel. Ou seja, $6 . 5. 4 . 3 . 2 . 1 = 720$ formas distintas para os 6 automóveis ocuparem as 6 vagas.

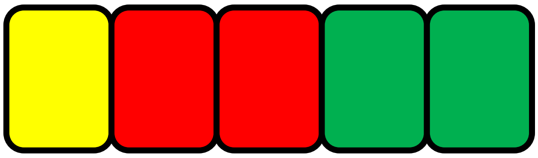
Por outro lado, a fórmula fechada nos lembra que essa operação equivale a $P_6 = 6! = 6 . 5. 4 . 3 . 2 . 1 = 720$, que é a quantidande de maneiras de os 6 automóveis trocarem de posição nas 6 vagas.

3.2.2. Permutação com repetição

Há situações em que os objetos de um conjunto são idênticos, o que modifica a forma de agrupá-los e, consequentemente, muda a quantidade de agrupamentos que se pode obter permutando tais objetos.

Considere um desafio entre dois amigos que consiste em obter a quantidade máxima de ordenações de 5 cartões, sendo 1 amarelo, 2 vermelhos e 2 verdes, conforme a figura a seguir:

Figura 7: Cartões



Fonte: Elaborada pelo autor

Para que um jogador vença o desafio, qual deverá ser a quantidade máxima de ordenações?

Veja que se esses amigos conhecem a permutação simples serão impulsionados a achar que o número de ordenações é $P_5 = 5! = 120$.

Mas observe que a troca de posição entre cartões vermelho, $P_2 = 2!$, e entre cartões verdes, $P_2 = 2!$, não geram agrupamentos diferentes, donde conclui-se que o resultado $P_5 = 5!$ deve ser dividido por $P_2 = 2!$ duas vezes, ou seja, $P_5^{(2,2)} = \frac{5!}{2!\, x\, 2!} = \frac{120}{2\, x\, 2} = \frac{120}{4} = 30$.

O exemplo acima nos leva, sem dificuldade, ao fato de que, para um conjunto de *n* elementos, com alguns deles sendo idênticos, se n_i é o números de elementos iguais a a_i podemos calcular o número de permutações desses elementos através da fórmula fechada:

$$P_n^{(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k)} = \frac{n!}{n_1!,\ n_2!,\ \cdots,\ n_k!}$$

Agora, perceba que se a_i é único no conjunto, então $n_i = 1$ e pode ser omitido na expressão acima, já que $n_i! = 1! = 1$. Em outras palavras, só é necessário levar para o denominador da expressão os fatoriais relativos às repetições dos elementos, conforme exemplo que segue.

Exemplo 6. Anagramas são palavras, com ou sem sentido, que podemos formar com as letras de certa palavra, geralmente conhecida. Dessa forma, quantos anagramas pode-se formar com as letras da palavra MATEMÁTICA?

<u>Solução:</u>

Veja que das $n = 10$ letras, a letra M aparece 2 vezes, a letra A aparece 3 vezes, a letra T aparece 2 vezes e as demais aparecem só 1 vez.

Pelo exposto, o número desses anagramas é:

$$P_{10}^{(2,\ 3,\ 2)} = \frac{10!}{2!\ x\ 3!\ x\ 2!} = \frac{10\ x\ 9\ x\ 8\ x\ 7\ x\ 6\ x\ 5\ x\ 4\ x\ 3!}{2\ x\ 3!\ x\ 2} = 15\ 120$$

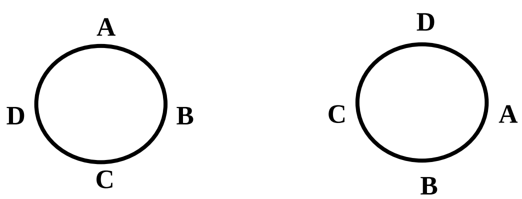
Importa lembrar que quando se fala de anagramas não se leva em consideração a acentuação gráfica das letras, como ocorre com o segundo A da palavra MATEMÁTICA.

3.2.3. Permutação circular

Alguns poucos autores de livros didáticos para o Ensino Médio chamam a atenção para um tipo de permutação conhecido como *Permutação circular*.

Como exemplo desse tipo de permutação podemos citar a disposição de 4 pessoas, A, B, C e D em torno de uma mesa redonda. A figura abaixo mostra que as disposições ABCD e DABC são iguais, pois a segunda pode ser obtida a partir de um giro em sentido horário da mesa ocupada, o que não muda a disposição relativa entre as pessoas.

Figura 8: Disposição das pessoas na mesa



Fonte: Elaborada pelo autor

Diante disso, se apenas a escolha do lugar à mesa para cada pessoa fosse levada em consideração, o problema se resumiria a uma *permutação simples* de 4 elementos, ou seja, $P_4 = 4! = 24$.

Mas, como vimos que rotações da mesa levam a disposições iguais devemos considerar esse fato. Ou seja, são possíveis 4 rotações da mesa, donde segue que o número de permutações circulares é 24/4 = 6.

Tal entendimento não muda pela quantidade de elementos a se dispor sobre a mesa redonda (círculo).

Ou seja, se para 4 elementos temos $(PC)_4 = \frac{4!}{4} = \frac{24}{4} = 6 = 3! = (4 - 1)!$, então para n elementos temos $(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n - 1)!$.

3.2.4. Arranjo simples

Além de apenas trocar de posição os elementos de um conjunto para obter um agrupamento, como ocorre na *permutação simples*, podemos formar agrupamentos de p elementos escolhidos entre os n elementos de certo conjunto, sendo p e n números naturais, com $p \leq n$. Cada agrupamento é diferente do outro tanto pela <u>ordem</u> quanto pela <u>natureza</u> de seus elementos.

Assim, estamos diante de um tipo de agrupamento que remete a uma fórmula fechada conhecida como *Arranjo simples* de n elementos tomados p a p, denotada por A_n^p, ou ainda por $A_{n,p}$.

Pelo *Princípio multiplicativo*, escolher p elementos em um conjunto de n possíveis, ordenadamente, significa que há n possibilidades para a 1ª escolha, $n - 1$ possibilidades para a 2ª escolha, n – 2 possibilidades para a 3ª escolha e, sucessivamente, $n - (p - 1) = n - p + 1$ possibilidades para a p^a (p – ésima) escolha.

Isso equivale a:

$$A_n^p = n \,.\, (n - 1) \,.\, (n - 2) \,.\, (n - 3). \cdots .[n - (p - 1)]$$

Agora veja que essa expressão pode ser, simultaneamente, multiplicada e dividida por $[(n - p) \,.\, (n - p - 1) \,.\, \cdots \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1]$.

Isso equivale a:

$$A_n^p = \frac{n.(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,(n-3)\,.\cdots\,.\,[n-(p-1)]\,.\,[(n-p)\,.\,(n-p-1)\,.\cdots\,.\;3\,.\,2\,.\,1]}{[(n-p).(n-p-1)\,.\cdots\,.\,3\,.\,2\,.\,1]}$$

Mas isso equivale a:

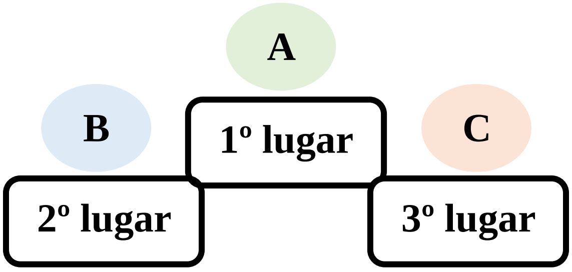
$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Obteve-se então a fórmula fechada para o cáculo do *Arranjo simples* de *n* elementos tomados *p* a *p*.

Como exemplo de aplicação dessa fórmula fechada temos o caso das possibilidades de ocupação do pódio por 3 competidores dos 10 que participam de uma corrida.

Veja que o pódio pode ser ocupado pelos atletas A, B e C, nessa ordem, como mostra a figura:

Figura 9: Formação do pódio



Fonte: Elaborada pelo autor

O *Princípio multiplicativo* garante que que há 10 possibilidades de ocupação do 1º lugar, que uma vez ocupado gera 9 possibilidades de ocupação do 2º lugar, que por sua vez gera 8 possibibilidades de ocupação do 3º lugar, donde segue que há 10 *x* 9 *x* 8 = 720 possibilidades de ocupação dos 3 primeiros lugares.

