Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Números algébricos e transcendentes: uma abordagem histórica e aplicativa na educação básica

Mardonio Manoel Nogueira de Lima

Juazeiro do Norte - CE

2023

Números algébricos e transcendentes: uma abordagem histórica e aplicativa na educação básica

Mardonio Manoel Nogueira de Lima

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador

Prof. Ms. Antonio Edinardo de Oliveira

Juazeiro do Norte - CE

2023

MARDONIO MANOEL NOGUEIRA DE LIMA

NÚMEROS IRRACIONAIS E TRANSCENDENTES: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA E APLICATIVA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 25/08/2023.

BANCA EXAMINADORA

Antonio Edinardo de Oliveira

Prof. Ms. Antonio Edinardo de Oliveira (Orientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

José Tiago Nogueira Cruz

Prof. Dr. Jose Tiago Nogueira Cruz
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Danilo Ferreira da Silva

Prof. Dr. Danilo Ferreira da Silva
Universidade Federal da Paraiba (UFPB)

Bárbara Paula Bezerra Leite Lima

Prof. Ms. Barbara Paula Bezerra Leite Lima
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Dedico também a minha esposa Andressa, por sempre estar ao meu lado. Dedico também a minha mãe, que me educou e me mostrou o sentido da vida.

Agradecimentos

É com grande satisfação que quero agradecer, primeiramente, a Deus, pela grande iluminação e o dom da vida, pela saúde e disposição dada para conquistar meus objetivos. A minha família, que mesmo sem estar muito presente, me apoiou e acreditou nos meus objetivos. Ao meu professor orientador, Antônio Edinardo de Oliveira, agradeço cada ensinamento, cada conselho, sobretudo pela arte de transmitir conhecimentos com clareza e ouvir com paciência. Aos professores, Dr. Jocel Faustino Norberto e especialmente ao Dr. Tiago, que me ajudou a criar a forma da dissertação com várias dicas de como fazer. A minha esposa Andressa dos Santos do Vale, que me deu muito apoio para que eu alcançasse meus objetivos. Ao professor e melhor amigo Iarli Barreto Falcão Junior, que foi um grande mediador desse tema e me deu grande apoio na minha vida acadêmica.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.” (Galileu Galilei)

Resumo

Esta dissertação tem por objetivo geral aplicar os números algébricos e transcendentes na educação básica, a fim de trabalhar a teoria de resolução de problemas. Como objetivos específicos, o estudo investiga como surgiram os números algébricos e transcendentes, apresenta a classificação dos números algébricos e dos números transcendente e, por fim, aplicar esses números na educação básica. Os resultados obtidos com este estudo nos permitiram observar que a teoria dos números algébricos e transcendentes é necessária para preencher as lacunas deixadas na linha dos números pela existência de pontos não racionais. Observamos também que a descoberta dos números transcendentes não provocou o mesmo choque intelectual que os números irracionais tinham causado 2500 anos antes, mas suas consequências foram igualmente significativas. Essa descoberta mostrou que, por trás da aparente simplicidade do sistema de números reais, ocultam-se muitas sutilezas que não podem ser notadas simplesmente observando a expansão decimal de um número. Constatamos, portanto, que a maioria dos alunos entrevistados não compreendem os conjuntos numéricos nem tão pouco os números algébricos e transcendentes.

Palavras-chave: Educação Básica, números algébricos, números transcendentes.

Abstract

This dissertation has the general objective of analyzing algebraic and irrational numbers, in order to demonstrate the transcendence of Liouville and Euller numbers. As specific objectives, the study investigates how transcendent numbers emerged and who participated in this discovery, presents the classification of algebraic numbers and irrational numbers based on the irrationality of 2 and the Euler number and, finally, demonstrates the transcendence of Liouville and Euller numbers. The results obtained from this study allowed us to observe that the theory of irrational numbers is necessary to fill the gaps left on the number line by the existence of non-rational points. We also note that the discovery of transcendent numbers did not cause the same intellectual shock that irrational numbers had caused 2500 years earlier, but its consequences were equally significant. This discovery showed that behind the apparent simplicity of the real number system, many subtleties are hidden that cannot be noticed simply by observing the decimal expansion of a number. We find, therefore, that the majority of real numbers are irrational and, among irrational numbers, the majority are transcendent.

Keywords: education basic; algebraic numbers; transcendental numbers.

Sumário

1 Introdução

Desde a história da escrita, os seres humanos têm necessitado lidar com números. Para os antigos matemáticos e algumas tribos, ainda hoje os números se resumem aos naturais, que foram os primeiros números associados à forma de contagem. De fato, quando se torna necessário enumerar aquilo que possuímos, os números naturais são suficientes. Cedo ou tarde, porém, devemos lidar com medições, encontrar a área de um terreno, o volume de um recipiente ou a distância entre duas cidades e é altamente improvável que tais medidas resultem em valores exatos de unidades de medidas. Daí, surge a necessidade de frações.

Hoje, os números irracionais são um dos conjuntos numéricos mais estudados na educação básica. São definidos como números que não podem ser expressos, como a razão entre dois inteiros com o denominador diferente de zero. Os números racionais parecem ilhas de ordem num interminável oceano de desordem representado pelos números irracionais, Seu surgimento ocorreu a partir de um antigo problema: o cálculo da diagonal de um quadrado cujo lado mede 1 unidade e diagonal que mede $\sqrt{2}$. A partir desse número, iniciou-se o estudo de um novo conjunto, representado pelos números irracionais. A primeira descoberta de um número irracional é atribuída a Hipaso de Metaponto, discípulo de Pitágoras.

Existem, porém, alguns números irracionais que não são solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. É o caso do π, ϵ dos números de Liouville. Estes são chamados números transcendentes. Aliás, o matemático francês Joseph Liouville foi o autor da primeira demonstração da existência de números transcendentes, estabelecendo um critério para que um número seja transcendente. Esse resultado permitiu a construção da famosa constante de Liouville.

A partir desses questionamentos, este estudo tem por objetivo geral analisar os números algébricos e transcendentes na educação básica, afim de mostrar aos alunos dos surgimento deles e suas variações nos conjuntos numéricos. E como enriquecimento, mostraremos no apêndice, as demonstrações das transcendências dos números de Liouville, Euller e π. Nossos objetivos específicos são investigar como surgiram os números transcendentes e quem teve participação nessa descoberta, apresentar a definição dos números algébricos e dos números transcendentes e, por fim, fazer a aplicação desses números na educação básica. Este trabalho é, desse modo, uma exposição elementar sobre números algébricos e transcendentes para estudantes no ensino média na rede pública de ensino. O conhecimento do cálculo, conjuntos e polinômios do 2° grau é suficiente para o entendimento das demonstrações.

Desse modo, dividimos esta dissertação em seis capítulos. Nesta introdução, apresentamos a justificativa do que levou a escolha do tema da dissertação, seguido dos objetivos geral e específicos, além de sua estrutura organizacional. No segundo capítulo, apresentamos uma revisão dos principais fatos históricos relacionados aos números algébricos e transcendentes. No capítulo terceiro, definimos alguns elementos básicos importantes para se adquirir um melhor entendimento sobre os aspectos gerais dos números algébricos e transcendentes. No quarto, tratamos de aplicar esses no cotidiano. Por fim, no quinto usaremos a pedagogia da teoria de resolução de questões para aplicar com alunos de uma determinada escola na rede estadual de ensino do estado do Ceará. A transcendência dos números de Euller, Pi e de Liouville, por sua vez, descrevemos no Apêndice como fonte de pesquisa. Por fim, no capítulo sexto, trazemos as conclusões as quais chegamos ao final de nosso estudo.

2 Fatos históricos

Neste capítulo, apresentamos os principais fatos históricos relacionados aos números transcendentais, que envolve o conhecimento das contribuições de Liouville, Hermite, Ferdinand Von Lindemann, Gelfond, Schneider, Mahler e Diego Marques. O conjunto matemático dos números reais inclui uma classe especial: a dos números ditos transcendentais. Embora o nome sugira algum esoterismo, ele indica apenas que esses números são irracionais (não podem ser escritos sob a forma de fração) e não algébricos (não são a solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros).

Existem, porém, alguns números irracionais que não são solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. É o caso do π, do ϵ e dos números de Liouville. Estes são chamados números transcendentes. Aliás, o matemático francês Joseph Liouville foi o autor da primeira demonstração da existência de números transcendentes, estabelecendo um critério para que um número seja transcendente. Esse resultado permitiu a construção da famosa constante de Liouville. Também transcendental (equivale a cerca de 2,71828), o número ϵ pode ser definido de várias formas: ele é, por exemplo, a base dos logaritmos ditos naturais. Trata-se ainda da base da função exponencial ϵ^x que tem a notável propriedade de ser igual à sua própria derivada. Quando se descobriu isso, após o desenvolvimento do cálculo no século 17, o número ϵ e a função ϵ^x assumiram papel fundamental no ramo da matemática conhecido como análise.

Eli Maor ajuda a elucidar esse enigma ao descrever em detalhes o contexto em que o número foi descoberto e a participação dos personagens envolvidos nesse processo. Do escocês John Napier (1550-1617), inventor dos logaritmos que chegou perto de descobrir euler, ao alemão Georg Cantor (1845-1918), que fez descobertas importantes sobre os números transcendentais, o livro retraça a trajetória dos principais nomes da matemática dos últimos 500 anos.

Apesar de π ser a 16ª letra do alfabeto grego, os gregos antigos não utilizavam esta letra para designar a relação entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência. A história fascinante do π começou acerca de 4000 anos atrás, apesar de os matemáticos só começarem a utilizar símbolos para designar π cerca de 2000 anos depois dos trabalhos de Arquimedes (Boyer, 1996). O símbolo usado atualmente tem uma história com menos de 250 anos.

É importante focar que na história do π, um dos passos fundamentais, consistiu em adquirir consciência da constância da razão entre o perímetro e o diâmetro de qualquer círculo, pois sem esta consciência nunca se teria calculado o π. Inúmeros povos andaram a sua procura mesmo antes que chegassem a ter consciência matemática.

O valor 3 foi usado durante muito tempo por motivos religiosos e culturais em certas civilizações, como a dos Egípcios e a dos Babilônios, quando já se conheciam nessas mesmas civilizações determinações melhores.Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.), pôs mãos à obra com expedientes novos, muito profundos. Sabia que π não era racionalmente determinável, ou, ao menos, o suspeitava (Boyer, 1996).

Assim sendo, propôs-se descobrir um processo para a determinação de π, o Método de Arquimedes, com a precisão que se desejasse. Este usou, processos geométricos, complicados mas gerais, que dão limites inferiores e superiores para π. Arquimedes utilizou alguns polígonos regulares, com um número crescente de lados, até chegar ao polígono de 96 lados, através do qual obteve uma aproximação de π, qual seja, $3{,}1410 < \pi < 3{,}1428$.

No entanto Hui (263 d.C.) descobriu, através de polígonos regulares inscritos e circunscritos que $3{,}1401 < \pi < 3{,}1427$. Dois séculos mais tarde, no ano 480 da nossa era, um certo engenheiro hidráulico chinês de nome Tsu Chung-Chi (430-501 d.C.), chegou a um valor de π extraordinariamente preciso, considerada a época em que foi calculado. O π de Tsu Chung-Chi, em nossa notação decimal, oscilaria entre 3,1415926 e 3,1415927.(Blatner, 2001).

