UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PAULO HENRIQUE DE ARAUJO LIMA

UMA ESTRATÉGIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE DÍZIMAS PERIÓDICAS ATRAVÉS DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

SOBRAL – CEARÁ
2023

PAULO HENRIQUE DE ARAUJO LIMA

UMA ESTRATÉGIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE DÍZIMAS PERIÓDICAS ATRAVÉS DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho

SOBRAL – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Lima, Paulo Henrique de Araujo.
Uma estratégia didática para o ensino de dízimas periódicas através de sequências e séries numéricas [recurso eletrônico] / Paulo Henrique de Araujo Lima. - 2023.
87 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Sobral, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho.
1. Infinito. 2. Sequências Numéricas. 3. Séries Numéricas. 4. Estratégia Didática . I. Título.

PAULO HENRIQUE DE ARAUJO LIMA

UMA ESTRATÉGIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE DÍZIMAS PERIÓDICAS ATRAVÉS DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional do programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovado em: 19 de junho de 2023

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br EDVALTER DA SILVA SENA FILHO
Data: 12/07/2023 18:30:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho (Orientador)
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Documento assinado digitalmente
gov.br DANIEL BRANDAO MENEZES
Data: 13/07/2023 10:05:32-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Documento assinado digitalmente
gov.br FABRICIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA
Data: 12/07/2023 22:10:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Fabrício de Figueredo Oliveira
Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)

À minha esposa, por seu grande incentivo, paciência, seu cuidado e dedicação durante todo o percurso da realização deste sonho. Saiba que sua presença significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que me concedeu a saúde e a capacidade para realizar tal feito, que sempre esteve comigo e abençoou meus propósitos durante toda a minha vida.

À minha amada esposa, pelo carinho e cuidado dispensados a mim sempre.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

À minha irmã que sempre me ajudou, me incentivou e serviu de exemplo nesta caminhada universitária.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a realização do sonho deste mestrado tão almejado por mim.

Agradeço a todos os professores por me proporcionar não apenas o conhecimento matemático, mas o conhecimento de vida.

Agradeço em especial, ao meu mentor e orientador pela paciência, parceria e acompanhamento que muito contribuíram na minha caminhada e na produção deste trabalho.

Aos meus amigos do grupo de estudo que foram primordiais na minha chegada até aqui, que compartilharam dúvidas, angústias, mas principalmente muitos conhecimentos e que me ajudaram a superar muitas adversidades durante o percurso.

A todos, meus eternos agradecimentos!

"Nenhum outro problema afetou tão profundamente o espírito do homem; nenhuma outra ideia tão fertilmente estimulou seu intelecto; nenhum outro conceito necessita de maior esclarecimento do que o infinito"

(David Hilbert)

RESUMO

O infinito sempre intrigou a humanidade, sobretudo a comunidade científica. Discutir este tema costuma ser uma tarefa desafiadora e, ao mesmo tempo, encantadora. Este trabalho apresenta uma estratégia didática para a inclusão do conceito de infinito, limite, sequências e séries numéricas para alunos da educação básica, no ensino de dízimas periódicas, seja dentro da disciplina regular ou até mesmo numa disciplina eletiva, uma vez que o Novo Ensino Médio (NEM) disponibiliza essa possibilidade. Com isso, almejamos que os alunos possam compreender melhor o conceito de infinito, o uso dos números racionais e assim preencher lacunas essenciais para a construção de novos conceitos matemáticos. Além disso, espera-se que os alunos despertem cada vez mais o gosto por essa ciência de resultados tão encantadores e instigantes.

Palavras-chave: Infinito. Sequências Numéricas. Séries Numéricas. Estratégia Didática.

ABSTRACT

Infinity has always intrigued humanity, especially the scientific community. Discussing this topic is usually a challenging and, at the same time, enchanting task. This work presents a didactic strategy for the inclusion of the concept of infinity, limit, sequences and numerical series for basic education students, in the teaching of periodic decimals, either within the regular discipline or even in an elective discipline, since the New Teaching Medium (NEM) provides this possibility. With this, we hope that students can better understand the concept of infinity, the use of rational numbers and thus fill in essential gaps for the construction of new mathematical concepts. Furthermore, it is expected that students will increasingly awaken a taste for this science with such enchanting and thought-provoking results.

Keywords: Infinite. Numerical Sequences. Numerical Series. Didactic Strategy

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.E.C.	Antes da Era Comum
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCNEM	Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
DCRC	Documento Curricular Referencial do Ceará
NEM	Novo Ensino Médio
PG	Progressão Geométrica
PIF	Princípio da Indução Finita
PIM	Princípio da Indução Matemática
UC	Unidades Curriculares

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números Naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números Inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números Racionais
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números Irracionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números Reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números Complexos
$\Leftrightarrow$	Dupla Implicação
$\Rightarrow$	Implicação
∞	Símbolo do infinito
$\sum$	Letra Sigma do alfabeto grego, indica Somatório
X^c	Complementar do conjunto X
α	Letra alfa do alfabeto grego
β	Letra beta do alfabeto grego
λ	Letra lambda do alfabeto grego
π	Letra pi do alfabeto grego, representa o valor da razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro
$\aleph$	Letra Aleph do alfabeto hebráico, indica cardinalidade de conjuntos infinitos
$\rightarrow$	Tende para

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da humanidade o infinito sempre foi motivo de muito estudo e inquietação para estudiosos, filósofos, como zenão (o qual terá um de seus paradoxos narrado aqui), e estudiosos da área de Ciências, sobretudo da matemática, como Cantor, Hilbert e diversos outros que muito contribuiram como o "desvendar", se é que assim podemos dizer, deste conceito tão importante. O infinito sempre foi algo intrigante e por muitas vezes incompreendido, um mistério a ser descoberto. Em nossa vida escolar, logo cedo começamos a ter problemas com situações ligadas ao infinito, como por exemplo, utilizar porcedimentos e operações no infinito, como se o mesmo fosse um número real e esperar os mesmos resultados. No decorrer deste trabalho desejamos mostrar porcessos e situações envolvendo o infinito que não são tão intuitivos como quando operamos com números.

Tais situações ocorrem por vários motivos: dificuldade de abstração, falta de base em alguns conteúdos, falta de formação docente, entre muitos outros que corroboram com essa dificuldade em compreender o conceito de infinito, sobretudo o conceito matemático. É inevitável utilizar o conceito de infinito para abordar certos conteúdos da formação básica, sobretudo quando tratamos de sequências.

O objetivo desta dissertação é fornecer um estudo elementar sobre o infinito e conteúdos que o cercam, de maneira clara e simples, de modo que contribua na inclusão deste conceito na educação básica, mais precisamente no ensino médio, que possa servir como estratégia didática para auxiliar o professor ou ainda como ementa para uma disciplina que trate do conceito de infinito.

No capítulo dois, discutiremos um conceito mais geral de infinito, sem uma formatação matemática mais rigorosa, traremos algumas reflexões e situações, bem como um pouco da história e alguns paradoxos que introduzirão o tema, os quais esperamos serem capazes de despertar no aluno mais interesse ainda pelo assunto.

No terceiro capítulo traremos uma definição matemática do infinito, agora com o seu devido rigor matemático, e para tal, definiremos o conjunto dos números naturais e outros conceitos necessários para avançarmos no estudo do infinito.

O capítulo quatro é dedicado a fazer uma relação entre os números racionais, mais precisamente as dízimas periódicas, e as ideias de infinito, finalmente introduzindo um conteúdo bastante relevante ao estudante do ensino médio.

No quinto capítulo apresentaremos os conceitos de sequências numéricas e séries infinitas, relacionando-as ao estudo das dízimas periódicas, buscando assim uma compreensão melhor do que até então tem se alcançado com a abordagem tradicional.

No último capítulo traremos propostas de aplicação desses conceitos para serem utilizados nos conteúdos matemáticos ou ainda em disciplinas eletivas que abordem tais assuntos à luz de tudo que foi construido ao longo do trabalho.

2 O INFINITO

Neste capítulo discutiremos o Infinito sob uma filosofia mais intuitiva, através de alguns paradoxos que intrigaram matemáticos por muito tempo. Aqui buscamos refletir sobre algumas noções do senso comum acerca do infinito e do que podemos ou não fazer com ele.

2.1 A LENDA DO XADREZ

Muitas são as lendas deste tão famoso e aclamado jogo, se é que pode-se assim chamar, já que há tanta ciência envolvida nele. Porém, dentre tantas, uma se sobressaiu e deixou o campo das lendas para entrar no terreno da história, como nos narra (SANTOS, 2017) em seu belíssimo livro **O que é xadrez**.

Figura 1 – Tabuleiro de xadrez

Fonte**:** (Pexels)

Conta-se que certa vez o rei Ladava estava refletindo sobre sua triste vitória na guerra que seu exército acabara de travar contra as forças inimigas, na qual seu filho Adjamir fora morto pela flecha adversária, quando um homem, Lahur Sessa, apresenta-lhe seu recém-inventado jogo:

- Trago-lhe este tabuleiro dividido em sessenta e quatro quadrados iguais, coloridos de preto e branco de forma intercalada, simbolizando o palco de uma batalha, e aqui as peças que simbolizam os exércitos que vão se digladiar.

Assim, Sessa mostrou o jogo ao rei, que, antecipadamente, aprendia o movimento de cada peça e as regras. Encantado com o jogo, pois ali não era sorte o fator determinante, mas sim a inteligência, e surpreso com a genialidade de seu inventor, disse o rei:

-Este jogo é realmente uma brilhante invenção. Peça a recompensa que quiser que eu mandarei providenciar.

A princípio Sessa recusou qualquer recompensa, alegando mais uma vez não ser aquele o motivo que o levara a criar o jogo, mas diante da insistência do rei, Sessa fez o seguinte pedido:

- Quero que, observada a seguinte proporção, me sejam dados grãos de trigo, ou seja, para o primeiro quadrado do tabuleiro, um grão de trigo, para o segundo, dois, para o terceiro, quatro, para o quarto quadrado, oito grãos, para o quinto, dezesseis, e assim sucessivamente até o último quadrado, sempre observando a ordem do dobro de grãos de um quadrado para o outro.

O rei mandou o vizir providenciar o trigo, e este mandou que os matemáticos do palácio contassem os grãos da forma como foi proposta pelo inventor. Depois de muita demora os matemáticos apresentaram, quase bestificados, o seguinte número como resultado do cálculo:

18.446.744.073.709.551.615

Era exatamente essa a quantidade de grãos de trigo que o rei deveria dar a Sessa para cumprir sua palavra.

Figura 2 – Grãos de trigo distribuídos no tabuleiro de xadrez

Fonte**:** (USHER, 2020)

Para termos a devida dimensão de quão grande é esse número de 20 algarismos, vejamos alguns compartivos encontrados em (TAHAN, 2013). Feito o cálculo aproximado para o volume astronômico dessa massa de trigo, a terra inteira, sendo semeada de norte a sul, com uma colheita por ano, só poderia produzir a quantidade de trigo que exprimia a dívida do rei, no fim de 450 séculos!

O matemático inglês John Wallis[1] calculou que o trigo poderia encher um cubo que tivesse 9400 metros de aresta. E ainda se fôssemos, por simples diversão, contar os grãos de trigo destinado ao inventor à razão de 5 por segundo, trabalhando dia e noite sem parar, gastaríamos, nessa contagem, 1.170 milhões de séculos!

De acordo com a narrativa de Beremiz, o Homem que Calculava, o nobre inventor Lahur Sessa, declarou publicamente que abria mão da promessa do rei, pois para pagar parte da dívida, o soberano teria que entregar ao novo credor o seu tesouro, as suas alfaias, as suas terras e seus escravos, ficando assim reduzido à mais absoluta miséria.

Apesar desse número ser "muito grande", ele não é infinito, e mais, ainda é pequeno se comparado com o infinito. Mas para tornar essa história ainda mais interessante, imaginemos que o rei fosse auxiliado por um hábil matemático e embarcaremos em uma ideia bem mais elaborada.

Esse habilidoso matemático propôs ao jovem inventor uma recompensa melhor do que ele havia pedido, ele dobraria a quantidade de grãos por cada casa e consideraria também o número de casas *infinito*, não somente as 64 do tabuleiro, e por fim, ainda acrescentaria mais um grão de trigo.

O jovem meditou por alguns instantes e resolveu aceitar a proposta do rei, que afinal parecia muito mais vantajosa. Sendo assim, o matemático começou a expor a proposta de como calcular a quantidade de grãos de trigo:

Seja S a soma de todos os infinitos termos da progressão e que deverão ser pagos

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + \cdots$$

Primeiramente, dobramos a soma a ser paga

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + \cdots$$

Por fim, ainda seria adicionado mais um grão de trigo a soma infinita de termos

$$2S + 1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + \cdots$$

[1] John Wallis (1616 - 1703) foi um matemático britânico cujos trabalhos sobre o cálculo foram precursores aos de Isaac Newton.

Note que a segunda parte desta última expressão é exatamente a soma inicial, ou seja, igual a S, o matemático então propôs que se trocasse a parte numérica da expressão por S, e assim foi aceito pelo inventor.

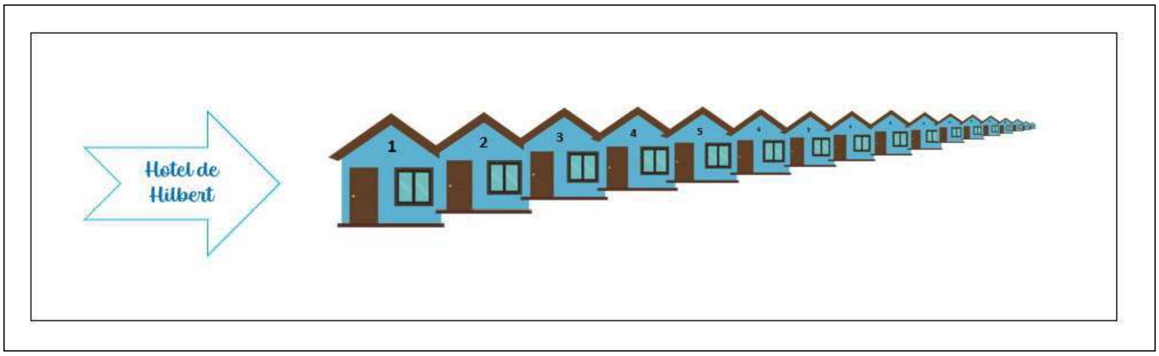
$$2S+1=S \;\Rightarrow\; 2S-S=-1 \;\Rightarrow\; S=-1$$

No final, o rei de devedor passou a ser credor do jovem inventor, graças a um "Sofisma algébrico". Essa história, bem como esse simples cálculo, serve para nos mostrar que processos e operações válidos para conjuntos de números *finitos* não são garantidos para conjuntos *infinitos*. Este acréscimo da lenda do xadrez podemos encontrar em (FERREIRA, 2011).

2.2 O HOTEL DE HILBERT

O Hotel de Hilbert é um experimento mental proposto por Hilbert[2] que nos conduz a um importante paradoxo, pois o resultado é contra intuitivo. Como nos diz (LIMA *et al.*, 2016a) o Hotel de Hilbert possui uma infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis.

Figura 3 – Hotel de Hilbert com infinitos quartos



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Num fim de semana prolongado, o hotel estava com seus quartos todos ocupados, quando chega um viajante. A recepcionista vai logo dizendo:

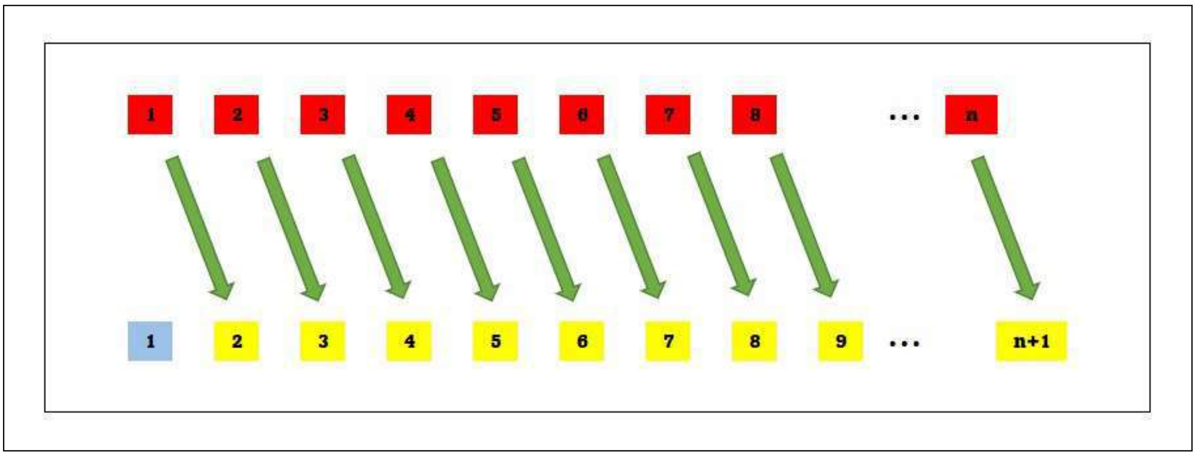
- Sinto muito, mas não há vagas. Ouvindo isto, o gerente interveio:

- Podemos abrigar o cavalheiro, sim senhora. E ordena:

2 matemático alemão David Hilbert (1862-1943)

- Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim em diante. Quem estiver no quarto n, mude para o quarto $n+1$. Isto manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém-chegado.