Já a fórmula fechada do *Arranjo simples* nos dá:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10\ x\ 9\ x\ 8\ x\ 7\ !}{7!} = 10\ x\ 9\ x\ 8 = 720 \text{ possibilidades.}$$

É importante notar que o penúltimo passo nada mais é do que a aplicação direta do *Princípio multiplicativo* para as 3 posições do pódio. Note-se ainda que a divisão de 10! por 7! refere-se à permutação dos 7 parcipantes cujas colocações não causam impacto nos resultados pretendidos, ou seja, que não participarão da permutação, já que só interessam as colocações dos 3 primeiros.

Uma sugestão de aplicação direta da fórmula do *arranjo simples*, apesar de não haver necessidade, já que o problema pode ser resolvido tranquilamente utilizando apenas o *Princípio multiplicativo*, seria “olhar para o número *p* como a quantidade de fatores que aparecerão na multiplicação a partir de *n*, em ordem decrescente”. Assim é possível “saltar” diretamente para o penúltimo passo.

Assim, se $n = 10$ e $p = 3$, os fatores são 10, 9 e 8. Logo, $A_{10}^{3} = 10\ x\ 9\ x\ 8 = 720$ possibilidades.

Muitos livros do Ensino médio trazem equações do tipo $A_x^2 = 12$ e apresentam a seguinte solução:

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 12 \Leftrightarrow \frac{x\ .\ (x-1)\ .\ (x-2)!}{(x-2)!} = 12 \Leftrightarrow x\ .\ (x-1) = 12 \Leftrightarrow x^2 - x = 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 10$$

Calculando o discriminante, obtém-se:

$\Delta = (-1)^2 - 4\ .1\ .\ (-12) = 49$

Daí, temos:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2\ .1} \Rightarrow x_1 = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \text{ (não convém) e } x_2 = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{4\}$.

Agora veja que, ao chegar ao passo $x\ .\ (x - 1) = 12$ basta observar que o número fatorial está definido no campo dos naturais e que $x\ .\ (x - 1)$ são números naturais consecutivos cujo produto vale 12.

Daí, forçadamente, é preciso perceber que $x = 4$ e $(x - 1) = 3$.

3.2.5. Combinação simples

Se tomarmos novamente como exemplo o caso dos 10 atletas referidos no caso do *arranjo simples* e, em vez de classificá-los nas três primeiras posições quiséssemos formar grupos de 3 pessoas, a cada escolha de 3 pessoas para participar do grupo escolheríamos, compusoriamente, as outras 7 pessoas para não participar do grupo.

Mas observe que, assim como a ordem dos atletas que não participarão grupo não importa, a ordem dos que participarão também não importa, já que é uma equipe, ou seja, um conjunto {A, B, C} de três atletas e não uma sequência de atletas do tipo ABC.

Assim, a quantidade de grupos de 3 pessoas escolhidas entre as 10 seria obtida fazendo $\frac{10!}{3!\ .7!} = \frac{10\ x\ 9\ x\ 8\ x\ 7\ !}{6\ .\ 7!} = \frac{720}{6} = 120$

É fácil notar que essa aplicação do *Princípio multiplicativo* é válida, nessas condições, para quaisquer n e p naturais, com $p \leq n$, uma vez que sempre que se escolhe p dos n elementos para participar do agrupamento também se escolhe $n - p$ elementos para não participar.

Portanto, essa abordagem sugere um tipo de agrupamento conhecido como *Combinção simples* de *n* elementos tomados *p* a *p*, e denotada por C_n^p, ou ainda por $C_{n,p}$, cuja fórmula fechada é:

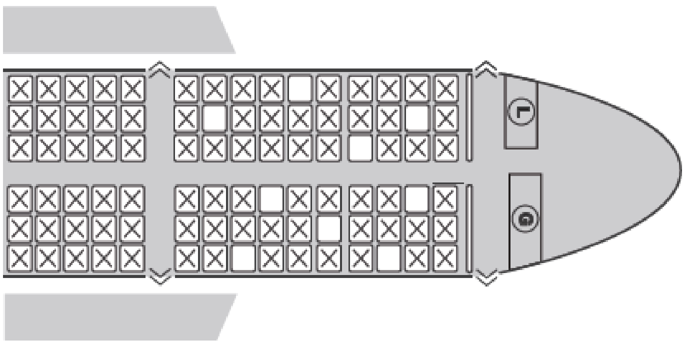
$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Nessas condições, a resolução do problema se resumiria a uma combinação de 10 tomados 3 a 3, ou seja, $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$.

3.3. Fórmulas fechadas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)

Ao se discutir a conveniência do ensino das fórmulas fechadas parece necessário um olhar sobre o ENEM, que atualmente é o maior portal de ingresso no Ensino superior do Brasil já que, em diversas ocasiões, aborda em suas questões o uso de tais fórmulas, o que estimula e praticamente obriga a memorização delas, como se observa nas seguintes questões:

(ENEM 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase todo lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

(A) $\frac{9!}{2!}$ (B) $\frac{9!}{7!\,x\,2!}$ (C) 7!

(D) $\frac{5!}{2!}\,x\,4!$ (E) $\frac{5!}{4!}\,x\,\frac{4!}{3!}$

__**Comentário:**__

Pelo *Princípio multiplicativo,* o número de formas distintas de escolher sucessivamente os sete os 9 lugares é 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3. Mas veja que seguindo esse caminho o(a) candidato(a) poderia não perceber que isso equivale a: $\frac{9\,x\,8\,x\,7\,x\,6\,\mathrm{x}\,5\,x\,4\,x\,3\,x\,2!}{2!} = \frac{9!}{2!}$

Mas, pela fórmula fechada, isso é um *arranjo simples* de 9 tomados 7 a 7, como segue:

$$A_{10}^3 = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!}$$

(ENEM 2020) Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

(A) 9!

(B) 4! 5!

(C) 2 *x* 4! 5!

(D) $\frac{9!}{2!}$

(E) $\frac{4!\,5!}{2!}$

<u>Comentário:</u>

Pelas condições do problema, os anagramas devem começar por consoante(*c*) para que se tenha sequências do tipo *cvcvcvcv*, com a intercalação sugerida. De outro modo isso não seria possível.

Assim, o *princípio mulplicativo* nos garante que a quantidade de formas de escolher consoantes e vogais, segundo a sequência acima é (5 *x* 4 *x* 4 *x* 3 *x* 3 *x* 2 *x* 2 *x* 1) ÷ 2, pois há duas consoantes T e a mudança de ordem entre elas não gera anagramas diferentes. Isso equivale a $\frac{4!\,5!}{2!}$.

Por outro lado, as fórmulas fechadas da *permutação simples* e da *permutação com repetição* nos dão como resposta $P_4 \,.\, P_5^2 = 4!\ x\ \frac{5!}{2!} = \frac{4!\,5!}{2!}$

(ENEM 2021) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

(A) $\frac{6!}{4!\,.\,2!}\ x\ \frac{15!}{10!\,.\,5!}$

(B) $\frac{6!}{4!\,.\,2!} + \frac{15!}{10!\,.\,5!}$

(C) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$

(D) $\frac{6!}{2!}\ x\ \frac{15!}{5!}$

(E) $\frac{21!}{7!\,.\,14!}$

<u>Comentário:</u>

Nessa questão o elaborador novamente chama a atenção para o uso da fórmula da *combinação simples*, aplicada duas vezes juntamente com o *Princípio multiplicativo*, para a obtenção da resposta desejada, dessa forma:

- ✓ Número de maneiras de escolher 2 tecidos: $C_6^2 = \dfrac{6!}{2!\,.\,4!}$.
- ✓ Número de maneiras de escolher 5 pedras: $C_{15}^5 = \dfrac{15!}{5!\,.\,10!}$.
- ✓ Número de maneiras de escolher todos os materiais da fantasia:

$$\frac{6!}{2!\,.\,4!}\,x\,\frac{15!}{5!\,.\,10!} = \frac{6!}{4!\,.\,2!}\,x\,\frac{15!}{10!\,.\,5!}$$

Veja que a aplicação direta *Princípio multiplicativo* também leva ao resultado pretendido, mas a fórmula pronta parece ser o caminho mais curto para a obtenção da resposta para a questão.

(ENEM 2022) Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

(A) $9\,x\,\dfrac{6!}{(6-2)!}$

(B) $9\,x\,\dfrac{6!}{(6-2)!\,x\,2!}$

(C) $9\,x\,\dfrac{4!}{(4-2)!\,x\,2!}$

(D) $9\,x\,\dfrac{2!}{(2-2)!\,x\,2!}$

(E) $9\,x\left(\dfrac{8!}{(8-2)!\,x\,2!} - 1\right)$

<u>Comentário:</u>

A questão pode ser resolvida através do *Princípio multiplicativo*, pois há 9 possibilidades de escolha do andar, 6 possibilidades de escolha para o 1ª apartamento e 5 possibilidades de escolha para o 2º apartamento, já que só não interessam os apartamentos 7 e 8, conforme o enunciado. Porém deve-se observar que a ordem de escolha dos apartamentos, ou seja, comprar o apartamento 1 e depois o 2 é equivalente a comprar o 2 e depois o 1, o que implica, conforme exposto em resultados anteriores, na expressão $9\ x\ \frac{6\ x\ 5}{2}$.

