UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Construções Geométricas com Régua e Compasso

Alex Gomes da Silva

Instituto de Matemática

Maceió, Agosto de 2013

PROFMAT

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Construções Geométricas Com Régua e Compasso

Alex Gomes da Silva

Dissertação de Mestrado

Maceió
Fevereiro de 2013

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Alex Gomes da Silva

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Fernando Pereira Micena*

Maceió
Fevereiro de 2013

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586c Silva, Alex Gomes da.
Construções geométricas com régua e compasso / Alex Gomes da Silva. – 2013.
131 f. : il.

Orientador: Fernando Pereira Micena.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2013.

Referências Bibliográficas: f. 122-123.
Apêndices: f. 124-131.

1. Geometria. 2. Construções geométricas. 3. Régua. 4. Compasso. 5. Equação. I. Título.

CDU: 514

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO

Alex Gomes da Silva

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 09 de agosto de 2013 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileria de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Pereira Micena (Orientador - UFAL)

Prof. Dr. Marco Antonio Nogueira Fernandes (UFBA)

Prof. Dr. André Luiz Flores (UFAL)

A Deus, pela vida e sabedoria adquirida, e a minha querida mãe, que como uma verdadeira guerreira, soube nos educar, a mim e aos meus irmãos, de maneira a sermos pessoas dignas,e a viver, respeitando os outros e a nós mesmos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, saúde, força de vontade e capacitação, que me permitiram, nos momentos de alegria, seguir sempre em frente, e nos momentos de fraqueza, saber sempre me reerguer e acreditar na possibilidade da vitória adiante.

A minha família, mãe e irmãos queridos.

Aos amigos e colegas de trabalho, que sempre estiveram torcendo pelo meu sucesso, entre os quais posso seguramente citar, André Neres, Neto Campos, Iolanda Cardoso, Djalma e Veralúcia Cardoso, dentre tantos outros que aqui não foram citados.

A todos os colegas de curso, que na medida do possível, contribuiram também para que eu alcançasse esse objetivo, seja através de esclarecimentos, seja através das várias caronas proporcionadas durante esses dois anos, em especial, ao Lucas, ao Adriano, ao Kinttyno e ao Valdir.

A todos os professores, que nos possibilitaram um crescimento, não só intelectual, no que se refere ao aprendizado realizado durante esse tempo, mais também no desenvolvimento de uma atitude de busca, para que sempre estejamos anciosos por novas descobertas e novos aprendizados.

Em especial, gostaria de agradecer a três pessoas, que têm contribuído de forma mais efetiva em meu desenvolvimento no curso.

Ao professor Fernando Micena, o qual me acolheu como seu orientando, e que contribuiu para que eu pudesse desenvolver esse trabalho.

Por fim, aos colegas, os quais tenho como amigos agora, Elizangelo e Paulo, com os quais divido o quarto do pensionato onde ficamos, mais com os quais dividi algumas grandes alegrias, risos e momentos importantes durante esses dois anos. Me ajudaram nos estudos, e bastante, mas também, trouxeram sua alegria e seus momentos de seriedade, me deixando partilhar de uma parcela de suas vidas.

Desde já agradeço a todos. Sem vocês, o curso não teria tido o mesmo sentido.

Há, um agradecimento final a Josivaldo, pelos momentos de descontração e hilaridade em sala. Grandes momentos.

Valeu turma PROFMAT 2011.

"As grandes invenções geralmente se encaixam em duas categorias: algumas são o produto da mente criativa de uma única pessoa, caindo sobre o mundo subitamente como um relâmpago num dia claro; outras - que formam um grupo bem maior - são o produto final de uma longa evolução de idéias que fermentaram dentro de muitas mentes, ao longo de décadas, quando não séculos."

—ELI MAOR (<e: A História de um Número>)

Resumo

Neste trabalho há duas vertentes principais de discussão sobre o uso dos instrumentos régua e compasso em construções geométricas: uma primeira, de caráter histórico-matemático e uma outra, sobre sua aplicação educacional. Sobre o primeiro aspecto, trataremos de analisar o caráter, não só histórico, como também prático, do uso dos instrumentos régua e compasso em processos de descobertas significativas no âmbito da matemática. Discutiremos também o papel essencial desses dois instrumentos nesse desenvolvimento, trazendo então, reflexões importantes da prática do uso dos mesmos para a matemática na atualidade. Analisaremos a cultura matemática grega, suas aplicações e teorizações, e como essa matemática desenvolveu-se até chegar aos nossos tempos, enfatizando nesse processo, os fatos mais diretamente relacionados às praticas das construções pelo método euclidiano. Num segundo momento, buscaremos discutir a importância do uso da régua e do compasso no âmbito educacional, enfatizando não só sua aplicabilidade enquanto suporte pedagógico e sua relação com a geometria, mas também a descoberta de novas possibilidades para a sua utilização em problemas algébricos, tais como resolução de equações e de operações aritméticas em geral, ressignificando desse modo o uso desses recursos.

Palavras-chave: <RÉGUA, COMPASSO, EQUAÇÃO, CONSTRUÇÃO>

Abstract

In this work there are two main strands of discussion on the use of instruments ruler and compass geometric constructions: the first, historical and mathematical character and another, about their educational application. On the first point, we will try to analyze the character, not only historical, but also practical, the use of instruments ruler and compass in the process of significant discoveries in mathematics. We'll also discuss the essential role of these two instruments in this development, bringing so important reflections of the practice of using the same for math today. We will review mathematics Greek culture, its applications and theories, and how that mathematics was developed to reach out to our times, emphasizing that case, the facts more directly related to the practice of construction Euclidean method. Then, we will try to discuss the importance of using ruler and compass in the educational, emphasizing not only its applicability as pedagogical support and its relation to the geometry, but also discovering new possibilities for its use in algebraic problems, such as solving equations and arithmetic in general, thereby giving new meaning to the use of these resources.

Keywords: <RULER, COMPASS, EQUATION, CONSTRUCTION>

Introdução

Um dos maiores embates, quando analisamos as diversas áreas do conhecimento humano, priorizando o ponto de vista da técnica aplicada nelas, é certamente a luta travada entre os dois principais ramos estruturais dentro de qualquer área da ciência: a relação conflituosa existente entre a teoria e a prática. Há então uma série de questionamentos sobre qual das duas vertentes deve ser priorizada, no que se refere ao objetivo de melhorar a qualidade da educação, através de sua aplicação de forma mais direta em sala de aula.

Alguns acreditam que deve ser dada ênfase à prática, já que é através desta que o conhecimento realmente se concretiza, torna-se real, palpável e é absorvido de forma muito mais consistente. O aluno que constrói seu conhecimento, que põe suas mãos em ação e que trabalha na elaboração de objetos ou conhecimentos que está adquirindo, absorve este saber de forma muito mais rápida e com mais possibilidades de memorização e aprendizado, tendo menos chances de esquecimento do mesmo. Nessa linha estão aqueles que pensam que algo não feito por nossas mãos, não é realmente aprendido ou apreendido por nossa mente investigadora.

Já outros defendem a tese de que, sem uma boa teorização do fato estudado, não é possível construir verdadeiramente o conhecimento, pois a prática realmente ensina o método e trabalha com as ferramentas, mas a teoria é que dá o seu correto embasamento, que mostra o porquê de determinados fenômenos ocorrerem e quais são as leis da natureza que regem e possibilitam a ocorrência desses fenômenos. O que fazer então e de que maneira devemos agir, de forma a gerar conhecimento, com a maior possibilidade de sucesso, em termos de resultados?

Como na maioria das vezes, o correto não é se posicionar em um extremo ou no outro. O verdadeiro conhecimento, aquele que servirá para a vida real, se faz através da aplicação adequada e em doses corretas de cada uma dessas duas ferramentas. É a aglutinação, a justaposição de ambas que proporciona uma construção de conhecimento, ao mesmo tempo sólida, no que diz respeito a elaboração e redefinição de princípios concretos do aprendizado, como também, flexível, em termos da possibilidade frequente e insubstituível de estar sempre em busca de novas ferramentas, técnicas e essencialmente de novos saberes.

Talvez tenha sido esta atitude cooperativa entre essas duas vertentes que fez com que a matemática praticada e teorizada na Grécia clássica viesse a ser tão importante para o desenvolvimento da própria matemática, enquanto área de conhecimento humano. Sua boa estruturação, suas técnicas aprimoradas de levar o conhecimento prático a uma sistematização correta e bem sólida, certamente foram fatores primordiais ao desenvolvimento da cultura matemática grega e a sua posterior expansão pelo mundo.

Na Grécia, como se sabe, houve um grande desenvolvimento da matemática, em termos de organização enquanto área de conhecimento, mas também, de descobertas e problematizações que influenciaram e ainda influenciam nosso jeito de pensar e fazer matemática. Foi lá que se discutiu os três problemas clássicos da matemática grega, que levaram séculos para serem solucionados, porém, que contribuíram para reflexões importantes, sendo geradores de diversas novas idéias para o desenvolvimento da matemática enquanto ciência. Lá também se descobriu de forma sistemática e consciente, a existência da propriedade da incomensurabilidade entre algumas grandezas, e como consequência, a existência dos números irracionais, processo esse que levou a novas visões e determinação de novas posturas quanto a maneira de lidar com o conhecimento matemático. Lá se desenvolveu o caráter indutivo, que tanto é utilizado hoje, em demonstrações nas mais diversas áreas da matemática. Enfim, é inegável a importância dos desenvolvimentos matemáticos ocorridos em terras gregas.

Porém, o objetivo central desse texto, não é certamente rediscutir a matemática grega em toda a sua plenitude, e sim tratar de como essa matemática se fazia de maneira consistente, apenas com o uso de régua e compasso. Muitos textos de análise histórica relatam que os gregos eram aficionados por representar e construir a sua matemática, voltada especificamente para a construção geométrica, ou seja, muitos deles acreditavam que sempre é possível construir um conceito matemático, a partir da aplicação de conceitos geométricos. Para isso, os instrumentos utilizados eram na maioria das vezes, a régua e o compasso.

Assim, eles estavam sempre buscando de alguma forma, encontrar métodos que lhes permitissem realizar o máximo de construções usando esses instrumentos, sejam estas construções, figuras geométricas, segmentos, operações, etc. Suas contribuições, através das construções realizadas com o uso da régua e do compasso, se espalhavam por várias das áreas do conhecimento, como se vê claramente em *Os elementos* de Euclides, onde alguns dos capítulos tratam de construções puramente geométricas e outras, relacionam-se a aritmética e a teoria dos números.

Esse trabalho tem então por objetivo, rediscutir essa matemática e a aplicação desses dois instrumentos em sua construção, refletindo-se sobre a característica do pensamento grego, e também sua prática, demonstrando através de construções, os processos utilizados na época e a maneira como evoluíram através dos tempos, e de que maneira podemos utilizar suas técnicas e conhecimentos no desenvolvimento de soluções inovadoras para a reestruturação e evolução do ensino da matemática em nossos tempos. Discutiremos os entraves e as dificuldades de realizar algumas construções, e relacionaremos algumas soluções à intervenção e aplicação de conhecimentos de outros ramos da matemática. Também buscaremos dar ênfase ao conhecimento histórico no qual a cultura grega estava envolvida, buscando a reflexão sobre o mesmo.

Outro ponto importante na discussão aqui apresentada será a aplicabilidade do uso da régua e compasso na sala de aula, com ferramenta imprescindível ao desenvolvimento intelectual dos discentes no que se trata de redefinir como se constrói matemática, a partir da teorização de fatos e posterior construção com régua e compasso. Para isso, pode-se usar tanto os instrumentos de fato, como pode-se também usar programas diversos, tais como o *Cabrí Geometre* ou o *Geogebra*, e outros, que simulam de forma bem interessante a aplicação desses instrumentos.

Discutiremos a solução de operações aritméticas com régua e compasso, a construção de conceitos da geometria, a construção de figuras geométricas, a resolução de equações, dentre outros fatos importantes e que estão presentes sem dúvida, no ambiente da comunidade escolar. Ao final de cada capítulo haverá também uma série de atividades propostas de forma a serem inseridas em sala de aula, na busca do desenvolvimento de uma atitude investigativa, criativa e estimuladora do desenvolvimento do estudante de matemática. É claro também que trata-se apenas de uma sugestão, ficando a cargo de cada professor, readaptá-la a cada realidade existente. Esses exercícios estão propostos de forma a aplicá-los diretamente ao aluno, o que implica uma liguagem mais simples e direta. Supomos, é claro, antes da aplicação dos mesmos, que o conteúdo ao qual eles se referem tenham sido trabalhados.

O Capítulo 1 traz uma reflexão histórica sobre o uso da régua e compasso na matemática grega, quando surgiu e de que maneira se tornou tão importante para a mesma. Trata também sobre um pouco da cultura e da maneira de ser e de viver do povo grego, discutindo sua filosofia, arte, e especificamente, sua maneira de fazer matemática.

Já no Capítulo 2, discute-se e demostra-se como construir os principais conceitos, ditos básicos, com o auxílio de régua e compasso, e que serão úteis nos capítulos posteriores, para o desenvolvimento da teoria proposta, tais como a realização de operações básicas de soma e subtração de segmentos, cálculo da raíz quadrada, retas paralelas, perpendiculares, entre outras.

No Capítulo 3, é feita uma reflexão sobre os três problemas clássicos da matemática grega, refletindo-se então sobre a sua impossibilidade de resolução para a época e sua posterior resolução com outras ferramentas matemáticas, além de discutir quais foram os principais fatores de contribuição desses problemas para a evolução do conhecimento matemático.

Nos Capítulo 4 e 5, mostram-se possibilidades do uso da régua e compasso na solução de problemas de maior grau de dificuldade, em aplicações geométricas e algébricas, tais como resoluções de equações, construções de certos polígonos regulares, cálculo de médias e uma discussão sobre novas perspectivas no uso desses instrumentos, tanto em sala de aula, quanto na descoberta de novos usos para os mesmos, no desenvolvimento de novas aplicações destes em problemas matemáticos diversos.

Dessa maneira, serão contemplados tanto o estudo da utilização da régua e compasso na construção geométrica em matemática, quanto o fato e importância que seu uso pode e deve ter em sala de aula, no desenvolvimento de um sistema de estudo que priorize a busca do conhecimento, através de do uso de diversos instrumentos, em especial, os que aqui foram citados. Espera-se então que as reflexões aqui propostas, as discussões realizadas e as técnicas e processos demonstrados possam servir de base, ou como material de apoio para aqueles que busquem de alguma forma dar sentido e importância à geometria aplicada à sala de aula. Sabe-se que muito da aplicação prática do conhecimento em geometria tem sido negligenciada nas salas de aula, deixando-se muitas vezes os conceitos da mesma para serem trabalhados por último, ou mesmo, nem se tratando deles. Mudar essa realidade, através de uma contribuição especifica é certamente um dos objetivos desse trabalho.

Sumário

Lista de Figuras

CAPÍTULO 1

Régua e Compasso: Uma Contextualização Histórica

Há duas grandes invenções humanas, que devido a sua importância, merecem ser citadas neste texto: a invenção dos números e a invenção da escrita. Cada uma, a seu tempo, contribuiu de forma determinante para o desenvolvimento humano, em sua estrutura intelectual, tendo também reflexos em todos os outros âmbitos da vida do homem em sociedade.

A escrita veio a ser desenvolvida pelo homem muito tempo depois que o conceito de número já tinha sido desenvolvido, ao menos do ponto de vista prático, como idéia arraigada na sua mente. Isso de deve ao fato de que as contagens por associação, correspondência um a um entre elementos de dois conjuntos, já eram feitas desde os primórdios da humanidade, a partir do momento que o homem começou, ao menos parcialmente a se entender como homem, como cita [10], pág. 25.

Já havia a compreensão de número, mesmo sem a existência de uma idéia abstrata para o mesmo, ou sem uma simbologia apropriada, já que esta veio a aparecer, somente com o advento da escrita. Uma prova disso, ao menos do ponto de vista figurativo, é o que ouvimos falar sobre as muitas histórias onde os seres humanos usavam pedrinhas em sacos ou marcações em paredes de carvenas e ossos, para a realização de contagens de elementos, seja na caçada ou mesmo na estocagem de alimentos e no cuidado com animais, em períodos bem anteriores ao processo de revolução agrícola. Como cita [7] , p.25:

> O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos(há evidências arqueológicas de que o homem, já a uns 50000, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. Não é difícil, porém, imaginar como isso provavelmente se deu. É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer *mais* e *menos* quando se acrescentavam ou retiravam algum objeto de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso.

Essa idéia é também corroborada por [2], p. 4-5:

> O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar.

Ou seja, apesar de ainda não existir uma liguagem a ser utilizada, que tivesse uma simbologia adequada para a representação das manifestações do pensamento humano, já existia, talvez de forma muito intuitiva, a percepção, tanto das formas presentes no mundo, quando da quantidade de seres e objetos que estavam presentes no mesmo, dando a idéia da presença de um certo senso matemático primitivo.

Com o advento da escrita, muito tempo depois, esse processo de evolução do conhecimento humano só veio a ser melhorado e amplificado.

Essas duas revoluções, e suas interrelações, contribuíram efetivamente na maneira como o homem veio a expressar sua relação com o mundo e manifestar seu desejo, ou mesmo e mais claramente, sua necessidade de deixar marcas físicas, palpáveis, visuais, para a representatividade dos objetos e seres, através dessa forma de contar, e no futuro, de escrever, tornando-se a seu tempo o homem realmente em homem, em ser humano.

Talvez não seja tão importante como a escrita ou a descoberta da possibilidade de contar e organizar numericamente objetos e seres, mas, no âmbito da Geometria, possivelmente não haja algo de maior ou igual importância, para o seu desenvolvimento enquanto área de conhecimento matemático, que a invenção, construção e uso dos instrumentos régua e compasso. Outros instrumentos existem, e contribuem, segundo aquilo que lhe pertence, no processo de desenvolvimento da Geometria, mais certamente, não têm, ou não tinham, a importância dada a esses dois elementos clássicos, que não apenas serviam como ferramentas auxiliares nos mais diversos tipos de construções geométricas, mas que também eram personagens principais de muitas controvérsias, já que haviam correntes que creditavam a uma construção geométrica, um caráter de maior pureza, se esta tivesse sido construída com esses instrumentos.

Essa importância pode ao menos ser vislumbrada nos exemplos dados no Capítulo 3, onde discutiremos os três problemas clássicos da matemática grega, problemas estes que ficaram insolúveis por séculos, devido ao desejo dos matemáticos ao longo dos tempos, em resolvê-los através do uso da régua e do compasso. Verdades ou mentiras, ou apenas maneiras diferentes de ler e interpretar os textos mais antigos, não vêm ao caso no momento. Cabe-nos apenas refletir e entender que matemática se constrói, ou se descobre na prática. É o que os antigos faziam, e é assim que muitas vezes aprendemos a fazer, e a régua e o compasso, neste contexto, são as armas básicas e necessárias, nessa busca que será iniciada neste momento.

1.1 Panorama geográfico e histórico-cultural da Grécia

Segundo relata Haward Eves, em seu livro, *Introdução à história da matemática*, o processo de revolução agrícola, ocorrido por volta 3000 a.C. contribuiu de forma efetiva para o desencadeamento de um processo de revolução intelectual e tecnológica, nunca antes visto na história da humanidade, e que culminou, ao longo de muitos anos, nas sociedades organizadas e culturalmente elevadas que chegamos a conhecer nos dias de hoje, como *berços da civilização*, as quais podemos citar, os povos do Oriente Médio , a China e o Egito.

Esses povos trouxeram para o mundo, grandes invenções: trabalharam em projetos de irrigação, ergueram grandes construções, como pirâmides, esfinges, jardins suspensos, inventaram a escrita, e deram início a importantes áreas de conhecimento, como a própria matemática, a astrologia e a metalurgia. A China também teve, nesse tempo, um grande e importante desenvolvimento, em âmbitos diversos, mas certamente foi na Grécia Helênica que se deram os maiores e mais valorosos progressos desse período. Nesse tempo, a Grécia não era especificamente uma unidade política. Era mais precisamente uma reunião de cidades-Estado, cada uma com sua própria forma de governo, características culturais e sociais, e seu próprio desenvolvimento tecnológico e científico. As mais importantes cidades-Estado da Grécia eram Corinto e Argos, importantes entreportos marítimos, Mileto e Esmirna, cidades-empório, Rodes, Delos e Samos[1], dedicadas mais à pesca e ao comércio, Olímpia[2], onde ocorriam os Jogos Olímpicos Quadrienais, entre outras. No entanto, as mais importantes entre todas as cidades-Estado eram Atenas, pela proeminente cultura e comércio e Esparta, pelo grande poderio militar.

Foi nesta terra que grandes contribuições para o desenvolvimento da matemática foram dadas, e grandes matemáticos nasceram, cresceram e se fizeram perceber ao mundo, tanto que muitos de seus trabalhos resistiram à força do tempo e chegaram até nós, com grande riqueza de detalhes e importância, não apenas histórica, com também teórico-prática para a nossa sociedade. Entre eles, podemos citar, sem diminuir outros, Pitágoras, Euclides, Eudoxo, Arquimedes e Diofanto, cada um contribuindo a seu tempo, e com o conhecimento que lhe foi devido.

É consenso, no entanto, que o ambiente físico da Grécia não era precisamente um fator de contribuição a esse desenvolvimento. Talvez tenha sido justamente esse aspecto de isolamento que contribuiu para a formação das fortes cidades-Estado, porém não se pode exatamente dizer que o mesmo ocorreu para com a disseminação da cultura grega. Possivelmente tenha sido a força desse povo que contribuiu com o sucesso desse processo de levar sua cultura a outros povos, e também buscar conhecimento entre esses povos, que tanto permitiu uma boa sistematização do conhecimento da época, com sua validação e consolidação no mundo antigo clássico. Sobre essa geografia da Grécia, veja o que cita [7], pág.91:

> A Grécia Helênica era um mosaico de cidades-Estado e de pequenas fazendas dispersas. Não era uma planície ampla dividida por rios grandes e lamacentos, como o Egito e a Babilônia; ao contrário, era um país cortado por longas cadeias de montanhas íngremes e por baías sinuosas que penetravam fundo seu interior. Seus vales eram estreitos e pontilhados de grandes pedras, seus rios, rasos e seus solo, ressequido.

Também pode-se creditar a esse aspecto de isolamento físico, a não formação de um Estado que englobasse todas as cidades, e também, o fato de muitas pequenas cidades não poderem realizar projetos de caráter expansionista.

[1] *cidade natal do matemático de grande relevância, Pitágoras.*

[2] *A cultura esportiva da atualidade deve muito aos gregos, especialmente, devido a realização desses jogos, sendo hoje em dia, as Olimpíadas, um dos maiores acontecimentos mundiais.*

1.2 A visão filosófica da matemática na Grécia

Em meio a esse espaço, que num primeiro olhar, nada oferece ao crescimento e desenvolvimento de uma cultura, surgiu e vigorou, pela força de um povo, a mais proeminente e forte civilização do mundo antigo. Sua força, em termos culturais foi tanta, que até hoje, muito da mesma ainda continua presente em nossas vidas, seja na maneira de ver a beleza clássica da pintura, arquitetura e dos textos poéticos e épico-dramáticos, seja nas influencias de seus pensadores, filósofos, matemáticos, etc., que por mais que queiramos negar e desenvolver novas maneiras de pensar e fazer conhecimento, ainda em não raros momentos, voltamos um pouco no tempo, e buscamos inspiração nesses grandes pilares fincados nas terras helênicas, em suas literaturas.

Não dá para falar muito em matemática na Grécia, sem em nenhum momento falar sobre a filosofia grega, e falar de filosofia, sem ao menos tratar sobre um matemático importante. Essa também é uma tarefa difícil. Isso se deve primeiramente ao fato de que na Grécia muitos estudiosos tinham de ser bons conhecedores das mais diversas áreas de conhecimento, entre as quais sempre se destacavam a matemática e a filosofia, dentre outras. Logo, em certo sentido, podemos dizer que houve contribuições de cada uma dessas áreas, para a outra, e desta forma podemos dizer que a matemática, na Grécia, teve seus momentos de influências filosóficas, ao menos, na maneira de organizar suas idéias e como expressá-las.

Um exemplo clássico dessas influências e entrelaçamento de conhecimentos é a dita "Escola Pitagórica", onde não se discutia apenas matemática, e onde a matemática era mais que matemática, quase que uma religião, segundo o que trata alguns estudiosos do assunto. Percebe-se claramente, nesse grupo, pelo pouco que se conhece sobre o mesmo, fortes indícios dessa discussão a respeito da matemática e de sua aplicação ao mundo, seja físico, seja das idéias. Uma de suas frases mais conhecidas é "Tudo é número", revelando suas intenções de buscar, naquilo que fosse possível, expressar o mundo e tudo o que ele continha, de forma a relacioná-lo ao mundo matemático de algum jeito. Havia também muito de um certo misticismo associado aos números, como cita [3], p. 36:

> Muitas civilizações primitivas partilharam de vários aspectos da numerologia, mas os pitagóricos levaram a extremos a adoração dos números, baseando neles sua filosofia e modo de viver. O número um, diziam eles, é o gerador dos números e o número da razão; o dois é o primeiro número par, ou feminino,o número da opinião; três é o primeiro número masculino verdadeiro, o da harmonia, sendo composto de unidade e diversidade; quatro é o número da justiça ou retribuição indicando o ajuste de contas; cinco é o número do casamento, união dos primeiros números verdadeiros feminino e masculino; e seis é o número da criação. Cada número por sua vez, tinha seus atributos peculiares. O mais sagrado era o dez ou o *tetractys*, pois representava o número do universo, inclusive a soma de todas as possíveis dimensões geométricas.

Como o próprio autor explica, *dez* é o número considerado perfeito pois é a soma dos números 1,2, 3 e 4, que representam respectivamente o ponto, segundo os pitagóricos, gerador das dimensões, a reta, de dimensão um, o plano, gerado por três pontos não-colineares, de dimensão dois e o espaço, gerado por quatro pontos não coplanares, o *tetraedro*, de dimensão três.

Obviamente essas idéias vieram a ser diluídas de significado e importância, a partir do momento em que ocorreu a dita crise dos incomensuráveis, sobre a qual cita [2], p. 53;

> Os diálogos de Platão mostram, no entanto, que a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros. Tratava-se da descoberta que na própria geometria os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo simples propriedades básicas. Não bastam, por exemplo, para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de um pentágono com seu lado.

Estava aí instaurada a base de discussão sobre a existência de números que não podiam ser expressões por razões entre inteiros, e que portanto não se encaixavam nas teorias numéricas propostas por eles, até então. Esse fato gerou a dita crise dos incomensuráveis, tendo sido base para a descoberta do conjunto numérico dos irracionais.

Importante pensador, Platão, também não negou a importância da matemática e sua íntima relação com o mundo da filosofia. Veja o que [7], p.131-132 escreve sobre o mesmo e suas idéias:

> A importância de Platão na matemática não se deve a nenhuma das descobertas que fez mas, isto sim, à sua convicção entusiástica de que o estudo da matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito e que, portanto, era essencial que fosse cultivado pelos filósofos e pelos que deveriam governar seu Estado ideal. Isso explica o famoso lema à entrada da academia: *Que aqui não adentrem aqueles não-versados em geometria.* A matemática parecia de mais alta importância a Platão devido ao seu componente lógico e à atitude espiritual abstrata gerada por seu estudo; por essa razão ela ocupava um lugar de destaque no currículo da Academia. Alguns vêem nos diálogos de Platão o que poderia ser considerada a primeira tentativa séria de uma filosofia da matemática.

Assim, vemos que realmente havia uma relação entre essas duas áreas de conhecimento, que era constantemente regada pelo trabalho e dedicação de importantes personalidades do mundo científico-filósofico grego, dentre os quais citam-se as importantes personalidades já apresentadas anteriormente.

1.3 A sistematização do conhecimento matemático

Em meio a todo esse conjunto de situações, que incluía uma forte revolução da filosofia, com o surgimento de grandes mestres dessa área, das influências da cultura e religião grega politeísta, desse emaranhado de formas de pensar e fazer o saber, por vezes misturando, e outras separando o saber científico do sabem comum, e também por meio da grande concentração de conhecimentos nas escolas ou centros de estudo da grécia, vindos de várias partes do mundo antigo, é bem fácil perceber que em algum dado momento, todo esse conhecimento deveria de alguma forma ser organizado.

Isso veio a ser feito de forma mais consistente por Euclides, em sua obra mais famosa, *Os elementos*, onde ele não apenas reúne os principais conhecimentos matemáticos do mundo antigo, até aquele momento, mais onde também os organiza de uma maneira inovadora, trazendo esta sistematização, essa organização das idéias, expressando-as com lógica, e seguindo uma ordenação que facilitava o entendimento e o aprendizado das mesmas.

Mesmo sabendo que muitas das idéias presentes em seu livro não eram propriamente suas, e sim uma compilação dos conhecimentos vigentes em sua época, a maioria dos estudiosos creditam a Euclides um papel de suma importância na matemática grega, e realmente o foi, pois, além de ter sido um grande mestre em sua época, como alguns textos colocam, ele mostrou uma forma diferenciada de expor o conhecimento e organizá-lo, sendo sua obra, até nos dias atuais, uma das mais reeditadas em todos os tempos.

1.4 Do surgimento da prática do uso da régua e compasso

Não se sabe ao certo quando, quem e de que forma os instrumentos régua e compasso foram inventados. Como a geometria já havia se desenvolvido de alguma forma, tanto na Mesopotâmia quanto no Egito, não se sabe ao certo onde eles podem ter surgido. Da mesma forma, pouco se sabe sobre o surgimento da própria Geometria. Como cita [2], p. 4:

> Afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever.

Há apenas algumas suposições, como são expressas em [2], p. 5:

> ...mas há outras alternativas. Uma é que a geometria, como a contagem, tivesse origem em rituias primitivos. Os mais antigos resultados geométricos encontrados na Índia formam o que se chamou os *Sulvasutras*, ou *regras da corda*. Tratava-se de relações simples que aparentemente se aplicavam à construção de templos e altares.

Obviamente não há nenhuma demonstração ou comprovação de que essa teoria seja verdadeira. O mesmo autor trata de uma outra hipótese, como o mesmo cita que o desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem.

Podemos apenas conjecturar que a necessidade de construir com mais perfeição retas e círculos, figuras provavelmente conhecidas, fez surgir a ideia de inventar instrumentos que possibilitassem essa construção com tal perfeição. Para as retas, possivelmente esse processo deve ter sido mais fácil, porém para o círculo, talvez tenha sido necessário o desenvolvimento do conceito de lugar geométrico, não propriamente como o concebemos atualmente, mais sim de uma forma mais intuitiva, sendo, por exemplo, determinado o centro do círculo fixo e traçar esse mesmo círculo, a partir de um raio também fixo. A ideia possivelmente foi esta, com alguma variação talvez, porém a construção dos instrumentos em si, não pode ser determinada, ficando então qualquer ideia a respeito, no campo das especulações.

Mas certamente pode-se afirmar que sua presença foi constante e primordial no desenvolvimento da geometria de maneira geral, nos processos de construção de figuras dos mais diversos tipos, como ângulos, circunferências, polígonos regulares, e até mesmo na construção de números, médias e soluções de diversos problemas algébricos.

Vale reassaltar que a construção com régua e compasso segue determinadas regras, como cita [7], p. 134, quando o mesmo diz que "Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado".

Já a prática do uso desses instrumentos está firmemente arraigada em toda a cronologia da Geometria, ao menos a partir do momento em que esta passou a ser assim definida, sendo instrumentos de necessidade básica na formação do conhecimento e na disseminação do mesmo. Estava presente nas escolas gregas, ou seja, em seus centros de formação de conhecimento matemático, e participavam de todos os processos da estruturação básica do conhecimento geométrico, já que as retas e círculos, de fácil construção através desses instrumentos, são essencialmente o que tinha de mais básico e primordial para se construir qualquer conceito em sua geometria.

Mesmo sem sabermos suas verdadeiras origens, é impossível negar sua importância para a matemática grega, e por que não dizer também para o posterior desenvolvimento da matemática em vários outros lugares e tempos.

1.5 Só se deve construir com régua e compasso?

Os matemáticos gregos não precisamente pregavam essa ideologia, de que se deve apenas usar régua e compasso para construir um conceito matemático. Na verdade, o que buscavam era o desenvolvimento da matemática, o mais longe que pudessem chegar. Até aí, nenhuma atitude que se diferencie das que são pregadas hoje em dia.

O que havia entre algumas correntes, ou grupos, era um desejo de se usar apenas esses instrumentos, pois acreditavam existir uma certa beleza implícita em um problema, uma simplicidade, quando este pudesse ser construído apenas a partir da aplicação dessa técnica. Se um problema pudesse ser resolvido apenas com régua e compasso, poderia ser considerado mais puro do ponto de vista matemático, do que um que necessitasse do uso de outras ferramentas, sejam estas algébricas, ou mesmo, geométricas.

Tomando então esse fato, e entendendo que o importante é o aprendizado que podemos obter, focaremos as construções com régua e compasso, mas não com um fim em si mesmas, e sim, como contrapartida para explanações gerais sobre importantes tópicos em matemática, que com a ajuda do uso desse método, no mínimo passam a ter uma forma diferenciada e empolgante de serem vistas e vivenciadas no âmbito da matemática escolar.

