UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

As diferentes Formas de resolver equações polinomiais do 2º grau

Álvaro Galvão Moraes

BRAGANÇA-PA
2023

As diferentes Formas de resolver equações polinomiais do 2º grau

Álvaro Galvão Moraes

Trabalho apresentado ao programa de Pós-Graduação de mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profº Dr. Edson Jorge de Matos

BRAGANÇA-PA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G182d Galvão Moraes, Álvaro.
As diferentes formas de resolver equações polinomiais do 2º grau / Álvaro Galvão Moraes. — 2023.
65 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Edson Jorge de Matos
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Bragança, Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, Bragança, 2023.

1. Equação do 2º grau, métodos de resolução, história da matemática. I. Título.

CDD 515.252

ÁLVARO GALVÃO MORAES

AS DIFERENTES FORMAS DE RESOLVER EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU

Trabalho apresentado ao programa de Pós-Graduação de mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edson Jorge de Matos

Data da aprovação: 30/08/2023

BANCA EXAMINADORA

Edson Jorge de Matos

Prof. Dr. Edson Jorge de Matos
Orientador – PROFMAT/UFPA/Bragança

Andréia Gomes Pinheiro

Profª. Drª. Andréia Gomes Pinheiro
Membro Interno – PROFMAT/UFPA/Bragança

Prof. Dr. Marcos Lázaro de Souza Albuquerque
Membro Interno – PROFMAT/UFPA/Bragança

Sandro do N. da Costa

Prof. Dr. Sandro do Nascimento da Costa
Membro Externo – IFPA/Bragança

BRAGANÇA
2023

Agradecimentos

Neste momento conclusivo de mais uma etapa da trajetória acadêmica por mim sonhado, venho agradecer...

À Deus, esconderijo nos momentos dificeis, mão amiga que me guia e me impulsiona pela vereda que devo trilhar, Tua justiça é o ideal a ser buscado na minha vida profissional.

A minha esposa Brenda Moraes e meu filho Álvaro Augusto que sempre estiveram ao meu lado,me impulsionando e não deixando esmorecer na minha caminhada a Bragança todos os finais de semana,a voces meus amores minha eterna gratidão.

À meus queridos e amados pais, Alvaro Moraes e Zoraide Galvão, mãos de bronze que alentam o meu destino, de quem obtive não apenas o ensino gentil, mas a convivência amorosa e que, além de todo esse amor, me brindaram com o suporte necessário para finalizar mais esta jornada. À eles que sempre me orientaram e me apoiaram nesta aventura: viver! Meu eterno agradecimento.

Aos amigos de outras paragens, alguns perdidos, mas não esquecidos, outros ausentes, mas sempre presentes em meus pensamentos, e outros que ofereceram ajuda nos momentos importantes, sempre compreensivos, interlocutores amorosos e pacientes que compartilham comigo esse continuum do conhecimento científico.

Ao meu orientador professor Dr.Edson Jorge Matos, pela dedicação, empenho, atenção e seriedade respeitosa.

Para meu avô Salomão Galvão, *in memoriam* que no seu pouco conhecimento secular, mas de infinito conhecimento de vida sempre me incentivava nos estudos, demonstrando com grande entusiasmo e orgulho a alegria de me ver galgando mais um degrau na minha jornada acadêmica.

BRAGANÇA-PA

2023

Resumo

Neste trabalho foi realizado uma análise de como tem sido desenvolvido o ensino de equação polinomial do $2^{\underline{o}}$ grau na educação básica, visto que tem se restringido apenas à aplicação de fórmulas, fazendo com que o aluno não tenha um maior aprofundamento neste assunto. Para isso, este estudo, mostra as diversas maneiras de resolver uma equação polinomial do segundo grau ao longo da história, trazendo para o professor algumas alternativas no aprofundamento do assunto em questão. Foi feito um estudo histórico do desenvolvimento da equação referida passando por civilizações antigas e apresentadas contribuições de grandes matemáticos dessas civilizações por meio de uma pesquisa bibliográfica. Propõe-se a utilização da história da matemática para despertar nos discentes a curiosidade, a aprendizagem por meio da história . Enfim, o ensino desse conteúdo nessa perspectiva poderá acrescentar um melhor aprendizado ao aluno no ensino em matemática.

Palavras-chave: Equação do $2^{\underline{o}}$ grau, métodos de resolução, História da Matemática.

Abstract

Currently teaching on resolutions second degree equation has been restricted presentation will practically solving the formula and the relations between its roots and coefficients. It is rare to find in Brazil a book that speaks of quadratic equations satisfactorily for those students who want to deepen this content. Therefore the present work shows the different strategies to solve a quadratic equation throughout history, showing what were the civilizations and mathematicians who contributed to the solution of such equation via different methods. For this was made a historical study of the development of the equation of 2nd degree starting from the ancient civilizations and the contributions of mathematicians Egyptians, Babylonians, Greeks, Hindus, Arabs and Europeans through a literature search. We use the history of mathematics to enable the student a stimulus for learning. At the end of this research we observed that the study of contents in this perspective can contribute to improving teaching and learning in mathematics.

Keywords: Second degree equation; Methods of Resolution; History of mathematics.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentações da temática da pesquisa

Este trabalho surgiu, antes de qualquer coisa, de um fascínio: o magistério. Foi isso que nos levou em direção à escolha do assunto abordado. Com o propósito de mostrar as técnicas de resoluções de equações polinomiais do segundo grau como recurso metodológico no processo ensino/aprendizagem deste conteúdo de forma a minimizar as dificuldades que a Matemática exerce sobre alguns alunos e conseguir mostrar como ela é importante e que está presente no dia-a-dia dos discentes. Pois há uma grande lacuna entre o que se ensina e o que é usado pelos estudantes em sua jornada de estudos. Um número considerável de professores de matemática das redes públicas e particulares não usam a história da matemática como meio para facilitar o ensino dos seus alunos e desconhecem aplicações dos conteúdos da grade curricular o que torna suas aulas monótonas, despertando pouco interesse por parte dos alunos. Paralelo a tudo isso tivemos no ano de 2020 a COVID-19 que retirou os alunos de dentro da sala de aula e do convívio presencial com o professor e com os colegas de classe, tornando-os ainda mais vulneráveis ao aprendizado de matemática. Políticas de governo de aprovação em massa, contribuíram para criar na cabeça dos estudantes a falsa ideia de que eles passariam de ano independentemente da apreensão dos conteúdos ministrados ou do alcance de uma nota. Assim, diante desses fatos, manifesto o seguinte questionamento: Como fazer para despertar os alunos no processo de ensino e aprendizagem de matemática em sala de aula, objetivando múltiplas formas de soluções de equação polinomial do segundo grau aliado a história de grandes matemáticos, tudo isso mediado em sala de aula pelo professor?

A carência de projetos e metodologias para a disciplina nas suas especificidades reforça a importância desta proposta para o crescimento e desenvolvimento de outros projetos pedagógicos tão necessários para o ensino e aprendizagem da Matemática no ensino fundamental e médio. O enfoque deste trabalho é utilizar a história da matemática para mostrar as inúmeras estratégias de se resolver equações do segundo grau e ao fazê-lo conseguir, de modo objetivo e claro, demonstrar quanto a matemática é útil, eu diria fundamental para todas as ciências. Deve haver um trabalho para tornar a Matemática mais atraente, interessante e agradável, já que é uma disciplina indispensável e fundamental na formação de cidadãos.

Este é o propósito do trabalho, mostrar as diversas maneiras de encontrar as raízes da equação polinomial do segundo grau através de diversos métodos de resolução e que o aluno conheça os diferentes matemáticos que deram sua participação de alguma forma nas várias soluções dessas equações ao longo da história. Pois pretendemos com a análise de elementos históricos sobre o conteúdo “Equações polinomiais do 2º grau” mostrar a importância do desenvolvimento de atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, ver que o aluno é capaz de perseverar na busca de soluções. Adotando como critérios para este conteúdo sua relevância social e sua contribuição para o crescimento intelectual do alunado.

> Por mais antigo, tradicional e repisado que seja o assunto que estamos ensinando, convém sempre procurar novos ângulos para focalizá-lo, outras maneiras de abordá-lo, não somente buscando tornar mais atraentes nossas aulas, mas até mesmo para nos dar um pouco mais de entusiasmo, quebrando a monotonia de repetir todos os anos a mesma história (LIMA, 1988).

É de grande relevância o esforço de professores de Matemática para tornarem suas aulas mais atraentes, dinâmicas, mostrando as diversas aplicações dos conteúdos ministrados e proporcionando aos seus alunos outra perspectiva na sala de aula e de contato com tópicos de Matemática quase nunca visto. E, com toda certeza, torna-los mais eficientes e isso contribuiria muito para diminuir o abismo que separa a matemática de suas aplicações para o entendimento na cabeça dos alunos.

1.2 Objetivos do trabalho

Ao longo de minha trajetória escolar como aluno e posteriormente como professor de matemática percebi que são enormes as dificuldades de aprendizagem dos alunos com relação ao conteúdo de equação polinomial do segundo grau. Por isso, o objetivo principal deste trabalho é mostrar as diferentes formas de resolver uma equação polinomial na importante tarefa de ensinar matemática, e mais especificamente, a Equação polinomial do 2º Grau, promovendo uma aprendizagem eficaz, em que haja maior interação e cumplicidade entre o professor e o aluno. Neste processo, o docente auxiliará os alunos em seus questionamentos, promovendo a retomada e a aquisição de saberes com suas intervenções propícias e colaborando no encontro de respostas às suas indagações. Para isso apresentamos diferentes métodos de resolução da equação polinomial do 2º grau elaborados ao longo da história e conhecidos por nós, e junto a Metodologia da Resolução de Problemas. Esta pesquisa foi pensada aos alunos do 9° ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Jornalista Rômulo Maiorana, na qual desenvolvo minhas atividades profissionais há mais de 20 anos. Assim, Acreditamos que ao executarem a proposta, os alunos conseguirão resolver de diversas formas uma equação do segundo grau e não ficar restrito a uma maneira de resolução.

Foi pensando assim que utilizamos a Metodologia de Resolução de Problemas, para a aprendizagem deste conteúdo. Procuramos envolver o aluno de forma que este se sinta responsável e atuante, além do que, estes métodos o levam a aprender, realizando suas atividades e desenvolvendo sua autonomia e adquirindo interesse pelo conteúdo e pela disciplina. Como o público alvo são adolescentes, estes poderão enfrentar dificuldades na implementação desta nova metodologia, pois estão acostumados com aulas expositivas, porém são suscetíveis a mudanças. O trabalho traz uma proposta didática a partir das investigações observadas, mostrando várias formas de resolução que incentive os alunos a estudarem mais a fundo a história da matemática, saindo da superficialidade, e notar o que está por trás desse conteúdo, abrindo portas para outras possibilidades de resolução. Ressalto que esse assunto está em consonância com o conteúdo desenvolvido por toda a rede de ensino da Secretaria de Educação do Estado do Pará.

1.3 Resumo da estrutura do trabalho

O primeiro capítulo é constituído pela Introdução, onde far-se-á uma apresentação do tema, abordando a justificativa pessoal e acadêmica para a escolha da temática, além dos objetivos, a problemática e a metodologia usado neste trabalho. No segundo capítulo apresenta-se o Referencial Teórico que foi construído a partir de uma revisão bibliográfica, junto aos métodos de resolução da equação polinomial do segundo grau que abordam a temática. Uma breve exposição histórica das Equações do $2^{\underline{o}}$ grau, observando sua relevância e sua classificação.

No terceiro capítulo será realizada uma breve exposição do conteúdo de equações de segundo grau mostrando os métodos geométricos de grande relevância para o estudo do tema, procurando verificar tanto a abordagem histórica quanto os métodos de resoluções expostos com o objetivo de analisar as orientações pedagógicas presentes nesses casos.

No quarto capítulo, mostra-se de maneira breve a elaboração de questões que trabalham a temática equação polinomial do segundo grau, vendo os problemas clássicos usados em livros didáticos, métodos de resolução com um breve comentários na solução apresentada de acordo com os parâmetros curriculares nacionais (1998). Observa-se também os exemplos de questões que envolvem máximo e mínimo na solução de tais problemas.