Mas veja que para a surpresa do(a) candidato(a) que optou por esse método de resolução essa resposta não parece compatível com as apresentadas nas opções. Daí, é preciso percorrer um caminho mais longo e escrever:

$$9\ x\ \frac{6\ x\ 5}{2} = 9\ x\ \frac{6\ x\ 5\ x\ 4!}{2!\ x\ 4!} = 9\ x\ \frac{6\ x\ 5\ x\ 4!}{2!\ \text{x}\ 4!} = 9\ x\ \frac{6!}{(6-2)!\ x\ 2!} = 9\ x\ C_6^2$$

Ou seja, conhecida a fórmula da *combinação simples*, o trabalho na expressão acima revela-se mais rápido da direita para a esquerda.

4. APLICAÇÕES

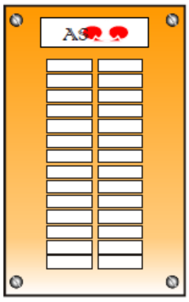
4.1. Ensino Fundamental

Alguns estados, como o Ceará e São Paulo, por exemplo, possuem sistemas de avaliação em larga escala para avaliar a proficiência de seus estudantes. Esses sistemas são conhecidos como SPAECE (Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará) e SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), respectivamente.

No Ceará o SPAECE avalia, geralmente, o 2º ano do Ensino fundamental (em Leitura), além do 5º e o 9º anos (em Língua portuguesa e Matemática); e o 3 º ano do Ensino médio (em Língua portuguesa e Matemática).

Esses sistemas de avaliação corroboram a importância do ensino do princípio multiplicativo ao abordarem o tema em suas questões, como ocorre em duas inserções no 4º ano do ensino fundamental na mesma edição de 2007 do SARESP, exibidas a seguir.

(SARESP 2007 – 4º ano EF) O painel dos botões com os números dos andares no elevador de um edifício está organizado em 2 colunas e 14 linhas, conforme a figura ao lado. Quantos botões têm neste painel?



(A) 28 (C) 16

(B) 18 (D) 14

Comentário:

Nessa questão há margem para o (a) estudante fazer a contagem botão a botão, o que certamente seria uma ação natural de quem não consolidou o conhecimento do método de contagem em comento. Já quem o solidificou, o aplicará, também naturalmente, obtendo como resposta 2 *x* 14 = 28.

Observe que os distratores, que são as opções falsas, contemplam resultados como 14 + 2 = 16, além de 18 e 14, que pretendem captar respostas de estudantes que não dominam a habilidade.

(SARESP 2007 – 4º ano EF) Lu organizou um desfile. Para isso, juntou algumas peças de roupas, como mostra a tabela a seguir:

Vestidos	Jaquetas
Florido	Jeans
Preto	Branca
Branco	–

De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir utilizando um vestido e uma jaqueta?

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6

Comentário:

Na tentativa de obter uma reposta plausível é possível que, de forma precipitada, some-se os dois valores obtendo como resultado o valor 3 + 2 = 5. Todavia, quem entendeu que a formação de um par camiseta/jaqueta consiste em um agrupamento de dois objetos, cuja contagem pode ser alcançada multiplicando o número de objetos do conjunto dos vestidos pelo número de objetos do conjunto das jaquetas, aplicou o *princípio multiplicativo*, observando que há 3 possibilidades de escolha para o vestido e 2 possibilidades de escolha para a jaqueta, obtendo, assim, 3 *x* 2 = 6 como resposta para o problema.

Observe que os distratores contemplam resultados como 2, o que detecta que foram contadas apenas as jaquetas, além de 3, o que mostra que apenas os vestidos foram contados.

4.2. Ensino Médio

4.2.1. Experiência de sala de aula

A fim de coletar informações sobre a compreensão e uso do *Princípio multiplicativo* para a resolução de problemas de nível médio, no dia 17/10/2023 foi aplicado um pequeno teste contendo 4 questões: uma do SARESP – 2007 (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), uma da OBMEP – 2022 (Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas e Privadas), uma do Concurso Corpo de Bombeiros do Amazonas 2021 e uma do ENEM 2022 (Exame Nacional do Ensino Médio) com uma amostra de 10 estudantes do 3º ano do Ensino médio da Escola de Ensino Médio Tomaz Pompeu de Sousa

Brasil, situada em Acaraú - Ce, onde o autor deste trabalho atua como Professor de Matemática na condição de servidor público estadual.

Tais estudantes fazem parte de um grupo de estudos voltado para o ENEM e Vestibulares e o único o pré-requisito cognitivo para a participação do teste foi ter estudado o tema no 2º ano do ensino médio. Foi feito o convite com a autorização do núcleo gestor da escola.

A escolha deste portifólio de questões teve como objetivo atender a um dos propósitos deste trabalho, que é verificar o nível de conhecimento de nossos(as) estudantes diante dos mais diversos tipos de exame aplicados no País.

Seguem as questões do teste, os comentários e as resoluções apresentadas.

Questão 1: (SARESP 2007 – 3º ano EM) Sejam *Lucianópolis*, *Garça* e *Guaimbê*, três cidades do Estado de São Paulo. Se existissem 3 estradas ligando *Lucianópolis-Garça*, 5 ligando *Garça-Guaimbê* e 3 ligando *Lucianópolis-Guaimbê*, de quantas maneiras distintas uma pessoa poderia viajar de *Lucianópolis* a *Guaimbê*?

(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18

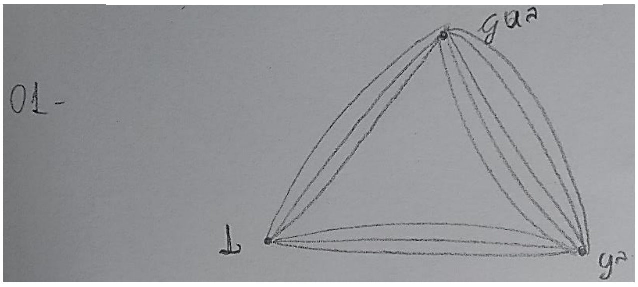
Comentário:

Uma ação esperada na resolução dessa questão seria a soma 3 + 5 + 3 = 11, porém o(a) aluno(a) iria perceber que tal resposta não satisfaz a nenhuma das alternativas da questão. O elaborador poderia ter optado por essa resposta como distrator, mas possivelmente não quis induzir ao erro.

Mas a leitura atenta levará à irrefutável compreensão de que é possível viajar diretamente de *Lucianópolis* a *Guaimbê* por qualquer uma das 3 estradas disponíveis, ou ainda viajar de *Lucianópolis* a *Guaimbê* passando por *Garça*, que pode ocorrer, pelo PFC, de 3 *x* 5 = 15 maneiras distintas. Logo, uma pessoa poderia viajar de *Lucianópolis* a *Guaimbê* de 3 + 15 = 18 maneiras distintas.

RESOLUÇÕES

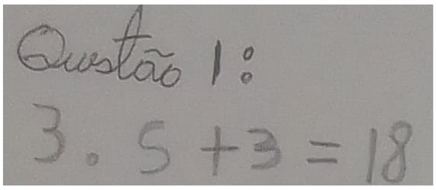
Figura 10: Questão 1 – Aluna A



Fonte: Acervo do autor

A aluna A apresentou esse esboço como resolução, mas parou por aí, aparentando ter compreendido parcialmente o problema.

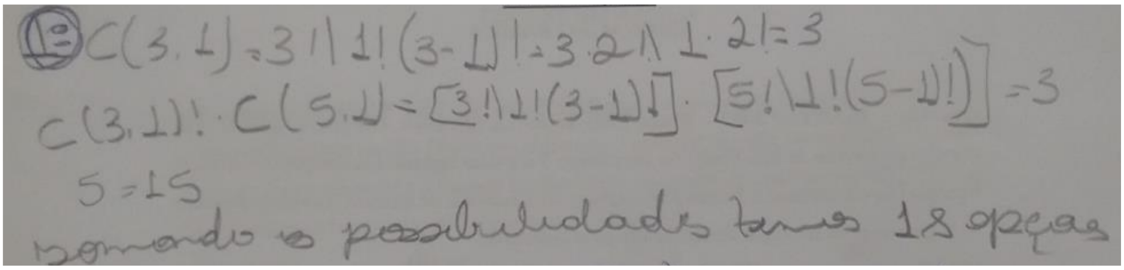
Figura 11: Questão 1 – Aluno B



Fonte: Acervo do autor

O aluno B expôs essa resolução, demonstrado compreensão e habilidade para resolver corretamente o problema proposto. Omitiu eventual processo de resolução.