Figura 4 – Distribuição dos hóspedes no Hotel



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Logo depois chegou um ônibus com 30 passageiros, todos querendo hospedagem. A recepcionista, tendo aprendido a lição, removeu o hóspede de cada quarto n para o quarto $n+30$ e acolheu assim todos os passageiros do ônibus. (de fato essa estratégia funciona para qualquer número finito de hóspedes h, bastando assim transferir cada hóspede de um quarto n para um quarto $n+h$, liberando assim h quartos). A recepcionista, porém, ficou sem saber o que fazer quando, horas depois, chegou um trem com uma infinidade de passageiros. Desesperada, apelou para o gerente que prontamente resolveu o problema dizendo:

- Passe cada hóspede do quarto n para o quarto $2n$. Isto deixará vagos todos os apartamentos de número ímpar, nos quais poremos os novos hóspedes.

- Pensando melhor: mude quem está no quarto n para o quarto $3n$. Os novos hóspedes, ponha-os nos quartos de número $3n+2$. Deixaremos vagos os quartos de número $3n+1$. Assim, sobrarão ainda infinitos quartos vazios e eu poderei ter sossego por algum tempo.

Essa última estratégia utiliza a partição dos naturais através do resto na divisão por 3. Poderíamos seguir com a mesma estratégia com o resto na divisão por 4, por 5, e assim sucessivamente, liberando quantos quartos quiséssemos.

Outra estratégia tão eficiente quanto, seria utilizar as potências de números primos, assim, para alocar os infinitos novos hóspedes dos infinitos ônibus da excursão, usaremos a seguinte estratégia: os passageiros do primeiro ônibus serão acomodados nos quartos cujo número é igual a 3 elevado ao número do seu assento do ônibus, ou seja, o passageiro do assento número 1 será acomodado no quarto de número 3, pois $3^1 = 3$, o passageiro do assento número 2 será acomodado no quarto de número 9, pois $3^2 = 9$, o passageiro do assento número n, será acomodado no quarto de número 3^n e assim por diante.

Os próximos ônibus, com infinitos passageiros, deverão seguir a sequência dos números primos, logo, os passageiros do segundo ônibus serão acomodados nos quartos cujo número é o resultado de 5 elevado ao número do seu assento no ônibus.

Analogamente, os passageiros do terceiro ônibus serão acomodados nos quartos cujo número são potências de 7 e assim por diante, para cada ônibus com infinitos passageiros, uma potência cuja base é um número primo. A questão que deve ser levantada é se, com essa estratégia traçada, ocorre o risco de dois hóspedes serem acomodados no mesmo quarto. Felizmente isso não acontece, por exemplo, os passageiros do primeiro ônibus estão acomodados em quartos de números da forma 3^n e do segundo ônibus, estão acomodados em quartos de números da forma 5^m. Supondo que tenha um quarto com dois hóspedes, isso implica admitir que $3^n = 5^m$, como 3^n é divisível por 3, isto implica que 5^m também é divisível por 3 o que é um absurdo, pois sabemos que 5 não é divisível por 3. Isso ocorre para quaisquer dois números primos distintos. Vale observar que desta forma ainda continuam vagos todos os quartos cujos números são divisíveis por mais de um primo. Por exemplo, os quartos de números 6, 8, 12, 10, etc ainda estão vagos, podendo estes, acomodar ainda um número infinito de hóspedes.

2.3 O PARADOXO DE ZENÃO

Encontramos o conceito do infinito a cada passo na filosofia e na ciência moderna e, ocasionalmente, na literatura. Na linguagem cotidiana, a palavra infinito continua sendo usada como sinônimo de "o que está além da compreensão humana". Quando encontrado num contexto científico ou filosófico, contudo, o infinito não pode ser eludido com tanta facilidade. Ciência e filosofia, afinal de contas, são tentativas de compreender o mundo.

Um dos primeiros e mais famosos usos da ideia de infinidade é o paradoxo de "Aquiles e a Tartaruga", concebido pelo filósofo grego Zenão de Eléia em meados do século V a.E.C. (estamos falando de mais ou menos 450 anos antes da era comum). Zenão era discípulo de Parmênides e seu grupo era meio contrário às ideias dos pitagóricos da época. O paradoxo de Zenão pode ser enunciado da seguinte maneira: suponha que o veloz guerreiro Aquiles deve disputar uma corrida com uma tartaruga. Sendo de longe a mais lenta dos dois, a tartaruga é autorizada a começar num ponto certa distância à frente. Mas nesse caso, diz Zenão, Aquiles jamais conseguirá alcançar seu adversário. Para isso, ele precisa primeiro chegar ao ponto do qual a tartaruga partiu. A essa altura, a tartaruga terá avançado até algum ponto adiante na pista de corridas. E quando Aquiles alcançar esse ponto, a tartaruga terá avançado ainda mais. É óbvio, afirma Zenão, que a série é interminável. Haverá sempre alguma distância, por menor que seja, entre os dois competidores.

Uma analogia bem interessante para compreendermos melhor o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, seria associar Aquiles a um jovem funcionário gerenciador de projetos e a tartaruga a seu chefe, mister T. Aquiles trabalha fortemente para alcançar a meta estabelecida por seu chefe. (ABREU, 2015)

Figura 5 – Aquiles inicia o trabalho para alcançar a meta

Fonte: (ABREU, 2015)

A cada vez que Aquiles corre para alcançar a meta estabelecida por seu chefe, ele já estabelece uma nova meta a ser alcançada.

Figura 6 – Ao alcançar a meta, já existe outra meta estabelecida

Fonte: (ABREU, 2015)

Figura 7 – Parece impossível para Aquiles alcançar seu chefe Mr T

Fonte**:** (ABREU, 2015)

Parece ser impossível para Aquiles alcançar seu chefe, pois a cada vez que ele bate a meta, seu chefe mister T já atualizou a meta.

Todos nós sabemos, é claro, que Aquiles iria alcançar a tartaruga com muita facilidade, mas assinalar isso não invalida o raciocínio de Zenão. O que ele esta dizendo é que Aquiles deve efetuar uma série infinita de atos, algo que não pode ser feito num período de tempo finito. Se preferirmos não acreditar nisso, temos de demonstrar onde reside a falácia.

Aristóteles diz que Zenão propôs o paradoxo de “Aquiles e a Tartaruga” e um outro chamado “A dicotomia” no intuito de mostrar que o movimento era impossível. Aqui, como no paradoxo anterior, Aquiles deveria percorrer sempre a metade da distância antes de percorrer a distância total. Mas não é certo que isso seja correto. Todos sabiam que Aquiles logo alcançaria o lerdo animal. Consequentemente, tinha de haver algo errado com os pressupostos iniciais.

Simplificando um pouco as coisas, vou supor que Aquiles corre exatamente duas vezes mais depressa que a tartaruga. Isso pode soar um pouco disparatado, mas pode ser que Aquiles tenha passado um dia duro matando troianos e se a tartaruga não fosse a mais veloz do mundo, provavelmente não teria desafiado Aquiles para uma corrida, para início de conversa. Observe que, ao fazer essa suposição, não alteramos em nada a natureza do paradoxo. O princípio é exatamente o mesmo, quer Aquiles corra duas, dez, ou 50 vezes mais depressa que seu adversário. Além disso, vou presumir que a vantagem dada à tartaruga foi de dez metros e que Aquiles precisa exatamente de um segundo para completar a primeira fase da corrida; isto é, para chegar ao ponto de partida da tartaruga. É fácil ver que a dianteira da tartaruga terá sido reduzida a cinco metros nesse ponto. Se Aquiles é capaz de correr dez metros por segundo, a tartaruga correrá com metade dessa velocidade. Como a dianteira da tartaruga foi reduzida pela metade, é óbvio que Aquiles precisará apenas de meio segundo para completar a segunda fase.

A transposição da terceira exigirá um quarto de segundo, ao passo que a quarta vai demandar um oitavo de segundo, e assim por diante.

Se somarmos então o tempo total transcorrido em qualquer fase da corrida, verificamos que a soma é $1\frac{1}{2}$ segundo após duas voltas, $1\frac{3}{4}$ segundo após três, $1\frac{7}{8}$ após quatro, e assim por diante. A impressão que se tem é de que o tempo total se aproxima cada vez mais de dois segundos. Na verdade, no mundo real, Aquiles alcançaria a tartaruga exatamente nesse intervalo de tempo nas condições que descrevi. E se Aquiles estivesse correndo dez vezes mais depressa que a tartaruga, o resultado seria semelhante.

À primeira vista, parece que o paradoxo de Zenão pode ser resolvido com bastante facilidade. Basta um pouco de aritmética. Um momento de reflexão mostrará que não é assim. Zenão não disse que Aquiles seria incapaz de alcançar a tartaruga num tempo finito. Sabia perfeitamente que era exatamente isso que aconteceria. O que Zenão disse realmente foi que era impossível para Aquiles efetuar um número infinito de atos. (MORRIS, 1998) O paradoxo de Zenão também representa de maneira muito clara uma das indeterminações do cálculo envolvendo o infinito.

Suponha que a tartaruga inicie a corrida com uma vantagem de 100 metros em relação a Aquiles e que a velocidade de Aquiles seja 10 vezes maior do que a velocidade da tartaruga. Então, quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá percorrido 10 metros. Quando Aquiles vencer os 10 metros, a tartaruga terá andado 1 metro, depois 0,1 metros e assim por diante. Dessa forma, as distâncias percorridas por Aquiles em cada etapa serão

$$100, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \cdots, \frac{1}{10^n}, \cdots$$

Portanto, a distância total percorrida por Aquiles é igual a

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = 111,\overline{1}$$

que é a soma de uma série geométrica de razão $\frac{1}{10}$ primeiro termo igual a 100 de modo que a medida que n cresce, isto é, $n \to \infty$ a fração $\frac{1}{10^n}$ se torna muito pequena, ou seja, $\frac{1}{10^n} \to 0$, logo a distância percorrida nesse caso seria $\infty.0$ em que o ∞ representa o número de termos e 0 representa a distância para termos quanto $n \to \infty$.

Portanto, a soma infinita das distâncias percorridas converge para $111,\overline{1}$[3] metros.

[3] $111,\overline{1}$ é equivalente a 111,11111...

Nessas condições, se Aquiles disputar com a tartaruga uma corrida com distância superior a $111,\overline{1}$ metros, ele vencerá a corrida tendo a ultrapassagem realizada nos primeiros $111,\overline{1}$ metros do percurso. (DESANTI; PROBST, 2018)

O Paradoxo de Zenão, bem como outros paradoxos, foi muito importante para a matemática e para a filosofia da época. Traz uma ideia muito bonita, que apesar de conter uma inconsistência, provoca uma reflexão muito pertinente, a de que não é possível, no mudo real, dividir um processo em infinitos passos,

3 O INFINITO MATEMÁTICO

Neste capítulo apresentaremos o conceito de infinito com o seu devido rigor matemático, de modo que fique estabelecida a diferença entre um conjunto infinito e um conjunto finito. Para tal introduziremos o conjunto dos números naturais.

3.1 NÚMEROS NATURAIS

Uma das primeiras experiências que a maioria das pessoas têm com a Matemática é por meio do processo de contagem. É importante observar que aprender a contar tem duas etapas bem distintas, com graus de complexidade também distintos:

- Na primeira etapa, aprendemos a enunciar uma sequência de palavras (um, dois, três, ...), sem atribuir significado a elas;
- Algum tempo depois, aprendemos a usar esta sequência para contar os elementos de um conjunto, ou seja, estabelecer uma correspondência entre os elementos do conjunto e estas palavras que chamamos de números. Algo notável, que não custamos a observar, é que, não importa como façamos a correspondência, o número final é sempre o mesmo - a ele, denominamos o número de elementos do conjunto.

Como foi dito, contar significa, na verdade, estabelecer uma correspondência de um para um, entre dois conjuntos. Normalmente utilizamos o conjunto que chamaremos de conjunto dos *números naturais*, mas note que esse é um caso particular. Suponha que se tenha duas salas A e B com determinada quantidade de pessoas em cada uma delas. Caso quiséssemos determinar qual das duas salas possui mais pessoas, uma solução possível seria: retira-se uma pessoa da sala A e uma pessoa da sala B, repetindo o processo várias vezes até que não houvesse mais alunos em uma das salas. É fácil ver a conclusão: se a sala A ficasse vazia primeiro significaria que a sala B possui mais pessoas, caso contrário a sala A possui mais pessoas, e caso as duas ficassem sem pessoas exatamente ao mesmo tempo, é obvio que havia inicialmente a mesma quantidade de pessoas nas duas salas. Note que este experimento não deixa de ser uma correspondência entre dois conjuntos, no caso o conjunto de pessoas da sala A e o conjunto de pessoas da sala B, só se diferencia da contagem usual porque não utilizamos os naturais . Esse tipo de "contagem" foi bastante utilizado no passado antes de surgirem os números naturais.

A mesma tarefa em duas etapas deve ser empreendida ao se estabelecer a fundamentação matemática apropriada para os números naturais. Ao olhar os números naturais como uma simples sequência, estamos diante do que chamamos de números *ordinais*, ao qual seu uso como instrumento de contagem remete à noção de número *cardinal*. (MORGADO; CARVALHO, 2015)

O conjunto dos números naturais é caracterizado pelos seguintes fatos:

1. Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A imagem s(n) de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se o sucessor de n.
2. Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \subset X \to s(X) \subset X$) então $X \in \mathbb{N}$.

Essas afirmações podem ser reformuladas assim:

1. Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural;
2. Números diferentes têm sucessores diferentes.
3. Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.
4. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

Observação 1.1 As propriedades 1, 2, 3 e 4 acima chamam-se os *axiomas de Peano*. O axioma 4 é conhecido como o *princípio da indução*. Como nos diz (LIMA, 2020).

3.2 O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

Não tem como falar dos números naturais sem falar do Princípio da Indução Finita (PIF) ou Princípio da Indução Matemática (PIM), uma das ferramentas mais importantes nas demonstrações de propriedades envolvendo os números naturais.

Podemos fazer uma analogia do Princípio de Indução com uma série de dominós colocados enfileirados, de modo que ao derrubar o primeiro, desencadeamos uma série de eventos nos quais cada dominó, irá derrubar o seguinte até que todos sejam derrubados. Nesta perspectiva podemos trocar cada dominó por proposições p1, p2, p3, etc, onde a incidência de uma garante a incidência da seguinte.

Segundo (MORGADO; CARVALHO, 2015) o *Princípio da Indução* ou *Axioma da Indução* fornece um mecanismo para garantir que um dado subconjunto X de $\mathbb{N}$ inclui, na verdade, todos os elementos de $\mathbb{N}$. Por essa razão, é um instrumento fundamental para construir definições e demonstrar teoremas relativos a números naturais (as definições e provas por indução ou recorrência).

Suponhamos que se deseja provar que uma propriedade $P(n)$ relativa ao número natural n seja válida para todos os valores naturais de $\mathbb{N}$. Ou seja, desejamos provar que o conjunto $X = n|P(n)$, que é um subconjunto de $\mathbb{N}$ é, na verdade, igual ao próprio $\mathbb{N}$.

Aqui utilizamos a notação $X = n|P(n)$ para indicar o conjunto X tal que seus elementos sejam os numeros naturais n que possuam a propriedade P.

Pelo Axioma da Indução basta mostrar que $1 \in X$ e que o sucessor de cada elemento de X também está em X. Em termos da propriedade $P(n)$, isto equivale a mostrar que:

- $P(1)$ é válida;
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$. Verificados estes dois fatos, conclui-se a validez de $P(n)$ para todos os valores de n.