Esta pesquisa é finalizada no quinto capítulo dedicado às considerações finais, dando ênfase aos objetivos almejados de propor uma forma diferenciada de trabalhar equação polinomial do segundo grau visando tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, atraente e de fácil entendimento. Fazendo com que aluno e professor construam esse conhecimento juntos. Por fim, o trabalho trará uma proposta didática partindo das investigações feitas, propondo um método que incentivaria os alunos estudarem mais a fundo a história por trás desse conteúdo que é de suma importância.

1.4 Um breve relato da importância da equação polinomial de segundo grau

No estudo de matemática, uma equação quadrática ou equação polinomial do segundo grau é uma equação polinomial de grau dois. A forma geral deste tipo de equação é: $ax^2 + bx + c = 0$, em que x é uma variável, sendo a, b e c constantes, com $a \neq 0$

(caso contrário, a equação torna-se linear (equação de primeiro grau). As constantes a, b e c, são chamadas respectivamente de coeficiente quadrático, coeficiente linear e coeficiente constante ou termo livre. A variável "x" representa um valor a ser determinado, e também é chamada de variável ou incógnita. O termo "quadrático"vem de *quadratus* que em latim significa quadrado. Equações quadráticas podem ser solucionadas por fórmula resolutiva, soma e produto, completamento de quadrados e etc... Além do uso de gráficos, da aplicação do método de Newton ou do uso de uma fórmula. Um uso frequente das equações polinomiais do segundo grau é em modelos simples de cálculo das trajetórias de projéteis em movimento. A equação do 2º grau está presente em inúmeras situações cotidianas, na Física ela possui um papel importante na análise dos movimentos uniformemente variados (MUV), pois em razão da aceleração, os corpos variam a velocidade e o espaço em função do tempo, a expressão que relaciona o espaço em função do tempo é dada pela expressão $S = S_0 + V_0t + \frac{(at^2)}{2}$, onde a: aceleração, S: espaço, V: velocidade e t: tempo. As aplicações variam aos inúmeros casos particulares, seja como uma técnica para resolver problemas mais avançados, para encontrar a raíz de uma Equação Biquadrada, sub tópico do estudo de equação do segundo grau ou até mesmo para usar como ferramenta no cálculo de um projetil, incluindo neste caso a descrição de uma parábola. Inúmeros trabalhos de graduação abordam essa temática, visando sempre um novo olhar, objetivando o ensino, novas abordagens neste conteúdo visando sempre clarear, facilitar, encontrar a melhor maneira de explicitar este conteúdo, pois ensinar é estimular o pensamento independente, é desenvolver o raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Deste modo, os professores devem procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, a concentração, a atenção e o raciocínio lógico, mesmo diante de um quadro atual hoje bem contrário a todo o exposto.

Mas porque é chamada de equação? Equação é uma expressão algébrica que contém uma igualdade. Ela foi criada para ajudar as pessoas a encontrarem soluções para problemas nos quais um número não é conhecido. Sabendo que a soma de dois números consecutivos é igual a 11, por exemplo, é possível encontrar esses dois números por meio de equações e como identificar uma equação do primeiro grau ou do segundo grau? As equações do primeiro grau possuem apenas um resultado, e as equações do segundo grau apresentam dois resultados e assim por diante. Nas funções, a quantidade de resultados é variável e, por isso, o número desconhecido recebe esse mesmo nome. Assim, com a elaboração deste trabalho tem por finalidade mostrar aos alunos que o estudo de equação do segundo grau no ensino fundamental é de suma importancia e terá reflexos no ensino médio, pois o mesmo aparecerá frequentemente em outros assuntos abordados em todos os tres niveis seguintes.

1.5 História da equação polinomial de segundo grau

Neste tópico será abordado um pouco da história das equações polinomiais do segundo grau e quais foram os povos que contribuíram ao longo do tempo para o seu desenvolvimento. A matemática antiga sempre precisou de base para se desenvolver e para evolução de formas mais avançadas de sociedade é que ela foi se evoluindo. Com o desenvolvimento da agricultura e a necessidade de projetos extensivos dessa natureza era preciso conhecimentos de engenharia, administração desses projetos, comércio, etc. Assim, a origem da matemática em certas partes do Oriente Antigo se deu pela necessidade das atividades ligadas à agricultura e à engenharia. No meio desse contexto surge as equações do segundo grau sem muitas aplicações práticas para época e o primeiro registro desse tipo de equação que se tem notícia foi feito pelos babilônios cerca de 1700 a.C. aproximadamente, feito numa tábua de argila através de palavras. Os babilônios tinham uma álgebra bem desenvolvida para época e resolviam essas equações por métodos semelhantes aos atuais ou pelo método de completar quadrados. Naquela época não se falavam em raízes negativas.

> Os escribas da babilônia nunca poderiam imaginar que um dia os matemáticos inventariam os números negativos. Mas é impressionante a exatidão dos cálculos efetuados por aquele escribas para extrair a raiz quadrada positiva de um número.(GUELLI, 2001, p.10)

Como eles não utilizavam coeficientes negativos, distinguiam as equações em diferentes tipos:

$$a)x^2 + sx = t \qquad b)x^2 + s = sx \qquad c)x^2 = sx + t$$

O caso $x^2 + sx + t = 0$ com s e t positivos obviamente não teria solução. Mesmo não sendo encontrados registros do tratamento desse tipo de equação pelos historiadores matemáticos no Egito, eles suspeitam que os egípcios dominavam alguma técnica de resolução, já que foram encontradas no papiro de *Kahun* (Papiro da 12ª dinastia egípcia 1991-1786 a.C.) uma resolução da equação $x^2 + y^2 = k$, onde k é um número natural e para isso eles usaram uma técnica conhecido na época como Método da falsa posição. Na Grécia, a matemática tinha um cunho filosófico e pouco prático e o como os gregos tinham um gosto natural pela geometria, isso levou essa civilização (500 a 200 a.C.) a resolver problemas matemáticos usando geometria, dentre os quais a solução das equações do segundo grau, uma das técnicas que se tem notícia é o método de Euclides o qual demonstraremos adiante.

> Em sua álgebra geométrica os gregos se utilizavam de dois métodos principais para resolver certas equações simples - métodos das proporções e o método da aplicação de áreas. Há indícios que ambos os métodos se originaram com os pitagóricos.(EVES,2004,p.110)

Diophanto, grande matemático, contribuiu bastante no avanço na busca da resolução de equações do segundo grau ao apresentar uma outra representação para as equações introduzindo alguns símbolos, pois até então a equação e sua solução eram representados em forma discursiva. Pouco se sabe de Diophanto, estima-se que tenha vivido no início da nossa era, não há nada sobre sua nacionalidade, mas como grande algebrista, sua história ecoou por Alexandria na Grécia influenciando vários outras grandes matemáticos.

Na índia as equações polinomiais do segundo grau eram resolvidas também completando quadrados. Esta forma de resolução foi apresentada geometricamente por Al-Khowârizmi, no século IX. Os hindus descartavam as raízes negativas, por serem inadequadas; mas aceitava as raízes irracionais. tinha também uma maneira própria para solução desse tipo de equação puramente algébrica. Na Índia do século XII também se destacam outros grandes matemáticos que contribuíram com os estudos das equações polinomial do segundo grau que são Bhaskara de Akaria e Sridhara. Ambos tem forte influência na atual forma de se resolver equação polinomial.

Durante a Idade Média, no Islam, os árabes tornaram-se patronos da cultura, traduzindo para o Árabe manuscritos hindus e gregos como por exemplo "Os Elementos de Euclides" e o "Almagesto" de Ptolomeu além de vários trabalhos das mais variadas ciências dentre desse inúmeros trabalhos vários eram de astronomia, medicina e filosofia grega, que posteriormente foram traduzidas para o latim e outros idiomas por intelectuais europeus. Em Bagdá foi criada a casa da sabedoria comparável ao antigo Museu de Alexandria, onde encontravam-se mestres como o matemático e astrônomo Mohammed ibu-Musa Al-Khowarizmi que escreveu algumas obras de astronomia, tabelas sobre o astrolábio, relógio do sol, aritmética e álgebra. Estas últimas tiveram papéis importantes na história da Matemática. O livro De numero hindorum que relata a arte hindu de calcular, alguns historiadores relatam que esse livro foi provavelmente baseado numa tradução Árabe de Brahmagupta, e trata de uma exposição completa dos números hindus.

> Ao estudar as obras dos matemáticos hindus traduzidos para a língua árabe, o brilhante matemático Árabe Al-khowarizmi tomou conhecimento dos fantásticos cálculos realizados na Índia. E qual não foi sua surpresa ao verificar que os hindus faziam todos aqueles cálculos utilizando apenas dez símbolos, por sinal bem estranhos (GUELLI, 2001, p.15).

Com a conversão para o latim da obra De numero hindorum contribuiu na Europa, para a divulgação destes numerais que posteriormente vieram a ser chamados de algorismos ou algoritmos, palavras que originalmente deriva do nome do matemático.

Árabe Al-Khowarizmi. Foi com o livro "HisabAl-jabrwa-al-mugabalah" desse brilhante matemático que ficou mais fácil e completo o estudo das equações do segundo grau já que os antigos matemáticos da babilônia resolviam essa equações mas não se preocupavam de explicar o método e os Gregos pro muito tempo preferiram a geometria à álgebra.

Neste livro De numero hindorum Al-Khowarizmi expressa-se inteiramente com palavras, mesmos os números são escritos com palavras em vez de símbolos. O texto contém uma exposição direta e elementar da resolução de equações do segundo grau. Não se sabe os significados certos dos termos Al-jabr e Muqabalah, supõe-se que al-jabr tenha como significado "restauração ou completação" e referese à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação, a palavra Muqabalah tem como significado 'redução ou equilíbrio" e refere-se ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação. No livro Al-jabr o matemático Al-Khowarizmi separou e classificou as equações polinomiais do segundo grau da seguinte maneira:

I. Quadrado igual a raízes

$$x^2 = bx \qquad \text{ou} \qquad ax^2 = bx$$

II. Quadrados e números iguais a raízes

$$x^2 + c = bx \qquad \text{ou} \qquad ax^2 + c = bx$$

III. Raízes e números iguais a quadrados

$$bx + c = x^2 \qquad \text{ou} \qquad bx + c = ax^2$$

IV. Quadrados e raízes iguais a números

$$x^2 + bx = c \qquad \text{ou} \qquad ax^2 + bx = c$$

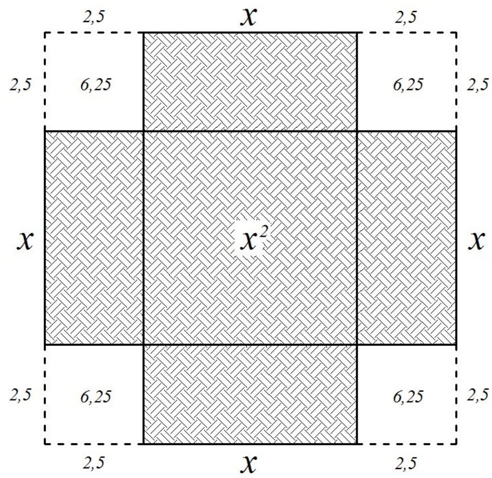
Vejamos um exemplo de como o brilhante matemático Árabe resolvia as equações do segundo grau usando somente palavra.

Dada a equação do segundo grau: .Veja que somando em primeiro lugar a área do quadrado de lado com dez raízes, encontraremos trinta e nove. Portanto devemos determinar a metade das raízes e multiplicar essa metade por si mesma, o que dá vinte e cinco. Vinte e cinco somado ao quadrado e às dez raízes resulta sessenta e quatro. Compreendam, então, que o número que multiplicado por si mesmo dá sessenta e quatro é oito. E se do oito diminuirmos cinco unidades, vamos descobrir que uma raiz vale três unidades.

É obvio que se fossemos passar aos alunos esses método de resolver equações do segundo grau dessa maneira, com a falta de base de nossos alunos, a COVID-19 que nos fez parar um periodo significativo dos estudos e por conta dessa parada esta nos mostrando hoje uma perda significativa que se refletirá nos próximos anos, nossos alunos teriam serias dificuldades de aprendizagem. Mas Isso mostra quão brilhantes eram os matemáticos dos povos antigos. As soluções apresentadas são regras práticas de completar quadrados, aplicadas a exemplos específicos. Al Khowârizmî após expor e resolver as equações demonstrava geometricamente seus resultados através da álgebra de Euclides.