As buscas intermináveis dos motivos pelos quais o ser humano e a infinidade de elementos existentes na natureza possuírem relação harmoniosa, podem ser cessadas através da observação da ordem e relações existentes entre números e combinações, na tentativa de explicar a perfeição existente entre os mesmos. Neste contexto, o número de ouro, indicado pela letra grega ϕ (phi) em homenagem ao arquiteto e escultor grego Phídeas (470 – 425 a.C.) através da razão áurea, é fator determinante no que diz respeito a essa questão.

A fascinação pela Razão Áurea não se restringe aos matemáticos. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos têm examinado e debatido bases de sua ubiqüidade e seu apelo. De fato, provavelmente, é correto dizer que a Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas mais do qualquer outro número na história da matemática. ([11], p.16).

O retângulo áureo é vastamente utilizado por sua importância histórica e por ser considerado belo e harmonioso o formato que ele apresenta. Cartões de crédito, capas de livros, pinturas, monumentos arquitetônicos, dentre outros são exemplos concretos da existência do retângulo Áureo em nosso dia a dia que veremos nos próximos capítulos.

Na Itália (Séc. XIII), o Papa Inocêncio III, governava os estados pontifícios desde 1198 e, em 1212 conseguiu proclamar o seu pupilo Frederico II, rei da Germânia e, na corte deste monarca, em Itália, se notabilizou Leonardo Fibonnaci. Frederico II, de cognome "stupor mundi"(o espanto do mundo) nasceu em 1194 e, era neto de Frederico Barba Roxa. Conhecedor de todas as línguas que se falavam na capital do seu reino da Secília: francês, italiano, latim, grego e árabe, assimilou o essencial de três civilizações universais (a clássica, a cristã, e a oriental) e, fez da sua corte de Palermo, um centro de cultura numa espécie de Academia das Ciências. Em Nápoles fundou a primeira Universidade subsidiada pelo Estado (Silveira, 2001). Partiu do valor de Arquimedes $\frac{22}{7}$, a que chamou inexato e, conhecendo o valor $\frac{377}{120}$ calculado por Ptolomeu, calculou um valor a que chamou exato ($\pi = \frac{355}{113} = 3{,}1415929$).

A época do Renascimento Europeu trouxe, na altura devida, um novo mundo matemático. Entre os primeiros efeitos deste renascer está a necessidade de encontrar uma fórmula para o π. Descobriu então a definição não geométrica de pi e do papel não geométrico deste valor. Assim se chegou à descoberta das representações de π por séries infinitas.

Desde a Antiguidade, o número de ouro é utilizado tanto na arte quanto na arquitetura. É frequente a sua utilização em pinturas renascentistas, como, por exemplo, as do mestre Giotto. Este número está, também, envolvido com a natureza do crescimento. Phi como é chamado o número de ouro, pode ser encontrado na proporção das conchas (o nautilus, por exemplo), dos seres humanos (o tamanho das falanges e ossos dos dedos, por exemplo), das colmeias, entre inúmeros outros exemplos que envolvem o crescimento. Justamente por estar envolvido com o crescimento, o número de ouro se torna tão frequente, sendo alvo de pesquisadores, matemáticos, artistas e escritores. O fato de ser encontrado através de desenvolvimentos matemáticos é que o torna fascinante. Com efeito, analisando a concha do náutilo (nautilus pompilius), por sinal de magnífica beleza, a disposição das folhas nos ramos das plantas, ou seja, a filotaxia, o pentagrama que aparece na maioria das flores e até mesmo em frutos como a maçã se cortada pela sua circunferência, os quadros como "A Mona Lisa" e "Sacramento da Última Ceia", a procriação dos coelhos, a harmonia das notas musicais, e muitos outros, pode-se observar que existe algo em comum, 'A Razão Áurea' (RODRIGUES, 2008).

3 Definições de números algébricos e transcendentes

Um número complexo α é chamado algébrico se é raiz de algum polinômio não nulo com coeficientes inteiros. O polinômio minimal de α é o polinômio primitivo de menor grau que tem α como raiz. Nesse caso, o grau de α é definido como o grau do seu polinômio minimal. Denotamos: $\mathrm{Q} =$ Conjunto dos números algébricos.

Números racionais são exemplos de números algébricos:

Exemplo 1.

Todo número racional $\beta = \frac{d}{w}$ é um número algébrico, pois é raiz do polinômio $f(x) = wx - d$

Será se realmente existem números transcendentes? Esta e outras perguntas são respondidas no decorrer deste capítulo. Para respondermos a primeira dessas perguntas, abordamos o conceito de enumerabilidade e de uma série de resultados relacionados a esse conceito.

Definição 1. *Um conjunto H é dito enumerável, se seus elementos puderem ser postos em correspondência biunívoca com* $\mathbb{N}$

Exemplo 2. *Um conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros, é enumerável, pois a função $f(x)$: $\mathbb{N} \to Z$ definida por* $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{2}, & se\ z\ é\ par \\ \frac{-z+1}{2}, & se\ z\ é\ par \end{cases}$ *,é uma bijeção.*

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	...
0,	1,	-1,	2	-2,	3,	-3	...

Teorema 1. *A união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é um conjunto enumerável.*

Demonstração. Para provarmos esse teorema, construímos uma correspondência biunívoca dos naturais na união de um conjunto finito com n elementos W com um conjunto enumerável H.

Seja $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_n\}$ conjunto finito e $H = \{h_1, h_2, h_3, ...\}$ conjunto enumerável, podemos supor que $W \cap H$ é vazio.

O esquema a seguir descreve uma bijeção entre $W \cup H$ e $\mathbb{N}$. Daí, concluímos que a união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é um conjunto enumerável.

$$\begin{array}{ccccccc}
w_1 & w_2 & w_3, \ldots & w_n, & h_1, & h_2, & h_3, \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
1, & 2, & 3, \ldots & \text{n}, & \text{n+1}, & \text{n+2}, & \text{n+3}, \ldots
\end{array}$$

Onde $h_i = f\,(i - n)$, com f uma função biunívoca de $\mathbb{N}$ em H □

Teorema 2. *A união de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Demonstração. Seja $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_n\}$ e $H = \{h_1, h_2, h_3, ...\}$ conjunto enumerável, podemos supor que $W \cap H$ é vazio.

O esquema adiante descreve uma bijeção dos naturais na união. Logo, temos que a união de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

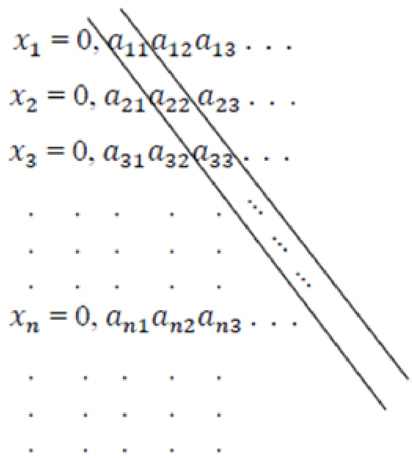
$$\begin{array}{cccccc}
w_1 & h_1 & w_2, & h_2 & w_3, & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots \\
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots
\end{array}$$

□

Teorema 3. *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

Demonstração. Para se demonstrar esse fato, usaremos o intervalo (0,1), pois, se esse intervalo não é enumerável, o conjunto dos reais também não será, visto que $(0, 1) \subset \mathbb{R}$

Para ilustrar melhor, vamos tomar como exemplo um $x \in (0, 1)$. Temos que tomar cuidado, pois há valores que pertencem a esse intervalo, mas que, quando estão na sua forma decimal, tem duas representações, como $0,7 = 0,69999...$ Para que isso não aconteça, adotaremos apenas uma representação desses números. Suponha que exista uma correspondência biunívoca do intervalo (0,1) e o conjunto dos naturais, isto é a mesma coisa de dizermos que o intervalo (0,1)=$(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ onde $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são as representações decimais de todos os números contidos no intervalo acima. Sejam:



Vamos agora construir um número que seja diferente de todo x_i dado. Sendo $i \in \mathbb{N}$, seja W=0, $d_{11}d_{12}d_{13}...$, seja $d_{11} \neq a_{11}, d_{12} \neq a_{22}, d_{13} \neq a_{33}$ diferente de todo elemento da diagonal que está grifada na figura 2, logo W=0, $d_{11}d_{12}d_{13}....$ é diferente de todo número que supostamente está contido no intervalo dado. Então, nossa suposição inicial da existência da correspondência biunívoca não é verdadeira, o que nos leva a um absurdo. Logo, o conjunto dos $\mathbb{R}$ não é enumerável e, por consequência, o conjunto dos irracionais que iremos denotar por $\mathbb{I}$ também não é enumerável, pois $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$. Como sabemos, o conjunto $\mathbb{R}$ é enumerável e a união de dois conjuntos enumerável é enumerável. Logo, por consequência, o conjunto dos $\mathbb{I}$ é não enumerável.

$\square$

Teorema 4. *O conjunto de todos os números algébricos é enumerável.*

Demonstração. Para provarmos que o conjunto dos números algébricos é enumerável, temos que definir o seguinte:
Seja o polinômio $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1}... + a_1.x + a_0 = 0$ com coeficientes inteiros, iremos definir sua altura como sendo o número natural.
Observe que a definição não envolve apenas os coeficientes do polinômio, mas também o seu grau. Para um dado número natural qualquer, existe somente um número finito de polinômios que tem como altura esse número dado. O teorema fundamental da álgebra nos diz que um polinômio $P(x)$ tem, no máximo, n raízes complexas. O número de polinômios do tipo $P(x)$ com uma dada altura é apenas um número finito pela "definição", portanto, o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de uma dada altura formam um número finito. Observa-se que o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de qualquer altura formam um conjunto enumerável, pois é a união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos. □

Teorema 5. *O conjunto dos números transcendentes reais é não enumerável.*

Demonstração. Como provamos anteriormente, o conjunto dos números reais é não enumerável. Agora, suponhamos, por absurdo, que $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$, que o conjunto dos números transcendentes seja enumerável. Como já provamos aqui, o conjunto dos números algébricos é enumerável. Portanto, dizer que $\mathbb{R}$ são enumeráveis é absurdo, pelo fato de supormos que $\mathbb{T}$ é enumerável. Portanto, o conjunto dos números transcendentes é não enumerável, em particular $\mathbb{T} \neq \emptyset$ □

Corolário 1. *O conjunto de todos os números transcendentes é não enumerável.*

Demonstração. Como sabemos, o conjunto dos números $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e o conjunto dos números $\mathbb{T} \in \mathbb{R}$ é não enumerável e é um subconjunto de todos os números transcendentes. Portanto, o conjunto de todos os números $\mathbb{T} \in \mathbb{C}$ é não enumerável. □

3.1 O Phi ϕ

Entre diversos números algébricos que podem ser apresentados aos estudantes, com destaque aos números irracionais, destacamos aqui um exemplo particularmente interessante de número algébrico, o número ϕ. O número ϕ é algébrico, pois conforme veremos o mesmo é solução da seguinte equação:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Para mostrar isso, vamos primeiro definir o número ϕ e mostrar que a Equação nos ajudará a obter o seu valor. Dizemos que um segmento é áureo se existe um ponto neste segmento que o divide em dois de tal modo que a razão entre o todo (o segmento) e a parte maior é a mesma razão existente entre a parte maior e a parte menor, ou seja, denotando a como a parte maior e b como a parte menor, então o segmento tem medida $a + b$ e fazendo a razão temos:

$$\tfrac{a+b}{a} = \tfrac{a}{b}$$

O número é definido como a constante da razão áurea, isto é,

$$\tfrac{a+b}{a} = \tfrac{a}{b} = \phi$$

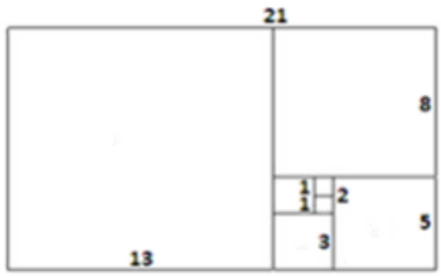
Colocando b em evidência e depois simplificando obtemos

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Concluímos que ϕ é número algébrico e resolvendo a equação do segundo grau em ϕ, descartando o valor negativo, pois estamos trabalhando com razões entre medidas de comprimento, obtemos que

$$\phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Considerando $\sqrt{5} = 2,23606...$ encontramos o valor $\phi = 1,61803...$ também conhecido como número de ouro. Anexando dois quadrados com lados unitários, ter-se-á um retângulo de lados 1 e 2, sendo o lado maior igual à soma dos lados dos quadrados anteriores. Anexa-se agora outro quadrado com lado igual a 2 (o maior lado do retângulo anterior, de lados 1 e 2) se terá um retângulo de lados 2 e 3. Continuam-se então a anexar quadrados com lados iguais ao maior dos comprimentos dos retângulos obtidos no passo anterior (Figura 2.21). A sequência dos lados dos quadrados será: 1,1,2,3,5,8,13,21.... , que é a sequência de Fibonacci.