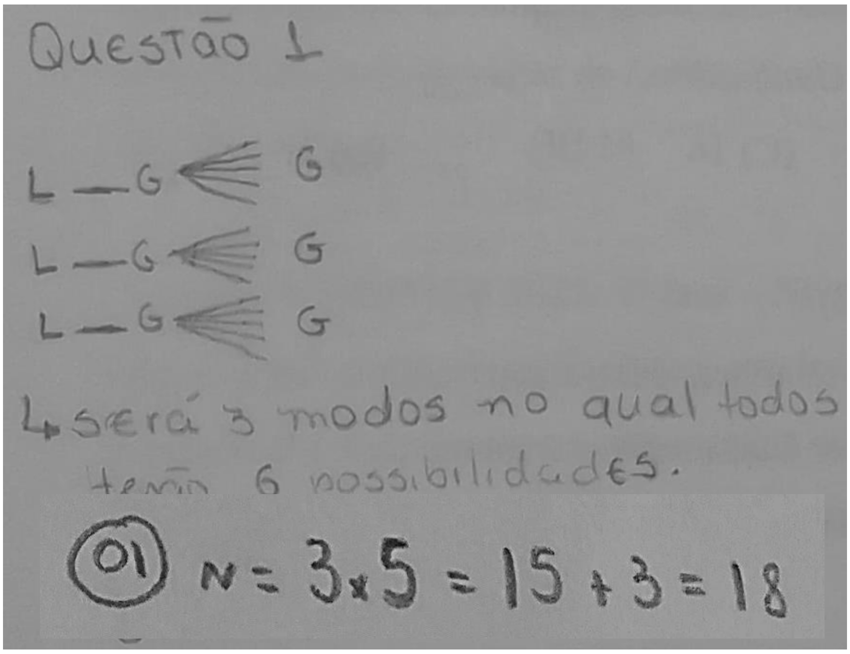
Figura 12: Questão 1 – Aluno C



Fonte: Acervo do autor

A aluna C expressou esse resultado razoalvelmente confuso, porém com o a resposta correta.

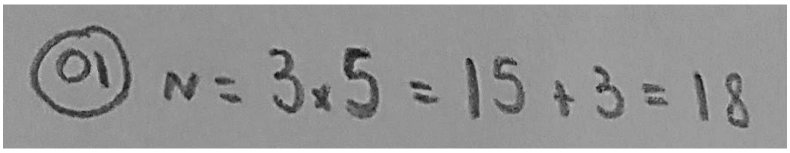
Figura 13: Questão1 – Aluna D



Fonte: Acervo do autor

A aluna D emitiu uma resposta correta através de um raciocício equivocado.

Figura 14: Questão 1 – Aluno E

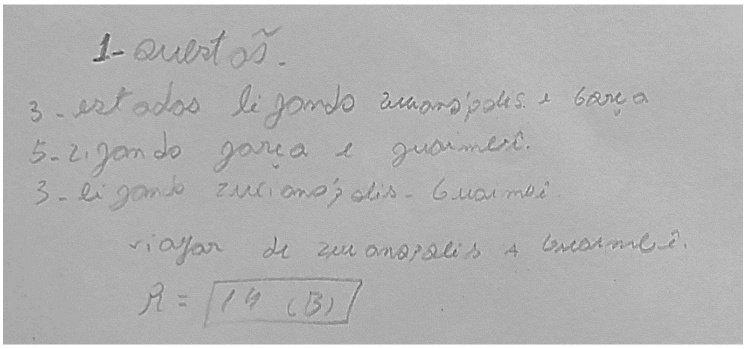


01 N = 3x5 = 15 + 3 = 18

Fonte: Acervo do autor

O aluno E apresntou uma resolução correta, apesar de equívocos com a simbologia matemática. Omitiu processos.

Figura 15: Questão 1 – Aluno F

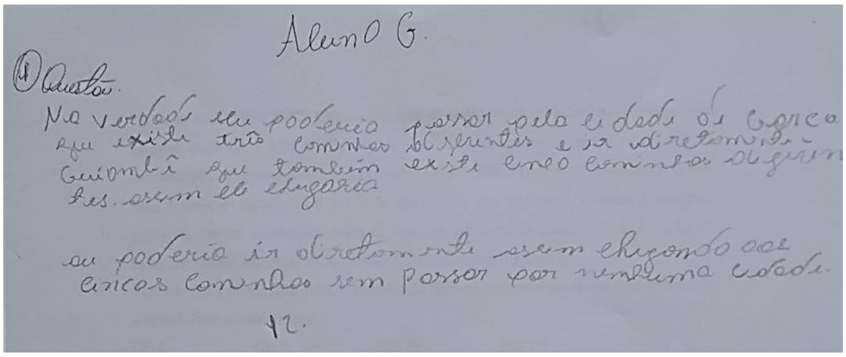


1- questõ.
3 - estados ligando zucianópolis e Garça
5 - ligando garça e guaimbê.
3 - ligando zucianópolis - Guaimbê.
viajar de zucianópolis a Guaimbê.
R = 14 (B)

Fonte: Acervo do autor

O aluno F efetuou as somas 3 + 5 = 8, 3 + 3 = 6 e, em seguida, 8 + 6 = 14, demostrando uma interpretação equivocada do problema, ou ainda, que não domina o princípio multiplicativo.

Figura 16: Questão 1 – Aluno G

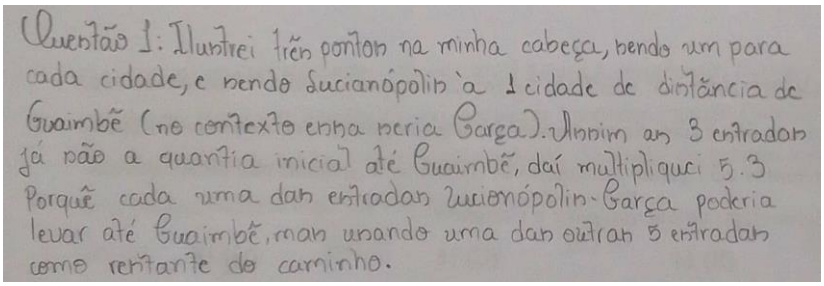


Aluno G.
1 Questão
Na verdade eu poderia passar pela cidade de Garça que existe três caminhos diferentes e ia diretamente Guaimbê que também existe cinco caminhos diferentes. assim ele chegaria
ou poderia ir diretamente assim chegando aos cincos caminhos sem passar por nenhuma cidade.
12.

Fonte: Acervo do autor

O aluno G demonstrou compreensão parcial do problema e emitiu o valor 12 como resposta.

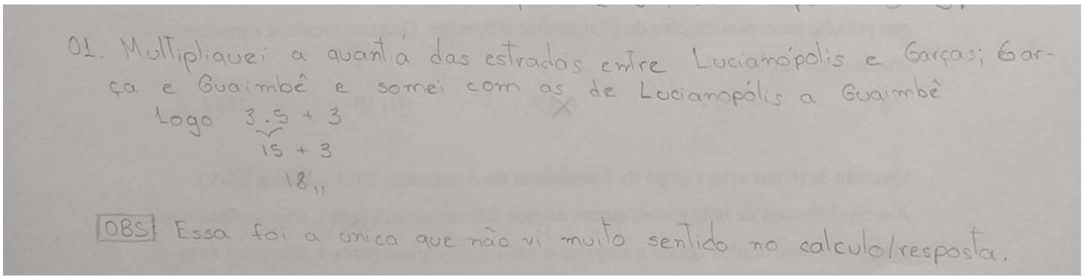
Figura 17: Questão 1 – Aluno H



Questão 1: Ilustrei três pontos na minha cabeça, sendo um para cada cidade, e sendo Sucianópolis à 1 cidade de distância de Guaimbê (no contexto essa seria Garça). Assim as 3 estradas já são a quantia inicial até Guaimbê, daí multipliquei 5.3 Porquê cada uma das estradas Lucianópolis-Garça poderia levar até Guaimbê, mas usando uma das outras 5 estradas como restante do caminho.

O aluno H apresentou um bom raciocício, porém que conduziu a uma resposta parcialmente correta. Possivelmente se predeu na interpretação.