Como exemplo, vamos resolver novamente a equação: $x^2 + 10x = 39$, perceba que ela pode ser representada por um quadrado de lado , e sobre os quatro lados constroem-se retângulos de largura $2,5$ unidades. Para completar o quadrado maior precisamos construir quatro quadrados menores nos cantos da Figura 1, cada um com área igual a $6,25$ unidades. Portanto para completar o quadrado somamos 4 vezes $6,25$ unidades ou seja 25 unidades, obtemos então um quadrado com área total $39 + 25 = 64$. Concluímos que o lado do quadrado maior mede 8 unidades e se subtrairmos 2 vezes $2,5$ unidades, ou seja, 5 unidades, achamos $x = 3$, que é a raiz da equação dada. Veja abaixo a Figura 1 construída com a situação citada.

Figura 1.1: Método de completar quadrado.



Fonte: Guelli, 2001

Já o forma chinesa para a solucionar as equações do segundo grau foi o método fan-fan em 1303 pelo grande matemático chinês do periodo, Chu Shihchieh e apresentou na obra *"Ssu-yuan yú-chien"* que quer dizer precioso espelho dos quatro elementos é uma técnica baseada em aproximações sucessivas de raízes de grande precisão. Na Europa do século XV ao XVII muitos foram os matemáticos que desenvolveram formas distintas de representação e resolução da equação do segundo grau. O matemático François Viéte utilizou-se de simbolismo para representar equações dando um caráter geral, pois não se usava o formalismo atual. Ele representava uma equação do segundo grau da seguinte forma:

$$B\, in\, A\, área + C\, in\, A + D \quad \text{é igual a} \quad 0$$

Nesta mesma época o matemático francês René Descartes (1596-1650) encontrou um modo mais prático para expressar os símbolos de Viéte e diversos matemáticos da época foram descobrindo muitas propriedades das equações. Atualmente usamos a representação $ax^2 + bx + c = 0$ que herdamos dos europeus e a solução fornecida pelos hindus. Este foi um sucinto resumo da história das equações do segundo grau que pode servir como material de apoio para as aulas de matemática sobre este assunto.

1.6 Tipos de equações polinomiais do segundo grau

Agora falaremos da definição e dos tipos de equações do segundo grau. Denomina-se equação do segundo grau, toda função polinomial do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ onde devemos ter $a \neq 0$, pois em caso contrário, teríamos uma equação do primeiro grau da forma $bx + c = 0$. Quando a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ tiver seus coeficientes, $b = 0$ ou $c = 0$ ou ainda $b = c = 0$ dizemos que ela está em sua forma incompleta. Quando a equação tiver a forma $ax^2 = 0$, esse tipo de equação não tem aplicação prática tendo em vista que as raízes sempre serão nulas, são, portanto uma mera formalidade matemática. Ou seja, se o produto de dois números é igual a zero $(a \cdot x^2 = 0)$, existem três possibilidades: $a = 0$; $x^2 = 0$ ou $a = x^2 = 0$. Logo, podemos concluir que as raízes serão $x' = 0$ e $x'' = 0$. Se as equações são da forma $ax^2 + c = 0$, para encontrar suas raízes temos:

$$ax^2 = -c \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad ,$$

logo suas raízes são:

$$x' = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad \text{e} \qquad x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Mas se as equações tem a forma $ax^2 + bx = 0$, para encontrar suas raízes vamos colocá-la na forma fatorada: $x(ax + b) = 0$. Como o produto dos dois números é igual a zero temos o seguinte:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad ax = -b \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

que são as raízes da equação.

A história nos mostra que inúmeros povos tentaram resolver essas equações polinomiais. Os gregos, por necessidade cultural, realizavam demonstrações por meio de construções geométricas, os babilônios dominavam como ninguém a álgebra, os árabes nos mostram um elemento a mais, o conhecimento geométrico. Enfim, definimos o que é uma equação polinomial do segundo grau e sua classificação, ou seja, seus subcasos de incompleta, nos capítulos seguintes vamos dá ênfase aos métodos de resolução das equações completas do segundo grau.

Capítulo 2

Métodos algébricos das equações polinomiais do segundo grau

A álgebra como base fundamental para o desenvolvimento matemático, inicialmente no ensino de equações polinomiais do segundo grau com todas as regras, operações envolvendo diversos assuntos atrelados a este não será fácil ao alunado assimilar. Assim, desejamos que o aluno seja capaz de identificar um método adequado a questão de modo a soluciona-la ante aos vários métodos propostos adiante.

Mostraremos agora diversas formas de encontrar as raízes de equações da forma $ax^2 + bx + c = 0$ fazendo apenas manipulações algébricas e desejamos que os alunos não só tenham referenciais numéricos quando utilizam as variáveis, mas também desejamos que eles sejam capazes de operar com variáveis.

2.1 Método de resolução usual - Bhaskara

No trabalho de Sridhara matemático hindu que viveu entre 850 e 950 a.C. foi a primeira descrição da regra geral para achar as raízes da equação do $2^{\underline{o}}$ grau parece ser encontrada. Foi ele quem enunciou a regra que originou a fórmula atual para a resolução de equações do segundo grau. Após sua descoberta batizou-a como "Fórmula geral para resolução da equação polinomial do segundo grau". Neste periodo havia plena consciência de que números negativos não são quadrados, e de que o número de raízes de uma equação do $2^{\underline{o}}$ grau pode ser 0, 1 ou 2. O matemático indiano Bhaskara também mostra como resolver esse tipo equação da seguinte maneira:

> Multiplique ambos os lados da equação por uma quantidade igual a quatro vezes o coeficiente do quadrado da incógnita; adicione a ambos os lados uma quantidade igual ao quadrado do coeficiente da incógnita; então extraia a raiz quadrada. (Pitombeira, 2004, p.25)

A técnica usada aqui é a de completar o quadrado. Se multiplicarmos a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por $4a$ teremos: $4a^2x^2 + 4abc + 4ac = 0$. Observe que só teremos um trinômio quadrado perfeito se adicionarmos um termo igual a b^2 aos dois lados da equação. Então: $4a^2x^2 + 4abc + 4ac + b^2 = b^2$ ou seja, $(2ax + b)^2 + 4ac = b^2$. Portanto, $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ e isolando a incógnita temos: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que é a fórmula resolutiva de equações do segundo grau.

Sabe-se que hábito de dar o nome de Bhaskara para essa fórmula resolutiva da equação do segundo grau é uma característica somente do ensino brasileiro e que se estabeleceu por volta da década de sessenta. Na literatura internacional não se encontra o nome de Bhaskara para essa fórmula, porque não é adequado, já que problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos atrás, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos o que se tinha era uma receita escrita em prosa, sem uso de símbolos que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos. Bhaskara foi um matemático indiano que nasceu em 1114 e viveu até 1185 ele é considerado um dos mais importantes matemáticos do século XII. No ramo da matemática os seus trabalhos mais conhecidos são Lilavati e Vijaganita que tratam de aritmética e álgebra respectivamente, e contém vários problemas sobre equações lineares e quadráticas. Bhaskara obteve grande reconhecimento pelas suas importantes contribuições para a Matemática. Tanto que em 1207, uma instituição educacional foi criada para estudar o seu trabalho. Em um templo indiano, existe uma inscrição medieval na qual se pode ler:

> Triunfante e ilustre professor Bhaskara cujas importantes realizações são reverenciadas pelos sábios e eruditos. Um talentoso poeta com fama e mérito religioso. Ele é como a crista de um pavão.

Bhaskara morreu aos 71 anos de idade em Ujjain, Índia, em 1185. No entanto até o fim do século XVI não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, pois não se usava letras para representar os coeficientes de uma equação. Essa representação começou a ser feita por François Viéte, matemático francês que viveu entre os séculos XVI e XVII. Mas é claro que não devemos negar a importância nem a riqueza da obra de Bhaskara para matemática.

Podemos fazer uma manipulação com a equação do segundo grau e encontrar uma dedução alternativa, diferente da aplicada por Bhaskara. para encontra a fórmula resolutiva da equação do segundo grau. Para isso devemos fazer o seguinte:

Dividindo-se toda a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por a ,temos que

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Agora subtraindo o termo independente em ambos os lados da equação, temos que:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = -\frac{c}{a},$$

ou seja,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Somando o termo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os membros temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Como o primeiro membro da equação é agora um trinômio quadrado perfeito, fatorando chegamos a:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

logo,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}^2\right)},$$

ou seja,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a formula geral de resolução do trinômio do segundo grau.

2.2 Método da soma e do produto

Quando dividimos toda a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por a temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

e fazendo por definição, usando $s = -\frac{b}{2a}$ e $p = \frac{c}{a}$. Obtemos

$$x^2 - 2sx + p = 0$$

onde representa a solução dada por:

$$x = s \pm \sqrt{s^2 - p}.$$

Essa era a maneira usada dos Babilônios para resolver equações do tipo $x^2 - px = q$, onde a solução era dada por:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

Vejamos um exemplo a seguir:

- Como resolver a equação $2x^2 - 5x + 3 = 0$, usando esse método.

Dividiremos primeiro toda equação por 2 e ficamos com

$$x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{3}{2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 - 2 \cdot \frac{5x}{4} + \frac{3}{2} = 0$$

onde temos que:

$$s = \frac{5}{4} \qquad \text{e} \qquad p = \frac{3}{2}$$

Aplicando na fórmula deduzida temos que:

$$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25 - 24}{16}} \Rightarrow x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$$

Portanto as raízes são:

$$x' = \frac{3}{2} \qquad \text{e} \qquad x'' = 1$$

2.3 Método de Al-Khwarizmi

Mohammed ibu-Musa Al-Khwarizmi (780-850) foi um matemático, astrônomo, geógrafo e historiador. É de seu nome que deriva o termo "algarismo", em português. Al-Khwarizmi escreveu mais de seis livros sobre matemática e astronomia, além disso, também foi responsável pela difusão de obras matemáticas hindu traduzidas por ele, como a obra De número hindorum (Sobre a arte hindu de calcular), onde está muito bem detalhado o sistema de numeração hindu (utilizado hoje), que muitos atribuíram a ele a autoria deste sistema de numeração.

Cabe ressaltar que apenas as raízes positivas eram consideradas, uma vez que os números negativos ainda não eram conhecidos nesta época. Assim, as equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ e $bx + c = 0$ não aparecem nessa classificação, pois não possuem soluções positivas se todos os coeficientes forem positivos. Para a equação $x^2 + 10x = 39$ Al-Khwarizmi traça um quadrado ab para representar x^2, e sobre os quatro lados desse quadrado coloca retângulos c, d, e e f, cada um com largura $2\frac{1}{2}$. Para completar o quadrado maior é preciso acrescentar os quatro pequenos quadrados nos cantos cada um dos quais tem uma área de $6\frac{1}{4}$ unidades. Portanto para "completar o quadrado" somamos 4 vezes $6\frac{1}{4}$ unidades ou 25 unidades, obtendo, pois, um quadrado de área total $39+25 = 64$ unidades (como fica claro no segundo membro da equação). O lado do quadrado grande deve, pois, ser de 8 unidades, de que subtraímos 2 vezes $2\frac{1}{2}$ ou 5 unidades, achando $x = 3$. O método geométrico utilizado por Al-Khwarizmi (conhecido atualmente como método de completar quadrados) na resolução de equações polinomiais do segundo grau, se utilizado em sala de aula, oportuniza uma aprendizagem mais significativa do conteúdo, pois exige que o aluno transite entre as representações algébricas e geométricas ao resolver a equação do segundo grau.

2.4 Método alternativo

Em toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, a expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de descriminante da equação, pois quando temos $b^2 - 4ac > 0$ a equação apresenta duas raízes reais e diferentes, quando temos $b^2 - 4ac < 0$ a equação não apresenta raízes reais e quando $b^2 - 4ac = 0$ temos apenas uma raíz real.