1.6 Lista de Exercícios e Atividades Extras

1) *Conhece-te a ti mesmo.* Essa frase é bem conhecida pela maioria das pessoas, que tenham ao menos uma base escolar consolidada, o que não impede que qualquer pessoa tenha conhecimento de seu significado. Em resumo, significa que o conhecimento de si próprio é revelador e possibilitador de crescimento pessoal e intelectual. Assim, vemos que ser conhecedor de nossa história, é importante para que não sejamos leigos, e para que possamos intervir e, quando possível, também reconstruí-la, ou mesmo trazer novos significados. Façamos então, um estudo histórico sobre os três pontos a seguir, relatando os pontos de maior interesse e curiosidade. Por fim, a realização de um debate sobre os tópicos abordados pode ser favorável ao desenvolvimento dos conhecimentos adquiridos pela turma.

- Como e de que forma surgiu a ideia intuitiva de número, e de que maneira esta foi sistematizada?
- A escrita contribuiu de que maneira no desenvolvimento da matemática, enquanto ciência?
- Quais as principais contribuições dadas pelos gregos ao processo de sistematização da matemática conhecida em sua época?

2) Construa uma linha do tempo, na qual possa mostrar alguns dos momentos mais importantes na história da matemática, do começo de sua descoberta pelo homem, até o fim da contribuição da cultura grega clássica. Dê ênfase especialmente a processos voltados para a Geometria.

3) Por que, em sua opinião, a filosofia e outras áreas de conhecimento estavam tão ligadas entre si, quando olhamos a maneira grega de ser e de vivenciar o seu mundo intelectual?

4) Os pitagóricos tinham um grande misticismo referente ao conceito de número, por exemplo, atribuindo aos números pares a característica feminina e aos números ímpares, a masculina. Pesquise sobre o significado atribuido aos números pelos pitagóricos, seu significado e o porquê desse significado.

CAPÍTULO 2

Primeiras Construções Com Régua e Compasso

A construção com régua e compasso é um procedimento matemático, que como já dissemos anteriormente, data de períodos bem anteriores aos nossos atuais. Porém, a maioria das suas aplicações em situações geométricas ou aritméticas, se faz relativamente de forma bem simples, ou seja, construções com régua e compasso são, de certo modo, simples e de fácil compreensão para a maioria dos leitores e interessados no assunto.

É curioso também saber que se pode usar métodos que envolvem o uso desses instrumentos, para realizar determinadas tarefas que possivelmente faríamos de outro modo, como a soma, subtração, multiplicação e divisão de números. É possível fazer essas operações usando régua e compasso.

Na verdade, ao usar esses instrumentos, estamos realizando operações aritméticas básicas, mais especificamente com segmentos. Porém um segmento é sempre mensurável, e então podemos representá-lo sempre usando algum número real.

2.1 Como resolver operações básicas com régua e compasso?

2.1.1 Adição e subtração

A soma através do uso dos instrumentos régua e compasso é algo de caráter bem simplório. Digamos que sejam dados dois segmentos de medidas distintas. Seja o primeiro deles o segmento AB e o segundo, o segmento CD.

Sua soma nada mais é que a transposição de suas medidas sobre uma reta comum dada, sobre a qual poremos os dois segmentos em justaposição, ou seja, dois dos vértices de cada um dos segmentos dados, um em cada segmento se juntarão, tornando-se um único vértice.

A título de exemplificação, poderíamos dizer que os vértices B e C tornar-se-ão um único vértice e podemos então designar que a soma dos dois segmentos AB e CD é agora representada pelo segmento AD.

Todo o processo se faz basicamente com o uso da idéia de construir sobre a reta um segmento de mesmo comprimento que aquele que queremos transpor, e isso se faz pela colocação de uma das pontas do compasso sobre um dos extremos do segmento e a outra ponta, sobre o outro extremo. Mantendo-se essa abertura do compasso fixa, desenha-se esse segmento sobre a reta suporte dada, como mostra a figura 2.1.

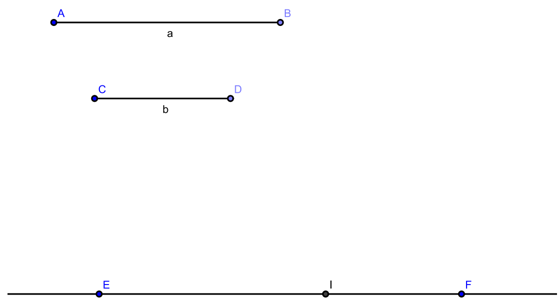


Figura 2.1 Soma

Realizando esse processo e justapondo os vértices como dito anteriormente, fazemos por régua e compasso a operação de adição de segmentos dados. Nesse caso, temos que os segmentos AB e EI, CD e IF são congruentes, e o segmento AD é correspondente, sobre a reta suporte, ao segmento EF.

Já o processo de subtração difere muito pouco deste, sendo necessário apenas que o segmento de menor dimensão seja sobreposto sobre o de maior dimensão, e um dos vértices de cada segmento, sejam postos de maneira a também se sobreporem, ou seja, transfiro o segmento para a reta suporte e transfiro o outro segmento sobre este, pelos meios anteriormente ditos, e como mostra a figura 2.2.

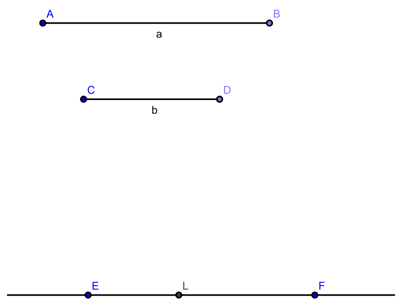


Figura 2.2 Subtração

Como os segmentos AB e EF, e os segmentos CD e FL são congruentes entre si, temos que o segmento EL é o resultado da subtração realizada acima.

2.1.2 Multiplicação e divisão

O processo de multiplicação consiste basicamente em somas sucessivas do segmento. Assim, para ilustrá-lo, temos a figura 2.3, onde os segmentos dadas, AB, CD e EF, são multiplicados respectivamente por 15, 10 e 6. Vejamos:

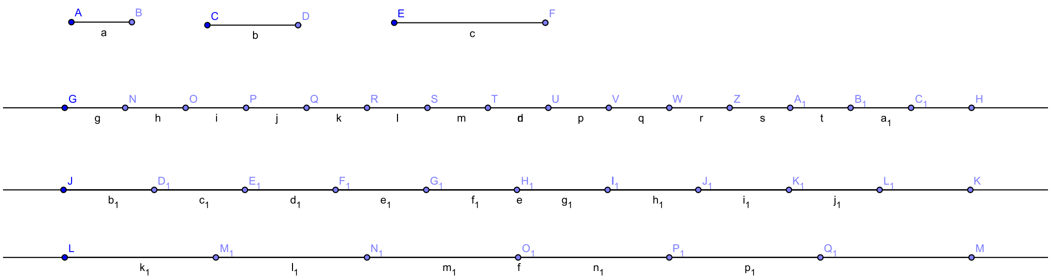


Figura 2.3 Multiplicação

Podemos também realizar a multiplicação de dois segmentos dados, AC e AD, utilizando o seguinte processo:

1. Tomando, como mostra a figura abaixo, o segmento AB, como sendo a unidade, tracemos inicialmente a reta que passa pelos pontos B e C;

2. Agora basta traçar a reta paralela a esta, que passa pelo ponto D;

3. Esta reta corta a reta suporte de AD no ponto E, e o segmento AE é o resultado esperado dessa multiplicação.

Vejamos a figura na próxima página.

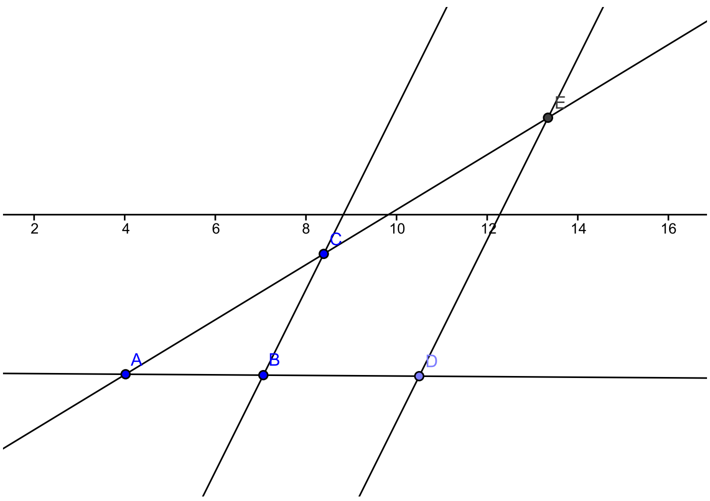


Figura 2.4 Multiplicação de segmentos

Isso ocorre devido ao fato de estarmos construindo nessa figura dois triângulos semelhantes, segundo o teorema de Tales. Como as retas que passam por B e C e por D e E são paralelas entre si, temos que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow$$
$$AC.AD = AB.AE \Rightarrow$$
$$AC.AD = AE$$

Já o processo para a realização de um a divisão requer um pouco mais de cuidado. Devemos seguir os seguintes passos:

1. Ponha sobre uma reta suporte o segmento que você quer dividir;
2. Por um dos extremos do segmento, desenhe uma outra reta, oblíqua em relação a primeira;
3. Marque sobre esta nova reta, segmentos de mesmo comprimento, em quantidade igual ao total de partes que você quer dividir o segmento dado;
4. Pelo último ponto marcado sobre esta reta, trace uma nova reta que passe pelo outro ponto extremo do segmento dado inicialmente;
5. Agora é só traçar retas paralelas a esta, passando pelos pontos dos segmentos que foram desenhados sobre a reta oblíqua. Os pontos de intersecção dessas retas, dividem o segmento em partes iguais.

Podemos visualizar esse processo através da figura 2.5, dada abaixo:

Nesse caso, o segmento foi dividido em três partes iguais.

2.2 Construção de conceitos geométricos básicos

2.2.1 Retas paralelas e perpendiculares

Existem mais de uma maneira diferente de realizar o procedimento de construção de retas paralelas e perpendiculares. Porém mostraremos aqui, aqueles que parecem ser os mais simples e de melhor compreensão. As construções se fazem basicamente da seguinte maneira:

2.2.1.1 Retas paralelas e suas formas de construção

Para construir retas paralelas, realiza-se esses passos:

1. Sobre uma reta suporte, construa uma circunferência de raio qualquer;

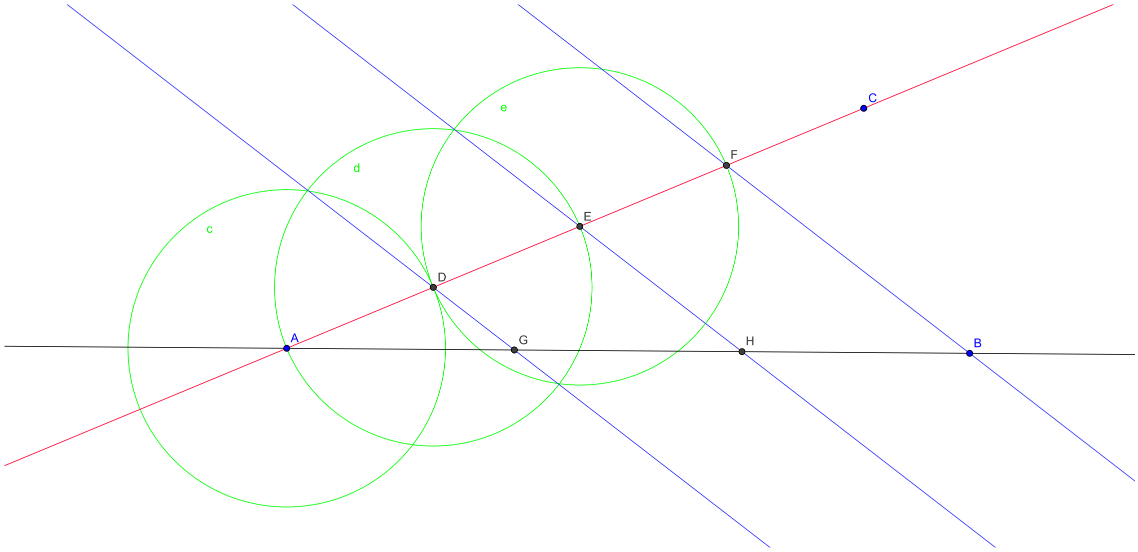


Figura 2.5 Divisão

2. Tome os pontos de intersecção da circunferência com a reta suporte, e sobre eles, centre duas novas circunferências de raio qualquer, porém iguais entre si;
3. Os pontos de intersecção dessas duas novas circunferências e a primeira que foi construída, pertencem a duas retas paralelas em relação à primeira;
4. Basta então construir as retas, passando por esses pontos.

Vejamos a figura 2.6:

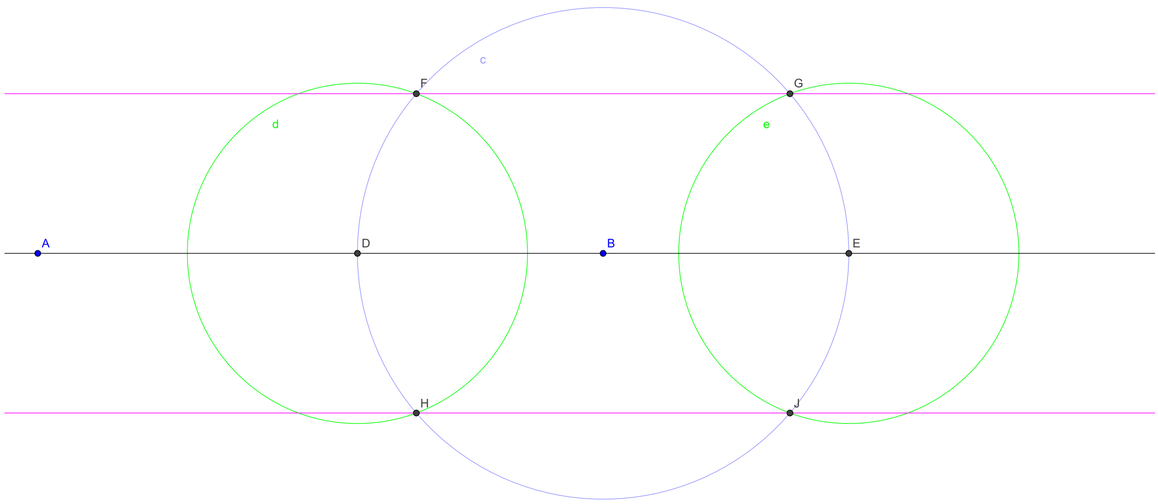


Figura 2.6 Retas Paralelas

2.2.1.2 Retas perpendiculares e suas formas de construção

- **Reta perpendicular a uma segunda, por uma circunferência de raio qualquer**

Os passos para essa construção são os seguintes:

1. Construa uma reta e sobre um ponto da mesma, uma circunferência de raio qualquer;
2. Tomando uma abertura fixa do compasso, construa duas novas circunferências, de mesmo raio, com centros, cada uma delas em um dos pontos de intersecção da reta e da circunferência dada anteriormente;
3. A reta perpendicular à primeira é a que é construída tomando os pontos de intersecção das duas novas circunferências.

Vejamos a construção expressa acima na figura 2.7 dada abaixo.

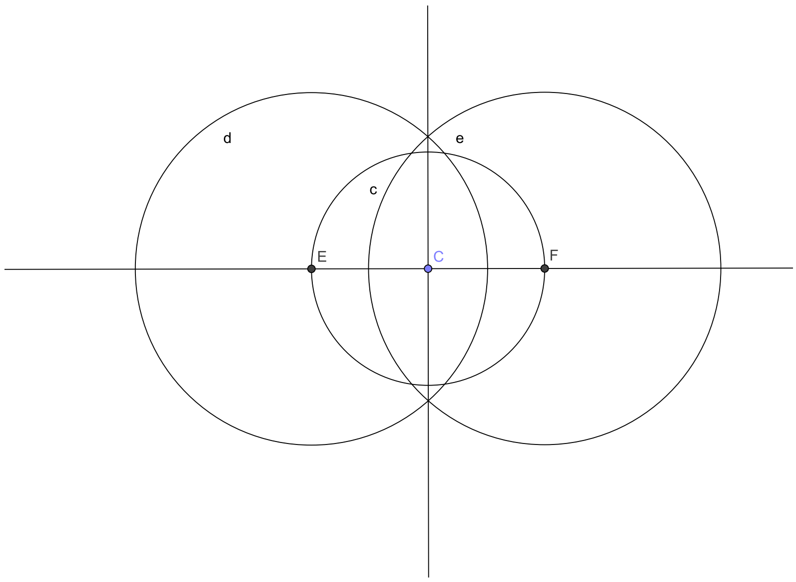


Figura 2.7 Retas perpendiculares

- **Reta perpendicular a um segmento dado, por seu ponto médio**

Neste caso, tanto acharemos a reta perpendicular a esse segmento, como também saberemos qual é o ponto do segmento que é médio. O procedimento é praticamente o mesmo aplicado anteriormente.

Vejamos os passos a tomar:

- Construa sobre uma reta suporte o segmento dado;

- Em cada um dos extremos do segmento construa uma circunferência de raio qualquer, desde que o raio de ambas seja o mesmo;
- A reta desejada é a que passa pelos pontos de intersecção das duas circunferências.

Vejamos a figura 2.8.

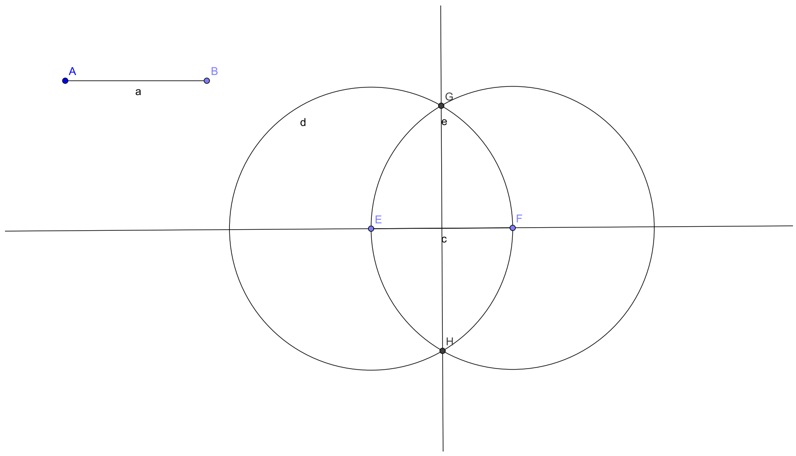


Figura 2.8 Retas Perpendiculares pelo ponto médio

O interessante é que o procedimento mostrado na figura 2.8, para se construir um triângulo equilátero é basicamente este, como veremos mais adiante, num dos próximos tópicos. Nessa figura, os segmentos AB e EF são congruentes.

2.2.2 Ângulos e formas de secção

2.2.2.1 Como bissectar um ângulo?

Bissectar um ângulo significa dividi-lo "ao meio", formando dois novos ângulos de mesma medida. Para isso, é necessário construir a bissetriz desse ângulo.

A bissetriz de um ângulo é a reta que passa pelo vértice do ângulo dado, e que o divide ao meio.

Sua construção se faz da seguinte maneira:

1. Tome um ângulo qualquer, e centrando o compasso em seu vértice, desenhe uma circunferência de raio qualquer;
2. Nos pontos de intersecção da circunferência com as semi-retas que formam o ângulo, centre duas novas circunferências, de modo que seus raios tenham o mesmo valor e que elas se intersectem;
3. A reta que passa pelo vértice do ângulo e pelos pontos de intersecção das circunferências construídas anteriormente, é a bissetriz do ângulo dado.

Veja sua figura 2.9.

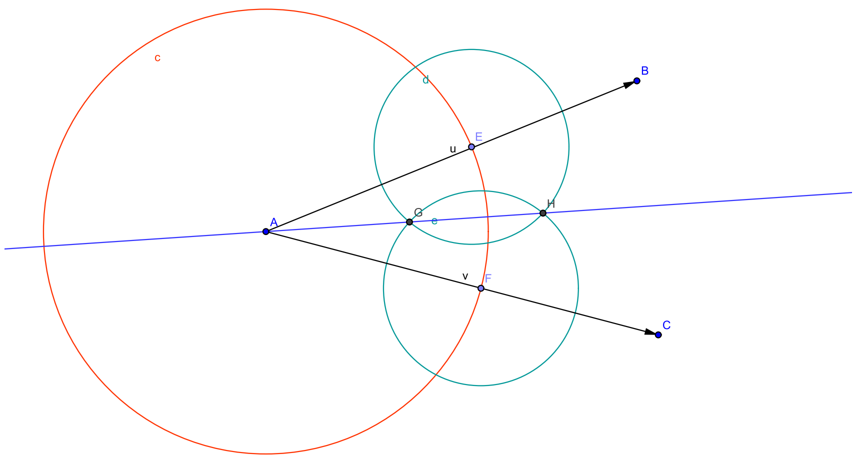


Figura 2.9 Bissecção do ângulo

2.2.2.2 A trissecção com régua e compasso e suas impossibilidades

A trissecção de um ângulo é uma operação que não pode ser realizada com régua e compasso. Muitos tentaram, ao longo dos séculos, resolvê-lo, porém sem sucesso. Uma discussão mais detalhada sobre o assunto será realizada no Capítulo 3.

2.2.2.3 A possibilidade da n-secção de um ângulo

Nem todas as possibilidades de dividir um ângulo são de fácil construção com régua e compasso. Algumas delas, na verdade não são possíveis ou não se encontrou uma maneira de fazê-lo, mas certamente é fácil dividir o ângulo, a partir de bissecções sucessivas do mesmo. Assim, podemos dividir um ângulo em dois, ou em quatro, ou em oito, ou em desesseis, enfim, na continuidade dessa progressão geométrica de primeiro termo um e razão dois. Discutiremos esse tópico com mais detalhes no Capítulo 5.

2.3 Lugares geométricos básicos em um triângulo qualquer

2.3.1 A mediatriz de um segmento

Por definição, esta reta nada mais é que a reta perpendicular a um segmento qualquer, com a propriedade de que esta passa pelo ponto médio do segmento dado.

Sua construção se faz da seguinte maneira:

1. Transfira um segmento de medida qualquer para uma reta suporte;

2. Construa em cada uma das extremidades do segmento dado, circunferências, de raio fixo qualquer, porém cujos raios sejam o mesmo, para ambas as circunferências construídas;

3. Construa a reta que passa pelos pontos de intersecção das duas circunferências.

A reta construída dessa maneira é chamada de reta mediatriz. Veja a figura 2.10 abaixo:

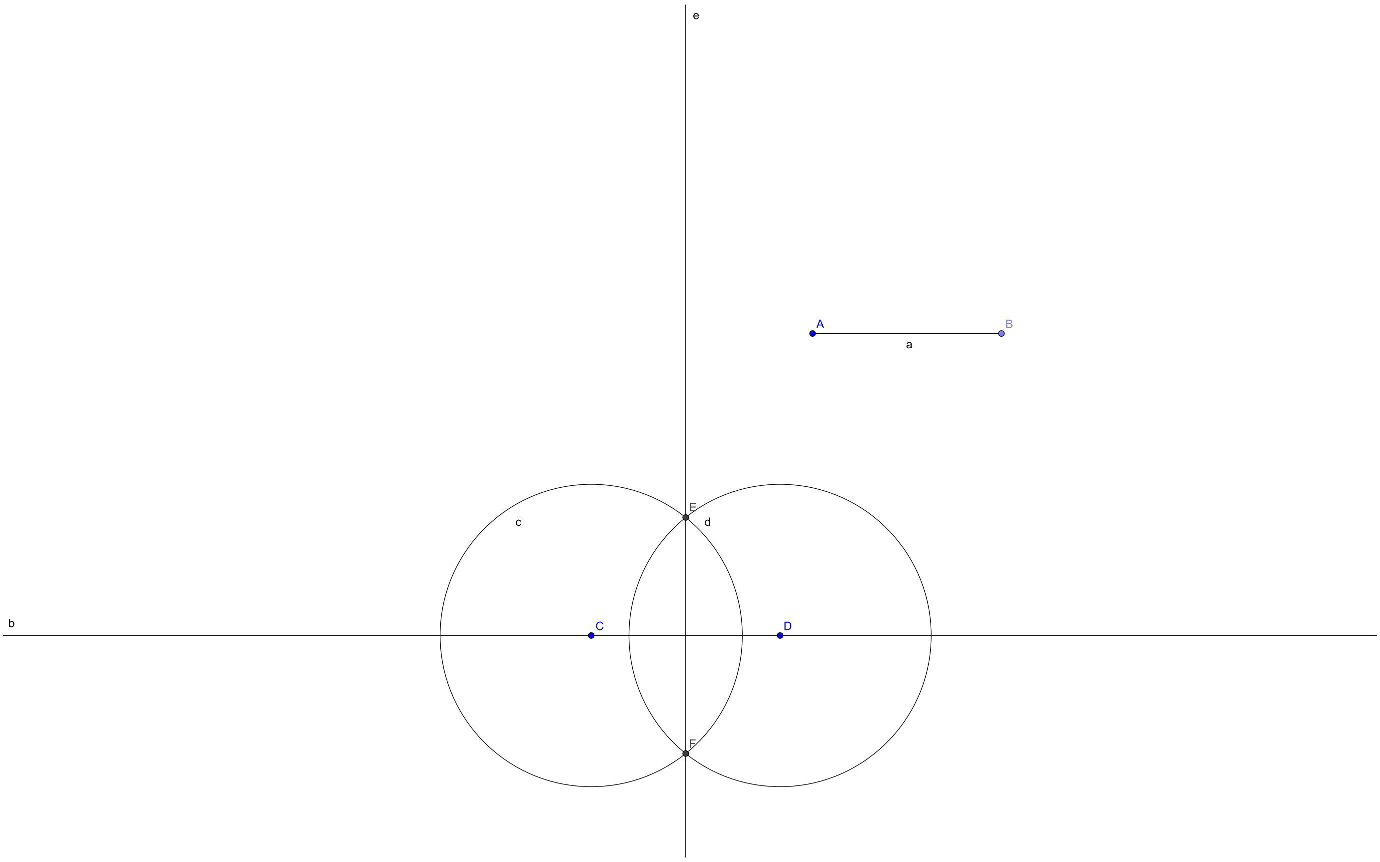


Figura 2.10 Mediatriz

2.3.2 O incentro, o circuncentro, o baricentro e o ortocentro

2.3.2.1 Incentro: o encontro das Bissetrizes

O Incentro de um triângulo qualquer, nada mais é do que o lugar geométrico da intersecção das bissetrizes desse triângulo. Como foi dito anteriormente, a bissetriz é a reta que passa pelo vértice do ângulo e que o divide ao meio. Assim, para construir o Incentro, devemos seguir os seguintes passos:

1. Dado um triângulo ABC, partindo de cada vértice, construa as três bissetrizes do triângulo;

2. O ponto D, de intersecção dessas bissetrizes é o incentro.

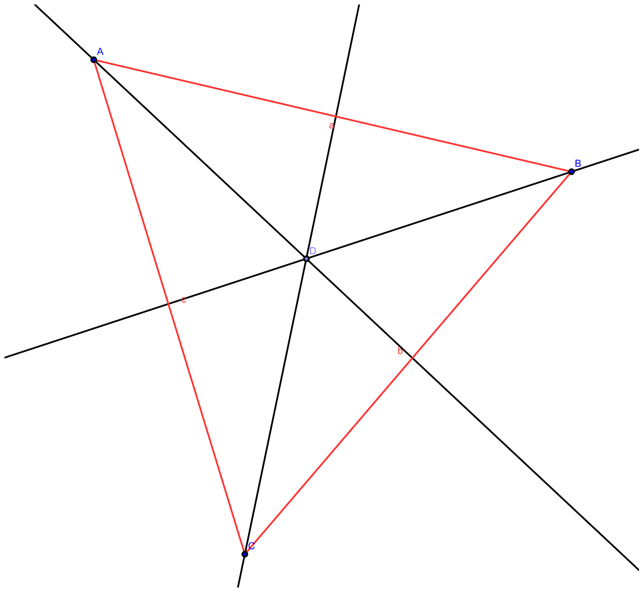


Figura 2.11 Incentro

Vejamos a figura 2.11:

Uma curiosidade é que podemos construir o círculo inscrito em um triângulo, tendo por centro, o Incentro, e por raio, o segmento que vai do Incentro até qualquer um dos lados do triângulo, de forma perpendicular a este, já que é sobre esta reta perpendicular que se encontra a menor distância entre o centro e o lado. É o que mostra a figura 2.12:

2.3.2.2 Cincuncetro: o encontro das Mediatrizes

Como foi dito anteriormente, a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento, que passa pelo seu ponto médio. Partindo desse fato, podemos definir o seguinte lugar geométrico.

O cincuncetro de um triângulo qualquer é o lugar geométrico da intersecção das mediatrizes de seus lados. É o que podemos ver na figura 2.13.

Também podemos ver que a circunferência que tem por centro o circuncentro, é a circunferência circunscrita ao triângulo ABC dado.

2.3.2.3 Baricentro: o encontro das Medianas

O baricentro é o lugar geométrico da intersecção das medianas de um triângulo qualquer. Já a mediana, referente a um lado de um triângulo é o segmento que parte do vértice e que passa pelo ponto médio desse respectivo lado.

Assim, para construir o baricentro, devemos seguir os seguintes passos:

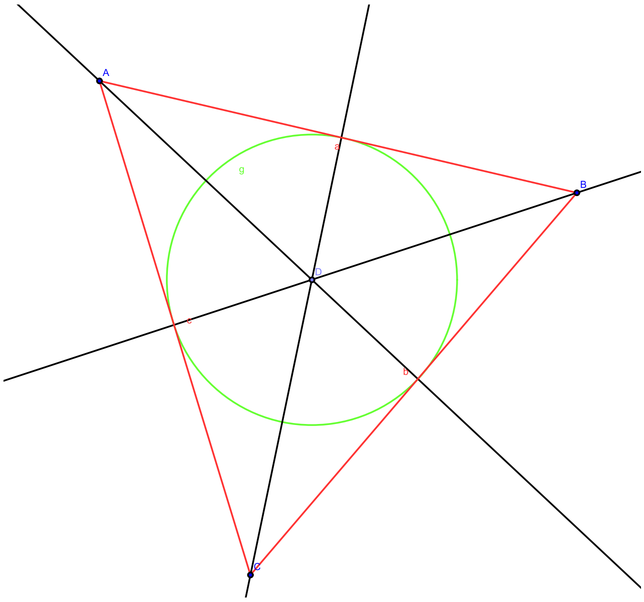


Figura 2.12 Circunferência inscrita

1. Encontre os pontos médios dos lados do triângulo dado, e construa as medianas desses lados;
2. O baricentro é o ponto de intersecção das retas medianas dadas nessa construção.

Nessa figura, o baricentro é representado pelo ponto N. Porém a figura esta muito preenchida com informações, devido ao fato de se ter construído todos os pontos, retas e circunferências. Para uma melhor visualização, vejamos a figura 2.15:

2.3.2.4 Ortocentro: o encontro das Alturas

Deixaremos a construção desse importante lugar geométrico como exercício.

2.4 Como construir polígonos e figuras geométricas simples.

Diante do que foi tratado até agora, em termos de técnicas de construção, podemos realizar a construção de algumas figuras geométricas mais conhecidas. Vejamos os processos que devemos empregar para obter essas construções.

2.4.1 O círculo, dado o seu raio

Como sabemos, a circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes do centro da mesma. Assim, a construção de um círculo ou circunferência se processa de maneira bem simples. Basta ter um ponto para ser seu centro, e esse ponto pode ser qualquer ponto do plano, a menos que se diga o contrário, e um raio fixo. Daí, basta apenas fixar a ponta seca do

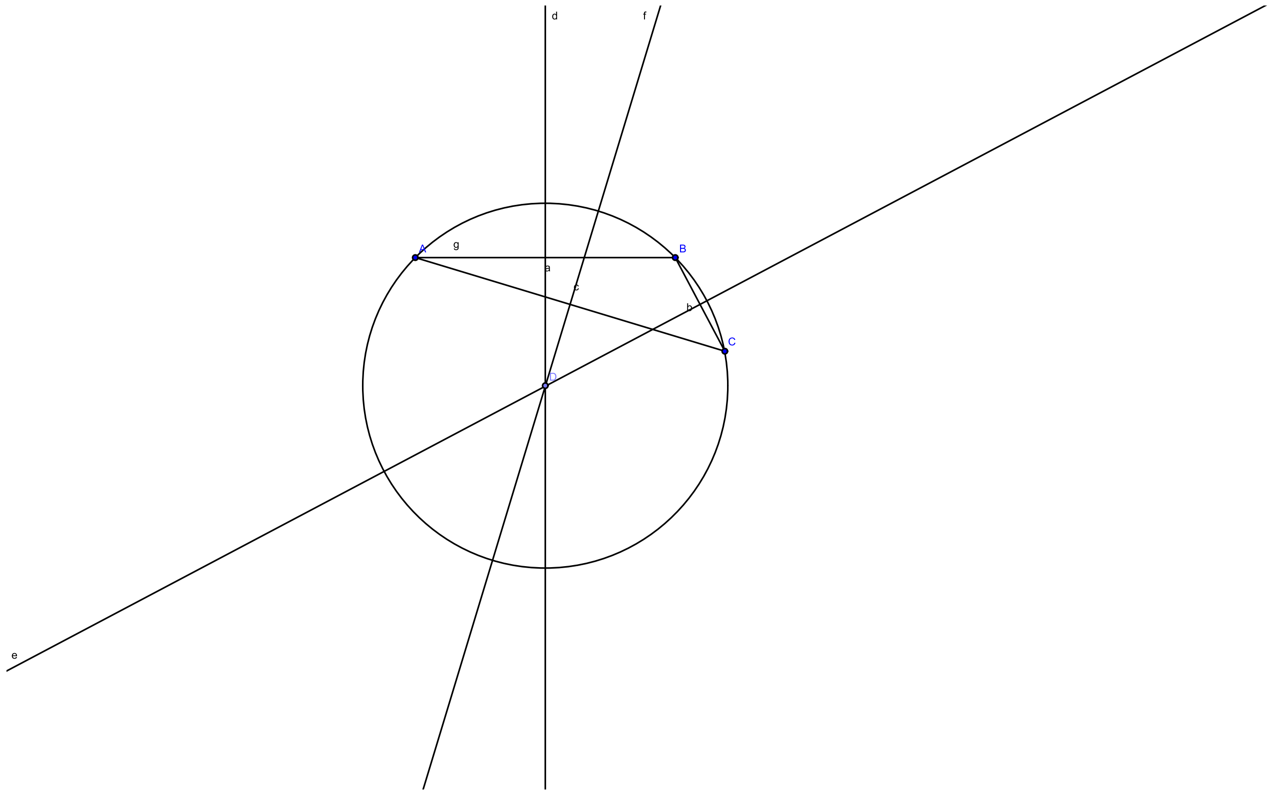


Figura 2.13 Circuncentro

compasso no centro, e , com uma abertura igual ao raio, traçar a circunferência pedida. Veja a figura 2.16:

Nela, os segmentos AB e CD são iguais.

