



**Universidade Federal do Pará
Campus Universitário de Bragança
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –
PROFMAT**

Dissertação de Mestrado

O cálculo de áreas e volumes: Uma proposta de práticas de ensino dinâmicas e motivadoras.

Rayanne Almeida da Costa

Bragança – PA
2023

O cálculo de áreas e volumes
Uma proposta de práticas de ensino dinâmicas e motivadoras.

Mestrado

03/2021 – 08/2023

Submissão 25/08/2023

Defesa 02/09/2023

Versão Final 02/10/2023

Universidade Federal do Pará
Campus Universitário de Bragança
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Rayanne Almeida da Costa

anneray182@gmail.com

Mestrando do Profmat

UFPA-Bragança

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Alessandro da Costa Baldez

Presidente

Prof. Dra. Deiziane Mendes Wanzeler

Membro do Profmat/Bragança

Prof. Dra. Maria Augusta Raposo de Barros Brito

Membro do Profmat/Bragança

Prof. Dr. Glauco Lira Pereira

Membro do Profmat/Bragança

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

Membro Externo – UFPA/Abaetetuba

O cálculo de áreas e volumes

Uma proposta de práticas de ensino dinâmicas e motivadoras.

Mestrado

03/2021 - 08/2023

Submissão 25/08/2023

Defesa 02/09/2023

Versão Final 02/10/2023

Universidade Federal do Pará
Campus Universitário de Bragança
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Rayanne Almeida da Costa

anneray182@gmail.com

Mestrando do Profmat

UFPA-Bragança

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Carlos Alessandro da Costa Baldez

Presidente


Prof. Dra. Deiziane Mendes Wanzeler

Membro do Profmat/Bragança

Documento assinado digitalmente



MARIA AUGUSTA RAPOSO DE BARROS BRITO

Data: 05/10/2023 16:15:24-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dra. Maria Augusta Raposo de Barros Brito

Membro do Profmat/Bragança

Glauco Lira Pereira

(CPF: 661.455.202-30)

Assinado de forma digital por Glauco

Lira Pereira (CPF: 661.455.202-30)

Dados: 2023.10.05 21:21:47 -03'00'

Prof. Dr. Glauco Lira Pereira

Membro do Profmat/Bragança


Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

Membro Externo - UFPA/Abaetetuba

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

C837c Costa, Rayanne Almeida da.
O cálculo de áreas e volumes : Uma proposta de práticas de ensino dinâmicas e motivadoras / Rayanne Almeida da Costa. — 2023.
vii, 85 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Carlos Alessandro da Costa Baldez
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,
Campus Universitário de Bragança, Programa de Mestrado
Profissional em Ensino da Matemática, Bragança, 2023.

1. Ensino e Aprendizagem. 2. Medidas de Áreas e Volumes. 3. Pós pandemia. 4. Teorema dos Intervalos Encaixantes. 5. Princípio de Cavaliere. I. Título.

CDD 516.007

Agradecimentos

Agradeço imensamente aos meus pais, Fátima Almeida de Farias e Valdir Reginaldo Farias da Costa, que me direcionaram nos meus primeiros passos na busca pelo conhecimento e me acompanharam com o mesmo carinho e força quando passei a trilhar meus próprios caminhos. Ao meu irmão, Rennan Almeida da Costa, por ser uma das minhas primeiras referências e uma grande influência positiva em minha vida, que, ao lado de meus pais, me ajudou a guiar pela vida.

Meu sincero agradecimento ao Prof. Dr. Carlos Alessandro da Costa Baldez, não apenas pela orientação e paciência no processo de produção deste trabalho, mas também por toda a disponibilidade, apoio e incentivo durante o decorrer deste mestrado. Obrigada pela confiança em aceitar minha solicitação.

Agradeço a todo o corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da UFPA, campus Bragança, pelo suporte durante esta minha jornada, em especial a Prof. Dr. Marly dos Anjos, pelo excelente exemplo de presença e força feminina na Matemática e ao Prof. Dr. Edson Jorge de Matos, por desenvolver suas funções de professor e coordenador com seriedade, ao mesmo tempo que com muita humanidade e respeito pelos educandos.

Agradeço aos meus queridos companheiros de jornada, aos quais sem o suporte e incentivo jamais seria possível que eu chegasse até este ponto, tive uma sorte tremenda de tê-los ao meu lado, pois vocês tornaram o caminho mais leve, tranquilo e, até mesmo, divertido. Concluo esse mestrado com muitos aprendizados que vocês me proporcionaram.

Resumo

Neste trabalho desenvolveu-se uma lista de atividades destinadas a alunos do ensino fundamental e do ensino médio, voltadas para o ensino-aprendizagem de conceitos básicos de geometria e para o aprofundamento em noções de medidas de área e volume, em período pós pandêmico, aplicadas em sala de aula, seguindo uma sequência didática, onde cada atividade fomenta bases para a seguinte. Buscando tratar todos os tópicos partindo de uma conexão das perspectivas abstrata e concreta, além do foco na fala por parte dos estudantes, de modo a complementar o ensino tradicional. Assim sendo, foi utilizado materiais concretos, sejam já dados pelo professor, seja produzidos pelos alunos, como no caso da produção de sólidos geométricos via impressão 3D, visando um aprendizado pautado na reflexão e na suposição de hipóteses para a chegada a conclusões, reforçando o papel dos discentes como seres ativos no processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chaves. Ensino e aprendizagem; Medidas de área e volume; pós pandemia; Teorema dos Intervalos Encaixantes; Princípio de Cavalieri.

Abstract

In this work, a list of activities was developed for elementary and high school students, aimed at teaching and learning basic concepts of geometry and for deepening notions of area and volume measurements, in the post-pandemic period, applied in the classroom, following a didactic sequence, where each activity provides the basis for the next one. Seeking to address all topics from a connection of abstract and concrete perspectives, in addition to the focus on speech by students, in order to complement traditional teaching. Therefore, concrete materials were used, whether already given by the teacher or produced by the students, as in the case of the production of geometric solids via 3D printing, aiming at learning based on reflection and on the assumption of hypotheses for reaching conclusions, reinforcing the role of students as active beings in the teaching and learning process.

Keywords: Teaching and learning, Area and Volume, Post Pandemic, Nested Interval Theorem, Cavalieri's Principle

Lista de Figuras

2.1	Quadrado de lado igual a n	17
2.2	Quadrado unitário subdividido em n quadrados de lado igual a $\frac{1}{n}$	17
2.3	Aproximação, por excesso, de um quadrado de lado, de medida, qualquer a	18
2.4	Cálculo da área de um retângulo de lados de medidas a e b , respectivamente.	20
2.5	Cálculo da área de um paralelogramo de base b e altura h , respectivamente.	21
2.6	Cálculo da área de um triângulo qualquer, conhecidas sua base e altura.	22
2.7	Exemplo do cálculo da área de um polígono (trapézio retângulo), a partir das áreas geradas pela decomposição.	23
2.8	Polígono qualquer inscrito em uma circunferência de raio r	24
2.9	Aumento dos lados de um polígono qualquer circunscrito em uma circunferência de raio r	25
2.10	Aproximação do perímetro dos polígonos inscritos e circunscritos ao comprimento da circunferência	26
2.11	Relação de semelhança entre ápoteia (a_n) versus raio r e lados (l_n) e (L_n) de polígono inscrito e circunscrito.	26
2.12	Circunferências Γ_1, Γ_2 de raios r_1 e r_2 , respectivamente.	28
2.13	Parábola $y = x^2$ e segmento parabólico, respectivamente.	29
2.14	Área da região limitado pelas retas $x = 0, x = b, y = 0$ e gráfico da função $y = \frac{h}{b}x$	30
2.15	Aproximando a área da região, pela somas dos retângulo inferiores e superiores de base Δx e alturas $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$, respectivamente.	30
2.16	Área da região limitado pelas retas $x = 0, x = b, y = 0$ e gráfico da função $y = x^2$	32
2.17	Aproximando a área da região, pela somas dos retângulo inferiores e superiores de base Δx e alturas $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$, respectivamente.	32
3.1	Dobrando o volume do paralelepípedo retangular.	35
3.2	Exemplos de prismas: Oblíquos e retos, respectivamente.	37
3.3	Pirâmide triangular (tetraedro), de base ABC e altura H	38
3.4	Pirâmide de mesma bases ABC e alturas H , respectivamente.	39
3.5	Decomposição de uma pirâmide de em três tetraedros.	40
3.6	O volume de uma pirâmide qualquer.	41
3.7	Calculando o volume de um Cilindro, usando o Princípio de Cavalieri.	42
3.8	Calculando o volume de um Cone de base circular de raio r e altura H , usando o Princípio de Cavalieri.	43
3.9	Esfera de raio R	44

3.10	Calculando o volume de uma esfera de raio R , usando o Princípio de Cavaliere.	44
4.1	O método da fatias: Somando as áreas (de cortes transversais) que constitui o interior do sólido.	49
6.1	Alunos em atividades desenvolvendo materias tridimensionais concretos. . . .	74
6.2	Resposta da questão 1 do aluno F	74
6.3	Resposta da questão 1 do aluno C	75
6.4	Resposta da questão 2 do aluno C	75
6.5	Resposta da questão 2 do aluno D	76
6.6	Resposta da questão 2 do aluno E	76
6.7	Resposta da questão 2 do aluno A	76
6.8	Resposta da questão 2 do aluno C	77
6.9	Resposta da questão 3 do aluno B	77
6.10	Resposta da questão 3 do aluno C	77
6.11	Resposta da questão 4 do aluno C	78
6.12	Resposta da questão 2 do aluno G	78
6.13	Resposta da questão 2 do aluno F	79
6.14	Resposta da questão 2 do aluno H	79

Lista de Tabelas

4.1	Tabela de valores aproximados da área da elipse $x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$	52
4.2	Tabela de valores aproximados do volume do parabolóide de revolução, gerado pela curva $(x, y) = (x, \sqrt{x})$	52
5.1	Variáveis Primitivas	54
5.2	Operadores Aritméticos	54
5.3	Operadores de Igualdade ou Relacionais	55
6.1	Quadro Resumo – Atividade 01.	63
6.2	Quadro Resumo – Atividade 02.	65
6.3	Quadro Resumo – Atividade 03.	66
6.4	Quadro Resumo – Atividade 04.	68
6.5	Quadro Resumo – Atividade 05.	69
6.6	Quadro Resumo – Atividade 06.	70
6.7	Quadro Resumo – Atividade 07.	71
6.8	Quadro Resumo – Atividade 08.	72
6.9	Quadro Resumo – Atividade 09.	73

Sumário

1	Introdução	10
1.1	Justificativa da dissertação	12
1.2	Objetivos da dissertação	12
1.3	Organização da dissertação	12
2	Resultados Básicos	14
2.1	Ínfimo e Supremo	14
2.2	Áreas	16
2.2.1	Propriedades	16
2.2.2	Área de um quadrado	16
2.2.3	Área do retângulo	19
2.2.4	Área do paralelogramo	20
2.2.5	Área do triângulo	21
2.2.6	Área do polígono qualquer	22
2.2.7	Área do círculo	23
2.3	Área do Segmento Parabólico	29
2.3.1	O método	29
2.3.2	Área da parábola	31
3	Cálculo de Volumes	34
3.1	Volumes de sólidos	34
3.1.1	O Paralelepípedo Retângulo	34
3.1.2	Volume de Paralelepípedo	35
3.2	O Princípio de Cavaliere	36
3.2.1	Prismas	37
3.2.2	Pirâmides	38
3.2.3	Cilindro	41
3.2.4	Cone	42
3.2.5	A Esfera	43
4	Aproximação de Volumes: Uma Abordagem Computacional	46
4.1	A integral de Riemman	46
4.1.1	A integral como limite de somas	47
4.2	Aplicação I: O cálculo de áreas	48
4.2.1	A área da Elipse	48
4.3	Aplicação II: O método das fatias	49
4.3.1	O volume do Parabolóide de Revolução	49

4.4	Integração Numérica	50
4.4.1	A regra dos Trapézios	50
4.4.2	Regra dos trapézios repetida	50
5	Uma Introdução a Linguagem C	53
5.1	Imprimindo uma linha de texto	53
5.2	Variáveis	54
5.3	Aritmética em C	54
5.4	Tomada de decisão	56
5.5	Estruturas de repetição – Laços	57
5.6	Programa em C para o cálculo de volumes – Princípio de Cavaliere	57
6	O Uso de Materiais Concretos	59
6.1	Atividades Propostas	60
6.1.1	Atividade 01 – Conhecendo o plano cartesiano e construindo figuras	62
6.1.2	Atividade 02 – Posições entre retas e figuras geométricas.	63
6.1.3	Atividade 03 – Representação visual dos conceitos de perímetro e área.	65
6.1.4	Atividade 04 – Construindo as áreas de diferentes figuras geométricas planas a partir da área unitária;	67
6.1.5	Atividade 05 – A relação entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro.	68
6.1.6	Atividade 06 – Descobrimo o comprimento da circunferência pelo método da exaustão.	69
6.1.7	Atividade 07 – Descobrimo o comprimento da circunferência pelo método da exaustão.	70
6.1.8	Atividade 08 – Construção dos sólidos geométricos com o uso de caneta de impressão 3D.	71
6.1.9	Atividade 09 – Construindo os sólidos geométricos com impressão 3D a partir de suas planificações.	72
6.2	Resultados Obtidos	73
	Referências Bibliográficas	81

1

Introdução

Em fevereiro de 2020 surgiu o primeiro caso de coronavírus no Brasil, diante disto, se fez necessário a substituição das aulas presenciais pelo ensino remoto e mais de 90% das escolas não puderam fazer o retorno ao presencial ainda no mesmo ano, o que gerou sérios prejuízos ao processo, já defasado, de ensino e aprendizagem. A pesquisa *Resposta Educacional à Pandemia de Covid-19 no Brasil*, que contempla toda a educação básica, estima que, no ensino remoto, os estudantes aprendem, em média, apenas 17% do conteúdo de matemática esperado nas aulas presenciais.

Como explica Vítor de Angelo, presidente do Conselho Nacional de Secretários de Educação (Consed), “essa realidade não só aumenta os déficits educacionais, mas também agrava as desigualdades, tanto na comparação de rede pública com a particular, como entre as redes públicas de diferentes regiões do Brasil, ou mesmo dentro das próprias redes públicas”.

A motivação dos estudantes, que também é um fator fundamental para o desempenho, foi afetada diretamente às condições de cada família para participar de atividades remotas – acesso a computadores, tablets e celulares, com sinal de internet – quanto aos avanços das redes de ensino na oferta do ensino a distância.

As ações pós-pandemia devem ter como objetivo minimizar os danos causados à educação e evitar os efeitos colaterais que podem surgir nos próximos anos. Surge assim a necessidade de práticas de ações voltadas para a recuperação e aceleração do aprendizado e a otimização do currículo.

Devido aos prejuízos produzidos na educação pública durante esse período do ensino remoto, se torna inevitável desenvolver uma prática que cubra as faltas percebidas nas turmas de ensino fundamental e médio para o desenvolvimento de práticas que visem atualizar e dinamizar a forma de ensinar e aprender, tornando os estudantes partes ativas do processo e dando sentido prático aos tópicos abordados, despertando assim interesse e a curiosidade, e gerando alunos com maior compreensão, não apenas das áreas de conhecimento, mas também dos mundo que os cerca.

Há então uma busca para que o ensino tradicional, que, em geral, coloca o estudante

em uma posição de receptor de informações e conhecimento, que partem de definições vagas e que não lhes agrega sentido, assim como lhes apresenta a resolução de problemas de forma mecanicista seja então revisto e que novas técnicas e caminhos sejam aplicados.

Surge então a necessidade de um ensino e uma aprendizagem em Matemática que se apresente de forma complementar a esse modelo tradicional, que desenvolva habilidades diversas no educando, incentivando a criatividade, a interpretação e a dedução a partir dos contextos e realidades na qual ele se insere.

Como diz D'Ambrosio em (AMANCIO; SANZOVO, 2020) é preciso valorizar a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e nas expectativas da sociedade. Isso será impossível de atingir sem ampla utilização de tecnologia na educação”, pois, segundo Molan, “em um mundo tão dinâmico, de múltiplas linguagens, telas, grupos e culturas, cada um de nós precisa – junto com todas as interações sociais – encontrar tempo para aprofundar, refletir, re-elaborar, produzir e fazer novas sínteses”.

Este presente trabalho se propõe a desenvolver propostas de atividades de ensino dinâmicas que fortaleçam a construção do conhecimento matemático a partir do raciocínio lógico aplicado a diferentes atividades que podem e devem se complementar. Estas propostas foram aplicadas em uma turma de 9º ano, da EEEFM João Santos, em Capanema – PA, durante o primeiro semestre do ano letivo de 2023.

Para dar base a produção destas atividades trazemos referenciais teóricos clássicos, como o método de Eudoxo para determinar as medidas do Círculo e o Princípio de Cavalieri, devido a sua aplicabilidade na construção de conhecimentos em geometria volumétrica, assim como uma análise sobre a capacidade potencializadora do uso de materiais concretos no ensino da Geometria.

A pesquisa foi norteada pelo acompanhamento das tarefas elaboradas em sala de aula, na leitura e análise de obras e autores com trabalhos pertinentes ao assunto, e na interpretação de estatísticas de aprendizagem atualizadas do Brasil, como um todo, e da instituição em foco.