Considerando a expressão conhecida como razão áurea encontraremos o mesmo número ϕ já citado anteriormente. Esse processo quando previamente motivado pelos padrões da razão áurea e suas aplicações no desenvolvimento de produtos, artes e fenômenos da natureza proporciona mais um exemplo da presença de um número irracional e algébrico em nosso cotidiano.

3.2 Números Transcendentes

Para Marques (2007), o conjunto dos números transcendentes é infinito e representam números que não são algébricos. Um número complexo é algébrico quando for raiz de um polinômio não nulo, de coeficientes racionais $(a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1}... + a_1.x + a_0 = 0)$.Caso contrário, tal número é dito transcendente. Como exemplo, podemos citar:

O número $2^{\sqrt{2}}$ foi usado por Hilbert para ilustrar seu famoso 7 problema, o qual consistia em determinar se um número da forma α^{β} é algébrico ou transcendente, sendo α, β números algébricos com $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ e β não racional (que tornariam o problema simples, pois o resultado seria um número algébrico).

O problema foi resolvido em 1934 por Gelfond e Schneider, de modo independente, provando que todo número α^{β} nas condições dadas é transcendente. A resolução do problema ficou conhecida como Teorema de Gelfond-Schneider e provou que números como $2^{\sqrt{2}}$ e $\log 2$, entre outros, são transcendentes. A justificativa para $\log 2$ é relativamente simples, pois tomando $\alpha = 10$ e $\beta = \log 2$; e aplicando a definição de logaritmo decimal, temos que:

$$\alpha^{\beta} = 10^{\log 2} = 2$$

Nesse caso, se $\beta = \log 2$ fosse irracional algébrico, pelo Teorema de Gelfond-Schneider, 2 seria transcendente, o que é absurdo. Logo, $\log 2$ só pode ser transcendente. Generalizando o teorema, é possível provar que qualquer número da forma $\log_n m$ (com n, m racionais positivos, $n \neq 1$ e $\log_n m$ irracional), é transcendente. Como exemplo, ao aplicarmos o mesmo raciocínio para o número $\log_3 5$, se este for um irracional algébrico, então 5 seria transcendente, pois:

$$\alpha^{\beta} \neq 3^{\log_3 5} = 5$$

Nesse caso, se $\beta = \log 2$ fosse irracional algébrico, pelo Teorema de Gelfond-Schneider, 2 seria transcendente, o que é absurdo. Logo, $\log 2$ só pode ser transcendente. Generalizando o teorema, é possível provar que qualquer número da forma $\log_n m$ (com n, m racionais positivos, $n \neq 1$ e $\log_n m$ irracional), é transcendente. Como exemplo, ao aplicarmos o mesmo raciocínio para o número $\log_3 5$, se este for um irracional algébrico, então 5 seria transcendente, pois:

$$\alpha^{\beta} = 3^{\log_3 5} = 5$$

O que também é absurdo. Logo o número $\log_3 5$ é transcendente. No caso de n $= 10$, basta que m não pertença à sequência:

$$...10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{0}, 10^{1}, 10^{2}, 10^{3}, 10^{4}, ...$$

Para que o número $\log 10$ seja transcendente.

3.3 O número π

3.3.1 A razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência

No espaço euclidiano, a razão entre a medida de comprimento do perímetro de uma circunferência e a medida de comprimento do respectivo diâmetro é constante e esta constante é denominada π (Palis, 1989b).

3.3.2 A razão entre a área do círculo e o quadrado do seu raio

No espaço euclidiano existe ainda outra definição muito simples de π: a razão entre a área de um determinado círculo e o quadrado do seu raio é constante e igual a π (Bastos e Silva, 1999).

3.4 O número de Euler

Uma definição mais formal de e é a seguinte:

$$\epsilon = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

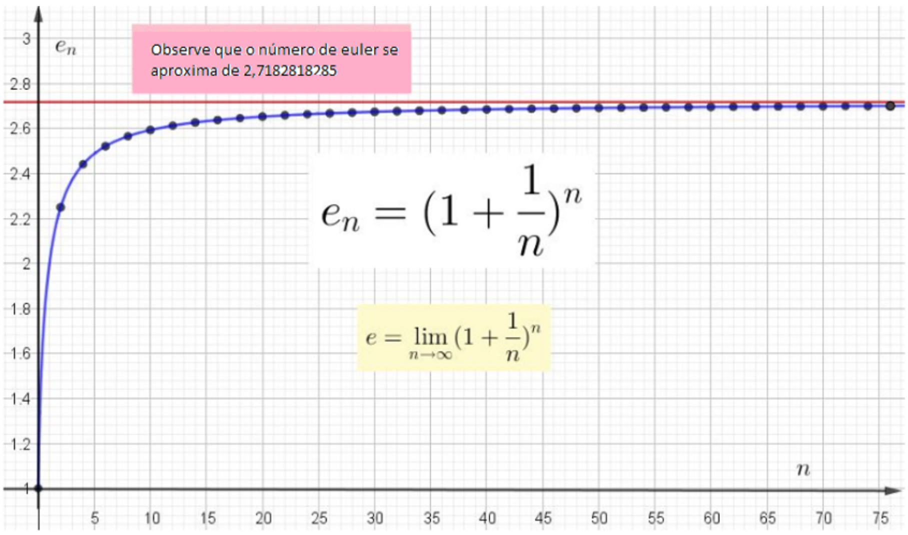
Isso significa que o valor exato de Euler é obtido realizando a operação indicada nesta fórmula, quando o número natural n tende para o infinito. Isso explica por que só podemos obter aproximações de Eeuler, já que não importa quão grande seja o número n colocado, um n maior sempre pode ser encontrado.

3.4.1 Vamos encontrar algumas aproximações por conta própria:

Quando $n = 100$ então $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,70481$ que dificilmente coincide no primeiro decimal com o valor "verdadeiro" de Euler. Escolhendo n=10.000, teremos $\left(1 + \frac{1}{10.000}\right)^{10.000} = 2,71815$, que coincide com o valor "exato" de Euler nas três primeiras casas decimais. Este processo teria que ser seguido infinitamente para obter o valor "verdadeiro"de Euler. Acho que não temos tempo para isso, mas vamos tentar mais um: Vamos usar n = 100.000:

$$\left(1 + \frac{1}{100.000}\right)^{100.000} = 2,7182682372$$

Isso tem apenas quatro casas decimais que correspondem ao valor considerado exato. O importante é entender que quanto maior for o valor de n escolhido para calcular ϵ_n, mais próximo estará do valor verdadeiro. Mas esse valor verdadeiro só terá quando n for infinito.



A figura mostra-se graficamente como quanto maior o valor de n, mais próximo de e, mas para chegar ao valor exato n deve ser infinito.

3.5 Número de Liouville

Nesta seção, apresentamos uma prova construtiva da existência de números transcendentes. Definimos a constante de Liouville α, e mostramos que ela é um número transcendente. Para justificar a transcendência de α, vamos aproximar esta constante de uma infinidade de números racionais $\frac{m}{n}$ com erro menor do que $\frac{1}{n^j}$ onde j é um inteiro qualquer. Consideramos a constante

$$\alpha = 0,110001000000000000000001\ldots$$

Cujas casas decimais são compostas por zeros e uns. Observamos que os algarismos 1 aparecem nas casas decimais: 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, . . ., ou seja, nas casas decimais

1!,2!,3!,4!,5!,6!,7!,...,k!

Onde k é um número natural e $k! = 1 \times 2 \times 3 \times ... (k-2) \times (k-1) \times k$. Todos os algarismos com exceção daqueles nas casas decimais correspondentes aos fatoriais são iguais a zero.

Uma outra forma de representar a constante α é escrevê-la como uma soma de potências negativas de 10:

$$\alpha = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + 10^{-5!} + ...$$
$$= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-6} + 10^{-24} + 10^{-120} + ... = 0,1 + 0,01 + 0,000001 + ...$$

O número α definido acima é chamado constante de Liouville, em homenagem ao matemático francês de mesmo nome. Vamos agora obter uma aproximação β de α que nos irá auxiliar na demonstração da transcendência de α. Tal aproximação pode ser obtida tomando α como a soma dos primeiros j termos de α, isto é,

$$\beta = 10^{-1!} + 10^{-2} + 10^{-3!} + ... + 10^{-j!}.$$

Notamos que β é um número racional, pois é soma de frações cujos denominadores são potências de 10. Podemos reescrever a última expressão da seguinte maneira

$$\beta = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + ... + \frac{1}{10^{(j-1)!}} = \frac{t}{10^{j!}}$$

Onde o numerador t é algum número inteiro positivo. Além disso, o número racional β está próximo de α e

$$\alpha - \beta = 10^{-(j+1)!} + 10^{-(j+2)!} + 10^{-(j+3)!} + ...$$

A representação decimal de $\alpha - \beta$ é também inteiramente formada de zeros e uns e o algarismo 1 aparece pela primeira vez na posição $(j+1)!$ em seguida na posição $(j+2)!$ e, assim, sucessivamente. Portanto,

$$\alpha - \beta < 0,000000...0000002,$$

Onde todos os algarismos zeros, exceto o algarismo 2 na posição $(j+1)!$. Daí,

$$\alpha - \beta < \frac{2}{10^{(j+1)!}}$$

Como α e β são positivos, todas as potências de α e α também serão positivas. Temos ainda que $\alpha < 1$ e $\beta < 1$, seguindo que, para r e s quaisquer inteiros positivos. Obtemos então, as seguintes desigualdades,

$$0 < \alpha^r < 1, , 0 < \beta^r < 1, , 0 < \alpha^r \beta^s < 1.$$

Para mostrar que a constante de Liouville α é um número transcendente. Iniciamos supondo por absurdo, que α é um número algébrico. Assim, dentre todas os possíveis polinômios com coeficientes inteiros que α é uma raiz, escolhemos um de menor grau possível

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-2} + c_{n-2} x^{n-2} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

4 Aplicações de números algébrico e transcendentes no cotidiano

Neste capitulo iremos apresentar aplicações de números algébricos e transcendentes no cotidiano, fazendo com que os alunos da educação básica tenho melhor entendimento dessa utilização desses números para o dia a dia.