2.4.2 O quadrado, dado o seu lado ou a sua diagonal

Como sabemos, o quadrado é uma figura geométrica de propriedades muito particulares, a saber:

- Todos os seus lados são iguais;
- Todos os seus ângulos são iguais entre si, tendo a medida de um ângulo reto;
- Suas diagonais são iguais entre si e se intersectam ao meio.

Desta forma, a sua construção torna-se fácil. Vejamos dois procedimentos para a sua construção, sendo um a a partir de seu lado e o outro, a partir de sua diagonal.

2.4.2.1 O quadrado, a partir de seu lado

Nessa construção, os passos são os seguintes:

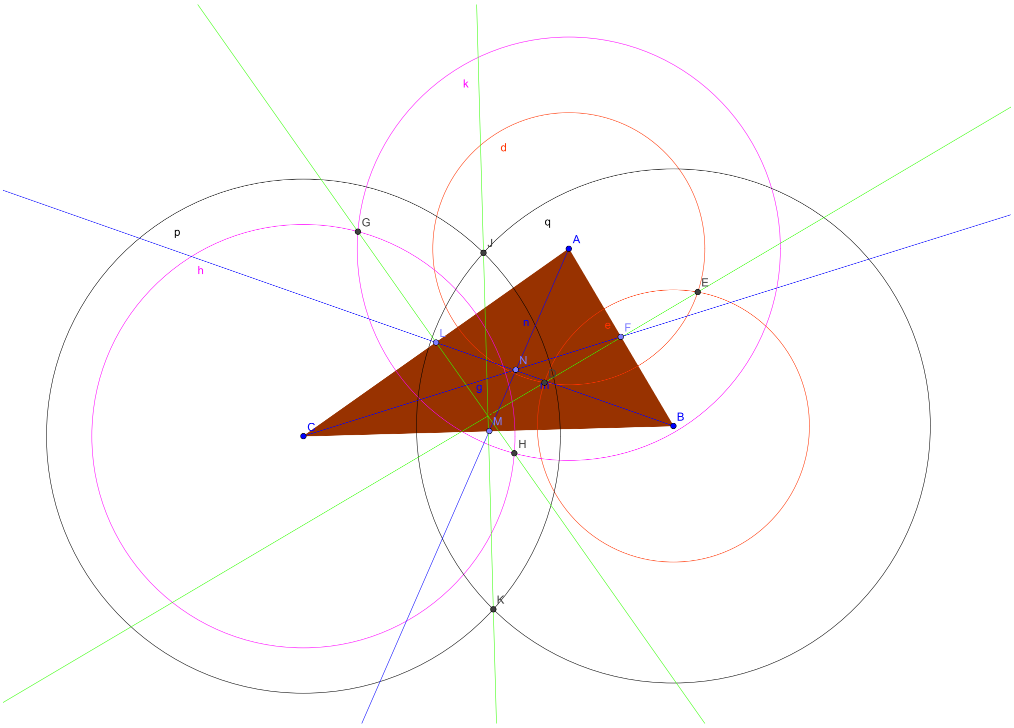


Figura 2.14 Baricentro

1. Tome o lado do quadrado dado e transfira-o, mediante uma abertura fixa do compasso, para uma reta suporte qualquer, dada;

2. Por cada um dos pontos dados nas extremidades do lado, construa uma reta perpendicular a primeira;

3. Partindo de uma das extremidades do lado posto sobre a reta suporte, transfira o lado dado para cada uma das retas perpendiculares;

4. Basta agora construir a reta que passa por esses dois pontos extremos desses dois segmentos, sabendo que os outros dois extremos são exatamente os pontos extremos do segmento dado inicialmente.

Realizando esses passos, construímos o quadrado *ABDC*, que se vê logo abaixo.

2.4.2.2 O quadrado, dado a sua diagonal

Também não se trata de uma construção de uma figura de difícil compreensão. Sua construção segue os seguintes passos:

1. Transfira para uma reta suporte, o segmento correspondente à diagonal, mediante uma abertura fixa do compasso;

2. Construa a mediatriz desse segmento;

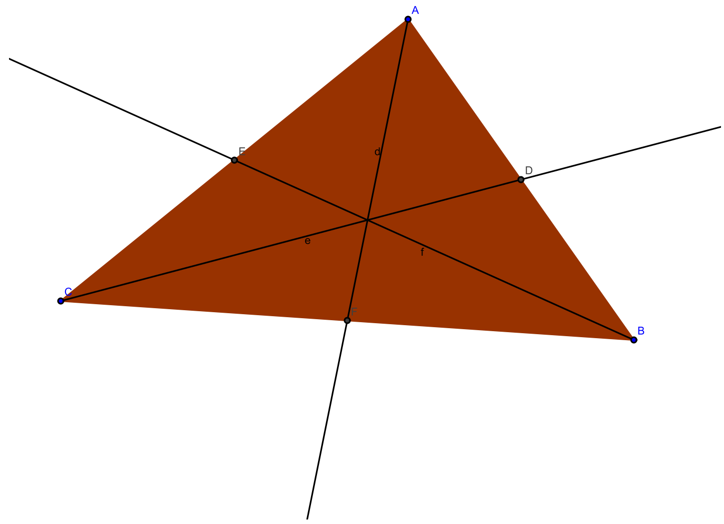


Figura 2.15 Outra visualização do Baricentro

3. Construa o círculo de centro na intersecção das retas suporte e mediatriz, cujo diâmetro é o próprio segmento dado;
4. Neste caso, os segmentos HI e CD são congruentes;
5. O quadrado desejado é construído, unido-se os pontos F, C, H e D, formando o quadrado $FCHD$.

É o que vemos logo na figura 2.18.

2.4.3 O retângulo, dados os seus lados

A construção de um retângulo é idêntica à demonstrada acima, para o quadrado, dado que o quadrado nada mais é que um caso particular do retângulo. O retângulo nada mais é que o quadrilátero de lados opostos de mesma medida, todos os ângulos internos retos e de diagonais que se intersectam ao meio. Assim, vemos que a diferença básica entre um quadrado e um retângulo está apenas no fato de, no quadrado, todos os lados terem medidas iguais entre si, e no retângulo, isso só ocorrer com os lados opostos.

Logo, para construir um retângulo com régua e compasso, devemos seguir os seguintes passos:

1. Construir uma reta qualquer e uma perpendicular em um ponto qualquer da mesma;
2. Transferir para cada uma dessas duas retas-suporte, um, e apenas um dos segmentos, em cada uma, tendo o cuidado de que um dos extremos de cada um deles seja posto sobre o ponto de intersecção das retas;

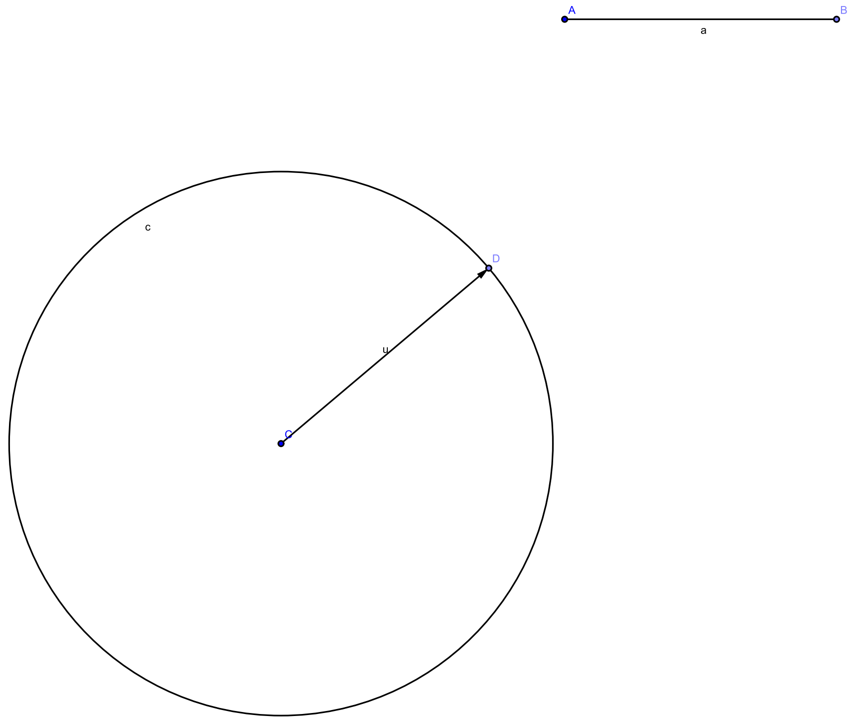


Figura 2.16 Circunferência

3. Em cada um dos outros dois extremos, construir à reta perpendicular a reta suporte, que passa nesse ponto. O retângulo fica definido, na região delimitada pelas quatro retas construídas dessa maneira.

Vejamos sua representação na figura 2.19:

É importante esclarecer que, na figura, os segmentos AB e EG são congruentes, bem como os segmentos CD e EF, e o nosso retângulo é o retângulo $EFHG$.

2.4.4 Trapézios, Losangos e Triângulos quaisquer

2.4.4.1 O trapézio isósceles

A construção do trapézio isósceles é feita da seguinte forma:

1. Dadas a sua altura, representada na figura pelo segmento CD, que é congruente ao segmento LK, e suas respectivas bases maior e menor, representadas pelos segmentos EF e AB, respectivamente congruentes aos segmentos GH e MN, façamos os seguintes procedimentos;

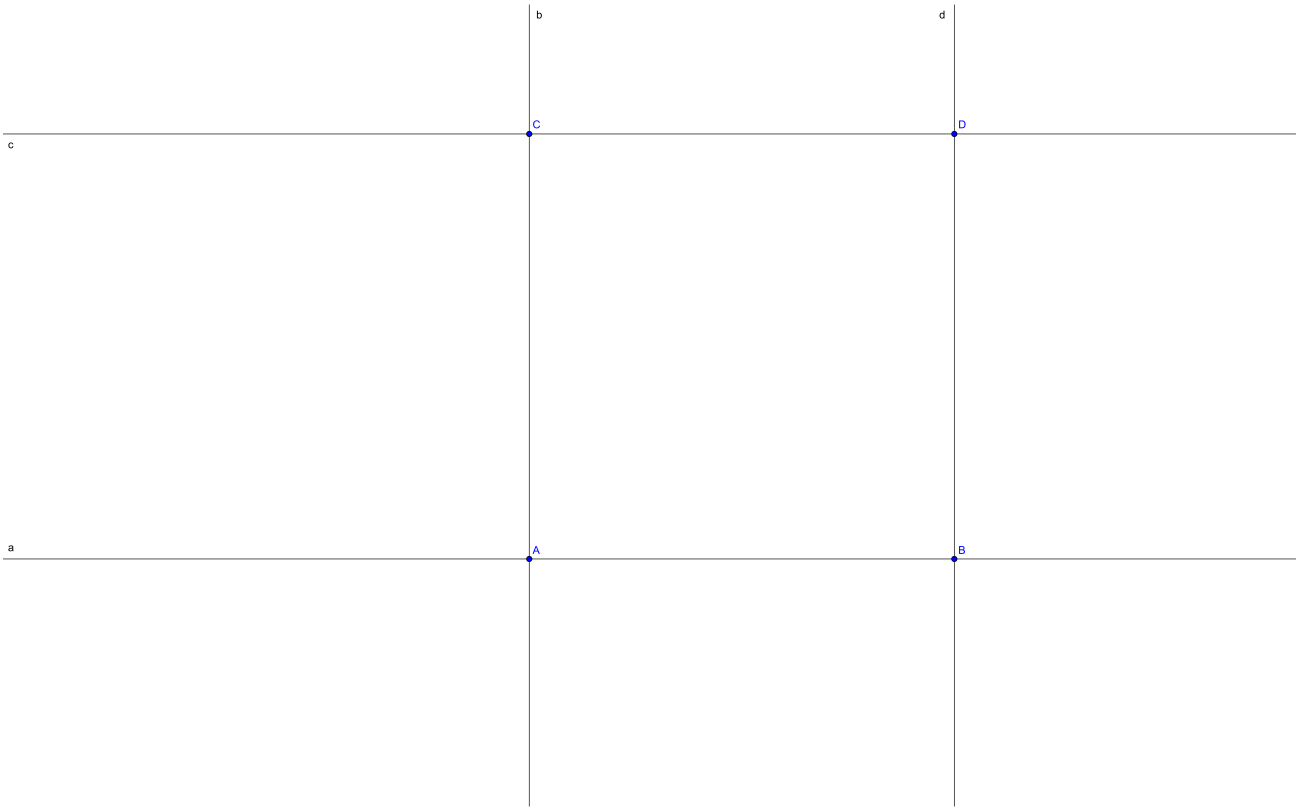


Figura 2.17 O quadrado, através do lado

2. Transfira uma das bases dada para uma reta suporte. A fins de facilitação do entendimento, façamos a transferência da base maior;

3. Encontre o ponto médio do segmento que representa a base;

4. Por esse ponto, dito médio, trace uma reta perpendicular a reta suporte dada;

5. Centre no ponto médio encontrado anteriormente, uma circunferência cujo raio é equivalente ao valor da altura do trapézio;

6. Essa circunferência corta a reta perpendicular em um ponto, designado na figura por ponto L;

7. Trace por L a reta paralela à reta suporte dada inicialmente;

8. Agora, tomando L novamente, centre uma nova circunferência nesse ponto, de modo que o diâmetro desta seja equivalente à medida do segmento que representa a base menor do trapézio. Isso se faz dividindo o segmento que representa a base menor em duas partes iguais, e tomando esse novo segmento como sendo o raio da circunferência em questão.

Assim podemos visualizar essa construção na figura 2.20.

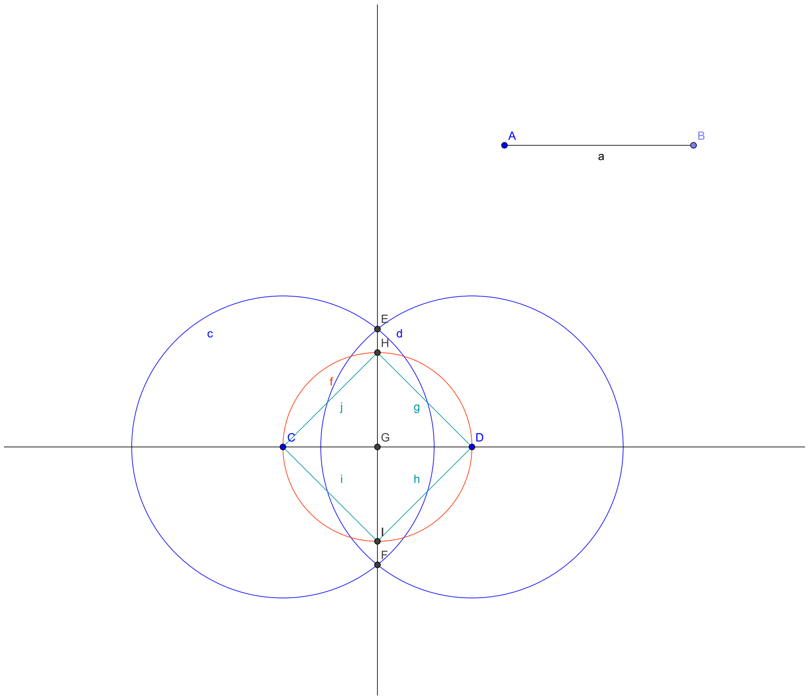


Figura 2.18 O quadrado, a partir de sua diagonal

2.4.4.2 O losango

Para construir o losango, devemos seguir os passos abaixo:

1. Transfira uma de suas diagonais para uma reta suporte dada;
2. Encontre o ponto médio dessa diagonal e por ele trace uma reta perpendicular a primeira;
3. Divida a outra diagonal em duas partes iguais. Isso pode ser feito por divisão ou achando seu ponto médio;
4. Centre no ponto médio da outra diagonal uma circunferência cujo raio seja o segmento encontrado na divisão dada anteriormente;
5. Os pontos onde a circunferência corta a reta perpendicular construída são os outros dois vértices do losango, e o mesmo está construído.

2.4.4.3 Triângulos quaisquer

Faremos a construção dos três tipos de triângulos: o equilátero, o isoscéles e o escaleno.

A construção do triângulo equilátero é simples, e segue os passos abaixo:

1. Sobre uma reta suporte, transfira um segmento congruente com o lado do triângulo desejado;

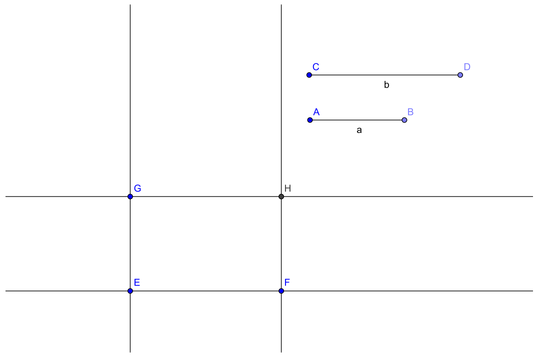


Figura 2.19 O retângulo

2. Centre duas circunferências, uma em cada um dos extremos do segmento, e com raio igual ao segmento;

3. Marque um dos pontos de intersecção das circunferências;

4. Trace segmentos unindo esse ponto aos extremos do segmento dado inicialmente.

Assim, fica determinado o triângulo mostrado na figura 2.22.

Para a construção do triângulo isósceles, pode-se seguir os mesmos passos anteriores, modificando apenas o raio das circunferências, de modo que este seja ou maior ou menor que o segmento dado. O caso da igualdade pode ser classificado como uma particularidade, já que o triângulo equilátero também é isoscéles.

Deixaremos essa construção como exercício.

Por fim, a construção do triângulo escaleno se faz a partir da seguinte sequência de passos:

1. Tranfira um dos lados do triângulo dado, para uma reta suporte;

2. Nos extremos desse lado transposto, centre duas circunferências, cada uma delas, com raio igual a um dos outros lados do triângulo;

3. A intersecção das circunferências é o terceiro vértice do triângulo;

4. Basta então ligá-lo aos outros dois extremos, formando o triângulo desejado.

Vejamos sua construção na figura 2.23:

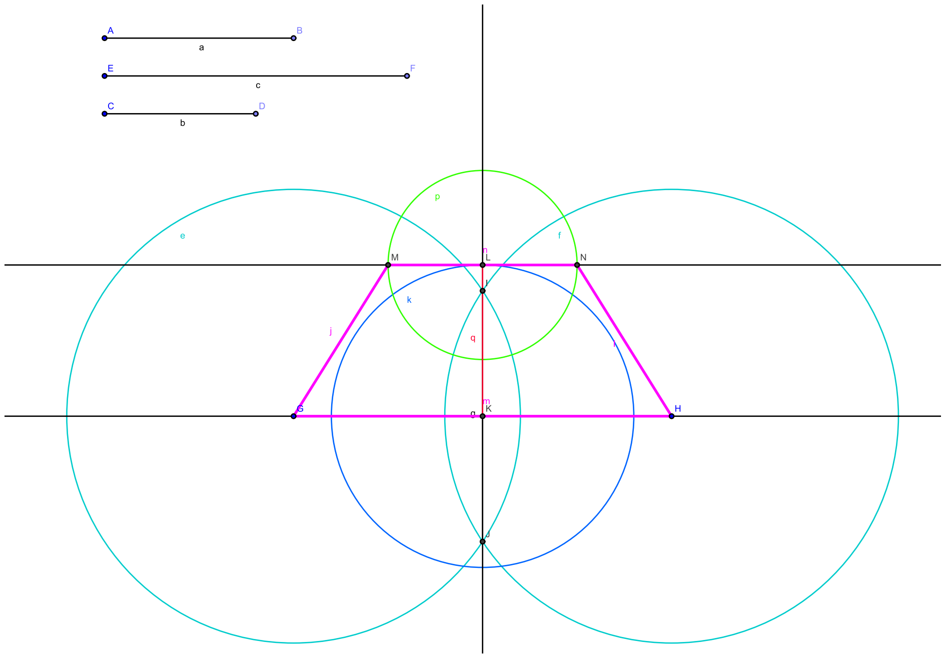


Figura 2.20 Trapézio

2.5 A raíz quadrada de um segmento

Para a realização da construção da raíz quadrada de um segmento, basta seguirmos o seguinte procedimento:

1. Transporte o segmento desejado para uma reta suporte;
2. Prolongue o tamanho desse segmento em uma unidade;
3. Ache o ponto médio desse segmento;
4. Trace a circunferência centrada nesse ponto, cujo diâmetro é o segmento construído anteriormente;
5. Na extremidade do segmento dado inicialmente, onde o prolongamento foi realizado, trace uma perpendicular à reta suporte;
6. O segmento determinado a partir desse extremo, até a intersecção com a circunferência é a raíz quadrada do segmento dado inicialmente.

Conforme mostra a figura 4.2:

Nela percebemos uma generalização para o calculo da raiz quadrada de um produto de dois números. Basta então que ponhamos $a = 1$, e teremos o resultado desejado.

Uma explicação lógica para essa construção é a seguinte:

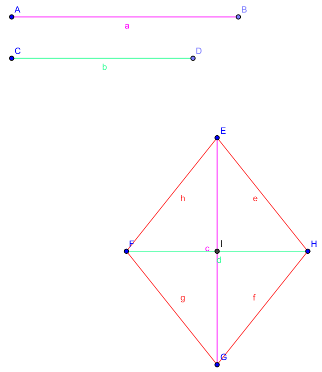


Figura 2.21 Losango

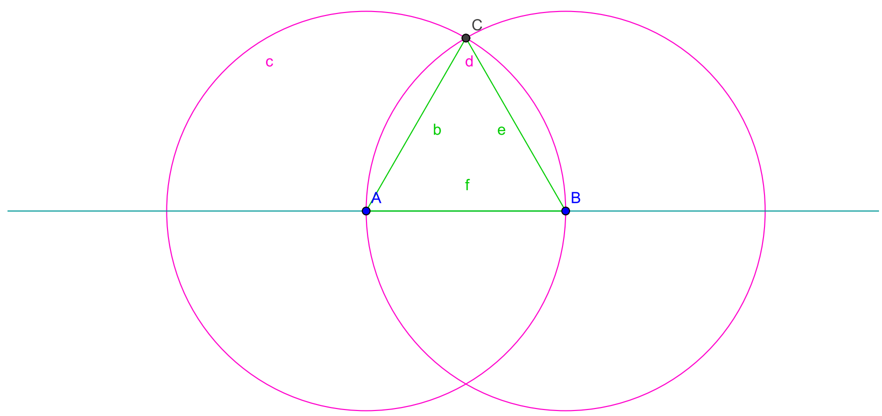


Figura 2.22 Triângulo equilátero

Se construírmos o triângulo cuja altura é o segmento determinado pela expressão $\sqrt{ab}$, e cujos vértices são os pontos extremos do segmento dado por $a+b$, temos que esse triângulo é retângulo, pelo teorema do ângulo capaz, que afirma ser o ângulo capaz equivalente à metade da medida do ângulo interno. Como o ângulo interno vale 180 graus, ele mede a metade, que é 90 graus, o que torna o triângulo dito, retângulo.

Assim, aplicando as relações métricas no triângulo retângulo, e tomando $a = 1$, temos que

$$h^2 = m.n,$$

onde m e n são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, e o x, o valor procurado.

$$x^2 = 1.b \Rightarrow$$
$$x = \sqrt{b}.$$

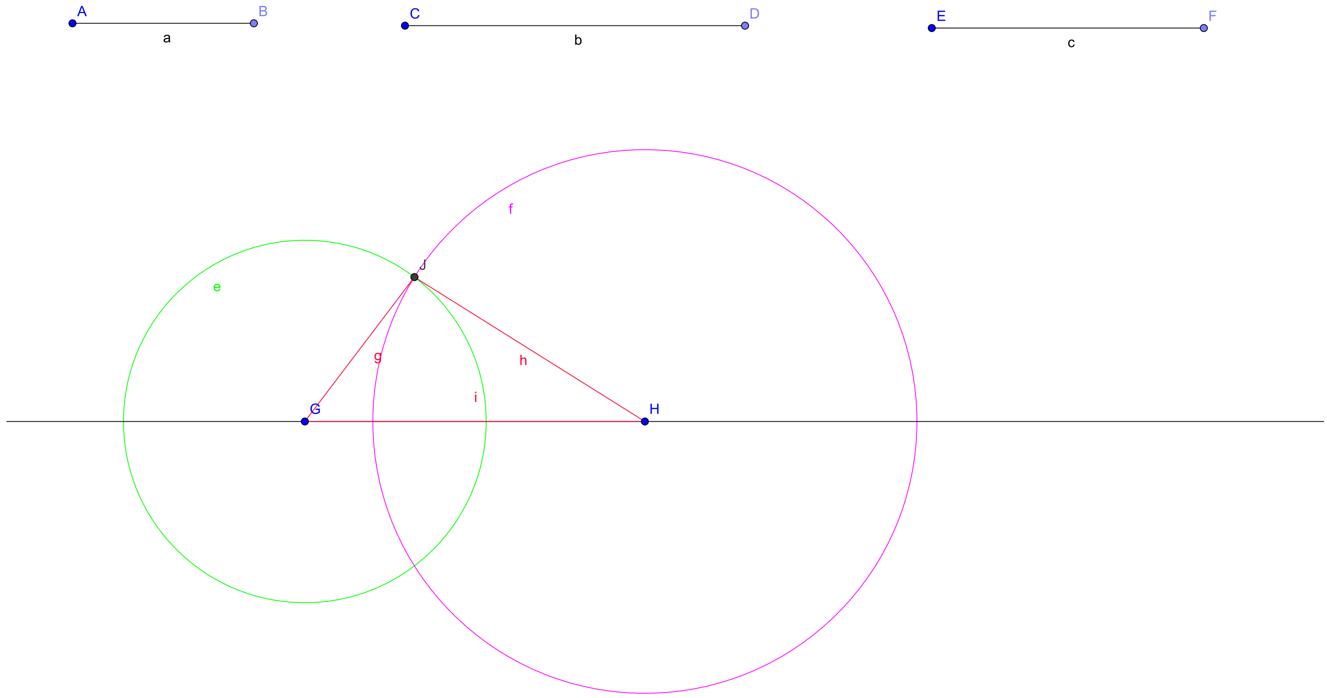


Figura 2.23 Triângulo escaleno

Essas são as principais construções de caráter mais simples que podemos fazer, de modo a inserir os principais conceitos básicos para se utilizar em construções euclidianas, ou seja, construções em que só se deve usar régua e compasso. Observa-se que as construções demandam um certo cuidado, para que não sejam aplicados conceitos de forma errônea ou equivocada, porém sempre podemos visualizar que a maioria das construções nos permitem mais de uma forma de fazê-las. Aqui, só foram demonstradas algumas, mas pode-se fazer as construções aqui propostas de outras formas mais interessantes, mais simples ou mais arrojadas; depende muito da criatividade de cada mente que se põe na posição de realizar essa tarefa.

Abaixo são propostas algumas atividades simples, mais que podem contribuir na reflexão sobre a possibilidade de trabalhar com essas técnicas em sala de aula, com alunos em qualquer estágio de desenvolvimento matemático, é claro, resguardadas a devidas peculiaridades individuais e por faixa de desenvolvimento intelectual e escolar.

2.6 Lista de Exercícios e Atividades Extras

Obs: Apesar de usarmos a régua euclidiana, nesses exercícios aplicaremos o artifício de usar uma régua graduada, de maneira que possamos medir os segmentos, e assim, provar ao aluno, que a construção realizada dessa forma realmente é correta. É claro também que deve-se acentuar o fato de que ao usar um instrumento de medida, devemos sempre estar trabalhando com

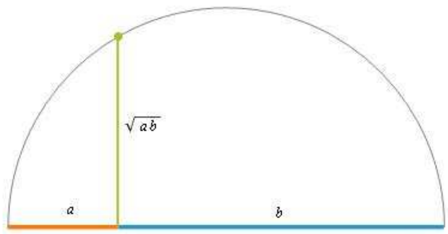


Figura 2.24 Raiz quadrada de um segmento

aproximações.

1) A partir dos conhecimentos adquiridos, faça a construção usando régua e compasso das seguintes figuras:

a) O trapézio isósceles de altura 6cm, sendo suas bases dadas, com medidas 5cm e 8cm, respectivamente.

b) O Losango, com diagonais 12cm e 15cm, respectivamente.

c) O trapézio, com um dos lados perpendicular as duas bases, sendo sua altura 4cm, e suas bases medindo 8cm e 13cm.

d) O círculo de raio 7cm.

e) O quadrado cuja diagonal é 11cm.

2) Realize, usando segmentos e as regras de construção apresentadas, as seguintes operações:

a) Somar dois segmentos de tamanho 4cm e 5cm.

b) Subtrair um segmento de 7cm de outro de 12cm de comprimento.

c) Multiplicar um segmento de 5cm por outro segmento de 7cm.

d) Dividir um segmento de 16cm em 4 partes iguais.

3) Faça a construção do triângulo isósceles, para o caso em que um dos lados mede 6cm e os outros dois , medem 8cm, ambos.

4) Faça a construção do ortocentro de um triângulo de lados 8cm, 10cm e 13cm.

5) Ache a raíz quadrada de um segmento que mede 16cm.

CAPÍTULO 3

Os Três Problemas Clássicos da Antiguidade Clássica da Grécia

Como já foi mostrado no Capítulo 2, a construção com régua e compasso é um procedimento instrumental interessante, e que também, ao mesmo tempo, devido à simplicidade de suas técnicas, permite a construção de vários conceitos matemáticos com muita facilidade e propriedade, o que é importante do ponto de vista do processo educacional, já que uma das principais dificuldades no ensino é justamente a falta de mecanismos adequados que possibilitem uma eficiente construção e assimilação dos conceitos estudados.

Vemos que através desse procedimento, a maioria das construções se faz de forma muito eficiente, e com extrema clareza. Porém, nem todos os problemas estudados são de tão fácil construção, apesar de num primeiro olhar nos parecerem muito simples e notavelmente possíveis de serem solucionados com o uso desses instrumentos. Alguns desses problemas se mostraram extremamente engenhosos, no sentido de que, tanto não permitiam essa fácil solução, como levaram muitos matemáticos a se dedicarem aos mesmos durante séculos, tentando encontrar uma solução que os satisfizessem.

Essa busca tanto permitiu muitos séculos depois, chegar à conclusão de sua impossibilidade de resolução por esses métodos, com também contribuiu num processo de realização de novas descobertas matemáticas, certamente mais frutíferas do que propriamente seriam, se as soluções buscadas tivessem sido realmente determinadas através das técnicas euclidianas do uso da régua e do compasso.

Buscando então refletir sobre a importância desses problemas, traremos a seguir uma explanação sobre os mesmos, demonstrando algumas soluções por meio de outras técnicas e ferramentas, discutindo também as suas impossibilidades de resolução pelos métodos aqui propostos e mostrando algumas das contribuições trazidas pelas tentativas de solucioná-los.

3.1 Uma busca impossível

Os três problemas clássicos a serem tratados de forma especial nesse texto são os seguintes, segundo a definição dada em [7],p.133-134:

1. *Duplicação do cubo* ou o problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado;

2. *Trissecção do ângulo* ou o problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais;
3. *Quadratura do círculo* ou o problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado.

É estranho olhar para os mesmos e não ser levado por nossa mente, num primeiro momento, a não pensar que sua solução é possível, de forma simples, pelo uso da régua e do compasso. Mas realmente não o são. Já no século XIX, segundo cita [7], p.134, tinha-se essa certeza da impossibilidade.

> Somente no século XIX, mais de 2000 anos depois de os problemas terem sido concebidos, se estabeleceu a impossibilidade das três construções, sob a limitação auto-imposta de se usarem apenas régua e compasso.

Anos se passaram para que a humanidade tivesse ferramentas suficientes não para solucioná-los, e sim, para demonstrar que os mesmos não são solucionáveis por essas técnicas.