Entretanto, é importante salientar que novos rumos e métodos foram aplicados, assim como ideias foram descartadas e/ou adaptadas no avançar do desenvolvimento da pesquisa, de modo a uma melhor adequação às respostas obtidas a cada passo do processo.

Como objetos práticos e concretos foram escolhidos materiais de uso mais comum entre matemáticos, como régua e compasso, mas que por vezes, ainda não tem sua aplicabilidade em sala de aula, e ainda uma busca por novas ferramentas.

Daí surgiu a ideia do uso de impressões 3D feitas em sala, com o auxílio de caneta 3D e do planejamento e desenvolvimento de material base para a produção externa de um conjunto de sólidos, usando assim tanto a construção do material como um caminho para

aprendizagem, como seu uso em uma fase seguinte do projeto.

Tendo o professor como mediador do aprendizado, o aluno terá de desenvolver procedimentos para, usando a observação e a lógica, chegar a conclusões. Conclusões estas que serão então validadas pela comparação entre os resultados obtidos, seguindo o que se estabeleceu como método para a resolução de problemas.

1.1 Justificativa da dissertação

Buscamos aqui, então, um modo de lidar com os lapsos e perdas que o período do ensino remoto trouxe e superar ou, pelo menos, amenizar as dificuldades no ensino e aprendizagem acarretados pelo fracasso do ensino em período pandêmico, evitando aqui, enveredarmos por uma “corrida de conteúdos” que visa apenas um checagem em tópicos e que busque apenas se certificar de que os conteúdos definidos na matriz curricular da turma foram trabalhados em sala de aula, sem um cuidado com o aprendizado em si. Mas sim desenvolver uma revisão e apresentação destes tópicos que seja enriquecedora e instigante, que desperte no aluno o interesse pelo que é trabalhado em sala e o leve a desenvolver uma postura de busca de conhecimento com aplicabilidade em toda sua vida dentro e fora do meio acadêmico.

1.2 Objetivos da dissertação

Para tal foram estabelecidos os objetivos de desenvolver a compreensão das diferentes dimensões e suas características através do uso de materiais concretos, apresentar a ideia de volume a partir do estudo de áreas e observação direta das relações de capacidade entre diferentes sólidos geométricos, introduzindo o método de Eudoxo, mais especificamente *O Teorema dos Intervalos Encaixantes* e o Princípio de Cavalieri como caminhos e/ou resultado das aulas desenvolvidas.

1.3 Organização da dissertação

Essa dissertação se apresenta da seguinte forma: Começamos com a introdução. No capítulo 2, apresentamos alguns resultados básicos que fundamentarão nossa metodologia, com isso a definição e o cálculo de áreas de algumas figuras planas estarão fundamentadas, de modo a facilitar a compreensão dos capítulos seguintes.

No capítulo 3, destacamos o processo de desenvolvimento dos conceitos e fórmulas de volumes. Nosso principal resultado é enunciar e aplicar o Princípio de Cavaliere, o que

facilitará a compreensão de fórmulas de alguns sólidos, como por exemplo: Prisma, Pirâmides, Cilindros, Esfera entre outros.

No capítulo 4, abordamos uma aproximação de volumes a partir de uma abordagem computacional. Nossa metodologia está baseada no cálculo integral. Essa abordagem permitirá obtermos volumes de sólidos, baseado no Princípio de Cavaliere através de métodos computacionais.

No capítulo 5, apresentamos uma breve introdução à Linguagem de programação **Linguagem C**. Exibimos os comando necesssários para o entendimento do programa desenvolvido, para auxiliar no cálculo de volumes de sólidos, baseado no Princípio de Cavaliere.

No capítulo 6, que justifica o uso de materiais concretos, apresentamos também as atividades aplicadas em sala de aula. E, por fim, apresentamos as conclusões finais deste trabalho.

2

Resultados Básicos

Neste capítulo abordaremos alguns resultados básicos necessários ao entendimento deste trabalho, assim traremos os conceitos de Ínfimo e Supremo, o Teorema dos Intervalos Encaixantes, de grande importância para os estudos futuros. Também traremos uma definição de área e como encontrar as fórmulas de área de algumas figuras planas.

2.1 Ínfimo e Supremo

Definição 1. *Seja \mathbb{R} o conjunto ordenado dos números reais e A um subconjunto de \mathbb{R} . Um elemento $x \in \mathbb{R}$ é um cota superior de A se $x \geq y$, para todo $y \in A$.*

Definição 2. *Um elemento $x \in \mathbb{R}$ é uma cota inferior de A se $x \leq y$, para todo $y \in A$.*

Definição 3. *O supremo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, designado por $\sup A$, é definido como a menor das cotas superiores de A (quando existe!).*

Definição 4. *O ínfimo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, designado por $\inf A$, é definido como a maior das cotas inferiores de A .*

Postulado de Dedekind. Todo conjunto não-vazio de \mathbb{R} , constituído de elementos positivos, tem um ínfimo.

Decorre do **Postulado de Dedekind** que:

- Se um conjunto A de \mathbb{R} tem uma cota inferior, então A tem \inf .
- Todo conjunto não-vazio, que tem cota superior, tem *supremo*.

As definições e demonstrações desses resultados, podem ser encontrados em (FIGUEIREDO, 1996) e (LIMA, 1995).

Definição 5. (LIMA, 1995) *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se denso em \mathbb{R} quando todo intervalo aberto (a, b) contém algum ponto de X .*

Teorema 1. *O conjunto \mathbb{Q} dos números racionais e o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos em \mathbb{R} .*

Demonstração. Ver (LIMA, 1995).

Teorema 2. *Toda sequência de números reais monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Ver (FIGUEIREDO, 1996).

Como consequência desse Teorema, obtemos um importante resultado, tal que por ser de tal importância enunciaremos como.

Teorema 3. (Teorema dos Intervalos Encaixantes). *Seja $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ uma sequência de intervalos fechados, cada um contendo o seguinte. Suponha que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$. Então existe um **único** número real c comum a todos esses intervalos.*

Demonstração. (LIMA, 1995)

Observação 1. *Para o que segue, é importante salientar que a expressão*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$$

significa que para cada número real $\epsilon > 0$, podemos encontrar um $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$b_n - a_n \leq \epsilon.$$

Isto é, sempre podemos encontrar um intervalo fechado $[a_n, b_n]$, cujo o comprimento seja menor que ϵ .

Lema 1. *Sejam a, b números reais positivos, tais que $a < b$. Então $a^2 < b^2$.*

Demonstração. De fato, basta notar que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, como a e b são números reais positivos e $a < b$, segue que $(a - b)(a + b) < 0$. Logo, $a^2 - b^2 < 0$. Portanto, $a^2 < b^2$. ■

Lema 2. *Sejam x, y números reais positivos, tais que $x < y$. Então $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.*

Demonstração. De fato, definindo $a = \sqrt{x}$ e $b = \sqrt{y}$ temos por hipótese $a^2 = x < y = b^2$, isto é $a^2 < b^2$. Assim, $b^2 - a^2 > 0$. Isto é, $(b - a)(b + a) > 0$. Sendo a e b positivos, segue que $b - a > 0$. Portanto, $a < b$, ou seja $\sqrt{x} < \sqrt{y}$. ■

2.2 Áreas

Segundo (NETO, 2013), “intuitivamente, área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado”. A partir de tal definição podemos encontrar formas de definir a área de diferentes figuras geométricas.

2.2.1 Propriedades

Abaixo, encontram-se algumas propriedades, as quais iremos admitir como axiomas, que nos permitirão obter resultados sobre áreas de figuras planas não tão comuns.

PA1) Polígonos congruentes possuem áreas iguais;

PA2) Seja Q um quadrado de lado unitário, então a área de $Q = 1$;

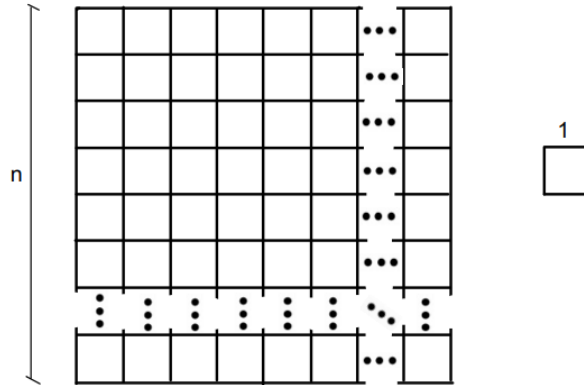
PA3) Seja P um polígono que pode ser decomposto como a reunião de n polígonos P_1, P_2, \dots, P_n tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados e área de interseção vazia, então a área de P é a soma das áreas dos P_i com $i = 1, 2, \dots, n$;

PA4) E ainda, como consequência da propriedade **PA3)**, se o polígono P está contido no polígono R , então a área de P é menor que a área de R .

2.2.2 Área de um quadrado

Consideramos um quadrado cujos lados meçam uma unidade de comprimento, denominado quadrado unitário, como unidade de área, de onde podemos observar que:

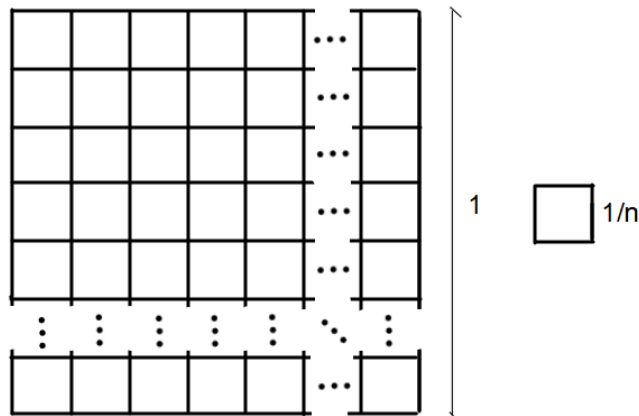
- Um quadrado qualquer Q , cujo lado mede uma unidade possuirá área unitária;
- Um quadrado Q , cujo lado mede n , pode ser dividido em uma quantidade $n \times n$ de quadrados unitários a partir de cortes verticais e horizontais, como mostra a Figura 2.1.

Figura 2.1: Quadrado de lado igual a n .

FONTE: Elaborado pelo autor.

Logo, segue de **PA3**) que a área deste quadrado é igual a quantidade dos quadrados unitários encontrados, multiplicados pela área de cada um, ou seja, $n^2 \times 1$. Assim, a área será dada por n^2 .

- Se um quadrado Q possui $1/n$ de medida lateral, o quadrado unitário poderá ser dividido em $n \times n$ quadrados congruentes a Q , a partir de cortes verticais e horizontais, de modo que componham uma área unitária (ver Figura 2.2). De onde vem que, novamente usando **PA3**), a área de Q a área de Q satisfaz a seguinte equação $n^2 \times$ (área de $Q = 1$), ou seja, a área de $Q = \left(\frac{1}{n}\right)^2$.

Figura 2.2: Quadrado unitário subdividido em n quadrados de lado igual a $\frac{1}{n}$.

FONTE: Elaborado pelo autor.

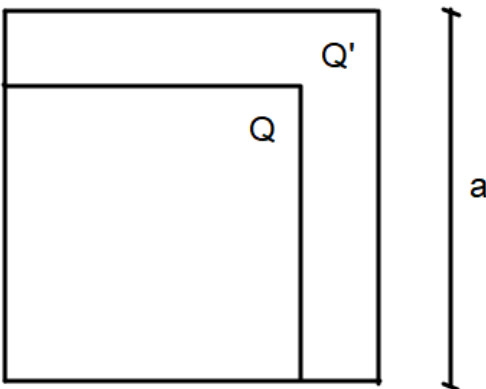
- Se o lado do quadrado Q for $\frac{m}{n}$, podemos então dividi-lo em $m \times m$ quadrados de lado $1/n$, logo, como vimos anteriormente a área de cada um dos quadrados menores será

$\frac{1}{n^2}$ e a área de Q será dada por $\sum_{i=1}^{m^2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = m^2 \times \frac{1}{n^2}$, ou seja, $\left(\frac{m}{n}\right)^2$. Se denominarmos $\frac{m}{n}$ por a , teremos ainda que a área de Q será igual a a^2 .

Proposição 1. *Se o quadrado Q possui lados de medidas a , incomensuráveis com o segmento unitário, a área ainda será dada por a^2 .*

Demonstração. Para provarmos tal afirmação podemos usar o Teorema 3 (**Teorema dos Intervalos Encaixantes**), mostrando que dado qualquer número $b < a^2$, temos que $b < (\text{área de } Q)$ e ainda que dado um $a^2 < c$, temos que $(\text{área de } Q) < c$. Logo, a $(\text{área de } Q)$ não poderá ser maior ou menor que a^2 e, portanto, sua área será exatamente igual a a^2 . Assim sendo, primeiramente definimos c , um número real positivo tal que $a^2 < c$, pela densidade dos números racionais (Teorema 1), podemos tomar um número racional r superior a a , tal que $0 < a < r < \sqrt{c}$. Pelo Lema 1, temos $a^2 < r^2 < c$. Assim, o quadrado Q' , de lado r , contém o quadrado Q . Como r é racional, temos que $(\text{área de } Q') = r^2$ e, como Q está no interior de Q' (ver Figura 2.3).

Figura 2.3: Aproximação, por excesso, de um quadrado de lado, de medida, qualquer a .



FONTE: Elaborado pelo autor.

Decorre da propriedade **PA4**) que a $(\text{área de } Q) < (\text{área de } Q')$, ou seja, $(\text{área de } Q) < r^2$. Porém, sabemos que $r^2 < c$, assim, por consequência, a $(\text{área de } Q) < c$. Sumarizando esses resultados, temos

$$i) \quad a^2 < r^2 < c,$$

$$ii) \quad (\text{área de } Q) < (\text{área de } Q') = r^2 < c.$$

De modo análogo, para cada $0 < b < a^2$, podemos obter outro racional \tilde{r} , tal que $\sqrt{b} < \tilde{r} < a$. $b < \tilde{r}^2 < a^2$. Isso nos dá

$$\text{iii) } b < \tilde{r}^2 < a^2$$

$$\text{iv) } b < (\text{área de } Q') = \tilde{r}^2 < (\text{área de } Q).$$

Segue das resultados acima que

$$b < \tilde{r}^2 < a^2, (\text{área de } Q) < r^2 < c.$$

Tomando números reais positivos b 's e c 's, de modo que $|b - c| < \epsilon$. Obtemos uma sequência de intervalos $[\tilde{r}_n, r_n]$ com $\lim_{n \rightarrow +\infty} (r_n - \tilde{r}_n) = 0$ e $\tilde{r}^2 \leq a^2, (\text{área de } Q) \leq r^2$. Assim, ve que

$$\begin{aligned} |a^2 - (\text{área de } Q)| &\leq r_n - \tilde{r}_n^2 = (r_n - \tilde{r}_n)(r_n + \tilde{r}_n) = \epsilon(r_n - \tilde{r} + 2\tilde{r}_n), \\ |a^2 - (\text{área de } Q)| &\leq \epsilon^2(2a), \\ -\epsilon^2(2a) &\leq a^2 - (\text{área de } Q) \leq \epsilon^2(2a) \end{aligned}$$

Assim, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, podemos tomá-lo de modo que $\epsilon^2 = \frac{1}{(2a)n}$, obtemos

$$-\frac{1}{n} \leq a^2 - (\text{área de } Q) \leq \frac{1}{n} \iff \left| a^2 - (\text{área de } Q) \right| \leq \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema 3 que

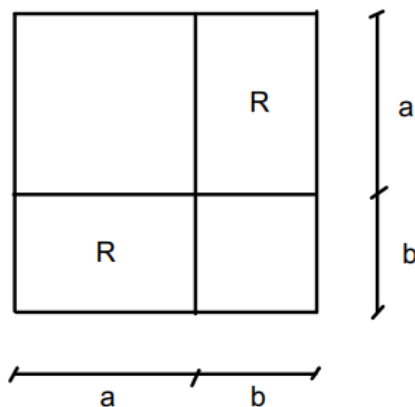
$$\text{área de } Q = a^2.$$

■

2.2.3 Área do retângulo

Considere o retângulo R , de medidas a e b , construímos o quadrado Q , de lado $(a+b)$, que contém dois retângulos R e dois quadrados de medidas laterais a e b , respectivamente, como mostra a Figura 2.4.

Figura 2.4: Cálculo da área de um retângulo de lados de medidas a e b , respectivamente.



FONTE: Elaborado pelo autor.

Assim, segue do caso anterior e de **(PA1)**, que $A_{(a+b)} = a^2 + 2R + b^2$. Por outro lado, como visto anteriormente, a área de Q será indicada por $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Observamos então que a^2 e b^2 correspondem a área dos quadrados menores inseridos em Q , o que nos leva a área de $2R = 2ab$, ou ainda,

$$\text{área de } R = ab$$

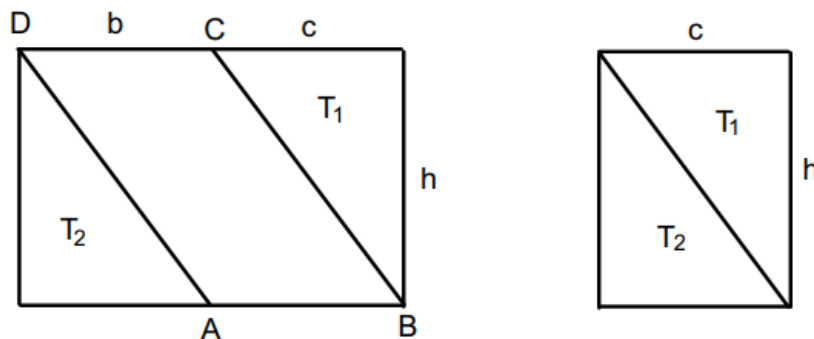
■

2.2.4 Área do paralelogramo

Usaremos aqui as conclusões acerca da área do retângulo para nos ajudar a definir a área de um paralelogramo de forma semelhante ao que fizemos em relação às conclusões da área do quadrado para se encontrar a área do retângulo.