4.1 Aplicações do Número Algébrico ϕ

Neste capitulo iremos apresentar aplicações de números algébricos e transcendentes no cotidiano, fazendo com que os alunos da educação básica tenho melhor entendimento dessa utilização desses números para o dia a dia.

4.1.1 Na arte

A proporção áurea foi usada de forma significativa e bastante expressiva na arte. Em obras como "O Nascimento de Vênus" (Figura 4.1), quadro de Botticelli, em que Afrodite está na proporção áurea. A história conta que esta proporção estaria ali aplicada pelo motivo do autor ser um representante da perfeição e da beleza.

Figura 4.1 : O Nascimento de Vênus
FONTE: Wikipedia/2012

Em "O Sacramento da Última Ceia' (Figura 4.2) de Salvador Dalí, as dimensões do quadro, que media aproximadamente 270cm $\times$167 cm, estão na razão áurea. Na história da arte renascentista a perfeição da beleza em quadros foi bastante explorada com base nesta constante de ouro. Vários pintores e escultores lançaram mão das possibilidades que a "proporção divina" os dava de retratar a realidade com mais beleza e perfeição.

Figura 4.2: O Sacramento da Última Ceia
FONTE: Wikipedia/2012

4.1.2 No corpo humano

No corpo humano o Número Divino aparece nas orelhas, nas falanges dos dedos, na razão entre o tamanho do braço e a mão, na razão entre a altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão, na razão entre a medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo, na razão entre a altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça, na razão entre a medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax, na razão entre a medida do seu quadril ao chão e a medida do seu joelho até o chão, na razão entre a medida do ombro à ponta do dedo e a medida central até a ponta, na razão entre a medida do cotovelo até o pulso e a medida do seu pé, entre outros. Segundo especialistas da área da beleza estética, uma orelha perfeita seria aquela que se encaixaria em uma espiral logarítmica, mas precisamente a espiral áurea, que é um caso particular. Seria mito ou verdade? (Figura 4.3). Segundo

Leonardo da Vinci, para que o corpo humano tenha beleza e harmonia deve respeitar uma proporção, e como o número áureo representa esta beleza, então o corpo humano deve seguir este padrão áureo.

Figura 4.3: Beleza estética: a orelha perfeita

FONTE: Educ/2012

Muitos estudos demonstram que o número de ouro está presente também na beleza do sorriso e da dentição.

Figura 4.4: Arcada dentária superior

FONTE: Educ/2012

O posicionamento correto da arcada dentária, mais precisamente os quatro dentes frontais de cada lado da arcada superior (Figura 4.4), encontram-se na razão áurea. Por isso, em reconstruções estéticas de dentições, utiliza-se a razão de ouro para a obtenção de um conjunto com grande proporcionalidade e harmonia.

4.1.3 Na tecnologia

Atualmente essa proporção ainda é muito usada. Ao padronizar internacionalmente algumas medidas usadas em nosso dia-a-dia, os projetistas procuraram "respeitar' a proporção divina. A razão entre o comprimento e a largura de um Cartão de Crédito, identidades, modelo da carta de condução, embalagens, alguns livros, jornais, uma foto revelada entre outros (PUHL, 2009). Pode-se encontrar essa razão em vários produtos do nosso cotidiano, como por exemplo, nas dimensões da antiga fita cassete, nas dimensões das fotografias, nas proporções de algumas máquinas fotográficas e alguns notebooks, nas proporções de alguns televisores do tipo LCD, nos espelhos das tomadas e interruptores, nos cartões de crédito, entre outros (Figura 4.5).

Figura 4.5: Proporção áurea utilizada na tecnologia

FONTE: PUHL, 2009

número poder ser escrito como soma de números inteiros positivos distintos. Como resposta, ele criou a teoria das partições (MORGADO, 1991). Além dessa contribuição para a Análise Combinatória, ele enunciou e resolveu o Problema das Sete Portas de Konigsberg, um teorema da teoria dos grafos, dentre outras contribuições.

Na probabilidade esse número teve relevância em algumas aplicações, e destacaremos a distribuição de Poisson e a distribuição de Gauss.

Experimentos que geram valores numéricos da variável aleatória X, o número de resultados que ocorrem durante um dado intervalo de tempo ou em uma região específica, é chamado de experimentos de Poisson. O intervalo de tempo dado pode ser um minuto, um dia, uma semana ou até mesmo um ano. Esses experimentos podem gerar observações para X que podem representar o número de dias de que uma escola ficou fechada por conta de uma pandemia, por exemplo. A região específica pode ser um segmento de linha, uma área, um volume ou até mesmo um pedaço de material. Em tais casos, X pode representar o número de bactérias em certa cultura ou o número de erros digitados por página. Um experimento de Poisson deriva de um processo de Poisson, que satisfaz as seguintes propriedades:

- O número de resultados que ocorrem num intervalo de tempo ou numa região específica é independente do número de resultados que ocorrem em outro intervalo disjunto ou região de espaço disjunta. Nesse caso, dizemos que o processo de Poisson não tem memória;

- A probabilidade de um único resultado ocorrerá durante um breve intervalo de tempo ou numa região específica pequena e proporcional à extensão do intervalo de tempo ou ao tamanho da região, e não depende do número de resultados que ocorram fora desse intervalo ou dessa região.

• A probabilidade de que mais de um resultado ocorrerá num intervalo de tempo muito leve ou numa região muito pequena é desprezível.

O número X de resultados que ocorrem durante um experimento de Poisson é chamado de variável aleatória de Poisson, e sua distribuição de probabilidade é chamada de distribuição de Poisson. O número médio de resultados é dado por

$$\mu = \lambda.t$$

onde t é o tempo, a distância, a área, o volume específico de interesse. Já que suas probabilidades dependem de λ a taxa de ocorrência de resultados, devemos denotá-las pelo símbolo $p(x;t)$ A derivada da fórmula para $(x;t)$ é feita com base nas três propriedades acima, mas não será tratada aqui. Já a distribuição de probabilidade da variável aleatória de Poisson X, quere presenta o número de resultados que ocorrem em certo intervalo de tempo ou numa região específica, denotado por t é

$$(x;t) = \frac{\epsilon^{-\lambda.t}(\lambda.t)^x}{x!}, \text{ com } x = 0, 1, 2, 3, ...,$$

Onde λ é o número médio de resultados por unidade de tempo, distância, área ou volume.

4.2.1 Exemplo

Durante um experimento de laboratório, o número médio de partículas que passam por um contador num milésimo de segundo é quatro. Qual a probabilidade de que seis dessas partículas entrem no contador em um dado milésimo de segundo?

Demonstração. Usando a distribuição de Poisson com $x = 6$; $t = 4$, e λ =1 temos

$$P(6;4) = \frac{\epsilon^{-4}(4)^6}{6!} = 0,1042$$

A distribuição de Poisson é usada para controle de qualidade, garantia de qualidade e testes de aceitação de amostras, além de ser usada na teoria de confiabilidade. □

4.3 O número π no cotidiano

Além das aplicações rotineiras em que usamos o π, como nas aulas de Geometria onde buscamos calcular áreas e perímetros de figuras planas, ou até mesmo volumes de cilindros, cones e esferas. Onde podemos fazer destes cálculos problemas contextualizados e com certo esforço, muito complicados, há também outros campos em que o número π desempenha grande importância, alguns deles são:

4.3.1 Celular

Segundo o matemático norte-americano David H. Bailey em uma publicação educativa da Universidade da Califórnia, (UCLA), explicou que o número tem um papel muito importante na fórmula da Transformada de Fourier, que em linhas gerais, pode ser usada para decompor um sinal nas suas frequências constitutivas.

Ele explica: "O seu celular faz uma Transformada de Fourier quando se comunica com a torre de telefonia móvel local. Até o seu ouvido faz uma Transformada de Fourier (ainda que não seja por computação digital) quando distingue sons de diferentes padrões ou quando reconhece a voz de um amigo".

A Transformada também é fundamental para a conversão da voz em textos por equipamentos de reconhecimento vocal, como explica Glen Whitney, fundador e diretor do Museu Nacional da Matemática, de Nova York, à revista Smithsonian: "Quando você usa a Siri ou o Google Now, um dos primeiros passos do software consiste em captar a sua voz e fazer uma Transformada de Fourier".

4.3.2 GPS

Segundo Chris Budd em entrevista à BBC afirma que "É possível usar pi para descrever a geometria do mundo". E esta frase pode ser entendida em seu sentido literal.

O caso é que, afirma o próprio Budd, a importância em calcular Pi com bastante precisão implica no funcionamento de tecnologias modernas como o GPS.

E para além dos GPS's de carros e celulares, quando os aviões voam grandes distâncias, o que estão fazendo, na realidade, é recorrer ao arco de um círculo. Neste caso, a rota deve ser calculada, utilizando-se Pi, para medir com precisão o volume de combustível necessário.

O número Pi aparece também em cálculos de navegação fora da Terra. A NASA, por exemplo, utiliza 16 dígitos (3,1415926535897932) para conseguir a precisão desejada ao seu "GPS espacial", segundo um artigo publicado na revista Scientific American.

4.3.3 Relógio

Uma outra aplicação de Pi está nos relógios de pêndulo. Em linhas gerais, a fórmula matemática para o cálculo do tempo, que faz com que pêndulo oscile de um lado para o outro, se baseia no Pi.

5 As dificuldades dos alunos em relação aos números algébricos e transcendentes na educação básica

Segundo (CEZAR, 2013, p.2), a ideia de número existe independentemente de estamos na escola. No entanto, é na escola que a criança inicia o processo de formalização e é nesse momento que o professor de Matemática tem a grande tarefa de orientar o aluno para que o mesmo possa produzir significados relevantes no que se refere à construção dos números transcendentes de forma adequada, a fim de possibilitar uma aprendizagem significativa.

Com o objetivo de analisar quais conhecimentos a respeito de números algébricos e transcendentes foi utilizado a pedagogia da resolução de problemas que surgiu a década de 60 nas universidades McMaster, no Canadá, e Maastrich, na Holanda na qual os alunos das mais variadas séries do Ensino Básico possuíam, elaboramos uma atividade que foi feita em sala de aula com assuntos já estudados por eles mas não foi feita a explicação, com isso construímos uma a explicação do conteúdo baseando nos seus erros, essa pesquisa foi feita com alunos pertencentes a salas de primeiro ano até o terceiro ano do Ensino Médio.

Número é um conceito em matemática que foi construído ao longo de um grande percurso. A noção de número, bem como, as suas generalizações estão ligadas à história da humanidade. Grande parte das comparações que o homem formula, seja como gestos ou atitudes cotidianas, remetem conscientemente ou não a juízos aritméticos e propriedades geométricas. É nesta perspectiva que, os números, sejam racionais ou irracionais, algébricos ou transcendentes, surgem e dão um significado à atividade humana em um determinado processo. Nesta perspectiva, o presente capítulo irá abordar alguns exercícios de natureza conceitual e geométrica, partindo ou não de uma situação problema, à serem aplicados no ensino médio, que irão permitir à fixação de conceitos relacionados aos números algébricos e transcendentes, podendo desta forma, proporcionar um melhor aprendizado no que diz respeito a importância destes números mediante ao problema trabalhado. Sendo assim, as propostas para trabalhar com os números phi, pi e Euler.