Seja a expressão: $\Delta = b^2 - 4ac$. Então $b^2 - \Delta = 4ac$ e fatorando obtemos que

$$(b \pm \sqrt{\Delta})(b \mp \sqrt{\Delta}) = 2a \cdot 2c,$$

portanto:

$$\frac{(b \mp \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{2c}{(b \pm \sqrt{\Delta})}$$

e multiplicando por (-1) temos:

$$\frac{(-b \mp \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{2c}{(-b \pm \sqrt{\Delta})}$$

ou seja

$$x = \frac{2c}{(-b \pm \sqrt{\Delta})}$$

que é a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Vamos aplicar a fórmula encontrada para resolver a equação $x^2 - 5x + 6$.

Como $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$ e $\Delta = 1$, temos que:

$$x = \frac{2 \cdot 6}{(5 \pm \sqrt{1})}$$

Logo

$$x = \frac{12}{(5 \pm 1)}$$

$$x' = 2 \quad \text{e} \quad x'' = 3$$

portanto as raízes são: $x' = 2 \quad \text{e} \quad x'' = 3$

2.4.1 Demonstração da fórmula resolutiva

Multiplicando toda a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por $4c$, temos:

$$4acx^2 + 4cbx + 4c^2 = 0.$$

Adicionando $(-b^2x^2)$ em ambos os lados da equação chegamos a

$$4acx^2 + 4cbx + 4c^2 - b^2x^2 = -b^2x^2.$$

Colocando o fator x^2 em evidência no primeiro membro obtemos:

$$-x^2(b^2 - 4ac) + 4cbx + 4c^2 = -b^2x^2.$$

Colocando tudo para o primeiro membro temos:

$$-x^2(b^2 - 4ac) + 4cbx + 4c^2 - b^2x^2 = 0.$$

e fatorando encontramos que :

$$-x^2(b^2 - 4ac) + (bx + 2c)^2 = 0.$$

logo

$$\pm x\sqrt{b^2 - 4ac} = (bx + 2c).$$

ou

$$\pm x\sqrt{b^2 - 4ac} - bx = 2c \quad \Rightarrow \quad x\,(\pm\sqrt{b^2 - 4ac} - b) = 2c$$

Assim concluímos que a solução será:

$$x = \frac{2c}{(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})}.$$

2.5 Método do quadrado e da diferença

Observe as seguintes expressões, onde x' e x'' são as raízes de uma equação. Assim temos que

$$(x' + x'')^2 = (x')^2 + 2x'x'' + (x'')^2 \quad \text{e} \quad (x' - x'')^2 = (x')^2 - 2x'x'' + (x'')^2$$

Subtraindo membro a membro a primeira identidade da segunda obtemos a seguinte identidade:

$$(x' + x'')^2 - 4x'x'' = (x' - x'')^2.$$

Podemos agora resolver qualquer equação do segundo grau seguindo o seguinte procedimento:

Sabendo que $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ e $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$ e de posse desses dados podemos calcular a diferença entre as raízes e através de um sistema de equações do primeiro grau teremos a solução. Em outras palavras temos que $s^2 - 4p = d^2$, podemos formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' - x'' &= d \\ x' + x'' &= s \end{cases}$$

.

Somando as duas equações temos:

$$2x' = d + s \Rightarrow x' = \frac{d+s}{2} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{d-s}{2}.$$

portanto

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2.6 Método de Viéte

Figura 2.1: François Viète (1540-1603)

Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te

François Viète foi um matemático francês que nasceu em Fontenay no ano de 1540 e morreu em Paris no ano de 1603. Na sua juventude, estudou e exerceu Direito e tornou-se membro do Parlamento da Bretanha. Não era, portanto, um matemático por profissão; porém o seu lazer era dedicado à Matemática, dentro da qual desempenhou um papel central na transição da época Renascentista para a Moderna. Fez contribuições à Aritmética, Álgebra,Trigonometria e Geometria, mas, sem dúvida, foi na Álgebra que ocorreram suas mais importantes contribuições, pois aqui Viète chegou mais próximo das idéias modernas.

Em sua obra foi encontrada, pela primeira vez, em Álgebra, uma distinção clara entre o conceito de parâmetro e a idéia de uma quantidade desconhecida (incógnita). Viète utilizou uma vogal para representar uma quantidade desconhecida ou indeterminada e uma consoante para representar uma grandeza ou um número supostamente conhecido ou dado. Na época de Viète a Álgebra árabe já havia sido aperfeiçoada, tanto pela resolução das equações cúbicas e quárticas como por um uso parcial de símbolos. Viète teve uma participação muito efetiva na renovação do simbolismo e na resolução das equações quadráticas, cúbicas e quárticas. Viète desenvolveu novos métodos de solução, percebeu algumas relações entre coeficientes e raízes de uma equação, embora seu trabalho tivesse ficado tolhido por sua recusa em aceitar coeficientes ou raízes negativas.

Vamos descrever o método de Viéte para resolução de equações do segundo grau. Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Fazendo, $x = m + n$, onde m e n são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, temos:

$$a(m+n)^2 + b(m+n) + c = 0$$

E, desenvolvendo o produto notável, obtemos:

$$a(m^2 + 2mn + n^2)^2 + b(m+n) + c = 0$$

Agora, escrevendo essa igualdade como uma equação na incógnita n, temos o seguinte:

$$an^2 + (2am + b)n + am^2 + bm + c = 0$$

Viéte transformou essa equação numa equação incompleta do segundo grau, anulando o coeficiente de n, isto é, escolhendo $m = -\frac{b}{2a}$ e substituindo na equação:

$$an^2 + a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0.$$

Assim, temos:

$$an^2 + \frac{b^2}{4a} + -\frac{b^2}{2a} + c = 0$$

ou,

$$4a^2n^2 + b^2 - 2b^2 + 4ac = 0.$$

Agora, somando $b^2 - 4ac$ em ambos os membros encontramos:

$$4a^2n^2 = b^2 - 4ac,$$

,ou seja,

$$n^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

Logo,

$$n = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Como $x = m + n$, temos que:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau. Portanto, se estamos querendo saber quais são as raízes da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ usando o método de Viéte, basta fazer $x = m + n$ e substituir na equação dada, ou seja:

$$(m + n)^2 - 3(m + n) + 2 = 0$$

Desenvolvendo, teremos

$$n^2 + (2m - 3)n + m^2 - 3(m + n) + 2 = 0$$

Fazendo $m = \frac{3}{2}$, para anular o coeficiente de n, temos que:

$$n^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = 0$$

segue que

$$n^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow n = \pm\frac{1}{2}$$

Como $x = m + n$ vem que: $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$. Portanto as raízes são $x' = 2$ e $x'' = 1$.

O método de Viète possibilita uma demonstração da fórmula de Bhaskara, de fácil compreensão e sem grandes artifícios. Percebemos que os alunos podem chegar à solução de uma equação completa do segundo grau sem que seja necessário utilizarem a fórmula de maneira decorada como tantas vezes acontece. Sugerimos que o método de Viète seja utilizado como acessório do conteúdo normalmente dado na abordagem de equações polinomial do 2° grau.

2.6.1 Método de substituição de variáveis

Usando o método de Viéte e fazendo uma substituição de variável mais adequada nos permitirá encontrar a fórmula resolutiva com mais rapidez.

Sendo a equação do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, vamos substituir nessa equação o valor de x por $y - \frac{b}{2a}$ que nos leva a seguinte expressão:

$$a\left(y - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(y - \frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

daí

$$a\left(y^2 - \frac{yb}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(y - \frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

Consequentemente,

$$ay^2 - yb + \frac{b^2}{4a} + by - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

ou,

$$ay^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0,$$

logo

$$ay^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0,$$

Somando $\frac{b^2}{4a} - c$ em ambos os membros da equação temos que: $ay^2 = \frac{b^2}{4a} - c$, ou seja,

$$ay^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

e, por fim,

$$y = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como estamos querendo saber o valor de x, é só substituirmos na equação $x = y - \frac{b}{2a}$. Concluímos que:

$$x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a fórmula resolutiva do trinômio do segundo grau.

2.7 Método de Euler

No século XVII, para solucionar uma equação do segundo grau, Euler, matemático, segundo usou uma estratégia muito comum entre os matemáticos, que é a substituição de variável; Euler utilizou todo seu arcabouço dos seus conhecimentos matrizes, ao utilizar conceitos de sistemas lineares e determinantes. Observe sua demonstração:

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$, e fazendo $x = u + v$ e, elevando ao quadrado ambos os membros, temos $x^2 = (u + v)^2$. Obtemos, assim, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c & = & 0 \\ x - (u + v) & = & 0 \\ x^2 - (u + v) & = & 0 \end{cases}$$

.

Como o sistema é homogêneo, ou seja, seus termos independentes são nulos, usaremos da multiplicação em todas as equações do sistema por x ficando com um novo sistema semelhante ao supracitado:

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx & = & 0 \\ x^2 - x(u + v) & = & 0 \\ x^3 - x(u + v) & = & 0 \end{cases}$$

.

Usando a teoria dos determinantes, Euler sabia que uma das soluções seria a trivial ou nula por se tratar de um sistema homogêneo; a outra só iria existir se o determinante de seus coeficientes fosse igual a zero. Assim, estabeleceu que:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & -(u+v) \\ 1 & -(u+v) & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Resolvendo, ou calculando o determinante, obtemos:

$$a[-(u+v)^2] - b(u+v) - c = 0$$

Daí vem que

$$-au^2 - 2auv - v^2 - bu - bv - c = 0$$

Multiplicando por (-1) toda equação e depois formando uma equação na variável u, temos:

$$au^2 + (2av + b)u + av^2 + bv + c = 0$$

Para transformar a equação anterior em uma equação incompleta em u, Euler usou da seguinte estratégia, $2av + b = 0$, e encontrou o valor $v = -\frac{b}{2a}$. Substituindo-o na equação $au^2 + (2av + b)u + av^2 + bv + c = 0$, obtemos:

$$au^2 + \left[2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right]u + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

que ficou reduzida a

$$au^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0,$$

e, portanto,

$$u^2 = -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a},$$

que é equivalente a

$$u^2 = \frac{-b^2 + 2b^2 - 4ac}{4a^2},$$

ou seja,

$$u = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Substituindo os valores de v e u em $x = u + v$ obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

e as raízes são:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tal método faz uso de um assunto abordado no ensino médio o que inviabiliza a aplicação no fundamental, porem e possível mostrar aos alunos do médio a titulo de informação.

2.8 Método diferencial ou das coordenadas do vértice

Suponhamos a equação polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$, o valor de x pode ser expresso da seguinte forma:

$$x = [f'(x) = 0] = \pm\sqrt{\frac{-f[x_v = (f'(x) = 0)]}{a}},$$

onde,

$$[x_v = (f'(x) = 0)] = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad f(x_v) = f'(x) = 0$$

é o valor que a função assume no ponto $x_v = (f'(x) = 0) = -\frac{b}{2a}$, ou seja,

$$f[x_v = (f'(x) = 0)] = -\frac{\Delta}{2a}$$

Como $x_v = (f'(x) = 0) = -\frac{b}{2a}$ é também chamado de x_v. Ou seja, abscissa do vértice. A ordenada do vértice será

$$f[x_v = (f'(x) = 0)] = -\frac{\Delta}{2a}$$

é da mesma forma igual a y_v que é a ordenada do vértice. Então, a fórmula resolutiva pode ser escrita em função das coordenadas do seu vértice. Logo o valor de x será:

$$x = x_v \pm \sqrt{\frac{-f[x_v = (f'(x) = 0)]}{a}} \quad \text{ou} \quad x = x_v \pm \sqrt{\frac{-y_v}{a}}$$

Portanto, para encontrar as raízes de um trinômio do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$ faremos o seguinte. Encontramos a primeira derivada de $f(x)$, ou seja, $f'(x) = 2ax + b$, se $f'(x) = 0$, temos que: $x_v = -\frac{b}{2a}$. Logo, .

$$x = x_v \pm \sqrt{\frac{-f\left(-\frac{b}{2a}\right)}{a}}$$

Daí, temos

$$x = x_v \pm \sqrt{\frac{-f\left(-\frac{\Delta}{4a}\right)}{a}},$$

ou seja, .

$$x = x_v \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}.$$

Portanto, temos que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2.9 Método Horner ou método de fan-fan

Em 1303, o grande matemático chinês Chu shih-chich, escreveu a obra SsuYuan (precioso espelho dos quatro elementos), uma técnica especial para a resolução da equação polinomial do segundo grau, baseada em aproximações sucessivas, de grande precisão, denominada método fan-fan. Em 1819, o matemático inglês William George Horner reivindicou a descoberta do método, rebatizando-o de método de Horner.

