UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ JANILSON DE OLIVEIRA GOMES

MÉDIAS, DESIGUALDADE DAS MÉDIAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO.

SOBRAL – CEARÁ
2023

JOSÉ JANILSON DE OLIVEIRA GOMES

MÉDIAS, DESIGUALDADE DAS MÉDIAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Orientador: Daniel Brandão Menezes

SOBRAL – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Gomes, José Janilson de Oliveira.
Médias, desigualdade das médias e resolução de problemas: uma proposta para o ensino médio. [recurso eletrônico] / José Janilson de Oliveira Gomes. - 2023.
84 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Sobral, 2023.
Orientação: Prof. Pós-Dr. Daniel Brandao Menezes.
1. Médias. 2. Engenharia Didática. 3. Teoria das Situações Didáticas.. I. Título.

JOSÉ JANILSON DE OLIVEIRA GOMES

MÉDIAS, DESIGUALDADE DAS MÉDIAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial á obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Aprovada em: 19/06/2023

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
DANIEL BRANDAO MENEZES
Data: 14/07/2023 13:10:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Daniel Brandão Menezes (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará - UECE

gov.br Documento assinado digitalmente
AILTON CAMPOS DO NASCIMENTO
Data: 13/07/2023 11:17:02-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Ailton Campos do Nascimento
Universidade Federal do Ceará - UFC

gov.br Documento assinado digitalmente
EDVALTER DA SILVA SENA FILHO
Data: 13/07/2023 11:41:19-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Edvalter da Silva Sena Filho
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

Às mulheres da minha vida: minha mãe Salete, minha esposa Caroline e minha filha Janine. Vocês são o motivo do início e do término dessa jornada, difícil, mas prazerosa. Obrigado por fazerem parte da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me permitir chegar até o fim desta caminhada honrando aqueles que estiveram ao meu lado.

Agradeço à minha mãe por sempre acreditar com através dos estudos eu poderia chegar a ser tudo que eu quisesse.

Agradeço à minha esposa que sempre me apoiou nas decisões mais difíceis dessa e de outras jornadas.

Agradeço à minha tia Oscarina que foi um dos motivos por eu ter escolhido essa profissão e essa área tão desafiadora.

Agradeço à todos os meus professores da educação básica e superior que me ajudaram a construir tudo que sei e sou hoje.

Agradeço aos meus professores do curso, que souberam conduzir perfeitamente as disciplinas e o curso.

Aos meus colegas do grupo de estudo, que me ajudaram e me orientaram nas horas mais difíceis do curso.

E o meu agradecimento mais especial, à minha filha Janine, a pessoa mais importante da minha vida. Se cheguei até aqui, foi por ela.

“A matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes.”

(Malba Tahan)

RESUMO

Um dos grandes desafios do ensino de matemática é como deixa-la mais acessível aos estudantes de maneira que eles possam perceber a aplicabilidade de tais ferramentas ensinadas. Um conceito bastante importante, porém, não tão explorado nas escolas regulares é o conceito de média, que quando é abordada fica restrita à média aritmética, conteúdo visto no momento em que se ensina estatística básica. Este trabalho explora os conceitos de média aritmética, geométrica, harmônica e quadrática através de um estudo aprofundado e aplicações em resoluções de problemas em vários ramos da matemática. Outros problemas muito interessantes são os problemas de otimização que geralmente são vistos em curso de Cálculo Diferencial, usando cálculo de derivadas. Este trabalho também propõe a resolução de problemas de otimização usando como ferramenta a desigualdade das médias, tornando assim acessíveis aos alunos do ensino médio. Os objetos trabalhados foram as médias aritmética, geométrica, harmônica, quadrática, desigualdades entre as médias e problemas no geral, mas dando uma ênfase em problemas de otimização e foi trabalhada com grupos de alunos de 3° série da Escola de Ensino Médio Monsenhor Furtado (EEMMF) de Meruoca-Ceará, usando a metodologia de pesquisa Engenharia Didática (ED) em conjunto com a Teoria das Situações Didáticas (TSD). A estrutura do trabalho é de acordo com as etapas da Engenharia Didática, que são: análises preliminares, concepções e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação. As situações de ensino foram construídas na perspectiva da Teoria das Situações Didáticas e aplicadas através de situações-problema. Tais situações visam despertar o pensamento crítico e intuitivo dos alunos, desenvolvendo a compreensão e estratégias de resoluções para a solução dos problemas propostos. Durante o processo podem ser observadas qual média estamos trabalhando e qual será a desigualdade entre as médias a ser utilizada, para que o problema seja solucionado. Este trabalho pode ser objeto de aplicação em conteúdos aplicados nas disciplinas de eletivas e também em aulas de preparação para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), pois a desigualdade das médias pode ser vista em vários campos da matemática. Palavras-chaves:

Palavras-chave: Médias. Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas.

ABSTRACT

One of the great challenges of teaching mathematics is how to make it more accessible to students so that they can realize the applicability of such taught tools. A very important concept, however, not so explored in regular schools is the concept of mean, which when approached is restricted to the arithmetic mean, content seen when teaching basic statistics. This work explores the concepts of arithmetic, geometric, harmonic and quadratic mean through an in-depth study and applications in problem solving in various branches of mathematics. Other very interesting problems are the optimization problems that are usually seen in Differential Calculus courses, using derivative calculus. This work also proposes the resolution of optimization problems using inequality of means as a tool, thus making it accessible to high school students. The objects worked were arithmetic, geometric, harmonic, quadratic means, inequalities between means and problems in general, but with an emphasis on optimization problems and it was worked with groups of 3rd grade students from Escola de Ensino Médio Monsenhor Furtado de Meruoca-Ceará, using the Didactic Engineering research methodology in conjunction with the Theory of Didactic Situations. The structure of the work is in accordance with the stages of Didactic Engineering, which are: preliminary analysis, conceptions and a priori analysis, experimentation and a posteriori analysis and validation. The teaching situations were constructed from the perspective of the Theory of Didactic Situations and applied through problem situations. Such situations aim to awaken students' critical and intuitive thinking, developing understanding and resolution strategies to solve the proposed problems. During the process, it can be observed which average we are working with and what will be the inequality between the averages to be used, so that the problem is solved. This work can be applied to contents applied in elective subjects and also in ENEM preparation classes, as the inequality of averages can be seen in several fields of mathematics.

Keywords: Averages. Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ED	Engenharia Didática
EEMMF	Escola de Ensino Médio Monsenhor Furtado
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PIC	Programa de Iniciação Científica
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
TSD	Teoria das Situações Didáticas

LISTA DE SÍMBOLOS

Ma	Média Aritmética
Mg	Média Geométrica
Mh	Média Harmônica
Mq	Média Quadrática
R^+	Reais Positivos
DP	Desvio Padrão

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Um assunto bastante discutido em tempos atuais é a Didática da Matemática, sobre a qual se discute os aspectos inerentes ao processo do ensino e aprendizagem na construção do conhecimento matemático. A Didática da Matemática busca sistematizar o estudo sobre o ensino de um objeto matemático, ela foca bastante no tripé: professor-aluno-saber. No Brasil se destaca as tendências da Educação Matemática, que tem muita influência dos estudiosos franceses. Essas tendências estão ganhando bastante força e aceitação por parte dos autores brasileiros. (ALMOULOUD, 2007), traz os seguintes aspectos:

> Os processos de aquisição de conhecimento não são unicamente situados do lado dos sujeitos individualmente, mas da classe; a aquisição deve ser o resultado de um processo de adaptação dos sujeitos às situações que o professor organizou, nas quais as interações com ou outros alunos terão um papel importante. (Almoloud, 2007, p. 25)

Veja que o processo de ensino, embora bem planejado com antecedência, traz consigo a necessidade de uma ligeira adaptação durante todo o percurso, afim de que o aluno construa o conhecimento a ser alcançado. A maneira com que o professor expõe o objeto matemático e a situação problema é de uma importância tamanha para que se tenha aprendizagem significativa.

Diante disso, neste trabalho, usando as ideias sobre a Didática da Matemática Francesa, construímos uma proposta de Engenharia Didática para o ensino de desigualdade das médias como ferramenta de resolução de problemas de otimização. Essa proposta será uma adaptação para que alguns problemas que só se resolvem usando artifícios da matemática usado no ensino superior, possam ser trabalhados em uma sala de aula de ensino médio regular. Esse tipo de problema que será utilizado como objeto estudo não é muito utilizado nas salas de aula dos cursos regulares de ensino médio, pois esse conteúdo não é contemplado nos currículos de nenhuma série do ensino médio regular e também não são problemas muito abordado em provas externas, apesar de vez ou outra ser lembrado.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) diz, na COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3, que devemos

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BNCC, p. 527)

Veja que, devemos sempre tentar dar um sentido ao que se é explicado e trabalhado em sala de aula, para que os alunos vejam o quão importante é a ferramenta estudada naquele momento, podendo ser aplicada em vários contextos do nosso cotidiano. Em uma de suas habilidades a (BRASIL, 2018) mostra que devemos,

> (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados. (BNCC, p. 529)

A importância de se resolver problemas que envolvem situações reais é imprescindível e o gasto de material na realização de um determinado trabalho é buscado sempre, como mostra a habilidade citado acima.

Será utilizada a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1976), para analisar as seções de ensino. Dessa forma, será apresentado o percurso inicial, serão feitas as análises preliminares, respaldadas na Engenharia Didática e depois a apresentação da problemática e a justificativa serão discutidas. Finalmente, serão apresentados o objetivo geral e os específicos.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma Engenharia Didática juntamente com a Teoria das Situações Didáticas do estudo de Desigualdades das Médias aplicadas à resolução de problemas para alunos do ensino médio regular com o objetivo de investigar as situações didáticas na construção das soluções para esses tipos de problemas.

1.2.2 Objetivos Específicos

a) Apresentar o estudo das desigualdades das médias para os alunos do ensino médio regular;
b) Investigar e perceber a necessidade de se trabalhar com os problemas de otimização;
c) Desenvolver técnicas de resolução para problemas diversos usando a desigualdade das médias.

2 A ENGENHARIA DIDÁTICA

Este capítulo irá tratar dos principais aspectos da Engenharia didática (ED) que servirá como a metodologia de pesquisa. Essa metodologia que guiará os passos que este trabalho deverá seguir.

2.1 ALGUNS CONCEITOS

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que se fundamenta em situações didáticas em sala de aula, ela é dividida em quatro fases: análises preliminares, construção e análise a Priori da situações didáticas, experimentação e análise Posteriori e validação. Artigue (1988) Apud Machado (2002) caracteriza a Engenharia Didática:(...) como um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino (MACHADO, 2002).

A Engenharia Didática não tem uma ordem cronológica em sua realização, o momento que se perceber a necessidade de retomadas a etapas anteriores, as mesmas poderão e deverão ser retomadas para que se faça a validação do processo, além disso, ela vem de um sistema de ensino da França, a Didática da Matemática. A Didática da Matemática segundo (SANTOS, 2016):

> Traz em seu bojo um conjunto de conhecimentos que propiciam ao professor a formulação de situações didáticas de cunhos específicos, que permitem ao mesmo realizar explicações, apresentar conceitos e teorias e a partir dessas apresentações prever e analisar resultados cognitivos dos alunos, bem como avaliar a adequabilidade dos processos de comunicação do saber (SANTOS, 2016, p. 171).

A partir desse sistema francês de ensino a ED é elaborada inicialmente por Brousseau em 1981, estudadas e amplamente divulgada e desenvolvida por Michèle Artigue (SOUZA, 2013). Vale ressaltar que essa metodologia para (ARTIGUE, 1988) é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro que, para executar qualquer projeto se baseia em conhecimentos técnicos/científicos de seu domínio, aceita se curvar a conhecimentos desenvolvidos pela própria ciência, mas ao mesmo tempo não deixa sua capacidade intelectual de construção de novas técnicas de abordagem em uma mesma aplicação.

Tal estratégia de pesquisa precisa que o professor tenha um foco maior em relação a epistemologia dos conteúdos investigados, se tornando um professor-pesquisador. A partir disso, ele deverá fazer leituras sobre seus conceitos, realizar estudos correspondentes, fazer uma relação se o modo de ensino está de acordo com a proposta pedagógica da instituição de ensino e pressupor os obstáculos que os alunos vão encontrar nas resoluções de problemas. Com essas análises preliminares ele formulará sua própria sequência didática com o propósito de minimizar as dificuldades enfrentadas pelos alunos.

2.2 AS FASES DA ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática, como metodologia de pesquisa, é composta de quatro fases distintas: as análises preliminares, a construção e análise a priori das situações didáticas, a experimentação e análise a posteriori e a validação. Assim, nos tópicos seguintes, cada uma dessas fases, será detalhada.

2.2.1 Análises preliminares

Nesta primeira etapa, serão realizadas as análises prévias, buscando identificar problemas relacionados ao ensino do objeto estudado. Nesta fase, será feito um estudo bibliográfico sobre o conteúdo a ser trabalhado pelo professor, levando em conta as condições e contexto do ambiente escolar a ser investigado.

As análises preliminares, segundo (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008) têm os seguintes objetivos:

> Epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino; Do ensino usual e seus efeitos; Das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução; A consideração dos objetivos específicos da pesquisa; O estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere o trabalho. (Almouloud e Coutinho, 2008, p.66).

Nessa fase, o professor não tem a necessidade de trabalhar em sala de aula. Ele realizará os estudos bibliográficos sobre o objeto de pesquisa. Durante esse momento o docente irá se embasar das dificuldades que os alunos supostamente enfrentarão durante a aplicação de sua metodologia, buscando preparar-se para todas as perguntas possíveis e desenvolver estratégias para a compreensão dos discentes.

Para (VIEIRA; FERNANDES; SOUZA, 2020),

> Esta análise preliminar revela com confiança os fatos em sala de aula, prevendo erros e condições inseguras que poderiam ocasionar desgastes desnecessários e desfocados do objetivo da aula. Essa análise prévia é capaz de identificar fatores que guiarão o professor com mais clareza e completude das reações adversas em sala de aula devido à quantidade maior de informações sobre o meio interno e externo dos procedimentos para fornecer mais subsídios aos professores, contribuindo para que o docente vá para a realização das sessões

> didáticas com um amparo mais abrangente, contemplando a completude da aplicação das sessões didáticas na sala de aula. (Fernandes, 2020)

A partir da análise preliminar o professor basear-se-á na construção da Engenharia Didática. Artigue (1996) apud (CARNEIRO, 2005) indica que essa análise insira a distinção de três dimensões:

> dimensão epistemológica, associada as características do saber em jogo; dimensão didática, associada as características do funcionamento do sistema de ensino; dimensão cognitiva, associada as características do público ao qual se dirige ao ensino. (Artigue, 1996)

Essa análise é muito importante do ponto de vista didático, pois um mesmo tema, principalmente na matemática, pode ser abordado de várias formas e com níveis de dificuldade diferentes, ou seja, analisar o conteúdo a ser ensinado e o público que irá receber esse conhecimento é de extrema importância.

2.2.2 Construção e análise a priori

Nesta fase, utilizaremos um instrumento avaliativo para um diagnóstico composto por algum método que nos permita levantar informações sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos e que, supostamente, irão encontrar na sua resolução. É nesse momento que o professor faz observações para que possa ter uma noção da abrangência das perguntas que eles vão encontrar nas outras fases. Na construção e análise a priori, o pesquisador define as variáveis que vai trabalhar.

(ARTIGUE, 1988) define dois tipos de variáveis que serão trabalhadas pelo pesquisador:

> As variáveis macrodidáticas ou globais relativas à organização global da engenharia e; As variáveis microdidáticas ou locais relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase. (Artigue, 1988)

A partir delas deve-se selecionar as partes que serão mais importantes para serem desenvolvidas na fase seguinte e a partir daí, definir o que será realizado, permitindo monitorar as relações do aluno com o conteúdo trabalhado.

(ALVES *et al.*, 2017) destaca que:

> Alguns fatores não podem ser negligenciados, num contexto da proposição progressiva de um problema. Preliminarmente, a transmissão do problema deverá afetar aos outros elementos do processo, na medida em que, a própria classe se apropria do problema. (Alves, 2017)

Para (ARTIGUE, 1988) a análise a priori possui uma parte de descrição e outra de previsão, tendo como ponto de inicial os seguintes questionamentos:

> Que problema o aluno tem para resolver? O que o aluno precisa saber para compreender os problemas? O que o aluno precisa saber para resolver o problema? Que tipo de controle o aluno tem sobre sua ação?. (Artigue, 1988)

Tais perguntas são norteadoras para que o pesquisador tenha um embasamento para utilizar-se de sua metodologia de ensino e fazer o confronto no momento de validação do processo.

2.2.3 Experimentação

Nesta fase, dá-se o momento de aplicação da sequência didática organizada e desenvolvida pelo professor após as análises realizadas nas fases anteriores com a ideia de tentar diminuir ou corrigir as dificuldades detectadas, podendo utilizar-se de ferramentas auxiliares nesse processo de ensino, como a ajuda da tecnologia digital, jogos e resolução de situações problemas, etc.

Para (MACHADO, 2002) a experimentação supõe:

> A explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação; O estabelecimento do contrato didático; A aplicação dos instrumentos de pesquisa; O registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.)(MACHADO, 2002, p.206).

A experimentação é o momento da aplicação da situação didática, situação essa desenhada preliminarmente nas fases anteriores da engenharia didática. Na experimentação pode-se fazer, quando necessária, aprimoramentos, sempre voltando às fases anteriores.

Além disso, (MACHADO, 2002) diz que, geralmente, quando a experimentação prevê mais de uma sessão, é aconselhável se fazer uma análise a posteriori local, após uma ou algumas sessões para confrontar com as análises a priori e realizar eventuais correções.

Nesse momento nós percebemos a real importância das análises preliminares e a priori, pois nelas imagina-se um cenário para o momento de discussão dos problemas, podendo a partir disso, antecipar ações vindas das possíveis abordagens por parte dos alunos.

2.2.4 Análise a posteriore e validação

A Análise a Posteriori e Validação é o momento onde são feitas as análises sobre o objeto de pesquisa, assim os resultados encontrados serão abordados qualitativamente.

Para (ALMOULOUD, 2007),

> É o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica um retorno à análise a priori, um processo de complementação. (Almouloud, 2007, p.177)

É durante a análise a posteriori e validação que o pesquisador deve avaliar os resultados das etapas, propostas pela sequência didática, com o intuito de comparar as condições de ensino e aprendizagem antes e depois de aplicações das estratégias formuladas com base na Engenharia Didática.