Assim, considerando um paralelogramo $ABCD$, de base AB , medindo b , e altura h , contido em um retângulo R de base $b+c$ e altura também h (ver Figura 2.5). Observamos, então, que, além do paralelogramo, o quadrado Q , também contém dois triângulos congruentes, que chamaremos aqui de T_1 e T_2 , e que, ao unirmos T_1 e T_2 iremos gerar um novo retângulo, de medidas h e c .

Figura 2.5: Cálculo da área de um paralelogramo de base b e altura h , respectivamente.



FONTE: Elaborado pelo autor.

Já estabelecemos anteriormente que a área do retângulo será dada pelo produto de sua base por sua altura, assim, (área de R) = $(b + c)h = bh + ch$ e a (área de T_1) + (área de T_2) = $\frac{1}{2}ch + \frac{1}{2}ch = ch$. Por outro lado, vem da propriedade (**PA3**) (área de $ABCD$) + (área de T_1) + (área de T_2) = $bh + ch$. O que nos dá que

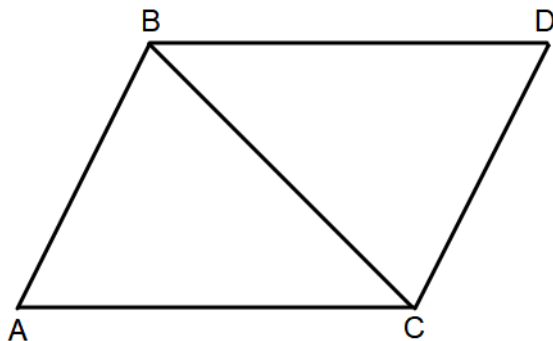
$$\text{área de } ABCD = bh.$$

Portanto, concluímos que a área do paralelogramo também será fornecida pelo produto de sua base pela altura correspondente.

2.2.5 Área do triângulo

A área do triângulo aparece então como consequência direta da descoberta da área do paralelogramo, já que todo triângulo pode ser considerado a metade de um paralelogramo. De fato, consideramos o triângulo ABC , traçando paralelas aos lados AC e AB , que passam pelos pontos B e C , respectivamente, surge quer essas paralelas se encontram em um ponto D gerando os segmentos CD e BD , congruentes a AB e AC , pois $ABDC$ é um paralelogramo, por definição (ver Figura 2.6), que já vimos anteriormente terá sua área dada pelo produto da base pela altura correspondente.

Figura 2.6: Cálculo da área de um triângulo qualquer, conhecidas sua base e altura.



FONTE: Elaborado pelo autor.

Observamos então que os triângulos ABC e BCD são congruentes, possuindo assim, também a mesma área, logo, segue de **(PA1)** que a área do paralelogramo $ABDC$ corresponde ao dobro da área do triângulo ABC , ou seja,

$$\text{área de } ABC = \frac{1}{2} \text{ área de } ABDC.$$

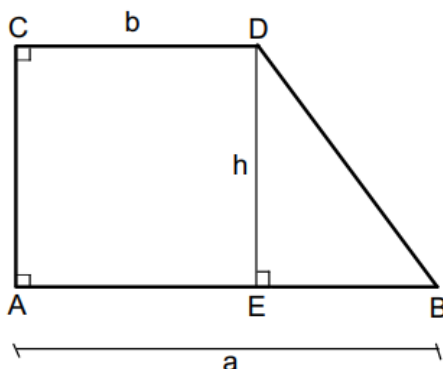
Portanto, concluímos que a área do triângulo como a metade do produto da base pela altura correspondente.

2.2.6 Área do polígono qualquer

Para obtermos a área de um polígono qualquer, basta dividi-lo de modo a encontrar as figuras vistas anteriormente e cujas áreas sabemos como calcular, assim a área será fornecida pela soma das áreas em que o decompomos.

Vejam os exemplos do trapézio retângulo, ou seja, um trapézio que possui dois ângulos internos retos, ou seja, com medidas iguais a 90° . Sendo $ABDC$ um trapézio retângulo, onde AB e CD são as bases, podemos decompô-lo de modo a gerar um retângulo $ACDE$ e o triângulo BDE , ver Figura 2.7.

Figura 2.7: Exemplo do cálculo da área de um polígono (trapézio retângulo), a partir das áreas geradas pela decomposição.



FONTE: Elaborado pelo autor.

A área deste trapézio pode ser definida pela soma das áreas do quadrado e do triângulo, ou seja,

$$\text{área de } ABCD = \text{área de } ACDE + \text{área de } BDE.$$

Logo, decorre dos resultados anteriormente vistos, sobre áreas de quadriláteros e triângulos, que

$$\text{área de } ABCD = b.h + \frac{1}{2}[(a - b).h]$$

que podemos reescrever como

$$\text{área de } ABCD = \frac{(a + b).h}{2}$$

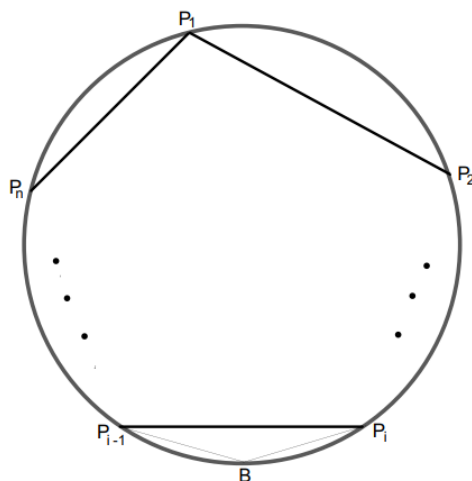
Assim, a área do trapézio apresentado, é igual ao produto da soma das bases pela altura sendo dividida por dois. Percebemos então que muitas outras figuras podem ter suas áreas determinadas de modo análogo.

2.2.7 Área do círculo

Tendo visto como encontrar a área de diferentes polígonos, passaremos agora a abordar um método de obtenção de uma fórmula para se definir a área do círculo, assim também como o comprimento de uma circunferência. Para isso precisaremos dos seguintes lemas.

Lema 3. *Dada uma circunferência qualquer, o perímetro de qualquer polígono convexo nela inscrito é menor que o perímetro de qualquer polígono nela circunscrito.*

Demonstração.

Figura 2.8: Polígono qualquer inscrito em uma circunferência de raio r .

FONTE: Elaborado pelo autor.

Primeiro provaremos que ao aumentar o número de lados de um polígono qualquer inscrito ou circunscrito em uma circunferência, teremos que seus perímetros terão medidas crescentes e decrescentes, respectivamente.

Dado uma circunferência qualquer Γ e um polígono qualquer, de n lados, inscrito em Γ , cujo perímetro seja dado por

$$\ell(p_n) = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_nA_1}.$$

Temos que, ao escolhermos o ponto B da circunferência, contido no arco menor $A_{i-1}A_i$, e ligá-lo a estes pontos (ver Figura 2.8), obtemos um novo polígono, de $n + 1$ lados, também inscrito em Γ , de perímetro

$$\ell(p_{n+1}) = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_{i-1}B} + \overline{BA_i} + \cdots + \overline{A_nA_1}.$$

Segue da desigualdade triangular, que $\ell(p_n) < \ell(p_{n+1})$. Usando um raciocínio análogo, para polígonos P_n que circunscribe a circunferência, obtemos $\ell(P_{n+1}) < \ell(P_n)$ (ver Figura 2.9). circunscrito, será sempre válida.

Figura 2.10: Aproximação do perímetro dos polígonos inscritos e circunscritos ao comprimento da circunferência

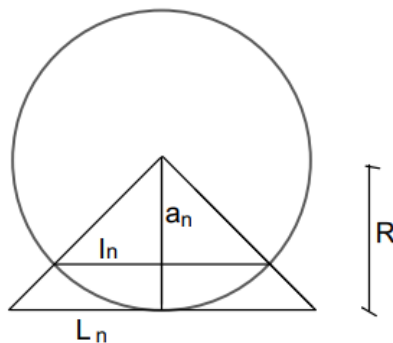


FONTE: Elaborado pelo autor.

Lema 4. Dada uma circunferência qualquer e fixado um segmento $\epsilon > 0$, arbitrário, podem-se construir dois polígonos (regulares), um inscrito e outro circunscrito à circunferência, tais que a diferença entre seus perímetros seja menor que o segmento ϵ fixado.

Demonstração. Primeiramente, vale destacar que, por semelhança entre triângulos, e sendo a_n a apótema do polígono inscrito, L_n e l_n o lado do polígono circunscrito e inscrito, respectivamente a circunferência (ver Figura 2.11)

Figura 2.11: Relação de semelhança entre apótema (a_n) versus raio r e lados (l_n) e (L_n) de polígono inscrito e circunscrito.



FONTE: Elaborado pelo autor.

obtemos $\frac{L_n}{l_n} = \frac{R}{a_n}$, implicando em

$$\frac{\ell(P_n)}{\ell(p_n)} = \frac{R}{a_n}. \quad (2.1)$$

De onde obtemos

$$\ell(P_n) = \frac{R \cdot \ell(p_n)}{a_n} \iff \ell(p_n) = \frac{\ell(P_n) \cdot a_n}{R}.$$

Decorre de (2.1)

$$\frac{\ell(P_n) - \ell(p_n)}{\ell(P_n)} = \frac{R - a_n}{R} \Leftrightarrow \ell(P_n) - \ell(p_n) = \ell(P_n) \frac{R - a_n}{R}.$$

Assim, vem que para todo n maior que 4, temos $\ell(P_n) < \ell(P_4)$, e com isso $\ell(P_n) < 8R$. Portanto,

$$\ell(P_n) - \ell(p_n) = \frac{8R}{R}(R - a_n) \Leftrightarrow \ell(P_n) - \ell(p_n) = 8(R - a_n).$$

Assim, aumentando de forma indefinida o número de lados dos polígonos, a diferença $R - a_n$ tende para o segmento nulo (BARBOSA, 1995), (DOLCE; POMPEO, 2013). Portanto, concluímos que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

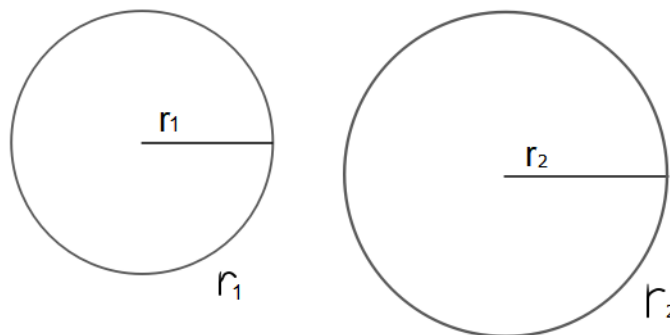
$$\ell(P_n) - \ell(p_n) < \epsilon \quad \text{sempre que } n \geq n_0.$$

Portanto, segue do Teorema 3, que existe um único segmento que é maior que o perímetro de qualquer dos polígonos regulares inscritos e menor que o perímetro de qualquer dos polígonos regulares circunscritos a essa circunferência. ■

Definição 6. (DOLCE; POMPEO, 2013) *O segmento maior que os perímetros de todos os polígonos convexos inscritos e menor que os perímetros de todos os polígonos circunscritos é chamado de perímetro do círculo definido pela circunferência, e esse perímetro é, ainda, chamado de comprimento da circunferência.*

Lema 5. *A razão entre o perímetro do círculo e seu diâmetro é um número constante representado por π .*

Demonstração. Dadas duas circunferências de comprimento Γ_1 e Γ_2 e raios r_1 e r_2 , respectivamente.

Figura 2.12: Circunferências Γ_1, Γ_2 de raios r_1 e r_2 , respectivamente.

FONTE: Elaborado pelo autor.

Considerando os polígonos regulares de mesmo número de lados inscritos e circunscritos nessas circunferências e sendo tais polígonos semelhantes, vem que

$$\frac{\ell(p_n^{(1)})}{\ell(p_n^{(2)})} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{e} \quad \frac{\ell(P_n^{(1)})}{\ell(P_n^{(2)})} = \frac{r_1}{r_2} \quad (2.2)$$

Vem também

$$\ell(p_n^{(1)}) < \ell(\Gamma_1) < \ell(P_n^{(1)}) \quad \text{e} \quad \ell(p_n^{(2)}) < \ell(\Gamma_2) < \ell(P_n^{(2)})$$

Isso nos dá

$$\frac{\ell(p_n^{(1)})}{2r_1} < \frac{\ell(\Gamma_1)}{2r_1} < \frac{\ell(P_n^{(1)})}{2r_1} \quad \text{e} \quad \frac{\ell(p_n^{(2)})}{2r_2} < \frac{\ell(\Gamma_2)}{2r_2} < \frac{\ell(P_n^{(2)})}{2r_2} \quad (2.3)$$

Logo, combinando (2.2), (2.3) e o Teorema 3 (**Teorema dos Intervalos Encaixantes**), concluímos que

$$\frac{\ell(\Gamma_1)}{2r_1} = \frac{\ell(\Gamma_2)}{2r_2}$$

Portanto, chamando essa razão de π , obtemos para qualquer circunferência Γ e raio r .

$$\frac{\ell(\Gamma)}{2r} = \pi \iff \ell(\Gamma) = 2\pi r$$

■

Teorema 4. *A área da região limitada por um círculo é igual a metade do produto do raio pelo comprimento do círculo*

Demonstração. (BARBOSA, 1995).

Daí segue de imediato que

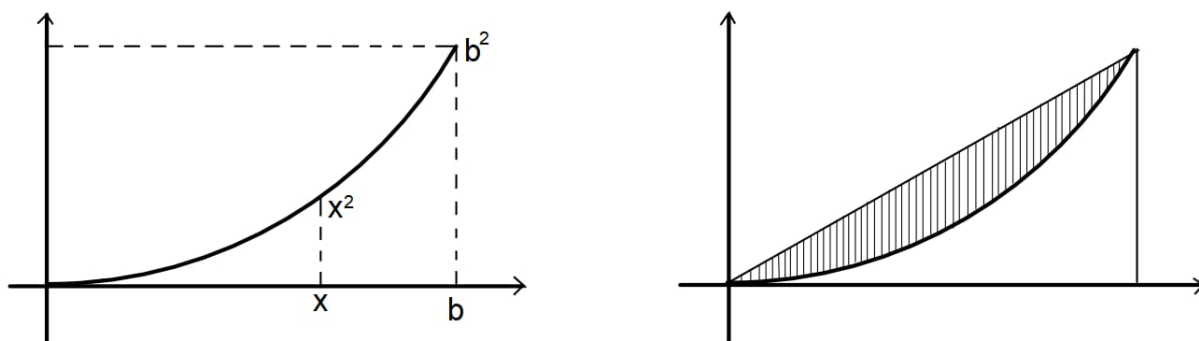
Corolário 1. A área de um disco de raio r é πr^2 .

□

2.3 Área do Segmento Parabólico

Nesta seção, aplicaremos o Teorema 3 (Teorema dos Intervalos Encaixantes), para o cálculo da área do segmento Parabólico. O método baseia-se em aproximar o cálculo de áreas, por áreas contendo erros por falta e por excesso. Nosso interesse é calcular a área do segmento parabólico (área sombreada), como mostra a Figura 2.13.

Figura 2.13: Parábola $y = x^2$ e segmento parabólico, respectivamente.



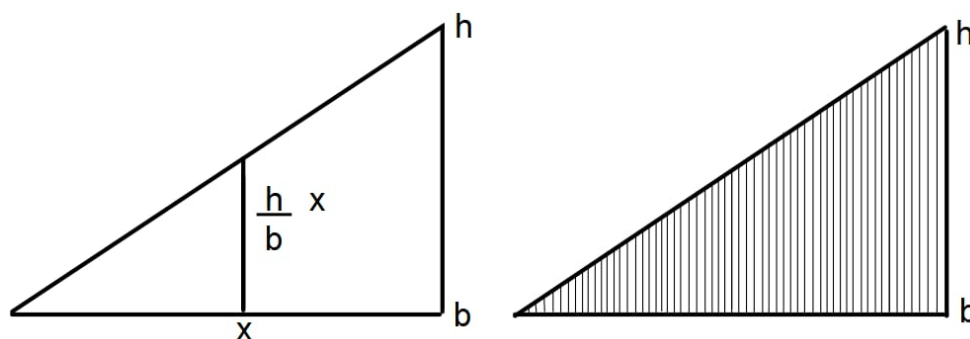
FONTE: Elaborado pelo autor.

2.3.1 O método

Para um bom entendimento do método, iremos aplicá-lo, para o cálculo da área da região limitada pelas retas $x = 0$, $x = b$, $y = 0$ e gráfico da função $y = \frac{h}{b}x$.