O método consiste em descobrir a solução aproximada da equação original e efetuar a transformação $y = x - x_0$. Suponhamos que com essa transformação obtenhamos a seguinte equação do segundo grau: $y^2+vy+z = 0$. Analisando essa equação transformada, perceba que a medida que a aproximação anterior tende para a solução, $y \to 0$. Logo, nesse intervalo podemos considerar que $y^2 \cong y$ e obtemos a aproximação final $y = -\frac{z}{1-v}$. O processo é repetido até que se encontre uma solução com a precisão que se deseje.

Vamos resolver a equação: $x^2 + 252x - 2592 = 0$, com o método citado acima. A solução positiva dessa equação está entre 19 e 20. Utilizando a aproximação inicial $x_0 = 19$, fazendo a transformação $y_1 = x - 19$ e substituindo na equação original, obtemos

$$(x - 19)^2 + 252(x - 19) - 2592 = 0,$$

portanto

$$y_1^2 + 290y_1 - 143 = 0,$$

e obtemos a aproximação $y_1 = \frac{143}{291} = 0,49$ o que conduz a $x_1 = 19 + \frac{143}{291} = 19,49$. Fazendo-se agora $y_2 = x - 19,49$ obtemos uma nova equação:

$$y_2^2 + 290,98 - 0,66 = 0$$

e a nova aproximação será: $y_2 = \frac{0,66}{291,98} = 0,0022$. A nova aproximação será $x_2 = 19,49 + 0,0022 = 19,4922$. E assim sucessivamente até a aproximação desejada.

2.10 Método da transformação

Seja o trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$. Se, multiplicamos toda a equação por a toda equação, obtemos: $a^2x^2 + abx + ac = 0$ e fazendo $y = ax$ e $m = ac$ a equação transforma-se em $y^2 + by + m = 0$. Agora vamos fazer a dedução da formula resolutiva: $y^2 + by + m = 0$, segue que $y^2 + by = -m$. Somando $by + b^2$ em ambos os lados da equação temos que:

$$y^2 + by + by + b^2 = -m + by + b^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 2by + b^2 = -m + by + b^2,$$

portanto

$$(y + b)^2 = -m + by + b^2$$

Sabemos que $(y + b + w)^2 = (y + b)^2 + 2(y + b)w + w^2$. Sendo w um parâmetro qualquer. Logo

$$(y + b + w)^2 = -m + by + b^2 + 2yw + 2bw + w^2,$$

ou seja, para eliminar a incógnita no segundo membro da equação acima, é necessário que façamos:

$$2w + b = 0 \Rightarrow w = -\frac{b}{2}.$$

Então,

$$\left(y + b - \frac{b}{2}\right)^2 = -m + b^2 - b^2 + \frac{b^2}{4} \quad \text{e} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - m,$$

sendo o valor de y igual a:

$$y = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{-m + \frac{b^2}{4}}$$

Finalmente, como $y = ax$ e $m = ac$, substituindo esses valores na equação anterior, ficamos com:

$$ax = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{-ac + \frac{b^2}{4}} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{-ac + \frac{b^2}{4}} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a fórmula resolutiva da equação do segundo grau.

Capítulo 3

Métodos não algébricos de resolução das equações polinomiais de segundo grau completas

Mostraremos agora diversas maneiras de encontrar as raízes de equações da forma $ax^2 + bx + c = 0$ através de construções geométricas utilizando apenas régua e compasso, pelos métodos de completar quadrados, usando métodos gráficos e por fim usando técnicas de aproximação de raízes. Portanto desejamos que os alunos conheçam as relações que existem entre a álgebra e a geometria na resolução das equações polinimiais do segundo grau.

3.1 Métodos gráficos

São métodos bastante eficientes, pois, além de fazer o aluno colocar em prática seu aprendizado sobre construção de gráficos e resolução de sistemas, é possível a visualização do conjunto solução procurado. Para este tipo de método, o professor pode usar algum tipo de programa computacional que construa gráficos, tornando suas aulas mais dinâmicas.

3.1.1 Método cartesiano

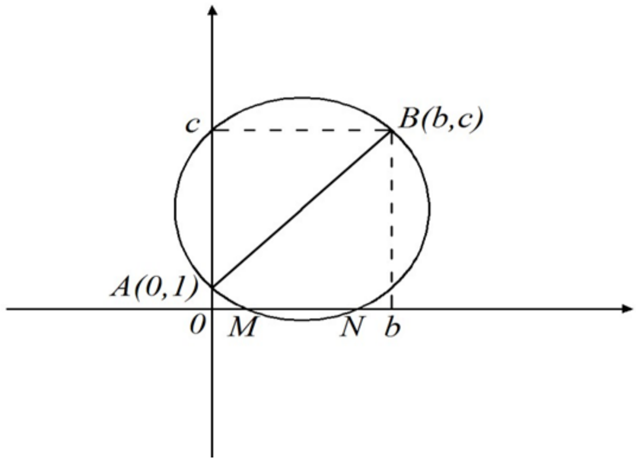
O método que apresentaremos foi demonstrado no século XVIII pelo inglês Sir John Leslie, em *Elements of Geometry*.

Seja resolver a equação $x^2+bx+c=0$. Sobre o sistema de coordenadas cartesianas, marquemos os pontos: $A(1,0)$ e $B(b,c)$. Construímos um círculo de diâmetro $\overline{AB}$. Os pontos que o círculo tocar o eixo da abscissa serão as raízes da equação dada. Ou seja, a equação da circunferência construída é dada por:

$$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c+1}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c+1}{2}-1\right)^2$$

e quando $y=0$ tem-se $x^2=bx+c^2$. Vejamos a visualização geométrica do método apresentado acima.

Figura 3.1: Gráfico do método cartesiano



Fonte: Revista do professor de matemática, janeiro de 2006

3.2 Método de Descartes

Figura 3.2: René Descartes (1596 - 1650)

Em 1637 o francês René Descartes desenvolveu um método geométrico para a obtenção da solução positiva da equação polinomial do segundo grau. No apêndice *La Géométrie* de sua obra *O discurso do método*, René Descartes resolveu equações do tipo: $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$. Vamos usar o método para resolver cada uma das equações citadas.

Começaremos com a equação do tipo $x^2 = bx + c^2$. Este método consiste em traçar um segmento $\overline{LM}$ de comprimento c e em L traça-se uma perpendicular de comprimento $\frac{b}{2}$. Com centro em N constrói-se um círculo de raio $\overline{Ln}$ e traça-se a reta passando por M e N que corta o circulo no ponto P até interceptar o ponto O. O segmento $\overline{OM}$ é a solução positiva da equação. Com efeito, no triângulo retângulo MLN, da figura abaixo temos que:

$$(NM)^2 = (NL)^2 + (LM)^2$$

Como $NL = \frac{b}{2}$ e $LM = c$, se $\overline{OM} = x$, e sabendo que $NL = ON$, já que são raios da circunferência, e $OM = ON + NM$ temos que:

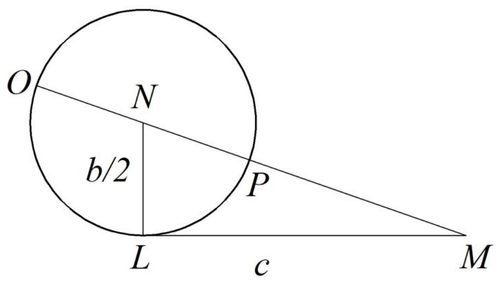
$$\left(x - \frac{b}{2}\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2,$$

que implicará em

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2},$$

que é a raiz positiva da equação dada. Sabemos que a outra raiz é $-\overline{PM}$, todavia essa raíz não foi considerada por Descartes na época.

Figura 3.3: Figura do método de Descarte



Fonte: Revista do professor de matemática, 2006

Vamos agora resolver a equação da forma $x^2 = c^2 - bx$. Para tal, usaremos a Figura 3.3 na qual podemos destacar que: $PM = MN - NP$ e também $MN = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$. Por construção, temos que $NP = \frac{b}{2}$. Portanto,

$$PM = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2} - \frac{b}{2} \Rightarrow PM = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2},$$

ou seja, a raiz será:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}.$$

Como na época Descartes não considerava a raiz negativa, ele usava a seguinte estratégia: se a equação fosse da forma $x^2 = bx + c^2$, ele usava a fórmula

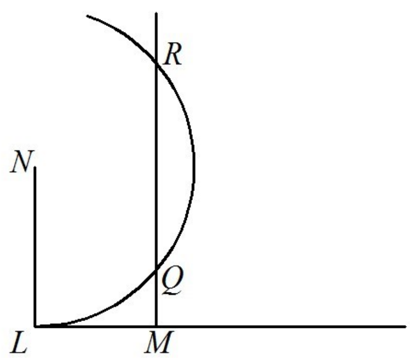
$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}.$$

Mas, se fosse da forma $x^2 = c^2 - bx$, ele aplicava a seguinte fórmula:

$$x = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}.$$

Caso a equação tivesse o formato $x^2 = bx - c^2$, a estratégia seria a seguinte: traçava-se um segmento LM de medida c, em L, levantava-se um segmento NL, de medida $\frac{b}{2}$, e em M levantava-se uma paralela a NL. Com centro em N e raio LN constrói-se um círculo; nas intersecções do círculo, com a reta que passa por M que é paralela à LN marcam-se os pontos Q e R. O valor de x procurado, neste caso, pode ser MQ ou MR porque pode ser expresso de duas maneiras. Veja como ficaria a figura da situação citada:

Figura 3.4: Figura do método de Descarte



Fonte: Revista do professor de matemática, 2006

Vejamos porque o valor da raiz pode ser a medida do segmento MQ ou a medida do segmento MR. Na figura abaixo, temos que:

$$MR = MZ + ZR$$

Por construção, temos $MZ = NL = \frac{b}{2}$. Como o triângulo RZN é retângulo em Z, usando o teorema de Pitágoras temos que:

$$(NR)^2 = (NZ)^2 + (ZR)^2 \Rightarrow (ZR)^2 = (NR)^2 - (NZ)^2,$$

Logo,

$$(ZR) = \sqrt{(NR)^2 - (NZ)^2}.$$

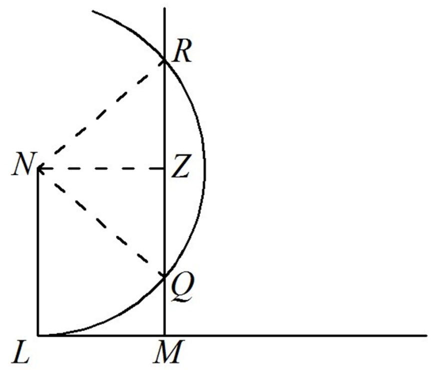
Como NR é o raio da circunferência, portanto $NR = NL = \frac{b}{2}$ e também que $NZ = LM = c$. Então,

$$(ZR) = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (c)^2} \Rightarrow (ZR) = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4}\right) - c^2} \text{ e } (MR) = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2},$$

ou seja, a raiz da equação será:

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$$

Figura 3.5: Figura do método de Descarte



Fonte: Revista do professor de matemática

Para a outra raiz ser MQ, temos:

$$MQ = MZ - ZQ.$$

Como vimos anteriormente, $MZ = \frac{b}{2}$ e $NZ = c$. Assim, temos que

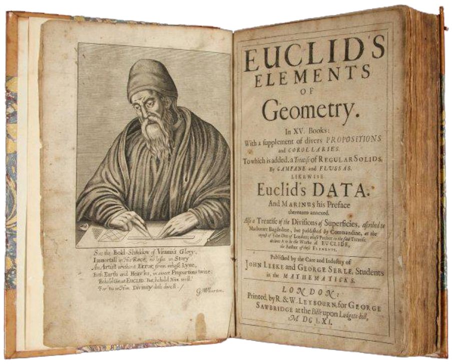
$$(NQ)^2 = (NZ)^2 + (ZQ)^2 \Rightarrow (ZQ)^2 = (NQ)^2 - (NZ)^2$$

já que o triângulo NZQ é retângulo em Z. Substituindo as medidas dos segmentos na relação, encontramos que:

$$(ZQ)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - (c)^2 \Rightarrow ZQ = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (c)^2}$$

Portanto, a medida do segmento ZQ é o valor da raíz positiva da equação dada. Descartes forneceu as duas raízes porque são positivas.