Para (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008) a análise a posteriori de uma sessão é o conjunto de resultados obtidos, a partir de aplicações, que se pode tirar e contribui para o melhoramento dos conhecimentos didáticos.

Assim, esta última fase depende tanto do material bibliográfico como das ferramentas utilizadas para juntar todas as informações para o andamento da pesquisa e assim relacionar com a análise a priori e fazer confronto com as dificuldades encontradas.

Essa fase não serve simplesmente para dizer se o processo desenvolvido é válido ou não, essa fase serve também para corrigir e adaptar toda a estrutura desenvolvida para o processo didático. Nela, deve-se fazer uma avaliação do que foi feito durante todo o desenvolvimento didático, desde a curadoria do conteúdo a ser trabalhado até o momento da experimentação, pois todos esses mecanismos estão interligados para que haja sucesso no processo de ensino e aprendizagem.

3 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A didática da matemática foi desenvolvida na França, nos anos de 1970. À época que surgiu a reforma da matemática moderna e com ela foi criado o Irens (Instituto de Pesquisa sobre o Ensino da Matemática). A ideia era estudar e aprofundar os problemas no que se refere ao ensino e conceitos matemáticos.

Analisando o processo de ensino e aprendizagem, (BROUSSEAU, 1986) introduziu as ideias de variáveis didáticas, teoria das situações didáticas e contrato didático. (ALMOULOUD, 2007), fala sobre o momento do processo de ensino e aprendizagem que

> As relações professor-saber-aluno não são relações tão diretas e tão transparentes [...] não se deve, unicamente, limitar-se à sala de aula para estudar o ensino e a aprendizagem; é preciso considerar a organização do sistema educativo (programas, currículo, material pedagógico, livros didáticos, horários etc.)(Almoloud 2007, p.26)

Veja que essa relação professor-saber-aluno é bastante complexa e requer bastante cuidado para que esse processo ocorra de maneira bem coesa e sem esquecimento das ferramentas a serem utilizadas durante o processo de ensino e aprendizagem.

Segundo (ALMOULOUD, 2007), uma situação didática é caracterizada como um jogo de interações do aluno com os problemas propostos pelo professor e a forma com que esses problemas são colocados aos alunos é o que ele chama de devolução, ela deve ter o objetivo de tirar o aluno da zona de conforto e permitir com que o aluno desenvolva uma certa autonomia.

Para (BROUSSEAU, 1986):

> A concepção moderna do ensino solicita, pois, ao professor que provoque no aluno as adaptações desejadas, por uma escolha judiciosa dos problemas que lhe propõe. Estes problemas, escolhidos de forma a que o aluno possa aceita-las, devem levá-lo a agir, a falar, a refletir, a evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que produz sua resposta, o professor recusa-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir. O aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para o levar a adquiri um conhecimento novo, mas tem de saber igualmente que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didáticas (BROUSSEAU, 1986, p. 49).

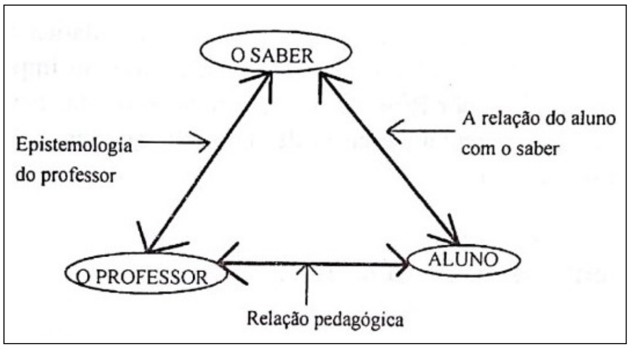
Todo o desenvolvimento do ensino e aprendizagem se apoia na ideia de devolução, tendo em vista que o professor possa estabelecer diálogos com os alunos durante as teorias e problematizações apresentadas por ele.

3.1 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO

A Teoria das situações didáticas como metodologia de ensino tem como principal objeto o conhecimento da circunstância em que ocorre a aplicação de uma didática. Nessa metodologia de ensino se faz um conjunto de situações reprodutíveis dentro da organização em sala de aula que permite momentos de interações entre o professor, o aluno e o saber. Esse meio de organização de sala é chamado milieu.

Para (BROUSSEAU, 1986) a TSD procura teorizar as interações estabelecidas no milieu. O esquema abaixo mostra essa interação.

Figura 1 – Triângulo didático.



Fonte: Almouloud (2007, p. 32)

Veja que as relações entre professor-saber, saber-aluno e professor-aluno são formadas nesse triângulo, que não é necessariamente simétrico e harmonioso, muito pelo contrário, na maioria das vezes essas relações são bem conflituosas e assimétricas.

3.1.1 Situações didáticas e situações adidáticas

A situação adidática, como uma parte essencial da situação didática, é um procedimento na qual a intenção de ensinar não é revelada, mas foi planejada e construída de maneira com que o professor proporcione o aluno um ambiente favorável para o aprendizado do novo saber. Essa etapa tem que ser muito bem pensada e planejada, pois ela se faz importantíssima para o processo de aprendizagem, nela as dúvidas podem ser tiradas pelo próprio aluno na hora da discussão de um problema.

Segundo (ALMOULOUD, 2007) apud (BROUSSEAU, 1986), uma situação adidática tem que ter as seguintes características:

> O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria; O problema é escolhido para que o

> aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às razões didáticas; O professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) proposta(s). (Almouloud, 2007, p.33)

Veja que a fase de planejamento da situação adidática é crucial na construção de um novo conhecimento por parte do aluno, assim o momento da situação didática se torna mais fluente e sem muita interferência por parte do professor, deixando assimo aluno no centro da construção do conhecimento.

Uma situação didática tem como principal característica as interações dos alunos com os problemas propostos pelo professor. Dessa forma (ALMOULOUD, 2007) diz que a maneira de expor esses problemas aos alunos é chamada de devolução. Essa devolução deve objetivar as interações que permitam que o aluno tenha um desenvolvimento autônomo. Dessa maneira o aluno não percebe de imediato que houve um planejamento para o momento didático ou para o momento adidático.

(ALMOULOUD, 2007) caracteriza o milieu fazendo parte do momento adidático, isso dentro da Teoria das Situações Didáticas. Para (ALMOULOUD, 2007),

> O milieu é um sistema antagonista ao sujeito, sendo o milieu adidático um sistema sem intenção didática, exterior ao sujeito, que, por suas retroações às ações do sujeito, permite sua reflexão a respeito de sua aprendizagem. Ou seja, o aprendiz é o responsável pelo processo de sua aprendizagem. (Almouloud, 2007, p. 35)

Dessa forma o sujeito se torna capaz de produzir um novo conhecimento e adquirir um novo saber, mas o milieu sem intenções didáticas, às vezes, não é suficiente para a construção de um novo conhecimento, assim se faz necessário a presença de uma relação didática.

Para se fazer a análise do processo de aprendizagem, a teoria das situações didáticas se ramifica em quatro fases diferentes, nas quais o saber tem funções diferentes e essas fases são interligadas. As fases são os momentos de ação, de formulação, de validação e de institucionalização.

As situações adidáticas são modeladas à estrutura de um jogo, em que a situação que fará com que o aluno aprenda é uma situação em que o aluno perceba tanto as regras do jogo como o objetivo a ser alcançado antes de começar a jogar. Os conhecimentos prévios fornecidos pelo milieu lhe possibilitam notar que a estratégia escolhida permite ou não ganhar o jogo ou que terá um custo didático ou cognitivo muito grande.

Segundo (ALMOULOUD, 2007),

> A teoria das situações desenvolveu-se a partir da classificação de situações caracterizadas por três tipos de dialéticas ou interações fundamentais com o milieu, que envolvem diferentes relações com o saber em jogo: trocas diretas para uma ação ou uma tomada de decisão, trocas de informações numa linguagem codificada, trocas de argumentos. (Almouloud, 2007, p.37)

Veja que as fases da situação didática são muito importantes para o processo de ensino e aprendizagem quando bem desenvolvidas. Assim devemos dar muita importância à cada momento em particular.

A Situação de Devolução é o momento em que o professor cede uma certa responsabilidade de sua própria aprendizagem. Nesse momento o aluno tem que entrar na proposta dada pelo professor e assumir alguns riscos, assim o aluno enxerga o problema como um desafio. Nesse momento o professor expõe o problema de maneira clara e orienta algumas regras do jogo para que o aluno consiga chegar ao objetivo sem pular etapas e adquira o novo saber.

Na Situação de Ação, o aluno, de posse do problema, busca em seus conhecimentos prévios, uma interação com o milieu, ferramentas necessárias para se obter a solução do problema proposto. A busca pela solução é feita por meio de tentativas e reflexões, usando estratégias de resolução.

(ALMOULOUD, 2007) diz que,

> Uma boa ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado e sua ação e ajustá-la, se necessário, sem intervenções do mestre, graças à retroação do milieu. (Almouloud, 2007, p.37)

Assim, o discente, se julgar necessário, pode aperfeiçoar ou abandonar o seu modelo desenvolvido para criar um novo, sendo assim realizando uma aprendizagem por adaptação.

A fase de ação é essencial, pois o aluno exprime suas escolhas por ações sobre o milieu. Esses momentos de interações estão centralizados nas tomadas de decisões, sendo um trabalho individual ou em grupo.

Na Formulação, a principal característica é a troca de informação entre o aluno e o meio organizado (milieu). Nesse momento a linguagem formal, própria do objeto estudado, já é permitida, mas sem a obrigatoriedade, isso se faz necessário para que exista um certo grau de comunicação. Nessa etapa, o aluno ou grupo de alunos explicita, de forma oral ou escrita, a forma ou ferramenta que foi utilizada para a solução do problema.

Esse momento tem como principal característica proporcionar ao aluno condições para a construção de uma linguagem compreensível para a exposição diante do grupo de envolvidos no processo.

A Validação é o momento de convencimento, na qual a ideia desenvolvida será apresentada aos demais participantes. As ideias e modelos apresentados já devem estar montadas de maneira mais formal, do ponto de vista científico, para que a discussão seja feita de maneira mais exata. Neste momento já se pode usar métodos e ideias de demonstrações de maneira a convencer o outro ou até mesmo que o outro refute tal argumento. Assim, de forma bem dinâmica, se constrói um novo conhecimento. Enquanto a situação de Formulação tem a característica de debate sobre a construção da solução, a Validação debate a certeza das soluções, o que faz com que a interação com o meio seja organizada.

A Situação de Institucionalização é o momento de revelação da intenção do professor. Nela é mostrada a intenção da escolha do problema.

Para (ALMOULOUD, 2007),

> As situações da institucionalização foram então definidas como aquelas em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente ou estatuto congnitivo do saber. Uma vez construído e validade, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio matemático da classe. (Almouloud, 2007, p 40)

Assim, a institucionalização não pode ser aplicada em qualquer momento, não podendo ser cedo demais, para que não haja prejuízo por parte da construção do conhecimento e também não pode ser muito tarde, pois pode atrasar o processo de aprendizagem. Depois de realizada a institucionalização, feita pelo professor, o saber é oficialmente incorporado aos esquemas mentais dos alunos, podendo serem utilizados em problemas posteriores.

3.1.2 O contrato didático

(BROUSSEAU, 1986) define o contrato didático como o conjunto de comportamentos específicos, como o professor e o aluno vão se comportar diante da situação didática. Tais comportamentos tem que ser o esperado por ambas as partes, pois o rompimento desse contrato pode trazer prejuízo aos envolvidos no processo.

Dessa forma, a situação didática, que manifesta o deseja de ensinar, tem que possuir, pelo menos, uma situação-problema e um contrato didático bem definido, pois quando o problema é exposto ele traz consigo um sentido de estar sendo colocado naquele momento da situação didática. O contrato didático busca favorecer o acesso dos alunos ao conhecimento, é através dele que as crianças veem a importância e necessidade do desenvolvimento de certas teorias.

Considera-se ruptura do contrato didático quando entra em cena elementos não esperados, como por exemplo, quando de uma série para a outra, uma matemática que se usa basicamente operações elementares com números, passa a ser inseridos novos elementos, as letras. Isso pode ser interpretado como quebra de contrato. Outra quebra de contrato é quando os alunos, nos anos iniciais, são acostumados a retirarem informações da situação-problema, de modo a dar um sentido numérico a sua resposta, mas quando os números não fazem muito sentido pra eles ou quando a resposta não é numérica, sentem dificuldades em montar uma solução.

Para (ALMOULOUD, 2007)

> Muitos alunos têm dificuldade em adaptar-se a essa ruptura de contrato. No jogo de interações aluno-saber-professor, a ruptura de contrato didático e sua renegociação podem provocar a entrada em cena de fatores positivos ou negativos para a aprendizagem. (Almouloud, 2008, pag. 91)

Alguns exemplos de situações-problema que provocam uma ruptura de contrato didático:

Numa festa tem 150 homens e 233 mulheres. Quanto custou a festa?

Em uma sala de aula temos 10 rapazes e 12 moças. Qual a idade do professor?

Nessas duas situações, é comum o aluno focar sua atenção nos valores numéricos encontrados no texto, tentando achar alguma ligação entre os valores dados e a solução. Poucos alunos conseguem perceber que é impossível resolver tais problemas.

4 O GEOGEBRA

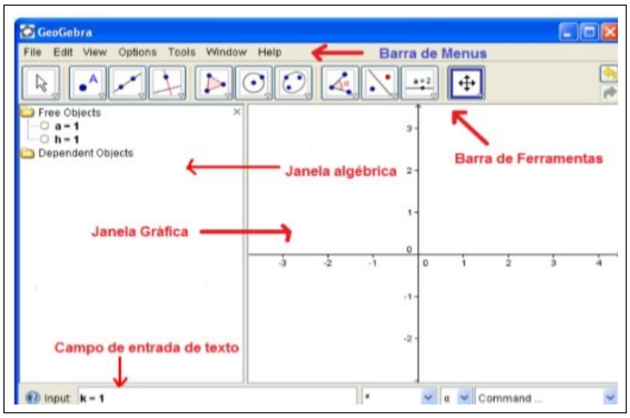
(SANTOS, 2016) descreve que o Geogebra é um aplicativo/software atribuído para a manipulação e construção de conceitos e também de objetos matemáticos, o mesmo consegue, ao mesmo tempo, abranger elementos de Geometria e Álgebra. O referido software tem importantes contribuições usando dinâmica e funcionalidade. Quando se usa, apenas, o livro didático e o quadro branco, deixamos de poder usar todos esses benefícios que são construção e manipulação para facilitar a compreensão do discente.

Segundo (SIMM, 2013):

> O GeoGebra pode ser um grande aliado para inovar o processo de ensino e aprendizagem, dado que possui características que o tornam ideal para esta aplicação são: software de livre distribuição, extremamente dinâmico e interface amigável. Está disponível em http://www.geogebra.org tanto em plataforma Windows quanto Linux, além das plataformas portáteis como Android (SIMM, 2013, p.2).

Com isso, esse software pode e deve ser utilizado em várias ramificações para o ensino de matemática como: no estudo de geometria plana, geometria espacial, funções e estatística. Sendo assim, a janela inicial do Geogebra é composta de uma janela que se separa em partes com inúmeras utilidades, como é mostrado na figura abaixo a interface do software Goegebra.

Figura 2 – Interface do Geogebra.



Fonte**:** Cataneo (2011, p.35)

O Geogebra será usado como ferramenta de auxílio no ensino e compreensão dos alunos sobre conceitos e elementos de Geometria Plana e Espacial na experimentação e construção das Sequências Didáticas e nos experimentos da metodologia de pesquisa da Engenharia Didática.

4.1 O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE MANIPULAÇÃO GEOMÉTRICA EM PROBLEMAS.

Durante as aulas de matemática, às vezes, os alunos podem não conseguir identificar o que está sendo proposto em um exemplo mostrado pelo professor, como na variação de dimensões de um poliedro, a variação de um volume etc. Sendo assim, usar uma ferramenta de manipulação geométrica traz a visão do problema ocorrendo juntamente com a explicação do problema em si.

A (BRASIL, 2018) sinaliza que para o aluno desenvolver algumas habilidades de matemática, pode-se recorrer a utilização de ferramentas de manipulação.

> (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (BRASIL, 2018)

Essa habilidade mostra a necessidade das representações algébricas, mas nem sempre se consegue perceber o que se passa em uma representação desse tipo, assim se traz a necessidade de se usar uma ferramenta de manipulação. Essa ferramenta nos permite variar tais representações e podermos formular uma conjectura e ideias inicias do problema.

Outras habilidades propostas pela BNCC contemplam um dos objetos estudados neste trabalho, que são as funções polinomiais de 1° e 2° graus.

> (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros; (EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais. (BRASIL, 2018)

Este pesquisa trata de desigualdade das média e problemas de otimização, que traz consigo uma ideia de maximizar ou minimizar áreas, volumes, perímetros e outras funções, assim é que, neste próprio trabalho, se faz indispensável o uso de uma ferramenta tão potente como o geogebra.

5 MÉDIAS

Neste capítulo serão definidas as ideias de média Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática, com ênfase na aplicação em números positivos. Serão utilizados como principais referências o livro texto do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Matemática de Discreta (MORGADO; CARVALHO, 2015), outras dissertações retiradas do banco do PROFMAT e também o livro texto do Programa de Iniciação Científica (PIC) que é usado em turmas de preparação para olimpíadas em escolas de nível médio.

A temática sobre a média é bastante importante e pouco lembrada no ensino média a não ser que a ideia seja trabalhada na perspectiva do Estudo da Estatística Básica. O estudo das médias pode ser muito mais aproveitado se for incorporado a outros tipos de problemas. A média de uma lista de números é um valor que dá uma característica particular a esse conjunto de elementos, se essa característica for a soma simples desses valores, obtemos a mais simples delas, a média aritmética.

5.1 MÉDIA ARITMÉTICA

A ideia mais simples e utilizada pelos alunos é a média aritmética. Essa ferramenta é bem discutida e calculada pelos alunos pelo fato de que eles sempre estão calculando as próprias médias de notas em um período letivo.