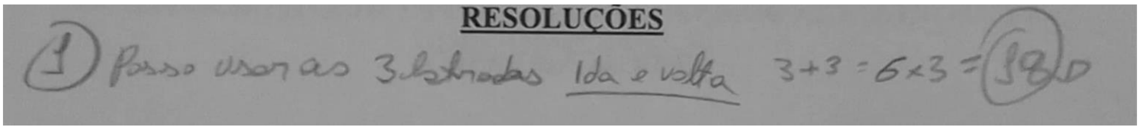
Figura 18: Resolução da Questão 1 – Aluna I



Fonte: Acervo do autor

A aluna I emitiu uma resposta correta a partir de um raciocínio correto, mas revelou ter dúvida sobre o processo de resolução. Possivelmente ela esperava obter o resultado efetuando uma única operação.

Figura 19 : Questão 1 – Aluno J



Fonte: Acervo do autor

O aluno J externou uma resposta correta através de um raciocínio equivocado. Demonstrou compreensão parcial do problema, o que ficou muito claro quando considerou os percursos de ida e volta.

A análise das resoluções dessa questão evidencia o baixo domínio do *princípio multiplicativo* por estudantes nesse nível de ensino, já que apenas 3 de 10, ou seja, 30% desses estudantes emitiram resoluções plenamente satisfatórias.

Questão 2: (OBMEP 2022: 1ª fase – Nível 3)

Um professor de educação física precisou escolher, dentre seus alunos, uma equipe formada por dois meninos e uma menina ou por duas meninas e um menino. Ele observou que poderia fazer essa escolha de 25 maneiras diferentes. Quantos meninos e meninas são alunos desse professor?

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 10 (E) 25

<u>Comentário:</u>

Essa questão exige uma maior apropriação do *princípio multiliplicativo* na resolução de problemas, além de lúcida definição de decomposição, já que se conhece o número total de escolhas e pretende-se obter os valores iniciais que levaram a tal resultado.

Uma forma plausível de tentar uma solução para o que se propõe seria arbitrar as quantidades de meninos e meninas e fazer os agrupamentos. Para isso, é forçoso pensar que esses valores devem ser, individualmente, maiores do que ou iguais a 2, pelas condições do enunciado. Além disso, não podem ser ambas iguais a 2, já que os critérios de formação das equipes somente podem ser obedecidos mediante as seguintes composições de meninos (*m*) e meninas (*n*):

- Equipes tipo A: um menino e duas meninas: (m_1, n_1, n_2) e (m_2, n_1, n_2);
- Equipes tipo B: uma menina e dois meninos: (n_1, m_1, m_2) e (n_2, m_1, m_2).

No caso exposto acima, em que m_1 e m_2, n_1 e n_2 representam, respectivamente, os dois meninos e as duas meninas só seria possível formar 4 equipes. Logo, uma das quantidades deve ser necessariamente maior do 2.

Em vista disso, o *princípio multiplicativo* nos assegura que para escolher as 3 pessoas entre os *m* meninos e as *n* meninas temos as possibilidades:

- Equipes do tipo A:
  - ✓ *m* possibilidades de escolha para o menino;
  - ✓ *n* possibilidades de escolha para a 1ª menina;
  - ✓ (*n* – 1) possibilidades de escolha para a 2ª menina.

Como não há ordenação na escolha das meninas, divide-se o resultado por 2, como segue:

$$m \,.\, \frac{n\,.\,(n-1)}{2} = \frac{m\,.\,n\,.\,(n-1)}{2}$$

- Equipes do tipo B:
  - ✓ *n* possibilidades de escolha para a menina;
  - ✓ *m* possibilidades de escolha para 1º o menino;
  - ✓ (*m* – 1) possibilidades de escolha para o 2ª menino.

Analogamente, como não há ordenação na escolha dos meninos, também divide-se o resultado por 2, como segue:

$$n \,.\, \frac{m\,.\,(m-1)}{2} = \frac{m\,.\,n\,.\,(m-1)}{2}$$

Reunindo e equacionando os resultados, temos:

$$\frac{m\,.\,n\,.\,(n-1)}{2} + \frac{m\,.\,n\,.\,(m-1)}{2} = 25$$

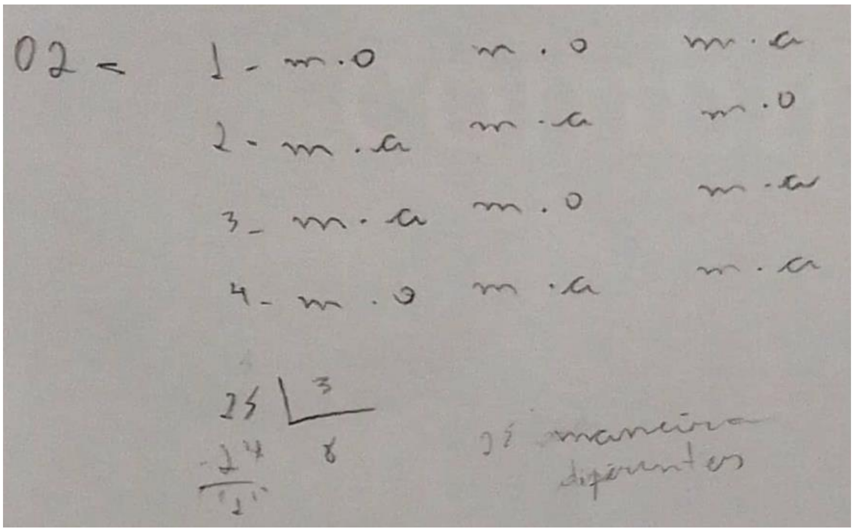
$$\frac{m\,.\,n\,.\,(n-1+m-1)}{2} = 25$$

$m\,.\,n\,.\,(m + n - 2) = 50$

Agora, veja que do lado esquerdo da igualdade temos a decomposição do número 50 em 3 (três) fatores primos, saber: 2, 5 e 5, não necessariamente nessa ordem. Como $m \neq n$, pois $m + n \neq 4$, segue que $m + n - 2 = 5$. Portanto, $m + n = 7$.

RESOLUÇÕES

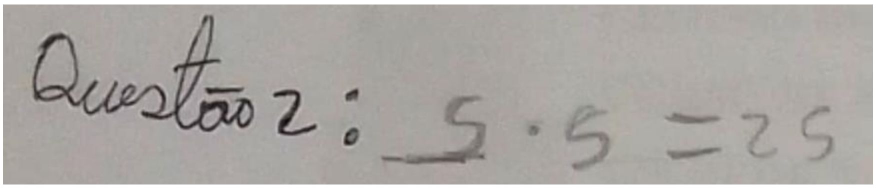
Figura 20: Questão 2 – Aluna A



Fonte: Acervo do autor

A aluna A exibiu uma tentativa de resolução a partir de agrupamentos aleatórios de meninos e meninas satisfazendo a condição desejada, consoante o enunciado, mas não obteve sucesso.

Figura 21: Questão 2 – Aluno B

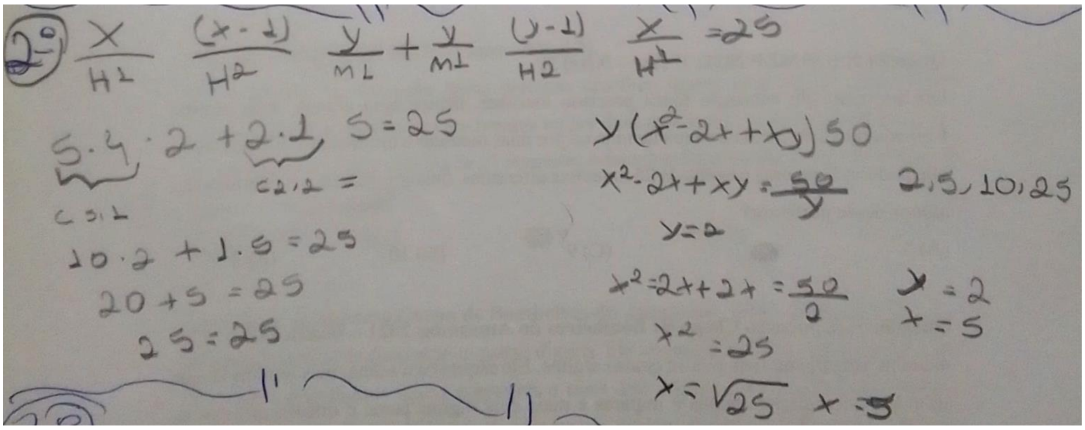


Fonte: Acervo do autor

O aluno B apresentou tímido reflexo sobre a essência do enunciado da questão e, deve ter imaginado que a quantidade de 25 pares deveria ter origem no fato de haver 5 rapazes e 5 moças. Daí, efetuou a operação 5 *x* 5 = 25.