5.1 Trajetória da pesquisa

Para concretização da pesquisa, visitamos a Unidade Escola E.E.F.M Prefeito Antônio Conserva Feitosa, localizada no bairro Antônio Vieira, em Juazeiro do Norte Ceará, para formalização da solicitação da pesquisa junto à direção, no momento apresentamos o projeto de trabalho, primeiro para a direção da escola junto ao professor André Luiz e em seguida para os alunos do Ensino Médio. Os alunos em sua maioria, com faixa etária entre 14 a 21 anos, estabelecemos um diálogo com o objetivo de sensibilizá-los a participarem da pesquisa. Convite aceito por alguns pois a maioria não mostraram interesse demos prosseguimento as atividades planejadas.

5.1.1 Justificativa

O desejo de se ter uma educação de qualidade não se restringe na vontade do professor, por uma boa valorização profissional ou dos alunos em ter boas notas. O dueto ensino-aprendizagem não pode ser visto de forma isolada, é preciso que alunos e professores encontrem um amparado técnico, com salas, laboratórios, materiais didáticos, qualificados, que haja o engajamento da família nesse processo e se tenha um currículo que atenda os anseios da comunidade. O elo entre essas frentes é uma interessante receita para pleitearmos o sucesso na aprendizagem do aluno. Ou seja, para que se faça uma boa educação é preciso que de toda sociedade de uma forma geral se envolva.

E diante do avanço tecnológico, os professores precisam estar em constante aperfeiçoamento, tendo em vista as diversas formas de aprendizagem. No ensino da matemática, os alunos necessitam ser submetidos a estudar sob um currículo que interligue conteúdos e aplicações cotidianas, desde as séries iniciais do ensino fundamental.

Por conta dessa última inquietação, o objetivo dessa etapa desse Trabalho é trazer uma proposta de sequência didática, apresentando os números algébricos e transcendentes, através de aplicações do cotidiano na educação básica. Nela teremos a exibição do estudo do número phi , número pi e número de Euler até chegarmos a suas aplicações nas mais diversas áreas.

[...] propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (BRASIL, 2018).

5.1.2 Planejamento de aula

Título do Projeto: Os números algébricos e transcendentes na educação básica.

Público alvo: Alunos do ensino Médio de escolas públicas.

Duração: 3 semanas (3 aulas por semana realizadas no contra turno).

5.1.3 Objetivos

- Reconhecer as principais diferenças entre um número algébrico e transcendente;
- Aprender como obter o número phi através de equações polinomiais do 2° grau;
- Desenvolver atividades aplicando os números pi e Euler.

5.1.4 Conteúdo

- História dos números algébricos e transcendentes;
- Definições dos números algébricos e transcendentes;
- Aplicações dos números algébricos e transcendentes no cotidiano.
- Atividade utilizando a resolução de problemas.

5.1.5 Desenvolvimento

1° aula: A história dos números algébricos e transcendentes

Antes de tudo perguntaremos ao grupo de alunos qual a história dos conjuntos numéricos e quais os tipos de conjuntos. Ao coletar todos as respostas e analisar, seria feita uma abordagem histórica conjuntos numéricos, que levaram ao surgimento dos números transcendentes, evidenciando que não se sabe precisamente sua verdadeira origem, segundo (EVES, 2008). E encerraríamos essa primeira aula com a exibição das expressões utilizadas para o cálculo do algébrico phi e os transcendentes pi e Euler, mostrando a diferença estrutural e comportamental entre eles.

Como atividade, seria pedido uma pesquisa, na própria sala de aula (via celular) sobre a importância dos números racionais e irracionais na construção das ciências, fazendo o aluno se deparar com uma definição para número racionais e irracional e com a constante de phi, pi e Euler (números algébricos e transcendentes).

Material utilizado: Apresentação em PowerPoint, quadro branco, pincel, caderno, caneta e vídeos introdutórios extraídos da internet.

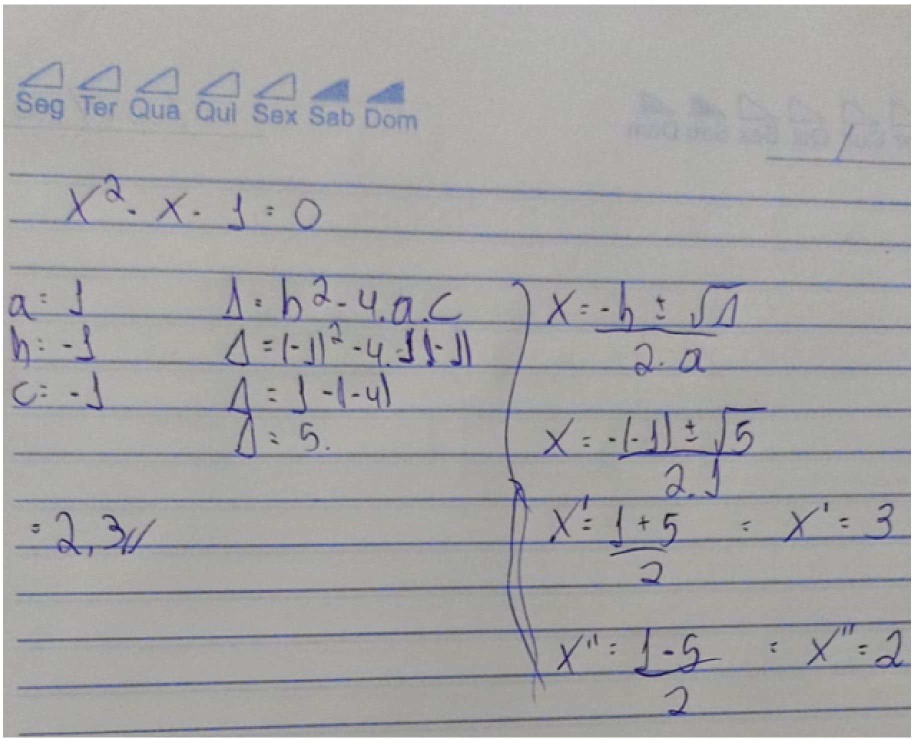
2° aula: Primeiramente perguntaríamos aos alunos qual a definição de conjuntos numérico e se dentro desses conjuntos existem quais eles já estudaram. Em cima das respostas construiremos uma definição paralela e depois apresentar aos alunos as principais definições dos conjuntos numéricos, bem como os conjuntos dos números algébricos e suas aplicações.

Daremos continuidade com a apresentação do número phi explicando o motivo pelo qual ele será algébrico, utilizando um retângulo e dividindo ele partes para formar uma proporção áurea de segmentos, a parti daí encontraremos uma equação polinomial do 2° grau.

3° e 4° aula: Trabalhar com os alunos exemplos de números algébricos.

Vamos iniciar relembrando o assunto passado e propondo um exemplo de um polinômio do 2° grau da forma $P(x) = x^2 - x - 1 = 0$. Pedirei aos alunos que encontre as raízes desse polinômio assim em cima dos erros e dos conhecimentos prévios construiremos a melhor explicação.

Verifiquei que todos os alunos compreendem bem o assunto de resolução de raízes de um polinômio do $2^{\underline{o}}$ grau e dos que estavam presentes apenas um teve um resultado mais próximo da resposta



Analisando a resposta do aluno Carlos Eduardo Moreira, percebemos que assim como todos os outros alunos não conseguem extrair raiz que não sejam exatas. Vendo essa realidade foi feito uma intervenção, repassando aos alunos um método de encontrar um valor aproximado para uma raiz exata.

Como a grande maioria já sabia determinar os quadrados perfeito, ou seja, as raízes que são exatas ficaram mais claro para a turma compreender o método:

$$\sqrt{p} \cong \frac{P+N}{2\sqrt{N}}$$

Em que $P=$ raiz não exata e $N=$ quadrado perfeito mais próximo

Por exemplo para determinar o valor aproximado da $\sqrt{5}$ utilizamos vamos utilizar a expressão:

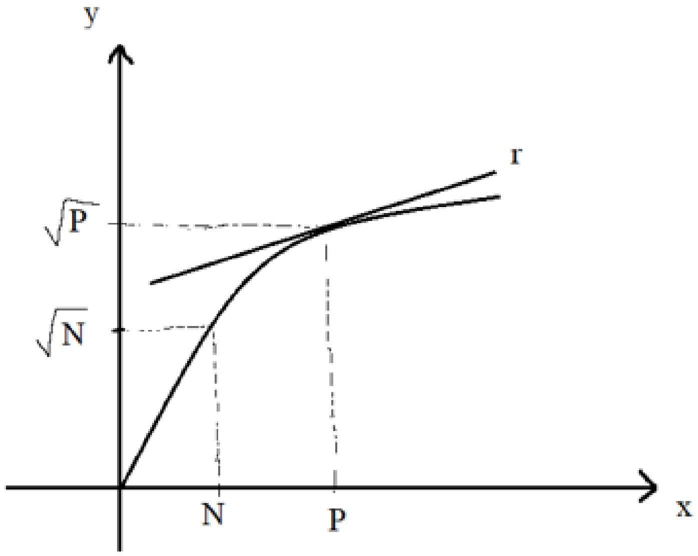
P=5 e $N = 4$, pois é o quadrado perfeito mais próximo, assim temos:

$$\sqrt{5} \cong \frac{5+4}{2\sqrt{4}} = \tfrac{9}{4} = 2,25$$

Justificativa do método:

Consiste em uma aplicação de derivada da seguinte forma:

Seja $f(x) = \sqrt{x}$ e seu gráfico abaixo:



Usando a regra de derivação simples, temos que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ aplicando no ponto N implica que a equação da reta:

$$Y - f(N) = f'(N).(X - N)$$
$$Y - \sqrt{N} = \tfrac{1}{2\sqrt{N}}\,(X - N)$$
$$Y = \sqrt{N} + \tfrac{X}{2\sqrt{N}} - \tfrac{N}{2\sqrt{N}}$$
$$Y = \tfrac{\sqrt{N}}{2} + \tfrac{X}{2\sqrt{N}}$$

Considere o Y como aproximação de $\sqrt{P}$ temos que x se aproxima de P daí concluímos que:

$$\sqrt{p} \cong \frac{P+N}{2\sqrt{N}}$$

5° e 6° aula: Usando a pedagogia da resolução de problemas, perguntaremos aos alunos algumas definições de pi , Euler e suas aplicações.

Iniciaríamos essa aula a partir das respostas discutidas pelos alunos presentes e construiremos a definição de números pi , Euler e a partir do exemplo do final da aula anterior a fim de intuirmos noções de números algébricos.

Exemplo:(Livro de Manuel Paiva)Para compreender o que é um polinômio, considere uma equação do 2° grau da forma $p(x) = x^2 - x - 1$. Os números que encontraremos para essa equação será algébrico. Qual número nunca iremos encontrar como raiz desse polinômio? A partir os estudantes serão instruídos a definição de número algébrico. Mas depois perguntarmos se um número não for algébrico ele seria o que? Como imaginava nenhum aluno teve o domínio suficiente para responder essa pergunta.

No final da aula seria lançado um problema onde aparece o número de Euler na sua resolução, para motivar as resoluções das aulas seguintes, tendo como referenciais (PAIVA, 2000) e (FACCHINI, 2006), além de algumas questões de vestibulares.