Definição 5.1.1 *A média aritmética da lista de n números* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *é definida por*

$$Ma = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

5.1.1 Aplicações das médias aritméticas

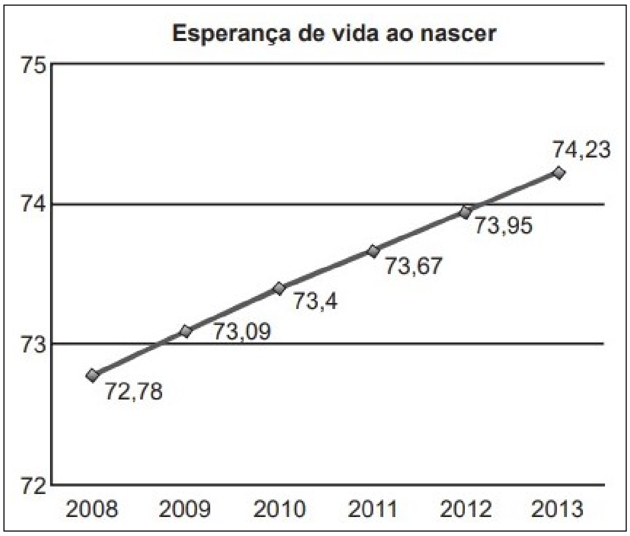
Abaixo veremos alguns exemplos de aplicação dos conceitos de média aritmética.

Exemplo 1 *Calcular a média aritmética de um aluno que tirou as notas 6, 7, 8.*
Solução: *A média aritmética é obtida por*

$$Ma = \frac{6+7+8}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

Exemplo 2 *(ENEM 2022) A esperança de vida ao nascer é o número médio de anos que um indivíduo tende a viver a partir de seu nascimento, considerando dados da população. No Brasil,* *esse número vem aumentando consideravelmente, como mostra o gráfico.*

Figura 3 – Gráfico de linhas.



Fonte: Disponível em: http://cod.ibge.gov.br. Acesso em: 6 mar. 2014 (adaptado).

Pode-se observar que a esperança de vida ao nascer em 2012 foi exatamente a média das registradas nos anos de 2011 e 2013. Suponha que esse fato também ocorreu com a esperança de vida ao nascer em 2013, em relação às esperanças de vida de 2012 e de 2014.

Caso a suposição feita tenha sido confirmada, a esperança de vida ao nascer no Brasil no ano de 2014 terá sido, em ano, igual a

(a) 74,23. (b) 74,51. (c) 75,07. (d) 75,23. (e) 78,49.

Solução: *Nessa situação a esperança de vida ao nascer em 2014 foi suprimida e temos que montar uma estrutura algébrica para obtermos a solução do problema. Assim temos,*

$$\frac{73,95+x}{2} = 74,23$$

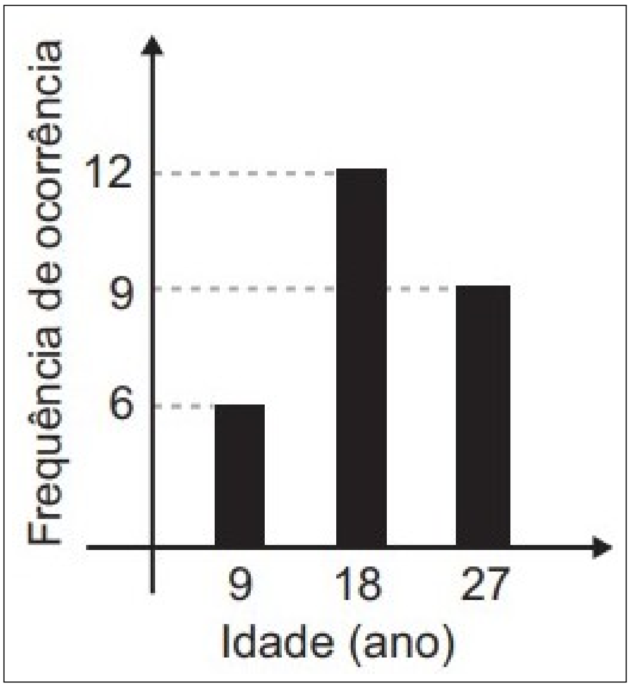
$$73,95+x = 148,46$$

$$x = 148,46-73,95 = 74,51$$

Reposta correta: letra (b).

Exemplo 3 *(ENEM 2021) Uma pessoa realizou uma pesquisa com alguns alunos de uma escola, coletando suas idades, e organizou esses dados no gráfico.*

Figura 4 – Gráfico de colunas.



Fonte: INEP

Qual é a média das idades, em ano, desses alunos?

(a) 9 (b) 12 (c) 18 (d) 19 (e) 27

Solução: *Veja que nesse caso nos deparamos com uma média ponderada, que não deixa de ser uma média aritmética, apenas devemos olhar com atenção para os pesos atribuídos a cada valor. Assim para solucionarmos o problema devemos fazer*

$$Ma = \frac{9.6+18.12+27.9}{6+9+12}$$

$$Ma = \frac{54+216+243}{27}$$

$$Ma = \frac{513}{27} = 19$$

Resposta correta: letra (d).

Exemplo 4 *(ESCOLA NAVAL RJ) A média aritmética de 50 números é 38. Se dois dos números, 45 e 55, são suprimidos a média aritmética passa a ser:*

(a) 35,5 (b) 37,5 (c) 37,2 (d) 37,52

Solução: *Sabendo que a média entre 50 números, incluindo 45 e 55, é 38 podemos fazer*

$$\frac{x_1+x_2+...+x_{48}+45+55}{50} = 38$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{48} = 38.50 - 100$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{48} = 1800$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ...x_{48}}{48} = \frac{1800}{48}$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{48}}{48} = 37,5$$

Resposta correta: letra (b).

Exemplo 5 *(AFA – Academia das Forças Armadas) Em um pentágono, os ângulos internos estão em Progressão Aritmética. Qual o terceiro termo, em graus, dessa progressão?*

(a) 54 (b) 108 (c) 162 (d) 216

Solução: *Sabemos que a soma dos ângulos internos de um pentágono é igual a 540°. Assim temos uma progressão aritmética de 5 termos,* $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ *Usando a fórmula da soma dos termos de uma PA finita, tem-se*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_5).n}{2}$$

$$540 = \frac{(a_1 + a_5).5}{2}$$

$$\frac{540.2}{5} = a_1 + a_5$$

$$216 = a_1 + a_5$$

Como a_3 *é o termo do meio, ele é a média aritmética dos seus extremos.*

$$\frac{a_1 + a_5}{2} = a_3$$

$$\frac{216}{2} = a_3$$

$$a_3 = 108$$

Resposta correta: letra (b).

5.2 MÉDIA GEOMÉTRICA

Essa ferramenta não é bem trabalhada pelos alunos pelo fato de ser pouco comentada durante as atividades desenvolvidas em sala de aula. Alguns problemas até que são possíveis de ser utilizada essa ideia de média geométrica, mas acaba se tomando um caminho opcional de resolução.

Definição 5.2.1 *A média geométrica dos n números positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é definida por*

$$Mg = \sqrt[n]{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}$$

Note que só definimos a média geométrica para números positivos. Dessa forma evitamos que a média geométrica não exista em algumas situações.

5.2.1 Aplicação das Médias Geométricas

Alguns exemplos de aplicação da média geométrica serão mostrados abaixo.

Exemplo 6 *Calcular a média geométrica dos valores 2, 4 e 8.*
Solução: *Calculamos a média geométrica fazendo*

$$Mg = \sqrt[3]{2.4.8} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Exemplo 7 *Determinado investimento teve um aumento de 4% no primeiro mês; no segundo mês, um aumento de 5%; e no terceiro mês, um aumento de 10%, então, o rendimento médio do investimento feito é, aproximadamente, de:*

(a) 4% (b) 5% (c) 6% (d) 7% (e) 8%

Solução: *Note que se fizermos simplesmente a média aritmética das porcentagens acabemos deixando de lado que esses aumentos foram sucessivos. Assim devemos calcular a média geométricas dos aumentos.*

Aumento de 4% = 1,04

Aumento de 5% = 1,05

Aumento de 10% = 1,10

$$Mg = \sqrt[3]{1,04.1,05.1,10}$$

$$Mg = \sqrt[3]{1,2012}$$

$$Mg = 1,06$$

Reposta correta: letra (c)

Exemplo 8 *Sabe-se que as medidas dos lados de um retângulo são 10 cm e 20 cm. Determine as medidas dos lados de um quadrado que possua a mesma área do retângulo.*
Solucão: *A área do retângulo é dada por:*

$$A = 10.20 = 200cm^2.$$

A área do quadrado é dada por:

$$A = L^2 = 10.20.$$

Logo, o lado do quadrado é:

$$L = \sqrt{10.20}.$$

Portanto, a medida do lado do quadrado será a média geométrica das medidas dos lados do retângulo de mesma área.

Exemplo 9 *O 5° elemento de uma PG é 3402 e o 3° é 378. Determine o 4° termo desta PG.*
Solução: *Para resolver esse problema, usaremos uma propriedade da PG. Dada uma PG de três termos tem-se* $(\frac{a}{q}, a, aq)$. *Logo,*

$$a = \sqrt{\frac{a}{q}.a.q}$$

Assim, qualquer termo de uma progressão geométrica (PG) pode ser obtido calculando a média geométrica dos seus termos vizinhos ou quaisquer termos simétricos em relação a ele.

Para encontrar o quarto elemento:

$$a_4 = \sqrt{a_3.a_5}$$

$$a_4 = \sqrt{378.3402}$$

$$a_4 = 1134$$

5.3 MÉDIA HARMÔNICA

Definição 5.3.1 *A média harmônica dos n números positivos* $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ *é dada por*

$$Mh = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

5.3.1 Aplicação da Média Harmônica

Veremos abaixo o campo de aplicação da média harmônica. Serão mostrados alguns exemplos da importância do cálculo e da interpretação da média harmônica.

Exemplo 10 *A média harmônica dos valores 2, 4, e 8 é*
Solução: *Para calcular a média harmônica basta fazer*

$$Mh = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{24}{7} \approx 3,43$$

Observe também que só definimos a média harmônica para números positivos. Assim evitamos as situações em que obtemos uma divisão por 0, (por exemplo, qual seria a média harmônica entre os valores 3 e -3?).

Exemplo 11 *(Cálculo da velocidade média) Dois amigos em viagem revesam-se para chegar a um determinado destino. Um deles dirigiu até exatamente a metade do percurso, e depois o outro assumiu o volante terminando o percurso. O primeiro deles manteve uma velocidade* $V_1 = 90km/h$. *Já o segundo, que estava com mais pressa, manteve uma velocidade de* $V_2 = 120km/h$. *Qual é a velocidade média dos dois motoristas em todo o percurso?*
Solução: *A intuição nos leva a fazer o cálculo da média aritmética das velocidades, que é de 105 km/h, mas devemos perceber que a distância percorrida é fixa e o tempo varia de acordo com a velocidade. Como velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais, a média*

aritmética não é a média pedida no problema. Assim, devemos usar uma média mais apropriada para esse tipo de problema.

$$V_m = \frac{S}{T}$$

$$90 = \frac{S}{T_1}, 120 = \frac{S}{T_2}$$

$$T_1 = \frac{S}{90}, T_2 = \frac{S}{120}$$

Aplicando a fórmula da média harmônica, tem-se

$$Mh = \frac{2S}{T_1 + T_2}$$

$$M_h = \frac{2}{\frac{1}{90} + \frac{1}{120}} = \frac{2}{\frac{4+3}{360}} = \frac{2.360}{2} \approx 102,85 km/h$$

Assim, a velocidade média durante todo o percurso é dada pela média harmônica, que é de 102,85 km/h.

Exemplo 12 *(Cálculo da vazão de torneiras) Para encher uma piscina, uma das torneiras leva 15 horas, e a outra leva 10 horas. Existe uma terceira torneira que demora 6 horas para encher a piscina. Caso as três torneiras fossem abertas ao mesmo tempo, quanto tempo elas levariam para encher toda a piscina?*

Solução: *Mais uma vez vemos que não se trata de uma média aritmética, pois temos que levar em consideração a vazão de cada torneira, que podem não serem as mesmas. Note que a vazão Q é inversamente proporcional ao tempo. Logo,*

$$Q = \frac{V}{T}$$

onde Q = vazão, V = volume e T = tempo. As vazões das troneiras 1, 2 e 3 são dadas por:

$$Q_1 = \frac{V_1}{T_1}, Q_2 = \frac{V_2}{T_2}, Q_3 = \frac{V_3}{T_3}$$

$$T_1 = \frac{V_1}{Q_1}, T_2 = \frac{V_2}{Q_2}, T_3 = \frac{V_3}{Q_3}$$

Então, a média harmônica será o tempo médio em que as torneiras vão encher o tanque.

$$M_h = \frac{3}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{6}}$$

$$M_h = \frac{3}{\frac{2+3+5}{30}}$$

$$M_h = \frac{3.10}{10} = 9$$

Como as três são ligadas ao mesmo tempo e no mesmo tanque, faremos 9 dividido por 3. Assim, elas levam 3 horas para encher o tanque.

Exemplo 13 *(Cálculo da densidade) Considere-se a mistura de duas substâncias, em estado líquido de densidades 3 g/cm³ e 4 g/cm³. Se fossem misturadas com a mesma massa de cada uma delas, sua densidade seria de quanto?*
Solução: *Dada as densidades D_1, D_2, temos*

$$D_1 = \frac{m_1}{V_1}, D_2 = \frac{m_2}{V_2}$$

$$V_1 = \frac{m_1}{D_1}, V_2 = \frac{m_2}{D_2}$$

Note que a média harmônica é a densidade média. Aplicando na fórmula da média harmônica, tem-se

$$M_h = \frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$$

$$M_h = \frac{2}{\frac{4+3}{12}}$$

$$M_h = \frac{2.12}{7} \approx 3,43 g/cm^3$$

Logo, a densidade seria de $3,43g/cm^3$.

5.4 MÉDIA QUADRÁTICA

Definição 5.4.1 *A média quadrática dos números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ definida por*

$$M_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

isto é, a média quadrática é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos números.

5.4.1 Aplicações da média quadrática

Exemplo 14 *Calcular a média quadrática dos números 1 e 7.*
Solução:

$$M_q = \sqrt{\frac{1^2 + 7^2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 49}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

Exemplo 15 *Em uma equipe de remo os atletas possuem as seguintes alturas: 1,55m, 1,75m e 1,80m. Qual é o valor do desvio padrão da altura desta equipe?*
Solução: *Para calcular o desvio padrão devemos encontrar primeiro a média aritmética das alturas.*

$$M_a = \frac{1,55 + 1,75 + 1,80}{3} = 1,68$$

Assim, o desvio padrão será:

$$DP = \sqrt{\frac{(1,55 - 1,68)^2 + (1,75 - 1,68)^2 + (1,80 - 1,68)^2}{3}}$$

$$DP = \sqrt{\frac{(-0,13)^2 + (0,02)^2 + (0,12)^2}{3}}$$

$$DP = \sqrt{\frac{0,0317}{3}} \approx 0,1028$$

6 A DESIGUALDADE ENTRE MÉDIAS

A desigualdade das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática é uma excelente ferramenta para a resolução de problemas interessantes para serem trabalhados em salas de aula do ensino médio, pois ela possibilita trabalhar com problemas algébricos, geométricos, de funções reais, entre outros. Vale destacar que um grande ganho que se tem ao trabalhar com desigualdade das médias é poder trabalhar com problemas que seriam necessárias ferramentas de nível superior, como o cálculo diferencial, por exemplo. Dessa forma, podemos usar esses problemas para atrair ainda mais a curiosidades e destacar a importância da matemática no nosso cotidiano.

6.1 A DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS PARA DOIS TERMOS

Teorema 6.1.1 *Considere $x,y \in R^+$, então, $M_q \geq M_a \geq M_g \geq M_h$, onde*

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

$$M_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

Demonstração: *Primeiro mostraremos que $M_q \geq M_a$. Para $x,y \in R^+$ temos,*

$$(x-y)^2 \geq \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

Somando $x^2 + y^2$ aos dois membros temos,

$$(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \geq (x^2 + y^2) + 2xy \Rightarrow$$

$$2(x^2+y^2) \geq (x^2+y^2)$$

Multiplicando os dois membros da desigualdade por $\frac{1}{4}$ temos,

$$2(x^2+y^2).\frac{1}{4} \geq (x^2+y^2).\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$(x^2+y^2).\frac{1}{2} \geq (x^2+y^2).\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$$

Logo, $M_q \geq M_a$.

Agora vamos mostrar que $M_a \geq M_g$.

Com x, y números positivos temos que

$$(\sqrt{x}) - (\sqrt{y}) \geq 0 \Rightarrow$$

$$x+y-2\sqrt{xy} \geq 0 \Rightarrow$$

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

Multiplicando os dois mebros da desigualdade por $\frac{1}{2}$ tem-se,

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Assim, $M_a \geq M_g$.

Vamos mostrar também que $M_g \geq M_h$.

$$(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}})^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2.\frac{1}{\sqrt{xy}}) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2.\frac{1}{\sqrt{xy}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

Logo, $M_g \geq M_h$.

Portanto, $M_q \geq M_a \geq M_g \geq M_h$.

□

6.2 A GENERALIZAÇÃO PARA A DESSIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA

Para realizar a demosntração dessa desigualdade vamos provar três Lemas.

Lema 6.2.1 *Sejam* $a,b,x,y \in R^+$, *tais que:*

$$x+y=a+b$$

Se $x \geq a$ *e* $y \geq b$, *então* $x=a$ *e* $y=b$.

Demonstração: *Temos que* $x+y=a+b$, *então temos* $(x-a)+(y-b)=0$.

Temos também que $x \geq a$ *e* $y \geq b$, *temos que* $(x-a)+(y-b)=0$.

Portanto, $0 \geq x-a \geq (x-a)+(y-b)=0 \Rightarrow x-a=0 \Rightarrow x=a$.

Por outro lado, $0 \leq y-b \leq (x-a)+(y-b)=0 \Rightarrow y-b=0 \Rightarrow y=b$.