O Axioma da Indução pode ser reescrito como abaixo, usando a linguagem de propriedades, nesta forma, ele costuma ser chamado de *Princípio da Indução Finita* (PIF) ou *Princípio da Indução Matemática* (PIM):

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

i. $P(1)$ seja válida.

ii. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

A seguir colecionamos exemplos diversos da aplicação do (PIM) afim de familiarizar o leitor com esta importantíssima ferramenta de demonstração matemática.

Exemplo 1 *Consideremos o problema de obter uma expressão para a soma dos ímpares até a ordem* $(2n-1)$*, ou seja,* $1+3+5+\cdots+(2n-1)$*. Calculando a soma para os primeiros valores naturais de n, obtemos:*

$$1 = 1$$
$$1+3 = 4$$
$$1+3+5 = 9$$
$$1+3+5+7 = 16$$

O exame das igualdades acima sugere que a soma seja sempre igual ao quadrado do número de parcelas, ou seja, que a afirmativa $P(n) : 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ *é válida para todo* $n \in \mathbb{N}$*. O Princípio da Indução permite demonstrar este fato. O primeiro passo é:*

i. Verificar a validez de $P(n)$ *para* $n = 1$*.*

Isto já foi feito acima, quando verificamos que, para $n = 1$*, ambos os lados da igualdade que pretendemos provar são iguais a 1.*

A seguir, devemos:

ii. Verificar que a validez de $P(n)$, para um valor arbitrário de n, implica a validez de $P(n+1)$. Ou seja, admitindo que $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ para um certo valor de n, devemos mostrar que $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$.

Para tal, somamos o novo termo $2(n+1)-1$ a ambos os membros de $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. Obtemos:

$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=n^2+2n+1=(n+1)^2.$

Portanto, a validez de $P(n)$ para um valor arbitrário de n implica sua validez para $n+1$. Logo, pelo Princípio da Indução, $P(n)$, ou seja, $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

□

Observação 1.2 A verificação de que $P(n)$ é válida, costuma ser chamada de *caso base* de uma demonstração por indução, enquanto a demonstração de que a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$ é chamada de *passo indutivo*. O passo indutivo costuma gerar confusão no primeiro contato com demonstrações por indução. Pode parecer, à primeira vista, que estamos usando, na demonstração, exatamente aquilo que desejamos provar (ou seja, $P(n)$). Na verdade, o segundo passo requer a prova da implicação $P(n) \to P(n+1)$. Como ocorre na prova de qualquer implicação, isto é feito admitindo a validez do antecedente, ou hipótese (neste caso chamada de hipótese de indução) $P(n)$ e mostrando que, daí, decorre a validez do consequente, ou tese $P(n+1)$. De fato, provado que $P(n)$ vale para 1, pelo passo indutivo valerá para 2. E se vale para 2, valerá para 3, e 4, e 5, e assim sucessivamente. Foi exatamente o que fizemos acima.

Exemplo 2 *Consideremos a igualdade $P(n): 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2+1$.*

Supondo que $P(n)$ é verdadeira para algum n, o que sabemos não ser verdade, temos:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+2(n+1)-1=n^2+1+2n+1=(n+1)^2.$$

*Portanto, a implicação $P(n) \to P(n+1)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, embora $P(n)$ seja **falsa** para todo n (já que, no exemplo anterior, mostramos que a soma é igual a n^2 e não $n+1$). Isto ilustra o fato de que no passo em que provamos a implicação $P(n) \to P(n+1)$ não estamos usando o resultado que desejamos demonstrar. Naturalmente, a prova por indução falha por não ser possível mostrar o caso base ($P(1)$ é falsa).*

□

Exemplo 3 *Mostrar que a soma dos n primeiros quadrados perfeitos é igual a*

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Solução: *Note que*

i. *$P(1)$ é verdadeira, pois:*
$$\frac{1.(1+1).(2.1+1)}{6} = 1 = 1^2.$$

ii. *Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. deste modo temos como tese que:*
$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Adicionando $(n+1)^2$ a ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$$

Agora basta apenas manipular a espressão que aparace no segundo membro da igualdade:

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

Assim, temos:

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Portanto,
$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

o que mostra que $P(n) \to P(n+1)$.

O princípio da Indução Matemática nos permite concluir que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

□

Ao dominar o Princípio da Indução Finita, o aluno tende a aventurar-se a utilizá-lo em demonstrações de questões típicas de aritmética como o exemplo que segue.

Exemplo 4 *Provar que 4^n+6n-1 é divisível por 9 para todo n natural.*

Demonstração por Indução

i. verificar a validez de $P(n)$ para $n=1$.

$4^1+6.1-1=4+6-1=9$

logo:

$P(n)$ é valida para $n=1$

ii. verificar que a validez de $P(n)$, para um valor arbitrário de n, implica a validez de $P(n+1)$. Supondo por hipótese a validade de $P(n)$ para um certo n, ou seja, 4^n+6n-1 é divisível por 9. Logo, podemos escrever:

existe $a \in \mathbb{N}$ tal que:

$$4^n+6n-1=9a \Rightarrow 4^n=9a-6n+1$$

Multiplicando ambos os membros da equação por 4, temos:

$$4^{n+1}=36a-24n+4$$

Adicionando $6(n+1)-1$ a ambos os membros:

$$4^{n+1}+6(n+1)-1=36a-24n+4+6(n+1)-1=36a-18n+9=9(4a-2n+1)$$

Portanto, $4^{n+1}+6(n+1)-1$ é divisível por 9, o que prova que $P(n+1)$ é verdadeira. Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

$\square$

Convém destacar, que existem outras demonstrações para esse tipo de situação não sendo obrigatório recorrer à indução matemática, o que aqui foi feito apenas para ilustrar o poder de tal artifício no campo das demonstrações. A demonstração acima poderia ser feita, como normalmente é, por *congruência modular*.

Nos exemplos anteriores utilizamos as propriedades conhecidas da adição e multiplicação com números naturais, que são a base para a manipulação das expressões que lá ocorreram. Tais propriedades podem ser demonstradas formalmente, usando o Princípio da Indução. Para isto, no entanto, é preciso definir apropriadamente a adição e a multiplicação. Deste modo recorremos novamente ao mecanismo do PIM. Seja $S(n)$ um atributo relativo ao número natural n. Se definirmos $S(1)$ e estabelecermos como $S(n+1)$ pode ser obtido a partir de $S(n)$, para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, o Axioma da Indução garante que o atributo $S(n)$ estará definido para cada $n \in \mathbb{N}$. Definições construídas desta forma são chamadas de definições por *indução* ou *recorrência*.

Por exemplo, a soma $m+n$ de dois números naturais pode ser definida por recorrência do seguinte modo:

Definição 3.2.1 ***Adição nos Naturais***

i. $m+1$ *é definido, como o sucessor de M, ou seja,* $m+1 = s(m)$.

ii. $m+(n+1)$ *é definido como o sucessor de* $m+n$*, ou seja, como* $s(m+n)$.

Note que a própria definição da soma $m+n$ já nos dá um indicativo de que ela goza da propriedade associativa. Provaremos agora que, em geral, temos:

$$m+(n+p) = (m+n)+p, \ \forall\, m,n \text{ e } p \in \mathbb{N}.$$

Demonstração Seja X o conjunto dos números naturais p tais que $m+(n+p) = (m+n)+p$, quaisquer que sejam $m,n \in \mathbb{N}$, note que:

i. $1 \in X$ pois, $m+s(n) = s(m+n)$;

Supondo que $p \in X$, então:

ii. $m+[n+s(p)] = m+s(n+p) = s[m+(n+p)] = s[(m+n)+p] = (m+n)+s(p)$.

Logo, $p \in X \Rightarrow s(p) \in X$.

Como $1 \in X$, concluímos, por indução, que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $m+(n+p) = (m+n)+p$, quaisquer que sejam $m,n,p \in \mathbb{N}$

□

A adição de números naturais, em geral, goza das seguintes propriedades:

i. Associatividade: $m+(n+p) = (m+n)+p$;

ii. Comutatividade: $m+n = n+m$;

iii. Lei do corte: $m+n = m+p \Rightarrow n = p$;

iv. Tricotomia: dados $m,n \in \mathbb{N}$, exatamente uma das três alternativas pode ocorrer: ou $m = n$, ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n+p$, ou então, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m+q$.

A demonstração das demais propriedades será omitida, mas pode ser facilmente encontrada nas referências. Note que o item (iv) descreve a *relação de ordem*, que nos números naturais é definida a partir da adição. Dados os números naturais m,n dizemos que *m é menor do que n* e escrevemos:

$$m < n,$$

para indicar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$. De modo análogo, dizemos que *n é maior do que m* e escrevemos:

$$m > n.$$

A notação $m \geq n$ significa que m é *menor ou igual a n*.

A definição (ii) em (3.2.1) corresponde à ideia intuitiva de que o valor de $m+n$ é obtido acrescentando-se n vezes uma unidade a m. Para a multiplicação podemos definir:

Definição 3.2.2 ***Multiplicação nos Naturais***

i. $m.1 = m$

ii. $m.(n+1) = m.n + m$

A partir dessas definições, podem ser demonstradas as propriedades usuais da adição e multiplicação. Ilustramos este fato com a demonstração da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Teorema 3.2.1 *Para quaisquer números naturais m, n e p, vale $(m+n).p = m.p + n.p$.*

Demonstração Vamos utilizar indução em p:

i. A propriedade é válida para $p = 1$, já que:

$$(m+n).1 = m.1 + n.1 = m + n$$

ii. Suponhamos que a propriedade seja válida para certo p, ou seja, $(m+n).p = m.p + n.p$. Temos, pela definição de multiplicação que:

$$(m+n).(p+1) = (m+n).p + (m+n)$$

Pela hipótese de indução, segue que:

$$(m+n).(p+1) = (m.p + n.p) + (m+n) = m.p + m + n.p + n$$

Novamente, pela definição de multiplicação:

$$(m+n).(p+1) = m.(p+1) + n.(p+1).$$

Logo, a afirmativa também é válida para $p+1$.

Portanto, pelo Princípio da Indução, a propriedade é válida para todo m, n e p naturais.

$\square$

A partir da adição e da multiplicação dos naturais, podemos enumerar as propriedades usuais de Ordem:

i. Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.

ii. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, vale uma, e somente uma, das alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.

iii. Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$ e $mp < np$.

Além dessas propriedades, a ordem nos números naturais tem uma propriedade característica, conhecida como a *Propriedade da Boa Ordenação*:

Teorema 3.2.2 *Todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento. Isto significa que existe um elemento n_0 que é menor do que todos os demais elementos de X.*

Mostraremos que um subconjunto de X que não possua um menor elemento é necessariamente vazio, ou seja, que seu complementar X^c é o próprio $\mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $P(n)$ a propriedade $n \in X^c$. Começamos por mostrar que:

i. $P(1)$ é válida. De fato, $1 \notin X$, já que se 1 pertencesse a X seria seu menor elemento. Logo, $1 \in X^c$;

Por outro lado, suponhamos que $P(k)$ seja válida, para todo $k \leq n$. Isto quer dizer que todos os naturais de 1 a n não estão em X, portanto, estão em X^c. Mas isto implica que $n+1$ não pode pertencer a X, já que neste caso, seria seu menor elemento e, por hipótese, X não possui menor elemento. Logo, $n+1 \in X^c$, o que mostra que $P(n+1)$ é válida. Portanto, mostramos que

ii. Se $P(k)$ é válida para todo $k \leq n$, então $P(n+1)$ é válida.

Logo, pelo Princípio da Indução, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $X^c = \mathbb{N}$ e $X = \{\ \}$.

3.3 CONJUNTOS LIMITADOS

Esta secção é destinada a discutirmos alguns conceitos preliminares acerca de conjuntos, muito importantes para as construções que faremos mais adiante, bem como definições e demonstrações. Ver (NETO, 2015)

Nas definições que seguem utilizaremos subconjuntos dos números reais ($\mathbb{R}$), não nos limitando apenas à subconjuntos dos números naturais.

Um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente se existir um número real M tal que:

$$X \subset (-\infty, M]$$

Neste caso, dizemos que M é uma *cota superior* para X. É importante observar que qualquer número real r de tal sorte que $r > M$, também é cota superior para X. Pois uma vez que nenhum elemento do conjunto X é maior que M, não haverá nenhum elemento em X maior que r.

Analogamente, um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente se existir um número real m tal que:

$$X \subset [m, +\infty)$$

e, sendo esse o caso, dizemos que m é uma cota inferior para X. Por fim, um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado se X for simultaneamente limitado superior e inferiormente.

Dito de outra forma, um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente, se existir um real positivo a tal que:

$$x \leq a, \forall x \in X.$$

De modo análogo, um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente, se existir um real positivo a tal que:

$$x \geq -a, \forall x \in X.$$

E finalmente, temos que um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado, se existir um real positivo a tal que:

$$-a \leq x \leq a, \forall x \in X.$$

Exemplo 5 *Conjuntos limitados e ilimitados:*

a) O conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais é ilimitado (i.e., não limitado) superiormente. De fato, para todo $M > 0$, existem naturais maiores que M.

b) O conjunto $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\}$ é limitado superior e inferiormente. Por exemplo, 1 é uma cota superior e 0 uma cota inferior para X.

Definição 3.3.1 *Intervalos Limitados*

São conjuntos limitados no sentido da discussão acima. Realmente, por definição, intervalos limitados são subconjuntos I de $\mathbb{R}$ tais que $I = (a,b), I = (a,b], I = [a,b)$ ou $I = [a,b]$, para certos $a,b \in \mathbb{R}$. Em qualquer um desses casos, temos, claramente, I limitado superior e inferiormente.

Exemplo 6 *Se um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente, então o subconjunto Y de $\mathbb{R}$ dado por $Y = \{-x; x \in X\}$ é limitado inferiormente, e reciprocamente. Realmente, se X é limitado superiormente e $a > 0$ é tal que $x \leq a$, para todo $x \in X$, então $-x \geq -a$, para todo $x \in \mathbb{R}$; mas, como $y = -x$ é um elemento típico do conjunto Y, concluímos que $y \leq -a$, para todo $y \in Y$, de sorte que Y é limitado inferiormente. Também, a validade da implicação recíproca (i.e., Y limitado inferiormente implica X limitado superiormente) pode ser verificada de modo análogo.*

Fixe um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente. Se $M \in \mathbb{R}$ é uma cota superior para X, então $X \subset (-\infty, M]$. No entanto, pode ocorrer que exista $M' < M$ que ainda seja uma cota superior para X, i.e., tal que $X \subset (-\infty, M']$. Por exemplo, se $X = (1,2)$, então $M = 5$ é cota superior para X, mas, tomando $M' = 3$, temos que $M' < M$ e M' ainda é cota superior para X. Por outro lado, se $x \in X$, então nenhum real $M' < x$ é cota superior para X, uma vez que $x \in X \setminus (-\infty, M']$ e, daí, X não está contido no intervalo $(-\infty, M']$.

O fato fundamental acerca do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é que todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente, possui uma cota superior *mínima*. Esse é o conteúdo do *axioma da completude* de $\mathbb{R}$, conforme enunciado a seguir.

Axioma: Se $X \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado superiormente, então X possui uma menor cota superior.

Definição 3.3.2 *Supremo*

Se $X \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado superiormente, e M é a menor cota superior de X, dizemos que M é o supremo de X, e denotamos

$$M = \sup X$$

Analogamente

Definição 3.3.3 *Ínfimo*

Se $X \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado inferiormente, e m é a maior cota inferior de X, dizemos que m é o ínfimo de X, e denotamos

$$m = \inf X$$

3.4 CONJUNTOS INFINITOS

Uma das primeiras habilidades que dominamos no uso dos números naturais é a de contar, ou seja, a de determinar o número de elementos de um conjunto. Nesta secção daremos uma definição adequada a conjunto Finito, infinito, enumerável e não-enumerável. (MORGADO; CARVALHO, 2015)

Definição 3.4.1 *Contar um conjunto X significa estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de X e os elementos de um subconjunto de $\mathbb{N}$ da forma $I_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\} = \{1, 2, ..., n\}$. Quando é possível estabelecer tal correspondência biunívoca, dizemos que X é um conjunto **finito** e que n é o número cardinal ou número de elementos de X.*

Em (LIMA *et al.*, 2016a) podemos encontrar as definições de funções, função injetiva e função sobrejetiva:

Definição 3.4.2 *Função: Dados os conjuntos X, Y, uma função $f : X \to Y$ é uma regra que associa cada elemento $x \in X$ a um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se o domínio e o conjunto Y chama-se contra-domínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ é chamado de imagem de x pela função f.*

Definição 3.4.3 *Função injetiva: Uma função $f : X \to Y$ chama-se injetiva quando elementos diferentes no conjunto X possuem imagens $f(x) \in Y$ diferentes. Ou seja:*

$$x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

. Esta mesma condição pode ainda ser expressada em sua forma contrapositiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

.