Exemplo: (Livro de Facchini) (FGV-SP) Curva de aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão $Q = 700 - 400.\epsilon^{-0,5t}$, onde Q é a quantidade de peças produzidas por um funcionário mensalmente e t são os meses de experiência. Usando $\epsilon \cong 2,7183$. Responda:

a) De acordo com essa expressão, quantas peças um funcionário com 2 meses de experiência de verá produzir aproximadamente por mês?

Resolução:

$$Q = 700 - 400.\epsilon^{-0,5.2}$$

$$Q = 700 - 400.\epsilon^{-1}$$

$$Q = 700 - \frac{400}{2,7183}$$

$$Q \cong 552$$

Portanto, com experiência de 2 meses, um funcionário produz aproximadamente 552 peças por mês.

b) E um funcionário sem nenhuma experiência deverá produzir mensalmente quantas peças?

Resolução:

$$Q = 700 - 400.\epsilon^{-0,5.0}$$

$$Q = 700 - 400.\epsilon^{0}$$

$$Q = 700 - 400$$

$$Q = 300$$

Logo, sem experiência um funcionário produz 300 peças mensalmente.

7° e 8° aula: Importantes aplicações do número de Euler e número pi

As duas aulas seriam dedicadas a resolução de exercícios nos quais seriam lançados e discutidos em aula. Onde, no 1° momento, seria dado desafios, para no 2° o momento, a busca da resolução e possíveis dúvidas.

Material utilizado: Quadro branco, pincel e lista de exercícios.

Exercício - Com base na abordagem histórica no que diz respeito ao surgimento dos números pi e Euler, elabore um argumento que sirva de "justificativa"para que esses números sejam transcendentes.

Observação: Foi apresentado neste trabalho, algumas demonstrações que se referiam a irracionalidade e a transcendência desses números. Pudemos perceber, nas mesmas, a genialidade dos matemáticos ao fazerem chegar aos resultados assim esperados. Logo, por se tratar de alunos de ensino médio, nós professores, não podemos esperar tanta matemática dos mesmos. A proposta então desse questionamento, é fazer com que eles venham à construir um significado à cerca da transcendência desses números. Sendo assim, seria bastante coerente, dentro deste contexto, esperar que os alunos dissessem que, esses números são transcendentes pelo fato de serem obtidos por alguma forma de iteração. Neste contexto, será abordado logo abaixo, uma sugestão de trabalho para com o número π.

Sugestão de como trabalhar o surgimento do número π

É bastante interessante fazer com que, os conceitos matemáticos, de uma forma geral, sejam absorvidos. Para tanto, uma maneira de construirmos uma aprendizagem significativa no que diz respeito ao número π, é promover uma interação entre os alunos durante a execução das atividades. No primeiro momento, divide-se a sala em grupos, de modo à colocar os alunos para construir circunferências e polígonos regulares inscritos nas mesmas, para que assim, algumas comparações sejam estabelecidas. Em seguida, serão realizadas algumas medições do comprimento C da circunferência e o diâmetro D utilizando objetos circulares, régua, barbante, tesoura e esquadro.

Dando continuidade, é importante colocar os grupos para socializarem e organizaremos dados obtidos em uma tabela contendo os valores de C, D e o quociente $\frac{C}{D}$. O objetivo desta etapa é levar os estudantes a compreenderem o conceito do número π como uma constante que surge naturalmente na divisão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro.

No segundo momento, o professor deve apresentar um breve histórico relatando o aparecimento do valor dessa divisão em diferentes épocas e povos. Sendo assim, ele pode citar o seu aparecimento na Bíblia, bem como, nos estudos dos egípcios ou em outras aplicações. É interessante também apresentar o método de Arquimedes (conhecido como método da exaustão), ou outras possíveis formas de se chegar ao número π.

Se possível, apresentar recursos que permitam aos alunos, encontrar a sequência de números da casa decimal dele.

Já no terceiro momento, é necessário a utilização de um recurso computacional que neste caso irá trabalhar com um programa de geometria dinâmica, o GeoGebra. Ele será utilizado para reproduzir o método da exaustão e obter o comprimento de uma circunferência a partir de aproximações sucessivas obtidas pelo cálculo do perímetro de polígonos inscritos e circunscritos à circunferência. Sendo assim, os alunos devem observar e anotar o perímetro do polígono inscrito e do polígono circunscrito para polígonos de 3, 6, 12, 24, 48 e 96 lados, bem como, calcular o erro e fazer hipóteses quanto ao comprimento estimado da circunferência. O objetivo desta etapa é obter aproximações do valor de π tão precisas quanto se deseje, a partir do momento em que aumente continuamente o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos, e com isso, fazer conexão destas descobertas com as descobertas obtidas na primeira etapa.

Por fim, para verificar se dá fato houve um aprendizado mediante a sequência didática proposta, apresenta-se um questionário com as seguintes questões: Você conhece o número π? Quem inventou o π? Qual o valor de π? Você considera importante conhecer este número? Quais os profissionais que utilizam este número? Qual a importância do?

Alguém não se sabe quem ou quando deve ter notado o fato curioso de que se um capital P é composto n vezes por ano, durante t anos, a uma taxa de juros r e se permitirmos que n aumente sem limites, a soma de dinheiro S, obtida a partir da fórmula

$$S = p\left(1+\tfrac{r}{n}\right)^{nt}$$

parece aproximar-se de um certo limite. O limite para P = 1, r = 1 e t = 1, é aproximadamente 2,718. (...) assim, as origens do número de euler (...) pode muito bem-estar ligado a um problema mundano: o modo como o dinheiro aumenta com o passar do tempo (MAOR, 2008, p. 13)

9° aula: Nesse último encontro foi feito uma roda de conversa com apenas 5 alunos selecionados utilizando a seguinte questão:

As definições de números algébricos e transcendentes são feitas através de conceitos algébricos, mas as aplicações desses números vão muito além de questões algébricas. Números algébricos e transcendentes aparecem nas mais variadas áreas da matemática, como geometria, análise, matemática financeira, entre outros.

Você sabe o que significa a palavra transcendente? O que seria um número transcendente? E um número algébrico? Você seria capaz de citar um ou mais números que são transcendentes?

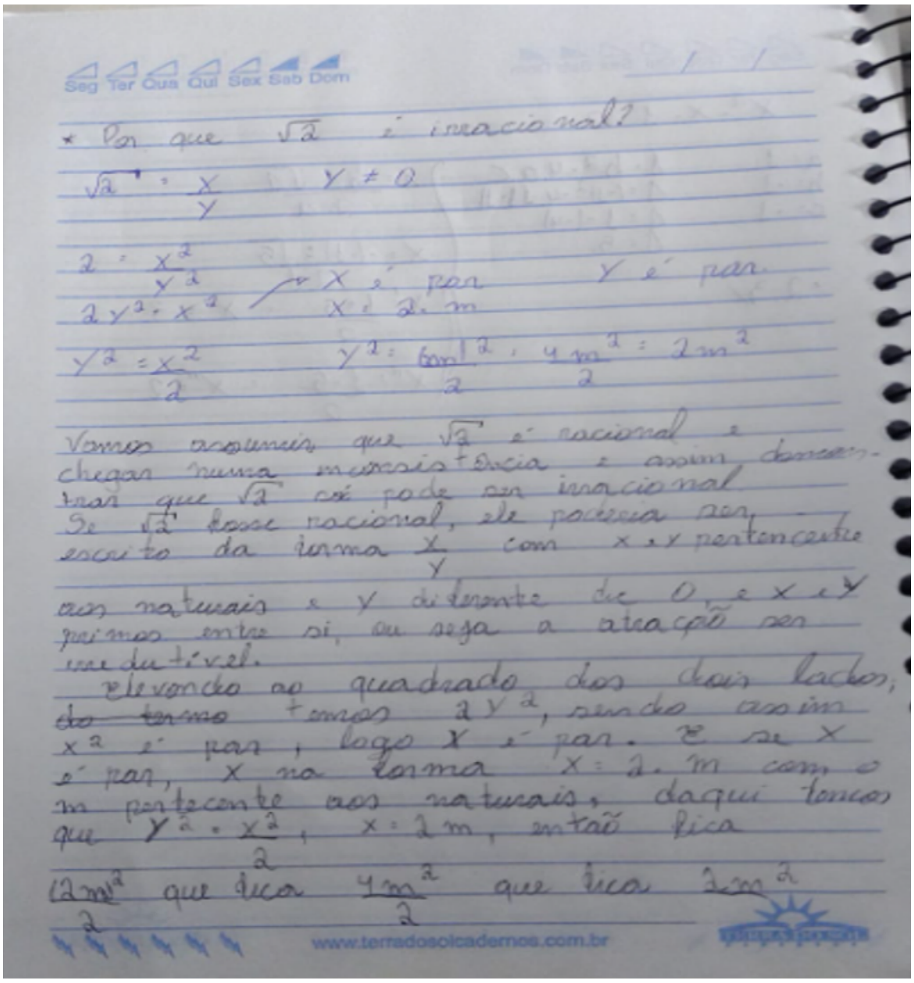
Nessa última pergunta, alguns grupos conseguiram apenas responder o significado da palavra transcendente, mas não conseguiram explicar o que significava um número transcendente. O interessante é que alguns alunos disseram já ter ouvido falar nesse tipo de número, pois o professor havia comentado a respeito de sua existência em uma aula. Na hora da discussão foi explicado o conceito de número transcendente e também de número algébrico e foi explicado que eles conheciam alguns desses números, mesmo que não soubesse de sua classificação.

A segunda etapa da atividade consistiu na apresentação de uma atividade abordando os temas discutidos durante essas aulas. Nessa atividade foram abordados os temas que apareceram nas perguntas do questionário do dia anterior e uma série de informações complementares foram apresentadas, como, a classificação dos números em conjuntos, por que eles são agrupados dessa forma e para que servem cada um dos "tipos de números" que eles aprenderam. Também foi apresentada uma das demonstrações da irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Foi explicada a definição de número algébrico e transcendente novamente e uma boa parte da apresentação foi dedicada a contar um pouco mais a respeito da história dos números ϕ, π e ϵ, com a mesma abordagem que foi feita durante o período trabalhado.

5.2 Questão 1- Baseando nos assuntos estudados sobre números irracionais prove que:

O número $\sqrt{2}$ é irracional.

Segue a melhor resposta apresentada pelo aluno 1° ano do Ensino médio Carlos Eduardo Moreira da Escola Conserva Feitosa:



* Por que $\sqrt{2}$ é irracional?

$\sqrt{2} = \frac{x}{y}$ $\quad y \neq 0$

$2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\quad \rightarrow x$ é par $\quad y$ é par

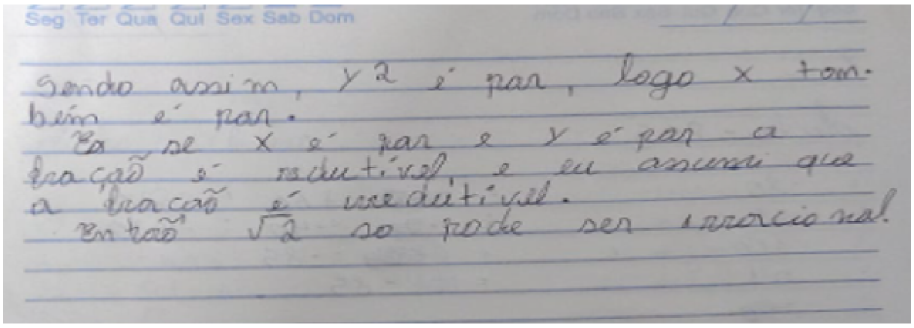
$2y^2 = x^2$ $\quad x = 2.m$

$y^2 = \frac{x^2}{2}$ $\quad y^2 = \frac{(2m)^2}{2} = \frac{4m^2}{2} = 2m^2$

Vamos assumir que $\sqrt{2}$ é racional e chegar numa inconsistência e assim demonstrar que $\sqrt{2}$ só pode ser irracional. Se $\sqrt{2}$ fosse racional, ele poderia ser escrito da forma $\frac{x}{y}$ com x, y pertencentes aos naturais e y diferente de 0, e x e y primos entre si, ou seja a fração ser irredutível.