□

Lema 6.2.2 *Dada uma lista de n termos* $a_1,a_2,...,a_n$, *se*

$$G=\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

então,

$$G=\sqrt[n+r]{a_1.a_2...a_n.G.G...G}=\frac{a_1+a_2+...a_n+G+G+...+G}{n+r}$$

Demonstração: *Partindo da hipótese que*

$$G=\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

, então

$$G^n=a_1.a_2...a_n \Rightarrow nG=a_1+a_2+...+a_n.$$

Logo, $\sqrt[n+r]{a_1.a_2...a_n.G^r} = \sqrt[n+r]{G^n.G^r} = G = \frac{(n+r)G}{n+r} = \frac{nG+rG}{n+r} = \frac{a_1+a_2+...+a_n+rG}{n+r}$

$\square$

Lema 6.2.3 *Seja $a_1, a_2, ..., a_n$ uma lista de n números reais positivos. Pondo $G = \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$, considere a lista de $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2m}$, com $a_{n+1} = a_{n+2} = ... = a_{2m} = G$, então,*

$$M_g(2m) = \sqrt[n]{a_1.a_2...a_{2m}} = G = M_g(n)$$

Demonstração: *Como $G = \sqrt[n]{a_1.a_2...a_{2m}}$, então $a_1.a_2...a_n = G^n$.*

Logo temos $\sqrt[2m]{a_1.a_2...a_n.G.G...G} = \sqrt[2m]{G^n.G^{2m-n}} = G.$

$\square$

Proposição 6.2.1 *Se $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais positivos, com $n \geq 2$, então:*

$$\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

ou seja,

$$M_g(a_1, a_2, ...a_n) \leq M_a(a_1, a_2, ..., a_n)$$

Alem disso, a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Demonstração: *Primeiro provaremos que a proposição vale para o caso n=2.*

Para n=2 temos,

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2} \Rightarrow$$

$$M_a = \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} = M_g.$$

Se $M_a = M_g$ então,

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \sqrt{a_1 a_2} \Rightarrow$$

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Agora vamos mostrar que se o resultado vale para todo $m = 2^k < n$, com $n \geq 3$, então esse resultado vale também para n.

Sendo assim, dado um natural $n \geq 3$, suponha que esse resultado vale para todo $m = 2^k < n$ e seja $a_1, a_2, ..., a_n$ uma lista de n números reais positivos. Existe um número natural k tal que $m = 2^k < n \leq 2^{k+1} = 2m$.

Tomando $G = \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$, considere a lista aumentada com 2m números

$$a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+2} = a_{2m} = G.$$

Pelo Lema 3, a média geométrica da lista aumentada não muda, ou seja, $M_g(2m) = M_g(n) = G$.

Tomando também $M_a(2m) = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ a média aritmética dos n números e $M_a(2m)$ a média aritmética da lista aumentada com 2m números. Temos

$$M_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2m}}{2m} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n + (2m - n)G}{2m} = \frac{n.M_a(n) + (2m - n)G}{2m}$$

Temos ainda,

$$M_a(2m) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2m}}{2m} = \frac{1}{2}.(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{m} + \frac{a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{2m}}{m})$$

Por hipóteses feita para n, a desigualdade vale para $m = 2^k$, logo

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m} \geq \sqrt[m]{a_1.a_2...a_m}$$

$$\frac{a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{2m}}{m} \geq \sqrt[m]{a_{m+1}.a_{m+2}...a_{2m}}$$

$$M_a(2m) \geq \frac{\sqrt[m]{a_1.a_2...a_m} + \sqrt[m]{a_{m+1}.a_{m+2}...a_{2m}}}{2}$$

Pelo caso m=2,

$$\frac{\sqrt[m]{a_1.a_2...a_m} + \sqrt[m]{a_{m+1}.a_{m+2}...a_{2m}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[m]{a_1.a_2...a_m}\sqrt[m]{a_{m+1}.a_{m+2}...a_{2m}}} = \sqrt{\sqrt[m]{a_1.a_2...a_{2m}}}$$

$$\sqrt{\sqrt[m]{a_1.a_2...a_{2m}}} = \sqrt[2m]{a_1.a_2...a_{2m}} = M_g(2m) = G$$

A última igualdade usa-se o Lema 3.

Portanto

$$\frac{n.M_a(n)+(2m-n).G}{2m} = M_a(2m) \geq G$$

Daí

$$M_a(n) \geq G = M_g(n)$$

Suponha agora que $M_a(n) = M_g(n)$.

Aplicando o Lema 2, temos

$$M_g(2m) = \sqrt[2m]{a_1.a_2...a_n.a_{n+1}...a_{2m}} = \frac{a_1+a_2+...+a_{2m}}{2m} = M_a(2m)$$

Como

$$M_a(2m) = \frac{1}{2}(\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m} + \frac{a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_{2m}}{m})$$

$$M_a(2m) \geq \frac{\sqrt[m]{a_1.a_2...a_m} + \sqrt[m]{a_{m+1}.a_{m+2}...a_{2m}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[m]{a_1.a_2...a_m}\,\sqrt[m]{a_{m+1}.a_{m+2}...a_{2m}}} = M_g(2m)$$

E $M_a(2m) = M_g(2m)$ *então,*

$$\frac{1}{2}(\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m} + \frac{a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_{2m}}{m}) =^{(1)} \frac{\sqrt[m]{a_1.a_2...a_m} + \sqrt[m]{a_{m+1}.a_{m+2}...a_{2m}}}{2} =^{(2)}$$

$$= \sqrt{\sqrt[m]{a_1.a_2...a_m}\,\sqrt[m]{a_{m+1}.a_{m+2}...a_{2m}}}$$

Da igualdade 1 e pelo Lema 1,

$$\sqrt[m]{a_1.a_2...a_m} = \frac{a_1+a_2+...+a_m}{m}$$

$$\sqrt[m]{a_{m+1}.a_{m+2}...a_{2m}} = \frac{a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_{2m}}{m}$$

Como a igualdade vale para m, por hipótese, então

$$a_1 = a_2 = ... = a_m$$

Da igualdade (2), como o caso da igualdade vale para m=2,

$$\sqrt[m]{a_1.a_2...a_n} = \sqrt[m]{a_{m+1}.a_{m+2}...a_{2m}}$$

$$a_{m+1} = a_{m+2} = ... = a_{2m}$$

Logo temos,

$$a_1 = \sqrt[m]{a_1.a_2...a_m} = \sqrt[m]{a_{m+1}.a_{m+2}...a_{2m}} = a_{2m}$$

Portanto, $a_1 = a_2 = ... = a_m = a_{m+1} = ... = a_{2m}$ *em particular,* $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Vamos usar o Princípio da Boa Ordenação para mostrar que esse resultado provado acima vale para todo $n \geq 2$.

Supondo que é falso para algum número natural e seja esse natural $n \geq 3$ *o menor natural tal que o resultado é falso. Então o resultado vale para todo* $m = 2^k < n$. *Pelo que foi mostrado, valendo o resultado para* $m = 2^k < n$, *o resultado vale também para n, o que não ocorre. Logo, o resultado vale para todo* $n \geq 2$.

Para o caso em que os termos são iguais vamos mostrar abaixo.

Demonstração: *Dado um natural n, considere uma lista de n termos* $a_1, a_2, ..., a_n$. *Suponha* $a_1 = a_2 = ... = a_n$, *logo*

$$M_a(n) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{n.a_1}{n} = a_1 = \sqrt[n]{(a_1)^n} = \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} = M_g.$$

Portanto, $M_g(n) \leq M_a(n)$ *e a igualdade vale se, e somente se,* $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

$\square$

6.3 A GENERALIZAÇÃO PARA A DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS GEOMÉTRICA E HARMÔNICA

Proposição 6.3.1 *Dados $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos tem-se:*

$\frac{n}{\frac{1}{a_1}} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_2} \leq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$, *ou seja,* $M_h(a_1, a_2, ..., a_n) \leq M_g(a_1, a_2, ..., a_n)$

A igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Demonstração: *Nessa demonstração iremos usar uma desigualdade já estabelecida entre as médias aritmética e geométrica para números reais, já provada anteriormente.*

Note que, se $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais positivos, então $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}$, também são. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica temos que:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{H}.$$

Então, $\frac{1}{G} \leq \frac{1}{H} \Rightarrow H \leq G$.

Se $H = G$ tem-se, $\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}} = \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}{n}$.

Portanto, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = ... = \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n.$$

□

6.4 A GENERALIZAÇÃO PARA A DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS ARITMÉTICA E QUADRÁTICA

Proposição 6.4.1 *Dados $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos tem-se:* $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$ *ou seja,* $M_a(a_1, a_2, ..., a_n) \leq M_q(a_1, a_2, ..., a_n)$.

A igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Demonstração: *Sejam A e Q as médias aritmética e quadrática dos números a_i, com $i \in (1, 2, ..., n)$.*

Sabemos que $(a_i - A)^2 \geq 0$. Assim, temos:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i - A)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2A.\sum_{i=1}^{n} a_i + nA^2 = nQ^2 - 2AnA + nA^2 = nQ^2 - nA^2 = n(Q^2 - A^2).$$

Desse modo, temos $n(Q^2 - A^2) \geq 0 \Rightarrow Q^2 \geq A^2$. Logo concluímos que $Q \geq A$.

A igualdade vale, se e somente se, $\sum_{i=1}^{n}(a_i - A)^2 = 0$. *Portanto, devemos ter, para todo* $i \in (1,2,...,n), a_1 = A$. *O que significa que* $a_1 = a_2 = ... = a_n = A$.

$\square$

6.5 A DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS HARMÔNICA, GEOMÉTRICA, ARITMÉTICA E QUADRÁTICA

Teorema 6.5.1 *Dada uma coleção de números reais positivos* $a_1, a_2, ..., a_n$, *verificam-se as seguintes desigualdades:*

$$M_q \geq M_a \geq M_g \geq M_h$$

Em cada caso a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Demonstração: *Essas desigualdades acima decorrem das proposições (1), (2), (3) que provamos anteriormente.*

Esse importante teorema matemático tem diferentes aplicações nas áreas da matemática e é uma ferramenta poderosa para a resolução de diversos problemas. Veremos a seguir as representações geométricas das médias e da desigualdade das médias.

$\square$

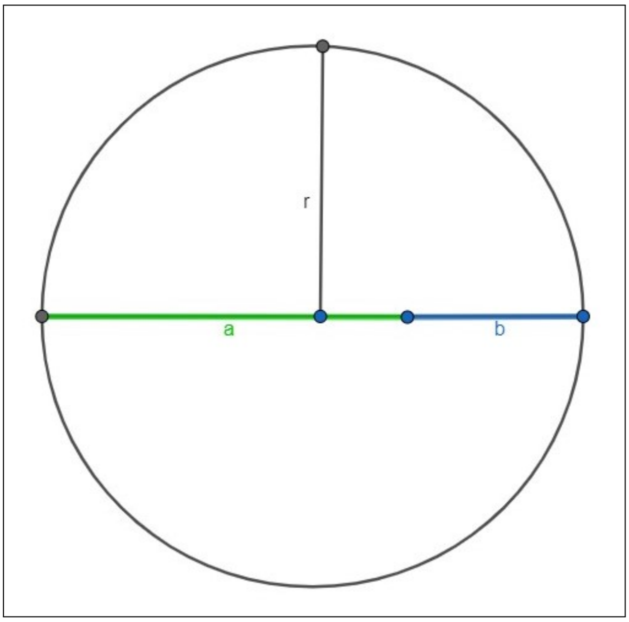
7 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA PARA AS MÉDIAS

Usaremos conceitos e construções geométricas para representar geometricamente as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, e também verificar a desigualdade das médias a partir de dois segmentos reta distintos.

7.1 A REPRESENTAÇÃO DA MÉDIA ARITMÉTICA

Sejam a e b dois segmentos de reta. Tomando, sem perda de generalidade, a diferente de b. Construindo uma circunferência, com o diâmetro sendo $a+b$, ou seja, $D = a+b$.

Figura 5 – Circunferência de diâmetro $a+b$.



Fonte: Autor

Note que, $D = a+b$, com $D = 2r \Rightarrow 2r = a+b$. Assim, temos $r = \frac{a+b}{2}$.

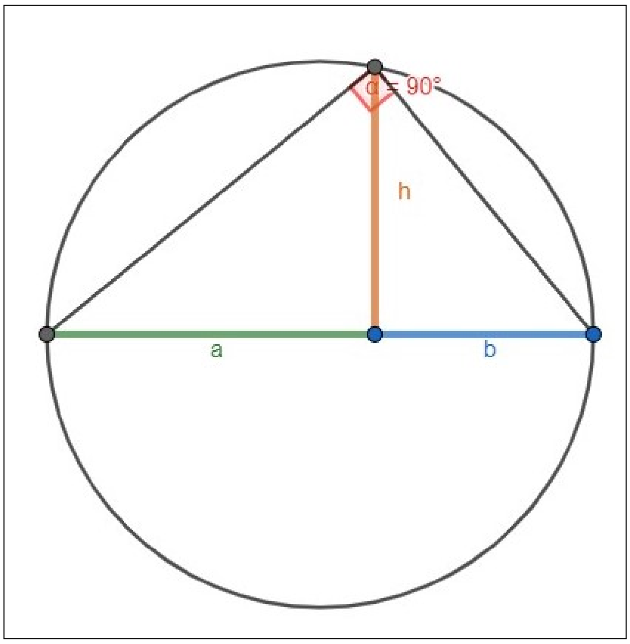
Logo, $r = M_a$, com relação aos segmentos a e b.

7.2 A REPRESENTAÇÃO DA MÉDIA GEOMÉTRICA

Partindo da circunferência construída na figura 5, iremos construir uma outra figura que nos ajudará a encontrar a forma geométrica da média geométrica.

Traçamos h perpendicular ao diâmetro, exatamente no ponto de intersecção de a e b, feito isso determinamos um ponto na circunferência de forma que um triângulo seja formado. Sabe-se que todo triângulo inscrito na semicircunferência é um triângulo retângulo.

Figura 6 – Representação da média geométrica.



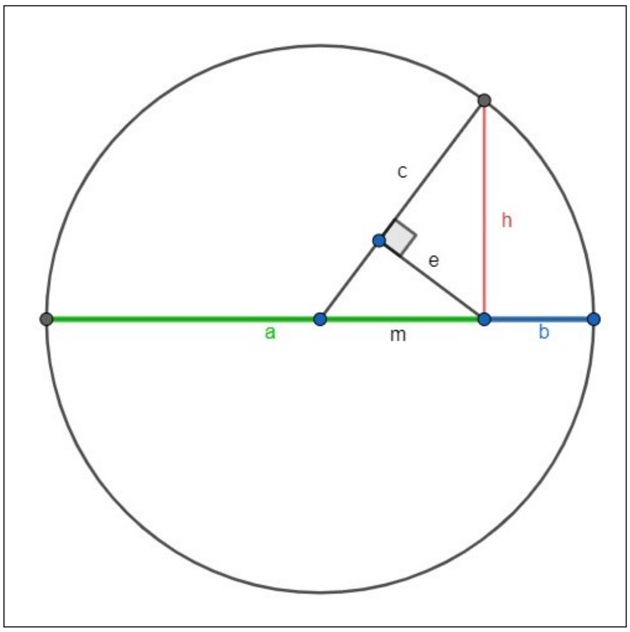
Fonte: Autor

Utilizando a relação métrica no triângulo retângulo, temos $h^2 = a.b \Rightarrow h = \sqrt{a.b}$. Portanto, $h = M_g$, com relação aos segmentos a e b.

7.3 A REPRESENTAÇÃO DA MÉDIA HARMÔNICA

Veja a construção da média harmônica na fugura 7.

Figura 7 – Representação da média harmônica.



Fonte: Autor

Obtemos essa representação da média harmônica através da construção feita na figura 5, e da altura na figura 6, traçamos o raio r que parte do centro e vai até o ponto que o segmento h toca a circunferência, obtendo assim um triângulo retângulo de hipotenusa igual ao raio r e catetos m e h. Traçando a altura e, obtemos um outro triângulo retângulo de hipotenusa h e catetos c e e.

Por semelhança de triângulos (caso AA), temos que $\frac{c}{h} = \frac{h}{r} \Rightarrow c = \frac{h^2}{r}$.

Como $h^2 = a.b$, e $r = \frac{a+b}{2}$, então $c = \frac{a.b}{\frac{a+b}{2}} \Rightarrow c = \frac{2.a.b}{a+b}$.

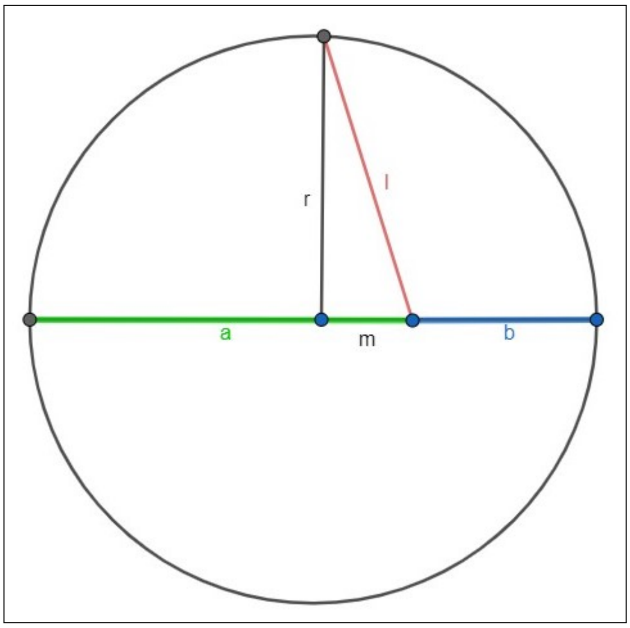
Por outro lado, $M_h = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2}{\frac{a+b}{a.b}} = \frac{2.a.b}{a+b}$

Portanto, $c = M_h$.

7.4 A REPRESENTAÇÃO DA MÉDIA QUADRÁTICA

Do raio r determinado na figura 5, construímos o segmento l, com extremidades na intersecção de a e b e na intersecção entre r e a circunferência. Assim, formamos um triângulo retângulo com catetos r e m, como mostra a figura 8.

Figura 8 – Representação da média quadrática.



Fonte: Autor

Temos, $m = \frac{a+b}{2} - b \Rightarrow m = \frac{a-b}{2}$, e $r = \frac{a+b}{2}$.