Essa demonstração da impossibilidade de solução, se deve no caso da quadratura do círculo e da duplicação do cubo, ao surgimento no processo algébrico, conhecido hoje, de números ditos não algébricos ou transcendentes. Obviamente, não havia ainda na Grécia essa percepção, já que teorias a respeito da transcendência de certos números ou sobre a construtibilidade[1] de outros são bem mais recentes, datando de meados do século XIX.

Surge na duplicação do cubo, o número $\sqrt[3]{2}$ e na quadratura do círculo o número $\sqrt{\pi}$, que, segundo o que sabemos hoje, não são números construtíveis com régua e compasso, devido a sua transcendência. Veremos a seguir, de forma mais detalhada, cada uma das construções, por outros métodos e seus impedimentos.

3.2 A duplicação do cubo

3.2.1 A duplicação do quadrado

Como se sabe, o número $\sqrt{2}$ é perfeitamente construtível por régua e compasso, bastando para isso apenas a designação de um segmento ao qual determinemos ser o mesmo, a unidade. Daí, a construção do número se faz apenas através da construção da diagonal de um quadrado. Mas como vimos anteriormente, a construção de um quadrado é extremamente simples. Realizando essa construção, temos que a diagonal desse quadrado é, em si, o número desejado.

Os passos a seguir nos mostram uma outra forma de realizar essa construção:

1. Construa um par de retas perpendiculares entre si;
2. Centre o compasso no ponto de intersecção das retas e construa a circunferência de raio 1;

[1]Discussões a respeito da transcendência e da construtibilidade serão realizadas no apêndice desse trabalho

3. Tome os quatro pontos de intersecção da circunferência com as retas perpendiculares;

4. Esses quatro pontos são os vértices de um quadrado;

5. Basta unir com a régua essas extremidades livres, de modo que os segmentos de reta localizados entre os vértices, ou seja, os lados do quadrado sejam iguais à raíz de dois.

Vejamos a figura abaixo:

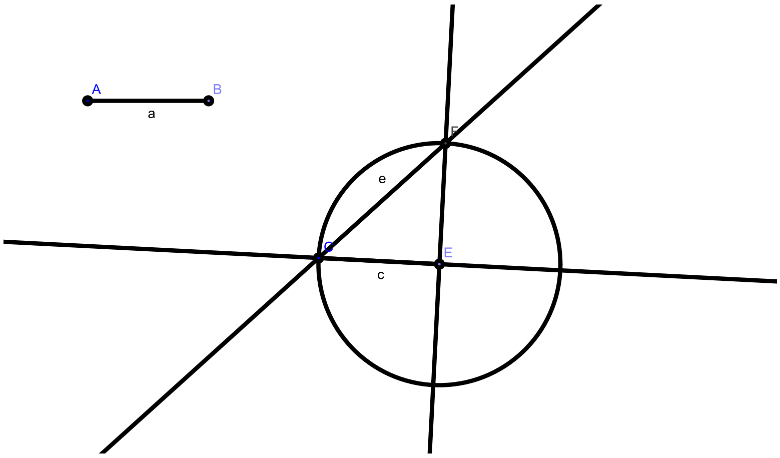


Figura 3.1 Raíz quadrada de dois

Esse terceiro segmento é equivalente em medida, ao número $\sqrt{2}$, dado que construímos o triângulo retângulo cujos lados são 1 e 1, pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa do mesmo é $\sqrt{2}$.

Esse número de tão fácil construção, segundo alguns textos, gerou muitas controvérsias, pois teria sido ele a causa principal da crise dos incomensuráveis, gerando uma grande crise ideológica entre aqueles que proferiam as doutrinas pregadas no grupo dos pitagóricos. Não vem ao caso discutir sua veracidade no momento, até por serem poucas as referências que podemos tomar e por que também esse não é exatamente o nosso objetivo. O importante nesse momento é vermos que esse número é realmente construtível, e mais ainda, sua construção nos permite realizar a duplicação de qualquer quadrado.

Vejamos a figura abaixo.

Nela percebemos claramente que, se quisermos duplicar um quadrado, e entenda-se por duplicar o quadrado, encontrar um outro quadrado com o dobro da área do quadrado original, basta construir a diagonal do quadrado dado inicialmente e tomar a mesma como sendo o lado do novo quadrado. Vejamos a demonstração algébrica desse fato. Suponhamos que o quadrado original tenha lado a. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, sua diagonal será:

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2a^2$$

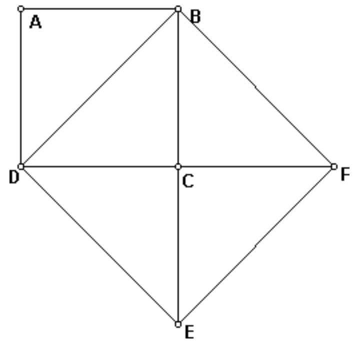


Figura 3.2 Duplicação do quadrado

$$d = \sqrt{2a^2}$$
$$d = a\sqrt{2}$$

Agora, se tomarmos o valor dessa diagonal, e supormos ser este valor o lado de um quadrado, teremos que a área desse novo quadrado será:

$$A = L^2 = (a\sqrt{2})^2 = (a)^2.(\sqrt{2})^2 = 2a^2$$

O que equivale ao dobro da área do quadrado original de lado a, que é

$$A = L^2 = (a)^2 = a^2$$

O fato desse procedimento ser tão simples, levou muitos a pensarem que a duplicação do cubo também seria de fácil realização. O que ocorre porém é que na duplicação do cubo, surge um número cuja construção não é possível, por régua e compasso, e este é basicamente o impedimento a sua construção.

3.2.2 É possível duplicar o cubo com régua e compasso

Essa tarefa, com os instrumentos especificados, realmente é impossível. Certamente podemos realizá-la, mas de forma alguma isso ocorrerá por uma construção com o auxílio das ferramentas usadas por Euclides em seu livro, *Os elementos de Euclides*. Duplicar o cubo, em tese é encontrar um novo cubo, cujo volume seja o dobro do volume do cubo dado inicialmente, conforme mostra a figura a seguir:

Assim, o que buscamos essencialmente é definir o valor do lado desse novo cubo, de maneira que o volume desejado seja encontrado, ou seja, que $V = 2v$, onde V é o volume do cubo maior e v é o volume do cubo menor. Vejamos qual seria o procedimento algébrico para isso. Tomando o lado do cubo inicial por a, temos que o seu volume é dado por:

$$v = L^3 = (a)^3 = a^3$$

Assim, o volume do novo cubo deve ser dado por:

$$V = 2v = 2a^3$$

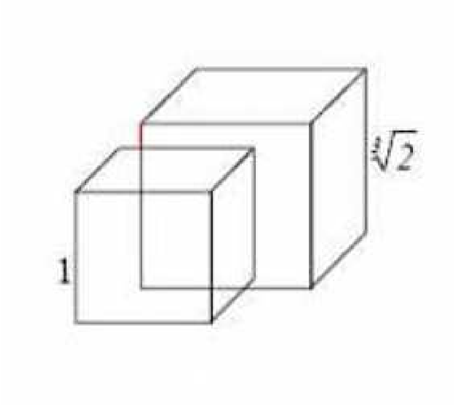


Figura 3.3 Duplicação do cubo

Mas então, qual deve ser o lado desse novo cubo? Supondo que este lado seja dado por x, temos que seu volume será

$$V = x^3$$

Desta maneira, termos que:

$$x^3 = 2a^3$$
$$x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$$

Assim, o problema de duplicar um cubo por uma construção utilizando régua e compasso encontra sua principal barreira no fato de não ser possível a construção do número $\sqrt[3]{2}$. Esse número, é na verdade classificado como um número algébrico[2], ou seja, um número que é solução de uma equação polinomial, com coeficientes inteiros, segundo cita Djairo Guedes, em seu livro Números Irracionais e Trancendentes, p.1. Porém, Pierre Wantzel, em 1837 demonstrou que um número real é construtível com régua e compasso se e somente se, ele é um número algébrico, solução de uma equação algébrica com grau na forma 2^n; entretanto, isso não ocorre com o número $\sqrt[3]{2}$, já que o mesmo é solução da equação

$$x = a\sqrt[3]{2} \Rightarrow$$
$$x = \sqrt[3]{a^3.2} \Rightarrow$$
$$x^3 = a^3.2 \Rightarrow$$
$$x^3 - 2a^3 = 0$$

Vemos , nesse caso, que, $3 \neq 2^n$, para todo n pertencente ao conjunto dos números inteiros, o que contraria o Teorema proposto por Wantzel, sendo então que todas as suas soluções não são construtíveis, mesmo sendo algébricas, no que se refere as suas possíveis manipulações através de equações polinomiais.

[2]Discutiremos de forma simplificada o conceito de número algébrico posteriormente, no apêndice desse trabalho

O número $\sqrt[3]{2}$ é uma das soluções da equação $x^3 - 2 = 0$. Suas outras duas soluções existem, sendo respectivamente,

$$x = \frac{-\sqrt[3]{2} \pm \sqrt{5\sqrt[3]{4}}}{2}$$

.

Uma observação importante a ser feita é o fato de que pode-se facilmente determinar a $\sqrt{2}$, número essencial para a duplicação do quadrado, pela inserção de uma meia proporcional entre o lado do quadrado dado inicialmente e o lado do quadrado a que se quer chegar. Por isso, muitos matemáticos tentaram inserir duas meias proporcionais entre os lados dos dois cubos, tendo por objetivo a sua duplicação. Mas nesse caso, a inserção dessas duas meias proporcionais, nos leva diretamente a percepção do número $\sqrt[3]{2}$, assim não sendo possível sua construção.

O que nos importa nesse momento é compreendermos que toda essa teoria sobre números algébricos, construtíveis e transcendentes só veio a ser demonstrada muito posteriormente a gênese do problema, e que portanto, as tentativas de sua demonstração sem utilizá-las se sucederam de forma bem expressiva, ao longo dos séculos, usando para isso outras metodologias e técnicas. Vejamos então, como alguns tentaram realizar essa duplicação do cubo e conseguiram, obviamente utilizando outras ferramentas, que não as aqui citadas.

3.2.3 Duplicando o cubo: Métodos para a sua construção

Segundo cita João Pitombeira de Carvalho, em seu artigo entitulado *Os três problemas clássicos da matemática grega*, há várias demonstrações diferentes para esse problema, como o próprio autor nos diz:

> Apresentaremos agora 7 soluções do problema da duplicação do cubo, quase todas baseadas em achar duas meias proporcionais entre duas grandezas, usando construções que não podem ser efetuadas somente com régua e compasso.

Destas, citaremos a seguir um método de solução do problema apresentado pelo autor do artigo citado acima, a título de exemplificação. Aos interessados em conhecer os outros métodos, se faz recomendável a leitura do artigo original, cuja referência será dada posteriormente.

3.2.3.1 A solução de Menecmo

A solução de Menecmo é uma das mais simples. Tomando x e y como meias proporcionais entre a e b, temos que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Mas esse processo é equivalente, do ponto de vista algébrico a

$$y^2 = bx$$

$$xy = ab$$

$$x^2 = ay$$

Assim, encontrar as meias proporcionais buscadas é o mesmo que achar a intersecção das duas curvas dadas, sendo a primeira uma parábola, a segunda uma hipérbole e a última uma outra parábola.

3.3 A quadratura do círculo

O problema da quadratura do círculo é um dos mais importantes e interressantes problemas da matemática clássica. Consiste basicamente em construir um quadrado cuja área seja igual à área de um círculo dado.

Mas hoje, sabemos que a determinação da área de um círculo passa inevitavelmente, pela multiplicação de algum número pela constante π, já que a área do círculo, como a conhecemos é:

$$A = \pi . r^2.$$

Assim ao construir um quadrado com a mesma área de um círculo, devemos ter que a área do quadrado será equivalente a $l = r\sqrt{\pi}$.

Desta maneira, teríamos que o lado do quadrado desejado seria equivalente ao produto do raio do círculo pela constante dada, $\sqrt{\pi}$. Mas que número seria esse? Trata-se de um número algébrico e construtível? Ou é um número transcendente?

Segundo Figueiredo [8], p. 33, onde se fala sobre o problema da quadrátura do círculo, a construção desse número é impossível por régua e compasso:

> ... se fosse possível quadrar o círculo, poderíamos construir, com régua e compasso, um segmento de comprimento igual a$\sqrt{\pi}$. Isso porque $\sqrt{\pi}$ é o lado do quadrado de área igual a um círculo de raio igual a 1. Portanto, pela conclusão em *grifo*[3] acima seguir-se-ia que $\sqrt{\pi}$ seria algébrico. Logo, π seria também algébrico. Impossível, em virtude do fato que π é transcendente, como demonstrou Lindemann[4].

Pela presente argumentação, vemos que sua construção por métodos euclideanos é realmente impossível. Vejamos então de que forma sua construção pode ser realizada, utilizando-se de um outro método.

[3]*todos os segmentos passíveis de serem construídos com régua e compasso têm comprimento igual a um número algébrico.*

[4]Uma breve discussão a respeito desse fato será feita posteriormente, no apêndice.

3.3.1 A quadratriz e a quadratura do círculo

Para a realização da construção da quadratura do círculo, é necessário primeiramente construir uma curva chamada quadratriz, a qual foi desenvolvida por Hipias de Elis, que viveu por volta do ano de 420 a.C.

Suponhamos que no quadrado $BCC'B'$ o lado BB' gira em movimento circular uniforme em torno do ponto B, até que a reta determinada por B e B' coincida com a reta que passa por B e C. Ao mesmo tempo, o segmento $B'C'$ se desloca com velocidade constante e em sentido descendente, até que o mesmo coincida também com o lado BC, conforme a figura abaixo.

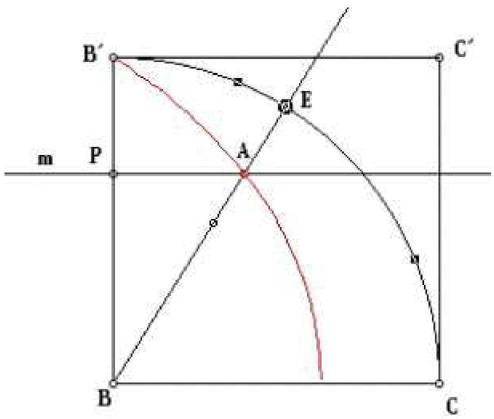


Figura 3.4 A quadratriz

Os dois movimentos estão sicronizados de maneira que ambos coincidem com o lado BC ao mesmo tempo.

A *quadratriz* é então o lugar geométrico gerado a partir das intersecções dessas duas retas em seu movimento, e na figura é determinada pela curva BAL.

Chamemos de K o ponto de interseccção da quadratriz com o segmento BC. Afirmamos então que $BK = \frac{2a}{\pi}$, sendo que a é equivalente ao valor do lado do quadrado dado. Assim, seja θ a medida do ângulo ABK, $x = PA$, $y = PB$ e $BC = BB' = B'C' = a$.

No entanto temos que os dois movimentos realizados são proporcionais, e então podemos afirmar que $\frac{y}{\theta} = z$, onde z é uma constante de proporcionalidade. Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos que:

$$\frac{a}{\frac{\pi}{2}} = z \Rightarrow$$

$$z = \frac{2a}{\pi}.$$

Daí,

$$\theta = \frac{\pi . y}{2a} \Rightarrow$$

$$y = \frac{2a\theta}{\pi}.$$

O raciocínio que segue trata de encontrar a equação polar da quadratriz, onde:

$$\frac{y}{\rho} = \sin\theta \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{2a\theta}{\pi\sin\theta}.$$

Mas, quando θ tende a zero, o valor do limite de $\frac{\theta}{\sin\theta}$ tende a 1, e daí,

$$BK = \rho = \frac{2a}{\pi}.$$

O que isso mostra é que no momento em que as retas coincidem, ou seja, que o ângulo entre elas é zero, a medida do segmento BK é $\frac{2a}{\pi}$, uma constante que relaciona o lado desse quadrado ao valor π.

Assim, para construir π, basta dividir o segmento $\frac{2a}{\pi}$ por $2a$, e em seguida tomar o inverso de $\frac{1}{\pi}$.

Uma vez encontrado um segmento de medida π, é facíl construir um segmento de medida $\sqrt{\pi}$, como foi demonstrado anteriormente, e aí basta apenas multiplicá-lo pelo raio da circunferência para obtermos o lado do quadrado desejado.

3.4 A trisecção do ângulo

Esse problema também gerou muitas discussões ao longo dos tempos. Consiste em, dado um ângulo, construir com régua e compasso, um ângulo cuja medida seja equivalente a um terço do ângulo dado inicialmente.

Ele se diferencia dos outros dois problemas por uma característica especial: nem todos os ângulos são impossíveis de serem construídos por régua e compasso. Por exemplo, a trissecção do ângulo de 90 graus é extremamente simples de ser feita, bastando para isso apenas a construção do ângulo reto e de um triângulo equilátero.

Como todos os ângulos no triângulo equilátero medem 60 graus, basta posicionar um dos vétices do triângulo no vértice do ângulo reto e um de seus lados sobre uma das semi-retas que formam o ângulo. Daí, o excesso do ângulo reto medirá 30 graus, realizando-se assim, sua trissecção.

Esse é um exemplo da possibilidade para alguns ângulos, servindo como contra-exemplo para demonstrar a impossibilidade de solução do problema.

Vejamos a demonstração desse fato. Para isso, nos utilizaremos do que é dito por Jeff Suzuki, em seu artigo entitulado *A Brief History of Impossibility*, que traduzido significa Uma breve história da impossibilidade, onde o mesmo diz que:

> A trissecção de um ângulo corresponde à solução de uma equação cúbica. Dado um círculo com centro O e raio unitário, com ângulo central AOC igual a 3θ. Nós desejamos encontrar o ponto B onde o ângulo BOC é igual a θ. Se baixarmos AD e BE perpendicularmente a OC, nós teremos $AD = \sin 3\theta$, $BE = \sin\theta$. Essas quantidades estão relacionadas através da identidade:
>
> $$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$
>
> Visto que AOC é o ângulo dado, onde $\sin 3\theta$ é uma quantidade conhecida que nós designamos como ι. Desta forma se as raízes reais de $\iota = 3x - 4x^3$ não são construtíveis, a trissecção do ângulo correspondente é impossível.

O texto exposto acima nos dá uma clara determinação do porque dessa impossibilidade. Vemos que existe uma relação entre os dois ângulos θ e 3θ, gerada pela relação trigonométrica dada. Isso porque:

$$\sin 3\theta = \sin(\theta + 2\theta) = \sin\theta.\cos 2\theta + \sin 2\theta.\cos\theta$$

Mas,

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta$$

e

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta.$$

Assim,

$$\sin 3\theta = \sin\theta.(1-2\sin^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta.\cos\theta \Rightarrow$$

$$\sin 3\theta = \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta.(1-\sin^2\theta) \Rightarrow$$

$$\sin 3\theta = \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta - 2\sin^3\theta \Rightarrow$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

Existir uma relação entre duas incógnitas é algo positivo, pois a relação normalmente permite uma solução para o problema de maneira mais simples. Porém nesse caso, isso não é possível, de acordo com os nossos objetivos, pois se designamos $\iota = \sin 3\theta$ e $x = \sin\theta$, obtemos a expressão dada acima, $\iota = 3x - 4x^3$, onde a expressão $3x - 4x^3$ representa um polinômio de grau 3, que como já vimos anteriormente, tem soluções, porém soluções que não podem ser construídas por régua e compasso.

Em nossa equação, a incógnita é o seno do ângulo, mas se este não é construtível pelo método euclideano, o ângulo também não o será, pois a relação entre o ângulo e o seu seno ou cosseno é indissociável, a menos da sobreposição de ângulos no círculo trigonométrico.

Tendo então a certeza dessa impossibilidade, passemos a conhecer outrar formas de trisseccionar o ângulo.

Há várias demonstrações desse problema, algumas delas feitas por, entre outros, Arquimedes, onde ele utiliza sua famosa espiral e Nicomedes, onde o mesmo utiliza-se de uma curva chamada atualmente de *conchóide de Nicomedes*, como mostram as figuras 3.5 e 3.6.

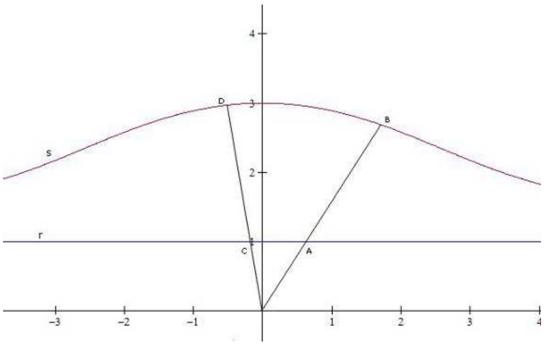


Figura 3.5 Conchóide

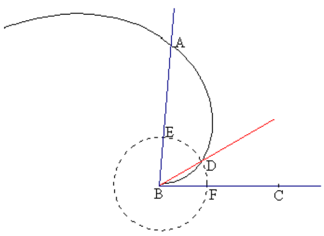


Figura 3.6 A espiral de Arquimedes

Aqui trataremos especialmente da demonstração feita a partir da quadratriz, e que foi apresentada anteriormente na quadratura do círculo. Em alguns textos, ela também é chamada de trissectriz, devido a sua utilização também na trissecção do ângulo, como veremos na figura 3.7.

A trissecção usando esse método é feita da seguinte forma.

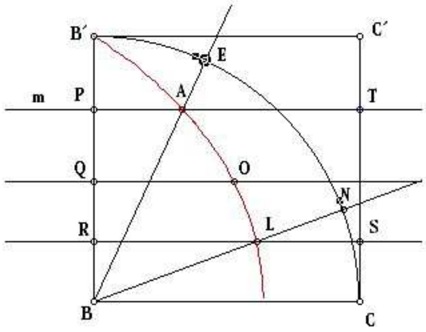


Figura 3.7 Trissectriz

Suponha que queiramos dividir o ângulo ABC em três partes iguais. Trace então pelo ponto A uma reta paralela ao lado BC. Esta reta intersectará BB' em P.

Divida então o segmento BP em três partes iguais, aí determinadas pelos pontos Q e R. Por R trace a reta paralela ao lado BC, que conta a quadratriz no ponto L.

Desta forma o ângulo LBC será equivalente a um terço do ângulo ABC, com desejava-se.

Isso de dá devido ao fato de que o tempo gasto para que A chegue em L é o mesmo tempo que P leva para chegar em R, devido a proporcionalidade dos movimentos citadas anteriormente.

Como $\overline{BR} = \frac{1}{3}\overline{PB}$, temos que $LBC = \frac{1}{3}ABC$, como queríamos mostrar.

Por fim, a figua abaixo mostra uma construção da trissecção do ângulo feita de forma aproximada. É importante ressaltar que algumas construções são possíveis, de forma aproximada, o que do ponto de vista prático e didático tem algum valor, sendo portanto importante discutí-las e construí-las em sala de aula, sendo as mesmas fatores importantes de enriquecimento do conhecimento do estudante.

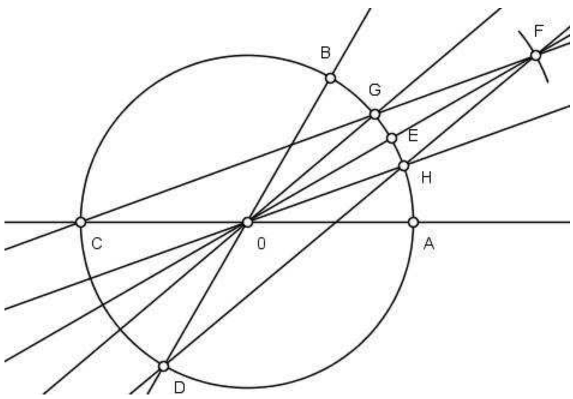


Figura 3.8 Trissecção aproximada do ângulo

Os passos para sua construção são os seguintes:

1. Dado o ângulo, centre o compasso em seu vértice e construa uma circunferência de um raio qualquer;
2. Construa a bissetriz do ângulo, usando essa circunferência;
3. Tomando um ponto qualqur sobre a bissetriz, nesse caso, o ponto F, ligue o mesmo aos pontos C e D, nos prolongamentos das retas suportes o ângulo dado;
4. Os pontos G e H, das intersecções dessas retas com a circunferência definem, como mostra a figura, boas aproximações para a trissecção do ângulo dado.

Outras aproximações podem ser encontradas em sites da internet ou em outras fontes, inclusive para a quadratura do círculo.

3.5 Contribuições deixadas pelo estudo dos três problemas

Em seu livro *Números irracionais e trancedentes*, Djairo Guedes Figueiredo cita em seu Capítulo 8, intitulado *O 7º Problema de Hilbert*, trechos da fala de David Hilbert[5] em sua participação na conferência de Paris, em 1900, ministrada pelo próprio Hilbert. Em um dos trechos Hilbert diz:

> O profundo significado de certos problemas para o desenvolvimento da matemática e o importante papel por eles desempenhado no trabalho dos pesquisadores não podem ser ignorados. Enquanto um ramo da ciência oferecer uma abundância de problemas, ele estará vivo; uma falta de problemas prenuncia extinção ou cessação de desenvolvimento independente. Do mesmo modo como todas as tarefas humanas visam certos objetivos, também a pesquisa Matemática requer seus problemas. É pela solução de problemas que a força do investigador se consolida; ele encontra novos métodos e novas perspectivas, e ganha um horizonte mais livre e mais amplo.

Vislumbrando uma reflexão sobre esta notável fala de Hilbert, vemos que de modo algum a impossibilidade da solução dos problemas dados acima foi algo ruim. Certamente não o foi. Muito pelo contrário, pois desta impossibilidade, mais propriamente do esforço de muitos matemáticos em solucionar a problemática dada, surgiram evoluções em alguns importantes campos da matemática.

Segundo cita Eves [7], p. 134:

[5](Matemático alemão. Nasceu em 1862, em Wehlan e morreu em 1943, em Göttingen. Estudou nas universidades de Königsberg, cidade onde seu pai trabalhava como juiz, Heidelberg e Berlim. Doutorou-se em 1884 em Konigsberg, com uma tese sobre as invariantes algébricas, tema proposto pelo seu professor F. Lindeman. Em 1899, em sua obra, buscou uma fundamentação estritamente axiomática para a geometria euclidiana, o que influenciou o desenvolvimento da matemática no século XX. Teve importantes contribuições na área da análise funcional moderna, devido a seus trabalhos na concepção dos espaços de dimensão infinita. Buscou também imprimir uma base axiomática a toda a matemática, tendo desenvolvido trabalhos nas áreas de lógica, aritmética e teoria dos conjuntos.

> A busca ingente de soluções para esses problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas frutíferas, como as secções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentes. Um produto muito posterior foi o desenvolvimento de partes da teoria das equações ligadas a domínios de racionalidade, números algébricos e teoria dos grupos.

O mesmo autor também cita no mesmo livro, p.133 que,

> É bastante curioso que essa geometria superior[6] tenha se originado nas tentativas seguidas de resolver os três agora famosos problemas de construção.

Assim vemos que tanto a Geometria, quanto a Álgebra, e até mesmo, por que não dizer, a análise e outras áreas foram contempladas, em maior ou menor grau, com resultados gerados a partir desses três problemas famosos, sendo assim sua importância de caráter grandioso, no que se refere a esses passos específicos dados nessas áreas do conhecimento matemático. Como cita [3], p. 45:

> No entanto, a maior parte da matemática grega e muito da investigação matemática posterior, foi motivada por esforços para conseguir o impossível- ou, à falta disso, para modificar as regras. A Idade Heróica fracassou em seu objetivo imediato, sob as regras, mas seus esforços foram coroados por brilhante sucesso em outros pontos.

Apesar de não terem alcaçado seus objetivos iniciais, centrados na busca das soluções, acabaram por obter respostas interessantes para o desenvolvimento da própria matemática.

É importante frisar no entanto que a solução para os problemas dados existem, como foram demonstradas anteriormente, sendo apenas dada a não solução por régua e compasso, devido a sua relação mais especificamente com a transcendência de algumas constantes envolvidas no processo, o que impossibilita a sua construção por esses métodos, a não ser, de forma aproximada.

Contribuiu para isso, talvez a falta de uma visualização correta das grandezas e constantes envolvidas nos processos, ou a ausência de ferramentas teóricas adequadas, durante todo esse processo. Como cita Hilbert, no mesmo texto dado anteriormente:

> Se não conseguimos resolver um problema matemático, o motivo consiste frequentemente em não vermos o aspecto mais global, do qual o nosso problema é apenas um elo numa cadeia de problemas correlatos. Encontrado esse aspecto, o problema não somente se torna mais acessível às nossas investigações, mais também nós ganhamos um método que é aplicável a outros problemas relacionados com o original.

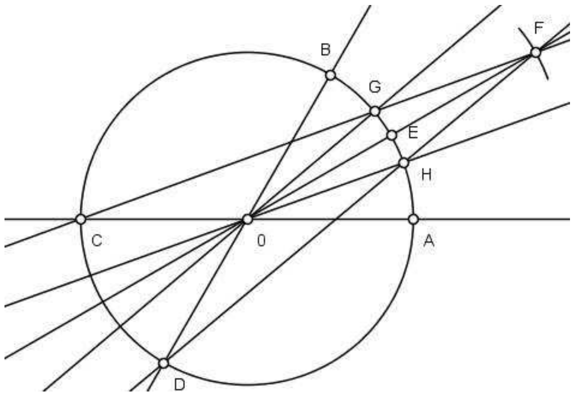
Por esses métodos, as soluções foram encontradas, mesmo que não pelos métodos buscados, e as contribuições foram muitas, ao ponto de tantos textos de trabalhos científicos tratarem desse três problemas de forma tão extensiva e frequente.

No apêndice há uma lista de figuras que mostram várias máquinas diferentes que foram utilizadas na resolução dos problemas clássicos.

[6] Segundo o autor, geometria de curvas outras que não a reta e a circunferência e superfícies outras que não o plano e a esfera.

3.6 Lista de Exercícios e Atividades Extras

1) A partir da figura da trissecção de um ângulo de forma aproximada, dada abaixo, busque explicar quais foram os passos dados para essa construção, listando-os ordenadamente.



2) Pesquise em sites da internet outras contruções aproximadas para os três problemas clássicos da matemática grega, e exponha sua construção em sala de aula.

3) Para construir o número $\sqrt{2}$ basta construir um triângulo retângulo de catetos 1 e 1. Como devemos proceder para construir os números $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$,...,$\sqrt{n}$,...?

CAPÍTULO 4

Régua e Compasso na Solução de Problemas Algébricos

Diante de tudo o que foi exposto até o presente momento, das reflexões sobre a importância histórica do estudo do uso da régua e do compasso, como instrumentos na construção do conhecimento matemático, do aprendizado sobre as principais técnicas para o uso dos mesmos e o estudo dos problemas históricos mais importantes relacionados ao tema, podemos nos sentir preparados para tecer alguns comentários e algumas novas considerações a respeito do tema aqui proposto.

É o que faremos adiante. Mas antes disso, é importante frisar que as construções geométricas não têm ou não devem ter um fim em si próprias, como já dissemos em algum momento anterior. Elas podem e devem ser usadas como ferramentas apropriadas para a construção e ampliação do conhecimento, nas mais diversas áreas matemáticas, funcionando ora como uma boa ferramenta de visualização do problema, ora como auxiliar no entendimento do conceito estudado.

Neste momento faremos então uma análise da aplicação das técnicas de construção euclidianas, sob a perspectiva algébrica, mostrando que a geometria, especialmente a que aqui está sendo discutida, pode trazer contribuições efetivas para o ensino e aprendizagem de problemas nessa área, através de resoluções desses problemas com o uso da régua e do compasso.

Não se trata, no entanto, de encontrar um método inovador, infalível e insubstituível de resolução para problemas algébricos, pois as formas de resolver equações são as mais diversas, e muitas talvez apresentem resoluções mais belas ou de mais fácil entendimento. Trata-se muito mais de mostrar a diversidade e abrangência que a matemática, enquanto área de conhecimento, possui, mostrando assim suas nuances e possibilidades, o que de certa forma pode abrir horizontes na busca do desenvolvimento de técnicas que proporcionem a melhoria da qualidade do ensino em matemática.

Um último fator a ser considerado nesse momento é o fato de que através da utilização dessas técnicas, pode-se mostrar de uma forma interessante, como certos conceitos podem ser construídos, de forma simples, e então explicar o porquê de sua construção, relacionando o conceito teórico estudado como a sua visualização através da figura construída.

Talvez, através desse processo, possamos justificar de melhor maneira o porquê de certos conceitos serem o que são, e assim possamos ter um maior poder de convencimento para com o aluno estudante de matemática; sendo assim essa proposta uma de nossas principais contribuições, em termos de projeto dessa dissertação.

Passemos então para a análise dos problemas e suas possíveis soluções.

4.1 Uma breve discussão sobre resolução de equações

Como já foi dito, existem hoje, em termos de conhecimento matemático, inúmeras maneiras de resolver um problema através de uma equação, fruto estas, do trabalho de muitos matemáticos ao longo dos séculos, que dedicaram suas vidas ao desenvolvimento de técnicas que permitissem a facilitação dos métodos de resolução de equações.

Entre esses grandes mestres, podemos certamente citar Diofanto, Girolamo Cardano, com sua obra *Ars Magna*, Descartes, Scipione del Ferro, que resolveu equações cúbicas da forma $x^3+mx=n$, François Viète, que deu muitas contribuições ao desenvolvimento do simbolismo algébrico e Nicolo Tartaglia, que resolveu equações cúbicas da forma $x^3+px^2=n$, entre outros. Não nos cabe relatar todo o trabalho desenvolvido por eles, pois além de ser um trabalho muito amplo, este não é o objetivo central desse texto. Basta saber que suas contribuições foram muitas, seja no desenvolvimento das técnicas de resolução, como também na melhoria e na adequação das simbologias utilizadas, buscando sempre sua simplificação.