1. Identificando a região

Figura 2.14: Área da região limitado pelas retas $x = 0$, $x = b$, $y = 0$ e gráfico da função $y = \frac{h}{b}x$.



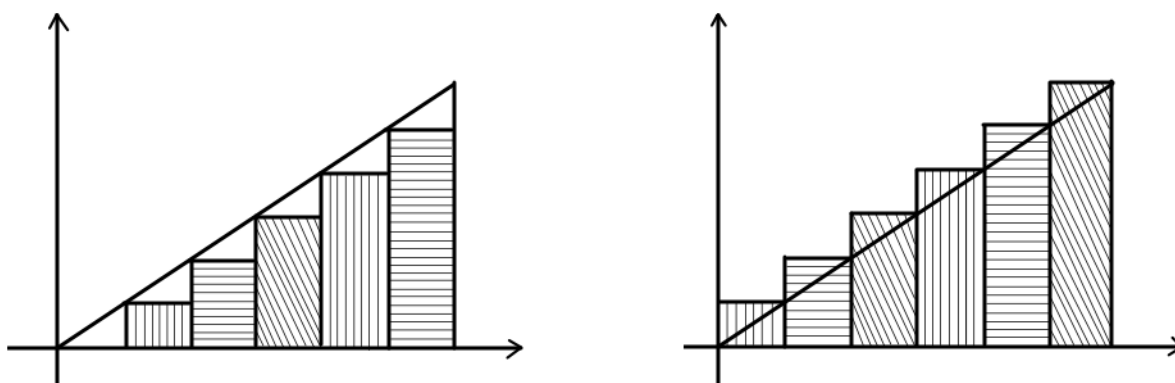
FONTE: Elaborado pelo autor.

Neste caso, a curva é dada pelo gráfico da função $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = \frac{h}{b}x$.

2. Aproximando a área A da região considerada no passo 1, pela área A_n do polígono P_n (ver Figura 2.15). Para isso, dividimos o intervalo $[0, b]$, (*Partição* \mathcal{P} .) em subintervalos $I_i = (x_{i-1}, x_i)$, com $i = 1, \dots, n$.

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b\}.$$

Figura 2.15: Aproximando a área da região, pela somas dos retângulo inferiores e superiores de base Δx e alturas $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$, respectivamente.



FONTE: Elaborado pelo autor.

Sem perda de generalidade, vamos considerar os pontos x_i igualmente espaçados, isso nos dá $\ell(I_i) = \Delta x = \frac{(b-a)}{n} = \frac{b}{n}$, $x_i = i\Delta x$, com $i = 0, 1, \dots, n$. Desta forma, obtemos

Somas Inferiores: s_n (Soma das áreas dos retângulos interiores à região)

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{h}{b}x_{i-1}\right)\Delta x_i = \frac{h}{b} \sum_{i=1}^n (i-1)\left(\frac{b}{n}\right)^2, \\ &= \frac{bh}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{bh}{n^2}(1+2+3+\cdots+n-1) = \frac{bh}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{bh}{2} \left(\frac{n^2-n}{n^2}\right), \\ s_n &= \frac{bh}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Somas Superiores: S_n (Soma das áreas dos retângulos superiores à região)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{h}{b}x_i\right)\Delta x_i = \frac{h}{b} \sum_{i=1}^n i\left(\frac{b}{n}\right)^2, \\ &= \frac{bh}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{bh}{n^2}(1+2+3+\cdots+n) = \frac{bh}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{bh}{2} \left(\frac{n^2+n}{n^2}\right), \\ S_n &= \frac{bh}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Como $s_n \leq A \leq S_n$ vem que $\frac{bh}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq A \leq \frac{bh}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Isto é,

$$-\frac{bh}{n} \leq A - \frac{bh}{2} \leq \frac{bh}{n}, \quad (2.4)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, a sequência de intervalos $I_n = \left[-\frac{bh}{n}, \frac{bh}{n}\right]$, tem a propriedade de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{bh}{n} - \left(-\frac{bh}{n}\right)\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2bh}{n} = 0$. Desde que $0 \in \left[-\frac{bh}{n}, \frac{bh}{n}\right]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue do Teorema dos Intervalos Encaixantes, que 0 é o único número real com esta propriedade. Assim, combinando esse resultado com a desigualdade 2.4. Concluimos que

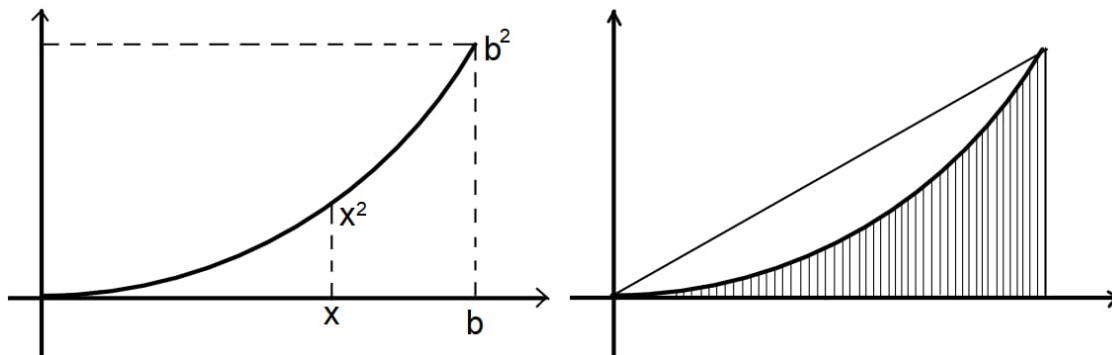
$$A - \frac{bh}{2} = 0 \iff A = \frac{bh}{2}.$$

2.3.2 Área da parábola

Neste caso, a curva é dada pelo gráfico da função $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2$, (ver Figura 2.16).

1. Identificando a região

Figura 2.16: Área da região limitado pelas retas $x = 0$, $x = b$, $y = 0$ e gráfico da função $y = x^2$.

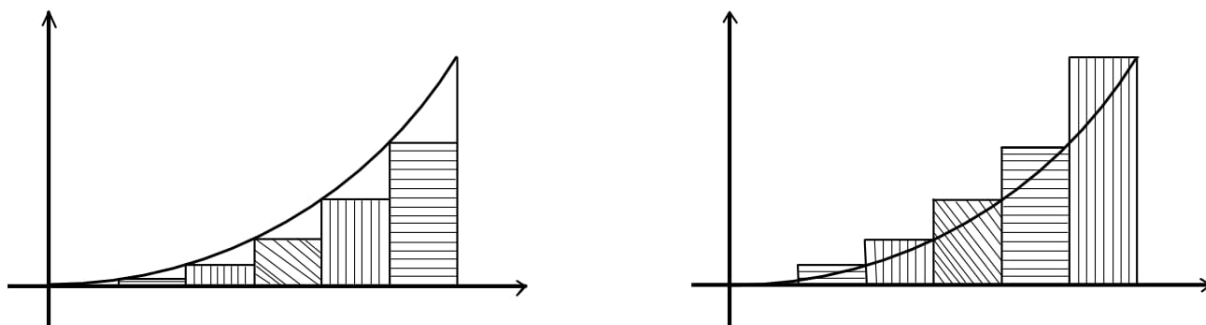


FONTE: Elaborado pelo autor.

2. Aproximando a área A da região considerada no passo 1, pela área A_n do polígono P_n (ver Figura 2.15). Para isso, dividimos o intervalo $[0, b]$, (*Partição de \mathcal{P} .*) em subintervalos $I_i = (x_{i-1}, x_i)$.

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b\}.$$

Figura 2.17: Aproximando a área da região, pela somas dos retângulo inferiores e superiores de base Δx e alturas $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$, respectivamente.



FONTE: Elaborado pelo autor.

Considerando $\Delta x = \frac{(b-a)}{n} = \frac{b}{n}$, $x_i = i\Delta x$, com $i = 0, 1, \dots, n$. Desta forma, obtemos

Somas Inferiores: s_n

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \left(\frac{b}{n}\right)^3, \\ &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i = \frac{b^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) = \frac{b^3}{n^3} \left[\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right], \\ s_n &= b^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right]. \end{aligned}$$

Somas Superiores: S_n

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^n i^2 \left(\frac{b}{n}\right)^3, \\ &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{b^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{b^3}{n^3} \left[\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right], \\ S_n &= b^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right]. \end{aligned}$$

Como $s_n \leq A \leq S_n$ vem que $b^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \leq A \leq b^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$. Isto é,

$$-\frac{b^3}{n} \leq A - \frac{b^3}{3} \leq \frac{b^3}{n}.$$

Procedendo de modo análogo, ao caso anterior, concluímos que

$$A = \frac{b^3}{3}.$$

Desta forma, concluímos que a área do segmento parabólico é dada por

$$A_{seg} = \frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} \Leftrightarrow A_{seg} = \frac{b^3}{6}$$

3

Cálculo de Volumes

Neste capítulo apresentaremos uma ideia intuitiva de volume e encontraremos as fórmulas dos volumes para diferentes sólidos partindo do volume do paralelepípedo retângulo e do Teorema de Cavalieri.

3.1 Volumes de sólidos

“Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para exprimir essa “quantidade de espaço” através de um número, devemos compará-la com uma unidade; e o resultado dessa comparação será chamado volume”. Essa unidade será o volume do cubo de aresta 1, também conhecido como cubo unitário, trará para cada unidade de comprimento uma correspondente de volume.

3.1.1 O Paralelepípedo Retângulo

Paralelepípedo retângulo (ou retangular) é a designação dada a um bloco cujas faces são paralelogramos de ângulos retos. Um paralelepípedo retangular possui seis faces, sendo que elas são idênticas e paralelas entre si duas a duas.

Como o paralelepípedo retângulo é definido pelas medidas de seu comprimento (a), sua largura (b) e sua altura (c), seu volume será fornecido por $V(a, b, c)$.

Definição 7. *O volume do cubo unitário, que também se enquadra como um paralelepípedo retângulo, designado por $V(1, 1, 1)$ é definido sendo igual a 1.*

Para deduzirmos a expressão do volume de um paralelepípedo retangular, usaremos o seguinte Teorema.

Teorema 5. *(Teorema Fundamental da Proporcionalidade) – Sejam x e y grandezas positivas, se x e y estão relacionados por uma função crescente $y = f(x)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

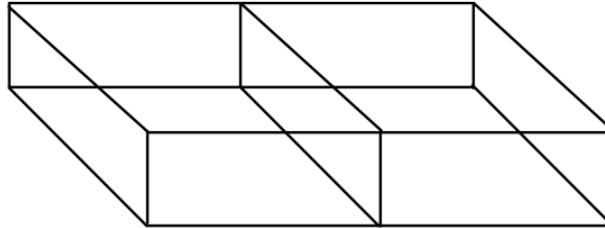
1. $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver (LIMA et al., 2016a)

3.1.2 Volume de Paralelepípedo

O paralelepípedo (retangular) é um bloco formado por retângulos em suas faces. Com isso suas dimensões ficam bem definidas podendo-se afirmar que tal figura tem comprimento a , largura b e altura c .

Figura 3.1: Dobrando o volume do paralelepípedo retangular.



FONTE: Elaborado pelo autor.

A figura acima mostra 2 paralelepípedos retângulos iguais e justapostos, logo o volume total será dobrado. Assim, temos que o volume do paralelepípedo retângulo é proporcional a suas dimensões. Considere o cubo unitário, se uma de suas medidas for multiplicada por n , seu volume também ficará. Assim,

$$V(1 \cdot n, 1, 1) = nV(1, 1, 1) = n.$$

Logo, se suas medidas forem multiplicada por números naturais m, n, p vem que:

$$V(m, n, p) = V(1 \cdot m, 1 \cdot n, 1 \cdot p) = mV(1, 1, n \cdot p) = mnV(1, 1, p) = mnpV(1, 1, 1) = mnp \cdot 1,$$

ou seja, $V(m, n, p) = mnp$

Se $a, b, c \in \mathbb{Q}$, escrevendo essas medidas na forma de frações reduzidas ao mesmo denominador, ou seja, $a = m/q$, $b = n/q$ e $c = p/q$ e particionando cubo unitário em cubos menores de arestas $1/q$, assim no cubo unitário cabem q^3 cubos de arestas $1/q$ e o volume de cada cubo menor é $1/q^3$. Perceba que no comprimento a cabem m cubos, pois $a = m(\frac{1}{q})$,

pelo mesmo raciocínio na largura b cabem n “cubinhos” e na altura c cabem p “cubinhos”, portanto,

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= mnp\left(\frac{1}{q^3}\right) = \left(\frac{m}{q}\right)\left(\frac{n}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right), \\ V(a, b, c) &= abc. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$V(a, b, c) = V\left(\frac{m}{q}, \frac{n}{q}, \frac{p}{q}\right) = \frac{m}{q} \frac{n}{q} \frac{p}{q} V(1, 1, 1) = abc.$$

Também neste caso, o produto das dimensões de um paralelepípedo resultará em seu volume. E por fim, para mostrar que $V(a, b, c) = abc$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, é válido para todo número real recorre-se ao Teorema 5 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade), pois o volume de um paralelepípedo é proporcional ao seu comprimento, sua largura e também a sua altura, ou seja, se dobrarmos o comprimento o volume dobra e o mesmo acontece para a largura e para a altura. Assim,

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= V(A \cdot 1, 1 \cdot b, 1 \cdot c) = aV(1, 1 \cdot b, 1 \cdot c) = abV(1, 1, 1 \cdot c), \\ V(a, b, c) &= abcV(1, 1, 1). \end{aligned}$$

Como, por definição $V(1, 1, 1) = 1$, vem que $V(a, b, c) = abc$.

3.2 O Princípio de Cavalieri

Este é um princípio, que apesar de já conhecido por gregos e ter sido usado por outros matemáticos, como Eudoxo, Demócrito e Arquimedes, acabou recebendo o nome de Cavalieri, um sacerdote matemático italiano, discípulo de Galileu, devido as suas obras lançadas sobre formas de determinar áreas e volumes de figuras geométricas rapidamente.

O Princípio de Cavalieri para volumes, afirma que

“Se dois sólidos são tais que, relativamente a um mesmo eixo Ox , suas seções transversais correspondentes à mesma abscissa x têm áreas iguais $A(x)$, então eles têm volumes iguais.” (ÁVILA, 2004)

A partir desta afirmação, e usando o volume do paralelepípedo retângulo como referência, podemos determinar os volumes de alguns sólidos simples.

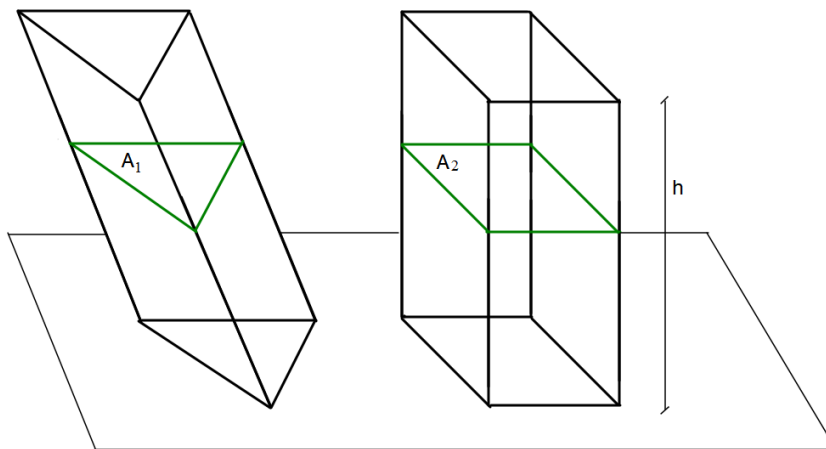
3.2.1 Prismas

“O **prisma** de bases A_1, A_2, \dots, A_n e A'_1, A'_2, \dots, A'_n é a porção limitada do espaço, delimitada pelos polígonos A_1, A_2, \dots, A_n e A'_1, A'_2, \dots, A'_n e pelos paralelogramos $A_i A_{i+1} A'_{i+1} A'_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.” (NETO, 2013)

“Os prismas são classificados de acordo com a forma de suas bases. Por exemplo, se temos pentágonos nas bases, teremos um prisma pentagonal. O prisma pode ser classificado em reto quando suas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, e oblíquo quando não são.”

Para calcular seu volume, considere um prisma de altura h , cuja área seja um polígono de área A , contido em um plano horizontal. Considere agora um paralelepípedo retângulo cuja altura também seja h e que tenha como base a área A . Suponha agora que os dois sólidos sejam cortados por outro plano horizontal, produzindo as áreas A_1 e A_2 , de modo que $A_1 = A_2$.

Figura 3.2: Exemplos de prismas: Oblíquos e retos, respectivamente.



FONTE: Elaborado pelo autor.