Definição 3.4.4 *Função sobrejetiva: Diz-se que uma função $f: X \to Y$ é sobrejetiva quando, para qualquer elemento $y \in Y$, existe, pelo menos um, elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Observação 3.1 Uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos X e Y é uma função bijetiva $f: X \to Y$, ou seja, uma regra que associa a cada elemento de X um elemento de Y de modo que cada elemento de Y seja imagem de exatamente um elemento de X (isto equivale a dizer que f é uma função simultaneamente injetiva e sobrejetiva).

A partir dessa definição podemos demonstrar as propriedades básicas da contagem:

Teorema 3.4.1 *O resultado da contagem (o número cardinal X) é sempre o mesmo, não importando a contagem que seja feita. Todo subconjunto Y de um conjunto finito X é finito e tem-se $n(Y) \leq n(X)$. A igualdade, ou seja, $n(Y) = n(X)$, acontece somente quando $Y = X$.*

A primeira propriedade traz uma justificativa para podermos falar em "número de elementos de um conjunto finito", podemos contá-lo de vários modos, mas o resultado será sempre o mesmo. A segunda relaciona inclusão entre conjuntos e desigualdades entre números cardinais. Parece uma definição que vem bem a calhar, mas um conjunto é *infinito* quando não é finito.

A princípio, pode parecer que a classificação de conjuntos como finitos ou infinitos termina a discussão. Mas, no final do século XIX, Georg Cantor[1] mostrou como comparar a cardinalidade de conjuntos infinitos: um conjunto pode ser "mais infinito" do que outro. Ele utilizou a letra do alfabeto hebraico $\aleph$ (Aleph), para representar cada nível de cardinalidade de um conjunto. De fato, a principal contribuição de Cantor no campo dos números naturais, foi de fato, exibir casos em que não é possível obter uma bijeção entre dois conjuntos infinitos. Novamente, a ferramenta fundamental é a correspondência biunívoca.

Definição 3.4.5 *Dizemos que dois conjuntos X e Y têm a mesma cardinalidade quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre X e Y, ou seja, existe uma função bijetiva $f: X \to Y$.*

Para conjuntos finitos, é fácil ver que a definição acima faz todo sentido, pois conjuntos finitos de mesma cardinalidade são aqueles que possuem o mesmo número de elementos e por isso podem ser colocados em correspondência biunívoca com o mesmo $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Mas a mesma definição também se aplica a conjuntos infinitos.

[1] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918) foi um matemático alemão nascido no Império Russo.

Exemplo 7 *Um exemplo clássico: o conjunto dos números naturais* $\mathbb{N}$ *e o conjunto dos números naturais pares, o qual chamaremos de P, têm a mesma cardinalidade. Portanto existe uma bijeção que associa cada elemento do conjunto P a um único elemento do conjunto* $\mathbb{N}$ *e vice-versa, uma função* $f : \mathbb{N} \to P$ *definida por* $f(n) = 2n$.

Quadro 1 – Bijeção entre os naturais e os naturais pares

números naturais	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
naturais pares	2	4	6	$\cdots$	$2n$	$\cdots$

Fonte**:** Elaborado pelo autor

Já foi citado que trabalhar com o infinito significa embarcar numa viagem de surpresas e de descobertas encantadoras, e o que chama atenção neste exemplo é o fato de percebermos que para conjuntos infinitos, é perfeitamente possível que dois conjuntos tenham a mesma cardinalidade, muito embora um deles (o conjunto dos números naturais pares, neste caso) seja um subconjunto próprio de outro, visto que para conjuntos finitos isto não pode ocorrer!

Definição 3.4.6 *Subconjunto Próprio: Dizemos que B é subconjunto próprio de A, se, B está contido em A e existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B. Em outras palavras A é diferente de B. Ou seja:*

$$B \subset A \;\; e \;\; B \neq A$$

Como temos no exemplo acima, o conjunto dos números naturais pares é um exemplo de um subconjunto próprio dos números naturais.

Exemplo 8 *Considere o conjunto C de todas as sequências infinitas em que todos os termos são iguais a 0 e 1. Um exemplo de elemento de C é a sequência (0, 1, 0, 1, ...), que alterna termos 0 e 1. A cardinalidade de C é pelo menos a mesma de* $\mathbb{N}$*, já que é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre* $\mathbb{N}$ *e o conjunto D de C formado pelas sequências que possuem exatamente um termo igual a 1 (podemos associar o natural n à sequência em que o 1 aparece na n-ésima posição). Isso não impede, em princípio, que possa haver uma bijeção entre* $\mathbb{N}$ *e C seja "mais infinito"do que* $\mathbb{N}$.

Seu argumento foi o seguinte. Suponhamos que fosse possível construir uma função $f : \mathbb{N} \to C$*, em que cada sequência de C aparecesse exatamente uma vez como imagem. Vamos construir uma sequência s formada por 0s e 1s (ou seja, um elemento de C) do seguinte modo:*

se o primeiro termo da sequência $f(1)$ é 0, o primeiro termo de s é 1; senão, é 0. Prosseguimos, sempre escolhendo o n-ésimo termo $s(n)$ como sendo o oposto do n-ésimo termo da sequência $f(n)$. A sequência s assim construída difere pelo menos na posição n de cada sequência $f(n)$. Logo, não pertence à imagem de f. Mas nossa suposição era de que todos os elementos de C aparecessem como imagem! Temos, assim, uma contradição, que mostra a impossibilidade de construir uma bijeção de $\mathbb{N}$ em C.

O conjunto C é um exemplo de conjunto infinito *não enumerável*, i.e., que não pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais. Outros exemplos de conjuntos não enumeráveis são os conjuntos dos números reais $\mathbb{R}$ e dos números irracionais $\mathbb{I}$.

Observação Uma função de domínio igual a $\mathbb{N}$ é chamada de uma *sequência*. Podemos pensar em uma sequência $s : \mathbb{N} \to X$ como uma lista de valores $(s(1), s(2), s(3), s(4), ...)$, que muitas vezes e representada de forma mais simples por $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$.

Conjuntos infinitos e conjuntos enumeráveis podem ser caracterizados em termos das propriedades das sequências de elementos destes conjuntos, como segue:

1. Um conjunto X é infinito se, e somente se, é possível construir uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ em que os termos são elementos *distintos* de X, ou seja, de modo que haja uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$.
2. Um conjunto infinito X é enumerável se, e somente se, é possível construir uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ incluindo *todos* os elementos de X, ou seja, de modo que haja uma função sobrejetiva $g : \mathbb{N} \to X$.

É interessante notar, que as definições de *infinito* e *enumerável*, estão intimamente ligadas aos conceitos de função injetiva e função sobrejetiva respectivamente.

4 O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Conforme (MORGADO; CARVALHO, 2015), Cantor foi a primeira pessoa a provar que existem diferentes números cardinais infinitos. Mais precisamente, os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ são ambos infinitos, mas ele mostrou que não pode existir nenhuma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Em particular, não pode existir uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$. Como certamente existe uma função injetiva de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ (a saber, aquela que a cada $n \in \mathbb{N}$ faz corresponder o próprio n, pensado como elemento de $\mathbb{R}$), diz-se então que a cardinalidade de $\mathbb{N}$ é estritamente menor do que a de $\mathbb{R}$.

4.1 DEFININDO OS RACIONAIS A PARTIR DOS NÚMEROS INTEIROS

Imaginemos uma reta, na qual foram fixados um ponto O, chamado a origem, e um ponto A, diferente de O. Tomaremos o segmento OA como unidade de comprimento. A reta OA será chamada a *reta real*, ou o *eixo real*.

A origem O divide a reta em duas semirretas. A que contém A chama-se a semirreta positiva. A outra é a semirreta negativa. Diremos que os pontos da semirreta positiva estão à direita de O e os da semirreta negativa à esquerda de O.

Seja X um ponto qualquer da reta OA. Se o segmento de reta OA couber um número exato n de vezes em OX, diremos que a abcissa de X é o número natural n ou o número negativo $-n$, conforme X esteja à direita ou à esquerda da origem. Se X coincidir com a origem, sua abcissa será 0 (zero).

O conjunto $\mathbb{Z}$, formado pelo número zero e pelas abcissas dos pontos X do eixo real, tais que o segmento unitário cabe um número exato de vezes em OX, chama-se o conjunto dos *números inteiros*. Representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$.[1] Ele é a reunião dos números naturais com o zero e com o conjunto dos números negativos.

Finalmente podemos definir o conjunto dos números Racionais, assim definido no ensino médio inclusive, segundo (DANTE, 2013a) como:

Definição 4.1.1 *O conjunto $\mathbb{Q}$ formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero.*

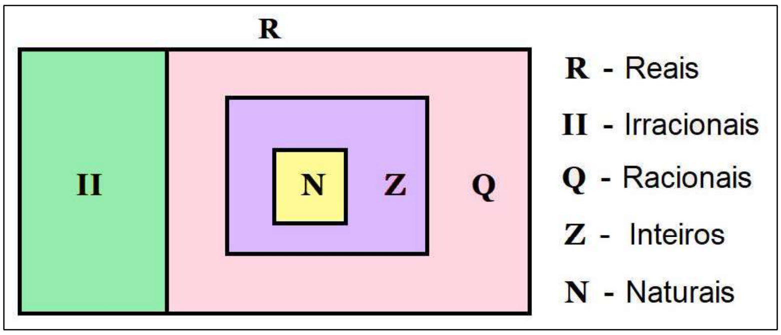
ou seja:

[1] é a inicial da palavra zahl, que significa número em alemão

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{a}{b}, \quad com \quad a \in \mathbb{Z}, \, b \in \mathbb{Z} \quad e \quad b \neq 0\}$$

É fácil ver que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Figura 8 – Conjuntos Numéricos

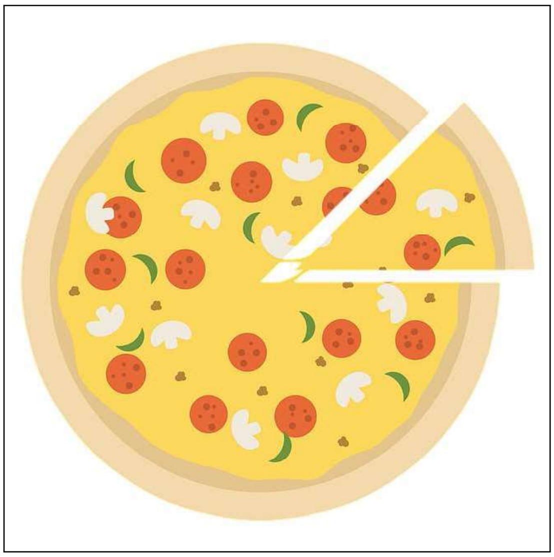


Fonte: Elaborado pelo autor

É importante destacar que é no conjunto dos números Racionais que residem as frações, que trazem tantas dificuldades aos alunos, sobretudo aos alunos da educação básica.

Algo recorrente na educação básica: o estudante resolve com certa facilidade uma equação polinomial do segundo grau com coeficientes inteiros, mas tem dificuldade em resolver uma equação do mesmo tipo com coeficientes racionais fracionários.

Figura 9 – Transformando a fração em uma nova unidade



Fonte: pixabay

E por que isso acontece? Entre os diversos fatores e stiuações que ocasionam este problema na utilização fluente e correta das operações com frações, o autor deste trabalho destaca o fato de não termos o costume de fracionar no dia a dia, muito pelo contrário, o que fazemos é ajustar à unidade a menor parcela. Por exemplo, ao fatiar uma pizza de catupiry em 10 pedaços (a priori a pizza seria a unidade), transformamos cada fatia numa nova unidade, ao invés de tratar cada pedaço como um décimo do todo. Assim, passamos a ter 10 unidades de pizza. Todo esse processo, para evitar trabalhar com as frações.

4.2 EXPRESSÕES DECIMAIS

Para efetuar cálculos, a forma mais eficiente de representar os números reais é por meio de expressões decimais. Falaremos um pouco sobre elas. De acordo com (LIMA *et al.*, 2016a) uma expressão decimal é um símbolo da forma:

$$\alpha \;=\; a_0 \;,\; a_1\; a_2\; \dots\; a_n\; \dots$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$ são dígitos, isto é, números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se um dígito a_n, chamado o n-ésimo dígito da expressão decimal α. O número natural a_o chama-se a *parte inteira* de α.

Exemplo 9 $\alpha = 13,42800...$, $\beta = 25,121212...$, $\pi = 3,14159265...$ *são expressões decimais. Nos casos de* α *e* β*, está claro como se obtêm os dígitos que não estão explicitados. No caso de* π *(medida da circunferência ao tomar o diâmetro como unidade), o que está escrito aqui não permite saber qual a regra para achar os dígitos a partir do nono, mas existem processos bem definidos e eficientes para calculá-los. Recentemente, com auxílio de algoritmos especialmente concebidos e computadores rápidos, foi possível determinar os primeiros 56 bilhões de dígitos de* π.

A expressão decimal de um número real α não negativo, pode ser representada por:

$$\alpha \;=\; a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

onde $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Mais importante é explicar o significado daquelas reticências no final da igualdade. Elas dão a entender de que se trata de uma soma com infinitas parcelas, mas isto é uma coisa que não tem sentido, pelo menos até o momento. O significado é que o número real α tem por valores aproximados os números racionais:

$$a_n \;=\; a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \;(n = 1, 2, ...)$$

Quando se substitui α por α_n, o erro cometido não é superior a

$$\frac{1}{10^n} = 10^{-1}$$

Assim, a_0 é o maior número natural contido em α, a_1 é o maior dígito tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha$$

a_2 é o maior dígito tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha \quad etc$$

Deste modo, tem-se uma sequência não-decrescente de números racionais

$$\alpha_0 \ \leq \ \alpha_1 \ \leq \ \alpha_2 \cdots \ \leq \ \alpha_n \ \leq \ \cdots$$

que são valores (cada vez mais) aproximados do número real α. Mais precisamente, tem-se $0 \leq \alpha - \alpha_n \leq 10^{-n}$ para cada $n = 0, 1, 2, 3, 4, ...$

Diz-se então que o número real α é o limite desta sequência de números racionais. O fato de que existe sempre um número real que é limite desta sequência (isto é, que tem os α_n como seus valores aproximados), é uma forma de dizer que o corpo ordenado dos números reais é completo.

Há algumas situações particulares que merecem ser vistas separadamente. A primeira é quando, a partir de um certo ponto, todos os dígitos posteriores à a_n se tornam iguais a zero:

$$\alpha \ = \ a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \, 0\,0\,0 \ldots \ = \ a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$$

Então:

$$\alpha \ = \ a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

é um número racional; na realidade uma fração decimal (fração cujo denominador é uma potência de 10). Por exemplo:

$$13,42800\ldots \ = \ 13,428 \ = \ 13 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{13428}{1000}$$

Mais geralmente, mesmo que não termine em zeros, a expressão decimal $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ pode representar um número racional, desde que seja *Periódica*.

4.3 DÍZIMAS PERIÓDICAS

Comecemos com o caso mais simples, o qual é também o mais intrigante. Trata-se da expressão decimal, ou seja, do número real

$$\alpha \ = \ 0,999\ldots \ = \ \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$$

Afirmamos que $\alpha = 1$. Com efeito, os valores aproximados de α são $\alpha_1 = 0,9$, $\alpha_2 = 0,99$, $\alpha_3 = 0,999$, etc. Ora $1-\alpha_1 = 0,1$, $1-\alpha_2 = 0,01$, $1-\alpha_3 = 0,001$ e, mais geralmente, $1-\alpha_n = 10^n$. Vemos portanto que, tomando n suficientemente grande, a diferença $1-\alpha_n$ pode tornar-se tão pequena quanto se deseje. Noutras palavras, os números racionais $\alpha_n = 0,99..9$ são valores cada vez mais aproximados de 1, ou seja, têm 1 como limite.

A igualdade $1 = 0,999...$ costuma causar perplexidade aos menos experientes. A única maneira de dirimir o aparente Paradoxo é esclarecer que o símbolo $0,999...$ na realidade significa o número cujos valores aproximados são 0,9, 0,99, 0,999, etc. E como vimos acima, esse número é 1.