Sobre a resolução de uma equação em si, basta que o método utilizado se incubam de encontrar as soluções da equação através de alguma técnica específica, sendo esta solução um número real ou complexo que torna ambos os lados da equação em dois números equivalentes. Nos fixaremos na solução de equações cujas soluções sejam números puramente reais.

4.2 Resolução de equações usando régua e compasso

Resolver uma equação usando régua e compasso é basicamente encontrar uma maneira de construir essa solução, esse número específico, através do uso desses instrumentos, seja a partir da construção de um conceito geométrico, pontos e retas, uma figura geométrica, quadrados, triângulos, ou de um lugar geométrico, círculos, paralelas, perpendiculares, etc.

Cada tipo de equação tem uma maneira específica de ser solucionada. Vejamos então como resolver cada tipo, mas antes, necessitaremos saber como calcular médias.

4.2.1 Calculando médias com régua e compasso

4.2.1.1 A média aritmética

A fórmula matemática para o cálculo da média aritmética entre n números é:

$$MA=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n},$$

onde n representa o índice ou a ordenação dos números. O método para calcular a média aritmética entre dois números é bem simples, bastando para isso apenas realizar a soma dos dois segmentos representantes de cada número, e então fazer a divisão do novo segmento em duas partes iguais, seja pela técnica demonstrada anteriormente, no capítulo 2, seja pela construção da mediatriz do segmento dado, pois a média aritmética entre dois números é expressa por:

$$MA = \frac{a+b}{2}.$$

O mesmo serve para o cálculo da média entre três, quatro ou mais segmentos, sendo que nesse caso, o que se deve fazer é a soma dos segmentos e a posterior divisão na quantidade de partes desejada. O número gerado por essa divisão será a média aritmética. Vejamos a figura abaixo:

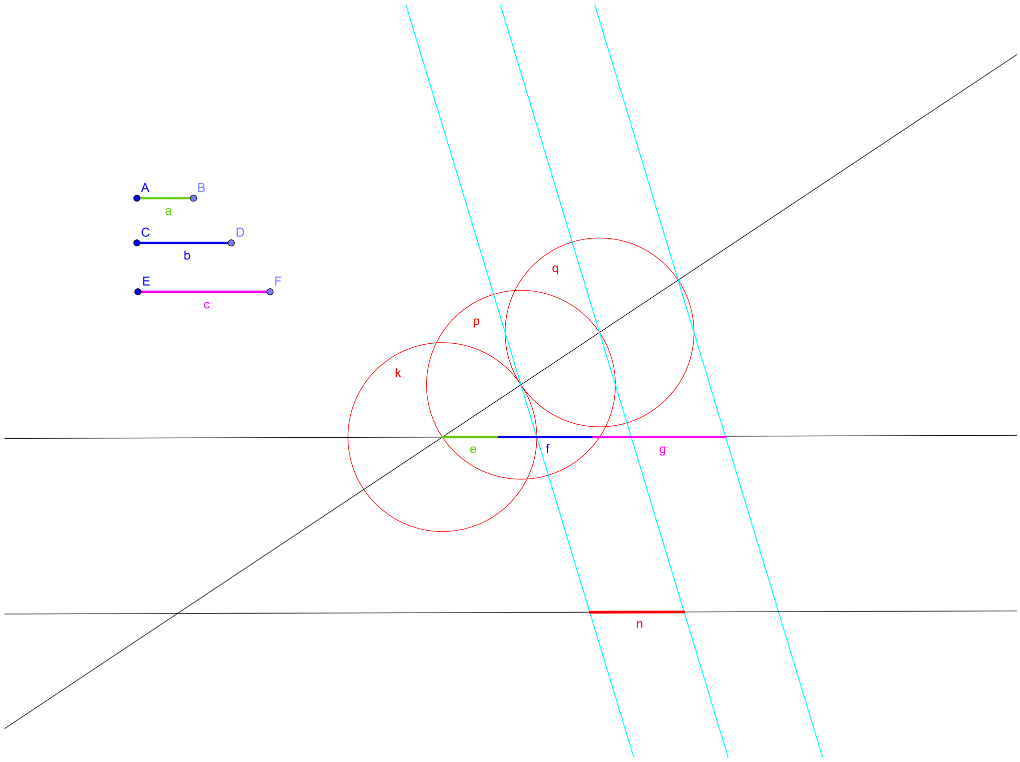


Figura 4.1 Média aritmética de três números

Nela vemos como calcular a média aritmética de três segmentos dados. Nesse caso, o segmento em vermelho, representado pela letra n, é a média aritmética buscada, que algebricamente é expressa por:

$$\frac{a+b+c}{3}.$$

É importante porém frisar que o caso que nos interessa é o que envolve dois valores, já que o utilizaremos na resolução de problemas algébricos, posteriormente.

4.2.1.2 A média Geométrica

A fórmula para o cálculo da média geométrica é dada por:

$$MG = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n}.$$

Assim, para construir a média geométrica de dois números, basta somá-los, e construir o segmento mostrado na figura abaixo, também usada para o cálculo da raíz quadrada.

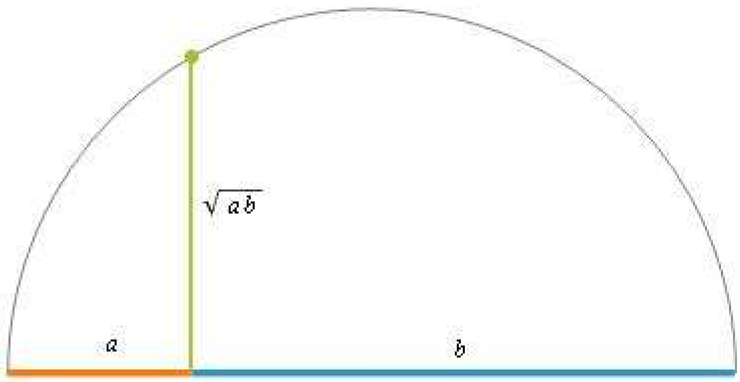


Figura 4.2 Média geométrica de dois números

A justificativa para o uso da mesma é a seguinte. O segmento $a+b$ é o diâmetro do semcírculo dado, o que lhe confere um ângulo de 180 graus. Dessa forma, o segmento destacado na cor verde será a altura do triângulo retângulo cuja hipotenusa é $a+b$, pois pelo teorema do ângulo capaz, o ângulo do qual essa altura parte é um ângulo reto. assim, basta aplicar uma das relações métricas no triângulo retângulo, a saber $h^2 = m.n$, e chegaremos nesse resultado. Vejamos a demonstração abaixo, designando esse segmento por x:

$$x^2 = a.b \Rightarrow$$
$$x = \sqrt{ab}.$$

Como sabemos, devido ao fato de alguns números com radicais não serem construtíveis com régua e compasso, não é possível fazer a construção da média geométrica de todos os conjuntos de números. Dessa forma nos condicionaremos apenas a construir a média geométrica de dois números, como foi feito acima, pois é essa média, juntamente com a média aritmética de dois números que nos ajudará a resolver as equações do segundo grau.

O cálculo da média quadratica e da média harmônica também são possíveis, porém fogem ao objetivo desse texto, pois não serão utilizadas nas soluções de equações.

4.2.2 A equação de 1º Grau

Resolver uma equação de primeiro grau é algo simples, dado que implica em operar com processos aritméticos básicos. Por exemplo, ao resolver a equação $3x+5=17$, o que se faz é simplesmente trabalhar com as operações inversas de cada uma daquelas que fazem parte da equação. Assim, se quero eliminar o número 5 do primeiro lado da equação, devo apenas subtrair cinco unidades de ambos os lados da igualdade.

$$3x + 5 - 5 = 17 - 5 \Rightarrow$$

$$3x = 12.$$

Para isolar o x, que está multiplicado por 3, devemos então dividir ambos os lados da igualdade por 3, então obteremos o resultado desejado.

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Como sabemos trabalhar e construir todos esses resultados, a solução da equação por régua e compasso é plenamente possível.

A título de exemplificação, resolvamos a equação $2x + 3 = 19$.

Seguiremos os seguintes passos:

1. Tomando um segmento unitário, construa o segmento de 19 unidades de medida, multiplicando essa unidade por 19;
2. Deste segmento, retire as três unidades do primeiro membro da equação;
3. Logo, esse novo segmento equivale a 2x, ou seja, o dobro da solução que desejamos;
4. Basta então agora, dividir esse segmento em duas partes iguais, usando a divisão de segmentos.

Sua representação está feita na figura abaixo:
Logo, a solução para o nosso problema seria o segmento GM ou o segmento MH, dados que ambos são congruentes, devido ao fato de serem o resultado da divisão por 2 realizada acima.

4.2.3 A equação de segundo grau

Resolver uma equação de segundo grau implica em encontrar nenhuma, uma ou duas soluções reais para a mesma, de acordo com a possibilidade de pontos de intersecção que o gráfico desta equação tenha com o eixo das abcissas.

Como sabemos, a expressão genérica de uma equação de segundo grau é dada por $ax^2 + bx + c = 0$, cujos coeficientes são reais.

Uma outra maneira de expressá-la é:

$$ax^2 - Sx + P = 0,$$

onde $a \neq 0$, S representa a soma das raízes e P o produto das mesmas.

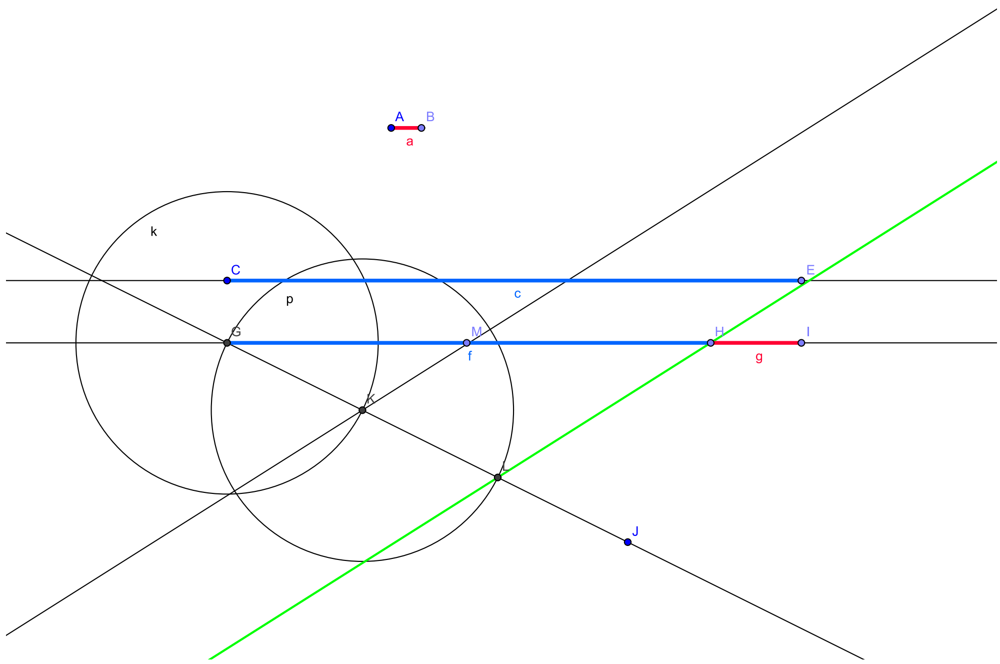


Figura 4.3 Resolução da equação do primeiro grau

Assim, se uma equação do segundo grau possuir duas raízes reais, x_1 e x_2, teremos que $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1.x_2$.

Essas duas expressões finais no entanto nos lembram claramente as expressões de duas médias tratadas anteriormente, a média aritmética e a média geométrica.

Se temos dois números, nesse caso, x_1 e x_2, suas médias aritmética e geométrica são dadas por:

$$MA = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

e

$$MG = \sqrt{x_1.x_2}.$$

Assim, percebemos que para a determinação de um método de resolução de equações do 2º grau, usando régua e compasso, o uso dessa relação pode ser de certo modo muito útil, dado que já foi demonstrada a possibilidade de construção dessas médias, como fizemos em um momento anterior.

Uma primeira construção que podemos realizar certamente é a de uma equação, para a qual já conhecemos as raízes. Nesse caso, o que devemos fazer é simplesmente realizar a soma e o produto dessas raízes, e então substituir na fórmula genérica da equação, pondo $a = 1$.

Isso é perfeitamente possível, devido ao fato de que do ponto de vista algébrico, quando conhecemos as soluções de uma equação de qualquer grau e queremos determinar a equação original, basta calcular o produto dos monômios gerados por essas raízes, ficando o valor de a sempre igual a um, dado que nos monômios, nesse caso, o coeficiente do x será sempre um.

A título de exemplificação, sejam a e b as soluções de uma equação quadrática. Então os monômios correspondentes a mesma seriam $x-a$ e $x-b$, o que gera a seguinte equação:

$$(x-a)(x-b) = x^2 - bx - ax + ab = x^2 - (a+b)x + ab = 0,$$

onde vemos claramente que os coeficientes correspondentes a incógnita de grau um e de grau zero é exatamente e respectivamente equivalente a soma e ao produto das raízes dadas.

Mas o que se faz, se o objetivo for o oposto, ou seja, se temos a equação e queremos encontrar suas soluções?

Nesse caso há alguns procedimentos que podem ser utilizados, dentre os quais podemos citar um método utilizado por Descartes. Por esse método Descartes resolvia equações quadráticas da forma $x^2 \pm bx - c^2 = 0$. O procedimento utilizado por ele era o seguinte:

1. Trace um segmento AB de comprimento igual a c;
2. Por A levante um segmento AE igual a $\frac{b}{2}$, sendo este segmento perpendicular a AB;
3. Centre então uma circunferência em E, cujo raio seja equivalente ao segmento AE;
4. Trace a semi-reta que parte de B e que passa por E, cortando a circunferência nos pontos F e G.

Com essa construção ele conseguia determinar a solução positiva da equação.

Se b fosse positivo, então o segmento $BG = x$ seria a solução. Já se b fosse negativo, a solução da equação seria o segmento $BF = x$.

Em ambos os casos, o outro segmento é a outra raiz. Descartes no entanto a ignorava, pois ele a denominava como falsa raiz, devido ao fato de ser uma raiz negativa. Geometricamente, trata-se do valor em módulo dessa raiz, já que do ponto de vista da geometria, tratar de segmentos cujo valor é negativo é sem sentido matemático. Para ilustrar esse caso, façamos a resolução da seguinte equação: $x^2 - 4x - 9 = 0$, cuja solução é $x = 2 \pm \sqrt{13}$.

Ela pode ser expressa por $x^2 - 4x - 3^2$. Nesse caso teremos que $AB = c = 3$ e $AE = \frac{b}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Assim sua construção seria a seguinte, a partir do uso dos procedimentos detalhados anteriormente:

A solução da equação dada é portanto o segmento BF, representado na cor verde.

Já se a equação tivesse o valor de b positivo, a exemplo, $x^2 + 4x - 9 = 0$, sua solução seria dada pelo segmento BG, conforme mostra a figura abaixo:

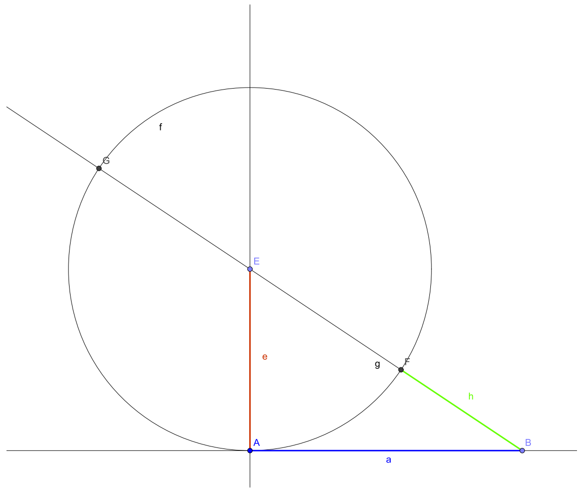


Figura 4.4 Resolução da equação do segundo grau pelo método de Descartes

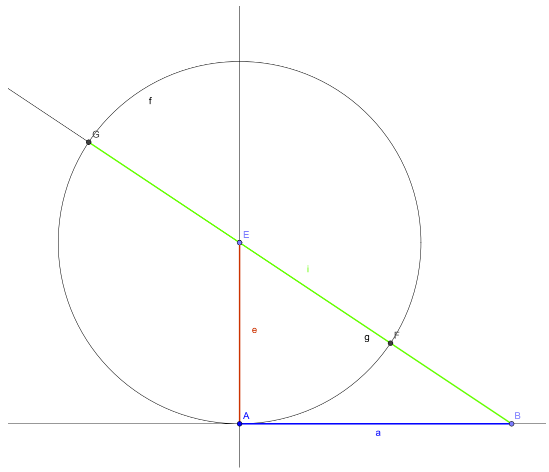


Figura 4.5 Resolução da equação do segundo grau pelo método de Descartes

A justificativa para a utilização desse método pode ser dada da seguinte forma, sendo dividido em dois casos.

O primeiro, tomemos BF como solução. Nesse caso, a partir da figura 4.4 , e utilizando o Teorema das Cordas, temos que

$$\overline{BF}.\overline{BG} = \overline{AB}^2$$

Como BF é a solução, temos que $BF = x$. Assim,

$$\overline{BF}.(\overline{BF} + \overline{EF} + \overline{EG}) = \overline{AB}^2.$$

Temos também que $\overline{EG} = \overline{EF} = \frac{b}{2}$. Daí,

$$x.(x+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}) = c^2 \Rightarrow$$

$$x.(x+b) = c^2 \Rightarrow$$

$$x^2+bx = c^2 \Rightarrow$$

$$x^2+bx-c^2 = 0.$$

Vemos então que o segmento BF representa a solução dessa equação, em termos de sua medida. Mas BG também é solução, sendo esta a solução negativa da mesma.

Suponhamos ser x_1 e x_2, onde $x_1 = \overline{BF}$, as duas soluções da equação. Como $-S = b$, onde S é a soma das raízes da equação de segundo grau, temos que

$$-S = b \Rightarrow$$

$$-(x_1+x_2) = b \Rightarrow$$

$$x_1+x_2 = -b \Rightarrow$$

$$x+x_2 = -b \Rightarrow$$

$$x_2 = -b-x \Rightarrow$$

$$x_2 = -(b+x) \Rightarrow x_2 = -\overline{BG}.$$

No segundo caso, tomemos BG como solução. Nesse caso, a partir da figura 4.5 , e utilizando o Teorema das Cordas, temos que

$$\overline{BF}.\overline{BG} = \overline{AB}^2$$

Como BG é a solução, temos que $BG = x$. Assim, teremos que $\overline{FG} = \overline{EF}+\overline{EG} = \frac{b}{2}+\frac{b}{2} = b$ e $\overline{BF} = \overline{BG}-\overline{FG} = x-b$. Logo,

$$\overline{BF}.\overline{BG} = AB^2 \Rightarrow$$

$$(x-b).x = c^2 \Rightarrow$$

$$x^2-bx = c^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - bx - c^2 = 0.$$

Essa é a outra forma de equação resolvida por Descartes. Nela vemos então que BG é a solução dessa equação. Do mesmo modo, BF também é solução, sendo agora, a solução negativa da mesma.

Suponhamos ser x_1 e x_2, onde $x_1 = \overline{BG}$, as duas soluções da equação. Como $-S = -b$, onde S é a soma das raízes da equação de segundo grau, temos que

$$-S = -b \Rightarrow$$

$$-(x_1 + x_2) = -b \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 = b \Rightarrow$$

$$x + x_2 = b \Rightarrow$$

$$x_2 = b - x \Rightarrow$$

$$x_2 = -(x - b) \Rightarrow x_2 = -\overline{BF}.$$

Fica demonstrado a partir dessa análise então que, o método de Descartes é eficiente na busca da solução desse tipo de equação, e que ele não apenas serve para determinar a raíz positiva, mas também a negativa, em ambos os casos.

4.2.4 Uma proposta de solução para a equação quadrática

Propomos a seguir um método também de resolução para equações quadráticas. No entanto, se faz necessária sua ilustração e demonstração por etapas, a fim de melhor construir esse conhecimento.

Como já foi justificado anteriormente, as médias aritmética e geométrica podem sempre ser construídas utilizando-se de régua e compasso.

Um ponto interessante a discutir num primeiro momento é a questão da desigualdade existente entre essas duas médias. Como se sabe, e existem várias maneiras de se provar isso, há uma desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, de modo que:

$$MA \geq MG.$$

A demonstração é feita da seguinte forma, tomando um caso particular relacionado com dois números a e b, como segue pela construção geométrica da figura 4.6.

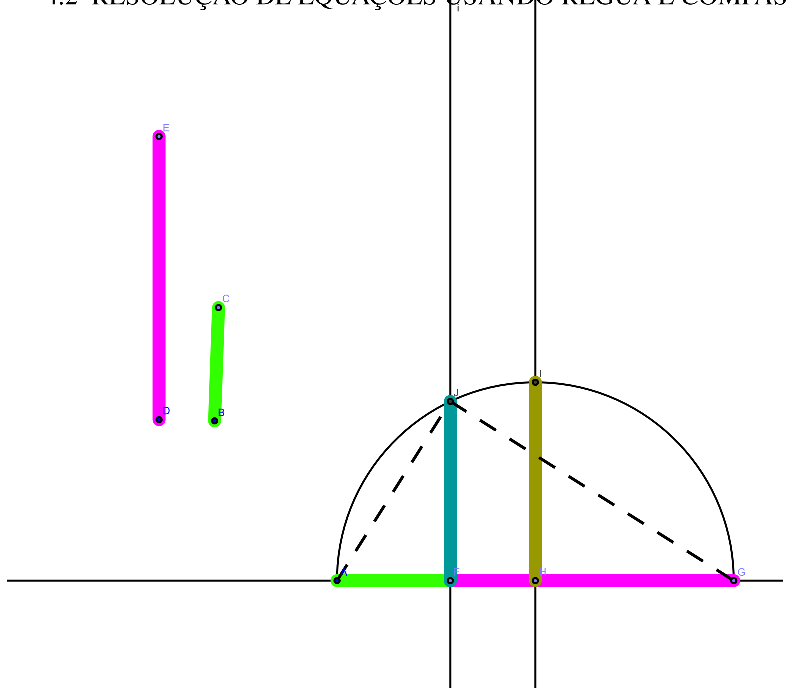


Figura 4.6 Desigualdade entre as médias

Nela, os segmentos *BC* e *DE* são dados, de maneira que a média aritmética dos mesmos é representada na figura pelo segmento na cor verde escuro, que na prática também representa o raio da semi-circunferência e a média geométrica, é representada pelo segmento na cor verde escuro, que é a altura do triângulo retângulo representado na mesma figura.

A discussão com relação à média geométrica já foi realizada anteriormente, e justificada de forma adequada. Já em relação à média aritmética, o que se pode dizer é que a mesma é a divisão da soma das duas raízes por dois. Mas nesse caso específico, a soma das duas raízes representa, por construção, o diâmetro da semi-circunferência, o que nos garante, por uma simples analogia que, se dividirmos essa soma por dois, encontraremos o raio dessa semi-circunferência, que é, do ponto de vista prático, a média aritmética buscada.

Da geometria clássica, sabemos que a maior corda de uma circunferência é o diâmetro da mesma. Obviamente, não podemos aplicar esse conceito diretamente à semi-circunferência, dado que esta apresenta uma parte curva e outra linear.

Porém, para entendimento do contexto, podemos definir como semi-cordas de uma semi-circunferência, todos os segmentos de reta perpendiculares ao diâmetro da mesma, que têm uma de suas extremidades na linha que representa seu diâmetro e a outra, na linha curva que a determina.

Partindo desta definição, podemos então afirmar que a maior semi-corda presente em uma semi-circunferência é o raio da mesma, conforme mostra a figura 4.6.

Vemos então que a média geométrica entre dois números é sempre menor do que a média aritmética entre os mesmos, dado que nenhuma das semi-cordas pode ser maior que o raio. A exceção do caso é justamente quando a semi-corda é igual ao raio, caso este que só é possível quando os dois números são iguais, o que permite que ambas as médias assumam o mesmo valor numérico.

Desta construção podemos tirar uma conclusão interessante. Observamos através dela que o raio da semi-circunferência é maior do que qualquer corda, o que do ponto de vista da desigualdade entre as médias dadas nos garante que:

$$MA \geq MG \Rightarrow$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1.x_2} \Rightarrow$$

$$\frac{S}{2} \geq \sqrt{P} \Rightarrow$$

$$(\frac{S}{2})^2 \geq \sqrt{P}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{S^2}{4} \geq P \Rightarrow$$

$$S^2 \geq 4P \Rightarrow S^2 - 4P \geq 0.$$

Mas se observarmos cuidadosamente que $-S = b$ e $P = c$, da nossa famosa forma de expressar a equação do segundo grau como $ax^2 + bx + c = 0$, veremos que essa expressão dada anteriormente represente o famoso número definido como o delta de Bhaskára, cuja expressão é $\Delta = b^2 - 4ac$.

O que vemos então é que, se uma equação do segundo grau possui raízes reais, raízes essas que possuem uma representação geométrica a partir de segmentos de reta, é impossível que seu discriminante seja negativo, o que corrobora com outras demonstrações dessa propriedade do discriminante, demonstradas através de outros meios.

Se as raízes dessas equações não fossem reais, e sim, complexas, não poderíamos ter uma representação unidimensional para as mesmas, já que o número dito complexo tem sua representação dada no plano cartesiano, e portanto, com propriedades bidimensionais, não se situando portanto no contexto aqui expresso. Assim, frizamos que ao realizar os processos de resolução de equações, estamos interessados naquelas que apresentem soluções restritas ao conjunto dos números reais.

Comecemos por analisar o caso em que as duas raízes dadas são positivas, pois nesse caso, podemos ter certeza de que sua soma e seu produto também o serão. Essa questão é importante pois esses dois números serão construídos geometricamente, e portanto devem ser representados por números positivos, já que não há sentido para a construção de um segmento cujo valor seja negativo.

Voltando mais ao centro da questão, podemos dizer que resolver uma equação do segundo grau é nada mais que encontrar uma solução para o seguinte sistema formado pelas seguintes equações: $x_1 + x_2 = S$ e $x_1.x_2 = P$.

Mas resolver esse sistema é equivalente a resover o sistema dado por: $x_1 + x_2 = S$ e $\sqrt{x_1.x_2} = \sqrt{P}$. Ou seja, resolver a equação de segundo grau implica em construir com régua e compasso esses dois números e relacioná-los seguindo alguma regra específica. Que regra seria essa?

É fácil ver que o número $\sqrt{P}$ é igual à média geométrica das raízes da equação em questão, e como já vimos anteriormente, do ponto de vista geométrico, a média geométrica nada mais é que o segmento que parte do ponto de união dos segmentos que representam os números dos quais se quer extrair a média e que se prolonga perpendicularmente em relação a reta que contém o "segmento-soma"dos números dados, ate tocar na curva que representa a semi-circunferência contida na figura de sua construção. O que isso nos diz? Que se temos os dois números, podemos calcular a média geométrica dos mesmos. Mas também nos diz que se tivermos o oposto, ou seja, se tivermos a média geométrica dos mesmos, podemos determinar, por construção, quem são estes números. É claro que aqui estamos tratando de segmentos de reta como soluções dessa equações. Nesse momento, podemos dizer que a inserção de uma régua graduada no processo em nada diminui o poder de sua teorização, e mais ainda, certamente contribuirá no processo de ensino desse conteúdo, para o caso específico de sua aplicação em sala de aula.

De certo modo, é até necessário que haja uma mensuração dos segmentos, pois do contrário seria impossível a resolução de equações, dado que estam trabalham com números e expressões algebricas, e não com segmentos sem valor numérico.

Chegamos então a seguinte conclusão. Dada uma equação de segundo grau na forma $ax^2 - Sx + P = 0$, com $S > 0$ e $P > 0$, resolvê-la implica em achar sobre a semi-circunferência de diâmetro S, um ponto a partir do qual possamos baixar perpendicularmente ao seu diâmetro, um segmento de reta de medida igual a $\sqrt{P}$. O ponto em que esse segmento intersecta o diâmetro dado, é o ponto que separa as duas raízes da equação, determinando assim, sobre o diâmetro dado, quais são os segmentos representantes das soluções dessa equação.

A figura 4.7 abaixo ilustra como calculamos a raiz quadrada de P em uma equação genérica. P é representado pelo segmento na cor verde e sua raiz, pelo segmento na cor roxa.

Já a figura 4.8, ilustra todo o resto do processo de construção das soluções dessa equação.

A resolução segue o processo abaixo:

1. Sobre uma reta suporte, construa o segmento equivalente a S, soma das raízes desconhecidas da equação;

2. Encontre o ponto médio desse segmento S, e por ele trace a mediatriz do segmento, determinado sobre a mesma, o raio da semi-circunferência, de valor $\frac{S}{2}$;

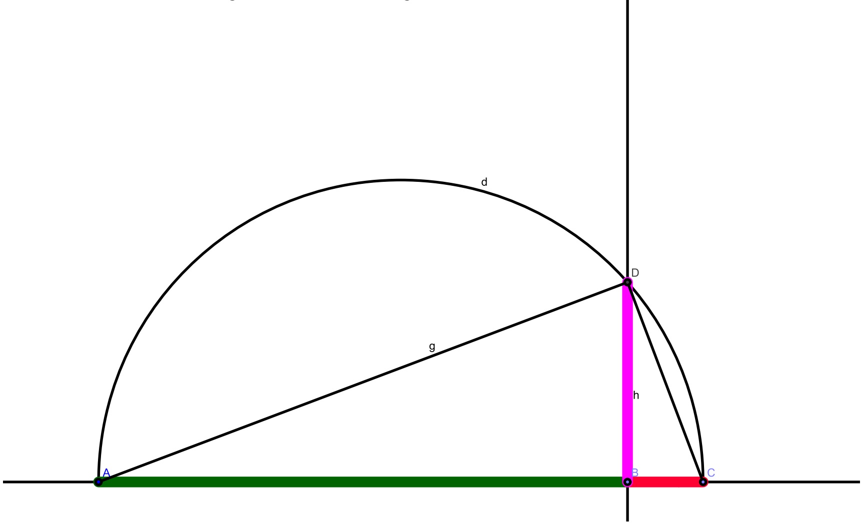


Figura 4.7 A raiz quadrada de P

3. Trace com o compasso, a semi-circunferência definida anteriormente;

4. Transfira com a ajuda do compasso, sobre o raio, e partindo do ponto médio do diâmetro, o segmento correspondente ao número $\sqrt{P}$, determinando sobre o raio, o outro ponto extremo desse segmento;

5. Por esse ponto, construa uma reta paralela em relação a reta suporte do diâmetro, de modo que esta intersecte a semi-circunferência em um ponto qualquer;

6. Por esse ponto de intersecção, construa uma nova reta, agora perpendicular em relação a reta suporte do diâmetro.

Nesse caso, você construiu um retângulo, conforme mostra a figura dada. Como os lados opostos de um retângulo são paralelos e iguais, o segmento IJ terá medida equivalente a $\sqrt{P}$, como queríamos.

Assim, fica determinado que os segmentos CJ e JD são as duas soluções da equação, já que J divide o segmento CD em duas partes, sendo J o pé da perpendicular baixada de I sobre CD. Apenas para título de diferenciação, apresentamos abaixo, na mesma figura, os segmentos LM e MN, correspondentes respectivamente aos dois segmentos anteriores, diferenciando as soluções da equaçãos por cores.

Nesse processo de resolução fizemos a suposição inicial de que $S^2 - 4P \geq 0$ e que suas raízes seriam ambas positivas. Mas o que ocorreria caso as raízes fossem, uma ou ambas negativas? Seria possível resolver o mesmo problema por esse método. Certamente, porém, fazendo uma adequação pelo acréscimo de uma nova incógnita e pela utilização de um sistema auxiliar de orientação, já que passamos a falar de números negativos. Como proceder então?