É importante salientar que o pensamento desse estudante ainda demonstra certa dificuldade de interpretação textual, já que, pelo comando da questão, uma resposta razoável seria 5 + 5 = 10, o que representaria o número de alunos e alunas.

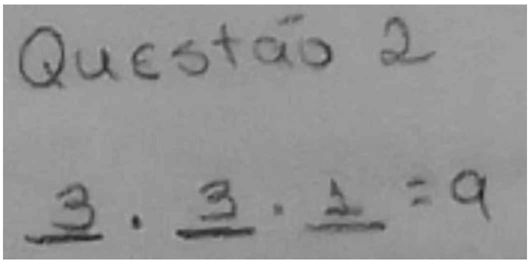
Figura 22: Questão 2 – Aluna C



Fonte: Acervo do autor

A aluna C equacionou o problema de uma forma um pouco confusa, desordenada, e chegou a uma resposta correta, apesar de não ter concluído o raciocínio. Possivelmente associou a alguma questão que já conhecia e tentou reproduzir a solução.

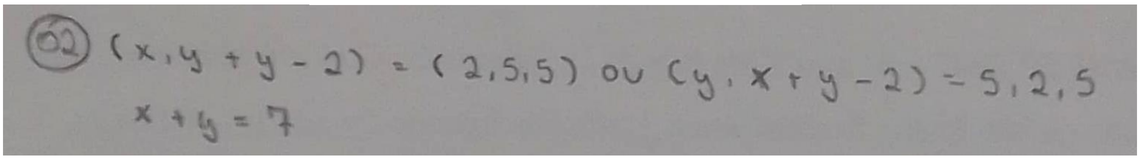
Figura 23: Questão 2 - Aluna D



Fonte: Acervo do autor

A aluna D deve ter se voltado ao fato de a equipe ter 3 pessoas e, possivelmente entende que há 3 possobilidades de escolha para a 1ª pessoas, 3 para a 2ª pessoa e 1 para a 3ª pessoa, obtendo uma resposta razoavelmente plausível ante o *Princípio multiplicativo*.

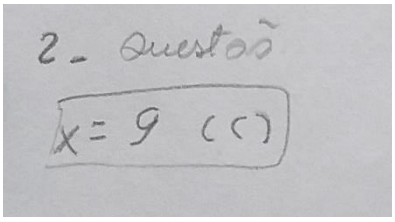
Figura 24: Questão 2 - Aluno E



Fonte: Acervo do autor

Assim como a aluna C, o aluno E também equacionou o problema de uma forma um pouco confusa e chegou a uma resposta correta. Possivelmente associou a alguma questão que já conhecia e tentou reproduzir a solução.

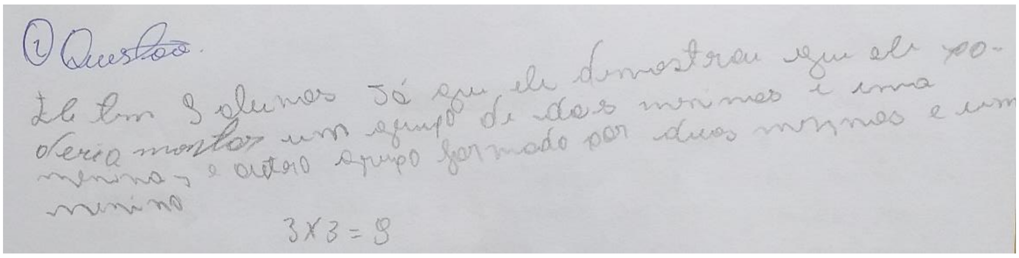
Figura 25: Questão 2 – Aluno F



Fonte: Acervo do autor

O aluno F apenas escreveu o valor 9 como resposta não permitindo análise profícua de sua tentativa de resolução.

Figura 26: Questão 2 – Aluno G

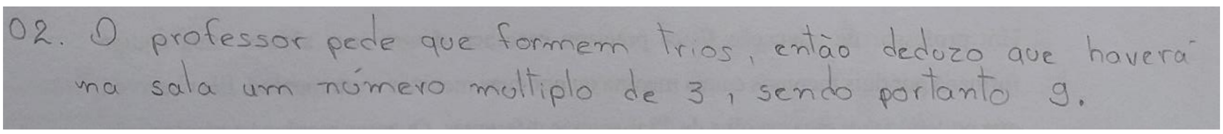


Fonte: Acervo do autor

O aluno G apresentou uma compreensão parcial relativamente coerente, separando as pessoas em dois grupos de 3 e, em seguida, aplicando o *princípio multiplicativo* para obter 3 possibilidades de escolha no primeiro grupo e 3 possibilidades no segundo grupo, computando 3 *x* 3 = possibilidades de escolha.

Observe que esta ação do aluno revela uma falha grave de compreensão textual, ignorando o comando da questão, que pergunta qual a quantidade de meninos e meninas, visto que o total de possibilidades de escolha, 25, já foi dado no enunciado. O aluno H e não respondeu à questão.

Figura 27: Questão 2 - Aluna I



Fonte: Acervo do autor

A aluna I emitiu um raciocínio plausível, mas falho, já que entendeu que a formação dos grupos seria simultânea. O aluno J e não respondeu à questão.

Pelas resoluções e respostas dessa amostra de estudantes, conclui-se que o ensino do *princípio multiplicativo* na Educação básica é bastante fragilizado, sobretudo quando o(a) se depara com questões desse nível.

Questão 3: (Concurso Corpo de Bombeiros do Amazonas 2021 – Banca FGV)

A senha bancária de João possui quatro dígitos. Ele esqueceu a senha, mas lembra-se que ela possui dois dígitos iguais e ímpares e mais dois dígitos pares e diferentes entre si. Lembrando que 0 (zero) é par, o número de senhas diferentes que cumprem essas condições é

(A) 540. (B) 600. (C) 720. (D) 960. (E) 1200.

Comentário:

Essa questão exige boa familiaridade com o *princípio multiplicativo*, o que pode ser comprovado se o (a) candidato (a) seguir esses passos:

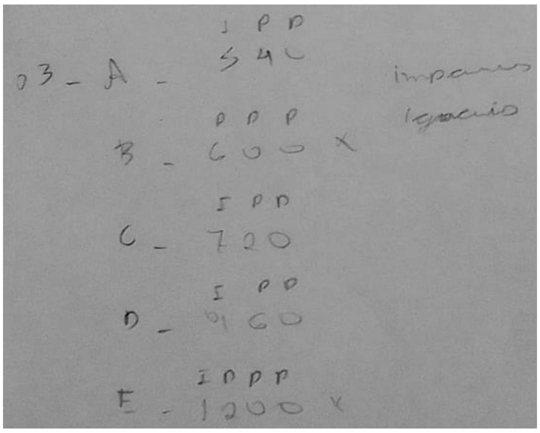
✓ Primeiro, escolher entre as quatro posições disponíveis aquelas que serão ocupadas pelos dígitos ímpares, já que é a escolha mais restrita. Ou seja, há 4 posições para o 1º dígito e 3 posições para o 2º dígito. Como eles são repetidos, e portanto a ordem de colocação na senha não importa, temos, pelo PFC, $\frac{4\ x\ 3}{2}$ = 6 formas de escolher essas posições. As posições dos dígitos pares também já ficam definidas;

✓ Depois, escolher os dígitos que irão ocupar as posições definidas. Podemos começar tanto pelos pares quanto pelos ímpares, já que as posições já foram definidas. Assim, temos, pelo PFC, 5 x 1 x 5 x 4 = 100.

✓ Por fim, aplicar novamente o PFC e obter 6 x 100 = 600 como resposta para o problema.

RESOLUÇÕES

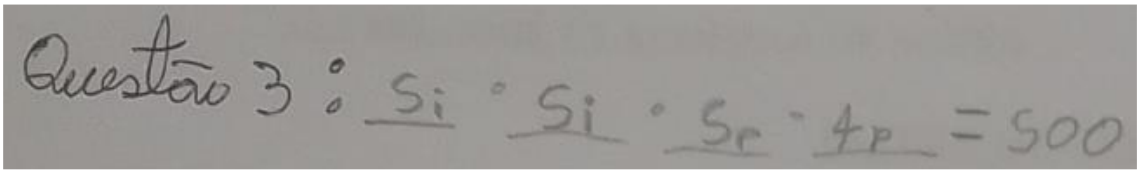
Figura 28: Questão 3 – Aluna A



Fonte: Acervo do autor

A aluna A demonstrou incompreensão quase total da questão, pois verificou a existência de algarismos pares ou ímpares naquilo que deveria o número total de senhas que satisfaz o problema.