Uma vez estabelecido que

$$0,999\ldots \ = \ \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{10^n}+\cdots \ = \ 1$$

resulta imediatamente (dividindo por 9) que

$$0,111\ldots \ = \ \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{10^n}+\cdots \ = \ \frac{1}{9}$$

Consequentemente, para todo dígito a, multiplicando por a tem-se

$$0,aaa\ldots \ = \ \frac{a}{10}+\frac{a}{100}+\frac{a}{10^n}+\cdots = \frac{a}{9}$$

Por exemplo,

$$0,777\ldots \ = \ \frac{7}{9}$$

Podemos ir mais além. Observando que:

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{100} \ = \ \frac{99}{100} \ \ / \ \ \frac{9}{1.000}+\frac{9}{10.000} \ = \ \frac{99}{10.000} \ \ / \ \ \cdots \ \ / \ \ \frac{9}{10^n}+\frac{9}{10^{n+1}} \ = \ \frac{99}{10^{n+1}}$$

Obtemos:

$$1 = \left(\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}\right)+\left(\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}\right)+\cdots = \frac{99}{100}+\frac{99}{100^2}+\cdots = 99\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots\right)$$

Logo:

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3}+\cdots = \frac{1}{99}$$

Daí resulta, por exemplo, que:

$$0,3737\ldots = \frac{37}{100}+\frac{37}{100^2}+\frac{37}{100^3}+\cdots = 37\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots\right) = \frac{37}{99}$$

Uma expressão decimal $\alpha = 0,a_1a_2a_3...$ chama-se uma dízima periódica simples, de período $a_1a_2...a_p$, quando os primeiros p dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem. Assim, 0,777. . . e 0,373737. . . são dízimas periódicas simples, com períodos 7 e 37 respectivamente.

O raciocínio acima se aplica em geral, e nos permite concluir que toda dízima periódica simples representa um número racional, que se chama sua *fração geratriz* (ou, simplesmente, sua *geratriz*). Mais precisamente, podemos dizer, como nos antigos compêndios de Aritmética:

A geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período.

Por exemplo,

$$0,521521521\ldots = \frac{521}{999}$$

Em particular, toda dízima periódica simples representa um número racional.

Existem ainda as dízimas periódicas ditas compostas. São aquelas que depois da vírgula têm uma parte que não se repete, seguida por uma parte periódica. Para obter a geratriz de uma dízima periódica composta, procede-se como no exemplo a seguir:

$$\alpha = 0,35172172\ldots$$

$$100\alpha = 35,172172\ldots = 35+\frac{172}{999} = \frac{35(1.000-1)+172}{999} = \frac{35.172-35}{999}$$

Portanto

$$\alpha = \frac{35.172-35}{99.900}$$

Generalizando a dízima composta, temos:

$$m\ ,\ \underbrace{b_1\, b_2 \ldots b_k}_{\text{não periódica}}\ \underbrace{a_1\, a_2 \ldots a_p}_{\text{período}}\ \underbrace{a_1\, a_2 \ldots a_p}\ \ldots$$

onde $m \in \mathbb{Z}$ e $b_1, \ldots, b_k, a_1, \ldots, a_p \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Veja que,

$$\begin{aligned}
m, b_1 b_2 \ldots b_k a_1 a_2 \ldots a_p \ldots &= m + \frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{10^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \ldots a_p}{10^{k+np}} \\
&= m + \frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{10^k} + \frac{a_1 a_2 \ldots a_p}{10^{k+p}} + \frac{a_1 a_2 \ldots a_p}{10^{k+2p}} + \cdots \\
&= m + \frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{10^k} + \frac{\frac{a_1 a_2 \ldots a_p}{10^{k+p}}}{1 - \frac{1}{10^p}} \\
&= m + \frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{10^k} + \frac{a_1 a_2 \ldots a_p}{10^k(10^p - 1)} \\
&= \frac{m10^k(10^p-1) + (10^p-1) b_1 b_2 \ldots b_k + a_1 a_2 \ldots a_p}{10^k(10^p-1)}
\end{aligned}$$

Chegamos assim à regra tradicional, que muitos de nós decoramos desde nossa infância:

A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual à parte não-periódica (35) seguida de um período (172) menos a parte não-periódica e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não-periódica.

Em suma, expressões decimais periódicas (simples ou compostas) representam números racionais. Reciprocamente, todo número racional é representado por uma expressão decimal finita (que acaba em zeros) ou periódica, como mostraremos a seguir.

A rigor, uma expressão decimal finita, como $0,35000\ldots$ é periódica, com período 0, mas é costume separar este caso, por ser muito particular. Para obter a expressão decimal do número racional p/q , faz-se a divisão continuada de p por q, acrescentando-se zero ao dividendo p enquanto se tiver um resto não-nulo.

$$\frac{14}{27} = 0,518518\ldots$$

Como nas divisões sucessivas só podem ocorrer os restos $0,1,2,\ldots,q-1$, após no máximo q divisões um resto vai repetir-se e, a partir daí, os dígitos no quociente vão reaparecer na mesma ordem, logo tem-se uma expressão periódica.

Observemos que a correspondência que associa a cada expressão decimal um número real é uma função sobrejetiva e "quase" injetiva. A primeira das afirmações acima (sobrejetividade) significa que, dado arbitrariamente um número real α, existe uma expressão decimal $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ tal que:

$$a_0 + a_1 10^{-1} + a_1 10^{-2} + \cdots + a_n 10^{-n} + \cdots \;=\; \alpha$$

Como de costume, basta considerar o caso em que $\alpha > 0$. Então obtemos a expressão decimal de α tomando sucessivamente

a_0 = o maior número inteiro ≥ 0, tal que $a_0 \leq \alpha$;

a_1 = o maior elemento do conjunto $\{0, 1, \ldots, 9\}$, tal que $a_0 + \dfrac{a_1}{10} \leq \alpha$;

a_2 = o maior elemento do conjunto $\{0, 1, \ldots, 9\}$, tal que $a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{100} \leq \alpha$;

Por exemplo, quando escrevemos que $n = 3,14159265\ldots$ estamos dizendo que:

$$2 < \pi < 4, \qquad 3,1 < \pi < 3,2 \qquad 3,14 < \pi < 3,15 \qquad \cdots$$

Quanto à "quase" injetividade da correspondência

expressão decimal $\rightarrow$ número real,

o que estamos querendo dizer é que, se $0 \geq a_n \geq 8$ então as expressões decimais

$$a_0, a_1 \ldots a_n 999\ldots \quad e \quad a_0, a_1 \ldots (a_n + 1)000\ldots$$

definem o mesmo número real. Por exemplo,

$$3,275999\ldots = 3,276000\ldots$$
$$0,999\ldots = 1,000\ldots$$

A afirmação (um tanto imprecisa) de que uma correspondência é "quase" injetiva não tem sentido algum em geral. No presente caso, estamos querendo dizer que a situação acima descrita é a única em que há quebra de injetividade. Isto pode ser provado, mas não haveria muita vantagem em fazê-lo aqui. Para obter uma correspondência biunívoca entre as expressões decimais e os números reais, basta descartar as que terminam por uma sequência de noves.

5 SEQUÊNCIAS E SÉRIES INFINITAS

Esta seção é dedicada ao estudo de sequências e séries de forma bem elementar. Tal seção deste trabalho se justifica devido à sua relação com conteúdos estudados no ensino básico, principalmente as sequências e as dízimas periódicas. Além de contribuir com o fortalecimento do estudo acerca do infinito, este capítulo se propõe a relacionar esses conteúdos do ensino básico com um conteúdo de nível e abstração mais avançados, tornando assim a aprendizagem mais satisfatória e prazerosa. Começaremos com uma introdução ao conceito e representação de somatório, o que será muito utilizado a medida que avançarmos na teoria.

5.1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Pode-se pensar numa sequência como uma lista de números escritos em uma ordem definida: (STEWART, 2013)

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_n,\ \ldots$$

O número a_1 é chamado primeiro termo, a_2 é o segundo termo e, em geral, a_n é o n-ésimo termo. Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo a_n terá um sucessor a_{n+1}.

Observe que, para cada inteiro positivo n existe um número correspondente a_n e, dessa forma, uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas, geralmente, escrevemos a_n em vez da notação de função $f(n)$ para o valor da função no número n.

Em geral, os alunos da educação básica costumam ter contato com algumas sequências bem importantes e conhecidas, destacaremos algumas delas.

Figura 10 – Sequências Numéricas

Sequência de Fibonacci	1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , . . .
	$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
Progressões Aritméticas	a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , . . .
	$a_n = a_1 + (n-1)\,r$
Progressões Geométricas	a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , . . .
	$a_n = a_1 . q^{(n-1)}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Uma das sequências mais conhecidas da matemática é a Sequência de Fibonacci, que surgiu no século XIII quando o matemático conhecido como Fibonacci[1] modelou um problema relacionado à produção de coelhos. O problema consiste no seguinte: Suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com dois meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês?

O quadro abaixo traz uma ilustração do comportamento dessa sequência nos primeiros meses, porém, vale ressaltar que o processo continua infinitamente.

Figura 11 – Esquema que indica o número de casais de coelhos em cada mês segundo o modelo proposto por Fibonacci

Mês	Pares de Coelhos													f_n
1º	P													1
2º	P													1
3º	P	P												2
4º	P	P	P											3
5º	P	P	P	P	P									5
6º	P	P	P	P	P	P	P	P						8
7º	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	13
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

P (Vermelho) representa o par de coelhos inférteis.

P (Verde) representa o par de coelhos férteis.

Fonte: Elaborado pelo autor

Seja f_n a sequência que representa a quantidade de pares de coelhos em função do tempo dado em meses. Começando com um par recém-nascido temos no primeiro mês somente esse par, ou seja, $f(1) = 1$. Até completar o segundo mês o casal de coelhos ainda é infértil, portanto, no segundo mês temos $f(2) = 1$.

No terceiro mês o casal já poderá gerar um novo casal de coelhos, assim, tem-se $f(3) = 2$. Observe que no n-ésimo mês a quantidade de casais de coelhos, será igual à quantidade de casais do mês anterior $f(n-1)$ acrescida da quantidade de coelhos gerados dos casais férteis $f(n-2)$.

Assim, temos a sequência definida recursivamente por:

[1] matemático italiano Leonardo de Pisa ou Leonardo Fibonacci, que descreveu, no ano de 1202, o crescimento de uma população de coelhos, a partir desta sequência

$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, para todo $n \geq 3$, onde $f(1) = 1$ e $f(2) = 1$.

A função $f(n)$ também pode ser representada por:

$$f(n) \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \tag{5.1}$$

Demonstração: Seja F_n o número de Fibonacci definido recursivamente por:

$$F_{n+2} \;=\; F_{n+1} + F_n, \;\text{ com }\; F_1 = F_2 = 1$$

A equação característica é $r^2 - r - 1 = 0$ cujas raízes são:

$$r_1 \;=\; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 \;=\; \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, temos:

$$F_n \;=\; C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para determinar C_1 e C_2, iremos usar $F_1 = F_2 = 1$. Assim, chegaremos no sistema:

$$\begin{cases} C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & = \; 1 \\ \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 & = \; 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto,

$$\begin{aligned} F_n \;&=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

□

Mais detalhes dessa demonstração e do tema recorrência pode ser encontrado em (MORGADO; CARVALHO, 2015).

Uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...a_n, ...)$ é indicada por $(a_n)_{n\geq 1}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (a_n). Dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, estamos interessados em reconhecer se os números reais a_n aproximam-se *cada vez mais* de algum número real l, à medida que n aumenta; por exemplo, se $a_n = \frac{1}{n}$, então é razoável dizer que os números a_n aproximam-se de 0 à medida que n aumenta, haja vista que o resultado da divisão de 1 por n é cada vez menor à medida que n aumenta, (NETO, 2015). Em outras palavras, à medida que n tende para o infinito.

Observação: Dados os números reais L, x, ε, com $\varepsilon > 0$, as três afirmações seguintes são equivalentes:

i. $|x - L| < \varepsilon$,

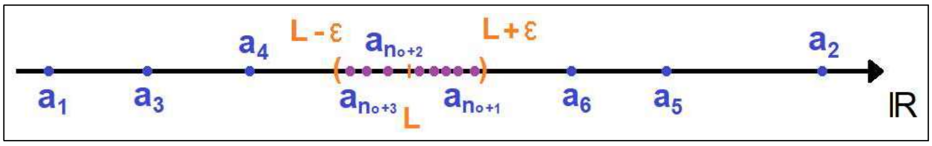
ii. $L - \varepsilon < x < L + \varepsilon$

iii. $x \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

Assim, o intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, que chamaremos o *intervalo aberto de centro* L e *raio* ε, é formado pelos pontos cuja distância ao ponto L (centro do intervalo) é menor do que ε.

Definição 5.1.1 *Dizemos que uma sequência* $(a_n)_{n \geq 1}$ ***converge*** *para um real* L *quando, fixado arbitrariamente um erro* $\varepsilon > 0$ *para o valor de* L*, existir um índice* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_n - L| < \varepsilon$*, para todo* $n > n_o$*. Em outras palavras,* $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ *para todo* $n > n_o$*.*

Figura 12 – Convergência de uma sequência



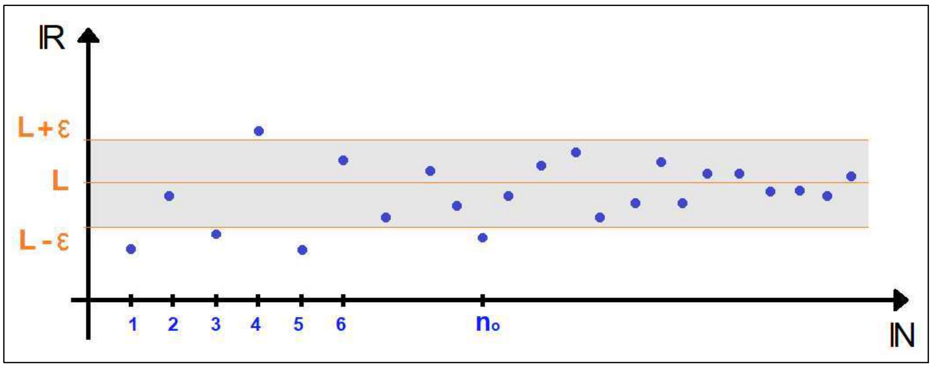
Fonte**:** Elaborado pelo autor

Alternativamente, se $(a_n)_{n \geq 1}$ convergir para L, diremos que a sequência é *convergente* e que L é um *limite* da mesma, fato que denotaremos escrevendo:

$$\lim_{x \to \infty} a_n = L.$$

Por fim, uma sequência que não converge para real algum será dita *divergente*. Ainda em relação à definição anterior, é de se esperar que, ao diminuirmos o erro $\varepsilon > 0$, tenhamos de aumentar o natural n_0 a fim de que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$, ou seja, é de se esperar que n_o dependa de $\varepsilon > 0$. De qualquer modo, o importante para assegurar a convergência da sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ para L é que, fixado arbitrariamente um erro $\varepsilon > 0$, sejamos capazes de expressar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

Figura 13 – Faixa de convergência de uma sequência



Fonte: Elaborado pelo autor

$$n > n_0 \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

No intuito de familiarizar o leitor com esse procedimento, colecionamos, a seguir, exemplos elementares de sequências convergentes e divergentes. (NETO, 2015)

Exemplo 10 *Se $a_n = \frac{1}{n}$, então a_n converge para zero quando n tende para o infinito: de fato, dado $\varepsilon > 0$, a fim de que $|a_n - 0| < \varepsilon$ basta que $n > \frac{1}{\varepsilon}$; assim, fixado $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, temos que*

$$n > n_0 \rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon.$$

Exemplo 11 *Se $a_n = (-1)^n$, então $(a_n)_{n\geq 1}$ diverge:realmente, os termos da sequência, sendo alternadamente iguais a 1 e -1, não podem aproximar-se de um mesmo real L. Outro argumento para este exemplo será dado mais adiante utilizando o conceito de* subsequência.

Exemplo 12 *Se $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 1: isso porque $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$, de maneira que $|a_n - 1| < \varepsilon$ para todo $n > \frac{1}{\varepsilon}$.*

Exemplo 13 *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência constante, com $a_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para c. Isto porque, para todos $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$.*

Observação: A definição de convergência de uma sequência não deixa claro se o limite de uma sequência convergente é único. De outra forma, em princípio, poderia ocorrer que uma certa sequência convergisse para mais de um limite. No entanto, como mostra o resultado a seguir, isto não ocorre.

Proposição 5.1.1 *Se a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir, então seu limite é único.*

Demonstração: Por contradição, sejam l_1 e l_2 reais distintos e suponha que a sequência converge simultaneamente para l_1 e l_2. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}|l_1 - l_2| > 0$, a definição de limite garante a existência de n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \rightarrow |a_n - l_1| < \varepsilon \;\text{ e }\; n > n_2 \rightarrow |a_n - l_2| < \varepsilon.$$

Daí, pela desigualdade triangular,

$$n > max\{n_1, n_2\} \rightarrow |l_1 - l_2| \;\leq\; |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|,$$

o que é um absurdo.