Pelos Teorema de Pitágoras, $l^2 = m^2 + r^2 \Rightarrow l^2 = (\frac{a-b}{2})^2 + (\frac{a+b}{2})^2 \Rightarrow l^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

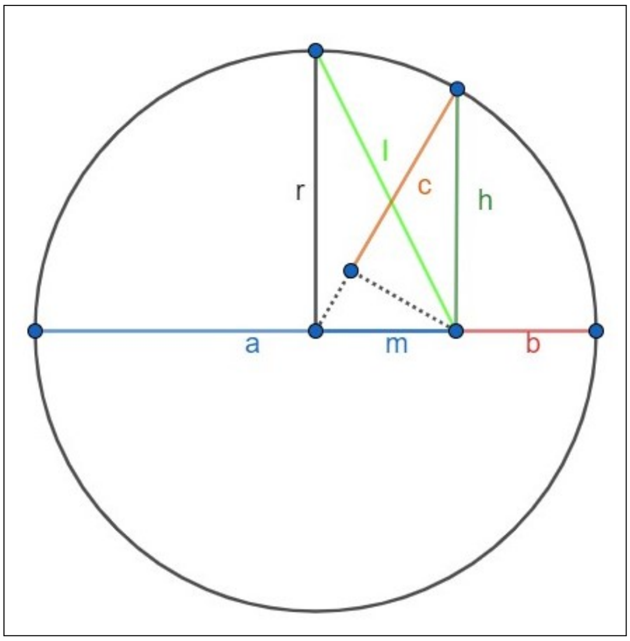
Portanto, $l = M_q$.

7.5 REPRESENTAÇÃO DA DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS

Observando as construções realizadas nas figuras anteriores e analisando as suas relações temos que

$$r = M_a, h = M_g, c = M_h, l = M_q.$$

Figura 9 – Representação da desigualdade das médias.



Fonte: Autor

Essa desigualdade tem diferentes aplicações nas áreas da matemática e é uma ferramenta poderosa para a resolução problemas. Veremos algumas abordagens que podem ser solucionados usando essas desigualdades.

8 APLICAÇÃO DAS DESIGUALDADES DAS MÉDIAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo iremos discutir alguns problemas algébricos, geométricos, de funções reais e de otimização, métodos de resolução e como o uso das desigualdades das médias pode ser uma ferramenta importante na resolução de tais problemas. O uso das desigualdades das médias torna possível e interessante trabalhar esses problemas no ensino médio.

8.1 PROBLEMAS ALGÉBRICOS

Nesta seção iremos discutir problemas algébricos usando a desigualdade das médias. Esses problemas serão trabalhados com o uso do Teorema da Desigualdade das Médias.

Exemplo 16 *Se a, b e c são inteiros positivos que satisfazem a condição* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$ *prove que a.b.c é um cubo perfeito.*

Solução: *Temos que a, b e c são inteiros positivos. Sendo assim, podemos aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica.*

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$$

Como sabemos que só ocorre a igualdade se, e somente se, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$ *e pelo enunciado* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$, *tem,se* $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=1$.

E portanto $a=b=c=1$.

Logo, $a.b.c=a.a.a=a^3$.

Exemplo 17 *Sejam* $x>0$ *e* $y>0$ *números reais tais que* $x+y=2$. *Mostre que* $x.y \leq 1$.

Solução: *Pela desigualdade das médias quadrática e aritmética, temos* $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$.

Pelo enunciado, $x+y=2$, *então* $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{2}{2}=1 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2$.

Por outro lado, $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, *e* $x+y=2 \Rightarrow x^2+y^2=2^2-2xy=4-2xy$.

Daí, $x^2+y^2 \geq 2 \Rightarrow 4-2xy \geq 2 \Rightarrow 2xy \leq 2 \Rightarrow xy \leq 1$.

Temos a igualdade $xy=1$ *se, e somente se,* $x=y=1$.

Exemplo 18 *Prove que, se* $x \geq 0$, *então* $3x^3-6x^2+4 \geq 0$.

Solução: *Note que* $3x^3+4=2x^3+x^3+4$, *podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Assim,*

$$\frac{2x^3+x^3+4}{3} \geq \sqrt[3]{2x^3.x^3.4} \Rightarrow$$

$$3x^3+4 \geq 3.\sqrt[3]{8.x^6} \Rightarrow$$

$$3x^3+4 \geq 3.2.x^2 \Rightarrow$$

$$3x^3+4 \geq 6x^2 \Rightarrow$$

$$3x^3-6x^2+4 \geq 0.$$

8.2 PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Nesta seção, iremos trabalhar com problemas geométricos que podem ser solucionados com o uso da desigualdade das médias, problemas de geometria plana e geometria espacial.

Exemplo 19 *Mostre que entre todos os retângulos de perímetro 2p, o quadrado é o de maior área.*

Solução: *Dados os lados do retângulo x e y, temos $x+y=p$, ou seja, $\frac{x+y}{2}=\frac{p}{2}$.*

A área do retângulo é $A=x.y$. Assim, $\sqrt{A}=\sqrt{x.y} \leq \frac{x+y}{2}=\frac{p}{2}$.

Portanto, $\sqrt{A} \leq \frac{p}{2} \Rightarrow A \leq \frac{p^2}{4}$.

A igualdade é obtida quando $x=y$. Portanto, o retângulo de maior área é o quadrado de área $\frac{p^2}{4}$.

Exemplo 20 *De todos os paralelepípedos, conhecida a soma das medidas das três arestas perpendiculares entre si, encontrar o paralelepípedo de maior volume.*

Solução: *Tome a,b,c como as arestas do paralelepípedo e $m=a+b+c$. O volume do paralelepípedo é $V=a.b.c$. Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométricas, $M_a \geq M_g$ temos:*

$$\frac{m}{3}=\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a.b.c}=\sqrt[3]{V} \Rightarrow$$

$$\frac{m}{3} \geq \sqrt[3]{V} \Rightarrow V \leq \frac{m^3}{27}.$$

Logo, a igualdade só ocorre quando $a = b = c = \frac{m}{3}$, isto é, quando o paralelepípedo for um cubo.

8.3 MÁXIMO E MÍNIMO DE FUNÇÕES

Nesta seção iremos trabalhar com problemas que envolvem máximo e mínimo de funções. Saindo do tradicionalismo que é trabalhar somente com o vértice da parábola, vamos usar a desigualdade das médias para achar máximos e mínimos de outras funções.

Exemplo 21 *Se $x \in R$ e $x > 0$, prove que:*

$$x + \frac{1}{x} \geq 0$$

Solução: *Note que pelo fato de x ser um número maior do que zero, o seu inverso multiplicativo também é maior do que zero. Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos:*

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x.\frac{1}{x}} \Rightarrow$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1$.

Exemplo 22 *Qual é o valor máximo da função $f(x) = sen(x) + cos(x)$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$.*
Solução: *Note que, pelo fato do domínio da função ser $0 < x < \pi$, temos que $sen(x) > 0$ e $cos(x) > 0$. Logo, podemos aplicar a desigualdade das médias aritmética quadrática.*

$$\frac{se(x) + cos(x)}{2} \leq \sqrt{\frac{sen^2(x) + cos^2(x)}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{sen(x) + cos(x)}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$sen(x) + cos(x) \leq 2.\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$sex(x) + cos(x) \leq \sqrt{2}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $sen(x) = cos(x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Portanto, o valor máximo que a função assume é $\sqrt{2}$.

8.4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO.

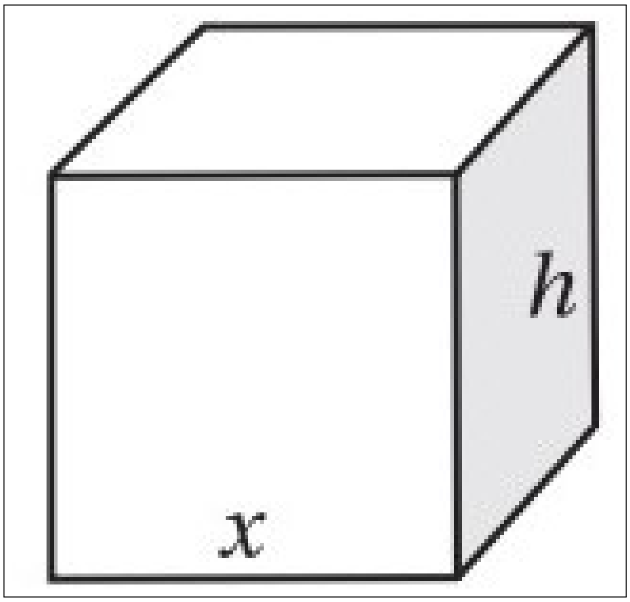
Problemas de otimização são bastante intrigantes pelo fato de que não vem a função descrita no problema. Essa característica traz um desafio diferente para os alunos, que é de modelar a situação problema. Esse tipo de problema é muito utilizado no âmbito do ensino superior, mas iremos fazer uma abordagem para o ensino médio, sempre mostrando também as diferentes abordagens.

O uso das desigualdades das médias dará a acessibilidade ao tema para os alunos do ensino médio.

Exemplo 23 *Se* $1200cm^2$ *de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa e as dimensões para que isso ocorra.*

Solução: *Seja x a medida do lado da base quadrada e h a medida da altura da caixa, como mostra a imagem*

Figura 10 – Caixa com base quadrada.



Fonte**:** RPM N°76

Assim temos $A = x^2 + 4hx = 1200$ *sendo a área da caixa e* $V = x^2h$ *sendo o volume da caixa. Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos:*

$$\frac{1200}{3} = \frac{x+2xh+2xh}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 2xh 2xh} = \sqrt[3]{4(x^2h)^2} \Rightarrow$$

$$400 \geq \sqrt[3]{4V^2} \Rightarrow$$

$$400^3 \geq 4V^2 \Rightarrow$$

$$4000 \geq V$$

Note que o volume máximo que a caixa pode assumir é de $4000cm^3$. *Para encontrar o valor das medidas x e y basta uma simples manipulação algébrica.*

Esse mesmo problema é resolvido no ensino superior usando noções de cálculo diferencial. Veja na solução abaixo.

Solução usando cálculo: *Tendo a área* $A = x^2 + 4hx = 1200$ *e* $V = x^2h$, *tem-se*

$$x^2 + 4hx = 1200 \Rightarrow$$

$$4hx = 1200 - x^2 \Rightarrow$$

$$h = \frac{300}{x} - \frac{x}{4} \Rightarrow$$

Substituindo h em $v = x^2h$,

$$V = x^2.(\frac{300}{x} - \frac{x}{4}) \Rightarrow$$

$$V = 300x - \frac{x^3}{4} \Rightarrow$$

Para encontrar o valor máximo do volume, devemos encontrar para qual valor a derivada é igual a 0, ou seja, $V'(x) = 0$.

Derivando $V(x)$, *tem-se*

$$V'(x) = 300 - \frac{3x^2}{4} \Rightarrow$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 300 - \frac{3x^2}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$300 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow$$

$$3x^2 = 1200 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{400} \Rightarrow$$

$$x = 20cm$$

Para encontrar o volume máximo devemos aplicar $x = 20cm$ na equação do volume.

$$V = 300x - \frac{x^3}{4} \Rightarrow$$

$$V = 300.20 - \frac{20^3}{4} \Rightarrow$$

$$V = 4000cm^3$$

E para encontrar o valor da altura h devemos substituir o valor $x = 20cm$ na equação da altura

$$h = \frac{300}{x} - \frac{x}{4} \Rightarrow$$

$$h = \frac{300}{20} - \frac{20}{4} \Rightarrow$$

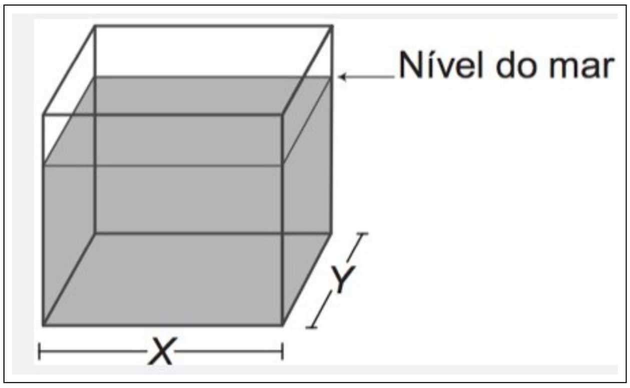
$$h = 15 - 5 \Rightarrow$$

$$h = 10cm$$

Note que a segunda abordagem é muito mais complicada tendo em vista que os alunos provavelmente não comecem ainda esses conceitos iniciais de Cálculo Diferencial, tornando assim o uso das médias uma ferramenta muito forte para a resolução deste problema.

Exemplo 24 *(Enem 2017) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.*

Figura 11 – Viveiro de lagostas (prisma reto-retângulo).



Fonte**:** Inep

Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

Solução 1: *(Usando vértice da parábola) X e Y são as dimensão do viveiro retangular que iremos trabalhar, assim temos o perímetro* $2X + 2Y = 100 \Rightarrow X + Y = 50 \Rightarrow Y = 50 - X$.

A área da base é $A = X.Y$. *Assim,*

$$A = X.Y \Rightarrow$$

$$A = X.(50 - X) \Rightarrow$$

$$A = 50X - X^2.$$

Como queremos maximizar a área da base, devemos calcular o vértice da parábola $A = 50X - X^2$.

$$X_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow X_v = \frac{-50}{2.(-1)} \Rightarrow$$

$$X_v = \frac{-50}{-2} \Rightarrow X_v = 25 \Rightarrow Y_v = 25.$$

Portanto, a área será máxima quando $X = Y = 25$.

Solução 2: *(Usando a desigualdade das médias) Pelo fato de estarmos trabalhando com comprimentos de segmentos, então temos que X e Y são sempre positivos. Logo, podemos utilizar a desigualdade das médias.*

Note que, como queremos maximizar a área da base $A = X.Y$*, e a tela é usada na sua totalidade que é 100 metros lineares, temos:*

$$2X + 2Y = 100 \Rightarrow X + Y = 50.$$

Usando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos

$$\frac{X+Y}{2} \geq \sqrt{X.Y} \Rightarrow$$

$$\frac{50}{2} \geq \sqrt{A} \Rightarrow$$

$$25 \geq \sqrt{A} \Rightarrow$$

$$25^2 \geq A \Rightarrow$$

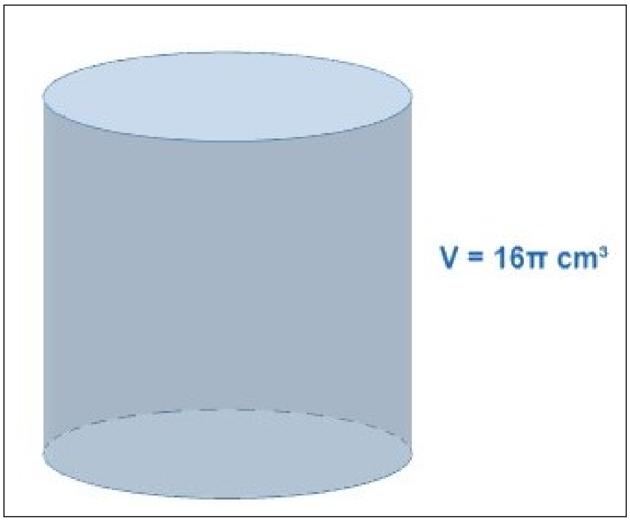
$$A \leq 625.$$

Logo, a área máxima será de $625m^2$ *e isso ocorre se, e somente se,* $X = Y = 25$.

Note que um mesmo problema pode ser resolvido de maneiras diferentes, no campo aritmética, geométrico, com conceitos simples e avançados, fazendo com que se tenha um certo cuidado na abordagem de alguns problemas matemáticos, sempre levando em conta a etapa de ensino e o nível de aprendizagem que o aluno se encontra. Essa maneira de olhar os problemas matemáticos deixam ainda mais claro a importância que a didática da matemática tem, não é simplesmente expor um problema e fazer as operações necessárias para se encontrar o que se pede, tem que se ter todo um cuidado para que o aluno não tenha um prejuízo durante as aulas, fazendo com que ele tenha prazer e que veja o problema possível de resolução mas, ao mesmo tempo desafiador.

Exemplo 25 *Uma lata de zinco de volume* $16\pi cm^3$ *deve ter a forma de um cilindro circular reto. Determine a altura e o raio do cilindro para que a quantidade de material usado em sua fabricação seja a menor possível.*

Figura 12 – Cilindro circular reto.



Fonte**:** Autor

Solução: *Tomando r como o raio da base do cilindro e h como a altura, temos que a quantidade de material usado na fabricação desse cilindro é dado por*

$$Area_{total} = Area_{lateral} + 2.(Area_{base}).$$

$$Area_{total} = 2\pi h + 2\pi r^2.$$

Pelo enunciado tesmo que o volume total é de $V = 16\pi cm^3$, *então*

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 16\pi = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{16}{r^2}$$

Substituindo h na equação da área total, temos

$$Area_{total} = 2\pi r \frac{16}{r^2} + 2\pi r^2 \Rightarrow$$

$$Area_{total} = \frac{32\pi}{r} + 2\pi r^2.$$

De maneira esperta, vamos manipular a equação da $Area_{total}$ de maneira a deixá-la pronta para usarmos a desigualdade das médias.

$$Area_{total} = \frac{32\pi}{r} + 2\pi r^2 \Rightarrow Area_{total} = \frac{16\pi}{r} + \frac{16\pi}{r} + 2\pi r^2.$$

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos

$$\frac{\frac{16\pi}{r} + \frac{16\pi}{r} + 2\pi r^2}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{16\pi}{r} . \frac{16\pi}{r} . 2\pi r^2}$$

$$\frac{\frac{16\pi}{r} + \frac{16\pi}{r} + 2\pi r^2}{3} \geq \sqrt[3]{512\pi^3}$$

$$\frac{16\pi}{r} + \frac{16\pi}{r} + 2\pi r^2 \geq 3.\sqrt[3]{512\pi^3} \Rightarrow$$

$$Area_{total} \geq 3.\pi.8 \Rightarrow Area_{total} \geq 24\pi$$

Portanto, a $Area_{total}$ é sempre maior ou igual a$24\pi cm^3$. Ocorre a igualdade se, e somente se, $\frac{16\pi}{r} = 2.\pi r^2$.

$$\frac{16\pi}{r} = 2\pi r^2 \Rightarrow \frac{16\pi}{2\pi} = r^3 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = \sqrt[3]{8} \Rightarrow r = 2.$$

Sabendo que $h = \frac{16}{r^2}$ e substituindo o valor de $r = 2$, temos

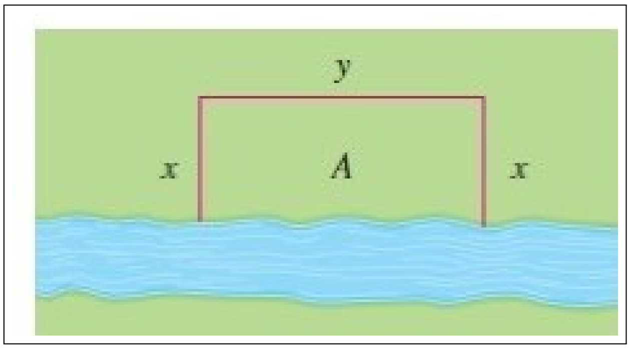
$$h = \frac{16}{r^2} \Rightarrow h = \frac{16}{2^2} \Rightarrow h = 4.$$

Portanto, para minimizarmos o material utilizando na construção desse cilindro devemos ter o raio igual a 2cm e altura igual a 4cm.