Figura 29: Questão 3 – Aluno B

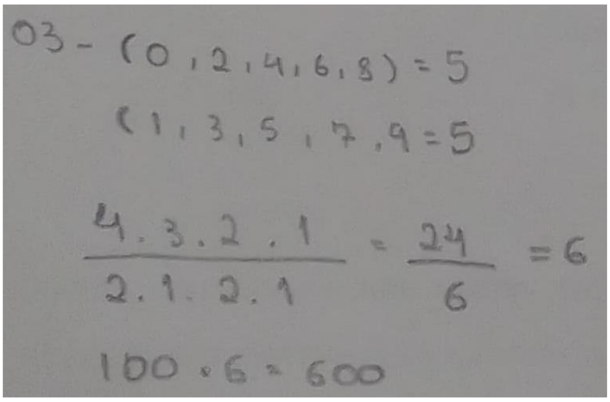


Fonte: Acervo do autor

O aluno B expressou compreensão parcial do problema, inclusive aplicando o *princípio multiplicativo* para resolvê-lo, porém o fez de forma incorreta, segundo o enunciado.

As alunas C e D não respoderam à questão.

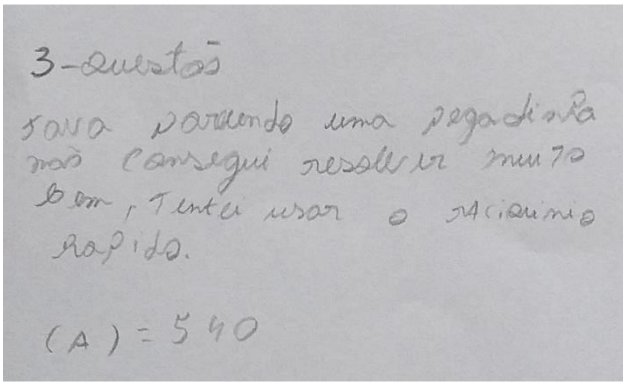
Figura 30: Questão 3 – Aluno E



Fonte: Acervo do autor

O aluno E montou um esquema de resolução, porém se perdeu e/ou omitiu alguns passos, apesar de ter apresentado a resposta correta. Possivelmente associou a algum resultado já conhecido.

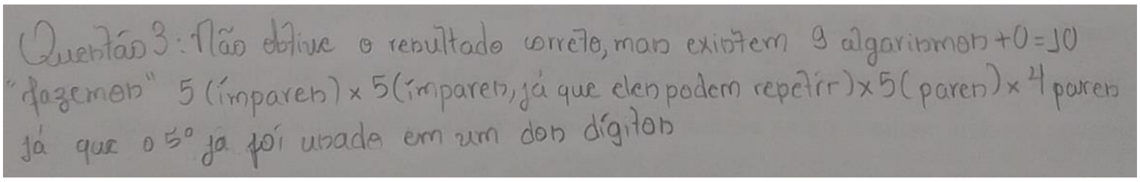
Figura 31: Questão 3 – Aluno F



Fonte: Acervo do autor

O aluno F alegou ter usado um raciocínio rápido e emitiu uma resposta incorreta. O aluno G deixou a questão em branco.

Figura 32: Questão 3 – Aluno H

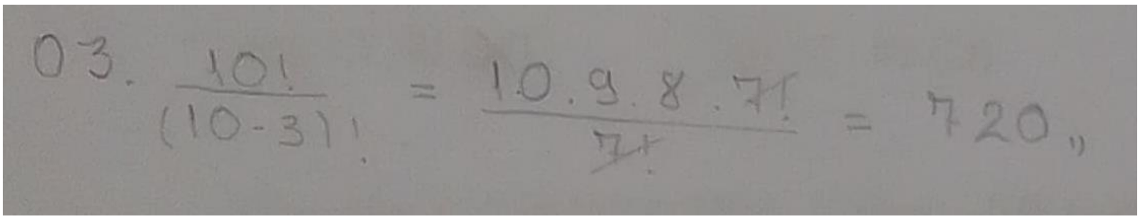


Questão 3: Não obtive o resultado correto, mas existem 9 algarismos + 0 = 10 "fazemos" 5 (ímpares) x 5 (ímpares, já que eles podem repetir) x 5 (pares) x 4 pares já que o 5º já foi usado em um dos dígitos

Fonte: Acervo do autor

O aluno H elaborou um raciocínio razoável, utilizando bem o *princípio multiplicativo*, apesar de não ter obtido a resposta correta.

Figura 33: Questão 3 – Aluna I



03. $\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$

Fonte: Acervo do autor

A aluna I utilizou a "fórmula fechada" do *arranjo simples* para apresentar a sua resolução, mas não obteve sucesso dada a particularidade da questão. É provável que tenha ignorado a validez do dígito 0 (zero). Além disso, a aluna pode ter sido literalmente atraída pelo distrator da questão.

O aluno J não respondeu à questão.

Os (as) participantes deste experimento demonstraram fragilidade tanto interpretativa quanto conceitual para ressolver este tipo de problema, o que pode ser entendido como um ponto de atenção no ensino desta ferramenta tão importante para a resolução de problemas de contagem, que é o *princípio multiplicativo*.

Questão 4: (ENEM 2022)

Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

(A) 8. (B) 9. (C) 11. (D) 18. (E) 24.

<u>Comentário:</u>

Há 4 decisões a serem tomadas, a saber:

- ✓ Escolha do modelo, o que pode ser feito de 7 formas;
- ✓ Escolha do tipo de motor, o que pode ser feito de 2 formas;
- ✓ Escolha da cor, o que pode ser feito de *c* formas.
- ✓ Escolha dos opcionais, o que pode ser feito de $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ formas.

Observe que, denotando a central multimídia por (C), as rodas de liga leve por (R) e os bancos de couro por (B), na escolha dos *opcionais* devem ser verificadas as possibilidades:

- Escolher nenhum (0) item: { } →1 forma;
- Escolher 1 item: {C, R, B}→ 3 formas;
- Escolher 2 itens: {CR, CB, RB}→ 3 formas;
- Escolher 3 itens: {CRB}→ 1 forma;

Agora veja que, segundo o enunciado, a montadora divulgou a oferta de mais de 1000 configurações diferentes de carro.

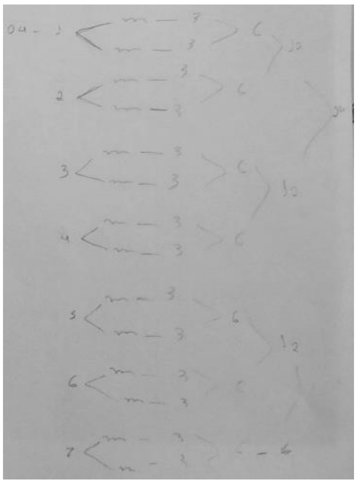
Daí, para atender ao exposto no enunciado, a quantidade mínima de cores (c), pelo *princípio multiplicatitivo*, deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$7 \,.\, 2 \,.\, 8 \,.\, c > 1000 \Leftrightarrow 14c > 125 \Leftrightarrow 14c > 125 \Leftrightarrow c > 8{,}9285714286$

Portanto, O menor inteiro que satisfaz essa desigualdade é 9, que é a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar.

<u>RESOLUÇÕES</u>

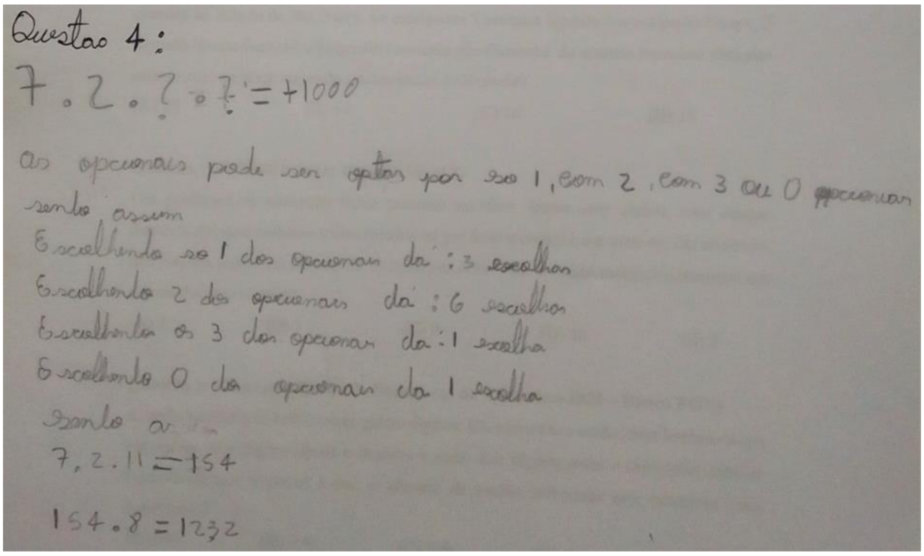
Figura 34: Questão 4 – Aluna A



Fonte: Acervo do autor

A aluna A esboçou um esquema de resolução utilizando um diagrama de árvore, mas não prosperou.