$\square$

Uma segunda demonstração, mais intuitiva, pode ser encontrada em (LIMA, 2020).
Demonstração: Seja $\lim X_n = a$. Dado $b \neq a$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ sejam Disjuntos[2]. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ implica $X_n \in I$. Então, para todo $n > n_0$, temos $X_n \notin J$. Logo não é $\lim X_n = b$

$\square$

Para avançarmos na teoria prosseguimos com a seguinte definição: (NETO, 2015)

Definição 5.1.2 (Subsequência) *Dada uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definimos uma* subsequência *da mesma como a restrição de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$ do conjunto de índices. Como a função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}_1$ dada por $j \rightarrow n_i$ é uma bijeção, toda subsequência de uma sequência é, ainda, uma sequência. Ademais, podemos denotá-la por $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.*

Proposição 5.1.2 *Propriedades Básicas de Limites de Sequências. Seja l o limite de uma sequência de números reais.*

a) Se $l < a$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < a$ para todo $n > n_0$.

b) Se $a_n \geq a$, para todo $n \geq 1$, então $l \geq a$.

c) Toda subsequência $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainda converge para l.

Demonstração: a) Suponha $l < a$ (o caso $l > a$ pode ser tratado de modo análogo), e tome $\varepsilon = a - l > 0$. A definição de limite de sequências garante a existência de um índice n_0 tal que $n > n_0 \rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$; em particular, para $n > n_0$, temos:

2 [Matemática] Conjuntos que não possuem elementos comuns.

$$a_n < l + \varepsilon = l + (a - l) = a.$$

b) Segue imediatamente de (a), por contraposição.

c) Seja dado $\varepsilon > 0$. Como $a_n \to l$ quando $n \to \infty$, existe n_0 natural tal que $|a_n - l| < \varepsilon$, para $n > n_0$. Mas, como $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, existe n_i na subsequência tal que $n_i > n_o$; portanto,

$$j \geq i \Rightarrow n_j > n_0 \Rightarrow |a_{n_j} - l| < \varepsilon.$$

Mas isso é o mesmo que dizer que $a_{n_k} \to l$ quando $k \to \infty$.

□

Apesar da notação carregada, o item (c) da proposição acima pode ser resumido em palavras de uma maneira bastante simples: basicamente, ele afirma que, se os termos de uma sequência aproximam-se de um real l à medida que aumentarmos seus índices, então, quando considerarmos somente uma parte (ainda infinita) desses termos, eles continuaram se aproximando de l à medida que aumentamos seus índices.

A proposição anterior possui a seguinte consequência imediata, a qual fornece uma condição suficiente para a divergência de uma sequência.

Proposição 5.1.3 *Uma sequência que possui duas subsequências convergindo para limites distintos é divergente.*

Demonstração: Realmente, se a sequência inicial convergisse para l, então, pela proposição anterior, todas as suas subsequências também convergiriam para l.

□

Portanto, para mostrar que uma dada sequência diverge, basta exibir duas subsequências que convirjam para limites diferentes. Segue um exemplo clássico.

Exemplo 14 *A sequência $a_n = 1, -1, 1, -1, ...$, de termo geral $(-1)^{n+1}$, é divergente. De fato podemos exibir b_n e c_n, duas subsequências de a_n convergindo para limites diferentes:*

$$b_n = 1, 1, 1, 1, \ldots$$

e

$$c_n = -1, -1, -1, -1, \ldots.$$

Como $b_n \to 1$ e $c_n \to -1$, logo a_n não pode ser convergente.

$\square$

Teorema 5.1.4 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge para o limite l. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < 1$. Portanto, segue pela desigualdade triangular que

$$n > n_0 \Rightarrow a_n| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|.$$

Por fim, se $M = max\{1+|l|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0 - 1}|$, então $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que a sequência em questão é limitada.

$\square$

A seguir, enunciaremos e demonstraremos um dos resultado mais importante sobre limites de sequências, conhecido na literatura como o teorema de **Bolzano-Weierstrass**[3]

Teorema 5.1.5 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência monótona não decrescente e limitada, i.e., que:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots < M,$$

para algum $m > 0$ (os demais casos podem ser tratados de forma análoga). Então, M é uma cota superior para o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$, de sorte que tal conjunto possui supremo, digamos sup A = l

Afirmamos que $a_n \to l$. Para tanto, seja $\varepsilon > 0$ dado; como $l - \varepsilon$ não é mais cota superior de A, algum elemento de A é maior que $l - \varepsilon$, digamos $a_{n_0} > l - \varepsilon$. Mas, como $a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq \cdots$, concluímos que $a_n > l - \varepsilon$, para $n \geq n_0$. Assim, para $n \geq n_0$, temos

$$l - \varepsilon < a_n \leq l \leq l + \varepsilon$$

ou seja, $|a_n - l| < \varepsilon$.

$\square$

[3] Bernard Bolzano e Karl Weierstrass, matemáticos alemães dos séculos XVIII e XIX.

Teorema 5.1.6 *Toda sequência limitada admite uma subsequência convergente.*

Demonstração: Com efeito, basta mostrar que toda sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência monótona. Diremos que um termo a_n da sequência dada é *destacado* quando $a_n \geq a_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que a_n é um termo destacado. Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, então a subsequência $(a_n)_n \in D$ será monótona não crescente. Se, entretanto, D for finito seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que todos os $n \in D$. Então a_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $a_{n_1} < a_{n_2}$. Por sua vez, a_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $a_{n_2} < a_{n_3}$. Prosseguindo, obtemos uma subsequência crescente $(a_{n_1} < a_{n_2} < \cdots < a_{n_k} \cdots)$.(LIMA, 2020)

□

5.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Esta é uma sequência já vista no ensino médio, onde os alunos têm a oportunidade de ter contato com exemplos, termos geral e soma de seus termos. Aqui daremos mais ênfase exatamente para a soma dos termos da progressão, aqui já tratada como sequência.

Definição 5.2.1 *Progressão Geométrica: é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo seu termo anterior. Esse quociente é chamado de razão da progressão e é representado pela letra q. (LIMA et al., 2016b)*

Proposição 5.2.1 *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é:*

$$S_n = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Demonstração: Considere a Progressão Geométrica (PG) finita $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n)$ e seja S_n a soma de seus termos:

$$S_n = a_1\ +\ a_2\ +\ a_3\ +\ \cdots\ +\ a_n$$

Vamos multiplicar os dois membros dessa igualdade pela razão $q(q \neq 0)$, obtendo:

$$qS_n = a_1q\ +\ a_2q\ +\ a_3q\ +\ \cdots\ +\ a_nq$$

ou

$$qS_n = a_2 \ + \ a_3 \ + \ a_4 \ + \ \cdots \ + \ a_n q$$

Portanto, temos:

$$qS_n - S_n = a_n q - a_1$$

Como $a_n = a_1 q^{n-1}$, então $a_n q = a_1 q^n$, logo:

$$S_n(q-1) = a_1 q^n - a_1 \Rightarrow S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Portanto,

$$S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q-1}, \quad para \quad q \neq 1 \tag{5.2}$$

□

E aqui obtemos a fórmula pela qual se calcula a quantidade de trigo pedida pelo inventor do jogo de xadrez na lenda narrada no capítulo 2 deste trabalho.

Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o inventor pediu a soma dos primeiros 64 termos da Sequência:

$$a_n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., \text{cuja razão é } q = 2$$

$$S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q-1} = 1 . \frac{2^{64} - 1}{2-1} = 2^{64} - 1$$

□

Usando uma calculadora podemos calcular alguns valores para a sequência cujo termo geral é: $a_n = (\frac{1}{10})^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Note que para um n suficientemente grande, o valor de $(\frac{1}{10})^n$ pode se aproximar de zero tanto quanto se queira. Dizemos, então, que o limite de $a_n = (\frac{1}{10})^n$, quando n tende ao infinito, vale zero.

Como podemos observar no quadro a seguir:

Quadro 2 – Termos de a_n quando n se torna grande

n	1	2	3	4	5	$\cdots$	10
$(\frac{1}{10})^n$	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	$\cdots$	0,0000000001

Fonte**:** Elaborado pelo autor

Representamos isso da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{10})^n = 0 \tag{5.3}$$

De modo geral, é possível provar que se q é um número real tal que $|q| < 1$, ou seja, $-1 < q < 1$, então o limite da sequência $a_n = q^n$ é igual a zero.

Proposição 5.2.2 *Dado* $-1 < |q| < 1$*, se* $a_n = q^n$*, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demonstração: Como $|q| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1$, portanto:

$$\frac{1}{|q|} = 1+\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda > 0.$$

Pela Desigualdade de Bernoulli(desde que $\lambda > -1$ e n seja positivo), temos:

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+\lambda)^n \geq 1+n\lambda.$$

Logo:

$$\frac{1}{|q|^n} \geq 1+n\lambda.$$

Finalmente, temos:

$$|a_n - 0| = |q|^n \leq \frac{1}{1+n\lambda}.$$

Deste modo, se queremos que $|a_n - 0| < \varepsilon$, basta impormos que:

$$\frac{1}{1+n\lambda} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\varepsilon} - 1).$$

□

Como foi possível exibir n_0 de modo que para valores de a_n com índices maiores que n_0, $|a_n - 0| < \varepsilon$, então podemos afirmar que a_n converge e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Veja o que ocorre com essa soma quando n se torna arbitrariamente grande, i.e., quando n tende a infinito.

$$\lim_{x\to\infty} S_n = \lim_{x\to\infty}(a_1.\frac{q^n - 1}{q-1}) para - 1 < q < 1$$

Daí, segue da proposição (5.2.2) que:

$$\lim_{x\to\infty}(a_1.\frac{0-1}{q-1}) = \frac{-a_1}{q-1}$$

Ou finalmente:

$$\lim_{x\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \tag{5.4}$$

5.3 O SÍMBOLO SIGMA E A NOTAÇÃO DE SOMATÓRIO

Uma maneira prática e bastante usual na literatura de escrevermos grandes somas é utilizando a notação de somatório, usamos a letra grega $\sum$ (letra sigma maiúsculo, que corresponde ao nosso s e indica soma) para representá-las de forma mais conveniente.

Definição 5.3.1 *Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então escrevemos:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Para indicar o somatório dos a_i, para $1 \leq i \leq n$.

Esta notação indica que a letra i assume valores naturais consecutivos variando de 1 até n. Outras letras podem ser utilizadas para o índice do somatório e no lugar do n podemos ter o símbolo ∞, indicando assim que a soma é infinita.

Um caso particular da definição acima é quando temos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência constante, ou seja, digamos que se tenha $a_n = k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deste modo é fácil ver que:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} k = nk$$

Como podemos ver em (NETO, 2015), uma das utilidades da notação $\sum$ deve-se ao fato dela facilitar a manipulação de somas com um grande número de parcelas, principalmente se cada parcela já for uma soma.

Exemplo 15 *Considere duas sequências $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, as propriedades associativa e comutativa da adição de números reais nos garante que vale:*

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n);$$

com o uso da notação de somatório, essa mesma igualdade pode ser reescrita de forma bem mais simples e compacta:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) \tag{5.5}$$

Por outro lado, dado $c\in\mathbb{R}$, a distributividade da multiplicação em relação à adição garante a igualdade:

$$c(a_1+a_2+\cdots+a_n)=ca_1+ca_2+\cdots+ca_n$$

a qual podemos escrever de forma mais sucinta e igualmente correta como:

$$c\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n} ca_i \tag{5.6}$$

Sistematizando, podemos partir um somatório de somas em dois outros somatórios e colocar constantes contidas num somatório em evidência.

Exemplo 16 *Calcular o valor da soma $\sum_{k=1}^{n}(5k+3)$ em função de $n\in\mathbb{N}$.*
Solução: *Pelas propriedades expressas pelas equações (5.5) e (5.6) , temos:*

$$\sum_{k=1}^{n}(5k+3)=\sum_{k=1}^{n}5k+\sum_{k=1}^{n}3=5\sum_{k=1}^{n}k+3n$$

portanto:

$$=5.\frac{n(n+1)}{2}+3n=\frac{5n^2+11n}{2}$$

Uma aplicação bastante útil e conhecida é na chamada **soma telescópica**, onde podemos realizar cancelamentos intermediários.

Dada uma sequência como a que segue, podemos efetuar os cancelamentos da soma

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$$

obtemos como resultado $a_n - a_1$. Com o uso da notação de $\sum$, podemos escrever esta mesma igualdade da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_1. \tag{5.7}$$

Uma fórmula equivalente a essa acima, pode ser obtida escrevendo $n+1$ no lugar de n

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \tag{5.8}$$

tal fórmula muitas vezes é mais prática de ser utilizada.

> A ideia por traz do nome soma telescópica é a seguinte: assim como olhando num telescópio encurtamos a imensa distância de um corpo celeste a nossos olhos, a fórmula acima encurta o caminho entre uma soma inicial de muitas parcelas e o cálculo do resultado da mesma. (Neto, 2015. p. 436)

Exemplo 17 *Utilizando a fórmula da soma telescópica, deduzir a fórmula para o termo geral de uma progressão aritmética.*

Solução: *Considere uma sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que é uma Progressão Aritmética de razão r.*

Pela equação (A.3), temos:

$$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} r = (n-1)r \rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r.$$

$\square$

Exemplo 18 *Retomando o exemplo (3) do capítulo (2), podemos realizar a demonstração por indução de forma mais elegante e sucinta representando através da notação $\sum$ o somatório dos n primeiros quadrados perfeitos. A propriedade $P(n)$ que queremos demonstrar é:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Como o caso base para $n = 1$ é imediato, segue que para o passo indutivo, temos:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Logo, por indução $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

5.4 SÉRIES INFINITAS

Nesta secção apresentaremos a noção de convergência para séries numéricas. Traremos algumas séries importantes e temos o ponto alto da análise dos números racionais, mais precisamente, as dízimas periódicas sob o olhar da convergência das séries. Retomaremos alguns temas trabalhados durante toda a dissertação, agora municiados por teorias mais avançadas, dando a estes o seu devido rigor matemático e uma adequada compreensão.

Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais. Pela série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, ou simplesmente $\sum_{k\geq 1} a_k$, entendemos a sequência $(S_n)_{n\geq 1}$, onde $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ para $n \geq 1$. O número real s_n é denominado a n-ésima soma parcial da série $\sum_{k\geq 1} a_k$ de suas somas parciais converge para algum $s \in \mathbb{R}$. Nesse caso, dizemos que o real s é a soma da série e escrevemos

$$\sum_{k\geq 1} a_k = s \tag{5.9}$$

Em outras palavras, quando escrevemos $\sum_{k\geq 1} a_k = s$, estamos dizendo que as somas finitas $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ aproximam-se mais e mais do número real s. à medida que $n \to +\infty$. É nesse sentido que a igualdade (5.9) deve ser pensada, como um limite.

Por vezes, teremos em mãos uma sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ de números reais, em cujo caso a série correspondente será denotada por $\sum_{k\geq 0} a_k$. Deixamos ao leitor a tarefa (imediata) de adaptar as discussões acima a tal situação.

Apresentaremos neste capítulo alguns critérios que nos permitam decidir se uma dada série é ou não convergente. Caso não o seja, diremos que se trata de uma série *divergente*.

Comecemos examinando o caso de uma *série geométrica*, i.e., uma série da forma $\sum_{k\geq 1} q^{k-1}$, para um certo real não nulo q.

Conforme veremos ao longo deste capítulo, séries geométricas são, sob vários aspectos, fundamentais para o desenvolvimento da teoria, principalmente em relação ao nosso objeto de estudo, as dízimas periódicas.

Proposição 5.4.1 *Dado $q \in \mathbb{R} \setminus 0$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge se, e só se, $|q| < 1$. Nesse último caso, sua soma é igual a $\dfrac{1}{1-q}$.*

Demonstração: Sendo $S_n = 1 + q + ... + q^n$, segue da fórmula para a soma dos termos de uma PG que:

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-1} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$$

Agora, se $|q| < 1$, sabemos da proposição (5.2.2) que $\lim_{x\to\infty} q^n = 0$. Portanto, temos:

$$\lim_{x\to\infty} S_n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q} \tag{5.10}$$

□

Por outro lado, se $|q| \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} |q^n| = +\infty$, de forma que a sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge em $\mathbb{R}$. Portanto, nesse caso a série geométrica em questão seria divergente.