3.3 Métodos geométricos de Euclides



Fonte:https://sites.google.com/site/matematicainicio/home/os-elementosjunho2023

Seja resolver a seguinte equação $x^2+bx = b^2$. Inicialmente, traçamos uma quadrado de lado e unamos o ponto c ao ponto médio do lado oposto definindo o ponto E. Com um compasso centrado em E e com EC como medida encontramos o ponto F localizado no prolongamento de AB. O valor de BF é uma raiz da equação dada.

De fato, se observarmos a Figura 8, veremos que o valor de BF é dado por:

$$BF = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{b}{2}$$

Assim

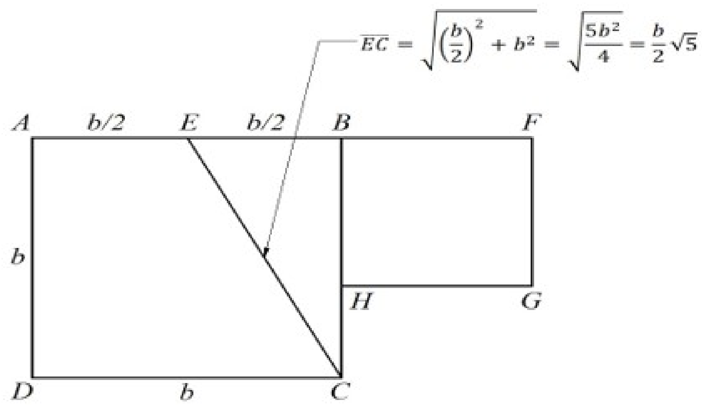
$$BF = \sqrt{\left(\frac{5b^2}{4}\right)} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Ou, ainda, raciocinando de outra forma, temos que:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2,$$

onde $x = -\frac{b}{2} \pm \frac{b}{2}\sqrt{5}$ são as raízes da equação dada.

Figura 3.6: Figura do método geométrico de Euclides

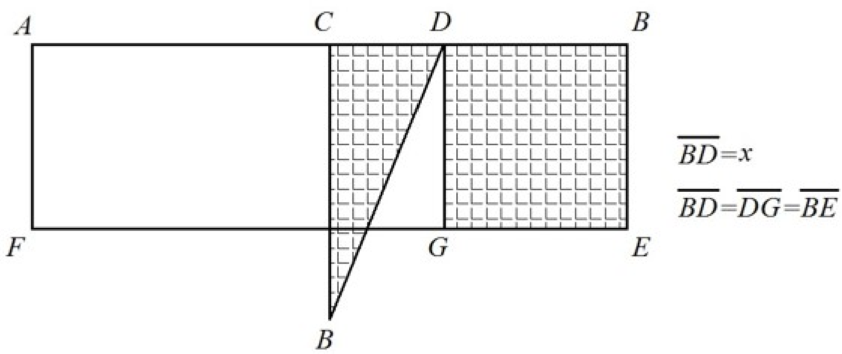


Fonte: Revista do professor de matemática

Se a equação for da forma $bx - x^2 = c$, que é equivalente a equação $bx = x^2 + c$, Euclides sugeria o seguinte: tracemos o segmento AB e o dividamos ao meio no ponto C. Em seguida, tracemos o segmento CP perpendicular a AB cujo comprimento é igual a $\sqrt{c}$ e unamos o ponto P ao ponto D de modo que $PD = \frac{b}{2}$. Construímos o quadrado $DBEG$ cujo lado é uma raiz da equação dada.

Podemos completar também o retângulo $ABEF$ de modo a visualizar melhor a construção com a equação dada.

Figura 3.7: Figura do método geométrico de Euclides



Fonte: Revista do professor de matemática

Observando a construção acima, podemos concluir que a área do retângulo $ABEF$ é igual a bx e a área do quadrado $DBEG$ é igual a x^2. Logo, o retângulo $ADGF$ tem área igual a c. Se o segmento DB é igual a X, então o segmento CD é igual a $\frac{b}{2} - x$ e, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo, temos:

$$\left(\frac{b}{2}-x\right)^2+(\sqrt{c})^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

E, resolvendo, obtemos:

$$\left(\frac{b}{2}-x\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2-c \Rightarrow \frac{b}{2}-x=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$$

Portanto,

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c} \Rightarrow x=\frac{b}{2}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

3.4 Método da falsa posição dupla

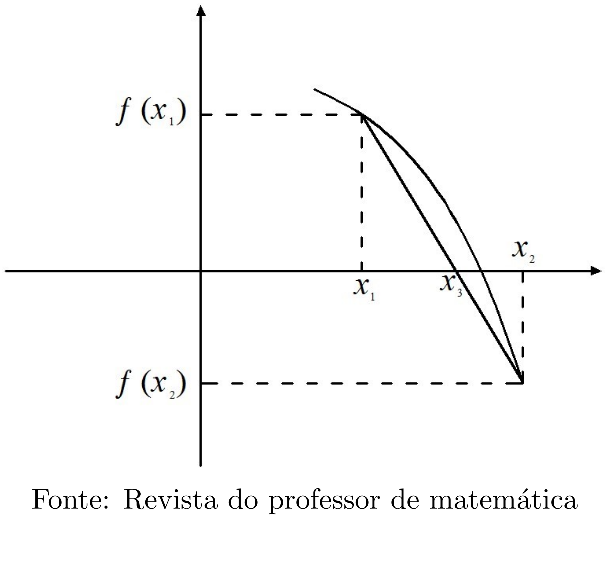
O "método da falsa posição dupla" constitui-se como um método bastante antigo de aproximação de raiz de uma equação qualquer. Conhecido como *regula duorum falsorum*, é possível ser aplicado até as equações transcendentais. O método provavelmente se originou na China, percorreu a Índia, a Arábia e finalmente chegou até nós.

Em notação moderna temos:

$$x_3=\frac{x_e f(x_1)-x_1 f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)},$$

onde x_1 e x_2 são as raízes por falta ou por excesso e x_3 é uma aproximação melhor. O processo pode ser repetido indefinidamente até obter-se a precisão requerida. No gráfico abaixo, sabendo que, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, e fazendo $f(x_3)=0$ chegamos a:

Figura 3.8: Gráfico do método da falsa posição dupla



Fonte: Revista do professor de matemática

Segundo Garbi (2007), os egípcios não sabiam resolver por nossos métodos nem mesmo as equações do primeiro grau e é claro que eles não adotavam simbologia algébrica moderna, já que foi inventada há poucos séculos. Entretanto, usavam um artifício muito parecido com o citado acima para encontrar raízes de equações e que veio a ser chamado de "Regra da Falsa Posição". Vejamos um exemplo: qual é o número que, somado à sua terça parte, é igual a 16?

Para a resolução da questão dada acima, e utilizando a *Regra da Falsa Posição*, eles faziam uma hipótese inicial a respeito do número e verificava o que ocorria. Suponhamos que, neste caso que o resultado fosse 6. Ora, 6 somado com sua terça parte dá 8, exatamente a metade dos 16 que deveríamos encontrar. Todavia o número procurado é o dobro e 8. Ou seja, 16. Era uma forma legítima, mas tornava um problema de fácil solução muito difícil de se resolver.

Capítulo 4

Resolução de problemas de equações polinomiais do segundo grau

Neste capítulo abordaremos algumas aplicações das equações polinomial do segundo grau e falaremos resumidamente sobre a resolução de problemas desse tipo de equações segundo os parâmetros curriculares nacionais como também faremos um breve comentário em algumas questões sobre as estratégias de resolução de problemas segundo Polya no seu livro "*A Arte de Resolver problemas*".

O método de resolução desenvolvido professor Georg Polya é uma pratica educacional no processo ensino aprendizagem de matemática que possibilita ao professor e ao aluno desenvolver novas habilidades no intuito de fortalecer pensamento matemático. E dessa forma superar obstáculos e encontrar uma solução que resolva o problema, onde o professor é o facilitador.

Etapas	Questionamentos
Compreender o Problema	O que se pede no problema? Quais os dados e as condições do problema? É possível estimar a resposta?
Elaborar um plano de ação	Qual é o plano para resolver o problema? Que estratégia você tentará desenvolver? Você se lembra de um plano semelhante que pode ajudá-lo a resolver este? Tente resolver problemas por partes.
Executar o plano	Execute o plano elaborado, verificando passo a passo. Efetue todos os cálculos indicados no plano.
Rever a solução	Examine se a solução obtida está correta. Existe outra maneira de resolver o problema? É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

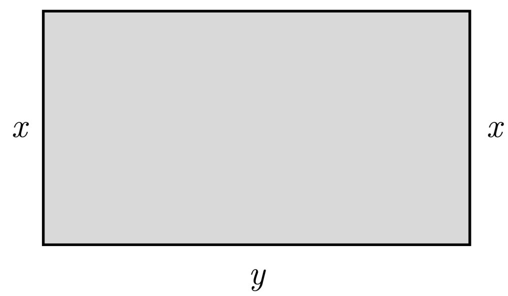
As perguntas apresentadas como associadas a cada uma das etapas servem apenas como um indicativo da habilidade que você, como professor no papel de orientador/motivador, deverá desenvolver, que é a habilidade de desafiar e motivar o aluno por meio de "provocações interrogativas". Dessa forma poderá alcançar os objetivos relacionados à resolução de problemas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais trazem as equações do segundo grau dentro do bloco Números e operações, e orienta que o docente procure apresentá-lo através de situações-problema, para que proporcione ao aluno uma melhor compreensão deste conteúdo. Segundo os PCN Brasil (1998, p.84) é fundamental "[...] a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da 'sintaxe' (regras para resolução) de uma equação". Portanto, percebemos que, quando conhecemos as aplicações desse conteúdo podemos criar situações-problema, inserindo as variáveis e aplicando os nossos conhecimentos por meio das regras, e assim teremos um resultado mais satisfatório e significativo, pois as fórmulas passarão a ter sentido nas resoluções. Vejamos algumas situações- problema onde podemos usar nossos conhecimentos sobre equações do segundo grau.

4.1 Questões resolvidas e comentadas de equação polinomial do segundo grau

Problema 1:

(Adaptado GUELLI, 1992, p. 07) João possui um terreno em forma retangular com $600\,m^2$. Sabendo que com $70\,m$ de arame são suficientes para cercar três lados do terreno. Qual é o perímetro desse terreno?



Solução do problema: pode ser 100 ou 110

Explicação passo-a-passo:

Se um lado for 15 e o outro 40

$$\begin{aligned} 15 \times 40 &= 600 \\ 15 \times 2 \ \text{ lados} &= 30 \\ 40 \times 2 \ \text{ lados} &= 80 \\ 80 + 30 &= 110 \end{aligned}$$

Se pegar os 2 lados de 15 mais o $40 = 2 \times 15 + 40 = 70$

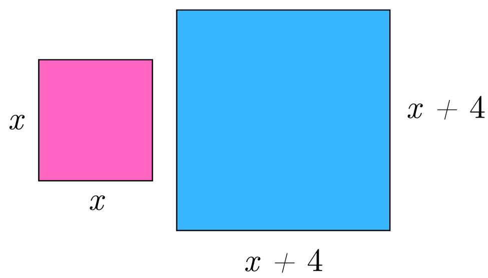
Se um lado for 20 e o outro 30

$$\begin{aligned} 20 \times 30 &= 600 \\ 20 \times 2 \ \text{ lados} &= 40 \\ 30 \times 2 \ \text{ lados} &= 60 \\ 60 + 40 &= 100 \end{aligned}$$

Se pegar os 2 lados de 20 mais o $30 = 2 \times 20 + 30 = 70$

Problema 2:

(Adaptado GUELLI, 1992, p. 47) Juliana possui dois depósitos de materiais de construção. O formato dos terrenos é quadrado e juntos ocupam uma área de $296\,m^2$. O lado de um dos terrenos tem $4\,m$ a mais que o outro terreno. Quanto mede o lado do terreno maior?