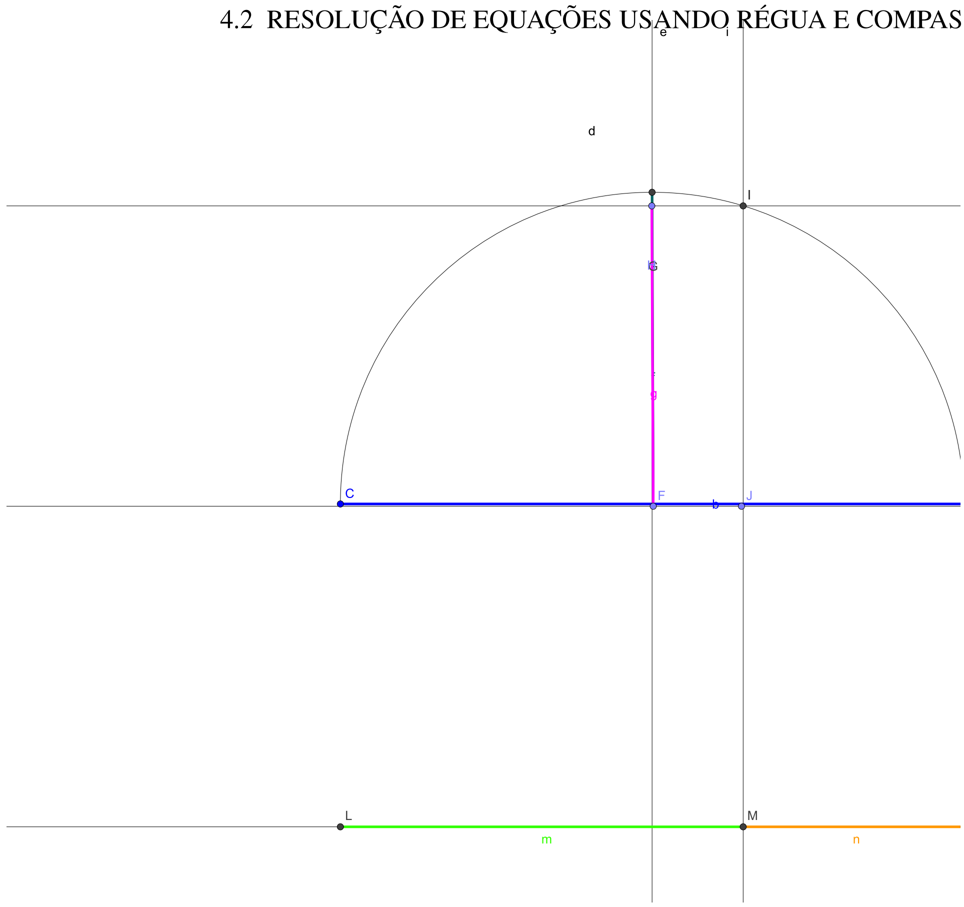


Figura 4.8 Cálculo das raízes

O sistema de equações a resolver permanece sendo o mesmo, porém, com a seguinte modifcação. Suas raízes x_1 e x_2 não são mais necessariamente positivas. Nos valendo de uma pequena, mas importante parcela da teoria da análise numérica, podemos trabalhar semelhantemente com a idéia de limite e escolhermos nesse caso, um número $L > 0$ grande, para nos auxiliar no processo. Esse número L deve ser escolhido de forma que $S+2L \geq 0$, $L^2+SL+P \geq 0$ e $y_i = x_i + L$, com $i = 1,2$.

Sabemos que encontrar esse número é sempre possível, dado que na teoria da análise, está presente de forma bem clara e contundente a idéia de que um número, por maior que seja, por ser finito, pode ser sempre ultrapassado por um outro número qualquer, desde que se faça uma escolha adequada para esse objetivo.

Assim, queremos dizer que, mesmo que uma equação apresente raízes negativas, através da transformação dada acima, pela expressão $y_i = x_i + L$, podemos encontrar um número L que faça com que sua tranformação seja positiva.

O interessante nessa transformação é que ela mantém as propriedades das raízes verdadeiras e além disso, é uma transformação reversível, o que nos dá a possibilidade de resolver o problema a partir delas e no fim, apenas fazer o caminho de regresso até as verdadeiras soluções.

Mostremos primeiramente porque essa modificação é válida.

Nesse caso, nosso sistema inicial seria substituído pelas seguintes equações:

$$y_1 + y_2 = x_1 + L + x_2 + L = x_1 + x_2 + 2L = S + 2L \geq 0$$

e

$$y_1.y_2 = (x_1 + L)(x_2 + L) = x_1.x_2 + x_1L + x_2L + L^2 \Rightarrow$$

$$y_1.y_2 = L^2 + (x_1 + x_2)L + x_1.x_2 = L^2 + SL + P \geq 0.$$

Lembremos que L foi escolhido de maneira a que esses números fossem dessa forma, e portanto podemos agora aplicar nesse novo sistema, as mesmas técnicas demonstradas na resolução da primeira equação particular. Podemos então reclassificar $\bar{S} = S + 2L$ e $\bar{P} = L^2 + SL + P$ como sendo a soma e o produto dessa nova equação transformada, dada por:

$$y^2 - \bar{S}y + \bar{P} = 0.$$

Ela terá solução se, e somente se, $\bar{S}^2 - 4\bar{P} \geq 0$, conforme fizemos com a equação anterior. Entretanto isso ocorre, pois:

$$\bar{S}^2 - 4\bar{P} = (S + 2L)^2 - 4.(L^2 + SL + P) \Rightarrow$$

$$\bar{S}^2 - 4\bar{P} = S^2 + 4SL + 4L^2 - 4L^2 - 4SL - 4P \Rightarrow$$

$$\bar{S}^2 - 4\bar{P} = s^2 - 4P \geq 0.$$

Agora, basta apenas construir a semi-circunferência de diâmetro $\bar{S}$ e a partir da técnica demonstrada anteriormente, construir nela o segmento $\sqrt{\bar{P}}$, encontrando assim os valores de y_1 e y_2. Daí, basta saber que se $y_i = x_i + L$, então $x_i = y_i - L$.

Nesse caso, a orientação é necessária, pois se y_i for menor que L, na subtração determinada acima, o extremo do segmento de tamanho L ultrapassará a origem do eixo real, ficando o resultado obtido com a sua sinalização negativa, conforme mostra a figura 4.9. Dessa forma, estamos considerando o ponto F como sendo a origem, a semi-reta à sua direita como sendo o eixo númerico dos números positivos e a semi-reta à sua esquerda, como sendo o eixo dos números negativos.

Como $x_i = y_i - L$, temos que a solução da equação dada será por essa transformação inversa, o segmento resultante da diferença entre os dois segmentos representantes de y_i e L.

Mas $y_i = \overline{AB} = \overline{FG}$, na cor verde, e $L = \overline{CD} = \overline{GH}$, na cor roxa. Portanto a solução x_i será representada pela medida do segmento FH, conforme mostra a figura 4.9.

Observe que essa solução está a esquerda de F e portanto, assume um valor negativo.

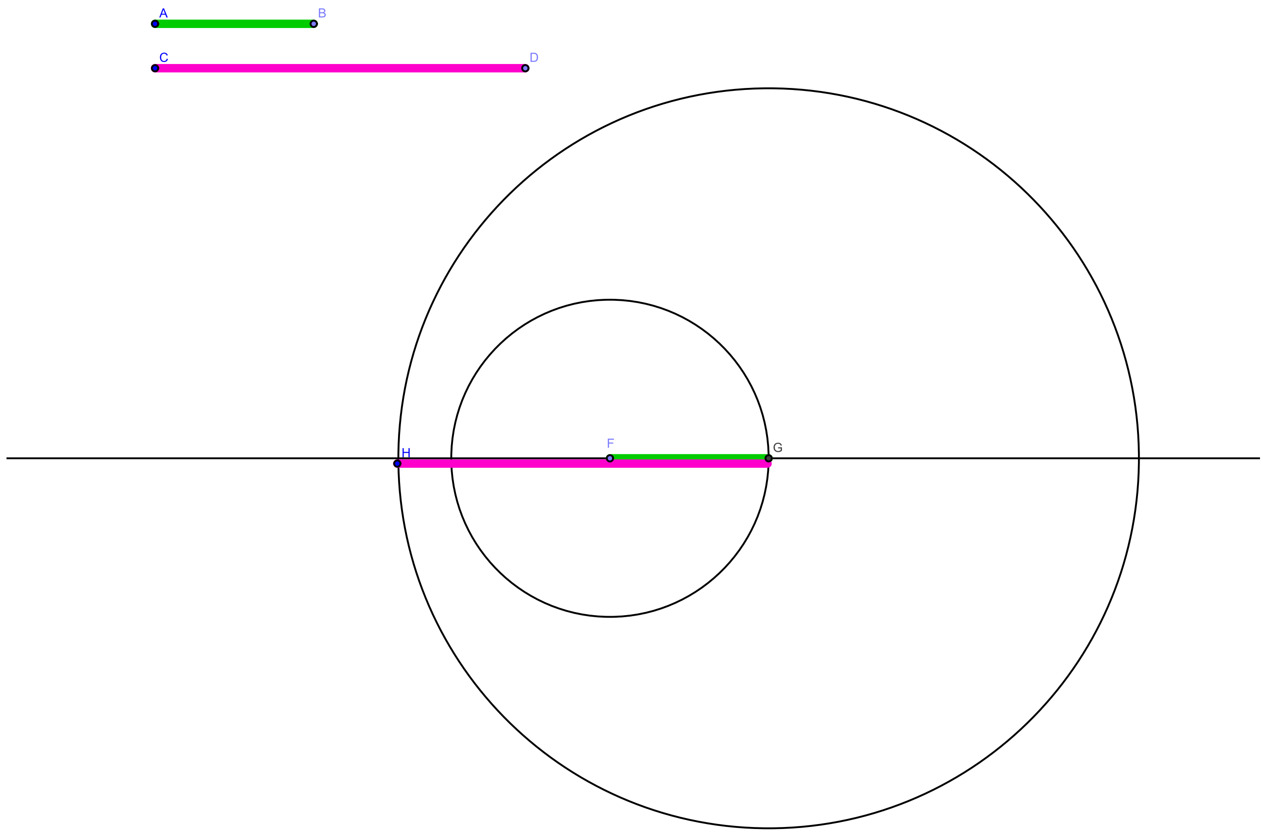


Figura 4.9 Solução negativa da equação

Se o oposto ocorrer, ou seja, se $y_i > L$, o sinal da solução será positiva, conforme mostra a figura 4.10. Nela, observamos que $y_i = \overline{CD} = \overline{FG}$, na cor verde e $L = \overline{AB} = \overline{JG}$, na cor roxa. Portanto, a solução x_i é representada pela medida do segmento FJ.

Essa metodologia comporta e generaliza todos os casos de resolução de equações de segundo grau com coeficientes racionais, cujas raízes sejam números reais naturais, inteiros, racionais ou números irracionais da forma $\sqrt{n}$, com $n \in N$. Nesse caso, o discriminante da equação assume sempre valores positivos ou iguais a zero, com demonstramos anteriormente.

Isso é possível, devido ao fato de que todas as soluções reais de uma equação do segundo grau são construtíveis a partir do uso dos instrumentos régua e compasso, desde que seus coeficientes sejam racionais. Assim, a equação não apresentará como solução um número transcendente ou um número algébrico não construtível, e portanto, poderemos sempre realizar a

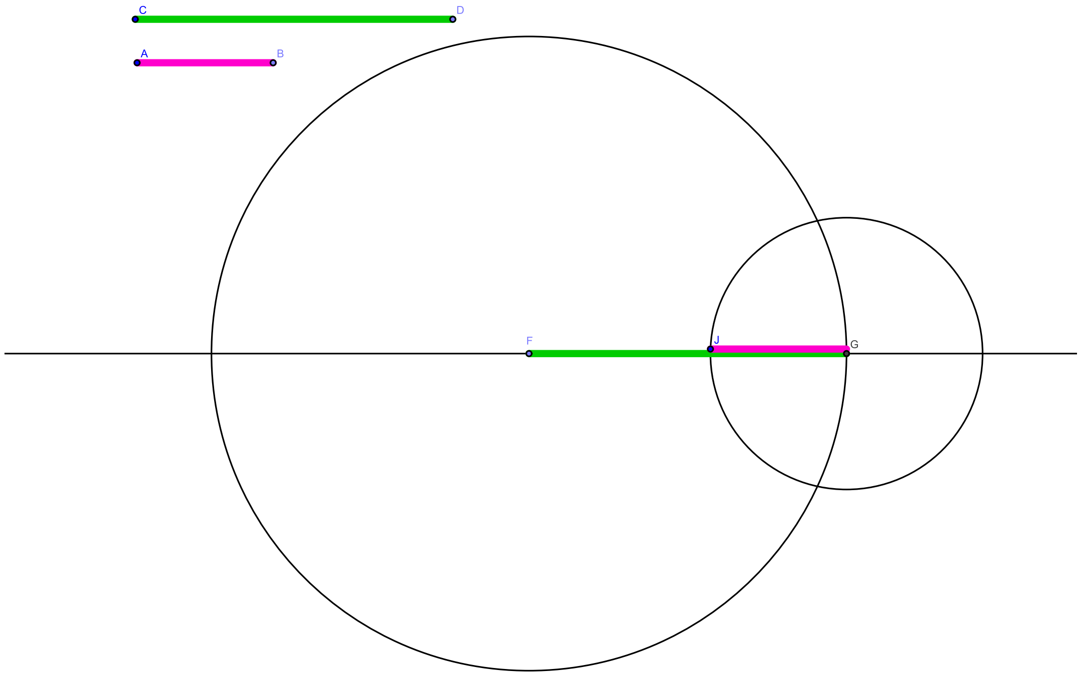


Figura 4.10 Solução positiva da equação

sua construção, sejam elas, ambas positivas, ambas negativas ou mesmo, uma positiva e a outra negativa.

Para concluir essa parte do processo, façamos a resolução da seguinte equação:

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Comparando a mesma com a equação genérica, temos que $S = -1$ e $P = -2$, o que nos mostra que uma das soluções é positiva e a outra é negativa, já que seu produto tem valor negativo. Além disso, a raiz negativa é maior que a positiva, dado sua soma ser também negativa.

Que tranformação podemos realizar então? Que número L podemos escolher, de forma que tanto essa soma quanto esse produto assumam valores positivos?

$L = 3$ é um valor possível, pois:

$$\bar{S} = S + 2L = (-1) + 2.3 = -1 + 6 = 5$$

e

$$\bar{P} = L^2 + SL + P = 3^2 + (-1).3 + (-2) = 9 - 3 - 2 = 9 - 5 = 4.$$

Sendo agora tanto $\bar{S} = 5$ e $\bar{P} = 4$, ambos positivos, podemos aplicar a técnica de resolução demonstrada e resolvermos inicialmente a equação $y^2 - 5y + 4 = 0$. Temos que $\frac{\bar{S}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$

e representa o raio da semi-circunferência e $\sqrt{\bar{P}} = \sqrt{4} = 2$. Seguindo os procedimentos do método, conforme mostra a figura abaixo, encontramos as soluções 1 e 4.

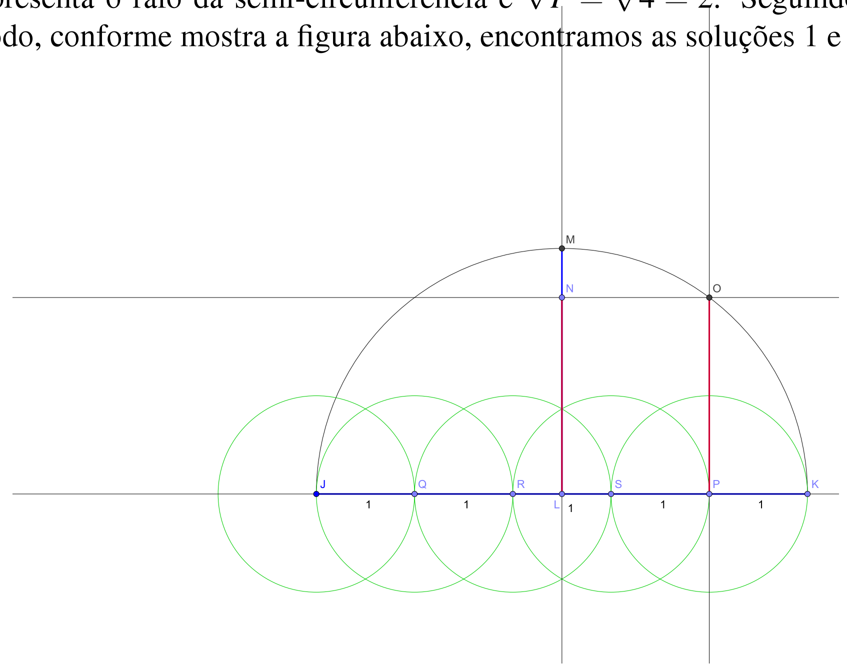


Figura 4.11 Solução da equação $y^2 - 5y + 4 = 0$

Da forma como foi construída, $\bar{S} = \overline{JK} = 5$, $\frac{\bar{S}}{2} = \overline{LM} = 2,5$, $\sqrt{\bar{P}} = \overline{LN} = \overline{OP} = 2$ e $\overline{JQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP} = \overline{PK} = 1$.

Daí as soluções do problema são dadas por $y_1 = \overline{JP} = \overline{JQ} + \overline{QR} + \overline{RS} + \overline{SP} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ e $y_2 = \overline{PK} = 1$. Resolvendo a equação pelos métodos algébricos convencionais, chegamos as mesmas conclusões, dado que $(y-1)(y-4) = y^2 - 5y + 4$, representando o primeiro membro da equação dada.

Algebricamente podemos reverter a tranformação aplicando a fórmula $x_i = y_i - L$. Assim,

$$x_1 = y_1 - L = 4 - 3 = 1$$

e

$$x_2 = y_2 - L = 1 - 3 = -2.$$

Geometricamente, isso também pode ser visualizado, conforme se vê na figura 4.12.

A linha vertical que a figura 4.12 mostra foi posta de maneira a contribuir na visualização dos dois eixos, positivo, à direita e negativo, à esquerda, que delimitam a figura, partindo da origem, representada aqui pelo ponto O.

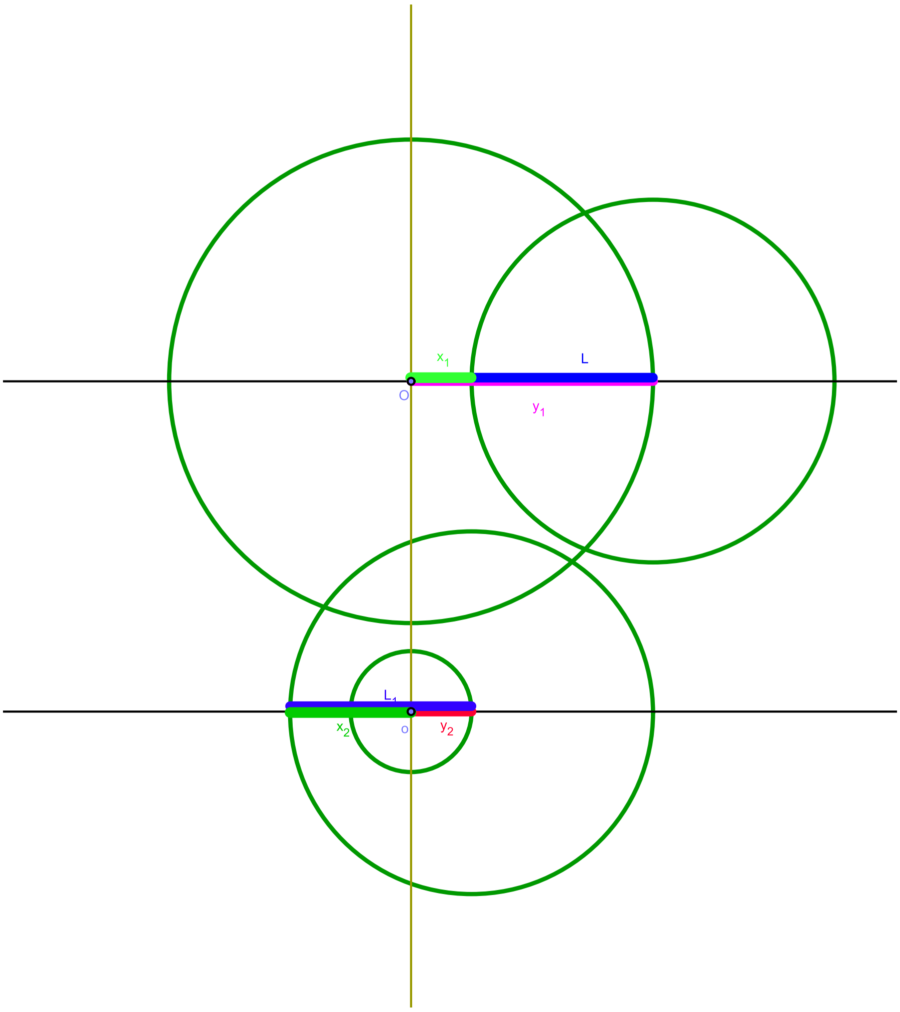


Figura 4.12 Determinação de x_1 e x_2

Vemos que o segmento representante da raiz x_1 encontra-se à direita da origem O, logo o seu valor é positivo e igual a 1. O mesmo não ocorre com o segmento representante da raiz x_2, pois este está localizado à esquerda da origem O. Assim, seu valor em módulo é 2, mas na prática, o valor assumido por x_2 é -2. Resolvemos assim, nossa equação original $x^2+x-2=0$, tendo por solução esses valores, 1 e -2.

Para finalizar essa discussão a respeito das raízes quadradas, façamos a seguir uma demonstração da relação exitentente entre a soma e o produto das raízes, na determinação de sua fórmula algébrica de resolução, tomando com base a análise geométrica do problema. Conforme mostra a figura 4.13, podemos usar conceitos geométricos, e a partir dos mesmos, estabelecer uma relação entre eles e as fórmulas já conhecidas das soluções de uma equação do segundo grau, em função de S e de P.

Primeiramente, podemos perceber que a raiz x_1, mostrada na figura, representada pelo segmento JK, o qual é congruente ao segmento AB, pode ser dada pela soma dos segmentos AF e

FB, ou seja, $x_1 = \frac{S}{2} + z$ e a raiz x_2, representada pelo segmento KL, congruente ao segmento BC, é dada pela diferença entre os segmentos FC e FB. Logo, $x_2 = \frac{S}{2} - z$. Assim, basta determinar o valor de z, que teremos a fórmulas desejadas.

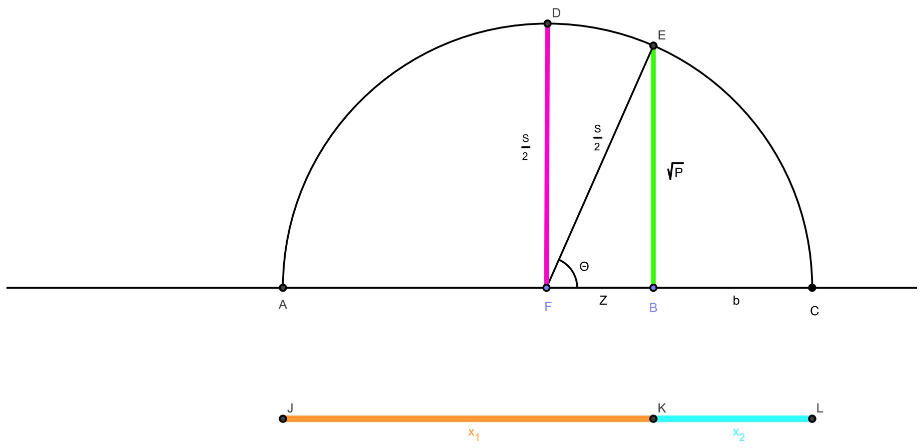


Figura 4.13 Raízes em termos de S e P

Ao observar a figura 4.13, vemos que z é um dos catetos do triângulo retângulo EFB. Daí, basta aplicar ao problema o teorema de Pitágoras, como segue:

$$z^2 + (\sqrt{P})^2 = (\frac{S}{2})^2 \Rightarrow$$

$$z^2 + P = \frac{S^2}{4} \Rightarrow$$

$$z^2 = \frac{S^2}{4} - P \Rightarrow$$

$$z^2 = \frac{S^2 - 4P}{4} \Rightarrow$$

$$z = \sqrt{\frac{S^2 - 4P}{4}} \Rightarrow$$

$$z = \frac{\sqrt{S^2 - 4P}}{2}.$$

Assim, as fórmulas para as raízes são:

$$x_1 = \frac{S}{2} + Z = \frac{S}{2} + \frac{\sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

e

$$x_2 = \frac{S}{2} - z = \frac{S}{2} - \frac{\sqrt{S^2 - 4P}}{2}.$$

Essas nada mais são do que a conhecida fórmula de Bhaskára para a resolução algébrica da equação de segundo grau, sendo o procedimento aqui exposto, uma forma de realizar sua demonstração.

4.2.5 Resolvendo sistemas de equações

A resolução de sistemas de equações segue um padrão semelhante de construção das equações resolvidas anteriormente, até mesmo por que, da soma e do produto das soluções de uma equação de segundo grau, podemos formar um sistema de duas equações, e resolvê-lo, a partir do uso do sistema de substituição de uma incógnita isolada em uma equação, na outra.

Para demonstrar a possibilidade de resolução desses sistemas por régua e compasso, vejamos o exemplo abaixo:

Como resolver um sistema de equações com duas incógnitas do tipo $3x + y = a$ e $2x - y = b$?

Trabalhemos primeiramente do ponto de vista algébrico. Podemos isolar a incógnita y na primeira equação e substituí-la na segunda.

Nesse caso, $y = a - 3x$ e daí,

$$2x - y = b \Rightarrow$$

$$2x - (a - 3x) = b \Rightarrow$$

$$5x - a = b \Rightarrow$$

$$x = \frac{a + b}{5}.$$

Para o valor de y teremos que:

$$y = a - 3x = a - 3\left(\frac{a + b}{5}\right) \Rightarrow$$

$$y = \frac{5a - 3a - 3b}{5} \Rightarrow$$

$$y = \frac{2a - 3b}{5}.$$

Ambos os valores das duas incógnitas estão sendo dados a partir dos termos desconhecidos a e b, a menos da realização das operações básicas com esses valores. Ou seja, construir a solução deste problema pela aplicação das técnicas de construção com régua e compasso nada mais é que somar, subtrair, multiplicar ou dividir os termos independentes.

Tudo isso já foi demonstrado em momentos anteriores.

Se tomássemos um exemplo genérico com as equações $\bar{a}x + \bar{b}y = A$ e $\bar{d}x + \bar{e}y = B$, sua solução seria:

$$x = \frac{\bar{b}B - \bar{d}A}{\bar{b}\bar{c} - \bar{a}\bar{d}}$$

e

$$y = \frac{\bar{c}A - \bar{a}B}{\bar{b}\bar{c} - \bar{a}\bar{d}}.$$

O que isso nos mostra?

Que a solução de um sistema de equações sempre depende dos coeficientes numéricos presentes na mesma, sejam os dependentes das incógnitas, sejam os independentes. Em ambos os casos, a solução está relacionada a uma operacionalização com esses números, o que se pode fazer com muita tranquilidade, com as ferramentas aqui trabalhadas.

4.3 Construindo sequências numéricas especiais

A construção de uma sequência numérica não é uma tarefa que demanda grandes dificuldades de realização, devido ao fato de que a maioria das sequências que conhecemos e utilizamos são formadas a partir do uso de operações aritméticas simples, como a adição e a multiplicação. Podemos, por exemplo, citar a possibilidade de construção das sequências chamadas de progressões aritméticas e geométricas.

Assim, para construí-las, normalmente necessitamos apenas do entendimento correto da formação da sequência e a posterior construção da mesma utilizando as técnicas propostas pelos métodos aqui utilizados.

Não faremos todas as construções por entender que muitas delas são de fácil compreensão a partir do que é dito no texto. A exemplificação será feita para situações que sejam mais interessantes do ponto de vista ilustrativo.

4.3.1 A sequência de Fibonacci

Trata-se de uma sequência numérica bem intrigante, pois aparecem em algumas situações da própria natureza. Sua lei de formação é a seguinte. O primeiro e o segundo termo são iguais a 1 e cada termo, a partir do terceiro, é dado pela soma dos dois anteriores. Vejamos seus primeiros termos.

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,...$$

Os dois primeiros termos não seguem exatamente a regra da sequência, sendo esta obedecida a partir do terceiro termo. Assim, $2 = 1+1$, $3 = 1+2$, $5 = 2+3$, ...

Logo vê-se que sua contrução demanda apenas o conhecimento da construção de somas, o que é de fácil realização, segundo o que foi demonstrado até o presente momento.

Há textos que a ilustram, relacionando-a á concepção de uma família de coelhos, mostrando como ocorreria a reprodução desses animais, caso eles se reproduzissem seguindo a risca um tempo pré-determinado. Fala-se também da presença da sequência de Fibonacci presente na maneira como os galhos de uma árvore crescem e se distribuem ao longo da copa. Mas além dessas ilustrações, a sequência de Fibonaccci também aparece na resolução de problemas matemáticos mais complexos, existindo algumas proposições importantes a respeito do mesmo.

4.3.2 Os números da forma $\sqrt{n}$

A construção dessa sequência especial de números é bem simples. Basta apenas que se tome inicialmente um triângulo retângulo de catetos 1 e 1. Pela aplicação direta do teorema de Pitágoras, sabemos que sua hipotenusa será igual a $\sqrt{2}$. Para construir os demais números na sequência, basta tomar a hipotenusa encontrada como o cateto de um novo triângulo retângulo, de forma que o outro cateto sempre tenha medida igual a 1 unidade.

Desta forma, cada nova hipotenusa será um número da forma desejada e em sequência, ou seja, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ..., conforme mostra a figura 4.14, onde os segmentos em verde medem 1 unidade e os segmentos em vermelho representam os números da sequência.

É importante frisar que as sequências que podem ser construídas são diversas e que construí-las é apenas uma parte do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo aqui proposto. Também podemos dizer que não é única a forma de realizar essas construções. Cabe então ao professor e seu aluno, encontrarem outras maneiras de realizar essa atividade. Nesse processo, a aprendizagem do conteúdo poderá se realizar com mais ênfase.

4.4 A construção de lugares geométricos

Há alguns lugares geométricos de grande importância para o estudo da matemática, no que se refere a matemática estudada em nível escolar, seja a nível fundamental, ou mais especificamente, médio. Eles são importantes, pois estão presentes em algumas situações de relevância,

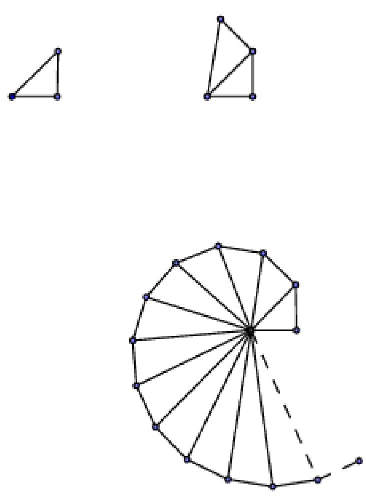


Figura 4.14 A sequência dos números expressos por $\sqrt{n}$

como por exemplo, a parábola, que não apenas está presente no estudo da geometria analítica, como também faz parte do estudo das funções e equações do segundo grau. É importante também lembrar que muitos desses conceitos não estão restritos apenas a matemática, mas sim, têm sua utilidade na explicação e interpretação de problemas ligados a Física, a Química e a Biologia, dentre outras áreas.

Devido a essa importância, faz-se necessário construir o seu conceito matemático de forma firme e concreta. Nesse momento, buscamos trazer uma demonstração de suas construções, partindo inicialmente do conceito teórico que cada lugar geométrico possui, buscando analisar suas principais características, e a partir das mesmas, com o auxilío da régua e do compasso, construir uma representação desse lugar geométrico.

Cabe dizer também, nesse momento que, com o auxilío dos instrumentos aqui citados, não conseguiremos construir o lugar geométrico da maneira convencional a qual nos acostumamos até o presente momento.

A construção que faremos e o conceito que buscaremos imprimir, demanda um outro tipo de análise para a questão da construtibilidade.

Não construíremos a curva que determina o lugar geométrico buscado, e sim pontos pertencentes a esta curva. Dessa maneira, nosso objetivo central será a construção do maior número de pontos dessa curva, de maneira que os pontos mantenham uma certa proximidade e assim, possamos esboçar com uma boa qualidade a curva desejada.

Fazendo isso, tanto estaremos construindo na prática uma maneira diferente de visualização do conceito, como permitindo ao aluno ser ator nessa construção, ser contribuinte em seu próprio processo educacional.

Caso se deseje comprovar que a curva construída é real, pode-se tranquilamente usar um software matemático, usar os mesmos procedimentos e ver na prática que o lugar construído é realmente aquele desejado. Nesse caso específico, o software utilizado foi o *Geogebra*. Passemos então à construção dos mesmos.

4.4.1 A parábola

Em definição, a parábola é o *lugar geométrico dos pontos que equidistam do foco e da reta diretriz*. Conforme mostra a figura **??**, o foco dessa parábola é o ponto C e sua reta diretriz é a reta que contém os pontos L, A e M.

Assim, se queremos realizar a construção de uma parábola, devemos buscar métodos através do qual, tendo conhecimento de quem sejam o foco e a reta diretriz, possamos achar pontos do plano cartesiano que tenham essa propriedade, qual seja, distar igualmente do foco e da reta diretriz.

Na figura 4.15, vemos de forma clara, um método através do qual podemos construir esses pontos pertencentes à parábola. Os passos de sua construção foram os seguintes:

1. Dados o ponto A, foco da parábola e a reta diretriz, escolha um ponto P qualquer, pertencente a essa reta;
2. Trace o segmento de reta que une os pontos A e P, e posteriormente, ache a reta mediatriz desse segmento;
3. Agora, trace a reta perpendicular em relação a reta diretriz, que passa por P;
4. O ponto de encontro da mediatriz com essa perpendicular pertence a parábola desejada.

A justificativa para esse fato é que, como a figura mostra, os triângulos AMQ e PMQ são congruentes pelo caso LAL.

Vejamos porquê:

1. Como M é o ponto médio de AP, então $\overline{AM} = \overline{MP}$;
2. Os ângulos AMQ e PMQ são retos e portanto iguais;
3. MQ é um lado comum.

Como os dois triângulos são congruentes, temos que $\overline{AQ} = \overline{PQ}$. Mas na prática isso quer dizer que à distância do ponto Q ao ponto A é igual a distância de Q a P. A é o foco da parábola e como P pertence à reta diretriz, a distância de Q a P é a mesma de Q em relação a reta diretriz. Logo, Q é um ponto da parábola. Analogamente, o ponto D pertence à parábola, mas nesse caso, ele é o vértice da mesma.