Assim sendo, segue do Princípio de Cavalieri, que ambos os sólidos possuem o mesmo volume, e logo, sendo o volume de um deles conhecido, o volume do segundo se torna também conhecido. Logo, pelo princípio de Cavalieri, temos que o volume do prisma será fornecido pelo produto da área de sua base por sua altura.

$$V_p = A_{base} \times h.$$

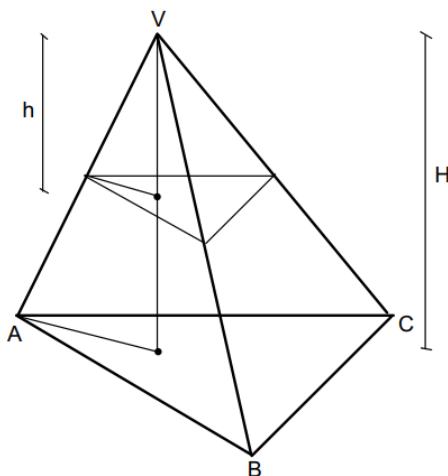
3.2.2 Pirâmides

“Dados um polígono convexo $A_1A_2 \cdots A_n$ e um ponto V não pertencente ao plano $A_1A_2, \cdots A_n$ definimos a **pirâmide** $VA_1A_2 \cdots A_n$ de **vértice** V e **base** $A_1A_2 \cdots A_n$, como a porção limitada do espaço, delimitada por A_1, A_2, \cdots, A_n e pelos triângulos VA_iA_{i+1} para $1 \leq i \leq n$, com a convenção de que $A_{n+1} = A_1$.” (NETO, 2013)

Em outros termos, a pirâmide é um sólido geométrico de base poligonal que possui todos os vértices num plano (plano da base). Sua altura corresponde a distância entre o vértice da pirâmide e sua base” (PIRÂMIDE. . . ,).

Para encontrarmos o volume da pirâmide qualquer, a partir do uso do Princípio de Cavalieri, precisaremos, primeiramente do conhecimento de alguns argumentos e teoremas que veremos a seguir. Considere uma pirâmide $VABC$ de vértice V , base ABC e altura H , sendo seccionada por um plano, gerando uma seção DEF que possui uma distância h do vértice.

Figura 3.3: Pirâmide triangular (tetraedro), de base ABC e altura H .



FONTE: Elaborado pelo autor.

A partir disto, podemos deduzir que:

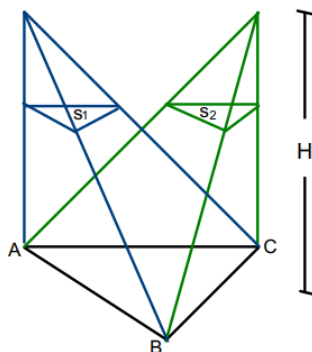
- i) A seção e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h}{H}$.
- ii) A razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

A demonstração desses resultados pode ser encontrada em (LIMA et al., 2016b), mais precisamente na seção (**Teorema de Tales para Planos Paralelos**).

Teorema 6. *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm o mesmo volume.*

Demonstração. Se tivermos duas pirâmides de mesma base ABC , com vértices V_1 e V_2 e com mesma altura, um plano paralelo ao plano ABC e distando h do vértice das pirâmides, produz as seções S_1 e S_2 , em cada pirâmide, respectivamente, como mostra a Figura 3.4

Figura 3.4: Pirâmide de mesma bases ABC e alturas H , respectivamente.



FONTE: Elaborado pelo autor.

Seja A a área da base ABC e sejam A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2 . Segue dos itens *i)* e *ii)* acima, temos que:

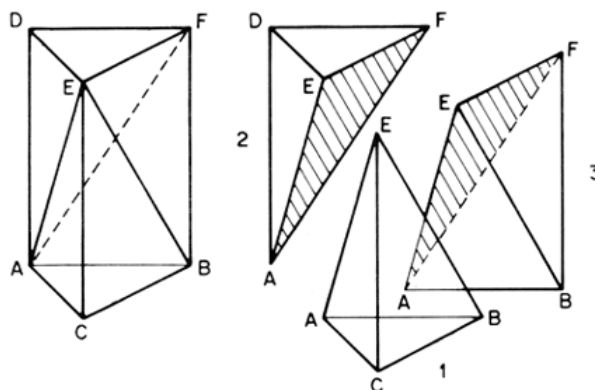
$$\frac{A_1}{A} = \frac{h^2}{H^2} = \frac{A_2}{A},$$

de onde concluímos que as áreas das seções são iguais e, pelo Princípio de Cavalieri, segue que os volumes são iguais. ■

Teorema 7. *O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Consideremos um prisma triangular cujas bases são os triângulos ABC e DFE . Sendo $[ABC]$ a área de ABC e a altura do prisma seja h . Como já sabemos seu volume será o produto de sua base pela altura. Vamos dividir esse prisma em três tetraedros, sendo

- Tetraedro 1: de base DFE e vértice A .
- Tetraedro 2: de base ACB e vértice E .
- Tetraedro 3: de base EBF e vértice A .

Figura 3.5: Decomposição de uma pirâmide em três tetraedros.

FONTE: Livro A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2, (LIMA et al., 2016b).

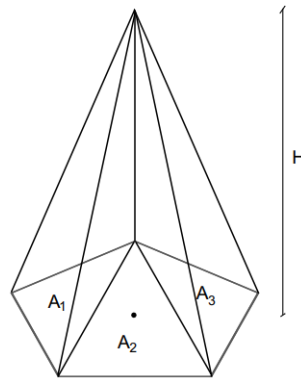
Seja V_1 , V_2 e V_3 os volumes dos três tetraedros, respectivamente e V seja o volume do prisma, pelo teorema visto anteriormente, temos que o volume de uma pirâmide não muda se, mantendo a base fixa, movemos o vértice em um plano paralelo a essa base. Podemos concluir então (ver (LIMA et al., 2016b)) que

$$V_1 = V_2 = V_3.$$

Temos então que a soma dos volumes dos três tetraedros é igual ao volume do prisma, logo temos, por consequência que cada um deles, já que possuem o mesmo volume, tem volume igual a um terço do volume do prisma. Assim, concluímos que, o volume da pirâmide de base triangular é igual a um terço da área da base pela altura. ■

Teorema 8. *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Para comprovar tal teorema, precisamos primeiro observar que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular.

Figura 3.6: O volume de uma pirâmide qualquer.

FONTE: Elaborado pelo autor.

Sendo assim, uma pirâmide qualquer, de altura H e que sua base de área A , tem sua base dividida em triângulos de áreas A_1, A_2, \dots, A_n . Como o volume da pirâmide é a soma do volume das n pirâmides triangulares, seu volume será dado por:

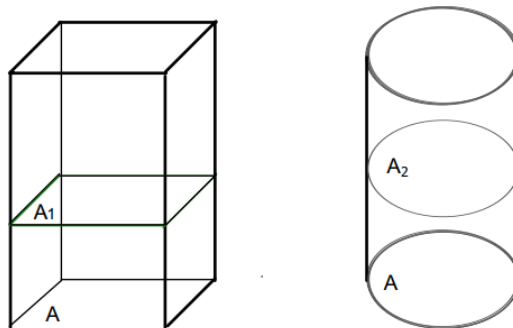
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}A_1H + \frac{1}{3}A_2H + \dots + \frac{1}{3}A_nH, \\ &= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \dots + A_n)H, \\ V &= \frac{1}{3}AH. \end{aligned}$$

■

3.2.3 Cilindro

“Dados, no espaço, um real positivo R e uma reta r , o **cilindro (de revolução)** de **eixo** e e **raio** R , é o conjunto dos pontos P do espaço, os quais estão à distância R da reta e .” (NETO, 2013).

Como em um cilindro suas seções possuem a mesma área que sua base, podemos, também utilizando o Princípio de Cavalieri, concluir que seu volume é a área de sua base pela sua altura. Para tal basta supormos um prisma qualquer de altura H e base de área A e o cilindro que possua mesmas medidas, ou seja, altura H e área da base A (ver Figura 3.7).

Figura 3.7: Calculando o volume de um Cilindro, usando o Princípio de Cavaliere.

FONTE: Elaborado pelo autor.

Se um plano horizontal secciona os dois sólidos teremos que a área das regiões encontradas serão A_1 e A_2 , onde

$$\frac{A_1}{A} = \frac{h^2}{H^2} = \frac{A_2}{A}.$$

Daí, obtemos $A_1 = A_2 = A$, logo o volume do cilindro será igual ao volume do prisma. Assim

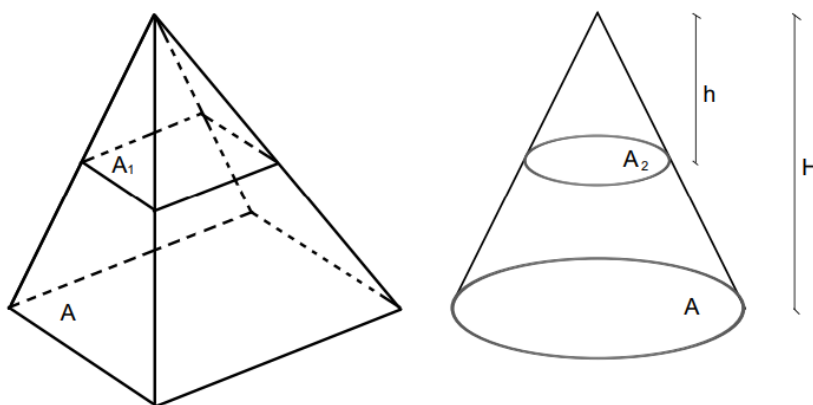
$$\text{Volume do Cilindro} = A \times H.$$

3.2.4 Cone

“Dados, um ângulo θ , uma reta e e um ponto $V \in e$, o **cone (de revolução)** de **eixo** e e **vértice** V e **abertura** 2θ é o conjunto dos pontos A do espaço, tais que a reta AV forma um ângulo θ com a reta e ” (NETO, 2013).

“Cone é um sólido geométrico que faz parte dos estudos da geometria espacial. Ele possui uma base circular, formada por segmentos de reta que têm uma extremidade num vértice em comum. Além disso, o cone possui a altura, caracterizada pela distância do vértice do cone ao plano da base. Possui também a denominada geratriz, ou seja, a lateral formada por qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice e a outra na base do cone. Os cones, dependendo da posição do eixo em relação à base, são classificados em: Cone Reto e Cone Oblíquo”(CONE,).

Figura 3.8: Calculando o volume de um Cone de base circular de raio r e altura H , usando o Princípio de Cavaliere.



FONTE: Elaborado pelo autor.

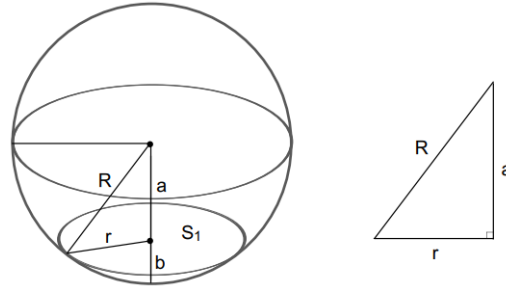
Para o volume do cone utilizaremos o mesmo raciocínio aplicado anteriormente, já que assim como o cilindro é um caso particular do prisma, o cone é um caso particular de pirâmide.

Sendo um cone de altura H e base de área A , contida em um plano horizontal e tendo uma pirâmide com mesmas altura e área de base que este cone, se um outro plano, a uma distância h do vértice desses sólidos os secciona gerando as figuras de área A_1 e A_2 , teremos como consequência que $A_1 = A_2$ e, pelo Princípio de Cavalieri, podemos concluir que ambos os sólidos têm mesmo volume e, portanto,

$$\text{Volume do Cilindro} = \frac{1}{3}A \times H.$$

3.2.5 A Esfera

A esfera é um sólido geométrico de revolução obtido através da rotação de um semicírculo em torno do seu eixo. É composta por todos os pontos que estão a uma distância menor ou igual que o raio em relação ao seu centro.

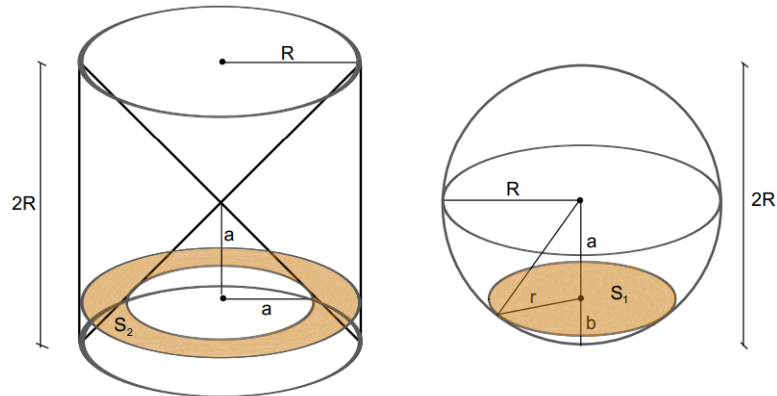
Figura 3.9: Esfera de raio R .

FONTE: Elaborado pelo autor.

Como nos casos anteriores, usaremos o Princípio de Cavalieri para obter o volume da esfera. Para tal, primeiro observaremos que ao seccionar uma esfera de raio R , como mostra a figura, encontraremos o segmento esférico de área S_1 e de raio r , de onde podemos definir, pelo Teorema de Pitágoras, que $R^2 = a^2 + r^2$, ou seja, $r^2 = R^2 - a^2$. Por consequência

$$S_1 = \pi r^2 \Leftrightarrow S_1 = \pi(R^2 - a^2).$$

Vamos agora considerar um cilindro, cuja base possui raio R e sua altura é dada por $2R$, onde há dois cones vazios inscritos em seu interior, os vértices desses cones coincidem e suas bases são correspondentes a cada base do cilindro, como mostra a imagem.

Figura 3.10: Calculando o volume de uma esfera de raio R , usando o Princípio de Cavalieri.

FONTE: Elaborado pelo autor.

Ao seccionarmos este cilindro a uma distância a do vértice dos cones obteremos uma coroa circular de área S_2 , que será dada pela diferença entre os círculos de raio R e a , logo

$$S_2 = \pi R^2 - \pi a^2 \Leftrightarrow S_2 = \pi(R^2 - a^2).$$

Logo, sendo $S_1 = \pi(R^2 - a^2)$ e $S_2 = \pi(R^2 - a^2)$, podemos concluir que $S_1 = S_2$. Sendo tal

resultado verdadeiro para todos os valores de a , temos então que os volumes dos dois sólidos são iguais, de modo que volume da esfera = volume do cilindro - $2 \times$ volume do cone. Isto é

$$\text{Volume da esfera} = \pi R^2(2R) - 2\left(\frac{1}{3}\right)R^2R. \text{ O que nos dá}$$

$$\text{Volume da esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



4

Aproximação de Volumes: Uma Abordagem Computacional

Neste capítulo apresentaremos a integral como soma de limites e sua aplicação para se encontrar a área de figuras planas e o volume de sólidos.

4.1 A integral de Riemman

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$, limitada, isto é, existem número reais m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$. Uma partição \mathcal{P} do intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos de $[a, b]$:

$$\mathcal{P} : \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{j-1} < x_j < x_{j+1} < \cdots < x_n = b\}.$$

Dadas uma função f e uma partição \mathcal{P} , definimos as somas de Darboux-Riemman, ou simplesmente, somas de Riemman (a soma inferior $s(f, \mathcal{P})$ e a soma superior $S(f, \mathcal{P})$ pelas expressões:

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \quad (4.1)$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) \quad (4.2)$$

onde $m_j = \inf\{f(x) : x_{j+1} \leq x \leq x_j\}$ e $M_j = \sup\{f(x) : x_{j+1} \leq x \leq x_j\}$.

Definição 8. (*LIMA, 1995*) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real e limitada em $[a, b]$. A integral inferior, que se designa por $\int_a^b f = \sup\{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbb{P}\}$ onde \mathbb{P} representa o conjunto de todas as partições de $[a, b]$. A integral superior que se designa por $\int_a^b f = \inf\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbb{P}\}$, é o supremo das somas inferiores.

Definição 9. (LIMA, 1995) Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, é integrável se

$$\int_{-a}^b f = \overline{\int}_a^b f.$$

O valor comum das integrais inferiores e superiores é chamado de integral de f , que se designa por $\int_a^b f$. Usa-se também a notação $\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 9. Toda função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua é integrável.

Demonstração. ver (LIMA, 1995) e (FIGUEIREDO, 1996).

4.1.1 A integral como limite de somas

Seja $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Chamaremos *norma* de \mathcal{P} ao número $\|\mathcal{P}\| = \max\{x_j - x_{j-1} : \text{com } j = 1, 2, \dots, n\}$.

Definição 10. Dada uma partição $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$. Pontilhar \mathcal{P} é escolher, em cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ um ponto ξ_j .

Definição 11. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e \mathcal{P}^* uma partição pontilhada. Formemos a seguinte soma de Riemman

$$\sum(f, \mathcal{P}^*) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

Observação 2. A soma inferior $s(f, \mathcal{P})$ e a soma superior $S(f, \mathcal{P})$ são somas de Riemman e $s(f, \mathcal{P}) \leq \sum(f, \mathcal{P}^*) \leq S(f, \mathcal{P})$

Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitada, diremos que o número real I é o limite de $\sum(f, \mathcal{P}^*)$ quando a norma $\|\mathcal{P}\|$ tende para zero e escrevemos

$$I = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum(f, \mathcal{P}^*).$$

Teorema 10. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitada. Existe o limite $I = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum(f, \mathcal{P}^*)$, se e somente se, f for integrável. No caso afirmativo, tem-se $I = \int_a^b f(x)dx$.