Solução do problema:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A^2 \\ A &= x^2 + (x+4)^2 \end{aligned}$$

Como a área dos dois quadrados é $296\,m^2$ temos que:

$$\begin{aligned} 296 &= x^2 + x^2 + 4x + 16 \\ 296 &= 2x^2 + 4x + 16 \\ x^2 &+ 4x - 140 = 0 \end{aligned}$$

logo, aplicando a fórmula resolutiva temos que $x = 10$.

Problema 3:

Andrew comprou algumas garrafas de um bom vinho por 540 reais. Por ter obtido um desconto de 15 reais no preço de cada garrafa, ele conseguiu comprar 3 garrafas a mais do que previra originalmente. Quantas garrafas de vinho Andrew comprou?

Solução do problema:

Vamos chamar o preço inicial de cada garrafa de y e Andrew compraria x garrafas, pagando um total de $x \cdot y = 540$ reais. Tendo obtido o desconto, o preço da garrafa passou a ser $y - 15$ e, com isto, ele conseguiu comprar $x + 3$ garrafas pelo mesmo valor. Portanto

$$(y - 15) \cdot (x + 3) = 540$$

Como podemos escrever $y = \frac{540}{x}$, temos que

$$\left(\frac{540}{x} - 15\right) \cdot (x + 3) = 540$$

Desenvolvendo e simplificando chegamos ao trinômio $x^2 + 3x - 108 = 0$, cujas raízes são $x' = -12$ e $x'' = 9$. Como o preço não pode ser negativo, concluímos que $x'' = 9$ é a solução procurada. Assim, Andrew comprou 12 garrafas de vinho por 540 reais e cada garrafa custou 45 reais.

Esse tipo de problema mostra ao aluno a importância se estudar esse tipo de conteúdo, os Parâmetros Curriculares Nacionais observam que:

É evidente que este procedimento deve proporcionar discussões entre os resultados encontrados e o problema proposto, pois é importante que o aluno seja estimulado a pensar, a refletir sobre o que está fazendo e não apenas executar de forma mecânica uma situação, visto que assim o conteúdo perderá o sentido para o aluno. Vejamos outro problema onde podemos usar as equações do segundo grau.

Problema 4:

Três homens, A, B e C, trabalhando juntos, realizam uma tarefa em x horas. Se trabalhassem sozinhos, A executaria a tarefa em $x + 1$ horas; B, em $x + 6$ horas; C, em $2x$ horas. Calcule x.

Solução do problema:

Vamos fazer o cálculo do trabalho realizado por cada um deles em uma hora. Temos que em uma hora, A, B e C, trabalhando sozinhas fariam $\frac{1}{(x+1)}$, $\frac{1}{(x+6)}$ e $\frac{1}{(2x)}$, da tarefa, respectivamente. Se o trabalho fosse realizado junto, fariam $\frac{1}{x}$ da tarefa.

Portanto,

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x} \Rightarrow$$

$$\frac{x+1+x+6}{(x+1)\cdot(x+6)}-\frac{2-1}{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+7}{x^2+x+6}=\frac{1}{2x} \Rightarrow$$

$$3x^2+7x-6$$

As raízes dessa equação são: $x'=-3$ e $x''=\frac{2}{3}$. Como a raiz negativa não serve como solução do problema a resposta é $x=\frac{2}{3}$.

As equações são do tipo $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}$ recebe o nome de equações fracionárias e algumas não parecem ser do segundo grau mas podem ser transformadas por meio da álgebra.

Problema 5:

O produto da idade de Augusto pela idade de Ananda é igual a 374. Fagner é 5 anos mais velho que Ananda. Quantos anos tem cada um deles?

Solução do problema:

Chamando de x a idade de Augusto, teremos que $x-5$ será a idade de Ananda. Como o produto das idades é igual a 374, temos que:

$$x(x-5)=374 \quad \Rightarrow \quad x^2-5x-374=0$$

onde suas raízes são $x'=-17$ e $x''=22$. Como estamos calculando idades , a raiz $x'=-17$ deve ser descartada. Logo a idade de Augusto é de 22 anos. Portanto como Augusto é 5 anos mais velho que Ananda, sua idade é 17 anos.

Problema 6:

Uma tela retangular com área de $9600\,cm^2$ com comprimento igual a três meios da altura. Quais são as dimensões desta tela?

Solução do problema:

Chamando de x altura da tela, temos que $\frac{3x}{2}$ será o seu comprimento.

Sabemos que a área de uma figura geométrica retangular é calculada multiplicando-se a medida do seu comprimento, pela medida da sua altura. Escrevendo o enunciado na forma de uma sentença matemática temos:

$$x \cdot \frac{3x}{2} = 9600\, cm^2$$

Que pode ser expressa como:

$$\frac{3x^2}{2} - 9600 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 19200 = 0$$

Note que temos uma equação do 2° grau incompleta, que terá duas raízes reais opostas, situação que ocorre sempre que o coeficiente b é igual a zero. Vamos aos cálculos:

$$3x^2 - 19200 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{19200}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{6400} \Rightarrow x = \pm 80$$

As raízes reais encontradas são -80 e 80, no entanto como uma tela não pode ter dimensões negativas, devemos desconsiderar a raiz 80.

Sabendo que $\frac{3x}{2}$ representa o comprimento da tela, temos então que ela será de $\frac{3}{2}$ de 80 que é igual a 120 . Portanto a tela tem dimensões de 80 cm de altura por 120 cm de comprimento.

Problema 7:

Comprei 4 lanches a um certo valor unitário. De outro tipo de lanche, com o mesmo preço unitário, a quantidade comprada foi igual ao valor unitário de cada lanche. Paguei com duas notas de cem reais e recebi $R\$\, 8,00$ de troco. Qual o preço unitário de cada produto?

Solução do problema:

O enunciado nos diz que os dois tipos de lanche têm o mesmo valor unitário. Vamos denominá-lo então de x. Ainda segundo o enunciado, de um dos produtos eu comprei 4 unidades e do outro eu comprei 4 unidades. Sabendo-se que recebi $R\$\, 8,00$ de troco ao pagar $R\$\, 200,00$ pela mercadoria, temos as informações necessárias para montarmos a seguinte equação:

$$x^2 + 4x + 8 = 200.$$

Como x representa o valor unitário de cada lanche, vamos solucionar a equação:

$$x^2 + 4x - 192 = 0$$

para descobrimos que valor é este. As raízes reais da equação são $x' = -16$ e $x'' = 12$.

Como o preço não pode ser negativo, a raiz igual $x' = -16$ deve ser descartada.

Assim o preço unitário de cada produto é de $R\$\,12,00$.

Problema 8:

O triplo do quadrado do número de filhos de Fagno é igual a 63 menos 12 vezes o número de seus filhos. Quantos filhos, Fagno tem?

Solução do problema:

Se x é o número de filhos de Fagno, temos que $3x^2$ equivale ao triplo do quadrado do número de filhos e que $63 - 12x$ equivale a menos vezes o número de filhos. Montando a sentença matemática temos:

$$3x^2 = 63 - 12x \Rightarrow 3x^2 + 12x - 63 = 0$$

Uma equação do segundo grau onde suas raízes são, $x' = 3$ e $x'' = -7$. Mas como o número de filhos de uma pessoa não pode ser negativo, descartamos então a raiz $x'' = -7$.Portanto, Pedro tem 3 filhos.

Os PCN Brasil (1998, p.116) também afirmam que é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as 'manipulações' com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. "É importante que os alunos percebam que as equações facilitam muito as resoluções de problemas difíceis". (BRASIL, 1998, P.121)

4.2 Máximo e mínimo de uma equação polinomial de segundo grau

Sabe-se que toda expressão algébrica do segundo grau em uma variável pode ser expressa da seguinte forma $P = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes reais, com a diferente de zero. Daí temos que:

$$P = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \Rightarrow$$

$$P = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2-4ac)}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2-4ac)}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Como $\left(x+\frac{b}{a}\right)^2$ é um quadrado perfeito, então $\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 \geq 0$. Portanto, o sinal do termo $a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2$ depende exclusivamente do sinal do coeficiente a. Se $a>0$ então $a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 \geq 0$ e se $a<0$ então $a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 \leq 0$. Além disso, pode-se notar que se $x=-\frac{b}{a}$ tem-se que $a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=0$. Logo podemos concluir que:

Sendo $a>0$ temos que:

$$P = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

e o valor mínimo de P é $-\frac{\Delta}{4a}$ e assumirá este valor somente quando, $a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=0$, que ocorre para $x=-\frac{b}{a}$.

Sendo $a<0$ temos que:

$$P = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

e o valor mínimo de P é $-\frac{\Delta}{4a}$ e assumirá este valor somente quando, $a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=0$, que ocorre para $x=-\frac{b}{a}$.

Ou seja, toda expressão algébrica do segundo grau em uma variável que tenha a forma $P=ax^2+bx+c$ com $a\neq 0$ admite um valor real mínimo se $a>0$ ou um valor real máximo se $a<0$ Independentemente do sinal de a, este valor extremo será:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(b^2-4ac)}{4a}$$

que ocorre quando $x=-\frac{b}{a}$.

Veremos agora algumas aplicações envolvendo valores de máximos e de mínimos da expressão algébrica do segundo grau.

4.3 Questões resolvidas de máximo e mínimo envolvendo equações polinomiais de segundo grau

Problema 1:

Entender as propriedades do milho, um dos mais importantes cereais produzidos no mundo é fundamental para o aumento de sua produção. Estudos recentes indicam que a área total em metros quadrados das folhas de uma plantação de um hectare de milho é aproximada pela função $A(h) = -3h^2 + 900h$ sendo h a altura da planta em centímetros. Com base nesta informação, qual é a altura para que a planta tenha área máxima e o valor de sua área máxima?

Solução do problema:

Perceba que o valor do coeficiente de h^2 é negativo, fazendo com que $A(h)$ admita um valor máximo. Este valor máximo de $A(h)$ ocorre para:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{900}{2(-3)} = 150\,cm$$

O valor máximo de $A(h)$ será:

$$A(h) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{(900^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 0)}{4 \cdot (-1)} = 202500\,cm^2$$

Problema 2:

Álvaro, um comerciante comprou a unidade de certo artigo por $R\$\,20,00$, e calculou que se o comercializasse por x reais, cada venderia por dia $(60 - x)$ unidades desses artigos. Considerando $0 < x < 60$ e as condições apresentadas, podemos concluir que para maximizar o seu lucro, o Alvaro terá que vender quantos artigos e a que preço?.

Solução do problema:

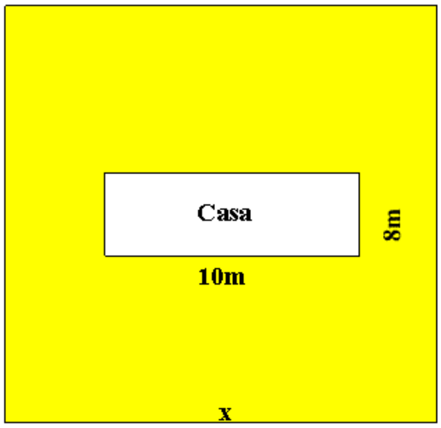
Comprando por $R\$\,20,00$ e vendendo por $R\$\,x$ o lucro unitário é dado por $R\$\,x - 20$. Como o comerciante vendeu $(60 - x)$ unidades, o lucro total é dado por:

$$l = (x - 20)(60 - x) = -x^2 + 80x - 1200.$$

Como o coeficiente de x^2 é negativo tem-se que l assume um valor máximo. Esse máximo ocorre para $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2 \cdot (-1)} = 40$ reais. Logo o número de artigos vendidos é igual a 20.

Problema 3:

Um cidadão quer construir uma casa de $8\,m$ por $10\,m$. A legislação do município só permite construir, nesse loteamento, no máximo em 20% da área do terreno. Todos os terrenos são quadrados. Qual serão as medidas do terreno para construir a casa desejada?