Quanto mais vezes esse processo for repetido, mais pontos da parábola serão construídos e melhor será o esboço que faremos da parábola.

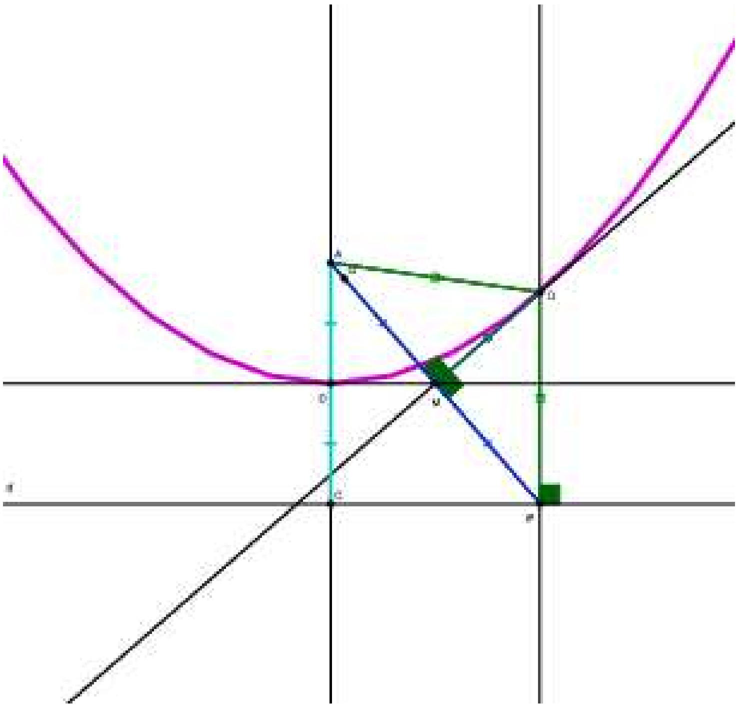


Figura 4.15 A construção dos pontos da Parábola

4.4.2 A elipse

A definição de elipse é a seguinte. Uma elipse é o *lugar geométrico dos pontos cuja soma da distância dos mesmos a dois outros pontos, chamados focos da elipse, se mantém sempre constante e igual a $2a$, onde a é a distância do centro a um dos vértices*.

Uma forma para a construção de pontos pertencentes a uma elipse, e consequentemente, de um bom esboço ou idéia do que seria essa figura, seria a partir do próprio conceito. Na elipse, os focos são fixos e a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse a eles é sempre $2a$.

Basta então que, sabendo a distância entre os focos e o valor de a, fixemos em cada um dos focos, circunferências de raios respectivamente iguais a

$$a + \varepsilon$$

e

$$a-\varepsilon.$$

Como

$$(a+\varepsilon)+(a-\varepsilon)=2a$$

temos que os pontos de intersecção das circunferências mantém a propriedade da elipse e portanto pertencem à mesma.

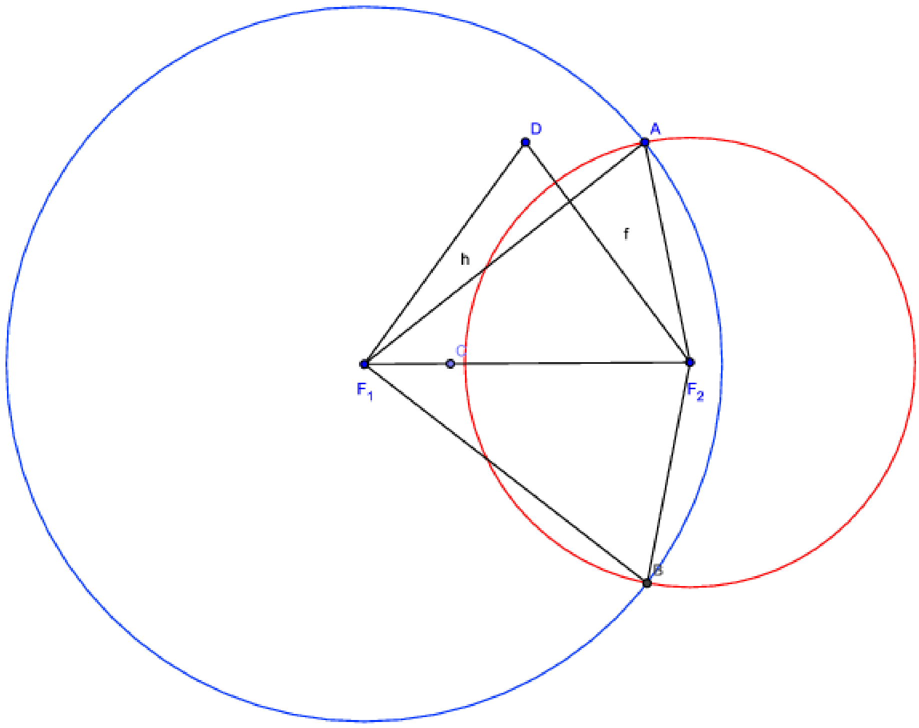


Figura 4.16 Uma outra forma de encontrar pontos da elipse

Na figura temos que h = $a+\varepsilon$ e f = $a-\varepsilon$. e os pontos A, D e B pertencem à elipse. F_1 e F_2 são seus focos.

4.5 Lista de Exercícios e Atividades Extras

1) Resolva as seguintes equações pelo método de Descartes:

a) $x^2 - 6x + 16 = 0$;

b) $x^2 + 4x + 25 = 0$.

2) Resolva as seguintes equações pelo método proposto na seção 4.2.4:

a) $x^2 - x - 6 = 0$;

b) $x^2 + 5x + 4 = 0$.

3) Monte e resolva um sistema de equação, usando o método proposto na seção 4.2.5.

CAPÍTULO 5

Outras Contribuições Importantes do Uso da Régua e Compasso

Vimos no capítulo anterior que, através da aplicação das técnicas de construção com régua e compasso, podemos resolver diversos tipos de problemas algébricos, especialmente aqueles cuja solução esteja diretamente ligada à resolução de uma equação de primeiro ou de segundo grau.

Nesse capítulo veremos que essa técnica de construção também apresenta possibilidades interessantes de uso, no âmbito da própria geometria, sendo uma importante utilização, a construção de polígonos regulares diversos.

Não faremos aqui a construção de todos os polígonos, nem mostraremos o caminho genérico para a construção dos mesmos, pois a diversidade de formas e angulações entre os seus lados impede uma generalização para todos os tipos. Buscaremos muito mais a reflexão em relação às ideias apresentadas em torno da contrução de alguns desses polígonos, entre os quais podemos destacar certamente o pentágono, o heptágono e o decaheptágono. Passemos então à análise dos mesmos e das implicações lógico-matemáticas que possam estar presentes na estrutura e no desencadeamento de sua construção.

5.1 A construção de polígonos regulares da forma $A.2^n$

Por definição, um polígono é *uma superfície plana limitada por uma linha poligonal fechada, ou seja, uma linha formada apenas por segmentos de reta.* Do ponto de vista da origem da palavra, que é oriunda do grego, temos que polígono = poli(muitos) + gono(ângulos). A presença de polígonos ou de formas poligonais é constante, tanto na natureza, como nas diversas formas diferentes da manifestação arquitetônica e cultural do ser humano. Apenas a título de exemplo, vemos formas poligonais na estrutura das colméias de abelhas, em calçadas e prédios e até mesmo, nas famosas bolas de futebol.

Nos interessa, no entanto, nesse tópico, um tipo especial de polígonos, que são os polígonos ditos regulares. Sua principal característica é a regularidade em sua forma, tanto no que se refere aos lados, que têm a mesma medida, quanto em relação aos seus ângulos internos, que são congruentes. Não se faz necessário, no entanto, que a linha poligonal determine uma região plana côncava ou convexa, pois em ambos os casos, a figura formada é um polígono. Porém, em nosso caso, trataremos apenas da construção de polígonos regulares convexos.

Não existe uma medida específica de lados ou uma medida específica de ângulo que um polígono regular possa possuir. Um polígono pode possuir qualquer quantidade de lados, e mesmo assim, pode ser regular. O importante, nesse caso, é o método a ser utilizado, seja este, técnicas manuais de construção, ou mesmo, softwares de construção geométrica.

Com um software apropriado, por exemplo, o *geogebra*, fica muito simples a construção de um polígono regular, já que há ferramentas no próprio programa que proporcionam tal construção. Porém, à mão, essas construções tornam-se mais limitadas, devido a ausência de técnicas diversas que permitam sua contrução. Com o uso da régua e compasso é possível realizar algumas construções. Outras são possíveis, a partir da inserção de outros instrumentos, tais como um transferidor, que permite uma divisão com mais fracionamentos do ângulo de 360 graus.

Comecemos então por discutir a construção de polígonos regulares cuja quantidade de lados é da forma $A.2^n$.

Se tomarmos $A = 1$, teremos que esses polígonos possuem, para $n = 1,2,3,...$, os valores

$$P_0 = 2^0 = 1 lados$$

$$P_1 = 2^1 = 2 lados$$

$$P_2 = 2^2 = 4 lados$$

$$P_3 = 2^3 = 8 lados$$

$$P_4 = 2^4 = 16 lados$$

$$P_5 = 2^5 = 32 lados$$

$$\vdots$$

$$P_n = 2^n lados$$

Logo, vemos que cada novo polígono assume uma quantidade de lados equivalente ao dobro da quantidade de lados do polígono imediatamente anterior. Obviamente as duas primeiras situações não são aplicavéis, dado que o polígono de menor quantidade de lados é o triângulo. Todas as outras de aplicam, e são possíveis de construir com régua e compasso. Mas por que essa construção é possível?

Primeiramente, a construção do polígono regular de quatro lados é de fácil realização, dado que o quadrado é uma figura geométrica muito comum e de propriedades bem específicas.

Seus quatro lados são iguais e paralelos e seus ângulos internos, retos, tratando-se de uma figura geométrica de fácil compreensão.

Para construí-lo, usaremos uma aplicação da construção de polígonos regulares inscritos em uma circunferência, cujo centro é conhecido. A construção segue os seguintes passos:

1. Trace uma reta suporte, e por um ponto dela, uma outra reta perpendicular em relação a primeira;

2. Centre uma circunferência de raio qualquer nesse ponto de intersecção das retas;

3. Como as retas dadas intersectam a circunferência em quatro pontos distintos, basta agora apenas unir esses pontos através de segmentos de reta, que teremos o quadrado desejado.

É o que nos mostra a figura 5.1, abaixo:

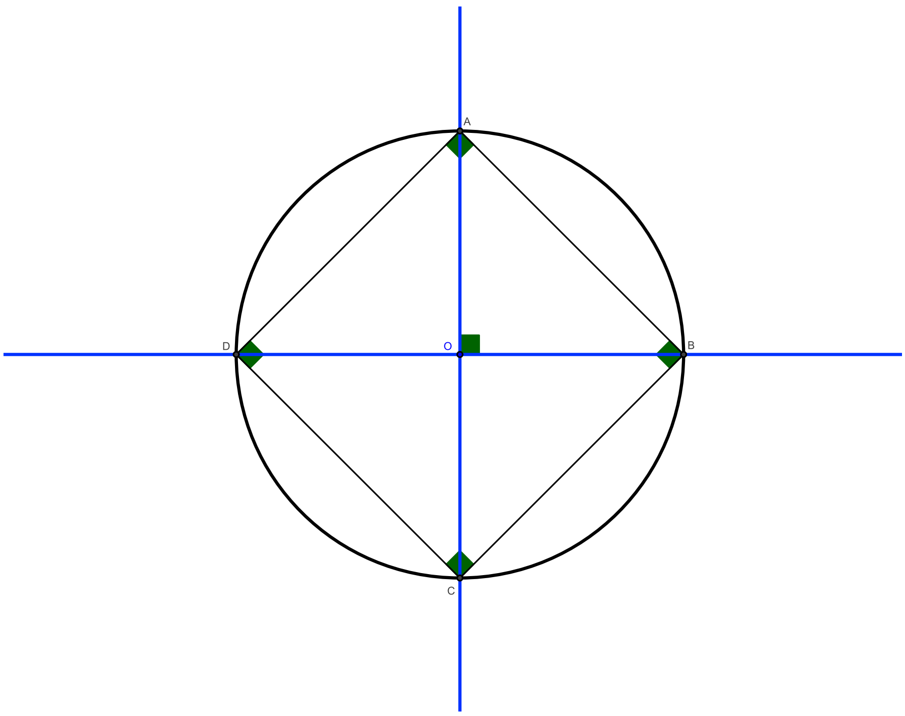


Figura 5.1 Construção do quadrado inscrito

Como a reta que passa por A e C é perpendicular à reta que passa por B e D, temos que os ângulos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$, são ângulos retos. Temos também que $AO \equiv BO \equiv CO \equiv DO$, já que O é o centro da circunferência, e portanto divide os diâmetros AC e BD igualmente ao meio.

Assim, os triângulos AOB, BOC, COD e DOA são congruentes, pelo caso LAL, e assim, são iguais os segmentos AB, BC, CD e DA. Mas apenas essa congruência das medidas dos lados não garante que a figura construída seja um quadrado.

No entanto, observe que como $AO \equiv BO$, o triângulo AOB é isósceles, e então os ângulos $O\hat{A}B$ e $O\hat{B}A$ são iguais. como $A\hat{O}B$ mede 90°, a soma de $O\hat{A}B$ com $O\hat{B}A$ só pode medir 90^o, pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo; logo, $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 45^o$. O mesmo ocorre nos três outros triângulos, o que nos garante que

$$O\hat{A}D = O\hat{D}A = O\hat{D}C = O\hat{C}D = O\hat{C}B = O\hat{B}C = 45^o.$$

Mas aí,

$$A\hat{B}C = O\hat{B}A + O\hat{B}C = 90^o \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC},$$

e

$$B\hat{C}D = O\hat{C}D + O\hat{C}B = 90^o \Rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{CD}.$$

Dessas duas análises, concluímos que,

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$$

e

$$\overline{AB} = \overline{CD}.$$

Analogamente,

$$C\hat{D}A = O\hat{D}C + O\hat{D}A = 90^o \Rightarrow \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{DA}.$$

Daí,

$$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA},$$

e

$$\overline{BC} = \overline{DA}.$$

Vemos então que os lados opostos são paralelos e iguais, logo a figura formada é realmente um quadrado. Veja que nesse caso, o ângulo central, de medida sempre igual a 360^o, foi dividido em quatro partes iguais, de medida 90^o.

Essa é uma característica frequente na construção de polígonos regulares inscritos, que pode e deve ser usada como uma propriedade dos mesmos, ou seja, se queremos construir um polígono regular inscrito, de n lados, o que devemos fazer é encontrar uma maneira de dividir o ângulo central da circunferência em uma quantidade n de ângulos iguais entre si. Reside aí o fato de ser possível construir polígonos regulares de $A.2^n$ lados. O 2^n está responsável na fórmula, por sempre dobrar a quantidade de lados do polígono, a cada aumento de uma unidade no valor de n.

Mas dobrar a quantidade de lados implica em dobrar a quantidade de ângulos. Fazemos issso simplesmente bisseccionando todos os ângulos anteriores. Ao fazer isso, não apenas estamos dobrando a quantidade de ângulos, mas também estaremos mantendo a igualdade entre eles, dado que na bissecção, os ângulos formados apresentam medidas iguais. Aqui podemos fazer uma observação interessante: na verdade, não são os lados que determinam, nesse caso a quantidade de ângulos, e sim, a formação desses ângulos por bissecção, que permite a determinação precisa dos pontos sobre a circunferência, que serão usados na determinação dos lados do novo polígono.

Logo, tendo construído o quadrado, podemos bisseccionar seus ângulos centrais, e com os novos pontos, formados pelas intersecções das retas bissetrizes com a cincunferência, construir o octógono regular $AEBFCGDH$, como mostra a figura 5.2, a seguir:

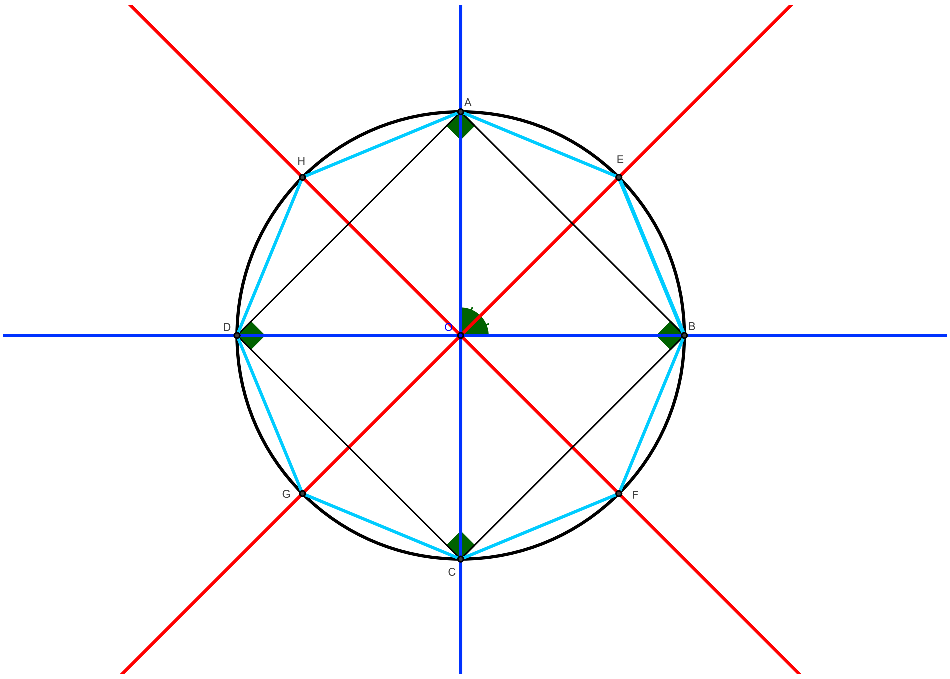


Figura 5.2 Construção do octógono inscrito

Observe que os ângulos $A\hat{O}E$ e $B\hat{O}E$ são iguais e medem 45^o. Como $AO \equiv BO$ e OE é um lado comum, os triângulos AOE e BOE são congruentes pelo caso LAL. Assim, $AE \equiv EB$. O mesmo se aplica a todos os outros triângulos formados nessa última intervenção, sendo todos eles congruentes entre si. Temos então que

$$AE \equiv EB \equiv BF \equiv FC \equiv CG \equiv GD \equiv DH \equiv HA.$$

Por observações semelhantes, veremos que os ângulos do octógono também apresentam a qualidade de serem iguais entre si, o que nos garante que o mesmo é um octógono regular. Veja que

$$B\hat{A}E = A\hat{B}E = C\hat{B}F = B\hat{C}F = D\hat{C}G = C\hat{D}G = A\hat{D}H = D\hat{A}H = \alpha$$

e

$$A\hat{B}C = B\hat{C}D = C\hat{D}A = D\hat{A}B = \beta.$$

Logo, como se pode ver pela figura 5.2, cada ângulo do octógono terá como medida o valor $2\alpha + \beta$.

Basta ver então que, se os ângulos centrais são iguais, eles delimitam setores iguais da circunferência, e portanto, a distância entre os pontos limites desses setores serão iguais, dado serem determinados por curvas de mesmo comprimento, sobre a mesma circunferência.

Mostramos a construção para $A = 1$. Mas essa não é a única. Se $A = 2$, teremos que:

$$P_0 = 2.2^0 = 2.1 = 2lados$$

$$P_1 = 2.2^1 = 2.2 = 4lados$$

$$P_2 = 2.2^2 = 2.4 = 8lados$$

$$P_3 = 2.2^3 = 2.8 = 16lados$$

$$\vdots$$

$$P_n = 2.2^n = 2^{n+1}lados$$

O que vemos nesse caso, são similares aos anteriores, apenas reposicionados na ordem da sequência de formação. Isso ocorrerá repedidamente para todos os números da forma 2^k, com $k = 0, 1, 2, 3....$

Já se $A = 3$, teremos que,

$$P_0 = 3.2^0 = 3.1 = 3lados$$

$$P_1 = 3.2^1 = 3.2 = 6lados$$

$$P_2 = 3.2^2 = 3.4 = 12lados$$

$$P_3 = 3.2^3 = 3.8 = 24lados$$

$$\vdots$$

$$P_n = 3.2^n lados$$

Novamente observamos a duplicação no número de lados do polígono. Veja a figura 5.3, a seguir. Nesse caso, fizemos a operação inversa de construção. Construímos primeiramente o triângulo equilátero RST e depois, pelo encontro das bissetrizes do mesmo, seu incentro. Tomando este incentro como centro de uma circunferência, construímos a circunferência circunscrita ao triângulo dado.

Pelos pontos de intersecção dessas bissetrizes com a circunferência dada, juntamente com os vértices do triângulo, foi construído o hexágono $RUTVSW$ mostrado. Se quisermos realizar novas construções, basta continuar bisseccionado os ângulos centrais e determinado os pontos sobre a circunferência que farão parte do novo polígono. É um processo infinito de construção.

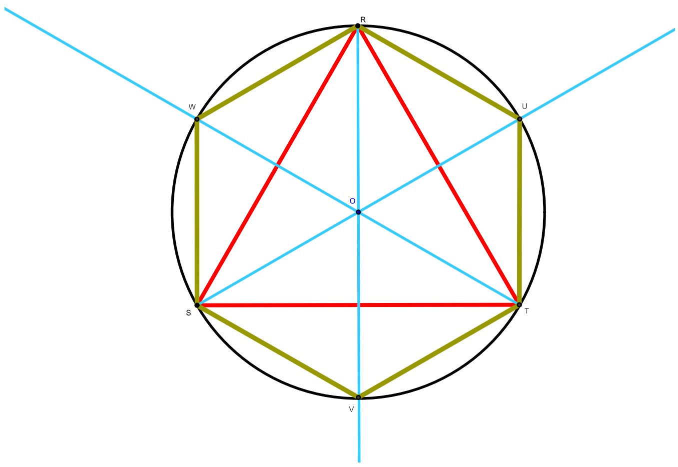


Figura 5.3 O triângulo equilátero e o hexágono

Poderíamos também querer construir polígonos da forma $A.3^n$. Mas para isso, seria necessário desenvolver uma forma de trisseccionar o ângulo por régua e compasso, o que já se provou ser impossível. Para outras possibilidades, deve-se primeiro avaliar a possibilidade da secção do ângulo central em questão.

Vemos então que o problema de construir polígono regulares está preso à possibilidade ou a impossibilidade de secção do ângulo central, além é claro, da construtibilidade inicial de um polígono base, para a sua replicação, em termos da quantidade de lados e consequente formação de novos polígonos.

5.2 A construção de polígonos regulares de outras formas

Com essa técnica podemos construir uma infinidade de polígonos, mas mesmo assim, vários outros não serão construtíveis usando esse artifício, pois as características dos lados e ângulos diferem muito de um polígono regular para outro. Assim, é necessário, em cada situação buscar a técnica adequada para a construção.

Gauss, no entanto, nos respondeu a uma pergunta importante, sobre a possibilidade de construção de polígonos regulares com régua e compasso, provando ser possível a construção de polígonos regulares de $2^{2^k}+1$ lados, onde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Wantzel, veio posteriormente a generalizar esse resultado, provando o seguinte teorema:

Um polígono regular de n lados pode ser construído com régua e compasso se, e somente se, $n = 2^\alpha$ ou $n = 2^\alpha p_1 p_2 \ldots p_r$, em que p_1, p_2,..., p_r são números primos distintos da forma $2^{2^\beta}+1$ e α e β são números inteiros não negativos.

Assim, são construtíveis com régua e compasso os polígonos de 3,4, 5,6, 8,..., dentre outros.

O heptágono seria um exemplo de polígono que não é construtível por essa maneira.

Veremos mais adiante a construção do pentágono, do decágono e do heptadecágono, os quais pertencem a sequência de polígonos do teorema de Gauss, como exemplificações dessa possibilidade.

5.3 O polígono regular de 17 lados

Os procedimentos para a construção do heptadecágono regular são os seguintes:

1. Dado uma reta suporte, centre em um ponto O da mesma, uma circunferência de raio qualquer, de maneira que a intersecção da reta suporte com a circunferência seja o ponto A;

2. Trace por O uma reta perpendicular em relação a primeira, marcando o ponto B, de uma de suas intersecções com a circunferência;

3. Determine D, pertencente ao segmento OB, de forma que a distância entre O e D seja um quarto da distância entre O e B. Isso pode ser feito pela divisão do segmento OB em quatro partes iguais;

4. Trace o segmento DA;

5. Encontre o ponto E, pertencente ao segmento OA, de modo que o ângulo $O\hat{D}E$ seja equivalente a quarta parte do ângulo $O\hat{D}A$. Podemos realizar essa construção aplicando a técnica de bissecção do ângulo $O\hat{D}A$, duas vezes seguidas;

6. Encontre o ponto F, pertencente a semi-reta de origem O, e que é oposta em relação a origem, da semi-reta $\overrightarrow{OA}$, de modo que o ângulo $E\hat{D}F$ meça 45^o. Para isso, basta traçar por D a reta perpendicular com relação a reta que passa por D e E. Depois, só é bissectar o ângulo formado por essas duas retas. F é o ponto de intersecção da reta suporte de O e A, com essa bissetriz;

7. Descreva uma nova circunferência com diâmentro FA. Na figura 5.4, está em destaque na cor verde. Essa circunferência intersecta $\overrightarrow{OB}$ em H;

8. Descreva outra circunferência, com centro em E e raio EH. Marque o ponto G, da intersecção dessa circunferência com $\overrightarrow{OA}$. Na figura 5.4, está em destaque na cor roxa;

9. Por G, construa a perpendicular em relação a reta que passa por O e A. Essa, intersectará a circunferência dada inicialmente, em destaque na cor preta, no ponto I.

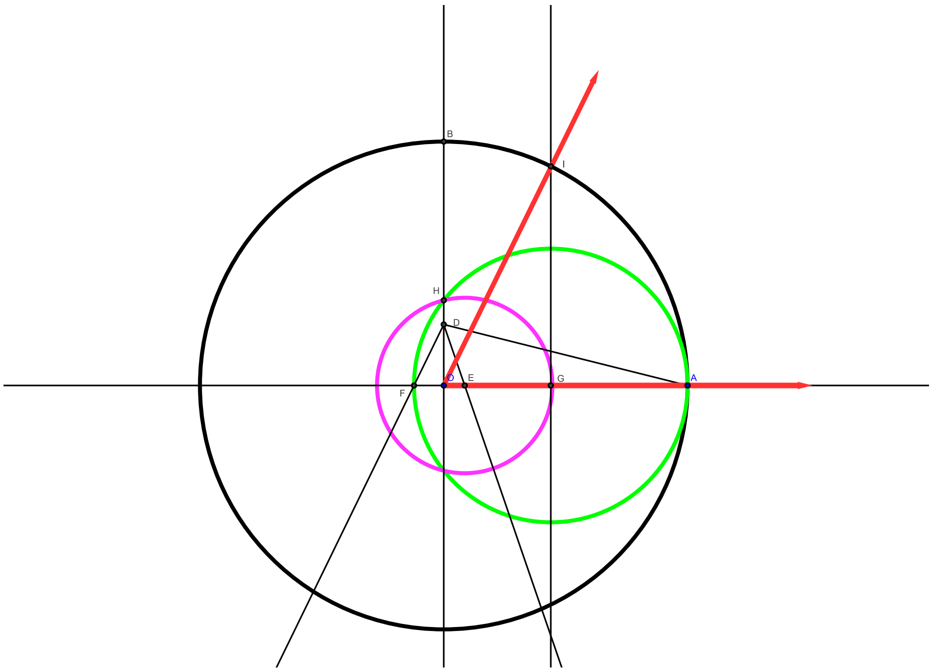


Figura 5.4 O polígono de dezessete lados

A construção básica está concluída. Basta agora que tomemos o compasso, com abertura igual ao ângulo $A\hat{O}I$, e façamos todas as demais demarcações. Os pontos A e I já pertencem ao heptadecágono.

Com essa abertura, centre a ponta seca do compasso em I, e seguindo sempre o sentido anti-horário da circunferência, construa os demais pontos, reposicionado o compasso a cada nova construção, sobre o ponto anterior, recém determinado. Serão necessárias, algo em torno de três voltas em torno da circunferência, para que o processo seja concluído e os dezessete pontos determinados. Abaixo vemos o heptadecágono completo. Nela, tomemos F como sendo o ponto A da figura anterior. Com o compasso com a abertura determinada anteriormente, uma de suas pontas estaria sobre F e a outra sobre I. Reposicionando a ponta seca do compasso em I, acharíamos o ponto L. Repetindo o procedimento, encontraríamos na ordem, os pontos O, A, D, G, J, M, P, B, E, H, K, N, Q, C e retornaríamos ao ponto F, inicial, formando o mesmo ciclo.

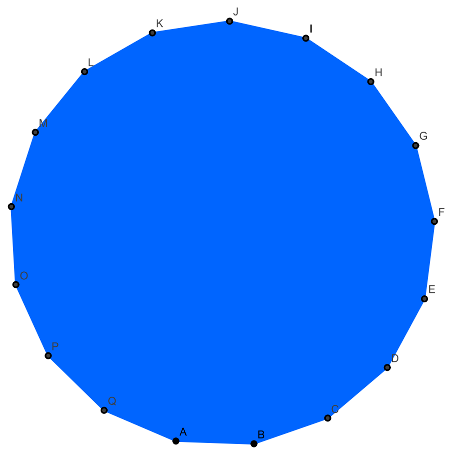


Figura 5.5 O heptadecágono

A justificativa para essa construção foge ao foco desse trabalho. No entanto, apenas a título de informação, sua idéia centra-se na divisão do ângulo central em 17 ângulos de mesmo valor. Assim, o ângulo buscado seria

$$\alpha = \frac{2\pi}{17},$$

cuja contrução não parece nada fácil.

Gauss, no entanto, realizou esse feito, tendo como base seus estudos sobre congruência, tópico que o mesmo introduziu na teoria dos números, como cita [13], em seu artigo intitulado *O Problema da Construção de Polígonos Regulares de Euclides a Gauss.*

> ...a extração da raiz enésima da unidade produz n números complexos, cujas representações gráficas formam um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de raio unitário. Por esse motivo, a equação $x^n - 1 = 0$ recebeu a denominação de equação ciclotônica e foi intensamente estudadano final do século $XVIII$ e início do século XIX, principalmente pelo jovem Gauss.

A construção feita acima esta de acordo com a teoria proposta por Gauss, e discutida por [13], no artigo acima citado. Qualquer complementação a respeito do assunto pode ser feita a partir da leitura do texto em questão.

5.4 O pentágono e o decágono

A idéia inicial que temos é construir o pentágono e a partir dele, por bissecção de ângulos, contruir o decágono. No entanto, o que faremos é exatamente o oposto disso. É a partir da construção do decágono, que construíremos o pentágono. Ambas as construções estão presentes em [13].

Passemos a construção do decágono:

Nele, o ângulo central deve medir 36^o, pois

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} = \frac{2.180^o}{10} = \frac{360^o}{10} = 36^o.$$

De que forma podemos determinar um ângulo com essa medida, usando apenas régua e compasso? A figura 5.6 nos ajuda a fazer isso.

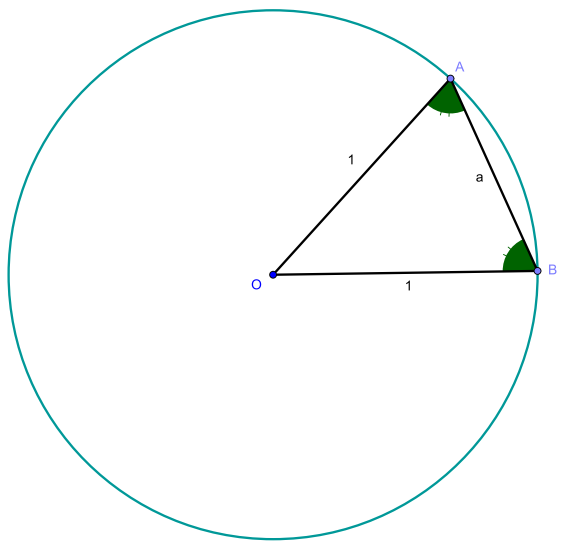


Figura 5.6 Calculando o valor do lado do decágono regular

Nela, suponhamos que $\overline{AB} = a$ seja o lado do decágono que queremos construir, inscrito em uma circunferência de raio unitário. Nessas circunstâncias, o triângulo AOB é isósceles, pois $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$. Como $A\hat{O}B$ mede 36^o, temos que $O\hat{B}A = O\hat{A}B = \beta$ e

$$O\hat{A}B + O\hat{B}A + A\hat{O}B = 180^o \Rightarrow$$

$$2\beta = 180^o - 36^o \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{144^o}{2} \Rightarrow$$

$$\beta = 72^o.$$

Daí, $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 72^o$. Ao bisseccionar então $O\hat{A}B$, encontremos dois ângulos de medida 36^o, conforme mostra a figura 5.7. São eles, $O\hat{A}C$ e $B\hat{A}C$, que também são congruentes ao ângulo $A\hat{O}B$.