Demonstração. ver (LIMA, 1995)

4.2 Aplicação I: O cálculo de áreas

Definição 12. (ÁVILA, 2004) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ um função real, contínua e não negativa. A área da região compreendida entre o eixo das abscissas, as reta $x = a$ e $x = b$ e a $(x, y) = (x, f(x))$ é definida com

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

4.2.1 A área da Elipse

Exemplo 1. Calcule a área da elipse centrada na origem, tendo sua equação dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução. Como a elipse simétrica em relação aos eixos maiores e menores, podemos calcular sua área calculando inicialmente sua área no primeiro quadrante, que neste caso sua curva é dada pelo gráfico da função $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Desta forma a área da elipse é dada por

$$A = 4 \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

Façamos as mudanças de variáveis $x = a \cos \theta$ e $y = b \sin \theta$. Isso nos dá $dx = -a \sin \theta d\theta$. Portanto,

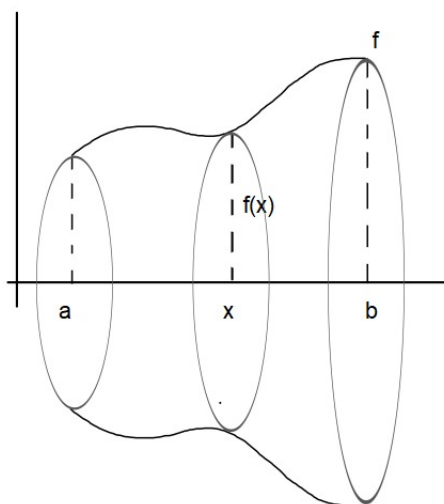
$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 4b \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2 \theta}{a^2}} (-a \sin \theta d\theta), \\ &= 4b \left[\int_{\pi/2}^0 \sin \theta (-a \sin \theta) d\theta \right] = 4ab \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \right), \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) d\theta, \\ &= 4ab \left[\theta \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} 1 + \cos 2\theta \right) d\theta \right], \\ &= 4ab \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\theta \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/2} \right) d\theta \right], \\ A &= 4ab \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Daí vem que, $A = \pi ab$. ■

4.3 Aplicação II: O método das fatias

O método das fatias se baseia nas idéias do Procípio de cavaliere, pois de acordo esse método, busca-se calcular o volume de um sólido, somando as áreas, geradas pelas seções transversais, que compõem o sólido, ver Figura 4.1.

Figura 4.1: O método da fatias: Somando as áreas (de cortes transversais) que constitui o interior do sólido.



FONTE: Elaborado por OZIVAL RODRIGUES DOS REIS.

No caso, do sólido ser gerado pela rotação do gráfico de uma curva, podemos calcular o volume do sólido como segue.

Definição 13. (ÁVILA, 2004) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ um função real, contínua e não negativa. O volume do sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico da função f , entorno do eixo das abcissas é definido como*

$$V_{revol} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

4.3.1 O volume do Parabolóide de Revolução

Exemplo 2. *Cálcule o volume do parabolóide de revolução de altura h .*

Solução O parabolóide de revolução de altura h é o sólido gerado pelo gráfico da função $f : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Desta forma, o volume desse sólido é dado por

$$V_{parab} = \pi \int_0^h (\sqrt{x})^2 dx$$

Portanto,

$$V_{parab} = \pi \int_0^h (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^h x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h,$$

$$V_{parab} = \pi \frac{h^2}{2}.$$

Daí vem que, $V_{parab} = \frac{\pi h^2}{2}$.

■

4.4 Integração Numérica

Nesta seção apresentamos um algoritmo computacional, o qual pode ser usado para calcular a integral de uma função (*integrável*).

4.4.1 A regra dos Trapézios

A regra dos trapézios é um método de integração numérica, baseado na aproximação da integral definida de uma função f , aproximando-a por um polinômio interpolante de grau 1 (*Polinômio de Lagrange*). Isto é,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (4.3)$$

4.4.2 Regra dos trapézios repetida

Em alguns casos, por exemplo, quando o intervalo de integração é de grande magnitude, é provável que o erro cometido seja grande. Assim, uma estratégia muito usada é particionar o intervalo $[a, b]$ em subintervalos e aplicar a regra do trapézio 4.3, em cada um desses subintervalos. Isto é,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \quad (4.4)$$

sendo $h = \frac{b-a}{n}$. Para mais detalhes desse método de integração e outros ver (RUGGIERO; LOPES, 1996).

Baseado no método 4.4, desenvolvemos um pseudo código abaixo, com o objetivo de

deixar livre o leitor para usar a linguagem a qual se sinta mais confortável.

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{Entrada} : a, b, f(x), n, h, \text{ soma e } I. \\ \left[\begin{array}{l} \text{Para } i = 1. \dots, n - 1, \text{ faça} \\ \text{soma} = \text{soma} + f(a + ih) \end{array} \right. \\ I = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2\text{soma} + f(b) \right) \\ \mathbf{Saída} : \text{O valor aproximada da integral definida de } f(x) \text{ em } [a, b] \text{ é: } I. \end{array} \right.$$

Observação 3. *Observe que esse método não necessita da expressão analítica, para a função f . Na verdade, precisamos apenas dos valores da função nos pontos x_i , isto é, necessitamos apenas da tabela.*

x	$a = x_0$	x_1	x_2	\dots	x_{n-1}	$x_n = b$
$f(x)$	$f(a)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	\dots	$f(x_{n-1})$	$f(b)$

Usaremos esse algoritmo para resolver os seguintes problemas.

Observação 4. *Esses resultados numéricos foram obtidos, usando a linguagem de programação **Linguagem C**.*

Exemplo 3. *Calcular o valor aproximado da área da elipse dada pela seguinte equação*

$$x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

A qual tem por valor exato: $A = \frac{\pi}{2}$

Neste caso, temos: $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$.

Tabela 4.1: Tabela de valores aproximados da área da elipse $x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$.

n	h	$A_n = 4I$ (área aproximada)	erro: $ A - A_n $
2	0.500000	1.366035	0.204771
4	0.250000	1.497854	0.072942
8	0.125000	1.544910	0.025887
16	0.062500	1.561626	0.009170
32	0.031250	1.567551	0.003245
64	0.015625	1.569649	0.001148
128	0.007813	1.570390	0.000406
256	0.003906	1.570654	0.000143
512	0.001953	1.570746	0.000050
1024	0.000977	1.570778	0.000019

FONTE: Elaborado pelo autor.

Exemplo 4. Calcular o valor aproximado do volume do parabolóide de revolução de altura 1, tendo como curva geratriz $y = \sqrt{x}$, o qual tem por valor exato: $A = \frac{\pi}{2}$

Neste caso, temos: $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = (\sqrt{x})^2 = x$.

Tabela 4.2: Tabela de valores aproximados do volume do parabolóide de revolução, gerado pela curva $(x, y) = (x, \sqrt{x})$.

n	h	$V_n = \pi I$ (volume aproximado)	erro: $ V - V_n $
1	1.000000	1.570796	0.000000

FONTE: Elaborado pelo autor.

Observação 5. Neste caso, o valor deu exato, devido ao fato de que a regra dos trapézios calcula a integral exata de uma função afim $y = ax + b$, qualquer.

5

Uma Introdução a Linguagem C

Neste capítulo, faremos uma breve introdução a Linguagem C que pode ser visto com mais detalhes em (DEITEL; DEITEL, 2011) e (CELES; CERQUEIRA; RANGEL, 2004). O C é uma linguagem de programação de computadores com a qual podemos criar um conjunto de instruções para que o computador possa executar. Foi desenvolvida por Dennis Ritchie em 1972 com o objetivo de facilitar a criação de programas extensos com menos erros.

Em C, todo programa deve ter uma função `main` (principal). Esta é uma função especial, sendo como roteiro principal do programa e sua execução sempre começa por ela. Todas as outras funções são chamadas, direta ou indiretamente, a partir da `main`.

5.1 Imprimindo uma linha de texto

Apresentaremos agora um simples programa em que o computador imprime uma linha de texto.

```
1 //////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
2 //////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
3 //////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
4 //Meu Primeiro Programa: Hello World
5 //Data: dd/mm/aaaa
6 //Hora: hh/mm
7 #include<stdio.h>
8
9 int main(void){
10     printf("Hello World !!!");//Funcao que exhibe um mensagem de texto
11     printf("\n\n");
12     return 0;
13 }
```

- A linha 7 é uma diretiva de **pré-processador C**. Ele diz ao processador que inclua no programa o cabeçalho-padrão de entrada e saída;
- A linha 9 faz parte do programa em C. Essa é a função **main**, onde todos os programas começam a executar;
- A linha 10, instrui o computador a realizar uma ação, a saber, imprimir na tela uma **string de caracteres** marcada pelas aspas.

5.2 Variáveis

A linguagem C usa o conceito de variáveis que é um local na memória que armazenam dados que podem ser modificados, um certo valor (um número, por exemplo) e que têm um nome. Em C, há quatro tipos primitivos de dados:

Tabela 5.1: Variáveis Primitivas

Tipo	Utilidade
<code>int</code>	Armazena um número inteiro
<code>float</code>	Armazena um número de ponto flutuante
<code>double</code>	Como <code>float</code> , mas fornece maior precisão
<code>char</code>	Guarda um único caractere ou uma sequências de caracteres (strings)

5.3 Aritmética em C

Em C, estes operadores funcionam de maneira usual, isto é, para realizar alguma operação basta colocar o operador entre dois números, que podem ser constantes numéricas ou variáveis. A tabela 5.2 mostra alguns operadores que são utilizados em C.

Tabela 5.2: Operadores Aritméticos

Operação em C	Operador Aritmético	Exemplo em C
Adição	+	<code>a + b</code>
Subtração	-	<code>a - b</code>
Multiplicação	*	<code>a * b</code>
Divisão	/	<code>a / b</code>
Resto da divisão entre dois inteiros	%	<code>a % b</code>


```

5
6     int main(){
7         int Inteiro1, Inteiro2;
8
9         printf("Digite o primeiro inteiro: ");
10        scanf("%d", &Inteiro1);
11        printf("Digite o segundo inteiro: ");
12        scanf("%d", &Inteiro2);
13
14
15        printf("A soma de %d e %d eh: %d", Inteiro1,Inteiro2,Inteiro1+Inteiro2);
16
17
18
19        return 0;
20    }

```

5.4 Tomada de decisão

É muito comum que em muitos programas, haja a necessidade de tomar decisão durante a execução do mesmo, por exemplo, tomar a decisão se a nota de uma pessoa seria maior ou igual a 5, e se fosse, imprimir a mensagem **"Parabéns! você foi aprovado"**. Para isso, a linguagem C provém da estrutura **if**, o qual permite que um programa tome decisões com base na veracidade ou falsidade de uma **condição**. Sua forma geral é:

```

if(expressão booleana){
    bloco de comandos
    ...
}

```

Se a condição(expressão **booleana**) é satisfeita(ou seja, se ela é for **true**-verdadeira) a instrução no corpo da estrutura **if** é executada. Se a condição não for satisfeita(ou seja, se ela é for **false**-falsa) a instrução no corpo da estrutura **if** não é executada. Independente da instrução for executada ou não, a execução prossegue com a próxima instrução após a estrutura **if**.

O programa abaixo, exhibe a relação entre dois números inteiros dados.

```

1     #include <stdio.h>
2
3     int main( void ){
4         int num1;
5         int num2;
6
7         printf("Entre com dois inteiros e eu he direi\n");
8         printf("as realcoes que eles satisfazem: ");
9         scanf("%d%d", &num1, &num2);
10        if(num1==num2){
11            printf("%d eh igual a %d\n", num1,num2);
12        }/*Fim do if*/
13        if(num1!=num2){
14            printf("%d eh nao eh igual a %d\n", num1,num2);
15        }/*Fim do if*/
16        if(num1 < num2){
17            printf("%d eh menor que %d\n", num1,num2);
18        }/* Fim do if*/

```

```

19     if(num1 > num2){
20         printf("%d eh maior que %d\n", num1,num2);
21     }/*Fim do if */
22     if(num1 <= num2){
23         printf("%d eh menor ou igual a %d\n", num1,num2);
24     }/*Fim do if */
25     if(num1 >= num2){
26         printf("%d eh maior ou igual a %d\n", num1,num2);
27     }/*Fim do if */
28     return 0; /* indica que o programa foi concluido com sucesso*/
29
30 }//FIM DA MAIN

```

5.5 Estruturas de repetição – Laços

A linguagem C oferece diversas construções possíveis para a realizações de laços (CELES; CERQUEIRA; RANGEL, 2004), (DEITEL; DEITEL, 2011). Nesse trabalho iremos apresentar somente o comando **for**. Sua forma geral é:

```

for(inicialização; expressão booleana; expressão de incremento){
    bloco de comandos
    ...
}

```

- A estrutura de laço **for** é uma das mais usadas na linguagem C.
- As três condições que a estrutura tem deve ser, cautelosamente, analisadas antes do programa ser inicializados.

O programa abaixo, calcula a soma dos n primeiros números naturais.

```

1     #include <stdio.h>
2
3     int main( void ){
4         int i;
5         int n;
6         int Soma=0;
7         printf("Digite um numero inteiro positivo: ");
8         scanf("%d", &n);
9         for(i=1; i<=n; i=i+1){
10            Soma=Soma+i;
11        }
12        printf(" A soma dos %d primeiros numeros naturais eh: %d", n, Soma);
13        return 0;
14    }//FIM DA MAIN

```

5.6 Programa em C para o cálculo de volumes – Princípio de Cavaliere

De acordo com o que foi exposto no capítulo anterior, podemos calcular o volume do sólido de revolução, gerado pelo gráfico de uma função conhecendo a expressão da func

ção ou, de modo mais prático, conhecendo apenas alguns valores dessa função, pois isso é suficiente para calcularmos a integral aproximada.

Abaixo encontra-se o programa, desenvolvidos em Linguagem C, que calcula essa integral aproximada, usando a regra dos trapézios repetida, com o objetivo de obter os valores do volume de um sólido somando as áreas das seções transversais, paralelas ao eixo da ordenadas e de abscissas $x = x_i$.

```

1 #include<stdio.h>
2 #include<stdlib.h>
3 #include<math.h>
4
5 float funcao(float a, float h);
6 int main(void){
7     float a, b;
8     float h, soma=0.0, I_TR=0.0;
9     int i, numeroDaParticao;
10
11     printf("Digite o extremo inferior do intervalo [a,b]: \n");
12     scanf("%f", &a);
13     printf("Digite o extremo superior do intervalo [a,b]: \n");
14     scanf("%f", &b);
15     printf("Digite o numero de particoes: \n");
16     scanf("%d", &numeroDaParticao);
17
18
19     h=(b-a)/(numeroDaParticao);
20
21     for(i=1; i<numeroDaParticao; i=i+1){
22         soma=soma+funcao(a+i*h,h);
23     }//Fim do For
24     soma=funcao(a,h)+(2*soma)+funcao(b,h);
25     I_TR=(h/2)*soma;
26     printf("O valor da integral, com %d particoes eh: %f ", numeroDaParticao, (M_PI)*I_TR);
27
28
29
30     return 0;
31 }//Fim da Main
32
33 float funcao(float a, float h){
34     return a;
35 }

```

Na última linha a expressão a , representa a expressão x , ou seja, o código irá nos gerar um valor aproximado, para a integral de $\int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx$, que gerou a Tabela 4.2. Obtivemos a Tabela 4.2, usando o programa acima para a expressão $\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$, isto é calculamos um valor aproximado para a integral $\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)^2$.

6

O Uso de Materiais Concretos

Os alunos precisam ser capazes de realizar observações, estabelecer conexões entre seu conhecimento prévio em matemática e suas experiências cotidianas, de modo a chegar a soluções/conclusões próprias, que podem ser questionadas e/ou reforçadas pelo conhecimento matemático formal. Como definido pela Base Nacional Curricular Comum (BRASIL. Ministério da Educação, 2018).

“ da mesma forma que na fase anterior, a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação. Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.”

Assim, quando falamos de ensino de matemática, e aqui, no caso deste trabalho, mais especificamente do ensino de geometria, o uso de materiais concretos surge como uma possibilidade pois, como diz Mendes “o uso de materiais concretos no ensino da matemática é um ampla alternativa didática que contribui para a realização de intervenções do professor em sala de aula” (GONÇALVES, 2019).

Outro ponto interessante do uso de materiais concretos é que as definições não necessariamente precisam ser o ponto de partida do processo educacional, como afirma Castelnuovo “as descrições devem preceder as definições; e conseqüentemente, o conhecimento matemático é construído através da experiência direta com as operações sobre esses objetos” (LUCIANO, 2017).

E ainda, como afirmam (LIMA et al., 2016b) “o aluno do segundo grau, no seu primeiro contato com a geometria espacial, se sente mais seguro quando compreende bem resultados obtidos em situações particulares, para depois estendê-los em casos mais gerais”, como por exemplo reconhecer as características de um quadrado, para então expandir sua percepção em relação às características de outros paralelogramos.

A oralidade também recebe destaque neste processo, pois, de acordo com Dantas e Manoel “as atividades experimentais realizadas com a utilização de materiais concretos podem auxiliar os alunos a transformarem o conhecimento declarativo em processual” (LUCIANO, 2017). Eles denominam esse processo de procedimentalização.