Solução do problema:

A área do terreno é x^2.

A área da casa é $80\,m^2$.

Como a área da casa será 20% da área do terreno, tem-se que a área do terreno é $80 \cdot \frac{100}{20} = 400\,m^2$. Assim $x^2 = 400$ que e igual a ± 20. A raiz -20 é uma solução do problema, mas não serve, pois a medida de um terreno não pode ser negativa. Logo o terreno mede $20\,m$ de lado.

Problema 4:

(Uerj-2002) Um fruticultor, no primeiro dia da colheita de sua safra anual, vende cada fruta por 2,00 reais. A partir daí, o preço de cada fruta decresce $R\$\,0,02$ por dia. Considere que esse fruticultor colheu 80 frutas no primeiro dia e a colheita aumenta uma fruta por dia.

a) Expresse o ganho do fruticultor com a venda das frutas como função do dia da colheita

b) Determine o dia da colheita de maior ganho para o fruticultor.

Solução do problema:

(a) Para melhor entender-se o problema, colocam-se os dados em uma tabela.

Tabela 4.1: Dados da questão 12

Período da colheita					
Frutas	Dia 1	Dia 2	Dia 3	$\cdots$	Dia $n+1$
Valores em reais	2	$2-0,02\cdot x$	$2-0,02\cdot x^2$	$\cdots$	$2-0,02\cdot x^h$
Quantidade	80	$80+1$	$80+2$	$\cdots$	$80+n$

Assim, o ganho do fruticultor pode ser representado por $G(n) = (80+n)(2,00 - 0,02\cdot n)$, $G(n) = 160 + 0,4n - 0,02n^2$. Ou seja, chega-se a uma função do segundo grau que relaciona o dia ao ganho.

(b) Nesse item, mais uma vez, é preciso determinar o ponto de máximo da função. Para isso, dessa vez será utilizada a fórmula para a abscissa do vértice $-\frac{b}{2a}$. Tem-se:

$$-\frac{0,4}{2\cdot(0,02)} = 10.$$

Mas é essencial perceber que o dia, informação requerida na questão, é o valor de n acrescido de uma unidade. Para isso, o aluno precisa refletir e realmente compreender o item a. Assim, o dia de maior ganho será o décimo primeiro dia.

Problema 5:

(EsPCex 2013). Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo?

Solução do problema:

Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre vendas e custo, temos:

$$\begin{aligned}
L(x) &= V(x) - C(x)\\
L(x) &= 3x^2 - 12x - (5x^2 - 40x - 40)\\
L(x) &= 3x^2 - 12x - 5x^2 + 40x + 40\\
L(x) &= -2x^2 + 28x + 40
\end{aligned}$$

Analisando a função L, observamos que $a = -2 < 0$, de onde concluímos que o gráfico é côncavo para baixo, possuindo um valor máximo.

Calculando o x do vértice:

$$\begin{aligned}
x_v &= -\frac{b}{2a}\\
x_v &= \frac{-28}{2 \cdot (-2)}\\
x_v &= \frac{-28}{(-4)}\\
x_v &= 7
\end{aligned}$$

Daí, a quantidade de lotes mensais que maximiza o lucro da indústria é 7.

Problema 6:

De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $L = R - C$, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria de peças automotivas produziu x unidades e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 2000x$ e a receita representada por $R(x) = 6000x - x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

Solução do problema:

$$
\begin{aligned}
L &= R - C \\
L &= 6000 - x^2 - (x^2 - 2000x) \\
L &= 6000 - x^2 - x^2 + 2000x \\
L &= -2x^2 + 8000x
\end{aligned}
$$

Coeficientes: $a = -2$, $b = 8000$ e $c = 0$

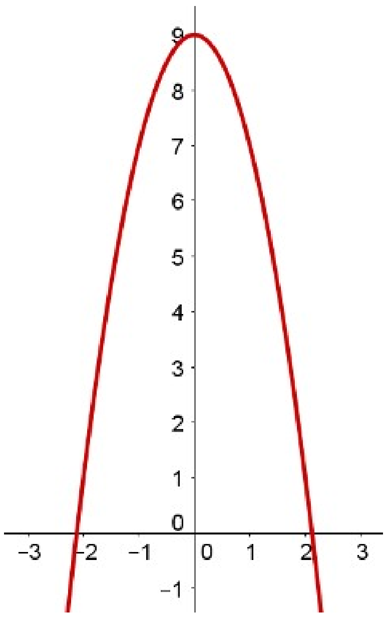
Para determinar o número de peças produzidas para que o lucro seja máximo, devemos utilizar x_v.

$$x_v = -\frac{8000}{2 \cdot (-2)} \quad \Rightarrow \quad x_v = \frac{-8000}{-4} \quad \Rightarrow \quad x_v = 2000.$$

Para que o lucro seja máximo, a empresa deverá produzir 2 000 peças.

Problema 7:

O gráfico a seguir pertence a uma função $f(x)$ do segundo grau, com domínio e contradomínio no conjunto dos números reais. A respeito dessas funções, assinale a alternativa correta:



a) Toda função do segundo grau pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$.

b) O coeficiente "a" dessa função é positivo.

c) O valor do coeficiente "c", nessa função, é igual a 9.

d) Não é possível determinar as raízes dessa função unicamente a partir de seu gráfico. Para isso, a lei de formação sempre será necessária.

e) $f(2) = 0$ e $f(-2) = 0$

Solução do problema:

(a)Incorreta!

A forma apresentada na alternativa é referente às equações do segundo grau. Para haver função, são necessárias duas variáveis. Nesse caso, existe apenas a incógnita x.

(b)Incorreta!

O coeficiente "a" de uma função do segundo grau indica a concavidade da parábola. Nesse caso, a concavidade está voltada para baixo e isso acontece sempre que $a < 0$. Se $a > 0$, então a concavidade é voltada para cima.

(c)Correta!

O coeficiente "c" sempre determina o ponto de encontro da função com o eixo x do plano cartesiano.

(d)Incorreta!

As raízes de uma função são os pontos de encontro entre o gráfico dessa função e o eixo x. nesse caso, são números próximos de 2 e – 2.

(e) Incorreta!

Capítulo 5

Considerações finais

Inevitavelmente ainda é muito comum a relação entre Matemática e a capacidade de decorar algumas fórmulas. Neste caso não é necessário entendimento, raciocínio lógico ou senso crítico. Basta encontrar o resultado, usando a fórmula que foi decorada ao invés de entendida, de modo mecânico e repetitivo. No entanto, esse comportamento não corresponde a verdadeira aprendizagem da Matemática. Só se assimila de verdade um assunto quando uma postura de busca é assumida, quando existe questionamento e participação. Quando esse conteúdo passa a fazer sentido ao aluno. Esta pesquisa teve como objetivo propor, uma forma diferenciada de trabalhar equação polinomial do segundo grau visando tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, atraente e eficiente. Fazendo com que aluno e professor construam esse conhecimento juntos. Dessa forma os métodos de resolução e suas demonstrações tiveram a sua importância ao longo da história da matemática seja ele algébrico, gráfico, cartesiano ou geométrico e atualmente não podemos ficar resumido a apenas a um método de resolução. É de fundamental importância o ensino de várias maneiras de se resolver o mesmo problema mostrando sua aplicabilidade, pois diversifica os ângulos de visão do aluno e ampliam a assimilação do assunto. A utilização de alguns desses métodos deve ser trabalhado em sala de aula de maneira a motivar e despertar o interesse do aluno pela matemática fazendo com que ele perceba que a álgebra, a geometria e a aritmética e vários outros assuntos que transversalizam neste conteúdo, podem e devem ser trabalhados unificados. Usando apenas equações do segundo grau através dessas estratégias o aluno pode calcular medidas dos lados de uma figura geométrica, determinar a variação de valores de uma equação, esboçar gráficos, resolver sistemas, máximo e mínimo de função do segundo grau dentre outros.

É sabido que dentre várias maneiras de facilitar o processo de aprendizagem de qualquer conteúdo em matemática é utilizando situações problemas e expondo a importância histórica desse conteúdo em várias áreas do conhecimento. O fato de muitos alunos já terem aversão à disciplinar e só trata-la como algo que não se aplica à a sua realidade deve ser encarado pelo professor como desafiador e esse deve mostrar que matemática não é o terror das disciplinas e é aí que se faz necessário o professor ter amplo domínio do conteúdo que está ensinando para tentar motivar esse aluno, mesmo diante de tantas outras formas de tirar a atenção deste aluno. Ai surge a necessidade do docente ser conhecedor da história desse conteúdo, das aplicações desse conteúdos e das diversas maneiras de se resolver problemas, e ainda, enfatizar a necessidade deste conteúdo para assuntos futuros, nas séries posteriores.

Portanto o ensino diversificado de equação do segundo grau além de tornar as aulas de matemáticas mais atraentes, prazerosa, facilita a aplicação desse conteúdo em várias tarefas realizadas na vida escolar desse aluno, bem como ajuda o desenvolvimento do raciocínio., fazendo com que esse aluno deixe ter apenas aquela aula corriqueira sobre equações do segundo grau onde é mostrado apenas uma forma de se resolver esse tipo de equação sem dizer nem se quer como surgiu essa fórmula resolutiva de Bhaskara, e o docente se coloca na zona de conforto. Inevitávelmente, que mesmo ciente da importância do ensino das equações polinomiais do segundo grau através da história da matemática e seus diversos formas de resolução, será encontrada dificuldades e recusa por parte de alguns docentes, mas sendo o professor um profissional reflexivo não pode negar que ele tendo essas técnicas de resolução como aliadas no ambiente de sala de aula, facilitará ao ensino-aprendizagem dos seus alunos. Assim, esperamos que este trabalho auxilie como uma ferramenta de apoio aos profissionais de ensino de matemática para que eles consigam mudar as suas estratégias de ensino sobre esse conteúdo ou que desperte melhorias significativas e decisivas nas suas aulas de forma que o discente possa obter mais seguranca em seu aprendizado, além de tornar suas aulas mais dinâmicas. Penso que que não é opropósito defender se existe uma forma melhor do que outra ou que cause maior facilidade na aprendizagem, seja ele algébrico ou não, apenas que o docente use cada forma como aliado no processo de ensino aprendizagem dentro de sala de aula.

Referências

BOYER, C.B., **História da Matemática**, 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996, 488p. Tradução: Elza F. Gomide

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.).**As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, [199?].

GUELLI, O. **Contando a História da Matemática: História da Equação do 2º Grau.** São Paulo: Ática, 1992.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**: complexos, polinômios e equações.São Paulo: Atual, 2000. V.6.

IMENES,Jakubo e lellis. **Equação do segundo grau**. 17ª ed. São Paulo,1992.

LIMA, E. L.. A equação do segundo grau. **Revista do Professor de Matemática**, [s.l.], n. 13, p.21-23, 01 dez. 1988.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar pinto de; VAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e problemas elementares**, 2.ed. [S.l.]: Editora SBM, 2006

LIMA, Elon Lages; VARVALHO, Paulo Cezar pinto de;WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César.**Temas e problemas**.3.ED. . [S.l.]: Editora SBM, 2010.

MENDES, Iran de Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula:** tecendo redes cognitivas na aprendizagem. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1998).

PASTOR, A. P. (1985). **Revista do professor de matemática**, n°6, Equação do segundo grau completando quadrado, p.p.36-38;

POLYA, Georg. **A arte de resolver problemas.** 2. ed. São Paulo: Hermann, 1995.

POLYA, G.. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1983.n. 2 consulta em 01/2023.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1983.n. 3. consulta em 02/2023

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1984.n. 4. consulta em 02/2023

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1985.n. 6. consulta em 03/2023

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1988.n. 13. consulta em 06/2023

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1991.n. 19. consulta em 07/2023

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1994.n. 25. consulta em 02/2023

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1999.n. 39. consulta em 7/2023

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 2000.n. 43.consulta em 02/2023

REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA-REMat www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php /matematica contato: remat.ufg@gmail.com consulta em 07/2023

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 2006.n. 64. consulta em 03/2023

WAGNER, E. (1991), **Revista do professor de matemática**, n°19, Um pouco sobre Descartes,p.9-14. consulta em 7/2023