Elevando ao quadrado dos dois lados, obteremos $2y^2$, sendo assim x^2 é par, logo x é par. E se x é par, x na forma $x = 2.m$ com o m pertencente aos naturais, daqui temos que $y^2 = \frac{x^2}{2}$, $x = 2m$, então fica

$\frac{(2m)^2}{2}$ que fica $\frac{4m^2}{2}$ que fica $2m^2$



Seg Ter Qua Qui Sex Sab Dom

Sendo assim, y^2 é par, logo x também é par.
Ex se x é par e y é par a fração é redutível e eu assumi que a fração é irredutível.
Então $\sqrt{2}$ só pode ser irracional.

5.3 Questão 2- Julgue verdadeiro ou falso as afirmações abaixo, justificando a sua resposta.

a) Chamamos de Inteiro Algébrico, toda solução da equação polinomial

$$bx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

onde os coeficientes $a_0, ..., a_{n-1}$ são números inteiros com $b \neq 1$.

b) Todo inteiro algébrico é um número algébrico.

c) Todo número irracional é transcendente.

d) Existem números irracionais que não são algébricos.

e) Todo número racional é algébrico.

f) $\sqrt[3]{5}$ é um número transcendente.

Solução da Questão 1-

a) Falso. Um número é Inteiro Algébrico, toda vez que ele for solução de uma equação polinomial

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

onde os coeficientes $a_0, ..., a_{n-1}$ são números inteiros com $b \neq 1$.

b) Verdadeiro. Tendo em vista que um número é Inteiro Algébrico, toda vez que ele for solução de uma equação polinomial

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

Onde os coeficientes $a_0, ..., a_{n-1}$ são números inteiros , e um número Algébrico toda vez que ele for solução de uma equação polinomial

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

Onde os coeficientes $a_0, ..., a_{n-1}$ são números inteiros, fica claro desta maneira que o conjunto dos Números algébricos, contém o conjunto dos Inteiros Algébricos.

c) Falso. Como contraexemplo podemos citar $\sqrt{2}$ uma vez que, ele é solução da equação

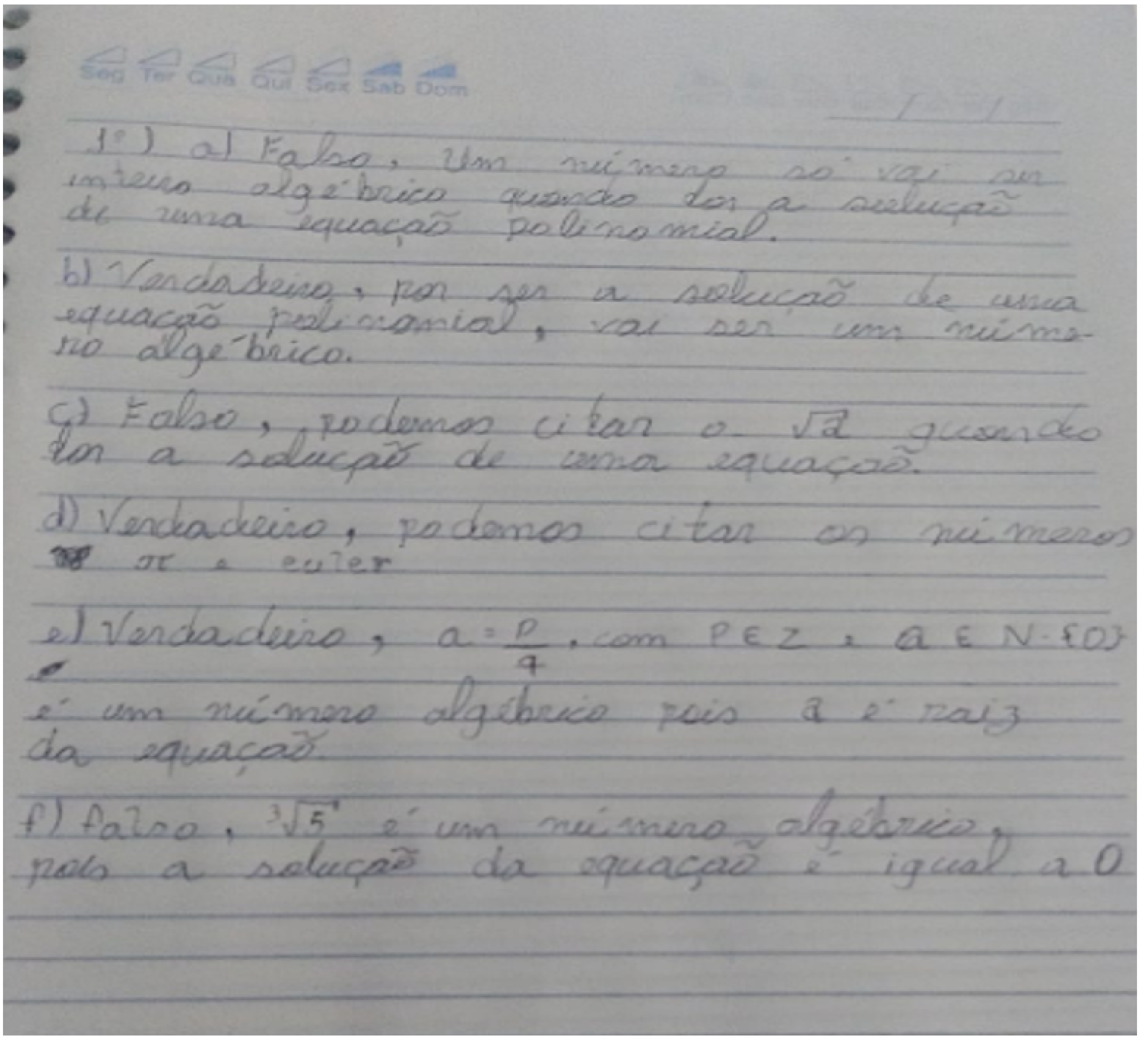
$$x^2 - 2 = 0$$

d) Verdadeiro. A título de exemplo podemos citar os números π e ϵ

e) Verdadeiro. pois, seja $\alpha = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ é um número algébrico pois α é raiz da equação $qx - p = 0$

f) Falso. $\sqrt[3]{5}$ é um número algébrico, pois é solução da equação polinomial $x^3 - 5 = 0$

Segue abaixo a resposta apresentada pelo mesmo aluno:



1º) a) Falso, Um número só vai ser inteiro algébrico quando for a solução de uma equação polinomial.

b) Verdadeiro, por ser a solução de uma equação polinomial, vai ser um número algébrico.

c) Falso, podemos citar o $\sqrt{2}$ quando for a solução de uma equação.

d) Verdadeiro, podemos citar os números π e euler

e) Verdadeiro, $a = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ é um número algébrico pois a é raiz da equação.

f) Falso, $\sqrt[3]{5}$ é um número algébrico, pois a solução da equação é igual a 0

Neste sentido as respostas dos alunos, coletadas mediante atividade aplicada em sala de aula, foram analisadas. Vale destacar, que mesmo os alunos tendo assumido o compromisso de contribuírem com a pesquisa, não foi o que ocorreu, visto que, no momento da aplicação da atividade, somente 4 alunos se encontravam em sala de um total de 6 que se disponibilizaram e participar do projeto.

Dos que se encontrava em sala 1 aluno se recusou a resolver a atividade depois de verificar as questões, 1 aluno zerou, deixando algumas questões em branco, ao final de tudo apenas um aluno conseguiu concluir a pesquisa. O nome desse aluno é Carlos Eduardo Moreira aluno do 1° ano do ensino médio da escola Conserva Feitosa.

Fundamentado na concepção de Ponte (2006), cada resposta foi analisada, e permitiu concluir que muitos alunos não conseguiram absorver os conhecimentos necessários na sua vida escolar para responder as questões, ou não se deram a oportunidade de tentar, alegando que as questões eram complicadas e difíceis de serem entendidas por isso nem tentaram.

6 CONCLUSÃO

Esta dissertação teve por objetivo geral analisar através de aplicações na educação básica os números algébricos e irracionais, a fim de trabalhar a pedagogia da resolução de questões com alunos do ensino médio e deixar como apêndice a demonstração da transcendência dos números de Liouville, Euller e Pi. Para tanto, investigamos como os números algébricos e transcendentes surgiram assim como quem teve participação nessa descoberta e qual a importância desses números na educação básica. Depois, apresentamos a definição e a classificação dos números algébricos, como também mostramos sua aplicação com alunos do ensino médio a classificação dos números transcendentes a partir do número de Phi para, por fim, plicamos os números de Euler e Pi.

Os resultados obtidos com este estudo nos permitiram observar que a dificuldade dos alunos é notória não somente no cálculo, mas também no letramento matemático. Teoria essa que se alastrou devido a pandemia causada pelo Covid 19 ocorrida no período de 26 de fevereiro de 2020 a 15 dezembro 2023 em que 100% dos alunos da rede pública do estado do Ceará estava no regime de aulas remotas.

A descoberta dos números transcendentes não provocou o mesmo choque intelectual que os números irracionais tinham causado 2500 anos antes, mas suas consequências foram igualmente significativas. Ela mostrou que, por trás da aparente simplicidade do sistema de números reais, ocultam-se muitas sutilezas que não podem ser notadas simplesmente observando a expansão decimal de um número. Constatamos, portanto, que a maioria dos alunos entrevistados não compreendem os conjuntos numéricos nem tão pouco os números algébricos e transcendentes.

Neste estudo, nos limitamos a aplicar os números algébricos e transcendentes na educação básica. Em pesquisas futuras, pretendemos observar e demonstrar a transcendência de outros números para os estudantes e os que ainda não foram demonstrados na Matemática.

Referências

[1] **BENTLEY, P.** O Livro dos Números. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2010.

[2] **BOYER, C. B.** História da matemática. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[3] **FIGUEIREDO, D. G.** Números Irracionais e Transcendentes. 3. ed. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

[4] **EVES, H.** Introdução à História da Matemática. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

[5] **HEFEZ, A.** Elementos de Aritmética. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

[6] **OLIVEIRA, A. A. A.; SILVA, U. P.; AUGUSTINI, E.** A Transcendência do Número epsolon. FAMAT em Revista, n. 3, p. 109-120, set. 2004. Disponível em: http://www.antigo.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/FamatRevista03 Acesso em: 18 jan. 2023.

[7] **SPIVAK, M.** Calculus. 3. ed. Editora Publish or Perish: Houston, 1994.

[8] **SANTOS, J. P. O.** Introdução à Teoria dos Números. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[9] **STEINBRUCH, A.** Álgebra Linear. São Paulo: Makron Books, 1987.

[10] **O NÚMERO DE OURO NA ARTE E ARQUITECTURA.** Disponível em: www.cienciaengalego.org/drupal6/sites/default/.../numero d eouro.p... Acesso em: 02 de maio de 2023.