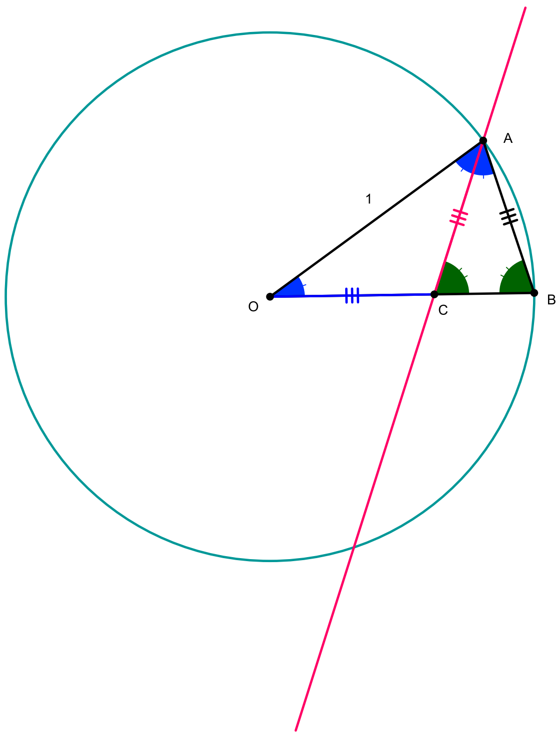


Figura 5.7 Congruências na construção do lado do decágono

Mas aí teremos que $A\hat{C}B \equiv A\hat{B}C = 72^o$, pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

Desses fatos teremos que os triângulos ABC e AOC são ambos isósceles, o que nos mostra que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{OC} = a$. Como $\overline{OB} = 1$, temos que

$$\overline{BC} = \overline{OB} - \overline{OC} = 1 - a.$$

Outra importante conclusão é o fato de que os triângulos ABC e ABO são semelhantes, pois

$$A\hat{O}B \equiv B\hat{A}C,$$

$$O\hat{A}B \equiv A\hat{B}C$$

e

$$O\hat{B}A \equiv A\hat{C}B.$$

Assim, temos que

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a} \Rightarrow$$

$$a^2 = 1 - a \Rightarrow$$

$$a^2 + a - 1 = 0.$$

As soluções para essa equação são os números

$$a_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

e

$$a_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Como a_2 é negativo, não é construtível, do ponto de vista geométrico empregado nesse problema, pois aqui estamos trabalhando com um valor númerico que será aplicado no plano, logo não sendo possível a determinação de um sentido negativo ou positivo, como fizemos na resolução de equações do segundo grau.

Porém o número $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ é perfeitamente construtível, bastando para isso, determinar um segmento cuja medida seja $\sqrt{5}$, subtrair deste, um segmento de uma unidade de medida, e no segmento restante, realizar sua divisão em duas partes iguais. Por fim, basta apenas transportar esse segmento para a circunferência de forma que o mesmo seja posto na posição de uma corda da circunferência em questão, conforme mostra a figura 5.8 a seguir.

Para a construção do pentágono, como seu ângulo interno é o dobro do valor do ângulo interno do decágono, basta apenas unir dois a dois esses ângulos, que encontraremos o ângulo central do pentágono.

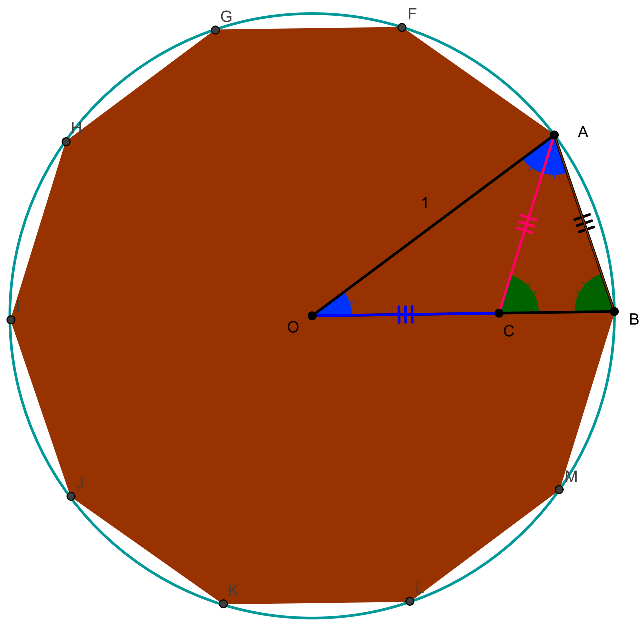


Figura 5.8 O decágono regular

Fazer isso é o mesmo que tomar as cordas formadas por vértices não consecutivos do decágono, de forma que entre eles fiquem sempre um único vértice livre. É o que vemos na figura 5.9.

Assim, os vértices A, M, K, I e G são deixados fora do processo, enquanto que os demais formam o pentágono $BLJHF$.

Pode-se realizar a construção de vários outros polígonos regulares. Aqui, buscamos mostrar a construção dos mais conhecidos, pelo uso e aplicação no cotidiano. Mostramos alguns deles, mas a construção de outros está presente em várias obras da literatura matemática, bem como em sites e periódicos que tratam do assunto.

O importante é poder mostrar, especialmente na sala de aula, que a geometria e a forma de construí-la é interessante, e que se pode fazer e adquirir conhecimento, a partir dessa atitude de construir, discutindo idéias e conceitos e aplicando-os como aqui foi feito.

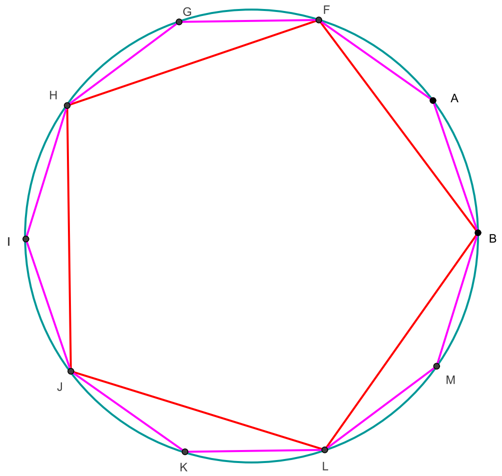


Figura 5.9 construção do pentágono regular

5.5 Reflexão sobre o método de exaustão de Eudoxo

Apenas a título de observação, o método de exautão de Eudoxo é por assim dizer, uma técnica de aproximação de grandezas, pela aplicação das técnicas de construção de polígonos que cada vez mais se aproximam em valor a figura inicialmente desejada. Esse método é atribuido a Eudoxo, mais foi Arquimedes que posteriormente o aprimorou. Tal método não é normalmente discutido de forma direta no ensino, seja este fundamental ou médio, mas, a partir das técnicas aqui discutidas, pode-se tranquilamente tratar do mesmo,de uma forma simplificada, é claro.

Pode-se mostrar ao aluno, de que forma os matemáticos tratavam a questão da aproximação e como eles determinavam de forma bem precisa para sua época, por exemplo, a área de um círculo. A figura 5.10, já nos dá uma idéia da forma como, ao duplicar a quantidade de lados do quadrado, e posteriormente do octógono, cada vez mais nos aproximamos de uma figura semelhante ao círculo. Se realizarmos esse processo uma quantidade infinita de vezes, teremos que a área da figura formada será igual a área do círculo, dado a relação existente entre essa forma de pensar dos gregos, e a nossa atual idéia de limite. No entanto, afirmar que essa idéia estava presente no pensamento grego não é verdade. Eles não trabalhavam com a idéia de soma infinita, que só veio a se desenvolver muito tempo depois. Suas idéias, no entanto contribuíram para esse desenvolvimento.

Nesse caso, sempre teremos o lado do polígono anterior com base dos novos triângulos e a altura dos mesmos, sobre a reta bissetriz dos ângulos, sendo sempre possível calcular o

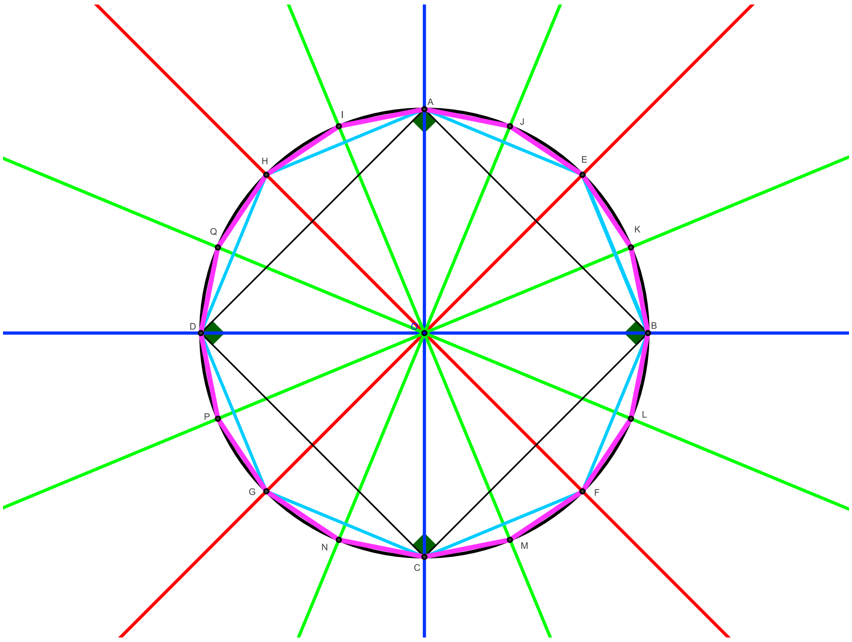


Figura 5.10 Construção do polígono de dezesseis lados

seu valor, pela subtração do valor do raio da circunferência pela altura do triângulo interno, formado, tendo como base, o lado do polígono anterior e o centro da circunferência.

Logo, sempre podemos calcular as áreas desses triângulos e somá-las com a área do polígono inicial, determinando á area do polígono construído.

Essa técnica não apenas mostra como calcular de forma aproximada a área de um círculo, com insere esses novos conceitos de limites, de forma simples e como também trabalha os métodos diversos de determinação de valores de segmentos e áreas de figuras, que tanto deixa de ser vista e absorvida por grande parte do alunado.

Abaixo vemos a figura 5.11, que mostra os três polígonos sem a presença da circunferência, mostrando bem a aproximação da forma dos mesmos com a forma da mesma.

Além de uma aproximação da área de um círculo, o método de exaustão de Eudoxo também pode ser usado na determinação da quadratura da parábola, o que não será demonstrado no presente texto, mas cuja demonstração está presente em vários livros de história da matemática.

Passemos então à construção do heptadecágono.

5.6 Lista de Exercícios e Atividades Extras

1) Construa os polígonos regulares de 32 e 64 lados, a partir do quadrado, conforme a figura abaixo ilustra para o octógono e o polígono de dezesseis lados:

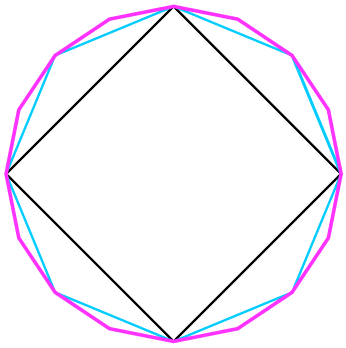
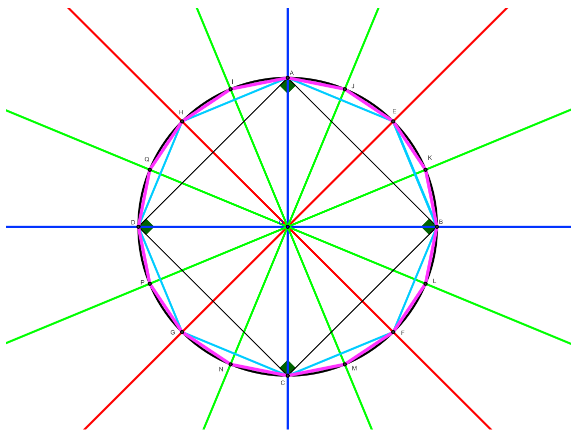
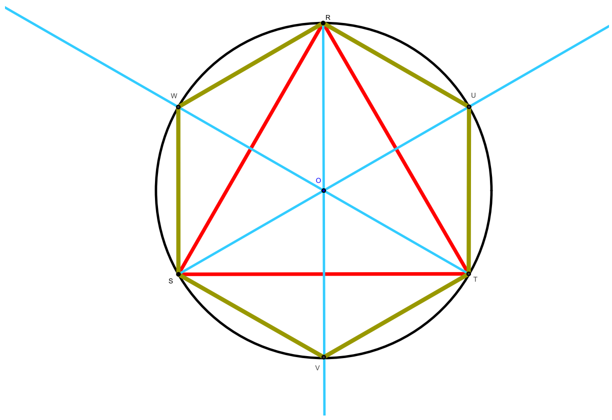


Figura 5.11 Os três polígonos



2) Construa os polígonos de 12 e 24 lados, partindo do triângulo isósceles, conforme a figura abaixo ilustra para o hexágono:


R
W
U
O
S
T
V

Considerações Finais

A busca do conhecimento é algo inerente à personalidade humana, que devido a sua curiosidade em conhecer o mundo e o que nele ocorre, está sempre desenvolvendo técnicas de leitura, interpretação e intervenção nesse mundo que o cerca.

Porém, nem todos não nascem com essa aptidão desenvolvida. Poucos são aqueles dotados de capacidade especial, com um talento nato para o desenvolver ou realizar uma tarefa específica já desde a infância, e que portanto, não necessita de intervenções feitas por outras pessoas.

A maioria das pessoas vai desenvolvendo essa capacidade ao longo da vida, através de seus aprendizados diários, das suas experiências e vivências cotidianas. Nesse processo, é claro, se deparam com outras pessoas que, a partir da interação mútua acabam por trocar conhecimento, e somar um ao outro novas visões da realidade. A comunidade escolar é certamente um ambiente que pode e deve propiciar esse espaço de vivência e de desenvolvimento dessas competências e habilidades, pois é lá que os estudantes passam boa parte de seu tempo e se relacionam com as pessoas de personalidades e modelos de vida mais variados, em termos de qualidade de vida, religiosidade e forma de pensar, dentre outras características.

É nesse contexto que o professor desempenha seu papel primordial, tanto no ensino dos conteúdos específicos do currículo, com também na reflexão sobre as atitudes e formas de posicionamento adotadas por seus alunos, em relação ao aprendizado, à relação com as pessoas e à interação com o ambiente.

Não buscamos durante o desenvolvimento desse trabalho tratar desse aspecto mais humano da função do professor, apesar de sabermos ser este papel de essencial importância para o trabalho docente. Buscamos tratar do aspecto do docente, referente ao ensino da matemática, com fins em si própria e é claro, no ensino e no aprendizado obtido com a aplicação do que aqui foi tratado, em sala de aula.

O aspecto essencial do trabalho foi a discussão em torno do uso e importância dos intrumentos régua e compasso como ferramentas de desenvolvimento da matemática, tanto no aspecto teórico, quando essas ferramentas foram utilizadas na resolução de problemas matemáticos clássicos e na demonstração de teoremas, quanto no aspecto prático de sua utilização como ferramentas de ensino dessa ciência.

Vimos que muito do que aprendemos tanto em álgebra, quanto em geometria, pode ser novamente visto com um olhar especial, a partir da aplicação de técnicas que usam os instrumentos anteriormente citados. Isso não é uma novidade, dado que sabemos ser a matemática extremamente ampla, tanto em conhecimentos que detém, quanto em caminhos diferentes para chegar a esse conhecimento. Assim, o que foi tratado nesse trabalho, tem muito mais por objetivo, rediscutir a prática docente em sala de aula do professor de matemática, do que propriamente inovar em termos de conhecimento matemático.

Falta ao professor ter uma visão diferenciada de suas possibilidades de trabalho, enquanto formador de opinião e transmissor de conhecimento. Buscar novas ferramentas de intervenção é sempre algo que deve ser trabalhado, para que a aula seja sempre uma alternativa diferenciada e empolgante para todos aqueles que dela participam.

As discussões geradas em torno das contruções geométricas de certos conceitos matemáticos, a reflexão da importância histórica do usos dos intrumentos euclidianos, a resolução de problemas algébricos e geométricos a partir da utilização desses mesmos instrumentos foram alguns dos tópicos de mais relevância e aos quais foi dada maior atenção. Também foram propostas uma série de atividades cujo intuito é a plicação dos conhecimentos aqui expostos, no ambiente escolar, nas aulas de matemática.

É claro que nesse contexto, o ideal é a apresentação de uma proposta de intervenção mais voltada para uma sequência didática, mas esse não foi o objetivo, devido, tanto a amplitude de possibilidades de uso das técnicas, quanto ao fato de que cada realidade escolar apresenta a sua característica peculiar de público, sendo portanto, cada escola, cada sala de aula única, e portanto, merecedora de dedicação particular.

Buscamos então mostrar, com uma visão própria, os principais aspectos do tema tratado, seus usos, seus pontos principais e onde utilizá-los.

Torcemos então para que as reflexões aqui propostas sejam frutíferas, de alguma forma, para todos aqueles que se interessem pela leitura do texto aqui proposto, e mais que isso, que a partir do uso total ou parcial das idéias desenvolvidas aqui e em outros textos que tratem do mesmo ou de outros assuntos matemáticos, possamos contribuir de alguma maneira para um melhoramento das técnicas e do aprendizado e ensino da mátematica em nosso país.

APÊNDICE A

Números Construtíveis, Algébricos e Transcendentes

Durante o seu processo de aprendizagem e desenvolvimento intelectual, o estudante de matemática se depara sempre, e é levado, mesmo sem querer, a uma intensa e rápida familiarização com os conceitos e as propriedades dos conjuntos numéricos. Nada mais natural, dado serem esses conjuntos os mais relevantes, quando se estuda matemática.

Logo ele aprende a distiguir, diferenciar e associar esses conjuntos, de maneira a criar relações entre os mesmos e identificar quando essas relações não são possíveis, ou são possíveis, apenas parcialmente. Nesse ponto, o estudante consegue determinar quando um elemento pertence ou não a um dado conjunto, ou quando conjuntos específicos estão contidos em outros conjuntos numéricos.

Essa familiarização começa a ser trabalhada desde os primeiros anos de estudo, quando se conhece os números naturais. Posteriormente, trabalha-se a noção de números inteiros e racionais. Com esses conceitos formados, amplia-se o conhecimento dos conjuntos numéricos, a partir da inserção da idéia de números irracionais, completando o conjunto dos números reais. Por fim, nos últimos anos do ensino médio, o estudante é levado a conhecer o conjunto dos números complexos e suas propriedades.

É claro que os conjuntos numéricos não se restringem só a esses conjuntos, mas esses já abrangem uma quantidade numérica suficiente para a discussão de uma grande variedade de teorias matemáticas importantes. Nossa discussão, portanto fica restrita a eles, em especial até o conjunto dos números reais.

O que queremos tratar especificamente nesse momento, é o fato de que a rigidez apresentada até aqui, e que também é tratada dessa forma no ensino médio, quanto a distinção entre esses conjuntos, não é tão real assim. Na verdade, existem outras subdivisões interessantes no conjunto dos numéricos, que nem sempre é discutida, nem mesmo em cursos de graduação em matemática.

É o caso dos números algébricos, transcendentes e construtíveis.

Assim, uma organização mais adequada, levando em conta os conceitos relacionados a esses números é a seguinte:

$$\text{Naturais} \subset \text{Inteiros} \subset \text{Racionais} \subset \text{Construtíveis} \subset \text{Algébricos}$$

Fora esses, ainda existem os números que são classificados como transcendentes.

Essa diferenciação qualifica de melhor forma os números e expressa importantes propriedades dos mesmos. Passemos então a definição formal de cada um desses subconjuntos numéricos, refletindo sobre algumas de suas características.

A.1 Números algébricos e transcendentes

Como foi visto na diagramação feita acima, os números ditos algébricos englobam uma fatia extremamente grande dos conjuntos números, ficando fora desse conjunto, apenas aqueles que são ditos números transcendentes.

Mas o que vem a ser um número algébrico? Sua definição é a seguinte:

Um número é dito algébrico se é solução de uma equação do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ e todos os coeficientes a_k, com $k = 1, 2, ..., n$ são inteiros.
Todos os números que não são algébricos, segundo esse conceito, são transcendentes.

Como foi dito acima, todo número natural, inteiro ou racional é algébrico. Os números naturais e inteiros são sempre soluções da equação $x - n = 0$ e os racionais, da equação $qx - p = 0$.

Mas o que dizer dos irracionais e complexos? Eles são algébricos ou transcendentes?

A resposta é que há números irracionais e complexos em ambos os conjuntos. Vejamos alguns.

A título de exemplificação, temos que o número irracional $\sqrt{3}$ é algébrico, pois é uma das soluções da equação algébrica de coeficientes inteiros $x^2 - 3 = 0$. Generalizando esse fato, todos os números da forma $\sqrt{n}$ também são algébricos, já que todos eles são soluções da equação $x^2 - n = 0$. Mas há também números irracionais que não são algébricos, com π e e. π é solução da equação $x - \pi = 0$, cujos coeficientes não são todos inteiros. Muitos números complexos também são algébricos, como por exemplo os números $\pm 2i$, que são soluções da equação $x^2 + 4 = 0$. Já os números complexos $\pm \pi i$ são complexos e transcendentes, pois são soluções da equação $x^2 + \pi^2 = 0$.

A demonstração da existência de números não algébricos, a qual omitiremos, foi feita por Cantor, ao provar que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Mas como sabemos, o conjunto dos números reais é não-enumerável, o que indica a existência de outros números, além dos algébricos no conjunto dos reais. Esses são então números transcendentes, presentes no conjunto dos números reais. Há também os números transcendentes complexos.

A.2 Os números construtíveis

Já um número é dito construtível se podemos representá-lo através de um segmento de reta construído a partir da interação de retas e retas, retas e circunferências, e entre circunferências, feitas a partir do uso apenas de régua e compasso.

Todos os números construtíveis são algébricos, porém, nem todo número algébrico é construtível. Como exemplo, podemos citar o número $\sqrt[3]{2}$, que é algébrico, pois é solução da equação $x^3 - 2 = 0$, mas não é construtível. É justamente a não construtibilidade desse número que impediu a duplicação do cubo.

Qual é então a propriedade que diferencia os números algébricos construtíveis dos que não o são? Há alguma forma de generalizá-los?

A resposta a esse problema é sim. O teorema a seguir nos dá a correta direção nesse sentido.

Um número real α é construtível se, e somente se, α é algébrico sobre Q e o seu grau é uma potência de 2.

O grau de um número é o grau do polinômio irredutível do qual ele é solução.

A demonstração do teorema em si será omitida, pois envolve teorias relacionadas a extensão de corpos, entre outros conceitos. Faremos apenas uma explanação sobre seu significado.

Ser algébrico sobre Q significa ser solução de uma equação algébrica, cujos coeficientes estão todos contidos no corpo dos números inteiros e ter grau igual a uma potência de 2 implica que a equação algébrica da qual o número é solução, tem grau máximo na forma 2^k, com $k = 1,2,3,...$

Assim, o número $\sqrt[4]{3+\sqrt{2}}$ é construtível, pois é algébrico sobre Q e tem como grau, uma potência de 2, a saber, $8 = 2^3$.

Tomemos $\alpha = \sqrt[4]{3+\sqrt{2}}$. Assim,

$$\alpha = \sqrt[4]{3+\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\alpha^4 = (\sqrt[4]{3+\sqrt{2}})^4 \Rightarrow$$

$$\alpha^4 = 3+\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$(\alpha^4 - 3)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^8 - 6\alpha^4 + 7 = 0.$$

Na equação, todos os coeficientes pertencem ao corpo dos números racionais e o grau dela é uma potência de 2.

Já $\alpha = \sqrt[3]{2}$, apesar de ser algébrico em Q, tem grau, $3 \neq 2^k$, não sendo portanto construtível.

A.3 Os números surdos

Alguns textos nos dizem que um número é construtível, se é um número *surdo*, ou seja, da forma

$$n = p + q\sqrt{a},$$

onde p e q são racionais.

Já vimos que números naturais e inteiros são sempre construtíveis, dado que são múltiplos da unidade, e são determinados por uma sequência de somas da mesma. No caso dos números inteiros, é necessário a determinação de uma origem, um sentido positivo e negativo.

Já os números racionais também são construtíveis, dado que se $n = \frac{p}{q}$, então n é solução da equação $qx - p = 0$. Logo, todos os números racionais são construtíveis. Mas não propriamente porque é solução da equação descrita acima, e sim por sempre ser possível dividir um segmento de medida p em q partes iguais.

São também construtíveis os números da forma $\sqrt{n}$, conforme demonstramos. Logo os números *surdos* são construtíveis, pois são formados a partir dos números construtíveis dados acima.

É possível provar que se um número é construtível, então ele assume essa forma, partindo para isso da associação das equações de circunferências e retas.

Se dois pontos do espaço tem coordenadas racionais, então a equação da reta que passa por eles também terá apenas coordenadas reais.

Dado $A = (a_1, b_1)$ e $B = (a_2, B_2)$, temos que a equação da reta que passa por eles é

$$(b_1 - a_1)x + (a_2 - a_1)y + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

Tomando $\alpha = (b_1 - b_2)$, $\beta = (a_2 - a_1)$ e $\gamma = (a_2b_1 - a_1b_2)$, teremos a equação $\alpha x + \beta y - \gamma = 0$, cujos coeficientes são racionais. Se tomarmos a equação com coeficientes racionais, dada por $\bar{\alpha}x + \bar{\beta}y - \bar{\gamma} = 0$, suas intersecções em termos de coordenadas são:

$$x = \frac{\gamma\bar{\beta} - \beta\bar{\gamma}}{\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha}}$$

e

$$y = \frac{\alpha\bar{\gamma} - \gamma\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha}}.$$

Como nesse caso, α, β, γ, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$ são todos racionais, temos que x e y dados acima se enquadram como coordenadas na forma de um número surdo.

Para o caso de intersecções entre retas e circunferências ou entre duas circunferências, a demonstração é semelhante.

APÊNDICE B

Máquinas usadas na resolução dos problemas clássicos gregos

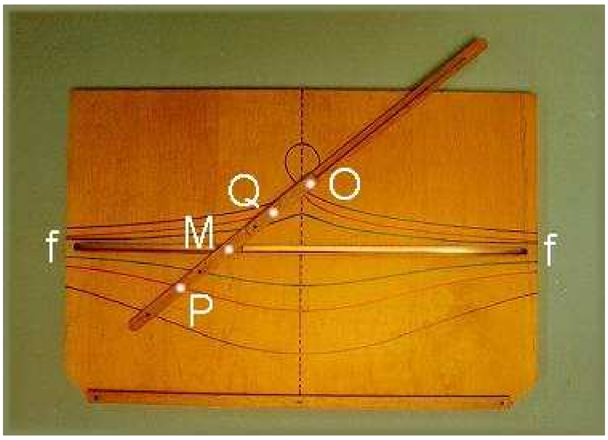


Figura B.1 A conchóide de Nicomedes (Disponível em http://www.museo.unimo.it/labmat/)

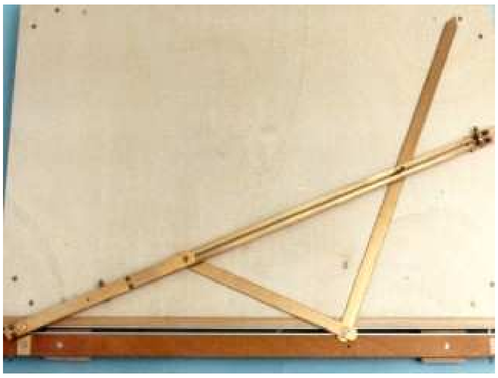


Figura B.2 Trissector de Pascal (Disponível em http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/)

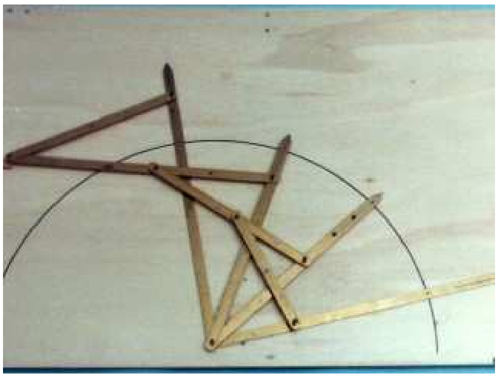


Figura B.3 Trissector de Kempe (Disponível em http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/)

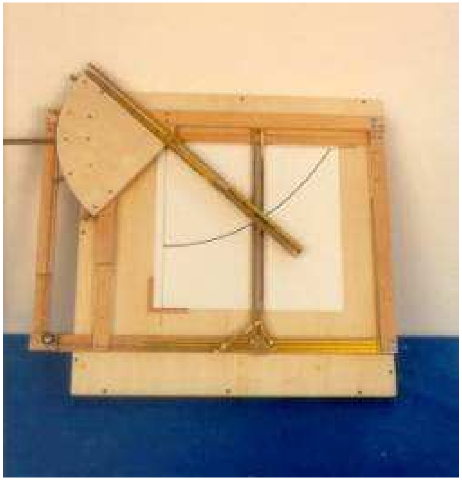


Figura B.4 Quadratriz de Dinostrato (Disponível em http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/)

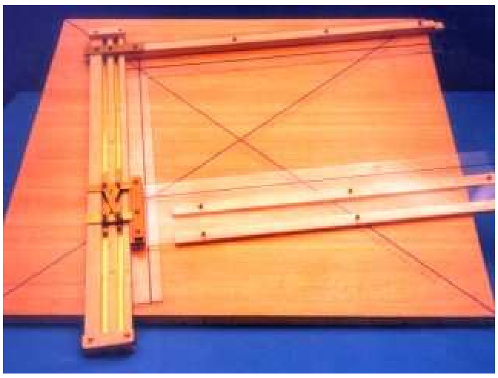


Figura B.5 A máquina de Platão (Disponível em http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/)

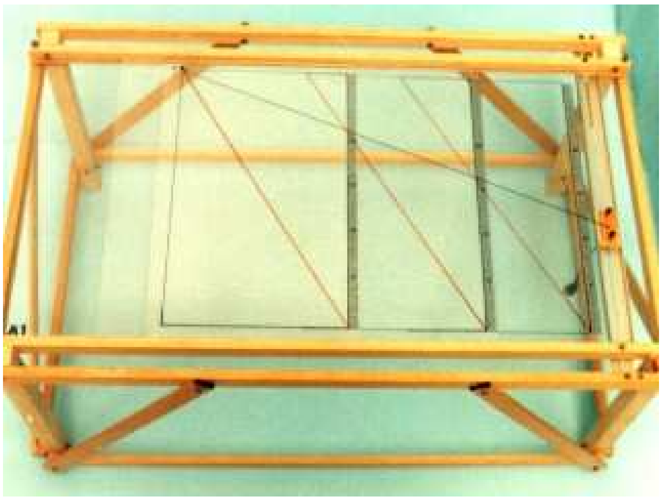


Figura B.6 Mesolábio de Erastótenes (Disponível em http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/)

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclideana Plana.* Coleção do Professor de Matemática, 10.ª edição Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2006.

[2] BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática;*tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, SP: Editora Edgard Blücher, 1993.

[3] BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática;*tradução de Elza F. Gomide.2.ª Edição. São Paulo, SP: Editora Edgard Blücher, 1996.

[4] CARVALHO, João Pitombeira de. *Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega*. Departamento de Matemática PUC-Rio, Rio de Janeiro,Rj.

[5] COURANT, Richard; Herbert Robbins. *O que é Matemática? Uma Abordagem Elementar de Métodos e Conceitos;* tradução Adalberto da silva Brito. Rio de Janeiro, RJ: Editora Ciência Moderna, 2000.

[6] EUCLIDES. *Os Elementos;* tradução e introdução de Ireneu Bicudo. São Paulo, SP: Editora UNESP, 2009.

[7] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas,SP: Editora Unicamp, 2004.

[8] FIGUEIREDO, Djairo guedes de. *Números Irracionais e Trancendentes.* 3.ª edição. Rio de Janeiro,RJ: SBM, 2011.

[9] HEFEZ, Abramo; Maria Lúcia Torres Villela. *Polinômios e Equações Algébricas.* Coleção PROFMAT, 1.ª edição. Rio de Janeiro,RJ: SBM, 2012.

[10] IFRAH, Georges. *Os Números: a História de uma Grande Invenção.* 11.ª edição. São Paulo,SP: Editora Globo, 2005.

[11] IFRAH, Georges. *História Universal dos Algarismos. Volume 1: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.*; tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky.Rio de Janeiro,RJ: Editora Nova Fronteira,1997.

[12] MAOR, Eli. *e: a História de um número.* 4.ª edição. Rio de Janeiro,RJ: Editora Record, 2008.

[13] PEDROSO, Hermes Antônio; Juliana Conceição Precioso. *O Problema da Construção de Polígonos Regulares de Euclides a Gauss.* FAMAT em Revista, UNESP-IBULCE-Departamento de matemática - Campus São José do Rio Preto, São José do Rio Preto, SP, Vol. 13, NO.6, p. 101-115, Dezembro, 2009.

[14] SÁNCHEZ, José Luiz (Direção brasileira). *Dicionário Universal de Biografias;*tradução de Edilaine de Aguiar; et al. São Paulo, SP: Editora Oceano.

[15] SUZUKI, Jeff. *A Brief History of Impossibility.* Mathematics Magazine, New York, NY, Vol. 81, NO.1, p. 27-38, Fevereiro, 2008.

[16] VARHIDY, Charles Georges Josefh Louis. *Desenho Geométrico: Uma Ponte entre a Álgebra e a Geometria. Resolução de Equações pelo Processo Euclideano.*Ouro Preto, MG, 2010. 103 fls. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - UFOP, 2010.