De acordo com Santos “o ideal é que a utilização de material concreto para o ensino da geometria ocorresse desde os primeiros contatos do aluno com a matemática” (GONÇALVES, 2019). Porém muitos alunos nunca tiveram contato com ferramentas como compasso e transferidor, pois tiveram acesso a um ensino preso aos livros didáticos e a aulas expositivas, com longos monólogos dos professores, onde o aluno não obteve a oportunidade de se expressar.

Quando falamos dos alunos em retorno do período pandêmico esta situação se intensifica pois, muitos estiveram longos períodos de tempo ausentes da sala de aula e a possibilidade de terem tido acesso ao uso de materiais concretos fica ainda mais limitada do que a de turmas anteriores, o que é uma pena, pois, como afirma Luciano “entende-se que as atividades com materiais concretos sejam essenciais para a constituição de um ensino-aprendizagem significativo e atraente, pois esses materiais auxiliam os alunos na construção do conhecimento processual” (LUCIANO, 2017).

6.1 Atividades Propostas

As atividades aqui propostas buscam seguir uma linha de aplicação partindo do que os alunos saibam acerca dos temas abordados nas atividades, sem qualquer tipo de apresentação ou colocações do professor, dando a eles liberdade de expressar seus conhecimentos e chegar às suas próprias conclusões, que servirão de base para a construção de novas conclusões, até a chegada a resultados satisfatórios.

Este processo teve como referência o modelo de resolução de problemas apresentado por Onuchic e Allevato (JUNIOR; CASTRUCCI, 2018a) – (JUNIOR; CASTRUCCI, 2018b), que pode ser dividido nas seguintes etapas:

Preparação do problema: nesta primeira etapa, vale ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não foi trabalhado anteriormente em sala de aula. A ideia é que mobilizem os conhecimentos

que possuem para, a partir deles, construir novos conhecimentos necessários para a resolução.

Leitura do problema: é a etapa em que se promove uma leitura individual do problema, seguida de uma leitura em conjunto, a fim de propiciar esclarecimento de eventuais dúvidas. **Resolução do problema:** com base no entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. **Observar e incentivar:** nesta etapa, o professor se torna um mediador e, portanto, não tem mais o papel de transmissor do conhecimento.

Registro das resoluções no quadro de giz: representantes dos grupos são convidados a registrar e socializar, no quadro de giz, suas resoluções independentemente de estarem certas ou erradas.

Plenária: para essa etapa, são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas no quadro de giz pelos colegas, defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. Nesse processo, o professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. **Busca do consenso:** depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso do resultado correto.

Formalização do conteúdo: neste momento, denominado formalização, o professor registra no quadro de giz uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática –, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos por meio da resolução do problema.

As atividades foram desenvolvidas na turma de 9º ano da EEEFM João Santos, em Capanema-PA, por meio de uma oficina de geometria, que ocorreu durante o primeiro semestre de 2023. Assim sendo, uma quantidade de aulas semanais foi destinada para o desenvolvimento do projeto, assim como foi desenvolvido um método de avaliação próprio para as atividades desenvolvidas, onde o foco era a participação, interação em sala e a produção de materiais. Não houve a aplicação de atividade de diagnose especificamente direcionada aos objetos de conhecimento aqui em destaque, pois as atividades partem de conteúdos presente na matriz curricular do 6º ano do ensino fundamental, para só então avançar para os conteúdos presentes nas matrizes dos anos seguintes. Porém em caso de aplicação sem que se respeite a ordem aqui indicada se torna aconselhável que primeiramente se aplique uma diagnose para a confirmação de que os alunos possuem previamente os conhecimentos necessários para desenvolvê-la. Os materiais (régua, compasso, etc) foram usados de forma compartilhada entre os alunos, sendo entregues e recolhidos a cada atividade de acordo com a necessidade, exceto a malha quadriculada, já que cada aluno recebeu uma, de modo a produzir um arquivo individual com todas as atividades desenvolvidas. Os alunos foram informados no primeiro dia da oficina sobre como ela funcionaria e como seria o método avaliativo. Algumas atividades foram realizadas individualmente, mas em sua maioria, as atividades foram realizadas de forma colaborativa, e mesmo nas atividades individuais foi incentivado o debate e a troca

de informações entre os alunos. As atividades priorizam a fala, tanto por parte da professora, ao realizar as descrições das atividades e ao direcionar os alunos durante a realização da mesma, quanto do aluno, ao solicitar mais informações e direcionamentos, ao expor suas percepções iniciais, assim como suas conclusões parciais, que após consideradas pela turma como um todo, foram relacionadas ao conhecimento matemático formal. Segue abaixo a lista de atividades propostas:

1. Conhecendo o plano cartesiano e construindo figuras;
2. Posições entre retas e figuras geométricas;
3. Representação visual dos conceitos de perímetro e área;
4. Construindo as áreas de diferentes figuras geométricas planas a partir da área unitária;
5. A relação entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro;
6. Descobrimo o comprimento da circunferência pelo Método da Exaustão;
7. Descobrimo a área do círculo a partir de sua divisão em triângulos;
8. Construção dos sólidos geométricos com o uso de caneta de impressão 3D;
9. Construindo os sólidos geométricos com impressão 3D a partir de suas planificações;

6.1.1 Atividade 01 – Conhecendo o plano cartesiano e construindo figuras

Aplicação: Os alunos deverão construir na malha quadriculada um plano cartesiano seguindo as orientações do professor. O professor deve então apresentar os conceitos de ponto (destacando a ideia de coordenadas), reta e plano usando o plano como forma de mostrar visualmente cada um, destacando a ideia de dimensões.

Pode-se usar também situações do dia a dia para exemplificar cada uma delas, alguns exemplos interessantes de se abordar são as medidas da sala de aula ou ainda a comparação entre filmes 2D e 3D.

Tendo o professor apresentado o conceito de coordenadas, ele deve solicitar que os alunos encontrem determinados pontos no plano cartesiano. Não deve ser feita uma correção em relação aos alunos que encontraram os pontos em posições incorretas em relação às coordenadas dadas.

Quando os alunos informarem que os pontos foram localizados, solicitar a eles que, usando a régua, ‘liguem’ os pontos de modo a gerar uma figura geométrica. Faz-se então a seguinte pergunta: Qual a figura encontrada?

Aqueles que encontraram as coordenadas acertadamente terão maior facilidade para identificar a figura. Aproveita-se o momento para destacar a importância de se localizar a posição dos pontos corretamente. Dá-se então para os alunos que localizaram pontos de forma incorreta um novo período de tempo para que façam as correções necessárias.

Os alunos já finalizaram a tarefa, podem ajudar aqueles que estiverem realizando as correções.

Tabela 6.1: Quadro Resumo – Atividade 01.

Título	Conhecendo o plano cartesiano e construindo figuras
Habilidades pretendidas	<p>(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.</p> <p>(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.</p> <p>(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.</p> <p>(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação à lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.</p>
Objetivos	<p>Compreender e utilizar as relações entre as figuras unidimensional, bidimensional e tridimensional para a percepção do mundo.</p> <p>Desenvolver capacidade de classificação dos polígonos quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos.</p>
Materiais	Malha quadriculada, régua, lápis e borracha.
Duração da atividade	Duas aulas de 45 minutos.

FONTE: Elaborado pelo autor.

6.1.2 Atividade 02 – Posições entre retas e figuras geométricas.

Aplicação: Solicitar que os alunos representem nas folhas de malha quadriculada os conceitos que devem ser apresentados oralmente pelo professor (reta, semi-reta e segmento de reta, assim como as relações de posição existentes entre elas).

Quando os alunos finalizarem esta etapa o professor deverá solicitar que compartilhem o que foi feito, de modo a comparar seus resultados e verificar se houve consenso nas imagens apresentadas ou não, e caso não tenha ocorrido, quais as diferenças entre os resultados obtidos, para que através do debate se chegue a um resultado final.

O professor deve dividir a turma em grupos e solicitar que cada um, a partir dos conhecimentos prévios, representem visualmente as figuras planas geométricas (quadrado, retângulo, triângulo, trapézio) e listem o que eles observaram como características destas figuras.

Quando todas as equipes concluírem o solicitado, iniciaremos o processo de compartilhamento, o professor lança que questões a turma, sobre uma figura de cada vez, acerca das características que eles destacaram.

Os alunos devem falar livremente sobre suas opiniões, enquanto o professor deve direcioná-los de modo que as conclusões às quais chegaram sejam verificadas e validadas ou não, levando também a novas conclusões.

Tabela 6.2: Quadro Resumo – Atividade 02.

Título	Posições entre retas e figuras geométricas
Habilidades pretendidas	<p>(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.</p> <p>(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.</p> <p>(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.</p> <p>(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação à lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.</p> <p>(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.</p> <p>(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.</p>
Objetivos	<p>Compreender e utilizar as relações entre as figuras unidimensional, bidimensional e tridimensional para a percepção do mundo.</p> <p>Desenvolver capacidade de classificação dos polígonos quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos.</p>
Materiais	Malha quadriculada, régua, lápis e borracha.
Duração da atividade	Duas aulas de 45 minutos.

FONTE: Elaborado pelo autor.

6.1.3 Atividade 03 – Representação visual dos conceitos de perímetro e área.

Aplicação: Nesta atividade o aluno deverá encontrar formas de representar os conceitos de perímetro e área visualmente de modo a fortalecer a compreensão e fixação dos conceitos.

Iniciamos com os questionamentos: O que é perímetro? O que é área? O professor irá verificar as respostas obtidas e direcionar o debate entre os alunos até que se chegue a

um consenso quanto a resposta que a turma considerar mais adequada.

Só então, em comparativo ao que os alunos definiram como conceitos, o professor deve apresentá-los, também oralmente, pela visão da matemática formal, incitando uma nova questão: Qual a diferença entre perímetro e área? O professor deve então destacar exemplos, como “imagine que você comprou um terreno e decidiu que irá ou ainda “você também decidiu colocar grama em todo seu terreno, como saber a quantidade de grama necessária?”.

Solicite então que os alunos, usando os materiais fornecidos, produzam representações visuais dos conceitos, de modo a destacar as diferenças entre eles.

Observação 6. *Durante as atividades anteriores, houve uma pequena parte do tempo de aula destinada a que os alunos fizessem o uso da caneta 3D, de modo que ao chegar a esta atividade a maioria dos alunos já possuía o conhecimento de seu funcionamento e de como manejá-la, assim sendo mais natural para os mesmos seu uso.*

Tabela 6.3: Quadro Resumo – Atividade 03.

Título	Representação visual dos conceitos de perímetro e área.
Habilidades pretendidas	(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada. (EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
Objetivos	Resolver problemas envolvendo medições Perceber a equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros
Materiais	Malha quadriculada, régua, lápis, borracha e caneta de impressão 3D.
Duração da atividade	Dois aulas de 45 minutos.

FONTE: Elaborado pelo autor.

6.1.4 Atividade 04 – Construindo as áreas de diferentes figuras geométricas planas a partir da área unitária;

Aplicação: Agora que os alunos já estabeleceram o que seria perímetro e área na atividade anterior, nesta atividade iremos focar na descoberta de medidas de áreas de diferentes figuras geométricas a partir de áreas unitárias, produzidas previamente pelo professor com impressão 3D.

O professor irá distribuir entre os alunos uma quantidade específica de materiais que representam esta área e os alunos usarão tais unidades de área para construir figuras livremente, quanto mais diferente os resultados, mais interessante será quando eles forem compartilhados.

Após a turma compartilhar o que produziu o professor deve então questionar: qual seria o perímetro da área que você construiu? E a área? Os alunos então terão um tempo para chegar a resultados, sem o uso de fórmulas, apenas através da observação das figuras.

As respostas encontradas também serão compartilhadas e a turma poderá questionar e propor resultados diferentes para cada figura, até haver um consenso.

Só então o professor apresentará as expressões matemáticas utilizadas para o cálculo de perímetros e áreas e junto com a turma obterá resultados para a pergunta anterior através desta expressões, desenvolvendo a comparação entre os resultados obtidos.

Tabela 6.4: Quadro Resumo – Atividade 04.

Título	Construindo as áreas de diferentes figuras geométricas planas a partir da área unitária.
Habilidades pretendidas	(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada. (EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
Objetivos	Resolver problemas envolvendo medições Perceber a equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.
Materiais	Malha quadriculada, régua, lápis, borracha e caneta de impressão 3D.
Duração da atividade	Duas aulas de 45 minutos.

FONTE: Elaborado pelo autor.

6.1.5 Atividade 05 – A relação entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro.

Aplicação: Com essa atividade desenvolvemos a compreensão da origem e, consequentemente, a aplicação de π .

Os alunos deverão, usando o compasso, traçar uma circunferência, de medidas quaisquer, em sua malha quadriculada, em seguida, usando o fio de algodão e a régua, para medir o comprimento da circunferência e seu diâmetro.

Cada aluno irá calcular a razão entre o comprimento e o diâmetro de sua circunferência e comparar seus resultados com os de seus colegas.

Cabe ao professor instigar questionamentos como: Os resultados foram próximos? Qual a melhor aproximação que tornaria todos os resultados um valor único?

Tabela 6.5: Quadro Resumo – Atividade 05.

Título	A relação entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro
Habilidades pretendidas	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. (EF07MA33) Estabelecer o número pi como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
Objetivos	Reconhecer a circunferência como lugar geométrico Encontrar meios de descobrir a medida do comprimento da circunferência.
Materiais	Malha quadriculada, régua, lápis, borracha, compasso, transferidor e fio de algodão.
Duração da atividade	Duas aulas de 45 minutos.

FONTE: Elaborado pelo autor.

6.1.6 Atividade 06 – Descobrimo o comprimento da circunferência pelo método da exaustão.

Aplicação: Nesta atividade usaremos polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência para encontrar seu comprimento. Os materiais utilizados serão lápis, borracha, régua e compasso.

Cada aluno deverá traçar uma circunferência na malha quadriculada com o compasso, e, usando a régua, deverá dividir a circunferência em 4 partes iguais, que usará como referência para inscrever e circunscrever quadrados a ela. O mesmo processo deve ser repetido, mas realizando divisões da circunferência em 8 e 16 partes.

Solicitamos então que os alunos observem o que acontece à medida que os lados dos polígonos são dobrados.

Tabela 6.6: Quadro Resumo – Atividade 06.

Título	Descobrir o comprimento da circunferência pelo método da exaustão.
Habilidades pretendidas	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. (EF07MA33) Estabelecer o número pi como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
Objetivos	Reconhecer a circunferência como lugar geométrico. Encontrar meios de descobrir a medida do comprimento da circunferência
Materiais	Malha quadriculada, régua, lápis, borracha, compasso e transferidor.
Duração da atividade	Uma aula de 45 minutos.

FONTE: Elaborado pelo autor.

6.1.7 Atividade 07 – Descobrir o comprimento da circunferência pelo método da exaustão.

Aplicação: Agora que já desenvolvemos um método para encontrar o comprimento da circunferência na atividade, desenvolvemos um que nos forneça a área do círculo.

Considerando que a sequência de atividades está sendo seguida, o aluno pode utilizar a mesma figura que construiu na atividade anterior. Assim o professor pode aproveitar as marcações já feitas com os polígonos inscritos na circunferência e solicitar aos alunos que dividam tais polígonos em triângulos.

Já com o conhecimento da área de triângulos adquirido nas atividades anteriores o professor pode mostrar que a área do círculo se aproxima da soma da área destes triângulos e que quanto maior a quantidade de lados dos polígonos e conseqüentemente de triângulos, mas essa aproximação se intensifica.

Então propor aos alunos que calculem a área dos círculos, considerando essa aproximação e utilizando a fórmula de área do triângulo.

Tabela 6.7: Quadro Resumo – Atividade 07.

Título	Descobrir a área do círculo a partir de sua divisão em triângulos.
Habilidades pretendidas	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
Objetivos	Reconhecer a circunferência como lugar geométrico. Determinar a área do círculo e comprimento de sua circunferência
Materiais	Malha quadriculada, régua, lápis, borracha, compasso e transferidor.
Duração da atividade	Duas aulas de 45 minutos.

FONTE: Elaborado pelo autor.

6.1.8 Atividade 08 – Construção dos sólidos geométricos com o uso de caneta de impressão 3D.

Aplicação: Assim como feito para a construção de figuras planas, para se desenvolver os conhecimentos acerca de geometria espacial, será solicitado aos alunos que, usando a malha quadriculada, representar através de desenhos os seguintes sólidos: cubo, prisma triangular, prisma quadrangular, pirâmide, cilindro, cone, esfera.

Para cada sólido será dado um determinado tempo, após o qual os alunos realizarem o que foi solicitado, haverá o compartilhamento dos resultados, caso haja discordância sobre qual a representação correta, os alunos devem debater e chegar a um consenso que norteará a produção futura da turma.

Após esta fase inicial, a turma será dividida em grupos e cada grupo ficará responsável por planejar a melhor maneira de representar os sólidos abordados usando a caneta de impressão 3D.

Tabela 6.8: Quadro Resumo – Atividade 08.

Título	Construção dos sólidos geométricos com o uso de caneta de impressão 3D.
Habilidades pretendidas	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento. (EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).
Objetivos	Produzir diferentes sólidos geométricos com o uso de impressão 3D. Reconhecer a ideia de volume de forma prática
Malha extbfMateriais	Malha quadriculada, régua, lápis, borracha, compasso, transferidor e caneta de impressão 3D..
Duração da atividade	Quatro aulas de 45 minutos..