Figura 35: Questão 4 – Aluno B



Questao 4:

7 . 2 . ? . ? = +1000

os opcionais pode ser optar por só 1, com 2, com 3 ou 0 opcionais sendo assim

Escolhendo só 1 dos opcionais da: 3 escolhas

Escolhendo 2 dos opcionais da: 6 escolhas

Escolhendo os 3 dos opcionais da: 1 escolha

Escolhendo 0 dos opcionais da 1 escolha

Sendo a:

7, 2 . 11 = 154

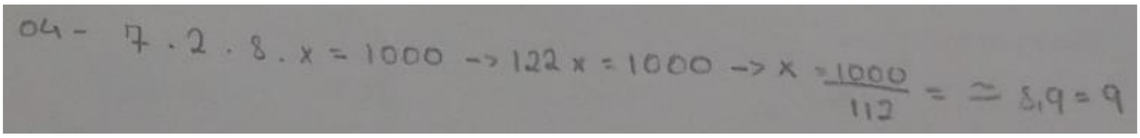
154 . 8 = 1232

Fonte: Acervo do autor

O aluno B apresentou um excelente racíonio, porém não teve consistência nas ideias para concluir de forma exitosa.

As alunas C e D não respoderam à questão.

Figura 36: Questão 4 – Aluno E

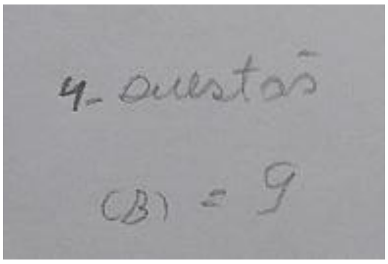


04 - $7 \cdot 2 \cdot 8 \cdot x = 1000 \rightarrow 122 x = 1000 \rightarrow x = \frac{1000}{112} = \simeq 8{,}9 = 9$

Fonte: Acervo do autor

O aluno E expressou corretamente a resolução via *Princípio multiplicativo*, mas não registrou os passos.

Figura 37: Questão 4 – Aluno F



4- Questão

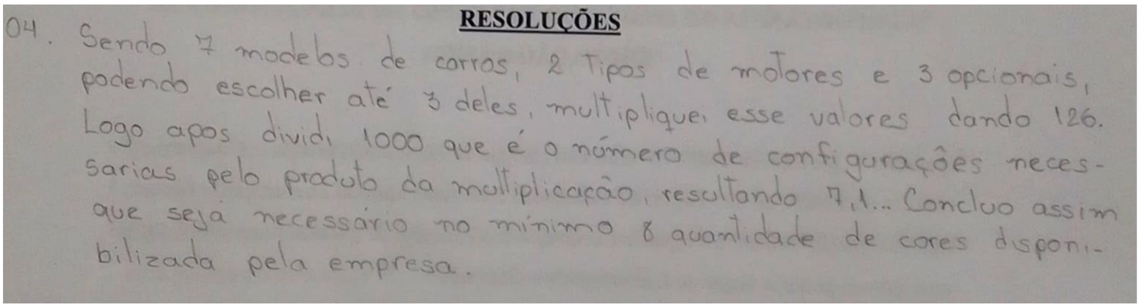
(B) = 9

Fonte: Acervo do autor

O aluno F emitiu a resposta correta, mas não exibiu o processo.

Os alunos G e H não responderam à questão.

Figura 38: Questão 4 – Aluna I


RESOLUÇÕES

04. Sendo 7 modelos de carros, 2 Tipos de motores e 3 opcionais, podendo escolher até 3 deles, multipliquei esse valores dando 126. Logo apos dividi 1000 que é o número de configurações neces-sarias pelo produto da multiplicação, resultando 7,1... Concluo assim que seja necessário no mínimo 8 quantidade de cores disponi-bilizada pela empresa.

Fonte: Acervo do autor

A aluna I desenvolveu um raciocínio quase perfeito, apenas esqueceu de avaliar as possibilides de escolha dos opcionais.

Os aluno J não respondeu à questão.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa revelou que o conhecimento dos métodos de contagem, sobretudo do método conhecido como *Princípio multiplicativo* ou *Princípio fundamental da contagem*, é preceito basilar tanto para a resolução de problemas de contagem quanto para estudos mais avançados na área de Matemática discreta.

Tal fato pode ser evidenciado por meio das reiteradas inserções da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), citando o tema em comento, ora como ferramenta principal, ora como mecanismo auxiliar na resolução de problemas de contagem e de probabilidade, principalmente.

Foram expostos alguns exemplos de aplicação do método de contagem e as resoluções com as respectivas estratégias. Somou-se a isso os ensinamentos de Carvalho, Hazzan, Morgado e Plínio, que nos mostram que os problemas de contagem vão além do que boa parte dos escritos e das propostas executadas em sala de aula entregam.

A experiência de sala de aula explanada pelo autor deste trabalho teve o propósito de evidenciar o que ora se expõe, e assim o fez, pois apresentou resultados de como uma amostra de estudantes do 3º ano do Ensino Médio se comportou diante do desafio de resolver problemas que envolvem o *Princípio multiplicativo*, abordados das mais variadas formas de avaliação às quais qualquer pessoa que concluiu ou estar a concluir o Ensino médio pode se submeter.

Apreciou-se no aludido experimento o *Princípio multiplicativo* sendo abordado:

- ✓ pelo Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), por ocasião de uma avaliação em larga escala aplicada em 2007;

- ✓ pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), por ocasião da Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP – 2022);
- ✓ pela Fundação Getúlio Vargas (FGV), por ocasião do Concurso para o Corpo de Bombeiros do Amazonas em 2021;
- ✓ pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), por ocasião do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM – 2022).

Os resultados desse experimento chamaram a atenção para o baixíssimo nível de domínio do objeto de estudo desta obra, principalmente quando as questões lhes cobraram habilidades mais aguçadas no uso do *Princípio multiplicativo*, o que ocorreu de maneira mais latente nas questões 2, 3 e 4.

Portanto, tende a aflorar - se a necessidade de revisitar as metodologias de ensino dos métodos contagem, com ênfase no *Princípio multiplicativo*, a partir das séries iniciais, explorando ao máximo os modos de abordagem.

Para tanto, pode-se lançar mão de formas lúdicas de ensino, tais como os jogos, até que os(as) aprendizes adquiram maturidade necessária para alçar voos profícuos na busca de estratégias e métodos próprios de assimilação de uma das mais belas artes que a Matemática produziu: o *Princípio multiplicativo* (Princípio fundamental da contagem).

Por fim, este humilde autor deseja auspicioso que a energia dissipada neste intento seja luz renovada em alguma sala de aula deste País na busca de uma melhor educação matemática para o nosso povo.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documento/BNCC-APRESENTAÇÃO.pdfdocumento/BNCC-APRESENTAÇÃO.pdf.>. Acesso em: 05 de maio de 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (1° e 2° ciclos do ensino fundamental). V.3. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (3° e 4° ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio** (PECNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+)**: Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

CARVALHO, Paulo. **Métodos de Contagem e Probabilidade.** Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

DANTE, Luiz Roberto**. Formulação e resolução de problemas de matemática**: Teoria e Prática. Ed. Ática, São Paulo, 2010.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática elementar**. Combinatória e Probabilidade. Volume 5, 8ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. A resolução de problemas na matemática escolar. Tradução: Higino H. Domingues, Olga Corbo. Ed. Atual, São Paulo, 1997.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 2, 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira; PINTO CARVALHO, Paulo Cezar. **Matemática discreta.** 2ª ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

SANTOS, José Plínio de Oliveira; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Therezinha Calzolari. **Introdução à análise combinatória.** Campinas, SP. Editora da UNICAMP, 2002.

OBMEP. **Provas e soluções**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 02 de fevereiro de 2023.