Dada uma série $\sum_{n\geq 1} a_n$, referimo-nos a a_n como o *termo geral* ou, ainda, o *n-ésimo termo* da série. A proposição a seguir dá uma condição *necessária* (mas não suficiente), para a convergência de uma série em função de seu termo geral.

Proposição 5.4.2 *Se a série $\sum_{n\geq 1} a_n$ é convergente, então* $\lim_{x\to+\infty} a_n = 0$

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, queremos garantir a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$. Seja $l = \sum_{n\geq 1} a_n$. Pela definição de convergência de uma série, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow |S_n - l| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

onde $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Então, $a_n = S_n - S_{n-1}$ para $n > 1$, e segue da desigualdade triangular que, para $n > n_0$,

$$|a_n| \geq |s_n - l| + |l - S_{n-1}| \geq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Observação: A recíproca da proposição anterior não é válida, i.e., há séries divergentes $\sum_{n\geq 1} a_n$ para as quais $\lim_{x\to+\infty} a_n = 0$. O exemplo mais clássico é fornecido pela *série harmônica*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Portanto, a proposição (5.4.2) constitui uma importante ferramenta para a constatação da divergência de séries, visto que se o termo geral da série em questão não tender para zero quando n tende para o infinito, a série é obrigatoriamente divergente.

Proposição 5.4.3 *Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de termos não negativos, então $\sum_{k\geq 1} a_k$ converge se, e somente se, a sequência $(S_n)_{n\geq 1}$ de suas somas parciais é limitada.*

Demonstração: Por definição, $\sum_{k\geq 1} a_k$ converge se, e somente se, $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. Como já sabemos que toda sequência convergente é limitada (teorema 5.1.4), concluímos que, se $\sum_{k\geq 1} a_k$ converge, então $(S_n)_{n\geq 1}$ é limitada.

Por outro lado, suponha que $(S_n)_{n\geq 1}$ é limitada. Como $a_k \geq 0$ para todo $k \geq 1$, temos que $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq ....$ Portanto, $(S_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência monótona e limitada, logo convergente, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass (teorema 5.1.5).

□

Retomemos a ideia do paradoxo de Zenão, narrado no segundo capítulo deste trabalho, agora munidos de mais teoria podemos fazer uma análise matemática mais profunda e fundamentada. De acordo com Aristóteles, em (STEWART, 2013):

"Uma pessoa em certo ponto de uma sala não pode caminhar diretamente até a parede. Para fazer isso ela deveria percorrer metade da distância, depois a metade da distância restante e, então, novamente a metade da distância que restou e assim por diante, de forma que o processo pode ser sempre continuado e não terá um fim".

Como naturalmente sabemos que de fato a pessoa pode chegar até a parede, isso sugere que a distância total possa ser expressa como a soma de infinitas distâncias cada vez menores, como a seguir:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Zenão argumentava que não fazia sentido somar um número infinito de números. Porém, há situações em que realizamos implicitamente somas infinitas. Por exemplo, na notação decimal, o símbolo, $0,\bar{3} = 0,3333...$ significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots$$

dessa forma, em algum sentido, deve ser verdade que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Mais geralmente, se a_n denotar o n-ésimo algarismo na representação decimal de um número, então,

$$0,a_1a_2a_3a_4\,\cdots = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

Portanto, algumas somas infinitas, ou, como são chamadas, séries infinitas, têm um significado. Todavia, é necessário definir cuidadosamente o que é a soma de uma série.

Deste modo denotamos por S_n a soma dos n primeiros termos da série. Assim,

$S_1 = \frac{1}{2} = 0,5$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75$

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0,875$

$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0,9375$

$\vdots$

$S_{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1024} \approx 0,99902344$

$\vdots$

$S_{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0,99998474.$

Observe que à medida que somamos mais e mais termos, as somas parciais ficam cada vez mais próximas de 1. De fato, pode-se mostrar que tomando um n suficientemente grande (isto é, adicionando um número suficientemente grande de termos da série), podemos tornar a soma parcial S_n tão próxima de 1 quanto quisermos. Parece, então, razoável dizer que a soma da série infinita é 1 e escrever

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1 \tag{5.11}$$

Em outras palavras, a razão de a soma da série ser 1 é que

$$\lim_{x \to \infty} S_n = 1 \tag{5.12}$$

Apesar de ser uma ideia muito bonita e filosoficamente interessante e relevante, a ideia do paradoxo de Zenão possui um equívoco. E qual seria este? Note que Zenão justifica não ser possível para Aquiles alcançar a tartaruga, pois ao iniciar a corrida, Aquiles gasta um tempo t_1 para chegar à posição inicial da tartaruga. Esta por sua vez já se deslocou um pouco. Logo Aquiles gastará um tempo t_2 (menor que t_1, porém positivo), para chegar na segunda posição da tartaruga, e assim sucessiva e infinitamente.

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots$$

Zenão dizia então que Aquiles nunca alcançaria a tartaruga, pois:

a) Para que Aquiles alcance a tartaruga é preciso que se passem infinitos intervalos de tempos, todos positivos;
b) O tempo que Aquiles gastará para alcançar a tartaruga é a soma de todos esses intervalos de tempo que são números positivos;
c) A soma de infinitos números positivos é infinita;
d) Então Aquiles gastará um tempo infinito para alcançar a tartaruga e, portanto, nunca a alcançará.

Logicamente há uma sutileza que destrói o paradoxo, as duas primeiras proposições são perfeitamente verdadeiras. Porém, é na terceira proposição que reside a falácia argumentativa.

Não é verdade que a soma de infinitos números positivos é infinita. Como vimos, a soma de infinitos números positivos pode, sim, ser finita.

6 TRABALHANDO AS DÍZIMAS PERIÓDICAS COMO SÉRIES NUMÉRICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo, traremos a teoria aplicada em todo o processo de organização deste trabalho, bem como aplicações feitas à luz de tudo que foi construido até aqui e sugestões para o professor.

6.1 ESTRATÉGIA DIDÁTICA

Cada vez mais se faz necessário essa reflexão de como os procesos de ensino e aprendizagem que estão sendo utilizados, de fato proporcionam ao aluno uma melhor metodologia de aprendizagem dentro daquilo que se propoe a ensinar.

> Se objetivamos de fato ações docentes qualificadas, significativas e ricas em sentido, que promovam aprendizagens efetivas, e somos convictos de que as metodologias usuais não dão conta de produzi-las, é preciso repensar os processos de "ensinagens" e de aprendizagens, sobretudo no sentido de proporcionarmos "aprenderes" produtivos e não meramente reprodutivos. (Miranda, 2020. p. 17)

De fato, buscar novas estratégias didáticas para educar nossos alunos significa atender ao propósito de uma aprendizagem significativa, que considere aquilo que o aluno já sabe e que faça sentido para ele.

Em (MIRANDA, 2020), o autor evidencia o papel do professor na utilização da estratégia didática:

> Este, de sua parte, precisa imbuir-se das convicções e das estratégias que podem fazê-lo um professor comprometido com processos de ensinar que possibilitem aos conteúdos ensinados terem sentido e significado para o aluno! Quer seja por meio de aulas mais criativas, [...] quer seja fazendo com que as leituras propostas sejam provocativas e orientadas [...] (Miranda, 2020. p. 18)

Nessa perspectiva, a estratégia didática constitui um conjunto de elementos e ferramentas disponíveis ao professor para que ele possa montar seu plano de aula, ou ainda, gerar um roteiro para uma aula eletiva. Deste modo, uma estratégia didática adequada permite ao professor um maior comprometimento com a qualidade do ensino ofertado ao aluno.

6.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Introdução

A teoria de aprendizagem utilizada na pesquisa e na construção deste trabalho é totalmente baseada na teoria de ensino de Bruner[1], que se baseia na natureza do desenvolvimento intelectual e em uma teoria de ensino que leve em conta este desenvolvimento. (MOREIRA, 2017)

Bruner é talvez mais conhecido por ter dito que *é possível ensinar qualquer assunto, de uma maneira honesta, a qualquer criança em qualquer estágio de desenvolvimento* (1969, 1973, 1976), do que por qualquer outro aspecto de sua teoria. Essa sua icônica frase não quer dizer que o assunto em questão possa ser ensinado em sua forma final ou como é geralmente repassado, requer uma adaptação levando-se em conta diversas etapas do desenvolvimento intelectual.

> Cada etapa do desenvolvimento intelectual é caracterizada por um modo particular de representação, que é a forma pela qual o indivíduo visualiza o mundo e explica-o a si mesmo. (Moreira, 2017. p. 81)

Deste modo, ensinar um determinado conteúdo, mesmo que complexo, a um estudante de qualquer idade, compreende a tarefa de representar a estrutura desse conteúdo em termos da visualização que este estudante tem das coisas, ou seja, nos moldes de como ele visualiza as coisas ao seu redor. Neste sentido, o uso de analogias, principalmente com histórias, facilita muito o processo de aprendizagem, pois coloca o conteúdo dentro de uma abordagem mais compreensiva e mais contextualizada com a rotina do aluno.

Para Bruner, o que é relevante em uma matéria de ensino são principalmente suas ideias e relações fundamentais, não enfatizando o papel da estrutura.

> Quanto à questão de como ensinar, Bruner destaca o processo da descoberta, pela exploração de alternativas, e o currículo em espiral. Segundo Bruner, "o ambiente ou conteúdos de ensino têm que ser percebidos pelo aprendiz em termos de problemas, relações e lacunas que ele deve preencher, a fim de que a aprendizagem seja considerada significante e relevante. Portanto, o ambiente para a aprendizagem por descoberta deve proporcionar alternativas - resultando no aparecimento e percepção, pelo aprendiz, de relações e similaridades, entre as ideias apresentadas, que não foram previamente reconhecidas..."(Moreira, 2017. p. 82)

[1] Jerome Bruner (1969, 1973, 1976), Professor de Psicologia e Diretor do Centrio de Estudos Cognitivos da Universidade de Harvard

Portanto, abordar o mesmo conteúdo sobre diferentes perspectivas e em níveis diferentes constitui a teoria do *currículo em espiral*, e dá ao aluno a oportunidade de interiorizar de forma mais efetiva os conceitos e ideias principais do que está sendo estudado, mesmo que o seu nível de complexidade seja muito alto.

Figura 14 – Teoria do Currículo em Espiral

Fonte**:** pixabay

Este tipo de abordagem, realizada aqui, diminui essa lacuna entre o ensino menos rigoroso aplicado na educação básica e o ensino extremamente rigoroso aplicado nas universidades. O aluno evolui a cada ciclo de contato com o objeto de estudo, passando de uma abordagem mais superficial para uma abordagem cada vez mais concreta e mais bem definida matematicamente.

Desenvolvimento intelectual

Como em toda teoria de aprendizagem, o desenvolvimento intelectual do estudante, desde criança até a idade adulta, é considerado para uma melhor aplicação da técnica de ensino.

> A ideia de desenvolvimento intelectual ocupa uma lugar fundamental na teoria de Bruner, pois, para ele "ensinar é, em síntese, um esforço para moldar o desenvolvimento"e "uma teoria de ensino versa, com efeito, sobre as várias maneiras de auxiliar o desenvolvimento". (Moreira, 2017. p. 82)

A maneira como Bruner distingue os períodos do desenvolvimento operacional é bem análoga àquela proposta por Piaget, a saber são: pré-operacional, operacional concreto e operacional formal, Bruner os apresenta como:

> 1°) Representação ativa: neste estágio, o trabalho mental da criança consiste principalmente em estabelecer relações entre a experiência e a ação; seu interesse consiste em manipular o mundo por meio da ação. (Moreira, 2017. p. 83)

Esse tipo de representação acontece nos anos iniciais de aprendizagem da criança, onde ele trata de estabelecer as primeiras relações com o conhecimento, ainda numa fase pré-escolar .

> 2°) Representação icônica: neste estágio, a criança já está na escola; trata-se de um estágio operacional (concreto), contrariamente ao anterior que era meramente ativo (pré-operacional). É operacional no sentido de manipulação direta de objetos, ou interna, como quando se manipulam mentalmente símbolos que representam coisas e relações. (Moreira, 2017. p. 83)

Nesta fase, as operações representadas em sua mente são utilizadas como um modo de obter e organizar informações do mundo real para posteriormente serem usadas na resolução de problemas. Esse processo mental é reversível, de modo que se dividirmos um conjunto de canetas em subconjuntos, a criança pode compreender de modo intuitivo que podemos obter o conjunto original juntando os subconjuntos.

> 3°) Representação simbólica: corresponde ao período designado como das operações formais pela escola de Genebra[2]. "Neste ponto, a atividade intelectual da criança parece basear-se antes numa capacidade para operar com proposições hipotéticas, do que em permanecer restrita ao que já experimentou, ou ao que tem diante de si. A criança pode, então, pensar a respeito de possíveis variáveis e, até mesmo, deduzir relações potenciais que, mais tarde, podem ser verificadas pelo experimento ou pela observação. Neste ponto é que a criança está apta a dar expressão formal ou axiomática às ideias concretas que, anteriormente, orientavam a resolução de problemas, mas não podiam ser descritas, ou formalmente compreendidas". (Moreira, 2017. p. 84)

Finalmente chegamos à representação 3, na qual se encontram (ou pelo menos deveriam estar), os jovens do ensino médio, aqui já é possível, como vimos, o uso de expressões mais formais, e também a abstração por meio de axiomas, como utilizamos na construção dos números naturais. A teoria de aprendizagem utilizada neste trabalho favorece todas essas construções cognitivas aqui apresentadas, respeitando a capacidade do aluno de trabalhar com essa matemática que conta com uma maior utilização de símbolos matemáticos.

Estrutura e forma do conhecimento

A estrutura e forma do conhecimento faz parte das *características de uma teroia de ensino* apontadas por Bruner, na qual considera a estruturação de um conjunto de conhecimentos

[2] Grupo de linguistas de Genebra pioneiros no desenvolvimento do estruturalismo e da linguística moderna e de críticos literários que trabalhavam a partir de uma perspectiva fenomenológica

que devem ser aprendidos pelo estudante. Além disso, a teoria deverá esclarecer qual a sequência didática mais eficiente para apresentar este conjunto de conhecimento.

> Se alguém quer ensinar a estrutura da teoria da Física Moderna, como deve fazê-lo? Apresentando inicialmente matérias concretas, de maneira a despertar curiosidade sobre as regularidades recorrentes? Ou com uma notação matemática, formal, que simplificará a representação das regularidades a serem encontradas? Quais os resultados de cada método? E qual a mistura ideal? (Moreira, 2017. p. 85)

Bruner apresenta as razões para ensinar a estrutura de uma disciplina, (BRUNER, 1973), das quais destacamos:

> Entender os fundamentos torna a matéria mais compreensível. Isto é verdade não só em física e matemática, mas igualmente em estudos sociais e literatura;
>
> Uma compreensão de princípios e ideias fundamentais, como já se observou anteriormente, parece ser o principal caminho para uma adequada "transferência de aprendizagem". Compreender algo como exemplo específico de uma caso mais geral - que é o que significa compreender um princípio ou estrutura mais fundamental - é ter aprendido não só alguma coisa específica, mas também um modelo para a compreensão de outras coisas semelhantes que se pode encontrar. (Moreira, 2017. p. 87)

Aqui temos o ápice da didática da construção deste trabalho, que visa atender a todas essas concepções de construção da educação. O aluno encontra uma sequência lógica de conteúdos contemplando cada um dos itens aqui citados por Bruner.

6.3 O NOVO ENSINO MÉDIO

O Documento Curricular Referencial do Ceará (DCRC) elaborado à luz da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), estabelece um conjunto de saberes e habilidades essenciais a todos os alunos da educação infantil e do ensino fundamental.

> Ao propor uma nova organização curricular para o Ensino Médio, as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), em seus principais elementos, determinam a construção de um currículo assentado e conexo aos parâmetros apresentados pela BNCC, cujo objetivo maior é priorizar o desenvolvimento de competências e habilidades basilares no processo de formação do indivíduo, enquanto cidadão atuante em nossa sociedade. O currículo, segundo às DCNEM, além de nortear a avaliação da Educação Básica, visa promover a preparação do educando, tanto para o prosseguimento de seus estudos, quanto para sua inserção no mercado de trabalho, em uma condição de plena cidadania. (Ceará, 2021. p. 16)

O Novo Ensino Médio (NEM) traz muitas mudanças e muitos desafios para a implementação de toda a sua proposta inovadora e voltada para o mundo atual com suas tecnologias e seu ritmo diferenciado. Neste sentido foram desenvolvidas novas formas de organização dos conteúdos, das competências e das habilidades. Foram estabelecidas Unidades Curriculares (UC) que compõe as trilhas de aprendizagem, visando dar aos alunos a oportunidade de estudar conteúdos mais voltados para uma área de sua escolha, possivelmente a área que deverá seguir futuramente. (CEARÁ, 2021)

De acordo com o Ministério da Educação (MEC) os itinerários formativos (IF) configuram “cada conjunto de unidades curriculares ofertadas pelas instituições e redes de ensino que possibilitem à/ao aluna/o aprofundar seus conhecimentos” nas áreas de Linguagens e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias e Formação Técnica e Profissional, conforme as novas Diretrizes Nacionais para o Ensino Médio. (BRASIL, 2018)

Neste sentido, este trabalho constitui uma ferramenta útil para auxiliar o professor da educação básica no ensino do conteúdo de sequências e séries, bem como no estudo do infinito, assuntos estes implementados mais fortemente pelo NEM e transcritos nas unidades curriculares que compõe as trilhas de aprendizagem e também nas chamadas *disciplinas eletivas*, que também são de escolha do aluno.