FONTE: Elaborado pelo autor.

6.1.9 Atividade 09 – Construindo os sólidos geométricos com impressão 3D a partir de suas planificações.

Aplicação: Agora que os alunos já começaram a desenvolver sua percepção da construção de sólidos, iremos reforçá-la com foco na produção de sólidos a partir de planificação produzida pelos mesmo.

Partindo dos acertos e erros da atividade anterior os alunos irão produzir planificações, tendo algumas especificações fornecidas pelo professor, como tamanho do lado das bases ou comprimento do raio das bases circulares e altura.

O professor atuará sempre como mediador direcionando a produção.

Tabela 6.9: Quadro Resumo – Atividade 09.

Título	Construindo os sólidos geométricos com impressão 3D a partir de suas planificações.
Habilidades pretendidas	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento. (EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).
Objetivos	Produzir diferentes sólidos geométricos com o uso de impressão 3D. Reconhecer a ideia de volume de forma prática
Malha extbfMateriais	Malha quadriculada, régua, lápis, borracha, compasso, transferidor e caneta de impressão 3D.
Duração da atividade	Duas aulas de 45 minutos.

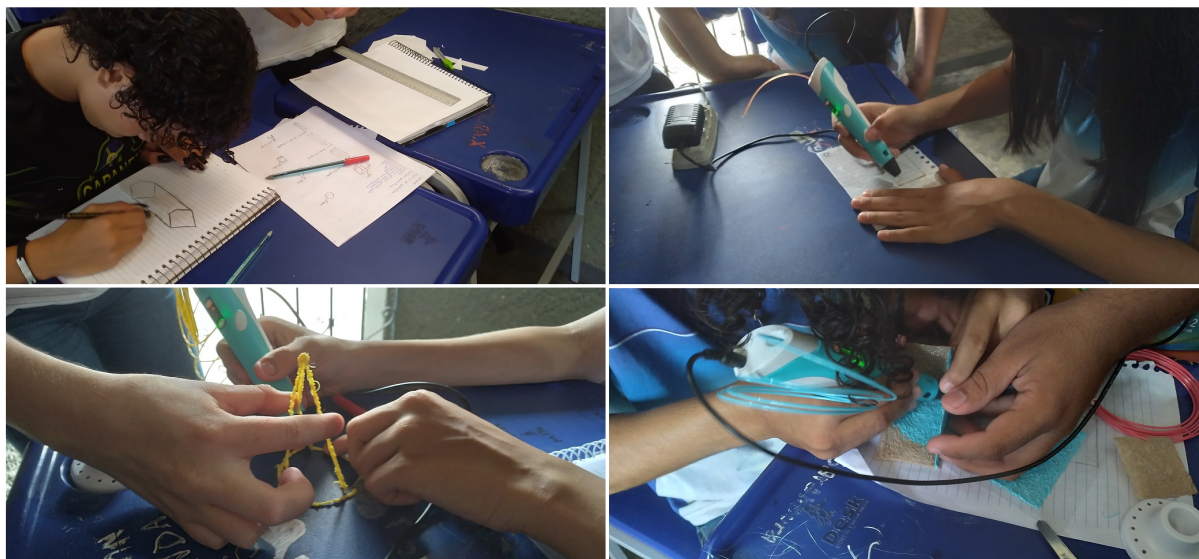
FONTE: Elaborado pelo autor.

6.2 Resultados Obtidos

A turma em que as atividades foram desenvolvidas foi uma turma de nono ano, com um total de 15 alunos, sendo que apenas 10 deles responderam ao questionário (ver Figura) aplicado que, juntamente com as observações feitas em sala norteiam a chegada aos resultados obtidos nestas atividades.

É importante lembrar que estes alunos estiveram ausentes da sala de aula durante todo o período letivo do 6° ano e o primeiro semestre do 7° ano devido a necessidade do isolamento social, logo, além de todas as problemáticas já comuns no processo de ensino e aprendizagem, ainda é preciso considerar que as aulas do período da pandemia ocorreram a partir de um não planejamento, já que as instituições de ensino foram pegadas de surpresa com a necessidade do isolamento social.

Figura 6.1: Alunos em atividades desenvolvendo materias tridimensionais concretos.



FONTE: Elaborado pelo autor

Assim, para a maioria dos estudantes os objetos apresentados e utilizados em sala de aula durante as atividades, como transferidor e compasso, ainda eram desconhecidos e causavam estranhamento e curiosidade, assim sendo, os alunos receberam a proposta de intervenção em sala com boa vontade, sem haver rejeição ao que era proposto.

Mesmo aqueles que inicialmente estavam reticentes, foram aos poucos se tornando mais participativos e passaram a interagir mais, expor suas opiniões e contribuir pela busca de resultados.

Figura 6.2: Resposta da questão 1 do aluno F

1. O que você achou sobre as atividades desenvolvidas?
Muito legal, mais divertido e interessante, mais
descontraído e aprende sem perceber
Eu sópen apoiaria ter mais aula assim

FONTE: Elaborado pelo autor

Figura 6.3: Resposta da questão 1 do aluno C

1. O que você achou sobre as atividades desenvolvidas?

legal gostei muito a gente só entendeu como a professora e a gente usou a caneta 3D que eu nunca tinha usado e gostei demais de poder ter usado ela

FONTE: Elaborado pelo autor

Surgiu daí, inclusive, um resultado positivo não pensado inicialmente, ao planejar as atividades, observou-se na turma uma maior abertura a ideia de lidar com erros, já que sempre que compartilhavam sua opinião sobre algo, mesmo que esta fosse invalidada pela turma, não havia uma consequência negativa para os estudantes e o ‘erro’ era colocado como base para um próximo passo na chegada da solução final.

Outro ponto a ser salientado foi a superação das expectativas dos alunos em relação às aulas de Matemática. Aqueles que apresentavam expectativas negativas ou ainda não possuíam qualquer tipo de expectativas em relação às aulas dadas, tiveram novas perspectivas ao ver o trabalho em sala de aula ocorrendo de forma diferenciada do padrão, sendo uma maior facilidade em se concentrar no que estava sendo abordado um dos focos das respostas dos alunos.

Figura 6.4: Resposta da questão 2 do aluno C

2. Você acredita que atividades como estas aplicadas em sala de aula ajudaram na sua compreensão dos conceitos apresentados?

Sim, pois tive poucas dúvidas na matéria então com essas atividades dadas facilita muito não só a minha experiência mas dos Dt.

FONTE: Elaborado pelo autor

Figura 6.5: Resposta da questão 2 do aluno D

2. Você acredita que atividades como estas aplicadas em sala de aula ajudaram na sua compreensão dos conceitos apresentados?

eu acho muito melhor fazendo até porque eu não me canso muito nas explicações então ajudou bastante

FONTE: Elaborado pelo autor

Figura 6.6: Resposta da questão 2 do aluno E

2. Você acredita que atividades como estas aplicadas em sala de aula ajudaram na sua compreensão dos conceitos apresentados?

Sim, mais descontraído, não sou fã de matemática por isso tensa nas aulas mas essas aulas eu fiquei mais relaxada

FONTE: Elaborado pelo autor

Assim, a utilização de métodos diferenciados foi imprescindível para que houvesse um maior entendimento e engajamento dos alunos, já que eles foram incentivados ao compartilhamento de conhecimentos e de ideias, para que eles chegassem a suas próprias deduções e não apenas recebessem fórmulas de origem desconhecida e que não necessariamente conseguissem se aliar a uma percepção concreta dos conteúdos abordados.

Figura 6.7: Resposta da questão 2 do aluno A

2. Você acredita que atividades como estas aplicadas em sala de aula ajudaram na sua compreensão dos conceitos apresentados?

sim. Por que conhecemos Perímetro e área de um jeito bem legal dentro da matemática

FONTE: Elaborado pelo autor

Figura 6.8: Resposta da questão 2 do aluno C

2. Você acredita que atividades como estas aplicadas em sala de aula ajudaram na sua compreensão dos conceitos apresentados?

ajudou Porque a gente aprende não só no quando mais using Fazendo dentro da sala de aula

FONTE: Elaborado pelo autor

O uso da caneta foi destacado pela maioria dos alunos como recurso que tornou as aulas mais interessantes e dinâmicas, mas também houve uma ótima recepção ao uso dos outros materiais apresentados.

Figura 6.9: Resposta da questão 3 do aluno B

3. Qual(is) atividade(s) você achou mais interessante? Diga o porquê.

Eu achei a caneta 3D, porque eu aprendi a fazer um figura em 3D e que não é um bicho de 7 colpeis bonito usar a caneta.

FONTE: Elaborado pelo autor

Figura 6.10: Resposta da questão 3 do aluno C

3. Qual(is) atividade(s) você achou mais interessante? Diga o porquê.

eu achei interessante Porque a gente usou a caneta usamos objetos pra medir e ajudar no trabalho nosso

FONTE: Elaborado pelo autor

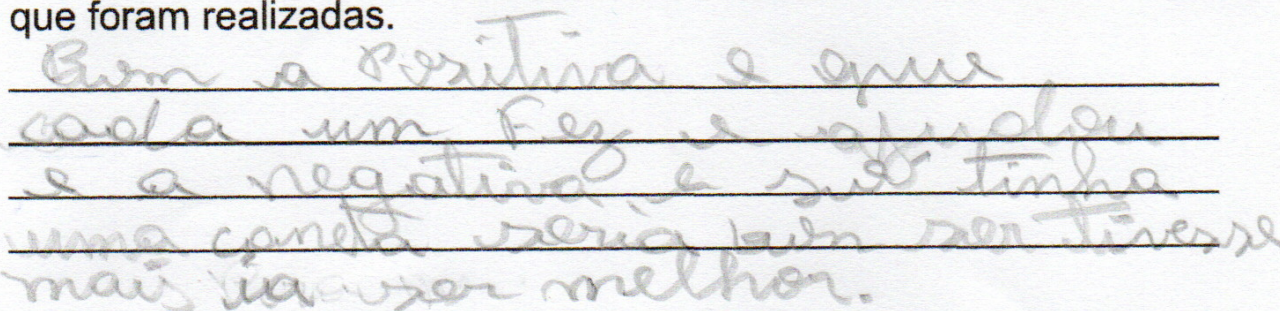
Houveram também críticas negativas, onde a resposta que mais esteve presente foi

a de que as atividades teriam corrido de maneira mais dinâmica ainda se houvesse mais de uma caneta, já que foi necessário um revezamento no uso entre as equipes, gerando alguns momentos ociosos para os estudantes.

O tempo de aplicação também foi questionado, pois grande parte dos alunos demonstrou que gostaria de ter mais tempo para desenvolver as atividades, especialmente as que envolviam o uso da caneta 3D.

Figura 6.11: Resposta da questão 4 do aluno C

4. Deixe comentários (positivos e negativos) sobre as atividades que foram realizadas.

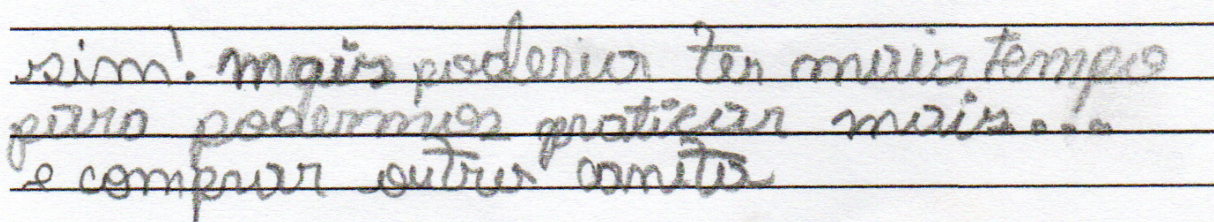


Bom a positiva é que cada um fez a atividade e a negativa é que não tinha uma caneta para cada um então seria melhor se tivesse mais para usar melhor.

FONTE: Elaborado pelo autor

Figura 6.12: Resposta da questão 2 do aluno G

2. Você acredita que atividades como estas aplicadas em sala de aula ajudaram na sua compreensão dos conceitos apresentados?



sim! mais poderiam ter mais tempo para podermos praticar mais e cumprir outros comites

FONTE: Elaborado pelo autor

Também foi solicitado aos alunos que dessem sugestões com relação às atividades e o que eles acreditavam que poderia ser mudado e melhorado, ou ainda acrescentado para que as atividades fossem ainda mais proveitosas. Um dos alunos demonstrou muito interesse em desenvolver atividades artísticas, principalmente pixel art a partir do uso da malha quadriculada, outro sugeriu que as atividades em sala fossem complementadas com diferentes atividades extra classe.

Figura 6.13: Resposta da questão 2 do aluno F

5. Deixe sugestões em relação às atividades que foram realizadas e/ou para novas atividades.

minhas sugestões, são que foram
muito boas até agora mas, Bem
que poderia ter a utilização de
livros e tarefas extras de casa
como Perguntas, Projetos e etc...

FONTE: Elaborado pelo autor

Figura 6.14: Resposta da questão 2 do aluno H

5. Deixe sugestões em relação às atividades que foram realizadas e/ou para novas atividades.

duas canetas, mais variação de cores, ati-
vidades com pixel art, talvez, mais tempo
para ter pouco tempo de uso.

FONTE: Elaborado pelo autor

Conclusões

Com este trabalho foi demonstrado como o uso de alguns teoremas, que normalmente são deixados de lado no ensino básico, podem ser úteis para a construção de conhecimento. Percebemos ainda a importância de se aplicar métodos diferentes, como o uso de materiais concretos, como forma de despertar e manter a atenção e o foco dos alunos nas aulas de Matemática.

A junção dessas duas considerações levou ao desenvolvimento de práticas dinâmicas e que instigaram no aluno o interesse e a curiosidade pelo que estava sendo produzido em sala.

Considerando assim que as atividades foram aplicadas com sucesso, que a sequência didática proposta foi funcional e que os objetivos definidos foram alcançados. As atividades movimentaram os alunos e modificaram positivamente a dinâmica na sala, incentivando a busca por conhecimento, levantando discussões e intensificando o engajamento dos alunos, tanto planejando quanto executando o que foi solicitado.

Chegando a um ensino e aprendizagem mais atrativo e instigante, levando os alunos a ação e a busca pelo saber, tornando-os seres ativos na construção de seu conhecimento.

Assim, este trabalho permitiu que pudesse vislumbrar e pôr em prática um ensino diferenciado, de modo a expandir minhas perspectivas do que pode e deve ser feito em sala de aula, de forma a diminuir a dependência das aulas demasiado explanatórias e do livro didático.

Houve assim, um “abrir de portas” para novas possibilidades, seja como complementação e/ou modificação das atividades aqui apresentadas, seja para o desenvolvimento de outros projetos. Portanto, o trabalho não se encerra aqui, já que novas atividades já começam a tomar forma e certamente serão postas em prática futuramente.

Referências Bibliográficas

- AMANCIO, D. d. T.; SANZOVO, D. T. Ensino de matemática por meio das tecnologias digitais. *Revista Educação Pública*, v. 20, n. 47, 2020. Disponível em: <<http://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/20/47/ensino-de-matematica-por-meio-das-tecnologias-digitais>>. Acesso em: 8 de dezembro de 2020. 11
- ÁVILA, G. *CÁLCULO das funções de uma variável, Vol 2*. Rio de Janeiro: LTC, 2004. 36, 48, 49
- BARBOSA, J. L. M. B. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM, 1995. 27, 28
- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 22 jun. 2022. 59
- CELES, W.; CERQUEIRA, R.; RANGEL, J. L. *Introdução a estruturas de dados: com técnicas de programação em C*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2004. 53, 57
- CONE. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/cone/>>. Acesso em: 13 ago. 2023. 42
- DEITEL, P.; DEITEL, H. *C como programa*. São Paulo: Prentice Hall, 2011. 53, 57
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. São Paulo: Atual, 2013. 25, 27
- FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise I*. Rio de Janeiro: LTC, 1996. 14, 15, 47
- GONÇALVES, F. A. M. F. *As Diversidades de Debates na Pesquisa em Matemática 2*. Ponta Grossa: Atena, 2019. 59, 60
- JUNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática: 6º ano: ensino fundamental: anos finais*. São Paulo: FTD, 2018. 60
- JUNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática: 9º ano: ensino fundamental: anos finais*. São Paulo: FTD, 2018. 60
- LIMA, E. L. *Curso de Análise, Vol 1*. Rio de Janeiro: LTC, 1995. 14, 15, 46, 47
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 1*. Rio de Janeiro: SBM: Coleção Professor de Matemática, 2016. 35

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2*. Rio de Janeiro: SBM: Coleção Professor de Matemática, 2016. 38, 40, 60

LUCIANO, K. M. d. F. *O uso de material concreto no ensino e aprendizagem da matemática, Vol 11*. Rio de Janeiro: Cadernos do IME (instituto de Matemática e Estatística), 2017. 59, 60

NETO, A. M. *GEOMETRIA*. Rio de Janeiro: SBM: coleção PROFMAT, 2013. 16, 37, 38, 41, 42

PIRÂMIDE. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/piramide>>. Acesso em: 13 jul. 2023. 38

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. L. *Cálculo Numérico. Aspectos Teóricos e Computacionais*. São Paulo: PEARSON, 1996. 50