Essse tipo de problema traz consigo uma necessidade do dia-a-dia que é minimizar o custo de uma construção. Esses problemas fazem com que o aluno dê uma atenção maior, pois mostra uma aplicação da matemática em problemas rotineiros. Esssa matemática que aborda situações do cotidiano tem que ser mostrada sempre que possível em sala de aula, pois devemos sempre mostrar a funcionalidade das ferramentas estudadas.

Exemplo 26 *(STEWART, 2013) Um fazendeiro tem 1200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem a maior área?*

Figura 13 – Campo retangular.



Fonte**:** Stewart, 2013, p.294

Solução: *: Tome x e y como sendo a comprimento e a largura do retângulo (em metros). Assim, a área do retângulo é dada por:*

$$A = x.y.$$

O comprimento total da cerca é de 1200*m. Assim,*

$$2x + y = 1200.$$

Note que x e y são positivos, pois são comprimentos de segmentos. Assim, podemos usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

$$\frac{2x+y}{2} \geq \sqrt{2xy} \Rightarrow$$

$$\frac{1200}{2} \geq \sqrt{2xy} \Rightarrow$$

$$600 \geq \sqrt{2xy} \Rightarrow$$

$$600^2 \geq 2xy \Rightarrow$$

$$360000 \geq 2xy \Rightarrow$$

$$180000 \geq xy = A$$

Portando, a área do retângulo é sempre menor do que $180000m^2$*. A igualdade ocorre se, e somente se,* $2x = y$*. Note que* $2x = y \Rightarrow x = 300$ *e* $y = 600$*, pois o comprimento da tela tem que ser 1200 metros.*

Assim, as dimensões do campo são $x = 300$ *e* $y = 600$ *com a área máxima de* $180000m^2$*.*

Exemplo 27 *(STEWART, 2013) Um fazendeiro quer cercar uma área de* $15000m^2$ *em um campo retangular e então dividi-lo aos meio com umas cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize o custo da cerca?*
Solução: *Tomando x e y como as medidas do comprimento e da largura (em metros), temos que a área* $A = 15000m^2 = x.y$*.*

O custo para cercar o campo retangular é $C = 2x + 3y$*, tomando* $x > y$*. Pelo fato de x e y serem positivos podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.*

$$\frac{2x+3y}{2} \geq \sqrt{2x3y} \Rightarrow$$

$$\frac{C}{2} \geq \sqrt{6.15000} \Rightarrow$$

$$C \geq 2\sqrt{90000}$$

$$C \geq 2.300 \Rightarrow$$

$$C \geq 600.$$

Assim, temos que o Custo é sempre maior ou igual a 600, e vale a igualdade se, e somente se, $2x = 3y$*. Isso nos leva a* $x = 150$ *e* $y = 100$*.*

Portanto, as dimensões do terreno são $x = 150$ *e* $y = 100$*, gerando um custo* $C = 600$*.*

Veja que nos dois primeiros problemas foi desenvolvida as soluções de duas maneiras diferentes, no primeiro problema fizemos uma abordagem usando derivadas, o que não é possível fazer no ensino básico, mas também foi mostrado que temos a possibilidade de usar a desigualdade das médias. No segundo problema resolvemos com duas ferramentas mais simples, a ideia de vértice de parábolas e novamente a desigualdade das médias. Nos outros problemas nos atentamos a usar somente a desigualdade das médias, já que é um dos objetivos desse estudo.

9 EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: ESTUDO DAS MÉDIAS E DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

A aplicação desta experiência didática foi desenvolvida na Escola de Ensino Médio Monsenhor furtado, localizada na cidade de Meruoca – Ceará. Foi montado um grupo com 15 alunos da 3° séries, para essa prática experimental. A partir da transposição didática de problemas envolvendo média e desigualdade entre as médias, foi realizado um estudo com o propósito de explorar a aplicação de médias na resolução de situações-problema por meio de uma engenharia didática.

Foram criadas situações didáticas compostas por situações-problema fundamentadas na TSD, fazendo uma análise da metodologia utilizada e suas concepções. Serão analisados também, possíveis comportamentos dos alunos perante as situações-problema e as suas possíveis soluções, correspondendo assim a fase de concepção e análise a priori da ED.

9.1 CONCEPÇÕES DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Nas análises prévias da ED, o uso das médias foi desenvolvido no campo epistêmico-matemático e fundamentando a concepção das situações-problema. Definiremos as variáveis para a orientação da pesquisa. As variáveis são definidas na perspectiva microdidática local, pretendemos que haja interação entre os processos matemáticos mostrados e os problemas mostrados. Para (ALMOULOUD, 2016), uma situação-problema é uma questão discursiva, com um enunciado claro e objetivo, na qual o objetivo final é utilizar de forma implícita os objetivos matemáticos a serem alcançados por meio de resolução de problemas.

Assim, a concepção da situação didática deste trabalho visa ao uso das médias na resolução de situações-problema como um conteúdo a ser ensinado em sala de aula, elaborando uma hipótese, que nos mostre o desenvolvimento do processo de resolução por parte dos alunos. Esta pesquisa é fundamentada na metodologia de pesquisa ED em conjuntos com a metodologia de ensino TSD. O grupo escolhido para realizar a investigação foi montado com alunos de 3° série.

Neste contexto podemos explorar um conteúdo que, na maioria das vezes, é visto superficialmente e assim, poder trabalhar de forma mais aprofundada, aplicando em vários campos da matemática. Partindo do estudo das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, foram selecionados alguns problemas para aplicarmos essas ferramentas. Dessa forma, foram elaboradas situações-problema que abordam o assunto estudado, conduzindo os alunos para a construção de soluções matemáticas. Destacamos que neste conteúdo é necessário que os alunos tenham conhecimentos prévios sobre álgebra e aritmética para o desenvolvimento desse tema.

9.2 ANÁLISES A PRIORI DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Pela ED, nesta etapa é definida a variável didática que será usada nesta pesquisa, sendo a microdidática, para que possamos direcionar um plano de ação e também para que os objetivos sejam atendidos. Daí, espera-se prever os comportamentos dos alunos em cada fase da TSD e, ainda, fazer-se um levantamento de hipótese didáticas referentes às situações-problema empregada. Essas ações são as que chamamos de análises preliminares. Realizamos um estudo, nas seções anteriores, sobre o estudo das médias e o teorema da desigualdade entre as médias, destacando algumas aplicações dessa ferramenta. Dessa forma, foram elaboradas situações didáticas, com fundamentação na TSD, formulando uma atividade proposta para os estudantes do curso do ensino médio com o objetivo de estimular o processo cognitivo do estudante para que se desenvolva um conhecimento ordenado nas quatro fases da TSD.

Situação-problema 1: Determinado investimento teve um aumento de 4% no primeiro mês; no segundo mês, um aumento de 5%; e no terceiro mês, um aumento de 10%, então, o rendimento médio do investimento feito é, aproximadamente, de:

Situação de ação: Fundamentado no conhecimento prévio do estudo de porcentagem, espera-se que o aluno tenha uma ideia de usar um valor, para servir como base de cálculo, para que o cálculo do rendimento médio seja encontrado com maior facilidade. Nesse momento o aluno, poderá ter dúvida em qual valor escolher. O professor pode perguntar qual seria o melhor valor a ser utilizado para que tenha uma resposta mais imediata. Espera-se que o aluno consiga conjecturar um valor médio.

Situação de formulação: Depois de encontrarem uma suposta solução, espera-se que o aluno encontre uma maneira mais direta de encontrar um aumento, o que chamamos de fator de atualização. O aluno poderá perceber uma generalização para encontrar um fator de atualização para um aumento de valores. O professor poderá questionar se a ideia é válida para descontos também. Nesse momento os alunos poderão sentir dificuldade em formular uma ideia para encontrar a média de investimento, já que eles não fizeram a média aritmética entre as porcentagens. O professor poderá fazer alguns questionamentos que direcionem os alunos.

Situação de validação: A partir da resolução encontrada, espera-se que os alunos percebam que essa ideia vale para qualquer situação semelhante que envolva fatores multiplicativos. Portanto, o discente poderá concluir que, quando se trata de aumentos sucessivos, devemos abordar a situação-problema dessa forma.

Situação de institucionalização: O professor retoma o domínio da situação didática para analisar as soluções encontradas pelos alunos e verificar sua validade. O professor mostra aos estudantes a finalidade da atividade proposta, relatando que a média geométrica é muito importante para uma situação dessa natureza. O conhecimento obtido através da situação didática fará parte do saber matemático dos discentes.

Adiante, na situação 2, será posto um problema que envolve a média geométrica. Buscaremos perceber que estamos usando a média aritmética na resolução desse tipo de problema.

Situação–problema 2: Uma piscina no formato de um prisma retangular possui 2 metros de profundidade, 12 metros de largura e 9 metros de comprimento. Se fosse construído um reservatório no formato de um cubo que tivesse o mesmo volume da piscina, a medida das suas arestas seria de quanto?

Situação de ação: Fundamentado no conhecimento prévio do estudo de volume de prismas, espera-se que o aluno tenha uma ideia de como calcular o volume dos dois prismas dados na situação-problema. Nesse momento o aluno poderá sentir dificuldade em mostrar o volume do cubo de maneira algébrica, já que as medidas do cubo estão em função de uma incógnita. O professor sugere que o aluno utilize uma letra qualquer para expressar as arestas do cubo. Já com os conhecimentos prévios que o aluno tem sobre o cubo de um número, espera-se que o aluno perceba que a solução encontrada tem que ser um número que quando elevado ao cubo gere o volume do prisma. Espera-se que o aluno consiga perceber que esse número encontrado na solução é o resultado da raiz cúbica do volume do prisma.

Situação de formulação: Depois de encontrarem uma suposta solução, espera-se que o aluno encontre uma maneira mais direta de encontrar o volume de um cubo que tenha o mesmo volume de um prisma, dadas suas medidas. O aluno poderá encontrar dificuldade em formalizar a estrutura algébrica, já que esse modelo apresentado a ele é novo. O professor poderá questionar se a ideia de igualar os dois volumes é válida, tendo em vista que as duas formas têm que ter o mesmo volume. O professor sugere que os alunos coloquem outras medidas no prisma, para que eles verifiquem se a estrutura de solução está correta. O aluno percebeu que a estrutura não tem falhas e assim finaliza a sua ideia de solução.

Situação de validação: A partir da resolução encontrada, espera-se que os alunos percebam que essa ideia vale para qualquer situação semelhante envolvendo comparação entre volume de cubo e prismas. Portanto, o discente poderá concluir que, quando nos depararmos com esse problema proposto devemos abordar a situação-problema dessa forma.

Situação de institucionalização: O professor retoma o domínio da situação didática para analisar as soluções encontradas pelos alunos e verificar sua validade. O professor fala para os alunos o objetivo de termos trabalhado com essa situação-problema. Mostra a importância de conhecermos e de dominarmos o uso da média geométrica. O conhecimento obtido através da situação didática fará parte do saber matemático dos discentes. Adiante, na situação 3, será posto um problema que envolve a média harmônica. Buscaremos perceber que estamos usando a média harmônica na resolução desse tipo de problema.

Situação-problema 3: Dois amigos em viagem revezam-se para chegar a um determinado destino. Um deles dirigiu até exatamente a metade do percurso, e depois o outro assumiu o volante terminando o percurso. O primeiro deles manteve uma velocidade $V_1 = 90km/h$. Já o segundo, que estava com mais pressa, manteve uma velocidade de $V_2 = 120km/h$. Qual é a velocidade média dos dois motoristas em todo o percurso?

Situação de ação: Neste momento, já conhecendo a ideia de velocidade média, bastante usada na disciplina de Física na 1° série do ensino médio, espera-se que os alunos montem duas estruturas, uma para cada percurso, professor poderá intermediar e pedir que os alunos construam um desenho para auxiliar na visualização do problema. Espera-se que o aluno perceba que para encontrar a velocidade média do percurso todo ele precisará do tempo e tamanho total do percurso. O professor poderá intermediar e sugerir que eles utilizem as velocidades médias dadas pelo problema. Espera-se que o aluno encontre o tempo de cada parte do percurso.

Situação de formulação: Os estudantes irão observar que precisam usar novamente a ideia de velocidade média, dividindo o espaço percorrido e o tempo. Além disso, eles perceberão que devem ter um tempo único, já que eles perceberam que o trajeto foi realizado em dois tempos distinto. Eles poderão sentir dificuldade na montagem e entendimento da equação da velocidade média, já que nela aparecerá uma soma de frações a ainda terão incógnitas a serem consideradas. O professor poderá intervir, argumentando se o que eles estão fazendo faz sentido matemático. O professor poderá lembrar, juntamente com eles, propriedades de operações com frações. A solução deverá ser encontrada usando o cálculo básico de velocidade média.

Situação de validação: a partir das soluções encontradas, os estudantes poderão mostrar as suas soluções e também discutir os passos usados durantes o processo de resolução do problema. A solução encontrada deverá ser $102,85km/h$. Eles perceberão que estão usando a média harmônica.

Situação de institucionalização: Nesse momento o professor verifica as resoluções dos estudantes, observa os passos que os alunos seguiram para encontrar a suas soluções, revelando alguns passos que os alunos poderiam seguir. Verifica se a solução dos alunos está correta e também enfatiza a importância da média harmônica e faz uma apresentação desse média estudada. Na sequência, será calculada as médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática. Buscaremos conjecturar uma ordenação para essas quatro médias.

Situação-problema 4: Dada as listas de números abaixo, calcule as médias Aritmética (M_a), Geométrica (M_g), Harmônica (M_h) e Quadrática (M_q). Em seguida coloque-as em ordem crescente ou decrescente e tire conclusões.

(a) 2, 3, 4

(b) 1, 4, 5, 7

(c) 2, 2, 2, 2

Situação de ação: Já conhecendo as estruturas das médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática, espera-se que o aluno seja capaz de calcular as médias das listas de números da situação – problema. Caso haja dúvidas por parte dos alunos o professor poderá fazer uma intermediação, comentando sobre algumas atividades realizadas nos encontros anteriores. Espera-se que o aluno consiga encontrar todas as médias pedida no problema.

Situação de formulação: Depois que encontrarem os valores das médias em todos os itens, espera-se que o aluno consiga perceber que os resultados das médias estão diferentes e logo perceberem que podem ser colocadas em ordem, crescente ou decrescente. Espera-se que os alunos percebam também que tanto no item (a) como no item (b) a ordem é a mesma e que no caso especifico do item (c) ocorre uma igualdade entre as médias.

Situação de validação: Com todas as médias calculadas, o professor pode interagir com os alunos, pedindo que eles socializem suas soluções e suas ordenações. Espera-se que os alunos possam conjecturar que a ordenação entre as médias é sempre essa colocada por eles e que ocorre a igualdade se os números da lista forem iguais.

Situação de institucionalização: Nesta fase, o professor retoma o domínio da situação didática e analisa as respostas encontradas pelos alunos e verifica junto com eles a sua validade. O professor poderá perguntar se teve alguém que encontrou uma solução diferente. O docente mostra aos alunos a solução aos estudantes e a finalidade da atividade proposta, que é verificar a ordenação entre as quatro médias e também verificar o que acontece quando a lista de valores é igual. O professor enfatiza que a desigualdade encontrada é conhecida como a desigualdade entre as médias e que isso que eles fizeram foi conjecturar esse teorema. A seguir, na situação-problema 5, iremos mostrar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para dois números inteiros e positivos.

Situação–problema 5 – Mostre que para todo $x, y \in R^+$, a Média Aritmética é maior ou igual a Média Geométrica, ou seja, $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x.y}$.

Situação de ação: Já com os conhecimentos prévios de álgebra básica, o aluno poderá operacionalizar essa desigualdade, embora possa sentir dificuldade, pois ele talvez não saiba onde tem que chegar. O professor poderá intermediar e sugerir que ele deixe o lado direito da desigualdade igual a zero.

Situação de formulação: Espera-se que o aluno perceba a necessidade de elevar os dois lados da desigualdade ao quadrado. Espera-se que o aluno consiga perceber que $x^2 - 2x + y^2 = (x-y)^2$, pois ele já estudou durante o ensino médio produtos notáveis. O professor poderá interagir e relembrar a ideia de produtos notáveis. Espera-se também que o aluno chegue na desigualdade $(x-y)^2 \geq 0$. O aluno poderá perguntar se chegando nessa parte ainda podemos seguir mais algum passo, assim o professor poderá argumentar com os alunos se essa desigualdade encontrada é uma verdade absoluta. Caso os aluno não consigam entrar em um consenso se a desigualdade $(x-y)^2 \geq 0$ é sempre válida, o professor poderá sugerir que eles testem com alguns números positivos, para que eles conjecturem que essa desigualdade é sempre válida.