A quinta competência específica do componente curricular de matemática segundo a BNCC nos aponta que:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.(Brasil, 2018. p. 165)

Deste modo é necessário buscarmos cada vez mais um olhar diferenciado para cada conteúdo, demonstração e objeto matemático, de modo que o aluno disponha de diferentes caminhos para a aquisição de tal conhecimento.

O conteúdo abordado neste trabalho bem como sua forma de concepção se justificam pela atual inserção de unidades curriculares (UC) inseridas, por exemplo, nas trilhas de aprendizagem do estado do Ceará, como a Unidade Curricular 43: *Um passeio pelo infinito* que compõe o Eixo estruturante: "Investigação Científica", pertencente à trilha de aprofundamento: "Os Algarismos na História", a qual traz como objetivo: Estudar a concepção de infinito, a partir de uma síntese do contexto histórico, desde suas origens, abordando de modo panorâmico a história das ideias filosóficas que tratam desse conceito. Propõe-se, também, um estudo das definições apresentadas pela matemática sobre a ideia de infinito. Os objetos do conhecimento propostos nesta unidade, apesar de, a princípio, parecerem complexos, podem ser trabalhados de maneira simplificada. A saber são eles: conjuntos, conjuntos numéricos, funções e sequências - Evolução histórica do infinito, infinito potencial, infinito atual, cardinalidade, sequências e séries, aplicações. (CEARÁ, 2023)

Deixando claro a necessidade de abordarmos tais conteúdos o mais cedo possível na educação básica, é claro, respeitando o nível intelectual no qual se encontra o educando.

6.4 APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Nesta secção colecionamos exemplos, sugestões e dicas para desenvolver o que foi proposto neste trabalho com os alunos da educação básica.

Aplicações em dízimas periódicas

Quando tentamos encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica, na verdade, estamos procurando o valor de convergência da série que representa essa soma infinita.

$$0\,,\,9\,9\,9\underbrace{\ldots}_{\text{no infinito}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

As progressões geométricas $(a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \ldots\ ,\ a_1q^n,\ \ldots)$ são exemplos de sequências abordadas no ensino médio (DANTE, 2013a).

A seguir veremos dois exemplos de como tratar as dízimas periódicas à luz do que vimos até agora, ou seja, aplicando conceitos de séries numéricas.

Exemplo 19 *Encontre a fração geratriz da dízima* $0,666\ldots$ *utilizando os conceitos de sequências e séries numéricas.*

Demonstração: Devemos calcular a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n}$$

Como se trata de uma série geométrica e $q = \dfrac{6}{10}$, sabemos que será convergente. Em outras palavras, existe um limite para a soma:

$$s_n = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \cdots + \frac{6}{10^n}$$

Então, deste modo, temos:

$$\lim_{x\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{3}$$

Assim, a fração geratriz da dízima periódica é $\frac{2}{3}$.

Exemplo 20 *Encontre a fração geratriz da dízima* $2,3171717\ldots$ *utilizando os conceitos de sequências e séries numéricas.*

Demonstração: Já sabemos que:

$$2,3171717\cdots = 2 + \frac{3}{10} + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots = 2 + \frac{3}{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{17}{10^{2n+1}}$$

Assim,

$$s_n = \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots + \frac{17}{10^{2n+1}}$$

Logo,

$$\lim_{x\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{17}{1.000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{17}{990}$$

Assim,

$$2,31717\cdots = 2 + \frac{3}{10} + \frac{17}{990} = \frac{2x990+3x99+17}{990} = \frac{2.294}{990}$$

Dicas e sugestões para o professor

Aqui trazemos algumas dicas e sugestões para que o professor possa desenvolver de forma satisfatória conceitos avançados como sequências, infinto, limites e etc., bem como sugestões de temas e exemplos relevantes para familiarizar o aluno com tais assuntos.

A sequência didática na qual este trabalho foi elaborado, fornece ao professor segurança quanto à ordem lógica dos assuntos conforme o seu nível de complexidade. Porém, esta sequência didática não está engessada, de modo que o professor possui total liberdade de adaptar tal sequência segundo a sua necessidade e de acordo com a sua turma. Destacaremos aqui pontos chaves da aplicação deste material com os alunos, seja na sala de aula regular, seja em trilhas de aprendizagem, disciplinas eletivas ou ainda em minicursos e oficinas.

É importante utilizar as histórias, lendas e paradoxos apresentados aqui para estimular o aluno e, ao mesmo tempo, inseri-lo no contexto daquilo que será o objeto de estudo. Aqui mostramos, por exemplo, números exorbitantemente grandes, preparando o aluno para o infinito. É também, igualmente importante, realizar a construção dos números naturais com seus axiomas, já que com eles estudaremos os primeiros conjuntos infinitos. Ainda no estudo dos números naturais é muito importante mostrar aos alunos a propriedade incrível dos conjuntos infinitos que nos permite estabelecer uma bijeção com uma de suas partes próprias.

Para introduzir o conceito de limite, é importante fazer uma brincadeira com os alunos de aproximar de um certo números. Exemplo: "Vamos nos aproximar do número 4. O professor fala um número, como 3,1 e o aluno fala outro como 3,2 e assim sucessivamente. Os números irão se suceder como: 3,8; 3,9; 3,99; 3,999, ... e assim sucessivamente. As perguntas importantes aqui são:

a) Iremos parar esse processo em algum momento?
b) Em algum momento não haverá mais números para aproximar?

Isso trará questionamentos importantes ao aluno e o aproximará da compreensão do conceito de infinito.

Antes de trabalhar a teoria de sequências e séries, é interessante utilizar a sequência ou série de Grandi[3] (exemplo 14), para provocar uma tempestade de ideias entre os alunos.

$$c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = 1, -1, 1, -1, ...$$

É interessante discutir com os alunos qual seria a possível soma desta série. E em seguida mostrar algumas possibilidades:

fazendo um arranjo da série, temos:

$$c_n = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$$

Ou ainda, fazendo outro arranjo, temos que:

$$c_n = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1$$

Ou seja, não é possível definir o valor da soma infinita. Aqui não é necessário fornecer toda a explicação e conclusão ao aluno (o que será feito mais adiante), o importante é despertar nos alunos essa curiosidade sobre o assunto, ao passo que vamos construindo os conceitos gradativamente.

[3] é chamada série de Grandi, em homenagem ao matemático, filósofo e sacerdote italiano Luigi Guido Grandi, que em 1703 realizou trabalhos de destaque sobre esta série.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho traz uma proposta de abordagem do conceito de infinito para alunos da educação básica, sobretudo do ensino médio, e o faz de forma adequada e construtiva, trabalhando progressivamente conceitos avançados como limite, infinito, sequências e séries de uma forma simples e compreensiva para alunos e professores do ensino fundamental e médio. Visamos equilibrar aprofundamento na teoria, com formalismo matemático, ao passo que mantemos o interesse através de clássicos interessantíssimos como: histórias, lendas e paradoxos.

Trazemos aqui uma estratégia didática que trata da importância do conceito de infinito estar associado aos conhecimentos matemáticos estudados pelos alunos da educação básica. Tal conceito está presente em muitas áreas da matemática e muitas vezes e negligenciado por falta de uma melhor metodologia para trabalhá-lo. Que esse trabalho possa contribuir para amenizar a dificuldade que os alunos, e até mesmo os professores têm, com os conceitos abstratos da matemática e assuntos que envolvem o infinito. Que a forma de abordagem aqui apresentada, possa corroborar também com a proposta do Novo Ensino Médio (NEM), sendo assim, um complemento para o trabalho do professor de matemática.

REFERÊNCIAS

ABREU, M. S. **Aquiles, a Tartaruga, o Paradoxo de Zenão e o Gerenciamento de Projetos**. 2015. Disponível em: <https://contadecontrole.wordpress.com/2015/01/16/aquiles-a-tartaruga-o-paradoxo-de-zenao-e-o-gerenciamento-de-projetos/>. Acesso em: 04 março 2023.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 07 fevereiro 2023.

BRUNER, J. S. **O processo da educação**. [S.l.]: São Paulo, Nacional, 1973.

CEARÁ. **Documento Curricular Referencial do Ceará: educação infantil e ensino fundamental. Fortaleza: SEDUC**. 2021. Disponível em: <https://www.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/37/2022/01/dcrc_completo_v14_09_2021.pdf>. Acesso em: 07 fevereiro 2023.

CEARÁ. **Catálogo - Trilhas de Aprofundamento: novo ensino médio. Fortaleza: SEDUC**. 2023. Disponível em: <https://www.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/37/2023/01/trilhas_de_aprofundamento_nem1.pdf>. Acesso em: 19 fevereiro 2023.

DANTE, L. R. **Contexto e Aplicações. Vol. 1**. [S.l.]: São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, L. R. **Contexto e Aplicações. Vol. 2**. [S.l.]: São Paulo: Ática, 2013.

DESANTI, D. M.; PROBST, R. W. **Desvendando as Indeterminações**. 2018. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/2392/2408>. Acesso em: 11 janeiro 2023.

FERREIRA, M. **A lenda do jogo de xadrez**. 2011. Disponível em: <http://estamate.blogspot.com/2011/11/lenda-do-jogo-de-xadrez.html>. Acesso em: 25 dezembro 2022.

LIMA, E. L. **Análise Real. Funções de uma variável.v.1.13 ed.** [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio Vol. 1. Coleção do professor de Matemática**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio Vol. 2. Coleção do professor de Matemática**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MIRANDA, S. d. **Estratégias didáticas para aulas criativas**. [S.l.]: Papirus Editora, 2020.

MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem**. [S.l.]: 2. ed. ampli. - [Reimpr.]. - São Paulo: E.P.U., 2017.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta - Coleção PROFMAT**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MORRIS, R. **Uma Breve História do Infinito.Dos paradoxos de Zenão ao universo quântico.** [S.l.]: tradução Maria Luiza X. de A. Borges- Jorge Zahar Editor Ltda.Rua México 31 sobreloja, 1998.

NETO, A. C. M. **Fundamentos de Cálculo. Coleção PROFMAT**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2015.

SANTOS, P. S. dos. **O que é Xadrez**. [S.l.]: Brasiliense, 2017.

STEWART, J. **Cálculo. Vol. 2**. [S.l.]: tradução EZ2 Translate. – São Paulo : Cengage Learning, 2013.

TAHAN, M. **O homem que calculava**. [S.l.]: Editora Record, 2013.

USHER, I. **The astounding nature of exponential growth**. 2020. Disponível em: <https://www.ianusher.com/freedom-lifestyle/the-astounding-nature-of-exponential-growth/>. Acesso em: 04 março 2023.

GLOSSÁRIO

B

biunívoca: feminino de biunívoco. Que estabelece uma correspondência entre dois conjuntos, sendo que cada elemento de um conjunto está somente associado a um, e só um, elemento do outro: relação biunívoca..

D

Disjuntos: Que não está junto, que não se encontra unido; desunido, separado.

F

Finito: que ou o que tem um fim, um limite.

I

Indeterminado: 1. não estabelecido claramente quanto à extensão, tamanho, forma, número, duração ou natureza; impreciso, indistinto, vago. 2. de significado impreciso; ambíguo, incerto.

O

ordem: 1. determinação de origem superior, de autoridade; mandado, prescrição, ordenação. 2. relação inteligível estabelecida entre uma pluralidade de elementos; organização, estrutura.

P

Paradoxo: 1. pensamento, proposição ou argumento que contraria os princípios básicos e gerais que costumam orientar o pensamento humano, ou desafia a opinião consabida, a crença ordinária e compartilhada pela maioria. 2. aparente falta de nexo ou de lógica; contradição.
Periódica: que se reproduz com intervalos de tempos iguais.

S

Sofisma: 1. argumento ou raciocínio concebido com o objetivo de produzir a ilusão da verdade, que, embora simule um acordo com as regras da lógica, apresenta, na realidade, uma estrutura interna inconsistente, incorreta e deliberadamente enganosa. 2. argumentação que aparenta verossimilhança ou veridicidade, mas que comete involuntariamente incorreções lógicas; paralogismo.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Um pouco sobre Indeterminações

Existem expressões na matemática consideradas indeterminadas matematicamente, devendo ser analisadas mais profundamente sobre o contexto nas quais estão inseridas. O Indeterminado no dicionário é algo não estabelecido claramente, do qual não se pode afirmar muita coisa de forma assertiva. Em *álgebra linear*, a palavra indeterminado serve para descrever um a Sitema Linear que possui infinitas soluções. Ver (DANTE, 2013b)

Em *cálculo diferencial e integral* as indeterminações, a saber são 7, aparecem para descrever as formas indeterminadas no cálculo de limites envolvendo operações com o número 1, o número 0 e o "∞".

O mais interessante é que das 7 indeterminações do cálculo, o infinito está presente em 5 delas:

Quadro 3 – Tabela de indeterminações

Operação	Divisão	Produto	Subtração	Potenciação	Potenciação
Indeterminação	$\frac{\infty}{\infty}$	$0.\infty$	$\infty - \infty$	∞^0	1^∞

Fonte: Elaborado pelo autor

Claro que essas expressões envolvendo indeterminações não aparecem com frequência no ensino básico, o que poderia nos induzir a aplicar os métodos e operações já conhecidos. Mas já vimos indícios de que operações para conjuntos finitos costumam não ser garantidas para conjuntos infinitos. Logo não podemos aplicar à 1^∞ a mesma regra que aplicamos a 1^n, $n \in \mathbf{R}$.

Mas retomando o paradoxo do Hotel de Hilbert, podemos notar o quão bem esta situação representa a indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Ao fechar um determinado tempo de hospedagem, os passageiros do primeiro ônibus da excursão fazem o check-out e seguem seu destino. Para atualizar o número de quartos disponíveis para futuras hospedagens, o gerente percebe que se o hotel possui infinitos quartos e saíram infinitos hóspedes, enão o hotel conta com $\infty - \infty$ quartos disponíveis ou ainda há $\infty - \infty$ hóspedes no hotel. Na impossibilidade de operar aritmeticamente com esses símbolos, pois o símbolo ∞ não representa um número, tampouco $-\infty$, o gerente conclui que $\infty - \infty = \infty$ neste caso, pois ainda restam infinitos hóspedes no hotel. Por outro lado, se todos os hóspedes do hotel fizerem o check-out, então haverá $\infty - \infty = 0$ pessoas hospedadas no hotel, e aqui temos o nosso paradoxo. (DESANTI; PROBST, 2018)

ANEXOS

ANEXO A – Sugestão de teste diagnóstico

Questionário

Questão 01 Explique com suas palavras o que significa Infinito.

Questão 02 Dê exemplos de infinito.

Questão 03 Quantos números reais no intervalo da reta existem entre os números 0 e 1? Justifique sua resposta.

Questão 04 Qual conjunto possui mais elementos, o conjunto dos números naturais$\{1,2,3,...\}$ ou o conjunto do numeros naturais pares$\{2,4,6,....\}$?

Questão 05 Existe um número real que seja antecessor de 3, ou seja, que esteja imediatamente antes de 3? Justifique sua resposta.

Questão 06 Qual conjunto é maior (possui mais elementos), o conjunto dos numeros naturais $\{1,2,3,...\}$ ou o conjunto dos números quadrados perfeitos $\{1,4,9,....\}$?

Questão 07 Se retirarmos todos os números naturais pares do conjunto dos números naturais, ele ainda será infinito? Justifique sua resposta.

Questão 08 Existe algum número real entre 2,3 e 2,4? Justifique sua resposta.

Questão 09 Qual o conjunto possui mais elementos, o intervalo fechado da reta real [0,1] ou o conjunto dos naturais $\{1,2,3,...10^{10}\}$? Justifique.

Questão 10 Para você quanto vale $0,9999...$? Justifique.