[11] **SINGH, S.** O Último Teorema de Fermat. Tradução de Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 2008.

7 APÊNDICE

Neste apêndice traremos como fonte de pesquisa, as demonstrações resumidas das transcendencias do número de liouville, número de Euler e número π. Podendo encontrar a versão completa da demonstração no livro FIGUEIREDO, D. G. Números Irracionais e Transcendentes. 3. ed. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. .

7.1 A transcendência do número de Liouville

Segundo Singh (2008), existe um número k real que é chamado número de Liouville, se existe $\frac{p_j}{q_j} \in \mathbb{Q}$ infinita, sendo $q_j > 1$ tal que $\left[k - \dfrac{p_j}{q_j}\right] < \dfrac{1}{qj}, \forall j \geq 1$

Teorema 6. *a sequência $(q_j)_j$ é limitada*

Demonstração. Seja $q_j > 1$ tal que $\left[k - \dfrac{p_j}{q_j}\right] < \dfrac{1}{qj}$. Suponha que q_j é limitada, isto é,

$$q_j \leq M \rightarrow [Kq_j - p_j] < q_j \leq M\, [p_j] - [Kq_j] \leq M \rightarrow [P_j] \leq M + [K]\,[q_j] \leq ([K] + 1)$$

Absurdo, pois existem infinitos $\frac{p_j}{qj}$ $\square$

Teorema 7. *todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração. Suponha que k é Liouville e algébrico de grau n existe:

$$\frac{p_j}{q_j} \cdot \frac{A}{q_j n} < \left[k - \frac{p_j}{q_j}\right] < \frac{1}{q_j j}, \forall j \geq 1 \rightarrow \frac{A}{q_j^n} < \frac{1}{q^j j} \rightarrow q_j^{j-n} < \frac{1}{A}$$

Se $j \geq n + 1 \rightarrow q_j^{j-n} < \dfrac{1}{A} \rightarrow (q_j)$ seria limitada, contradizendo o teorema 6, então é absurdo. Logo, todo número de Liouville é transcendente. $\square$

7.2 A transcendência do número de Euler

A transcendência de Euler foi um desafio aos matemáticos no século XIX. A prova original da transcendência de e se deve ao matemático francês C. Hermite em 1873, a qual sofreu simplificações sucessivas por matemáticos famosos como Jordan, Markho, Roucho, Weierstrass, Hilbert, Hurwitz e Veblen.

A demonstração que apresentamos a seguir tem uma variação, devida a Hurwitz, da prova de Hilbert.

Demonstração. Suponha que ϵ algébrico. Logo $a_m e^m + \ldots + a_1 e + a_0 = 0$ para certos $a_i \in \mathbb{Q}, i = 0, \ldots, m$ e $a_0 6 = 0$. Podemos supor, sem perda da generalidade, que os a_i são inteiros para todo i

O polinômio $f(X) = \dfrac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \ldots (x-m)^p}{(p-1)!}$, onde p um número primo, de grau $mp+p-1$, o que implica que $f^{(mP+P-1)}(x) = 0$. Temos que a prova desse fato será feita por absurdo. Suponha que ϵ é algébrico, ou seja, que existe um polinômio H de grau $n > 0$ com coeficientes racionais tal que $H(\epsilon) = 0$

$$H(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

Não há perda de generalidade em considerar que os $c_i^{,}s$ são inteiros, pois podemos multiplicar H por um múltiplo comum de todos os denominadores dos $c_i^{,}s$ e ϵ continuará sendo raiz. Também podemos, se necessário, multiplicar H por -1 para obter $C_0 \geq 0$. Finalmente, se tivéssemos $c_o = 0$, haveria um $I_0 = \min\{i, c_i 6 = 0\}$ e teríamos $H(x) = c_{i_0} x^{i0} + \ldots + c_n x^n$. Então, poderíamos dividir H por x^{i0} e ainda teríamos um polinômio com coeficientes inteiros e raiz ϵ, porém com o coeficiente independente não nulo. Então, podemos supor $C_0 > 0$. Voltando ao nosso polinômio P, podemos supor que $p > c_0.q = c_0 F(0) + c_1 F(1) + \ldots + c_n F(n)$ é um número inteiro, como já vimos. Também, $0 < C_0 < p, |F(k)$ para $k = 1, 2, 3, ..n$, p não divide $F(0)$ e os $c_i^{,}s$ são inteiros.

Logo, p não divide q pela definição de $\epsilon.k$. Portanto, vemos que,

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_n e_n =$$

$$= c_2 f(1) + \ldots + c_n f(n) - c_1 e^1 f(0) - ... - c_n e^n f(0)$$
$$= (-c_1 e - \ldots - c_n e^n) f(0) + c_1 f(1) + \ldots + C_n f(n)$$
$$= c_0 f(0) + \ldots + c_n f(n)$$
$$= q$$

Logo, se escolhermos p suficientemente grande, teremos $\epsilon.k$ suficientemente pequeno para ter $|q| < 1$ o que implica que $q = 0$ uma vez que q é inteiro. No entanto, isso seria um absurdo, pois p não divide q. Como nossa única hipótese foi a de que ϵ seria algébrico, vemos que isso não pode ser verdade, ou seja, ϵ é transcendente. $\square$

7.3 A transcendência do número π

Para demonstrarmos a transcendência do número π teremos que usar alguns conceitos sobre função analítica, polinômios simétricos e também alguns resultados que utilizamos para demonstrarmos a transcendência do número ϵ. A seguir é descrito os conceitos que iremos utilizar para demonstrarmos a transcendência.

a) Seja $Q(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j$ um polinômio com coeficientes inteiros. Se $Q^{(i)}(x)$ denotado a i-ésima derivada de $Q(x)$ então:

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}, i \leq r. \ (1)$$

Se $p < r$ e $i \geq p$ então $\dfrac{1}{(p-1)!} Q^{(i)}(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros divisível por p

b) Seja $P(x)$ um polinômio de grau r. Consideremos a função:

$$F(x) = P(x) + P^{(1)}(x) + \ldots + P^{(r)}(x). \text{ Então: } (2)$$
$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x} F(x)\right) = -e^{-x} P(x)$$

Teorema 8. *Seja $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ números algébricos, tais que os polinômios simétricos elementares.*

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} t_j$$

$$S_2 = \sum_{i<j}^{n} t_i t_j$$

$$S_3 = \sum_{i<j<k}^{n} t_i t_j t_k$$

$$\vdots\vdots\vdots$$

$$S_n = t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$$

sejam números racionais. Considere agora os $\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$ *números algébricos.*

$$\beta_{k_1} \ldots \beta_{kj} = \alpha_{k_1} + \ldots + \alpha_{k_j} \text{ com } 1 \leq k_1 < \ldots < k_j \leq n$$

Então, os polinômios simétricos elementares associados a esses $\beta's$ são também números racionais.

Suponhamos por absurdo que π seja algébrico como vimos no capítulo anterior sabemos que o produto de dois números algébricos é um números algébrico, portanto $i\pi$ é algébrico pois i como também vimos no capítulo anterior é algébrico.

Portanto $i\pi$ é raiz de um polinômio com grau n e $P_1(x)$ com coeficientes inteiros, logo $P_1(i\pi) = 0$, como o polinômio tem grau n então tem no máximo n raízes complexas, denotaremos as raízes de $P_1(x)$ por $\alpha_1 = i\pi, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$

Usaremos agora a relação de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$, se $\theta = \pi$, teremos que $e^{i\pi} = -1$ Consideremos agora

$$\textstyle\prod_{j=1}^{n} (1 + e^{\alpha_j}) = 0$$

pois se desenvolvermos o produtório teremos

$$(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\dots(1+e^{\alpha_n})$$

$$(1+e^{i\pi})(1+e^{\alpha_2})\dots(1+e^{\alpha_n})$$

$$(1+(-1))(1+e^{\alpha_2})\dots(1+e^{\alpha_n})$$

Desenvolvendo teremos:

$$1+e^{\alpha_1}+e^{\alpha_2}+\dots e^{\alpha_n}+\dots+e^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}+\dots+e^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}+\alpha_n}=0$$

temos que $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ satisfaz uma equação de grau $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$ e $P_n(x) = 0$

A partir de todas estas conclusões da página anteriores temos que

$$H(x) = P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_n(x)$$

onde o seu grau será

$$\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 2^n - 1$$

e suas raízes são $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$, $\alpha_i+\alpha_j$ para $j<j\dots\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n$ Como algumas das raízes $H(x)$ podem se anular, supondo que dessas 2^n-1 raízes de m delas não sejam nulas e vamos representar essas m raízes por $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$. Portanto temos que $m<2^n-1$. Logo a equação polinomial $H(x)$ pode ser simplificada para uma outra equação de grau m com coeficientes inteiros e de raízes $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$. Vamos então chamar a nova equação de $w(x) = w_m x^m + w_{m-1}x^{m-1}+\dots+w_1x+w_0$

Como já sabemos $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n \neq 0$, se aplicarmos mais uma vez o produtório

$$\prod_{j=1}^{n}(1+e^{\alpha_j}) = 0$$

como sabemos a nossa nova equação polinomial dada por $W(x)$ de grau m tem todas as raízes não nulas, mais alguns dos expoentes acima são nulos, portanto, temos:

$$k+e^{\beta_1}+e^{\beta_2}+\dots+e^{\beta_n}=0$$

$$k+\sum_{j=1}^{n}e^{\beta_j}=0$$

Consideremos o polinômio dado por

$$P(x) = \frac{C^s}{(p-1)!} \cdot x^{p-1} \cdot [W(x)]^p$$

Com $s = m.p - 1$ e p um número primo. O grau deste polinômio $P(x)$ vai ser dado por $s + p$ Seja a função dada por

$$F(x) = P(x) + P^{(1)}(x) + \ldots + P^{(n)}(x)$$

Temos também que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}P(x)$$
$$|f(z_2 - z_1)| \leq 2|z_2 - z_1| \sup\{\left|f^{(1)}(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))\right| : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

se aplicarmos a desigualdade acima na função $f(z) = e^{-z}F(z)$, para $z_1 = 0$ e $z_2 = \beta_j$ com $j = 1, 2, 3, ..., m$. Dessas conclusões e afirmações acima temos que Usaremos agora o mesmo argumento que usamos para demonstrarmos a transcendência do ϵ, portanto para um p primo suficientemente grande, podemos fazer

$$2Mc^M N|c|^{m-1} \frac{[A]^{p-1}}{(p-1)!}$$

o mais próximo de zero que quisermos, portanto $\epsilon < 1$, logo $\epsilon_j < \dfrac{1}{m+1}$. Logo a expressão

$$\textstyle\sum_{j=1}^{m} \epsilon_j = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_m$$
$$\textstyle\sum_{j=1}^{m} \epsilon_j = \dfrac{1}{m+1} + \dfrac{1}{m+1} + \ldots + \dfrac{1}{m+1}$$
$$\textstyle\sum_{j=1}^{m} e_j = \dfrac{1}{m+1} < 1$$

Temos que

$$\left|\textstyle\sum_{j=1}^{m} f(\beta_j) + KF(0)\right| \leq \textstyle\sum_{j=1}^{m} \epsilon_j$$

e que

$$\left|\sum_{j=1}^{m} f\left(\beta_j\right) + KF\left(0\right)\right| \geq 1, \text{ mas } \sum_{j=1}^{m} e_j < 1$$

Esse absurdo surgiu pelo fato de termos considerado π algébrico, portanto π é transcendente.