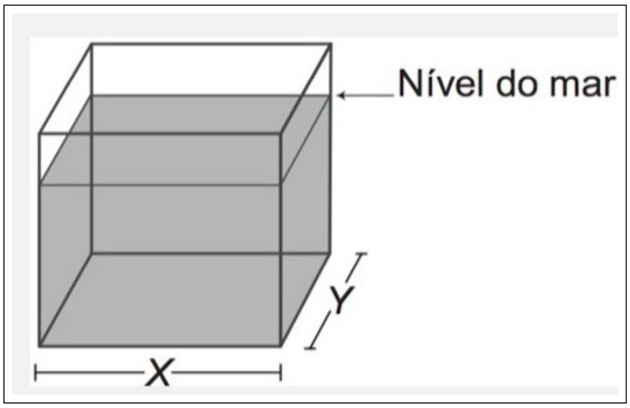
Situação de validação: Os discentes poderão expor suas soluções, abrindo uma discussão sobre cada passagem feita no desenvolvimento da desigualdade. Caso eles não entrem em consenso o professor poderá intervir e mediar a discussão, levantando situações que leve a aceitação da passagem matemática. O professor poderá sugerir que eles escrevam ao lado de cada linha as operações que eles fizerem. Espera-se que os alunos consigam chegar a desigualdade $(x-y)^2 \geq 0$. O professor poderá intermediar novamente sugerindo agora que eles tentem voltar de onde eles chegaram até a desigualdade das médias. Espera-se que o aluno perceba que ele terá que fazer as operações inversas as que ele fez durante a ida. Espera-se que ele consiga demonstrar a desigualdade proposta.

Situação de institucionalização: O professor retoma o domínio da situação didática e já sugere logo que os alunos o ajudem a demonstrar essa desigualdade, só que partindo da solução encontrada por eles. Os alunos perguntam se essa estratégia pode ser usada e professor argumenta que essa era a proposta da aula. O professor comenta que essas é a demonstração da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, mas que essa demonstração foi feita apenas para dois números e que essa propriedade é válida para qualquer quantidade de números positivos, mas que essa demonstração não serve para generalizarmos essa desigualdade.

Adiante, na situação-problema 6, iremos resolver uma situação problema que cabe o uso da desigualdade entres as médias aritmética e geométrica.

Situação-problema 6: (Enem 2017) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.

Figura 14 – Viveiro de lagostas (prima reto-retângulo.



Fonte: Inep

Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

Situação de ação: Já com os conhecimentos prévios da desigualdade das médias aritmética e geométrica, o aluno poderá operacionalizar essa desigualdade, o aluno poderá sentir dificuldade e poderá tentar alguns valores para x e y. O professor poderá intermediar e sugerir que ele monte uma equação para o cálculo do gasto de tela.

Situação de formulação: Espera-se que o aluno encontre a equação para o gasto de tela $2x+2y=100$ e para a área da base $A_b = x.y$. O professor poderá sugerir que ele deixe a equação para o gasto de tela na sua forma simplificada, caso os alunos não percebam que podem fazer isso. O professor poderá sugerir que eles utilizem o que foi visto no problema anterior, ou seja, a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Os alunos deverão encontrar uma cota superior igual a 625 para a área da base e notar que isso é possível se, e somente se,

$x = y = 25$.

Situação de validação: Os discentes poderão expor suas soluções, abrindo uma discussão sobre cada passagem feita na resolução do problema. O professor poderá mediar a discussão, levantando situações que levem a aceitação da passagem matemática. Os discentes farão suas exposições das soluções por meio da contribuição na exposição do colega.

Situação de institucionalização: O professor retoma o domínio da situação didática e já comenta sobre a importantes ferramenta que foi utilizada no problema. O professor faz um breve comentário também sobre a situação problema exposta no encontro anterior sobre a desigualdade entre as médias. Os alunos perguntam se esse problema só se resolve dessa forma e o professor comenta que existe outra forma que eles já conhecem que é usando máximo de uma função quadrática. O professor resolve o problema novamente e mostra a importância de se dominar essa ferramenta matemática.

9.3 EXPERIMENTAÇÃO

A experimentação ocorreu na Escola de Ensino Médio Monsenhor Furtado, na cidade de Meruoca-Ceará, de forma presencial, com um grupo de alunos das turmas D e E da 3° série do turno da tarde, durante o 1° semestre do ano letivo de 2023. Essa experimentação foi realizada com 15 aluno, sendo 7 homens e 8 mulheres, que aceitaram participar desse momento da pesquisa. A escola acima citada é a mesma onde leciona o autor desta pesquisa.

Cada etapa teve a duração de cinquenta minutos, onde foram realizadas as aulas de desenvolvimento das situações didáticas, fundamentadas na TSD. Assim, foram e desenvolvidas situações-problemas e aplicados exercícios. Logo após concluírem os exercícios, ocorreram discussões e socialização de ideias e soluções dos problemas no quadro branco e/ou papel.

Antes de dar início as etapas dos estudos tivemos um momento de apresentação e esclarecimento do que iria ocorrer durante as etapas. Durante o primeiro contato, que aconteceu durante as aulas regulares de matemática, o professor (autor desta pesquisa) apresentou a proposta e o cronograma dos encontros do grupo e também sobre o que seria estudado nos momentos de aula. Os alunos puderam tirar suas dúvidas sobre o objetivo dos encontros e sobre como eles iriam contribuir nesse momento da pesquisa. O momento foi esclarecedor, pois os alunos puderam expor suas dúvidas.

Na primeira aula, foi apresentado um problema que envolvia aumentos e descontos sucessivos, um problema que os alunos deveriam simular uma situação de aplicação financeira.

Esse problema trabalha com a ideia de média geométrica. Esse problema os alunos puderam utilizar conhecimentos prévios sobre porcentagem e regra de três, podendo usar e abusar desses conceitos. Os estudantes puderam argumentar sobre como seria uma maneira mais direta de se resolver esse problema, podendo sugerirem algumas saídas de resoluções.

No segundo encontro, foi trabalhado um problema que também envolvia a média geométrica, só que agora em outro ramo da matemática, em geometria. Nesse problema os alunos tiveram que encontrar o volume de um cubo de mesmo volume que um prisma, sendo que o prisma já tem suas medidas definidas. Com essa abordagem eles puderam notar que a medida da aresta do cubo deve ser a raiz cúbica do produto das medidas do prisma, ou seja, a raiz cúbica do volume do prisma. Feito isso, a ideia do problema foi mostrar que a aresta do cubo tem que ser a média geométrica das medidas do prisma. Nesse encontro eles perceberam que a média geométrica é uma média que expressa valores diferentes da média aritmética e que estudá-la é bastante importante.

No terceiro encontro, foi exposto um problema que falava sobre a velocidade média de um carro em um trajeto, sendo que esse trajeto foi feito com dois motoristas diferentes e com duas velocidades diferentes. Eles puderam relembrar conceitos vistos na 1° série, no componente curricular de Física do ensino médio. Também puderam relembrar ideias sobre soma de frações com denominadores diferentes e também divisão de frações. Houve um momento em que eles discutiram como calcular essas operações com frações, foi um momento muito participativo. Ao final dessa aplicação, eles acharam essa estrutura bastante peculiar, vendo que as velocidades ficavam sempre como inverso multiplicativo. Nesse momento foi-lhes apresentada a média harmônica, comentado sobre a sua importância e aplicabilidade.

No quarto encontro, o professor começou a aula mostrando as estruturas das quatro médias, Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática, e pediu que eles visualizassem cada uma de suas características. Após esse primeiro momento o professor pediu que os alunos calculassem as quatro médias apresentadas no início da aula, e lhes foi dado três grupos de números. Esse momento foi bastante produtivo, pois eles puderam trabalhar de forma dinâmica do cálculo dessas médias, podendo se utilizar da calculadora. Ao concluírem os cálculos o professor pediu que eles organizassem as médias em ordem crescente ou decrescente nos três itens. Nesse momento foi bem produtivo, pois eles começaram a discutir, perguntando ao colega se, a ordenação entre as médias eram a mesma. Outro fato que chamou a atenção deles foi o fato de que quando a lista contém todos os números iguais as médias são todas iguais. Nesse encontro foi apresentado a eles o conceito de Desigualdade entre as Médias.

No quinto encontro foi proposto para que eles resolvessem uma desigualdade simples, utilizando as operações que eles costumeiramente usam. A ideia era que eles conseguissem provar a desigualdade entres as médias aritmética e geométrica para dois números positivos. A princípio eles sentiram dificuldade pois não sabiam onde deveriam chegar, o professor interviu e deu algumas orientações para que eles pudessem prosseguir com a processo. Esse momento foi revelador, pois eles comentaram que foi a primeira vez que eles demostraram uma ferramenta matemática. Ao final desse encontro os alunos se sentiram contentes com a realização dessa tarefa. O professor argumentou que essa desigualdade é muito importante na resolução de muitos problemas.

No sexto encontro foi posto um problema que se resolve usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. A ideia dessa proposta é que eles consigam usar a desigualdade entre as médias na resolução de problemas de otimização. No início eles sentiram dificuldade na construção das equações a serem usadas na desigualdade, mas o professor fez as mediações necessárias de modo que o problema fosse aproveitado na sua totalidade. Eles se sentiram satisfeitos, pois a solução encontrada por eles foi bem prática e de fácil entendimento.

Após concluídos esses encontros os alunos fizeram uma avaliação, de forma oral, dizendo que no começo foi bastante complicado, mas que depois viram que o desenvolvimento deles durante as aulas foi melhorando a cada encontro, pois eles se sentiram mais desafiados e também protagonistas das ações no momento da aplicação.

Trabalhar com as médias e desigualdade das médias através das situações-problema de acordo com as etapas da TSD contribui de forma significativa no processo de aprendizagem desse objeto matemático. No capítulo a seguir, serão discutidos, os dado e resultados coletados na execução da TSD, conforme a produções mais relevantes para a validação desta etapa.

9.4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS

Nesta última fase, de acordo com a análise a posteriori da Engenharia Didática, serão analisados os dados coletados durante a fase de experimentação desta pesquisa, tendo o como suporte a Teoria das Situações Didáticas, com o objetivo de validar a pesquisa. A seguir faremos observações relevantes que ocorreram durante os momentos de aplicação. Para (ALMOULOUD, 2007) a fase de experimentação nos leva a um retorno para a análise a priori, pois poderão ser feitas possíveis correções e ajustes locais.

Com o objetivo da realização de uma transposição didática sobre o estudo das

Médias, a TSD foi utilizada para apoiar e direcionar a etapa da experimentação e foi utilizada situações-problemas para o desenvolvimento da situação didática.

Para (ARTIGUE *et al.*, 1995) "confrontam-se análise a priori e análise a posteriori, validando, ou não, a hipótese da pesquisa". Após a análise a posteiori, é crucial que seja realizada a validação dos dados coletados na experimentação da ED, comparando os resultados encontrados e discutidos pelos alunos, assim como foi previsto na análise a priori, levantando possíveis questionamentos e verificando se houve avanço, ou não, da Engenharia Didática sugerida.

A seguir são apresentadas as análises das fases da TSD durante os momentos de aplicações e resoluções das situações-problema, enfatizando o comportamento dos alunos, levando em consideração os conhecimentos prévios para o desenvolvimento das soluções. As atividades foram pensadas com o objetivo de levar o aluno a compreender e aplicar as médias em problemas diversos.

A validação desta pesquisa será de forma interna, levando em consideração as observações e discussões fundamentadas nas aplicações, embasadas na ED e na TSD.

9.4.1 Análise a posteriori e validação interna da pesquisa

As situações didáticas aconteceram de forma presencial na Escola de Ensino Médio Monsenhor Furtado, com um grupo de alunos que aceitaram participar de forma voluntária, do estudo proposto. Essas situações didáticas foram desenvolvidas por meio de questões norteadoras, que tem o objetivo de despertar interesse do aluno e fazer com que ele se envolva na construção das soluções, efetivando assim a ideia de contrato didático. As situações-problema trabalham a empregabilidade das médias em problemas diversos, fazendo com que o aluno perceba a presença das médias durante a resolução dos problemas e percebendo as suas propriedades. Em seguida, o aluno poderá usar a desigualdade das médias para resolver um problema de área máxima, esse mesmo problema pode ser resolvido usando o conceito de vértice de uma parábola, mas o foco principal dessa situação é usar a desigualdade das médias. Assim, será feita uma análise a posteriori e, pelo fato da validação ser interna, não serão feitas comparações com dados coletados em produções externas, baseadas na ED. Dessa forma, discutiremos os resultados levando em consideração algumas variáveis didáticas, para que possamos contribuir com o conhecimento didáticos durante a transposição do conteúdo.

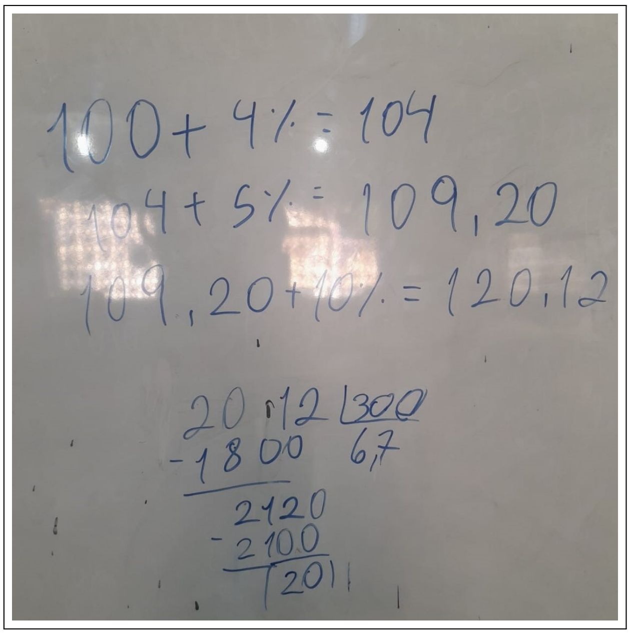
A situação-problema 1, teve o objetivo de resolver um problema de matemática financeira, cálculo do fator de atualização, para uma aplicação financeira. O problema foi posto para os alunos para que eles operacionalizassem as porcentagens, o que caracterizou a situação de ação, definida pela TSD. Um aluno perguntou se poderíamos utilizar um valor para que facilitasse as contas, esse movimento por parte dos alunos foi previsto na análise preliminar.

Figura 15 – Alunos no momento de ação.

Fonte**:** Dados da pesquisa.

Alguns alunos fizeram o cálculo da média aritmética, o que resultou em 6,3333%, mas um dos alunos usando a ideia de utilizar um valor para os cálculos das porcentagens encontrou 6,3012%. Outro aluno achou que os valores foram muito próximos e que as duas soluções serviriam, mas o professor intermediou e falou que em se tratando de valores muito grandes essa pequena diferença pode ser considerável, então a turma notou que não é válido para esse tipo de problema se utilizarem da média aritmética.

Figura 16 – Momento de formulação.

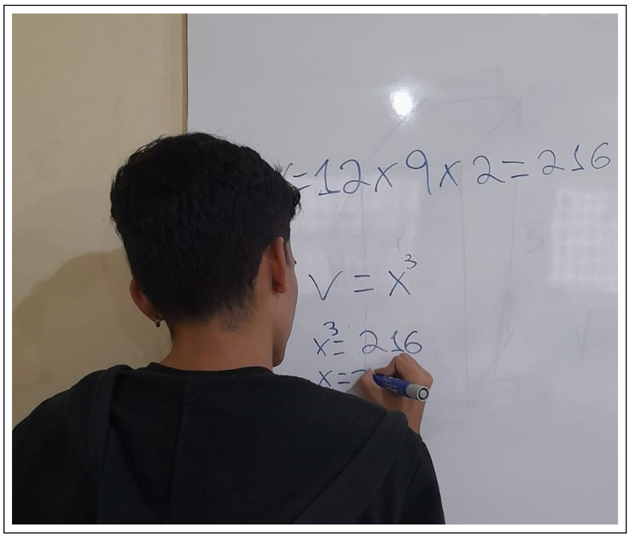


Fonte**:** Dados da pesquisa.

Após encontrarem as soluções, eles fizeram a validação de forma coletiva, um aluno foi ao quadro e os demais foram ajudando a formalizar a ideia desenvolvida. Após a exposição de suas soluções, o professor retomou o momento didático e foi mostrando que a ferramenta que eles acabaram de utilizar foi a média geométrica, e que esse modelo de problema é solucionado usando essa média.

A situação-problema 2, tem como objetivo resolver um problema sobre encontrar as dimensões de um cubo, de maneira que o volume desse cubo fosse igual ao volume de um prisma, com as dimensões do prisma já definidas. Foi apresentado o problema e os alunos foram logo fazendo alguns cálculos de volume, como foi previsto na análise a priori. Outro movimento previsto também na análise a priori, foi o fato de eles teriam dificuldade em mostrar uma expressão para o volume do cubo, já que o cubo não tinha medidas definidas. O professor foi fazendo mediações até que eles conseguiram perceber que poderiam utilizar uma letra para definir as arestas do cubo, encontrando assim os dois volumes dos sólidos, Volume do prisma = 216 m^3 e Volume do cubo = x^3 m^3. Depois de encontrados os dois volumes, a próxima etapa foi encontrar qual seria a medida da aresta do cubo, eles encontraram por meio de tentativas. Alguns alunos sentiram dificuldades, mas a maioria conseguiu achar a mesma solução. O momento de validação foi feito de maneira coletiva, um aluno foi para o quadro branco e os outros iam dizendo como encontrar a solução, a cada passagem realizada o professor mediava perguntando se alguém discordava do que foi feito.

Figura 17 – Aluno 1 na fase de validação.



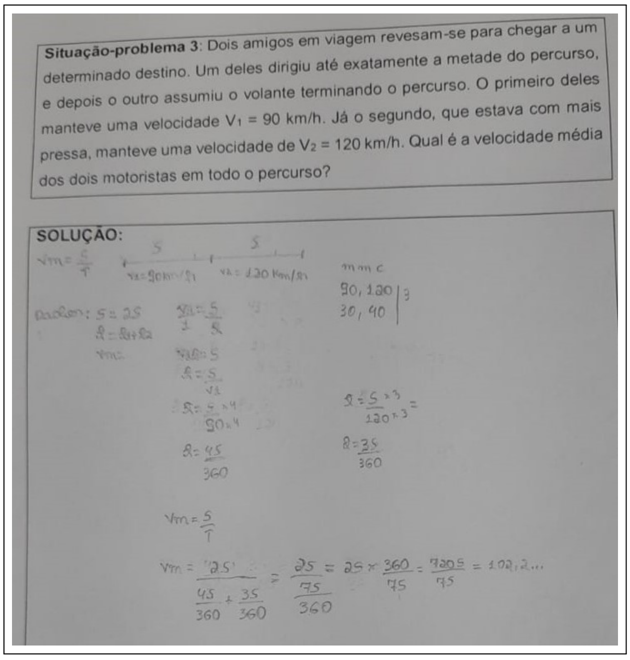
Fonte**:** Dados da pesquisa.

A solução foi encontrada e todos se sentiram contentes com a atividade. O professor fez novamente uma intermediação, perguntando como seria uma equação que poderia levar a essa medida da aresta, de modo a generalizar a ideia. Um aluno sugeriu igualar os dois volumes, $x^3 = 216$, essa ideia foi aceita por todos, mas eles sentiram dificuldade nessa última passagem porque tinham que extrair a raiz cúbica dos dois lados da igualdade. O professor fez algumas mediações e eles conseguiram achar a solução novamente. Eles acharam a ideia muito interessante e viram que utilizaram uma raiz cúbica e que tinham três medidas sendo multiplicadas.

No momento de institucionalização o professor retomou o domínio da situação didática e foi mostrando a passagem que tinha a raiz cúbica e mostrou também um problema que usava um retângulo e um quadrado. Nesse problema, tem-se que encontrar um quadrado de mesma área que o retângulo, um problema análogo ao proposto a eles, sendo assim, o professor sugeriu que eles fizessem a mesma ideia, extraindo a raiz, e uma aluno perguntou se era raiz cúbica, já outro aluno sugeriu que fosse a quadrada, já que só tinham duas medidas. A solução foi encontrada e testada para verificar a validade. O professor encerrou o encontro mostrando que eles acabaram que trabalhar com a média geométrica, uma ferramenta importante e que eles ainda iriam trabalhar com ela durante as aplicações posteriores.

A situação – problema 3 tinha por objetivo trabalhar com a ideia de média harmônica. Do mesmo modo que a situação anterior, foi dado um problema que eles teriam que resolver usando conhecimento prévio.

Figura 18 – Momento de ação e formulação.



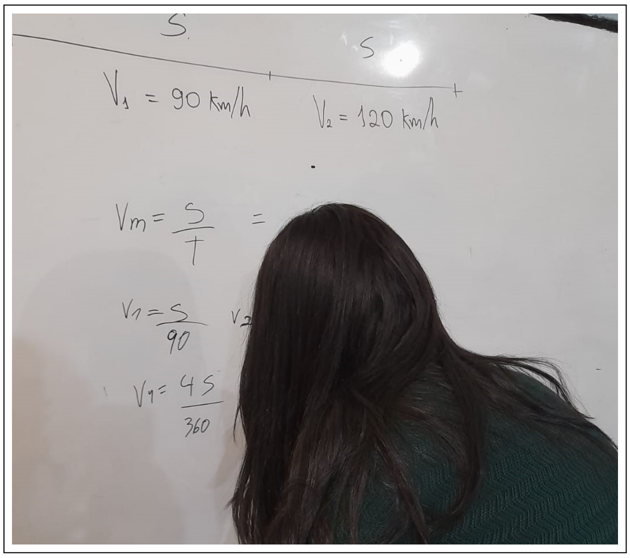
Fonte**:** Dados da pesquisa.

Os alunos começaram a discutir que teriam que encontrar o tempo total do percurso, como foi previsto na análise a priori, eles conseguiram achar o espaço total. Os conhecimentos prévios de física foram bastante relembrados.

No momento de formulação os alunos os alunos viram que teriam que colocar agora todos os valores na fórmula da velocidade média novamente, pois já tinham encontrado os tempos dos dois percursos e que os percursos eram iguais. Eles sentiram dificuldade em operações básicas de frações, sendo assim necessária a colaboração do professor. Assim os alunos conseguiram achar a solução, $102,85 km/h$.

O momento de validação foi feito de maneira conjunta, com a ida ao quadro de uma aluna voluntária. Os alunos foram ajudando a colega que estava no quadro, validando cada passagem da sua solução. Quando havia dúvida acerca da passagem matemática o professor fazia indagações pertinentes de modo que eles mesmos conseguissem se convencer de que estavam corretos. A solução foi encontrada e validada por todos. Eles acharam curioso o fato de que os valores das velocidades apareciam invertidas no denominador da fração que definia a velocidade média.

Figura 19 – Aluno 2 no momento de validação.

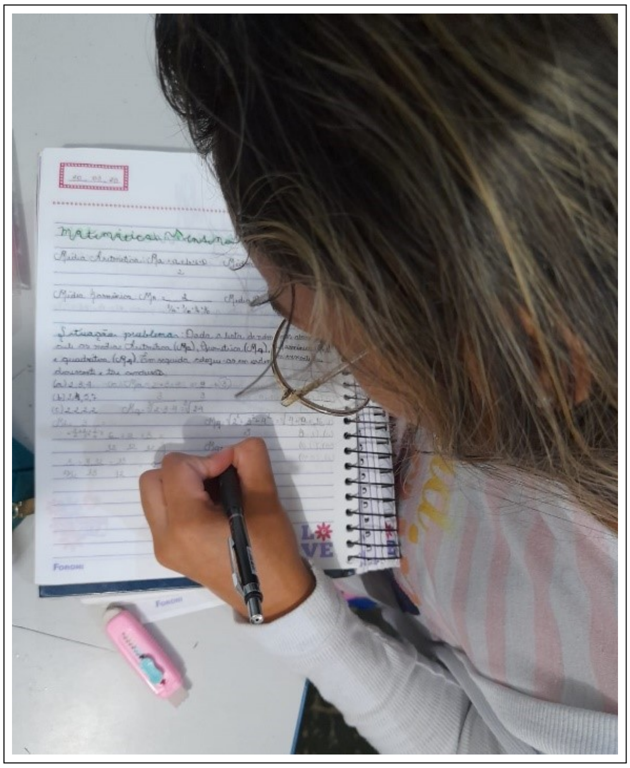


Fonte**:** Dados da pesquisa.

No momento de institucionalização o professor fez a retomada da situação didática e mostrou a passagem que ficava definida o cálculo da média harmônica. Formalizou a apresentação da média harmônica e falou da sua importância.

Na situação-problema 4, tinha o objetivo de conjecturar a desigualdade das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática para uma lista de valores. Os alunos receberam três listas de números com o objetivo de calcular e ordenar as quatro médias pedidas no problema. Já sabendo calcular as médias pedidas os alunos começaram os cálculos, sentiram algumas dificuldades, mas o professor foi pedindo que eles relembrassem o que foi visto nos encontros anteriores. Após esse primeiro movimento os alunos conseguiram achar todas as médias sem muitas dificuldades, e logo acharam curioso o terceiro item, em que todas as médias deram resultados iguais.

Figura 20 – Aluno 3 no momento de ação e formulação.

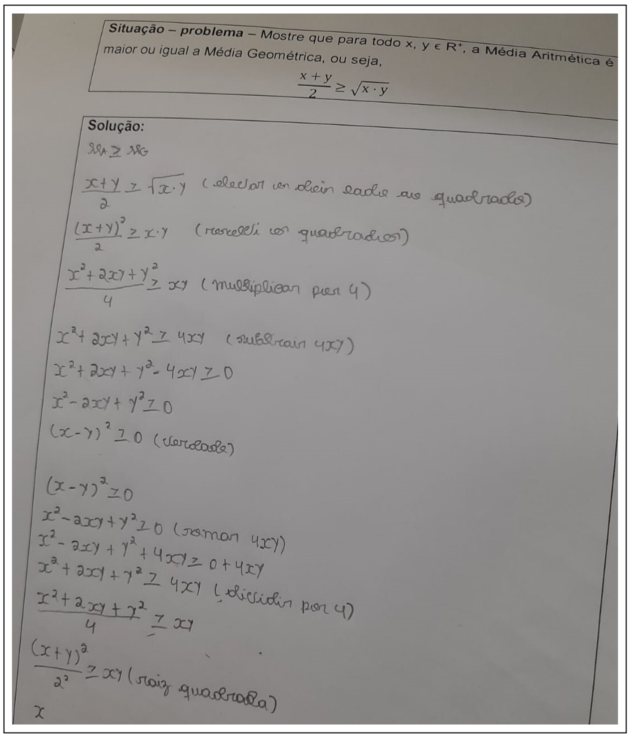


Fonte**:** Dados da pesquisa.

Depois de todos os cálculos feitos, os alunos foram organizar em ordem crescente ou decrescente, e foi um momento em que eles não sentiram dificuldades. O momento de validação foi feito em grupo, o professor pediu que eles expusessem os seus resultados e depois mostrassem como ficou a ordenação deles. Todos se convenceram dos resultados encontrados. Após a validação o professor retoma o momento didático para fazer o momento de institucionalização. O docente foi enfatizando os cálculos que eles fizeram e mostrou o teorema da desigualdade entre as médias, mostrando também que a igualdade só ocorre quando os valores listados são iguais. Terminou a aula dizendo que o que eles fizeram foi apenas conjecturar a desigualdade entre as médias e que isso seria provado na aula posterior.

A situação-problema 5, tinha como objetivo demonstrar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para dois números positivos. Foi posto a desigualdade e pedido que eles manipulassem a desigualdade usando operações que eles já conheciam, como previsto na análise a priori, um aluno perguntou a qual parte eles deveriam chegar, fazendo necessária a mediação do professor, dizendo que eles deveriam chegar em uma verdade matemática, $(x-y)^2 \geq 0$. O professor também sugeriu que eles anotassem do lado cada operação realizada nas passagens que eles fizessem. Fizeram-se necessárias algumas colaborações do professor, pois eles tiveram muitas dificuldades em saber quais operações eles poderiam realizar.

Figura 21 – Momento de ação e formulação.



Situação – problema – Mostre que para todo x, y ∈ R^+, a Média Aritmética é maior ou igual a Média Geométrica, ou seja,

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$$

Solução:

MA ≥ MG

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$ (elevar os dois lados ao quadrado)

$\frac{(x+y)^2}{2} \geq x \cdot y$ (resolver os quadrados)

$\frac{x^2+2xy+y^2}{4} \geq xy$ (multiplicar por 4)

$x^2+2xy+y^2 \geq 4xy$ (subtrair 4xy)

$x^2+2xy+y^2-4xy \geq 0$

$x^2-2xy+y^2 \geq 0$

$(x-y)^2 \geq 0$ (verdade)

$(x-y)^2 \geq 0$

$x^2-2xy+y^2 \geq 0$ (somar 4xy)

$x^2-2xy+y^2+4xy \geq 0+4xy$

$x^2+2xy+y^2 \geq 4xy$ (dividir por 4)

$\frac{x^2+2xy+y^2}{4} \geq xy$

$\frac{(x+y)^2}{2^2} \geq xy$ (raiz quadrada)

x

Fonte**:** Dados da pesquisa.

No momento de validação o professor sugeriu que eles realizassem a volta, partindo do final de eles encontraram que foi $(x-y)^2 \geq 0$, só que usando as operações inversas as que eles já tinham feito na ida. O momento foi bastante rico, pois eles ficaram discutindo qual seriam as operações inversas as que eles já tinham usado. No momento de institucionalização eles pediram que o professor fosse ao quadro novamente para que eles fossem dizendo e o professor anotando, a ideia foi aceita pelo professor e eles se sentiram animados em ajudar na demonstração. O professor finalizou a aula dizendo que essa demonstração é válida para dois termos e que existe uma generalização para essa desigualdade. O docente comentou também que essa desigualdade é muito importante na resolução de alguns problemas legais, como os problemas de otimização, comentou como funcionam esses problemas de agradeceu a presença de todos nessa etapa.

A situação-problema 6, tinha como objetivo usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para dois números positivos, ferramenta vista no encontro anterior. O problema foi posto e os alunos já foram manipulando as equações de modo a obter uma forma de resolução do problema. Eles conseguiram encontrar as equações para a área da base e também para o gasto de tela, como previsto na análise a priori. Os alunos conseguiram encontrar a equação $x + y = 50$ e $A = x.y$. Fizeram-se necessárias algumas intervenções do professor, pois eles tiveram dificuldade em encontrar o próximo passo a ser dado, que era usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Os alunos usaram a dica dada pelo professor e conseguiram encontrar a cota superior igual a 625 e viram que isso acontecia quando $x = y = 25$.

No momento de validação o professor pediu que um aluno expusesse sua solução e sugeriu que os colegas o ajudasse. O momento foi bastante rico, pois eles participaram diretamente da formulação da solução do problema.

Figura 22 – Aluno 4 no momento de formulação.

Fonte**:** Dados da pesquisa.

No momento de institucionalização eles pediram que o professor fosse ao quadro novamente para que fizesse a solução final. O docente comentou também que esse problema pode ser resolvido de outra forma, usando uma ferramenta que eles já conhecem que é máximo de funções quadráticas. Após comentar rapidamente o outro caminho que eles poderiam seguir o professor resolveu o problema usando a desigualdade entre as médias encontrando x e y. Após finalizar a solução do problema o professor agradeceu a presença de todos na participação dessa pesquisa.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi fundamentado na metodologia de pesquisa Engenharia Didática e na metodologia de ensino Teoria das Situações didáticas. Desse modo, realizou-se uma análise preliminar do objeto matemático a ser estudado e, partiu-se de pesquisas encontradas em artigos científicos que tratam sobre médias e desigualdade das médias, publicados em periódicos de Matemática Pura, livros importantes e em dissertações de mestrado. Analisou-se também artigos e livros que falam da ED e da TSD.

A partir do levantamento bibliográfico, foi apresentado o campo epistêmico-matemático, que destaca o estudo das médias. Nesta pesquisa, iniciamos no campo epistêmico-matemático que abrange a Média Aritmética (Ma), Média Geométrica (Mg), Média Harmônica (Mh), Média Quadrática (Mq), e também um estudo que fala da Desigualdade das Médias.

Foram trabalhadas no contexto didático-cognitivo as quatro médias e a desigualdade entre a média aritmética e geométrica. Essas médias foram trabalhadas e exploradas por um grupo de alunos do ensino médio, permitindo que fossem realizadas discussões das ideias e relações com os problemas do cotidiano. Esta pesquisa foi aplicada com aluno de 3° série do ensino médio regular da Escola de Ensino Médio Monsenhor Furtado, localizada na cidade de Meruoca – Ce. Instituição na qual trabalha o autor desta pesquisa. O currículo dessa escola prevê para essa série o estudo das médias, mas não com a mesma didática proposta nesta pesquisa a qual se baseia a ED e a TSD.

Na etapa de experimentação, podemos observar alguns obstáculos epistemológicos dos alunos do projeto desta pesquisa em relação à resolução das situações-problema propostas, principalmente quando eles tiveram que perceber a presença da média harmônica, tendo em vista que essa média foi pouco utilizada em momentos anteriores ao momento de experimentação. Outro momento de dificuldade foi na demonstração da desigualdade das médias aritmética e geométrica para dois termos, pois demonstrações não são muito abordadas nas aulas regulares. Os momentos de discussões das situações-problema foram muito interativos, pois eles puderam utilizar conhecimentos prévios referentes ao problema proposto, e em grupo encontrar as soluções dos problemas.

Com relação ao embasamento teórico, no percurso metodológico da pesquisa, foi utilizada a ED, em associação com a TSD, que faz uma grande contribuição na área do ensino de matemática, para o desenvolvimento de atividades que abordem problemas que tratam de médias.

Analisando a transposição didática, é importante destacar que os problemas propostos nas situações-problema foram estudados através das situações de ensino baseadas na TSD, analisando os conteúdos prévios, visando compreender a construção da solução dos problemas, e destacando sempre os possíveis percalços.

Vale ressaltar a disponibilidade e a colaboração dos alunos e da escola em aceitarem desta pesquisa. Mesmo receosos, pois o que viveram foi uma experiência nova, os alunos não hesitaram e foram ativos durante os encontros previstos. A contribuição deles foi a parte essencial para a realização deste trabalho e, mesmo com as dificuldades, encontradas durante as aplicações, discutiram e realizaram as atividades de maneira a compreender cada situação, atingindo o objetivo das etapas da pesquisa.

Por fim, esta pesquisa proporcionou aos alunos do ensino médio, conhecerem um pouco sobre uma ferramenta que pode ser utilizada em vários ramos da matemática. Assim, esses alunos puderam incluir nos seus conhecimentos matemáticos esse objeto matemático, trabalhado de forma diferenciada nos momentos da aplicação. Diante do exposto, espera-se que este trabalho sirva de referência e fonte de pesquisa para trabalhos que procurem explorar, com a abordagem da TSD, conteúdos matemáticos que são pouco estudados nas escolas durante o ensino médio da educação básica.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. [S.l.]: Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. Florianópolis: REVEMAT–Revista eletrônica de educação matemática, v. 11, n. 2, p. 109–141, 2016.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. d. Q. e. S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19 / anped. **REVEMAT–Revista eletrônica de educação matemática**, Bogotá: una empresa docente, v. 3, n. 6, p. 62–77, 2008.

ALVES, F. R. V.; SAMPAIO, C. d. G.; VASCONCELLOS, A. K. P.; BARROSO, M. C. S. Didática das ciências e matemáticas: alguns pressupostos. **INTERFACES DA EDUCAÇÃO**, Paranaíba: Interfaces da Educação, v. 8, n. 22, p. 274–302, 2017.

ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions: [s.n.], 1988.

ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L.; GóMEZ, P. **Ingeniería didáctica en educación matemática**. Bogotá: una empresa docente: [s.n.], 1995.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 07 fevereiro 2023.

BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques**. Grenoble: Recherches em Didactique des Mathématiques: [s.n.], 1986.

CARNEIRO, V. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. Campinas: Zetetike, v. 13, n. 23, p. 85–118, 2005.

MACHADO, S. D. A. **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC: [s.n.], 2002.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. **Coleção PROFMAT: Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM: [s.n.], 2015.

SANTOS, A. d. S. d. Tecnologia a favor da educação matemática: Geogebra e suas aplicações. **SynThesisRevista Digital FAPAM**, Pará de Minas: FAPAM, v. 7, n. 7, p. 333–346, 2016.

SIMM, V. **Geogebra no ensino de funções do primeiro e segundo grau.** 2013. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_fafiuv_mat_pdp_vilmar_simm.pdf>. Acesso em: 05 março 2023.

SOUZA, C. A. d. Influências da engenharia didática francesa na educação matemática no brasil: a circulação e a apropriação de ideias. Montevideo: VII CIBEM, 2013.

STEWART, J. **Cálculo. Vol. 1**. [S.l.]: tradução EZ2 Translate. – São Paulo : Cengage Learning, 2013.

VIEIRA, F. R.; FERNANDES, C.; SOUZA, M. J. A. Construções das situações didáticas e sua conexão a engenharia didática com a utilização do software geogebra no spaece. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Sergipe: ReviSeM, v. 5, n. 1, p. 310–335, 2020.